O pewnych własnościach płynów mikropolarnych

Piotr Szopa

27.01.10 IPPT PAN

Plan referatu

1. Płyny klasyczne i mikropolarne

Plan referatu

1. Płyny klasyczne i mikropolarne
2. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań

Plan referatu

1. Płyny klasyczne i mikropolarne
2. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań
3. Skończenie wymiarowy opis przepływu

Plan referatu

1. Płyny klasyczne i mikropolarne
2. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań
3. Skończenie wymiarowy opis przepływu
    - Atraktor globalny: istnienie i wymiar

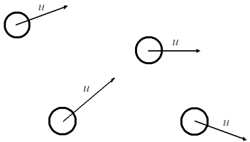
Plan referatu

1. Płyny klasyczne i mikropolarne
2. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań
3. Skończenie wymiarowy opis przepływu
    - Atraktor globalny: istnienie i wymiar
    - Harmoniki determinujące

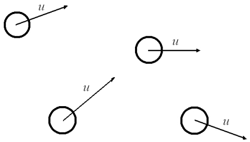
Plan referatu

1. Płyny klasyczne i mikropolarne
2. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań
3. Skończenie wymiarowy opis przepływu
    - Atraktor globalny: istnienie i wymiar
    - Harmoniki determinujące
    - Węzły determinujące

Płyny klasyczne

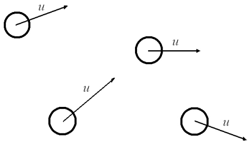


Płyny klasyczne



- nie opisuje płynów z mikrostrukturą

Płyny klasyczne



- nie opisuje płynów z mikrostrukturą
- wszystkie momenty pochodzą od sił zewnętrznych

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0$$

$$T_{ij} = (-p + \lambda u_{k,k})\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

$$T_{ij} = (-p + \lambda u_{k,k})\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\frac{D}{Dt} g(x,t) = \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) + u(x,t) \cdot \nabla g(x,t)$$

Równania Naviera-Stokesa

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f$$
$$\operatorname{div} u = 0$$

Równania Naviera-Stokesa

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f$$
$$\operatorname{div} u = 0$$

gdzie:

- u - pole prędkości płynu, p - ciśnienie, f - siły zewnętrzne

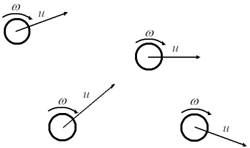
Równania Naviera-Stokesa

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f$$
$$\operatorname{div} u = 0$$

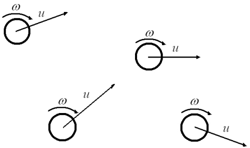
gdzie:

- u - pole prędkości płynu, p - ciśnienie, f - siły zewnętrzne
- ν - lepkość

Płyn mikropolarny

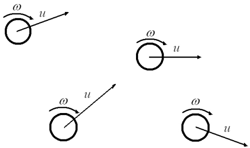


Płyn mikropolarny



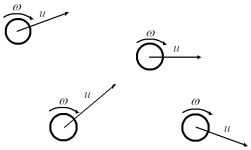
- opisuje płyny z mikrostrukturą

Płyn mikropolarny



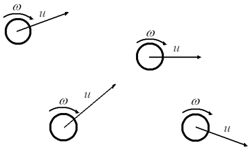
- opisuje płyny z mikrostrukturą
- cząstki zawieszone w lepkim medium

Płyn mikropolarny



- opisuje płyny
  z mikrostrukturą
- cząstki zawieszone w lepkim medium
- cząstki mogą się obracać

Płyn mikropolarny



- opisuje płyny z mikrostrukturą
- cząstki zawieszone w lepkim medium
- cząstki mogą się obracać
- cząstki nie zmieniają kształtu

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$
$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot C + \rho g + T_x$$

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot C + \rho g + T_x$$

$$T_{ij} = (-p + \lambda u_{k,k})\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \mu_r(u_{j,i} - u_{i,j}) - 2\mu_r \varepsilon_{mij}\omega_m$$

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot C + \rho g + T_x$$

$$T_{ij} = (-p + \lambda u_{k,k})\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \mu_r(u_{j,i} - u_{i,j}) - 2\mu_r \varepsilon_{mij}\omega_m$$

$$T_x = (T_{23} - T_{32}, T_{31} - T_{13}, T_{12} - T_{21})$$

Równania ruchu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \nabla \cdot T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot C + \rho g + T_x$$

$$T_{ij} = (-p + \lambda u_{k,k})\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \mu_r(u_{j,i} - u_{i,j}) - 2\mu_r \varepsilon_{mij}\omega_m$$

$$T_x = (T_{23} - T_{32}, T_{31} - T_{13}, T_{12} - T_{21})$$

$$C_{ij} = c_0 \omega_{k,k}\delta_{ij} + c_d(\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) + c_a(\omega_{j,i} - \omega_{i,j})$$

Równania płynu mikropolarnego

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f \\
\operatorname{div} u &= 0 \\
\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega - \beta\nabla \operatorname{div} \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega &= 2\nu_r \operatorname{rot} u + g
\end{aligned}
$$

Równania płynu mikropolarnego

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f \\
\operatorname{div} u &= 0 \\
\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega - \beta\nabla \operatorname{div} \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega &= 2\nu_r \operatorname{rot} u + g
\end{aligned}
$$

gdzie:

- u - pole prędkości płynu, p - ciśnienie, f - siły zewnętrzne

Równania płynu mikropolarnego

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f$$
$$\operatorname{div} u = 0$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega - \beta\nabla \operatorname{div} \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g$$

gdzie:

- u - pole prędkości płynu, p - ciśnienie, f - siły zewnętrzne
- ω - pole prędkości kątowych cząstek (mikrorotacja), g - momenty zewnętrzne

Równania płynu mikropolarnego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f \\
\operatorname{div} u &= 0 \\
\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega - \beta\nabla \operatorname{div} \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega &= 2\nu_r \operatorname{rot} u + g
\end{aligned}$$

gdzie:

- u - pole prędkości płynu, p - ciśnienie, f - siły zewnętrzne
- ω - pole prędkości kątowych cząstek (mikrorotacja), g - momenty zewnętrzne
- ν, ν_r, α, β - współczynniki lepkości

Równania płynu mikropolarnego

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f$$

$$\operatorname{div} u = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega - \beta\nabla \operatorname{div} \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g$$

gdzie:

- u - pole prędkości płynu, p - ciśnienie, f - siły zewnętrzne
- ω - pole prędkości kątowych cząstek (mikrorotacja), g - momenty zewnętrzne
- ν, ν_r, α, β - współczynniki lepkości

Równania płynu mikropolarnego

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p &= 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha \Delta \omega - \beta \nabla \operatorname{div} \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r \omega &= 2\nu_r \operatorname{rot} u + g\end{aligned}$$

gdzie:

- u - pole prędkości płynu, p - ciśnienie, f - siły zewnętrzne
- ω - pole prędkości kątowych cząstek (mikrorotacja), g - momenty zewnętrzne
- ν, ν_r, α, β - współczynniki lepkości
- $\operatorname{rot} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, $\operatorname{rot} \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}, -\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)$

Przestrzenie funkcyjne

$$\dot{H}^m_{per}(Q) = \Big\{ u\colon u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k e^{2i\pi k/L\cdot x},\ \bar{u}_k = u_{-k},$$
$$|u|_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k|^{2m}|u_k|^2 < \infty \Big\},$$

gdzie $u_0 = 0$, $k/L = (k_1/L, k_2/L)$. My będziemy używać głównie $\dot{H}^0_{per} = \dot{L}^2_{per}$ i $\dot{H}^1_{per}$. Przez H będziemy oznaczać podprzestrzeń funkcji bezdywergentnych w $\dot{L}^2_{per}$.

Operatory

Operatory

$A = -\Delta$ z dziedziną $D(A) = \{u \in H, \Delta u \in H\} = \dot{H}^2_{per} \cap H$ - operator Stokesa,
$A_1 = -\Delta$ z dziedziną $D(A_1) = \dot{H}^2_{per} \cap \dot{L}^2_{per}$.

Rzuty Galerkina

Szeregi Fouriera i rzuty Galerkina

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) w_k(x), \qquad \omega(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(t) \rho_k(x),$$

gdzie $w_k(x)$ są funkcjami własnymi operatora Stokesa, a ρ_k operatora A_1.
Rzuty Galerkina P_m (P_m^1) definiujemy jako rzuty prostopadłe z H ($\dot{L}^2_{per}$) na przestrzeń rozpiętą przez m pierwszych wektorów własnych operatora A (A_1) t.j.

$$P_m u(x,t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t) w_k(x), \qquad P_m^1 \omega(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k(t) \rho_k(x).$$

Twierdzenia o istnieniu rozwiązań (1)

Twierdzenie

Niech $(u_0, \omega_0) \in H \times \dot{L}^2_{per}$, $(f, g) \in L^2_{loc}(0, \infty; H \times \dot{L}^2_{per})$. *Wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie równań płynu mikropolarnego*

$$(u, \omega) \in C([0, T]; H \times \dot{L}^2_{per}) \cap L^2(0, T; V \times \dot{H}^1_{per}).$$

Ponadto dla każdego $t > 0$ *przekształcenie* $(u_0, \omega_0) \to (u(t), \omega(t))$ *jest ciągłe jako przekształcenie w* $H \times \dot{L}^2_{per}$.

Twierdzenia o istnieniu rozwiązań (2)

Twierdzenie

Niech $(u_0, \omega_0) \in V \times \dot{H}^1_{per}$, $(f, g) \in L^2_{loc}(0, \infty; H \times \dot{L}^2_{per})$. *Wtedy słabe rozwiązania spełniają dodatkowo*

$$(u, v) \in C([0, T]; V \times \dot{H}^1_{per}) \cap L^2(0, T; D(A) \times D(A_1))$$

Ponadto rozwiązanie zależy w sposób ciągły w topologii $V \times \dot{H}^1_{per}$ *od danych początkowych.*

Gevrey - definicje

Przestrzenie Gerveya

Operatory $e^{\tau A^{1/2}}$ oraz $e^{\tau A_1^{1/2}}$ i ich dziedziny definiujemy następująco:

$$e^{\tau A^{1/2}} u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x + \tau |k|} u_k(t),$$

Gevrey - definicje

Przestrzenie Gerveya

Operatory $e^{\tau A^{1/2}}$ oraz $e^{\tau A_1^{1/2}}$ i ich dziedziny definiujemy następująco:

$$e^{\tau A^{1/2}} u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x + \tau |k|} u_k(t),$$

$$e^{\tau A_1^{1/2}} \omega(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x + \tau |k|} \omega_k(t),$$

Gevrey - definicje

Przestrzenie Gerveya

Operatory $e^{\tau A^{1/2}}$ oraz $e^{\tau A_1^{1/2}}$ i ich dziedziny definiujemy następująco:

$$e^{\tau A^{1/2}} u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x + \tau |k|} u_k(t),$$

$$e^{\tau A_1^{1/2}} \omega(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x + \tau |k|} \omega_k(t),$$

$$D(e^{\tau A^{1/2}}) = \{u \in H \colon e^{\tau A^{1/2}} u \in H\}$$

Gevrey - definicje

Przestrzenie Gerveya

Operatory $e^{\tau A^{1/2}}$ oraz $e^{\tau A_1^{1/2}}$ i ich dziedziny definiujemy następująco:

$$e^{\tau A^{1/2}} u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x + \tau |k|} u_k(t),$$

$$e^{\tau A_1^{1/2}} \omega(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x + \tau |k|} \omega_k(t),$$

$$D(e^{\tau A^{1/2}}) = \{u \in H \colon e^{\tau A^{1/2}} u \in H\}$$

$$D(e^{\tau A_1^{1/2}}) = \{\omega \in \dot{L}^2_{per} \colon e^{\tau A_1^{1/2}} \omega \in \dot{L}^2_{per}\}$$

Gevrey- twierdzenie o istnieniu

Twierdzenie

Niech będzie dane $(u_0, \omega_0) \in V \times \dot{H}^1_{per}$, $(f, g) \in D(e^{\sigma_1 \mathbb{A}^{1/2}})$ *dla pewnego* $\sigma > 0$. *Wtedy istnieje* T^*, *które zależy tylko od danych takie, że zachodzi*

Gevrey- twierdzenie o istnieniu

Twierdzenie

Niech będzie dane $(u_0, \omega_0) \in V \times \dot{H}^1_{per}$, $(f, g) \in D(e^{\sigma_1 \mathbb{A}^{1/2}})$ *dla pewnego* $\sigma > 0$. *Wtedy istnieje* T^*, *które zależy tylko od danych takie, że zachodzi*

(i) *Równania płynu mikropolarnego posiadają jednoznaczne analityczne rozwiązanie (ciągłe z* $[0, T^*]$ *w* $V \times \dot{H}^1_{per}$*) takie, że przekształcenie* $t \longrightarrow e^{\psi(t)\mathbb{A}^{1/2}} \mathbb{A}^{1/2} \overline{u}(t)$ *jest analityczne na* $(0, T^*)$ *o wartościach w* $H \times \dot{L}^2_{per}$, $\psi(t) = \min(t, \sigma_1, T^*)$.

Gevrey- twierdzenie o istnieniu

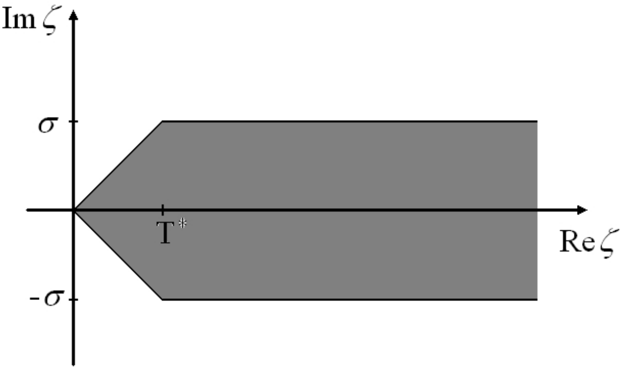
Twierdzenie

Niech będzie dane $(u_0, \omega_0) \in V \times \dot{H}^1_{per}$, $(f, g) \in D(e^{\sigma_1 \mathbb{A}^{1/2}})$ *dla pewnego* $\sigma > 0$. *Wtedy istnieje* T^*, *które zależy tylko od danych takie, że zachodzi*

(i) *Równania płynu mikropolarnego posiadają jednoznaczne analityczne rozwiązanie (ciągłe z* $[0, T^*]$ *w* $V \times \dot{H}^1_{per}$*) takie, że przekształcenie* $t \longrightarrow e^{\psi(t)\mathbb{A}^{1/2}} \mathbb{A}^{1/2} \overline{u}(t)$ *jest analityczne na* $(0, T^*)$ *o wartościach w* $H \times \dot{L}^2_{per}$, $\psi(t) = \min(t, \sigma_1, T^*)$.

(ii) *Rozwiązanie to jest analityczne na* (T^*, ∞) *o wartościach w* $D(\mathbb{A}^{1/2} e^{\sigma \mathbb{A}^{1/2}})$ *dla pewnego* $\sigma > 0$ *i* T^* *jak poprzednio.*

Obszar analityczności



Atraktor globalny

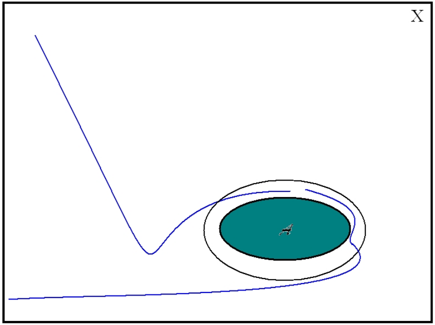
Atraktor globalny

Atraktorem globalnym nazywamy zwarty zbiór niezmienniczy przyciągający zbiory ograniczone.

Atraktor globalny

Atraktor globalny

Atraktorem globalnym nazywamy zwarty zbiór niezmienniczy przyciągający zbiory ograniczone.



Lemat o cieniu

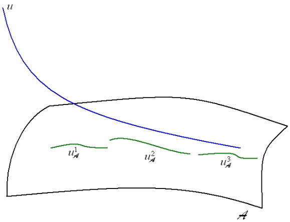
Lemat

Dla dowolnej trajektorii u, $\varepsilon > 0$ i $T > 0$ istnieje trajektoria układu $u_{\mathcal{A}}$ leżąca na atraktorze, która przez okres czasu T jest blisko niej t.j. $|u(t) - u_{\mathcal{A}}(t)| < \epsilon$ dla $t \in (t_0, t_1)$, dla pewnych $t_0, t_1 > 0$ takich, że $t_1 - t_0 = T$.

Lemat o cieniu

Lemat

Dla dowolnej trajektorii u, $\varepsilon > 0$ i $T > 0$ istnieje trajektoria układu $u_{\mathcal{A}}$ leżąca na atraktorze, która przez okres czasu T jest blisko niej t.j. $|u(t) - u_{\mathcal{A}}(t)| < \epsilon$ dla $t \in (t_0, t_1)$, dla pewnych $t_0, t_1 > 0$ takich, że $t_1 - t_0 = T$.



Wymiar fraktalny

Definicja

Niech Y *będzie zbiorem zwartym. Niech* $\varepsilon > 0$, *przez* $n_Y(\varepsilon)$ *oznaczamy minimalną liczbę kul w* X *o promieniu* ε *potrzebnych do pokrycia zbioru* Y. *Wymiar fraktalny zbioru* Y *określamy następująco*

$$d_F(Y) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log n_Y(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Wymiar atraktora

Twierdzenie

Istnieje stała C_0 zależąca tylko od Q, która posiada następującą własność: jeżeli N jest liczbą całkowitą taką, że

$$N - 1 < C_0(k_1^3 k_2)^{-1/2} \left(|f|^2 + |g|^2\right)^{1/2} \leqslant N,$$

gdzie $k_1 = \min\{\nu, \alpha\}$, $k_2 = k_1 \lambda_1$, to wymiary fraktalne zbiorów $\mathcal{A}_{\nu_r}$, $\nu_r \geqslant 0$ są mniejsze lub równe N.

Warunki na siły i momenty

Wielkość sił

Asymptotyczną wielkość sił i momentów mierzoną w normie $H \times \dot{L}^2_{per}$ będziemy oznaczać następująco:

$$\tilde{F} = \limsup_{t\to\infty} \left(||f(t)||^2_H + ||g(t)||^2_{\dot{L}^2_{per}} \right)^{1/2}.$$

Zbieżność w L^2

Zakładamy, że siły i momenty asymptotycznie zachowują się tak samo tzn.

$$||f_1(x,t) - f_2(x,t)||_H + ||g_1(x,t) - g_2(x,t)||_{\dot{L}^2_{per}} \to 0 \text{ dla } t \to \infty.$$

Harmoniki - definicja

Definicja

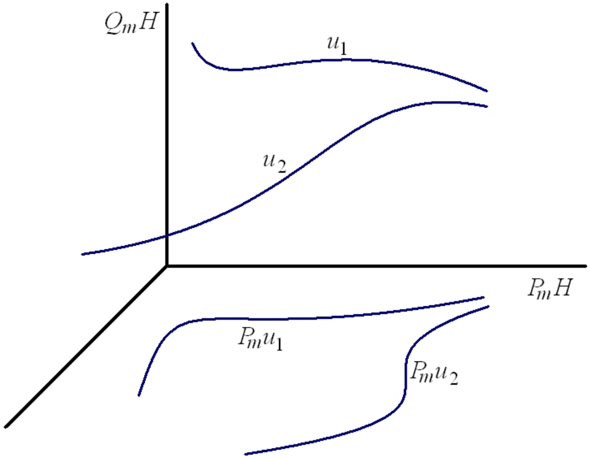
Pierwsze m harmonik związanych z P_m i P_m^1 nazywamy harmonikami determinującymi jeżeli warunek

$$\int_Q (|P_m u_1(x,t) - P_m u_2(x,t)|^2 + |P_m^1 \omega_1(x,t) - P_m^1 \omega_2(x,t)|^2)\, dx \to 0 \ \mathit{dla}\ t \to \infty$$

wraz z warunkiem na siły i momenty implikują

$$\int_Q (|u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 + |\omega_1(x,t) - \omega_2(x,t)|^2)\, dx \to 0 \ \mathit{dla}\ t \to \infty.$$

Harmoniki - obrazek



Harmoniki - oszacowanie

Twierdzenie

Załóżmy, że $m \in \mathbb{N}$ jest takie, że

$$m \geqslant C_1 \tilde{F}^2 + C_2 \nu_r^2$$

gdzie stałe C_1 i C_2 zależą od ν, α i Q ale nie zależą od ν_r. Wtedy pierwsze m harmonik jest determinujące.

Węzły - definicja

Definicja

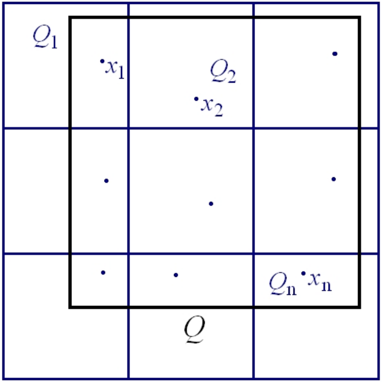
Zbiór $\Sigma = \{x^1, \ldots, x^N\}$ *nazywamy zbiorem węzłów determinujących, jeżeli warunek*

$$\max_{j=1,\ldots,N} |u_1(x^j, t) - u_2(x^j, t)| + \max_{j=1,\ldots,N} |\omega_1(x^j, t) - \omega_2(x^j, t)| \to 0, \;\; dla \; t \to \infty$$

razem z warunkiem na siły i momenty implikują

$$\int_Q (|u_1(x, t) - u_2(x, t)|^2 + |\omega_1(x, t) - \omega_2(x, t)|^2) \, dx \to 0 \;\; dla \; t \to \infty.$$

Węzły - obrazek



Węzły - oszacowanie

Twierdzenie

Niech Q będzie obszarem pokrytym przez N identycznych kwadratów $Q_1, \ldots, Q_N$ rozważmy zbiór $\Sigma = \{x^1, \ldots, x^N\}$ punktów w Q rozmieszczonych po jednym w każdym kwadracie $x^i \in Q_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant N$. Niech N będzie takie, że

$$N \geqslant P_1(\tilde{F}) + P_2(\tilde{F}) \exp(P_3(\tilde{F})),$$

gdzie współczynniki wielomianów P_i zależą od ν, ν_r, α i Q, a ich stopnie to: 2, 6 i 4, odpowiednio. Wtedy zbiór Σ jest zbiorem węzłów determinujących.

Węzły - Gevrey

Twierdzenie

Niech $\mathcal{A}_{\nu_r}$ będzie atraktorem związanym z równaniami płynu mikropolanego. Załóżmy, że $k > 32 d_f(\mathcal{A}_{\nu_r})$. Wtedy dla prawie każdego zbioru k węzłów

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \quad x_j \in Q,$$

wartości $\bar{u}(x_j)$ jednoznacznie determinują funkcję $\bar{u} \in \mathcal{A}_{\nu_r}$. Tzn. istnieje jednoznaczne odwzorowanie z $\mathcal{A}_{\nu_r}$ w $\mathbb{R}^{3k}$ dane przez

$$E_{\mathbf{x}} : \bar{u} \in \mathcal{A} \to (\bar{u}(x_1), \bar{u}(x_2), \ldots, \bar{u}(x_k)) \in \mathbb{R}^{3k}$$

pomiędzy atraktorem $\mathcal{A}_{\nu_r}$ i jego obrazem. Te węzły są też determinujące asymptotycznie.

Porównanie oszacowań

	NSE P	NSE D	MF P	MF D
wymiar atraktora	$F^{2/3}(1+\log F)^{1/3}$	F	$\tilde{F}$	$\tilde{F}$
harmoniki	F	F^2	$\tilde{F}^2+c(\nu_r)$	$\tilde{F}^2+c(\nu_r)$
węzły	F	$\exp(F)$	$\exp(\tilde{F})$	$\exp(\tilde{F})$