Seminarium ZMiFP, IPPT PAN, Warszawa 16 grudnia 2009.

Niestateczność hydrodynamiczna przepływu w szczelinie w poprzecznie pofalowanymi ścianami

Jacek Szumbarski

Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Politechnika Warszawska

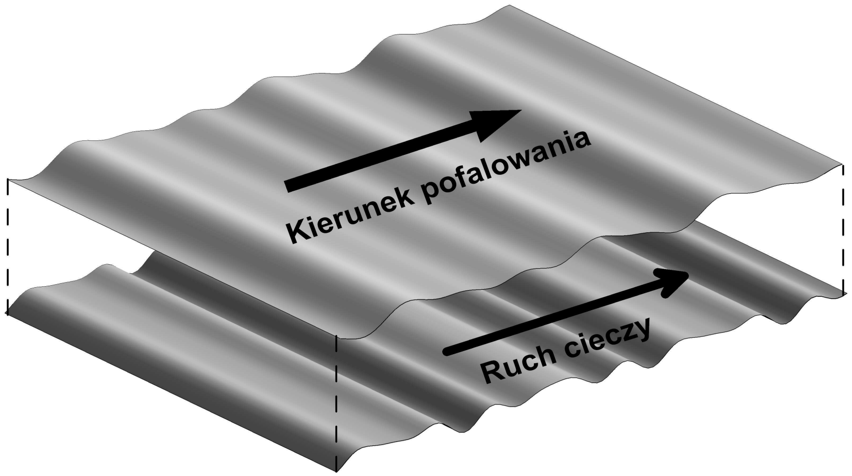
PLAN PREZENTACJI

- Motywacja
- Stateczność przepływu cieczy w kanale (szczelinie) o nieskończonej szerokości (podsumowanie wcześniejszych wyników)
- Przepływ niezaburzony w kanale o skończonej szerokości
- Stateczność względem małych zaburzeń: metoda numeryczna i wybrane wyniki
- Podsumowanie

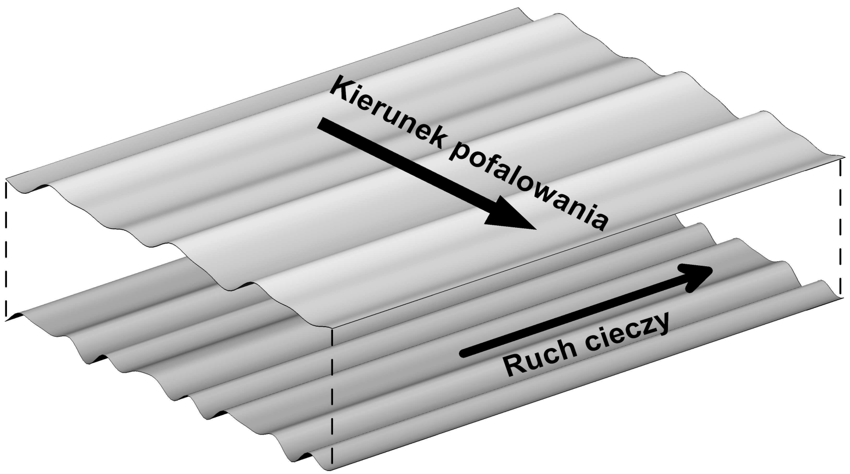
MOTYWACJA – ZWIĘKSZANIE EFEKTYWNOŚCI MIESZANIA W WEWNĘTRZNYCH PRZEPŁYWACH LAMINARNYCH

WARUNEK EFEKTYWNOŚCI: złożona struktura wirowa przepływu + niestacjonarność

REALIZACJA: destabilizacja przepływu przy możliwie najniższej liczbie Reynoldsa, bez – o ile to możliwe – nadmiernego zwiększania oporów ruchu



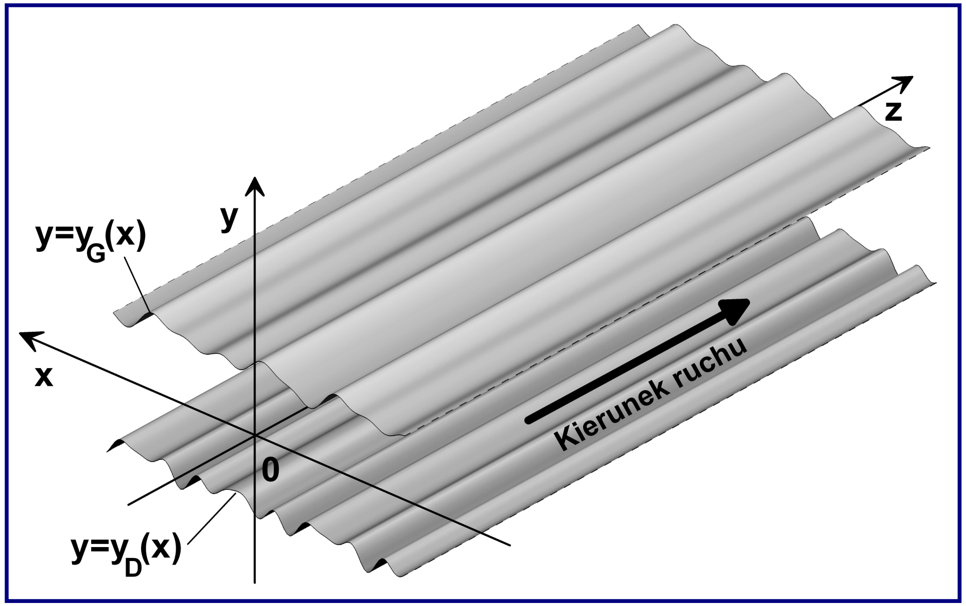
Pofalowanie podłużne jest skuteczne, ale przy większej amplitudzie znacznie rosną opory przepływu ...



...można jednak wprowadzić **pofalowanie poprzeczne**!

KANAŁ (SZCZELINA) O NIESKOŃCZONEJ SZEROKOŚCI

OBSZAR PRZEPŁYWU



$$y_{D,G}(x+\lambda_X) = y_{D,G}(x)$$

$\lambda_X = 2\pi/\alpha$ - podziałka

H - ½ średniej wysokości

$$H = \tfrac{1}{2}\int_0^{\lambda_x}[y_G(x) - y_D(x)]dx$$

$\mathrm{Re} = \dfrac{W_{\max} H}{\nu}$ - liczba Reynoldsa

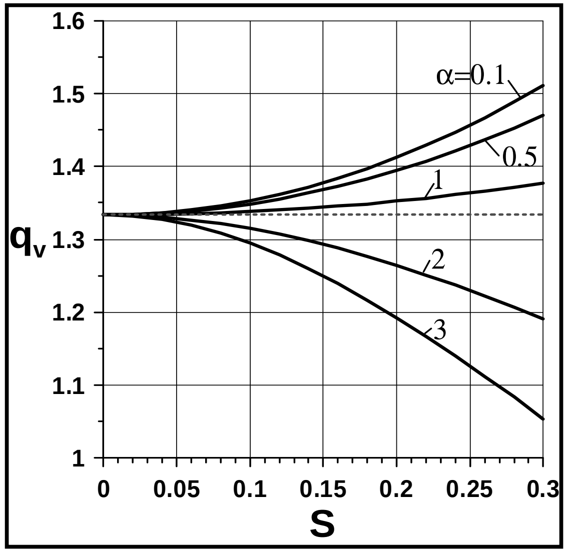
$W_{\max} = W|_{y=0}$ (bez pofalowania)

CIŚNIENIE: $dp_B/dz = -2/\mathrm{Re}$

PRĘDKOŚĆ: $\mathbf{v}_B = [0, 0, W_0(x,y)]$, $W_0(x+\lambda_X, y) = W_0(x,y)$

$$\partial_{xx}W_0 + \partial_{yy}W_0 = 0 \quad , \quad W_0(x, y_D(x)) = W_0(x, y_G(x)) = 0$$

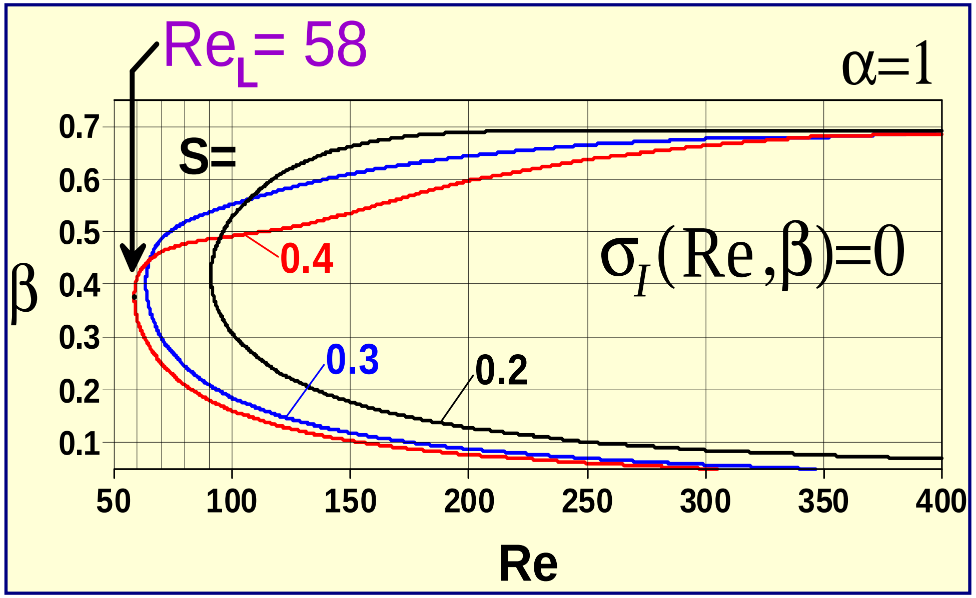
WPŁYW POFALOWANIA POPRZECZNEGO



1. **Redukcja oporów hydraulicznych gdy** $\lambda_X > 6H$

2. **Silnie zmienność wartość prędkości** W_0 **w kierunku poprzecznym szczególnie dla pofalowania symetrycznego tj., gdy** $y_G(x) = -y_D(x)$

3. **Radykalne obniżenie granicy stateczności względem małych zaburzeń dla** $y_G(x) = -y_D(x),\ \lambda_X \approx 6 \div 7\ H$ **i amplitudy pofalowania (sinusoida)** $S \approx 0.4H$



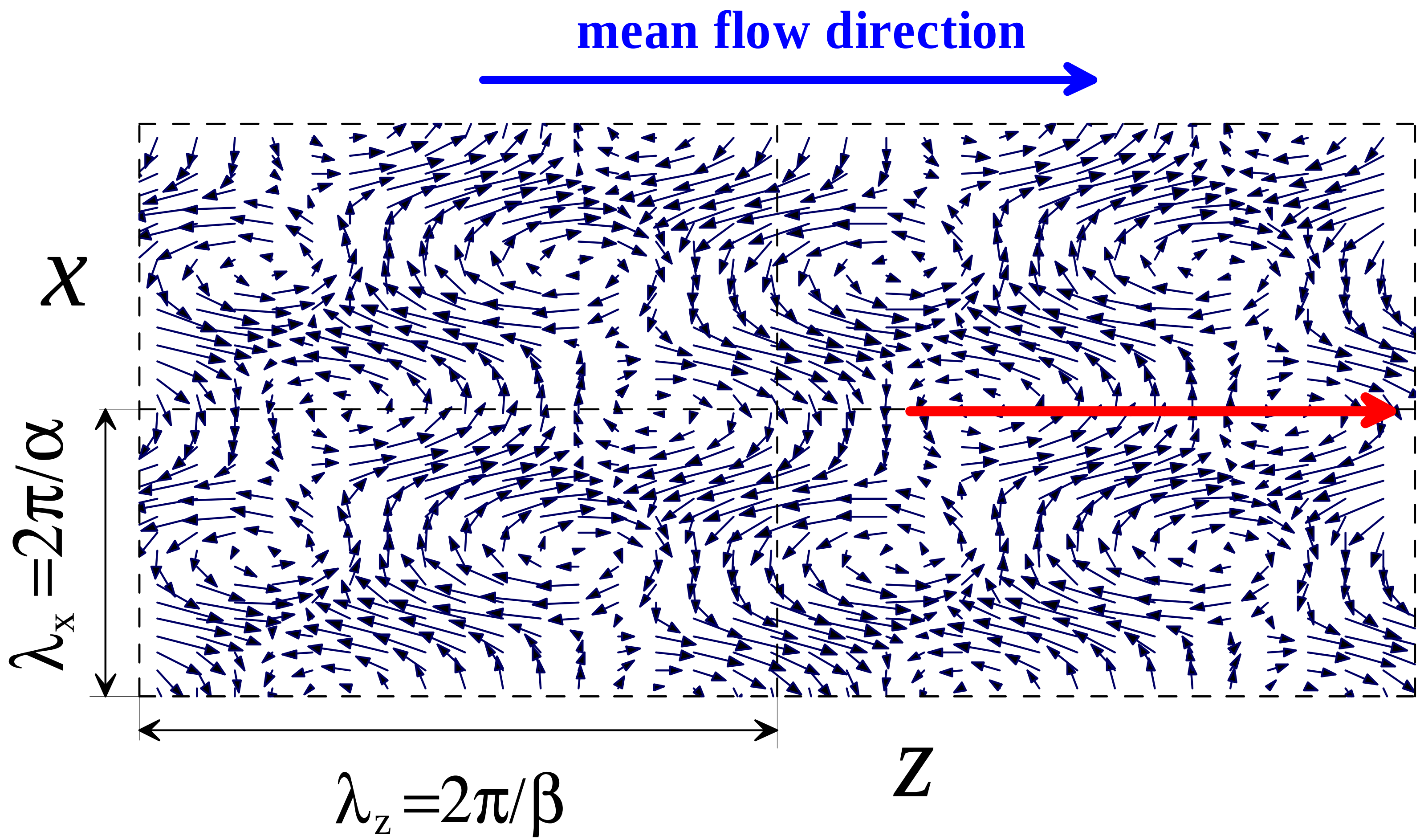
$$\mathrm{Re}_L = 5772$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Re}_L = 58$$

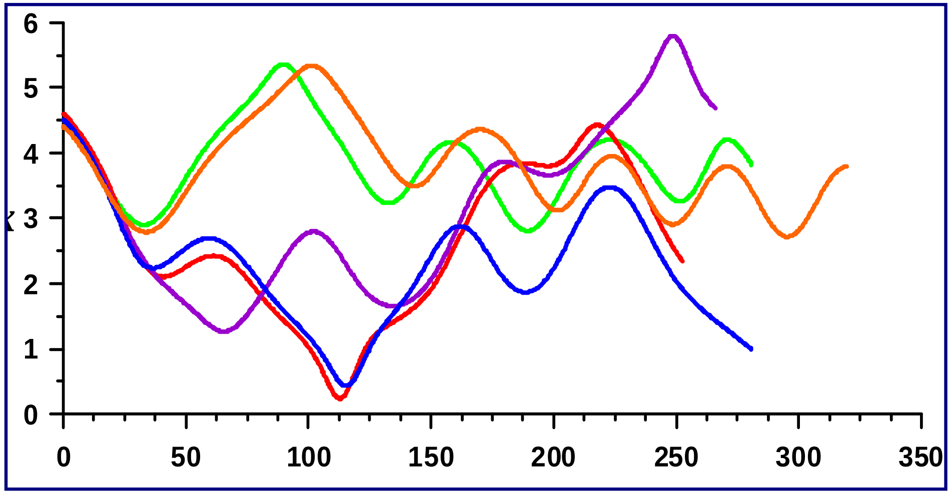
dla S = 0.396H , $\alpha = 1.05$

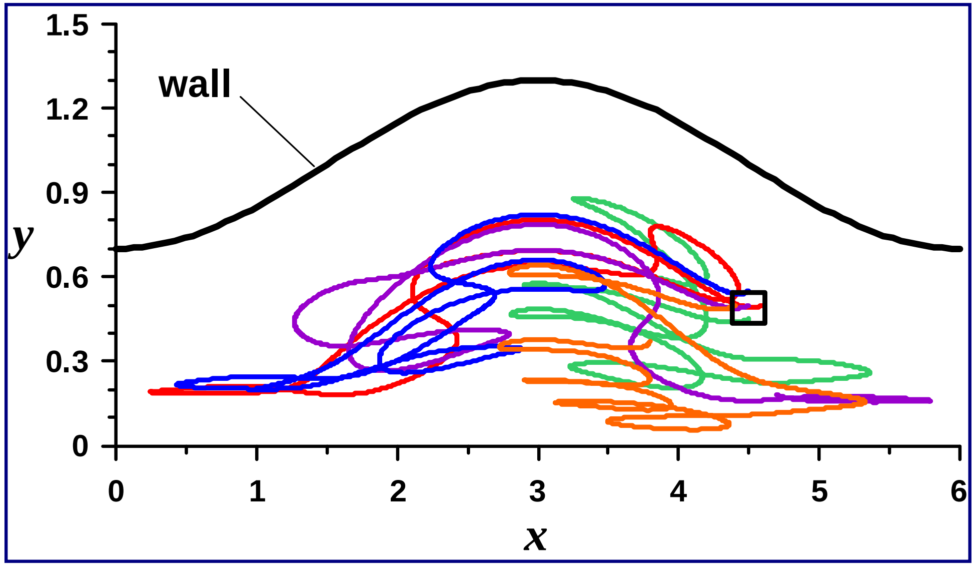
POSTAĆ NIESTABILNOŚCI

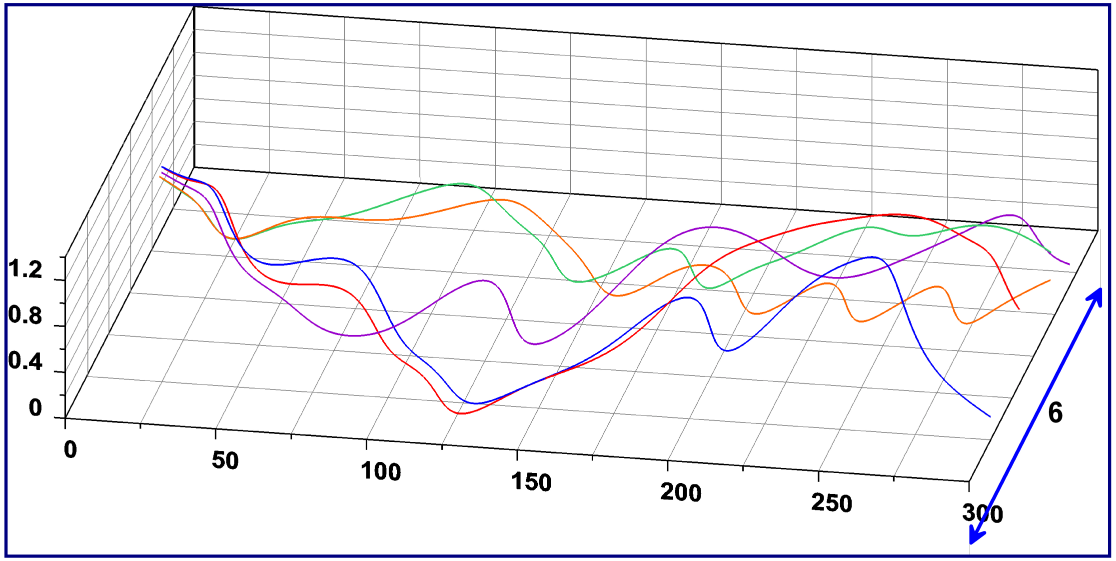


Pole prędkości niestabilnego modu normalnego w płaszczyźnie symetrii $y=0$. Zaburzenie ma formę fali biegnącej ($\upsilon_f \approx 0.9\bar{W}\big|_{y=0}$), tj. wprowadza **OSCYLACJE** !

CZY ZACHODZI CHAOTYCZNE MIESZANIE?

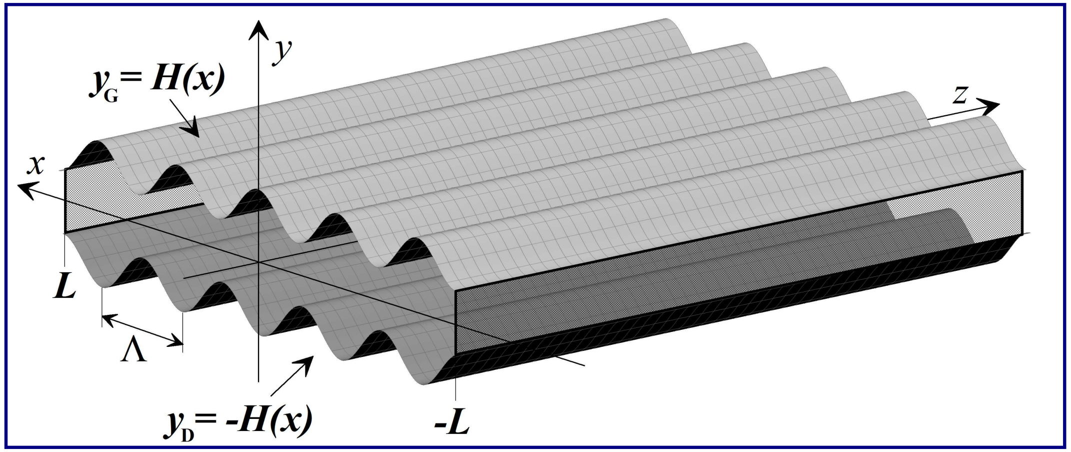




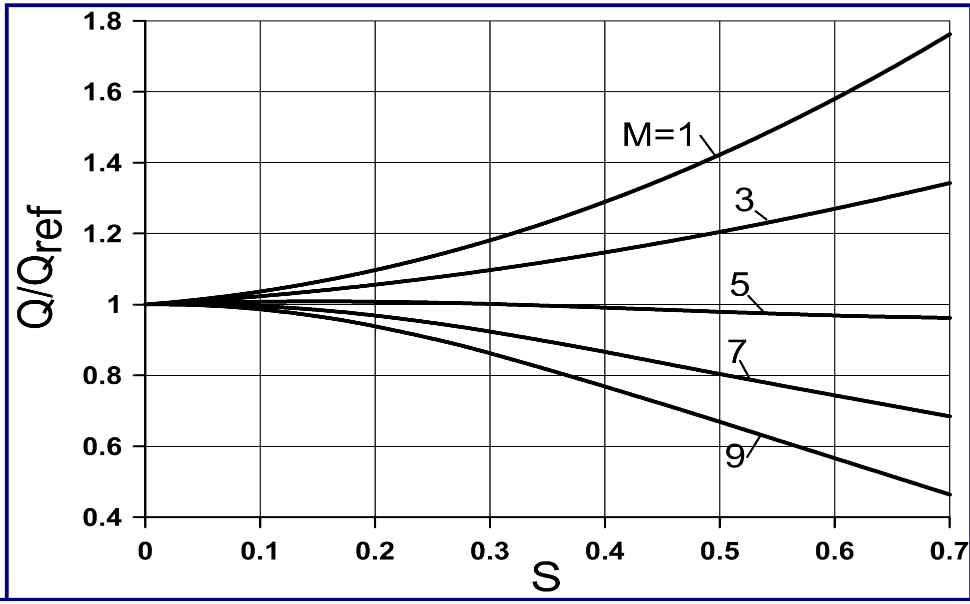


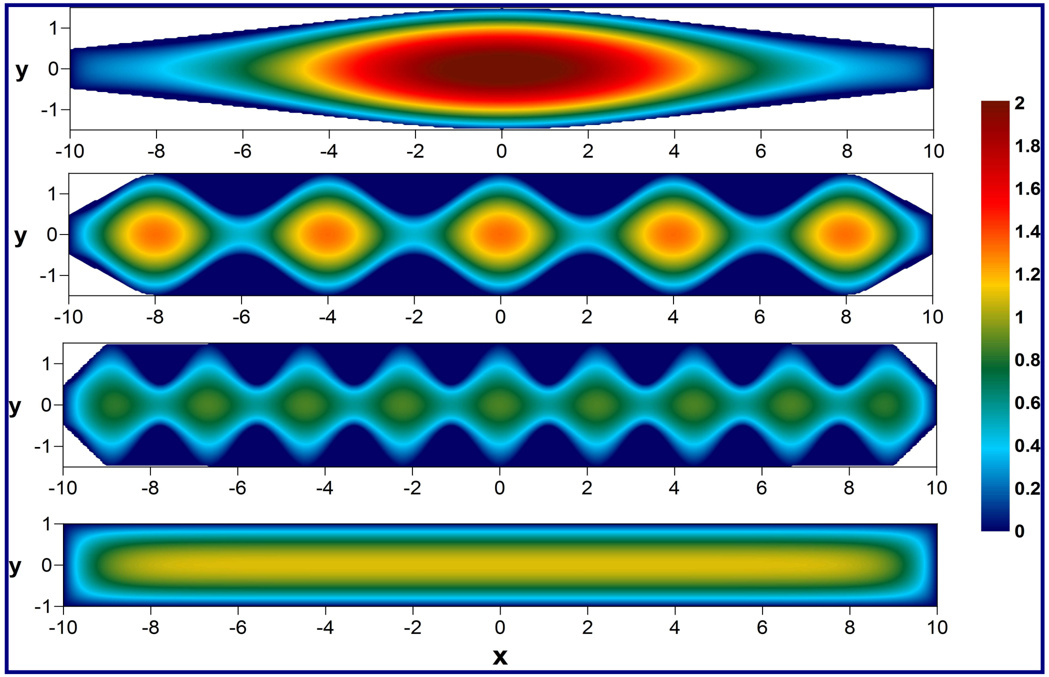
Trajektorie elemenów płynu w polu prędkości otrzymanym w wyniku superpozycji przepływu niezaburzonego oraz niestatecznego modu zaburzeń o amplitudzie równej 20% średniej wartości prędkości w przepływie niezaburzony (tak skonstruowane pole **nie jest rozwiązaniem równań N-S**).

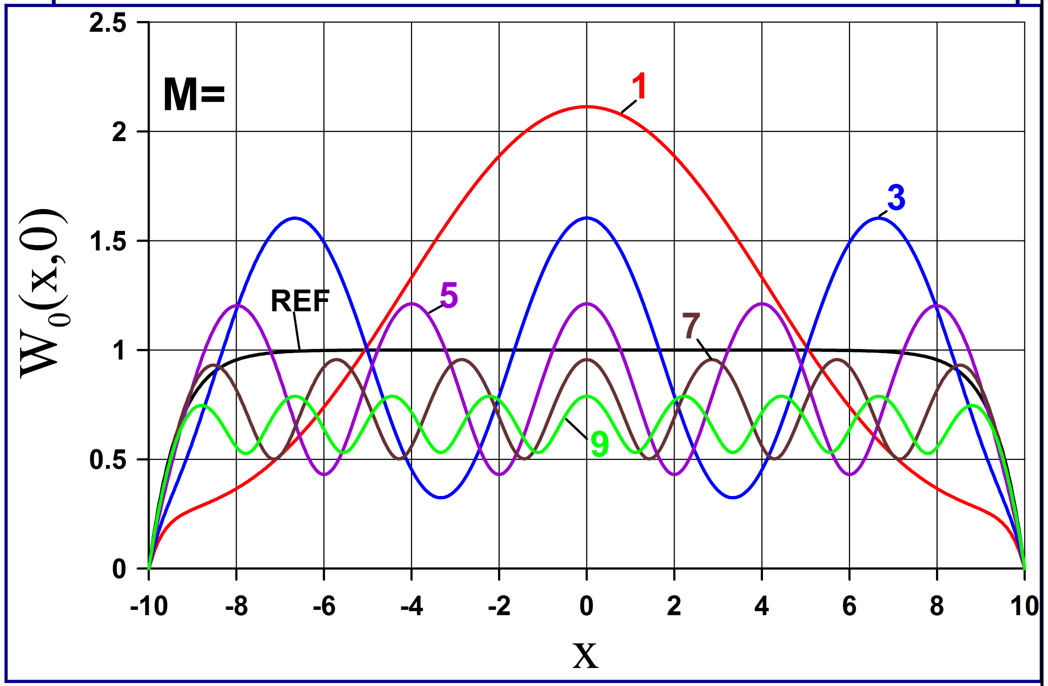
PRZEPŁYW W KANALE (SZCZELINIE) O SKOŃCZONEJ SZEROKOŚCI



$$\Delta W_0 = -2 \ , \ W_0\big|_{\partial\Omega} = 0 \ , \ P_0(z) = -\tfrac{2}{\mathrm{Re}}\, z$$







ANALIZA STATECZNOŚCI (1)

Przepływ zaburzony

$$\mathbf{V}(t,x,y,z) = \mathbf{V_0}(x,y) + \boldsymbol{\upsilon}(t,x,y,z) = [0,0,W_0](x,y) + [u,\upsilon,w](t,x,y,z) \ ,$$
$$P(t,x,y,z) = P_0(z) + p(t,x,y,z)$$

Równania ewolucji pola małych zaburzeń

$$\begin{cases} \partial_t u + W_0 \partial_z u = -\partial_x p + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})u \\ \partial_t \upsilon + W_0 \partial_z \upsilon = -\partial_y p + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})\upsilon \\ \partial_t w + W_0 \partial_z w + u \partial_x W_0 + \upsilon \partial_y W_0 = -\partial_z p + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})w \\ \partial_x u + \partial_y \upsilon + \partial_z w = 0 \end{cases}$$

Warunki brzegowe $\quad [u,\upsilon,w]\big|_{\partial\Omega} = 0$

ANALIZA STATECZNOŚCI (2)

Postać pola zaburzeń (postacie normalne)

$$[u,\upsilon,w,p](t,x,y,z)=[\hat{u},\hat{\upsilon},\hat{w},\hat{p}](x,y)\exp[i(\beta z-\omega t)]+c.c.$$

Zagadnienie własne dla postaci normalnych

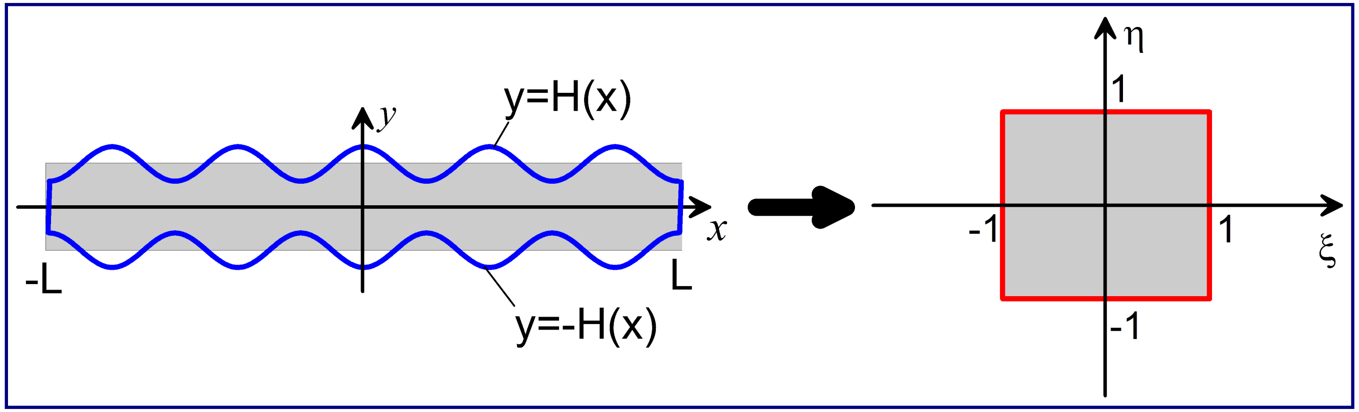
$$\begin{cases}
-i\omega\hat{u}+i\beta W_0\,\hat{u}=-\partial_x\hat{p}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta-\beta^2)\hat{u}\\
-i\omega\hat{\upsilon}+i\beta W_0\,\hat{\upsilon}=-\partial_y\hat{p}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta-\beta^2)\hat{\upsilon}\\
-i\omega\hat{w}+i\beta W_0\,\hat{w}+\hat{u}\partial_x W_0+\hat{\upsilon}\partial_y W_0=-i\beta\hat{p}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta-\beta^2)\hat{w}\\
\partial_x\hat{u}+\partial_y\hat{\upsilon}+i\beta\hat{w}=0
\end{cases}$$

Warunki brzegowe

$$[\hat{u},\hat{\upsilon},\hat{w}]\big|_{\partial\Omega}=0$$

PROCEDURA NUMERYCZNA (1)

Transformacja obszaru fizycznego w obszar obliczeniowy $[-1,1]\times[-1,1]$



$$y_G(x) \equiv H(x) = 1 + S\cos(M\pi x/L) = -y_D(x)$$

$$\begin{cases} x = L\xi \\ y = H(x)\eta = \eta H(L\xi) = L\eta\tilde{H}(\xi) \end{cases} , \qquad \begin{cases} \xi = x/L \\ \eta = y/H(x) = y/[L\tilde{H}(x/L)] \end{cases}$$

Funkcje bazowe (metoda Galerkina)

- **prędkość** $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} b_I^{\mathrm{v}}(\xi,\eta) b_J^{\mathrm{v}}(\xi,\eta)\left(\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}\right)^{-1} d\xi d\eta = \delta_{IJ}$, $b_I^{\mathrm{v}}(\pm 1,\eta) = b_I^{\mathrm{v}}(\xi,\pm 1) = 0$
- **ciśnienie** $b_I^p(\xi,\eta) = t_{i(I)}(\xi)\, t_{j(I)}(\eta)$

PROCEDURA NUMERYCZNA (2)

Algebraiczne zagadnienie własne

$$\begin{cases} -i\omega \mathbf{u}_1 + \mathbf{C}\mathbf{u}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{p} = \mathbf{0} \\ -i\omega \mathbf{u}_2 + \mathbf{C}\mathbf{u}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{p} = \mathbf{0} \\ -i\omega \mathbf{u}_3 + \mathbf{C}\mathbf{u}_3 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 + i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{p} = \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{u}_2 + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = i\beta\mathbf{A} - \tfrac{1}{\mathrm{Re}}(\mathbf{K} - \beta^2\mathbf{I})$$

Eliminacja wektora **p**

$$\mathbf{\Sigma}\mathbf{p} = -(\mathbf{E}_1\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{E}_2\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_2)\mathbf{u}_1 - i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{C}\mathbf{u}_3$$

gdzie

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{E}_1\mathbf{D}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{D}_2 - \beta^2\mathbf{E}_3\mathbf{D}_3$$

Ostatecznie

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{H}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{H}_3\mathbf{u}_3$$

gdzie

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = -\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{E}_1\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1) \\ \mathbf{H}_2 = -\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{E}_2\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_2) \\ \mathbf{H}_3 = -i\beta\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{E}_3\mathbf{C} \end{cases}$$

PROCEDURA NUMERYCZNA (3)

Po eliminacji **p** otrzymujemy zagadnienie własne (wymiar N = 3·M_{blok}, M_{blok} ~ 4000)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}+\mathbf{D}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{D}_1\mathbf{H}_2 & \mathbf{D}_1\mathbf{H}_3 \\ \mathbf{D}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{H}_2 & \mathbf{D}_2\mathbf{H}_3 \\ \mathbf{B}_1+i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_1 & \mathbf{B}_2+i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_2 & \mathbf{C}+i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}$$

Obliczeniowo nieefektywne**!** **$\mathbf{M_{blok}}$-krotna zerowa wartość własna!**

Zatem, eliminacja $\mathbf{u_3}$ ...

$$\mathbf{u}_3 = \tfrac{i}{\beta}\mathbf{E}_3^{-1}(\mathbf{E}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{u}_2)$$

Ostatecznie otrzymujemy zredukowane zagadnienie własne postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}+\mathbf{D}_1(\mathbf{H}_1+\tfrac{i}{\beta}\mathbf{H}_3\mathbf{E}_3^{-1}\mathbf{E}_1) & \mathbf{D}_1(\mathbf{H}_2+\tfrac{i}{\beta}\mathbf{H}_3\mathbf{E}_3^{-1}\mathbf{E}_2) \\ \mathbf{D}_2(\mathbf{H}_1+\tfrac{i}{\beta}\mathbf{H}_3\mathbf{E}_3^{-1}\mathbf{E}_1) & \mathbf{C}+\mathbf{D}_2(\mathbf{H}_2+\tfrac{i}{\beta}\mathbf{H}_3\mathbf{E}_3^{-1}\mathbf{E}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

PROCEDURA NUMERYCZNA (4)

Cel obliczeń – poszukiwanie **geometrii optymalnej**, tj.:
- minimalizującej krytyczną liczbę Reynoldsa, albo
- maksymalizującej tempo wzmocnienia pola zaburzeń (czyli wartość $\omega_I = \Im\mathfrak{m}\,\omega$) przy zadanej liczbie Reynoldsa

Rozważamy ograniczona klasę kształtów: **pofalowanie sinusoidalne i symetryczne**

$$y_G(x) = 1 + S\cos(M\pi x / L) = -y_D(x)$$

Analiza zmienności parametrycznej $\omega_I = \Im\mathfrak{m}\,\omega$ względem:
- liczby „komórek” M i szerokości kanału L (de facto 2L)
- liczby falowej pola zaburzeń β
- liczby Reynoldsa Re

Problem efektywności obliczeniowej:
- zwykle nie ma potrzeby wyznaczania więcej niż jednej wartości/wektorów własnych (chyba, że badamy „transient growth” ...)
- zmiana wartości parametrów geometrycznych lub zmiana wartości liczby falowej β powoduje konieczność obliczenia **od nowa** macierzy $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{H}_1$,..,$\mathbf{H}_3$ itd.

PROCEDURA NUMERYCZNA (5)

Podstawowym narzędziem do śledzenia zmienności parametrycznej wybranej pary własnej (modu normalnego) zagadnienia $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Bx}$ jest **Metoda Odwrotnych Iteracji (MOI)**:

Dane startowe: przybliżona para własna $(\lambda_0, \mathbf{x}_0)$.

Dla k=0,1,2...:

1) rozwiąż $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{B})\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{Bx}^k$,

2) wyznacz liczbę w_{max}^{k+1} taką, że $\left|w_{max}^{k+1}\right| = \max\left\{\left|w_j^{k+1}\right|,\ j = 1,..,\dim(\mathbf{A})\right\}$,

3) oblicz $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{w}^{k+1} / w_{max}^{k+1}$,

4) oblicz $p_{k+1} = 1 / w_{max}^{k+1}$,

5) jeżeli $\left|p_{k+1} - p_k\right| > \varepsilon$ to i wróć do kroku 1,

w przeciwnym wypadku para własna to $\lambda = \lambda_0 + p_{k+1}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{k+1}$.

Koniec.

PROCEDURA NUMERYCZNA (6)

Niech $(\omega_0;\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{p})$ **to dostępne przybliżenie wybranego modu normalnego.**

W każdej iteracji **MOI** trzeba rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \mathbf{C}_\omega \mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{q} = \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{C}_\omega \mathbf{w}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{q} = \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{C}_\omega \mathbf{w}_3 + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{w}_2 + i\beta \mathbf{D}_3 \mathbf{q} = \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{w}_2 + i\beta \mathbf{E}_3 \mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \end{cases} , \quad \mathbf{C}_\omega = i\beta \mathbf{A} - \tfrac{1}{\mathrm{Re}}(\mathbf{K} - \beta^2 \mathbf{I}) - i\omega_0 \mathbf{I}.$$

Etap 1: $\mathbf{C}_\omega \hat{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{u}_1 \;,\; \mathbf{C}_\omega \hat{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{u}_2 \;,\; \mathbf{C}_\omega \hat{\mathbf{w}}_3 = \mathbf{u}_3 \,,$

Etap 2: $\mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{E}_2 \hat{\mathbf{w}}_2 + i\beta \mathbf{E}_3 \hat{\mathbf{w}}_3 \;,$

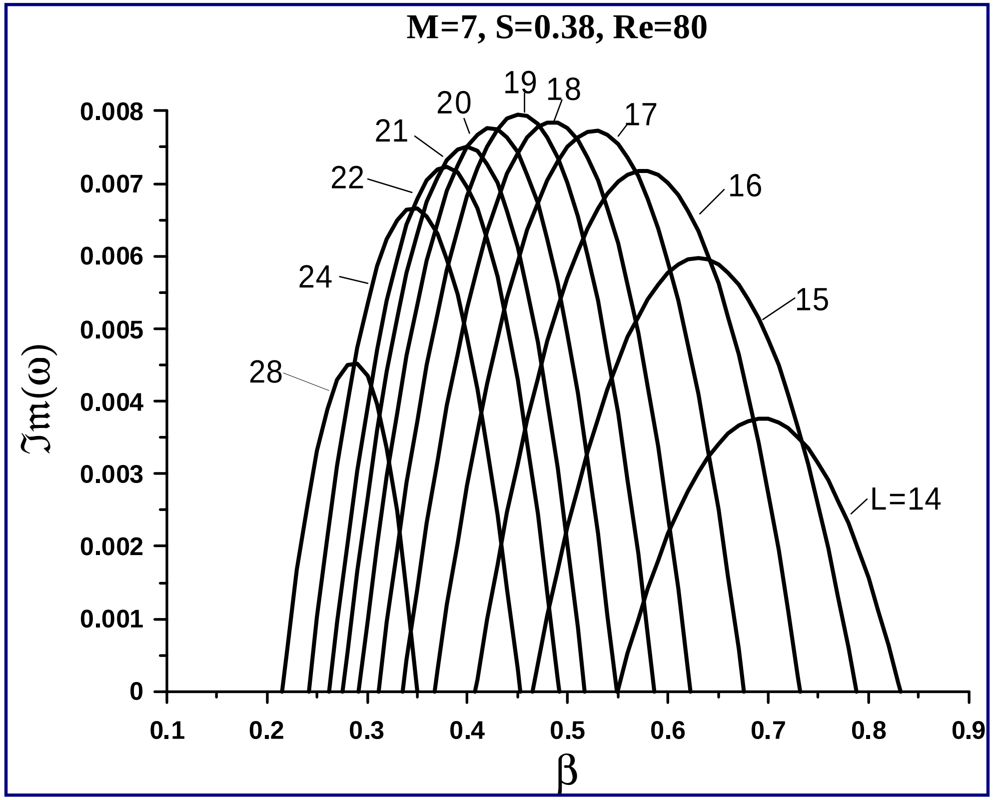
gdzie

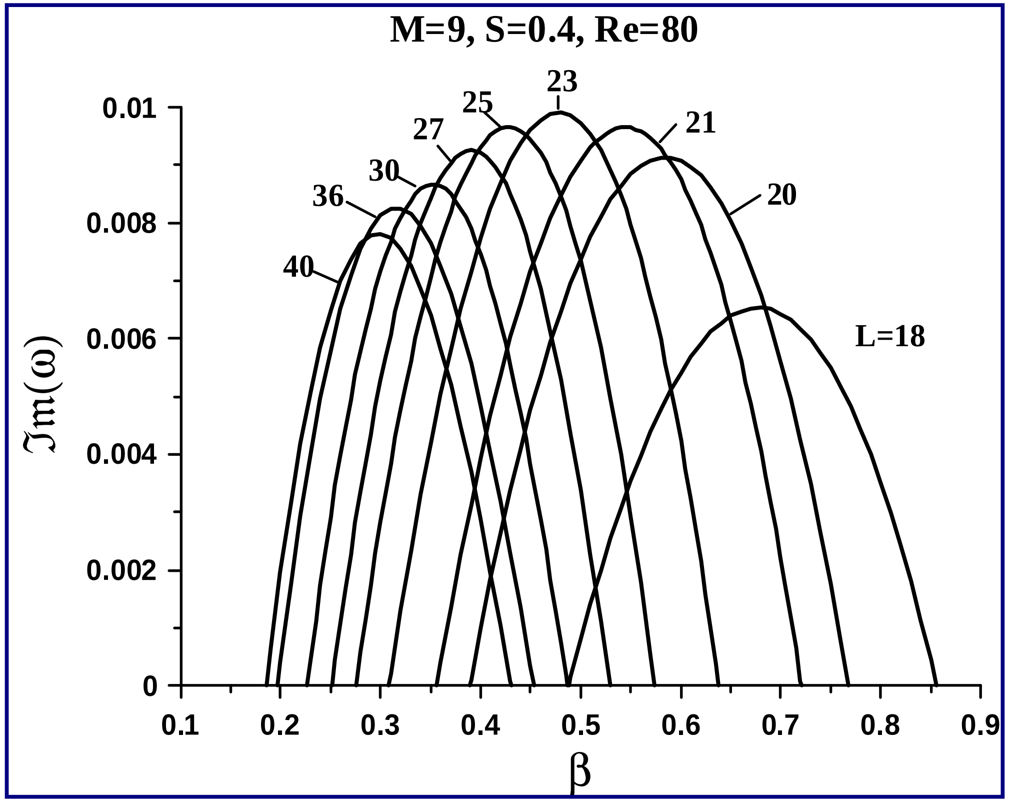
$$\begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{E}_1 \mathbf{H}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{H}_1 = \mathbf{C}_\omega^{-1} \mathbf{D}_1 \;,\; \mathbf{H}_2 = \mathbf{C}_\omega^{-1} \mathbf{D}_2 \;,\; \mathbf{H}_3 = -\beta \mathbf{C}_\omega^{-1} [\beta \mathbf{D}_3 + i(\mathbf{B}_1 \mathbf{H}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{H}_2)] \;, \end{cases}$$

Etap 3:

$$\mathbf{C}_\omega \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{D}_1 \mathbf{q} \;,\; \mathbf{C}_\omega \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{q} \;,\; \mathbf{C}_\omega \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{B}_1 \mathbf{w}_1 - \mathbf{B}_2 \mathbf{w}_2 - i\beta \mathbf{D}_3 \mathbf{q}$$

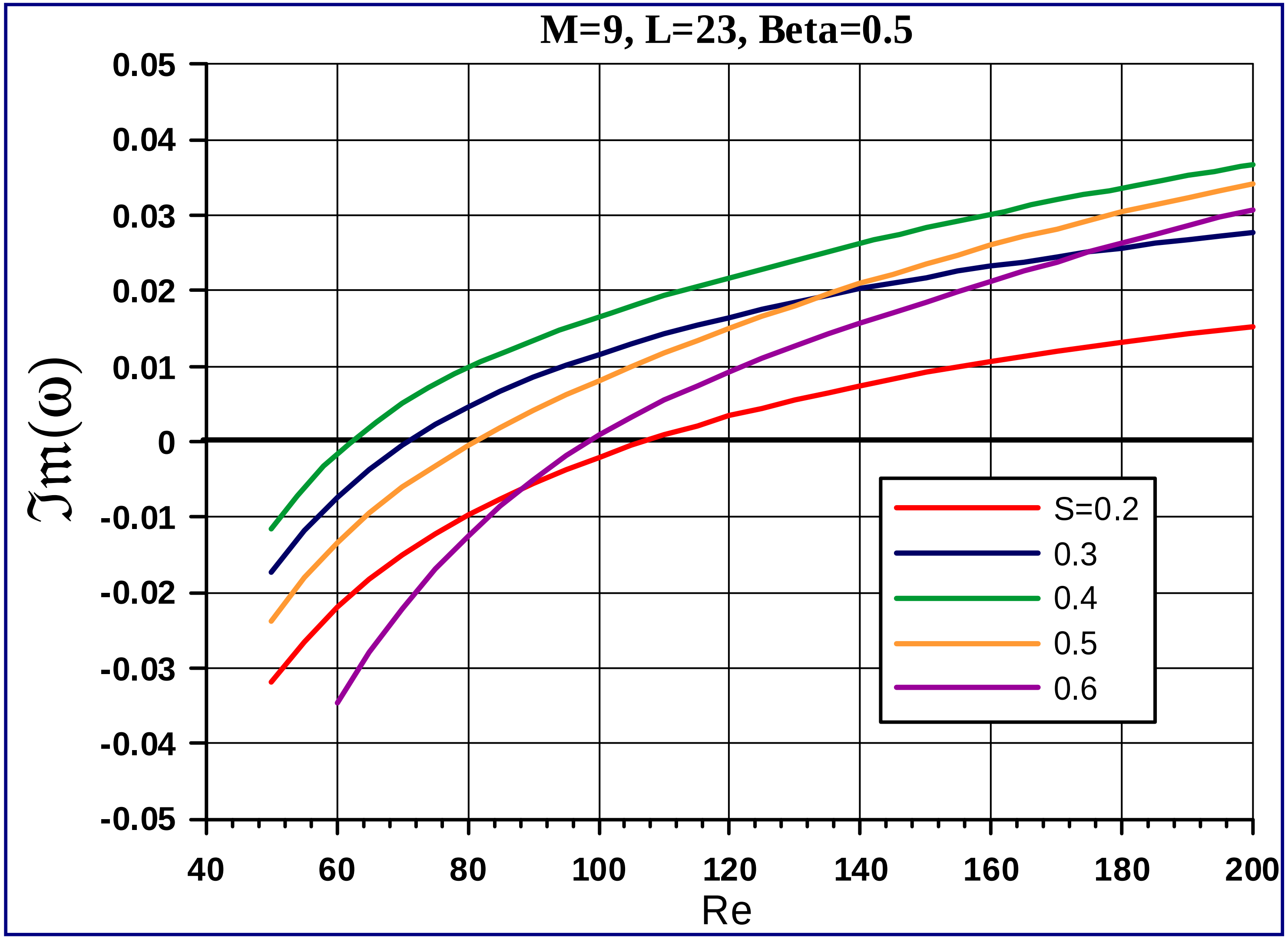
WYNIKI OBLICZEŃ (1)





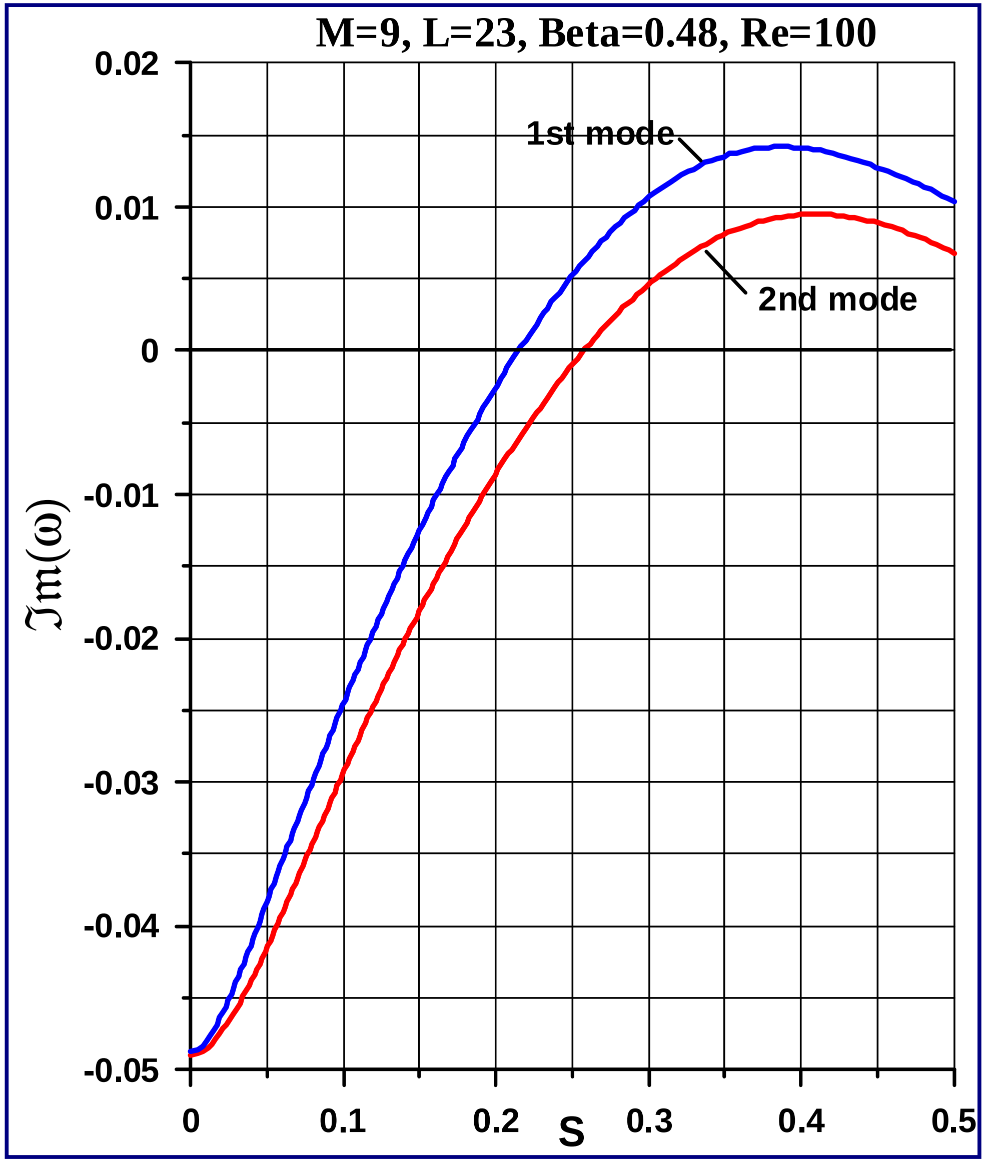
Zależność wykładnika wzmocnienia niestatecznego modu normalnego od liczby falowej β i szerokości kanału L.

WYNIKI OBLICZEŃ (2)



Zmienność wykładnika wzmocnienia w funkcji liczby Reynoldsa

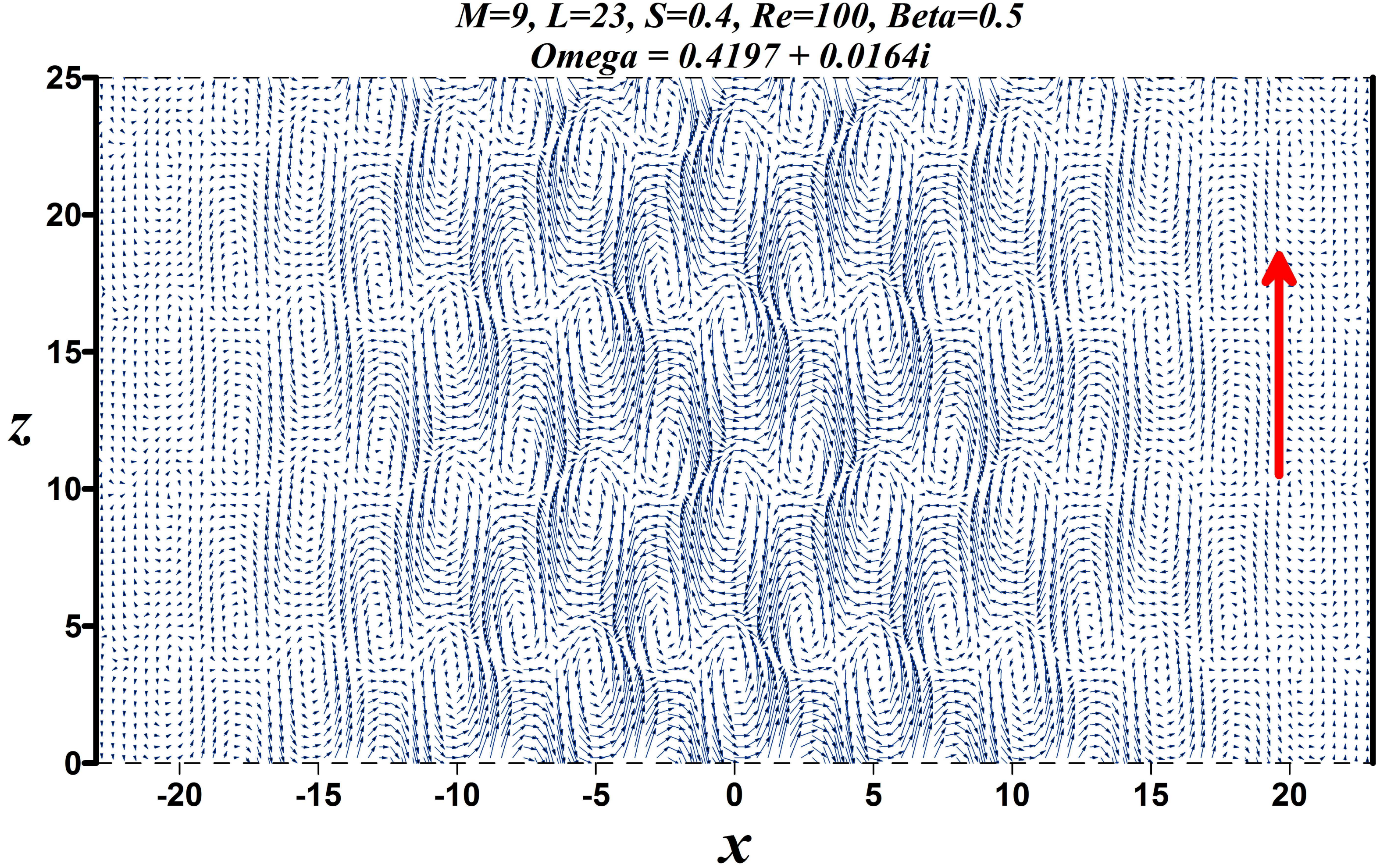
WYNIKI OBLICZEŃ (3)

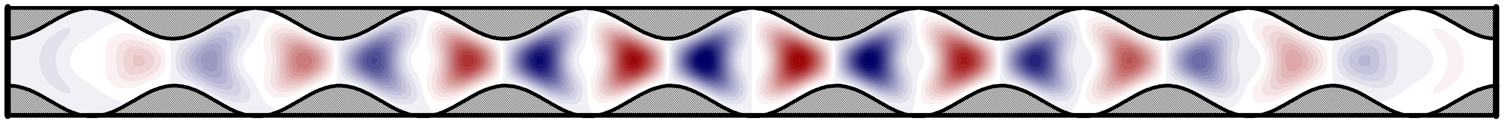


Dla dostatecznie wielkiej liczby Reynoldsa i amplitudy pofalowania mogą współistnieć dwa niestateczne mody normalne. W granicy $S \to 0$ **mody te odpowiadają najsłabiej tłumionym modom normalnym w kanale o przekroju prostokątnym.**

WYNIKI OBLICZEŃ (4)

Struktura pola prędkości NMN-1

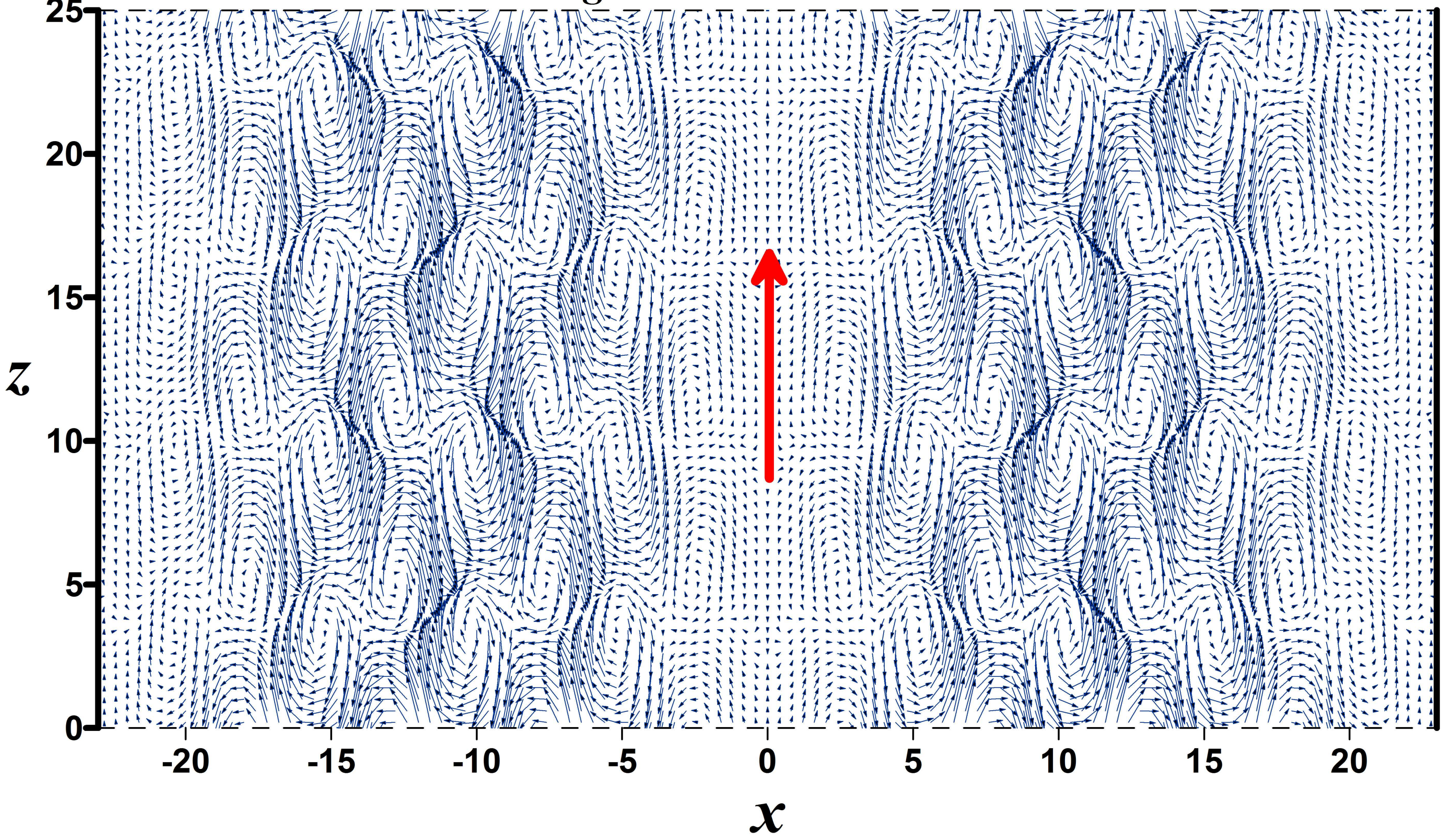


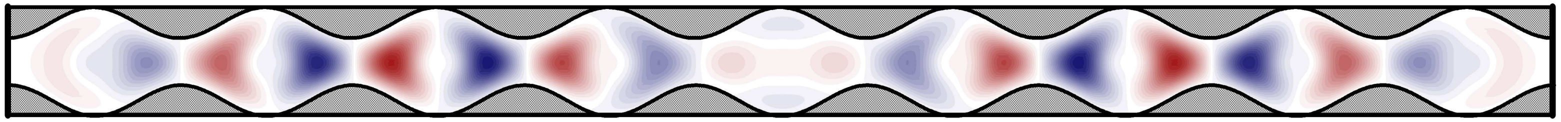


WYNIKI OBLICZEŃ (5)

Struktura pola prędkości NMN-2

M=9, L=23, S=0.4, Re=100, Beta=0.5
Omega = 0.4231 + 0.00963i





PODSUMOWANIE

- Obecność bocznych ścian stabilizuje przepływ
- Efekt obecności ścina bocznych słabnie wraz ze wzrostem szerokości kanału
- W obecności ścian bocznych pofalowanie najsilniej destabilizujące na nieco mniejszą podziałkę niż w przypadku geometrii okresowej
- Istnieje optymalna szerokość kanału (przy ustalonej liczbie komórek M) i amplituda pofalowania sinusoidalnego.
- Stwierdzono istnienie (przynajmniej) dwóch niestatecznych modów normalnych

DALSZE BADANIA

- Uzupełnienie analizy parametrycznej, obliczenie krzywych stateczności neutralnej
- Pofalowanie jednostronne (do porównania z eksperymentem)
- Zbadanie wpływu nierównomierności podziałki dla małej liczby komórek (M=3, M=5)
- Analiza stateczności „przestrzenna” ($\omega \in$ R, $\beta \in$ C)