

Ściśliwa magnetyczna warstwa graniczna jako prosty model Tachokliny we wnętrzu Słońca

Krzysztof Mizerski,

Univ. Leeds, School of Maths, Woodhouse Lane, Leeds, UK

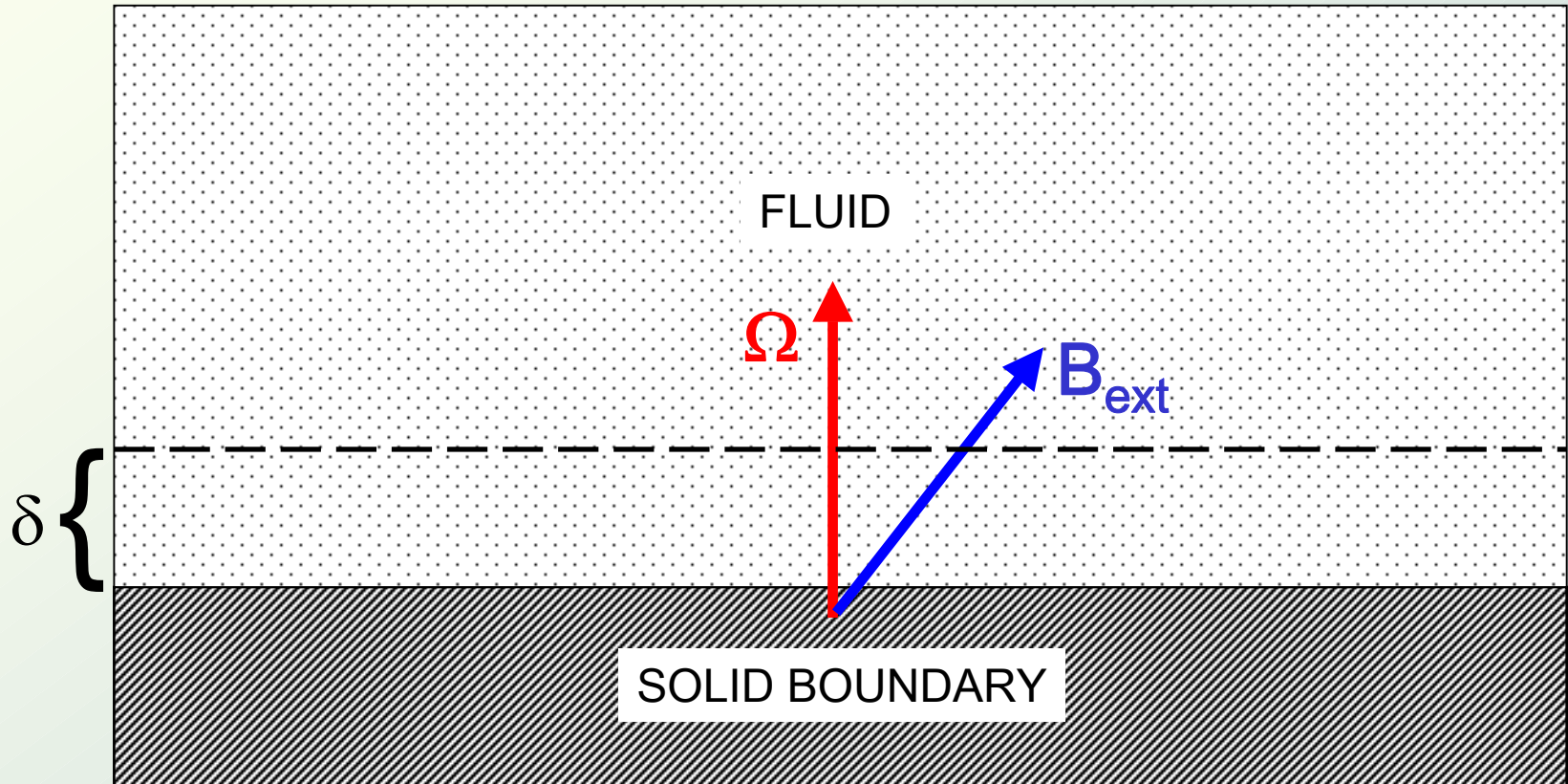
przy współpracy z: Davidem Hughes



Streszczenie

1. Wstęp i matematyczne sformułowanie problemu
2. Przejrzysty matematycznie przykład wpływu ściśliwości na wypływ masy z (wpływ masy do) warstwy
 - efekt ciśnienia magnetycznego w warstwie Hartmanna
 - jednoczesne występowanie ssania Ekmana i Pompowania ciśnienia magnetycznego (*Magnetic Pressure Pumping* effect (MPP)) w mieszanej warstwie Ekmana-Hartmanna.
 - wpływ poziomego pola magnetycznego
 - Wpływ ścinania
3. Możliwe zastosowania do obiektów astrofizycznych
 - Problemy z bezpośrednim przełożeniem wyników na Tachoklinę w Słońcu.
4. Podsumowanie

Układ



Równania

Siła Coriolisa

$$Re \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \frac{M^2}{Rm} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \tau^{1/2} \rho \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u} - G \rho \hat{\mathbf{e}}_z + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}),$$

Siła Lorentza

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{Rm} \nabla^2 \mathbf{B},$$

Człon lepki

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

where

$$M = \frac{B_s L}{\sqrt{\mu_0 \mu \eta}}, \quad \tau = \frac{4 \rho_s^2 \Omega^2 L^4}{\mu^2}, \quad Re = \frac{\rho_s U L}{\mu}, \quad Rm = \frac{U L}{\eta}$$

- Równanie Naviera – Stokesa (bilans pędu),
- Równanie indukcji (prawa Maxwella, prawo Ohma $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$),
- Prawo zachowania masy oraz prawo Gaussa.

1. Warstwa graniczna \ll słaba dyssypacja
2. Warstwa Hartmanna $\ll MR \gg 1$
3. Warstwa Ekmana $\ll \tau \gg 1$
4. Warstwa Ekmana-Hartmanna $\ll MR \sim \tau^{1/2} \gg 1$

Parametry

$$M = \frac{B_s L}{\sqrt{\mu_0 \mu \eta}}, \quad \tau = \frac{4 \rho_s^2 \Omega^2 L^4}{\mu^2}, \quad Re = \frac{\rho_s U L}{\mu}, \quad Rm = \frac{U L}{\eta}$$

$$G = \frac{\rho_s g L^2}{\mu U}$$

Skale:

L, U, B_s and ρ_s

Skala ciśnienia $\mu U / L$

Skala pola magnetycznego B_{0z}

Zewnętrzne pole B:

$$\mathbf{B} = \mathfrak{B} \hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{b},$$

$$\mathfrak{B} = B_{0x} / B_{0z}$$

Izotermiczne równanie stanu

gazu doskonałego:

$$p = \alpha \rho,$$

$$\alpha = \frac{k_B \rho_s L T}{m_A \mu U},$$

Warunki brzegowe:

$$\mathbf{u}|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{b}_H|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial b_z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0,$$

Równania przepływu głównego

Zakładając:

$$\tau^{1/2} \sim M^2; \quad Re \sim M; \quad Rm \sim 1; \quad \alpha \sim M; \quad G \sim M.$$

i wprowadzając zmienną warstwy granicznej:

$$\xi = \frac{z}{\delta},$$

przybliżone rozwiązania można wyrazić w postaci szeregu perturbacyjnego:

$$\mathbf{u} \approx \sum_{n \geq 0} \epsilon^n [\mathbf{u}_n^M(x, y, z) + \mathbf{u}_n^B(x, y, \xi) - \mathbf{u}_n^{match}(x, y)],$$

$$\mathbf{b} \approx \sum_{n \geq 0} \epsilon^n [\mathbf{b}_n^M(x, y, z) + \mathbf{b}_n^B(x, y, \xi) - \mathbf{b}_n^{match}(x, y)],$$

$$\rho \approx \sum_{n \geq 0} \epsilon^n [\rho_n^M(x, y, z) + \rho_n^B(x, y, \xi) - \rho_n^{match}(x, y)],$$

$$p \approx \sum_{n \geq -1} \epsilon^n [p_n^M(x, y, z) + p_n^B(x, y, \xi) - p_n^{match}(x, y)],$$

$$\epsilon = O(M^{-1}), \quad \delta = O(M^{-1}).$$

warunki zszycia:

$$\mathbf{u}^B(\xi \rightarrow \infty) = \mathbf{u}^M(z \rightarrow 0) = \mathbf{u}^{match}(x, y)$$

$$\mathbf{u}^B|_{\xi=0} = 0, \quad \mathbf{b}_H^B|_{\xi=0} = 0 \text{ and } \partial_\xi b_z^B|_{\xi=0} = 0$$

Równania w przepływie głównym

$$0 = \frac{M^2}{Rm} (\nabla \times \mathbf{b}_0^M) \times (\mathfrak{B} \hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{b}_0^M) - \tau^{1/2} \rho_0^M \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_0^M,$$

$$\mathbf{u}_0^M \cdot \nabla \mathbf{b}_0^M = \mathfrak{B} \partial_x \mathbf{u}_0^M + \partial_z \mathbf{u}_0^M + \mathbf{b}_0^M \cdot \nabla \mathbf{u}_0^M - (\mathfrak{B} \hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{b}_0^M) (\nabla \cdot \mathbf{u}_0^M) + \frac{1}{Rm} \nabla^2 \mathbf{b}_0^M,$$

$$\nabla \cdot (\rho_0^M \mathbf{u}_0^M) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b}_0^M = 0;$$

Nieliniowe równania warstwy granicznej

$$b_{0x}^B = 0, \quad b_{0y}^B = 0, \quad b_{0z}^B = 0, \quad u_{0z}^B = 0,$$



$$\frac{\epsilon}{\delta} \partial_\xi (\rho_0^B u_{1z}^B - \varrho W) = -\partial_x (\rho_0^B u_{0x}^B - \varrho V_x) - \partial_y (\rho_0^B u_{0y}^B - \varrho V_y),$$

$$Rm \partial_\xi \mathbf{u}_0^B + \frac{\epsilon}{\delta} \partial_\xi^2 \mathbf{b}_1^B = 0,$$

$$-\frac{\tau^{1/2}}{M^2} \varrho \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{V} = -\frac{\tau^{1/2}}{M^2} \rho_0^B \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_0^B + \frac{\epsilon}{Rm \delta} \partial_\xi \mathbf{b}_1^B + \frac{1}{\delta^2 M^2} \partial_\xi^2 \mathbf{u}_0^B,$$

$$\partial_\xi p_{-1}^B = -\frac{\epsilon^2 M^2}{Rm} \mathfrak{B} \partial_\xi b_{1x}^B,$$

$$p_{-1}^{M,B} = \epsilon \alpha \rho_0^{M,B},$$

$$\varrho \equiv \rho_0^M (z = 0),$$

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{u}_0^M (z = 0)$$

$$W = u_{1z}^M (z = 0)$$

POMPOWANIE

Magnetic Pressure Pumping (MPP) w warstwie Hartmanna

Założmy: $\tau=0$ wtedy $\delta=\varepsilon=M^{-1}$

Wprowadzając skok gęstości na obszarze warstwy granicznej:

$$\Delta\rho \equiv \rho - \rho(z=0) = -\frac{M^2\delta}{\alpha} \mathfrak{B}V_x,$$

otrzymujemy następujące ogólne wyrażenie na pompowanie warstwy granicznej:

$$W = -\frac{1}{2\varrho} \frac{M}{\alpha} \mathfrak{B} (\mathbf{V} \cdot \nabla V_x + V_x \nabla_H \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{\varrho} \nabla_H \cdot (\varrho \mathbf{V}) = \frac{1}{2\varrho} \frac{\Delta\rho}{V_x} (\mathbf{V} \cdot \nabla V_x + V_x \nabla_H \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{\varrho} \nabla_H \cdot (\varrho \mathbf{V}).$$

MPP i BP mogą albo
rywalizować albo
współdziałać

MPP

$$\partial_{\xi} p_{-1}^B = -\frac{\epsilon^2 M^2}{Rm} \mathfrak{B} \partial_{\xi} b_{1x}^B,$$

$$p_{-1}^{M,B} = \epsilon \alpha \rho_0^{M,B},$$

Basic Pumping (BP)

*w ogólności obecne dla
każdego typu warstwy
granicznej*

Rywalizacja pomiędzy MPP i ssaniem Ekamna

Mając:

$$\rho_0^B(x, y, \xi) = \rho - \frac{\epsilon M^2}{\alpha Rm} \mathfrak{B} [b_{1x}^B(x, y, \xi) - b_{1x}^{match}(x, y)].$$

linearyzujemy równanie Naviera-Stokesa zaniedbując:

$$\frac{M^2}{\alpha Rm} \mathfrak{B} [b_{1x}^B - b_{1x}^{match}] \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_0^B$$

co prowadzi do następującego wyrażenia na BLP (nie linearyzujemy pr. zach. masy):

$$W = \underbrace{-\frac{\delta^2 M^2}{\epsilon \alpha (1 + \chi^2)} \frac{\mathfrak{B}}{\rho} \left[\frac{1 - \chi^2}{2(1 + \chi^2)} V_x \nabla_H \cdot \mathbf{V} + \frac{\chi}{1 + \chi^2} V_y \nabla_H \cdot \mathbf{V} + \left(\frac{1 - \chi^2}{1 + \chi^2} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{V} \cdot \nabla V_x + \right.}_{\text{MPP}} + \chi \left(\frac{2}{1 + \chi^2} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{V} \cdot \nabla V_y + \left. \left(\frac{1}{2} \chi \frac{1 - \chi^2}{1 + \chi^2} V_x + \frac{\chi^2}{1 + \chi^2} V_y \right) \omega_{0z}^M \right] +}_{\text{BP}} \underbrace{+ \frac{\delta}{\epsilon} \frac{1}{1 + \chi^2} \nabla_H \cdot \mathbf{V}}_{\text{ES}} + \underbrace{\frac{\delta}{\epsilon} \frac{\chi}{1 + \chi^2} \omega_{0z}^M}_{\text{ES}}$$

gdzie: $\delta = \sqrt{\frac{2}{M^2 + \sqrt{M^4 + \rho^2 \tau}}}$, $\chi = \frac{\sqrt{M^4 + \rho^2 \tau} - M^2}{\rho \tau^{1/2}} = \frac{1}{2} \rho \tau^{1/2} \delta^2$,

oraz ω_{0z}^M jest wirowością przepływu głównego w $z=0$

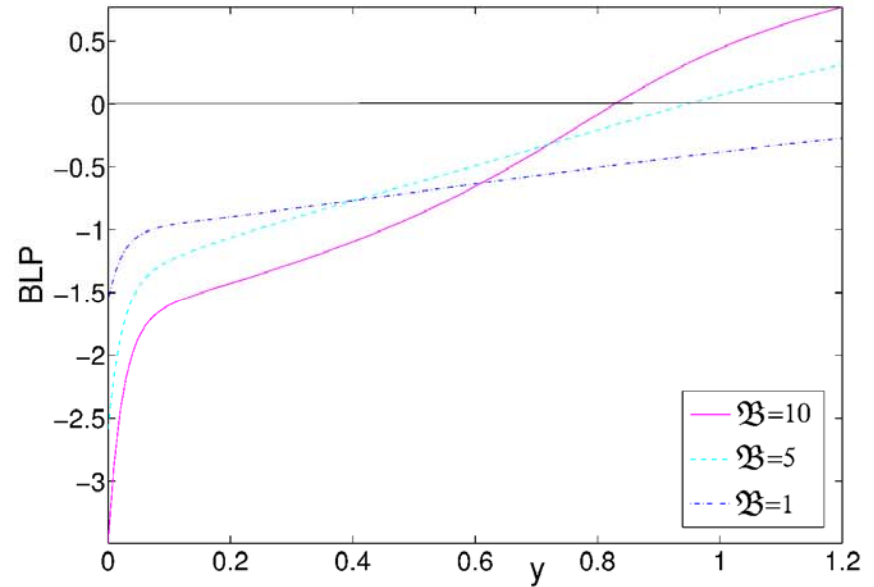
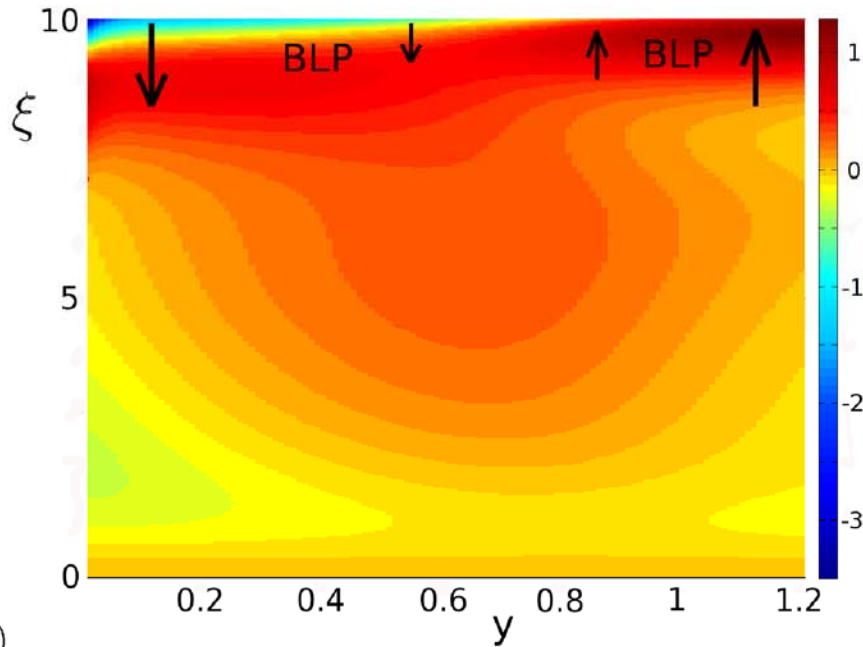
Prosty przykład

$$V_x = \lambda y + \kappa x \quad \text{and} \quad \lambda, x, y \ll 1; \quad \kappa \sim 1$$
$$V_y = -\kappa y$$

Linearyzacja równania Naviera-Stokesa jest zasadna i otrzymujemy rywalizację pomiędzy MPP i ES:

$$W = -\delta M^2 \mathcal{B} \kappa^2 (2\alpha)^{-1} (1 + \chi^2)^{-2} [(1 - 3\chi^2)x + \chi(3 - \chi^2)y] + \lambda \chi (1 + \chi^2)^{-2}$$

Rozwiązanie numeryczne, w pełni nieliniowe



$$\begin{cases} V_x = \lambda y \\ V_y = 1 \\ V_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_{1x}^M|_{z=0} = \kappa(\lambda y + \chi) \\ b_{1y}^M|_{z=0} = \kappa(1 - \chi\lambda y) \\ b_{1z}^M|_{z=0} = \chi\kappa\lambda z + \text{const.} \end{cases} \quad \varrho = \text{const.},$$

$$\omega_{0z}^M = -\lambda$$

• For $M^2 = 10^6$, $\epsilon = \delta$, $\alpha = M = \tau^{1/4}$, and $\varrho = 1$, $\lambda = 0.65$, at $y=1$ we get $W \approx 0.02 \mathfrak{B} - 0.23$, which can be either positive (pumping) or negative (suction) depending on the strength of \mathfrak{B} .

• The dependence on the shear λ is nonlinear, however strong enough shear ($\lambda \geq 3.5$) the pumping is also positive.

Zastosowania

Własności Tachokliny słonecznej:

$$g \approx 5.4 \times 10^2 \text{ m s}^{-2}, \quad \rho_s \approx 210 \text{ kg m}^{-3}, \quad T \approx 2.3 \times 10^6 \text{ K},$$
$$\Omega \approx 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \quad U \approx 10 \text{ m s}^{-1}, \quad L \approx 2.1 \times 10^8 \text{ m},$$
$$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho_s} \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \quad \eta \approx 4.1 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \quad B_s \approx 10^4 \text{ G}.$$

$$M \approx 10^{12}, \quad \tau^{1/2} \approx 10^{14}, \quad Re \approx 10^{12}, \quad Rm \approx 10^{11}, \quad G \approx 10^{20}, \quad \alpha \approx 10^{20}.$$

Zatem dokonując następującego skalowania:

$$\tau^{1/2} \sim M; \quad Re \sim M; \quad Rm \sim M; \quad \alpha \sim M^2; \quad G \sim M^2.$$

otrzymujemy:

$$Re\rho_0^M (\mathbf{u}_0^M \cdot \nabla) \mathbf{u}_0^M = -\nabla p_{-1}^M + \frac{M^2}{Rm} (\nabla \times \mathbf{b}_0^M) \times (\mathfrak{B}\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{b}_0^M) - \tau^{1/2} \rho_0^M \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_0^M +$$
$$-\epsilon G \rho_1^M \hat{\mathbf{e}}_z = 0,$$

$$\partial_\xi p_{-2}^B = 0, \quad \partial_\xi p_{-1}^B = -\frac{\epsilon M^2}{Rm} \mathfrak{B} \partial_\xi b_{0x}^B - \epsilon \delta G (\rho_0^B - \varrho),$$

$$p_{-2}^B = \epsilon^2 \alpha \rho_0^B, \quad p_{-1}^B = \epsilon^2 \alpha \rho_1^B,$$

plasma $\beta = p_g / p_m$ jest bardzo duża więc MPP pojawia się w wyższych rzędach

Podsumowanie

- I. Jeśli pole magnetyczne jest dostatecznie silne, ciśnienie magnetyczne może silnie zmodyfikować rozkład gęstości płynu (poprzez równanie stanu) w warstwie granicznej i na skutek prawa zachowania masy spowodować wypływ masy z/wpływ masy do warstwy granicznej.
- II. MPP może albo rywalizować albo współdziałać z innymi efektami takimi jak np. ssanie Ekmana w układach rotujących. Ten fakt może mieć znaczenie dla dynamiki wnętrza gwiazdowych.
- III. Ponieważ pompowanie jest proporcjonalne do grubości warstwy granicznej, jego amplituda zależy od jej charakteru ($\delta \sim M^{-1}$ dla warstwy Hartmanna; $\delta \sim M^{-2/3}$ dla osobliwej warstwy Hartmanna; $\delta \sim M^{-1/2}$ jeśli B jest wszędzie równoległe do brzegu).
- IV. W przypadku Tachokliny słonecznej plasma β jest najprawdopodobniej zbyt duża, by MPP grało istotną rolę w dynamice. Jednak prosta modyfikacja skalowania zaproponowanego dla MT prowadzi do silnego MPP:

- $\alpha \sim M$ and $G \sim M$, or

- $\tau^{1/2} \sim M^2$, $Re \sim M$, $Rm \sim M$, $\alpha \sim M^2$, $\mathfrak{B} \sim M$,