

26.V.80

PRACE IPPT • IFTR REPORTS

5/1980

Stefan J. Kowalski

WSPÓLRZĘDNE NORMALNE
I WARUNKI BRZEGOWE
W TEORII MIESZANIN

Prace habilitacyjne

P. 269



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK



Prace habilitacyjne

Praca wzięta do Rezerwy dnia 10 marca 1980 r.

Lazarek po nr 71980

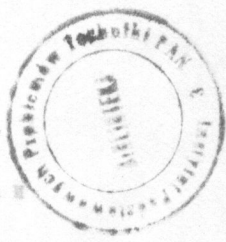
5/1980

Stefan J. Kowalski

**WSPÓLRZĘDNE NORMALNE
I WARUNKI BRZEGOWE
W TEORII MIESZANIN**

Prace habilitacyjne

P.269



W a p r a c e h a b i l i t a c y j n e

Instytut Robotniczego Projektowania Techniki PAN
Książka 170 str. 1980 r. 7.2.
Odbano 1980 r.
WARSZAWA 1980
Nr zamówienia 171/80 x 197

Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa,
ul. Światocieńska 8

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 marca 1980 r.

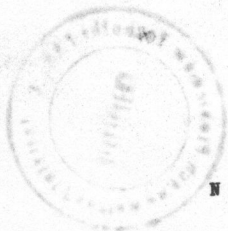
Zarejestrowana pod nr 5/1980

Stefan J. Kowalski

WSTĘPNE WSKAZANIE
I WARUNKI BRZEGOWE
W TEORII MIESZANIN

Praca habilitacyjna

pas.9



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark.wyd.4,8. Ark.druk. 7,5.

Oddano do drukarni w marcu 1980 r.

Nr zamówienia 171/e/80 n.193

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Stefan Jan KOWALSKI

Pracownia Teorii Konsolidacji i Termodyfuzji

IPPT - Poznań

WSPÓLRZĘDNE NORMALNE I WARUNKI BRZEGOWE W TEORII MIESZANIN

WSTĘP

Kontynuacja teorii mieszanin jest w ostatnich latach intensywnie rozwijana przez wielu autorów. Świadczy o tym duża ilość prac, wśród których należy wymienić przede wszystkim prace TRUESDELLA, [78], [79], GREENA i NAGHDIEGO, [32], [33], [34], [35], [37], MÜLLERA, [64], [65], BOWENA, [9], [11], WILLIAMSZA, [82], OLIVERA, [67], GURTINA, [41], i innych (por. spis literatury). Nie będziemy tutaj zamieszczać szczegółowej analizy tych prac.* Dla nas istotne są dostrzeżone niedociągnięcia aktualnej teorii mieszanin i na nich skupimy naszą uwagę. Jednym z nich jest pominięcie w dotychczasowej teorii mieszanin efektu sprzężenia ruchu przez masę. Ten oczywisty mankament stanowi jednocześnie powód, dla którego w ramach ogólnej teorii mieszanin nie mieściła się szeroka klasa zagadnień dotyczących osrodka porowatego wypełnionego cieczą - teoria konsolidacji.

* Chronologiczne zestawienie takich prac, publikowanych przed rokiem 1970 Czytelnik znajdzie w publikacji GURTINA i DE LA PHENA [41]. Krótkie omówienie osiągnięć w dziedzinie teorii mieszanin w ostatnim dziesięcioleciu można znaleźć w pracach cytowanych w spisie literatury np. [37].

Warto w tym miejscu wspomnieć, że w ośrodku wieloskładnikowym wyróżniamy trzy rodzaje sprzężeń. Pierwszy rodzaj związany jest z deformacją składników. W mieszaninie nie może zajść deformacja (zmiana objętości) jednego składnika bez wywołania deformacji czy sił w pozostałych składnikach. Ten rodzaj sprzężenia występuje w związkach fizycznych.

Drugi rodzaj sprzężeń związany jest z ruchem względnym składników i wynika z ich niedoskonałości (siły tarcia, lepkości), bądź też wymiany (dyfuzji) pędu składników poruszających się z różnymi prędkościami. Ten rodzaj sprzężenia wywołuje siły wewnętrzne, zwane siłami dyfuzji. Siły dyfuzji mają charakter funkcji źródłowych. Ujawniają się tylko wtedy, gdy istnieje ruch względny, znikają w globalnym bilansie pędu lub gdy składniki są idealne (brak lepkości, tarcia itp.).

Trzecim rodzajem sprzężenia, którym w tej pracy będziemy się zajmować, jest wspomniane sprzężenie ruchu przez masę. Polega ono na wymuszeniu ruchu jednego składnika przez drugi składnik, bądź też wymuszenie to jest wzajemne. Charakterystyczną cechą tego sprzężenia jest, że dany składnik nie posiada jednorodnego pola prędkości. Ten rodzaj sprzężenia występuje szczególnie wyraźnie w mieszaninach ciał stałych i cieczy.

Efekt sprzężenia ruchu przez masę uwzględniony został w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą przez BIOTA w 1956 r., [3], [4]. Odgrywa on istotną rolę w analizie ruchu falowego w ośrodku konsolidującym (por. np. [3], [4], [5], [6], [13], [14], [15], [16]).

Efekt ten pragniemy w niniejszej pracy wprowadzić do teorii mieszanin. Uczynimy to jednakże w sposób odmienny niż to zrobił BIOT, [3], w przypadku ośrodka porowatego wypełnionego cieczą.

Dynamiczna teoria konsolidacji BIOTA [3], aczkolwiek bogatsza od analogicznej teorii GREENA i NAGHDIEGO, [35], jest niedogodna ze względu na trudność formułowania warunków brzegowych, [55], a także ze względu na zbyt złożoną formę matematyczną równań ruchu [54]. BIOT wyprowadził swoje równania korzystając z równań Lagrange'a. Energię kinetyczną dla dwuskładnikowego ośrodka zdefiniował jako pełną formę kwadratową współrzędnych uogólnionych, którymi są współrzędne wektorów przemieszczenia szkieletu i cieczy. W efekcie otrzymał równania ruchu sprzężone przez masę. Zdaniem autora, równań tych nie można otrzymać z zasad zachowania. Bliżej problem ten naświetlimy w rozdziale I.

W tej pracy uwzględnimy efekt sprzężenia ruchu przez masę w sposób zaproponowany przez DERSKIEGO, [17]. DERSKI otrzymał równania ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą, bazując na zasadach zachowania masy i pędu. Mając na uwadze ośrodek porowaty z konsystentnym szkieletem (model takiego ośrodka jest zaprezentowany w pracach [51], [52], [53]), zauważył, że w takim ośrodku nie cała ciecz porusza się z jednakową prędkością. Podzielił więc tą ciecz ze względu na pola prędkości na ciecz swobodną i uwięzioną, przy czym założył, że ruch tej ostatniej cieczy jest całkowicie narzucony przez ruch ciała porowatego. W rezultacie otrzymał równania, które różnią się od równań BIOTA prostszą formą matematyczną i jasną interpretacją wielkości występujących w tych równaniach (por. rozdział I). Identyczne równania otrzymali DERSKI i ENE, [19], korzystając z metody

* Próba porównania teorii BIOTA oraz GREENA i NAGHDIEGO podjęta przez TABADDORA i LITTLE, [74], jest nieporozumieniem. Autorzy ci kojarzą człony mające diametralnie różną interpretację fizyczną.

homogenizacji równań dla ośrodka sprężystego w przypadku szkieletu i równań Naviera-Stokesa w przypadku cieczy. Równania te zostały potwierdzone jeszcze raz przez DERSKIEGO i autora, [22], w oparciu o zasadę niezmienniczości funkcji stanu (energii wewnętrznej) względem ruchu sztywnego ośrodka.

Pozostając przy modelu ośrodka porowatego z konsystentnym szkieletem, wypełnionego cieczą, autor w pracy [54] wykazał, że równania BIOTA, [3], i DERSKIEGO, [17], mimo różnej formy matematycznej, są równoważne pod względem treści tj. opisują te same zjawiska fizyczne. Przytaczając podstawową tezę pracy [54] możemy powiedzieć, że BIOT w swoich rozważaniach wyraził energię kinetyczną w postaci pełnej formy kwadratowej, podczas gdy DERSKI, z punktu widzenia równań Lagrange'a, użył równoważnej kanonicznej formy kwadratowej. Zatem do równań podanych przez DERSKIEGO można dojść drogą zaproponowaną przez BIOTA, jeżeli równania Lagrange'a wyrazi się we współrzędnych normalnych (głównych).

W tej pracy nie będziemy korzystać z równań Lagrange'a. Wykorzystamy jednakże sens współrzędnych normalnych. Istotą tych współrzędnych jest to, że dają się w nich wyrazić prawa zachowania, czy też równania bilansu dla mieszaniny ze sprzężeniem ruchu przez masę. Inną istotną cechą tych współrzędnych jest, że wielkości kinematyczne takie jak przemieszczenia, prędkości przemieszczeń wyrażone przy ich pomocy są wielkościami naturalnymi (rzeczywistymi). Znaczenie tej ostatniej cechy doceniamy przy formułowaniu problemów brzegowych w teorii mieszanin. Na brzegu obszaru spotykamy się bowiem z obiektywnie istniejącą rzeczywistością. Jeśli równania lokalne wyrażające ruch, stan termodynamiczny itp.

we wnętrzu obszaru są wyrażone za pomocą wielkości nierzeczywistych, to powiązanie zjawisk zachodzących we wnętrzu z obiektywną rzeczywistością na brzegu napotyka na trudności. Tak jest np. w przypadku równań BIOTA, [3], w których przemieszczenia i prędkości przemieszczeń mają sens wielkości średnich barycentrycznych (por. rozdział I oraz prace [54], [55]). Trudności z formułowaniem warunków brzegowych mogą się pojawić, jeśli równania ruchu mieszaniny będziemy ustanawiać w oparciu o trzecią zasadę metafizyczną Truesdella.* Trudności te wyłaniają się stąd, że kinematyczne wielkości barycentryczne odnoszą się do środków mas wieloskładnikowych "cząstek", a więc nie istnieją na powierzchni brzegowej mieszaniny (por. rozdział VI).

Inną zaletą współrzędnych normalnych jest też to, że rzucają one pewne światło na dotychczasowe dyskusyjne kwestie w teorii mieszanin: między innymi parcjalny tensor naprężenia (por. [9], [42], [80], [82], [84]), globalny tensor naprężenia (por. [34]), sposób bilansowania energii i entropii (por. [84]) itp.

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest N -składnikowa mieszanina ciał odkształcalnych. Uwzględnia się przy tym efekty wynikające z ruchu względnego składników (siły dyfuzji) oraz efekty cieplne przy założeniu różnych temperatur składników. Całe rozumowanie oparte jest na konstrukcji globalnych równań bilansu i funkcji stanu. Rozważania prowadzi się na gruncie termodynamiki procesów nieodwracalnych dla procesów bliskich stanowi równowagi. Zakłada się przy tym, że mieszanina stanowi

* The motion of the mixture is governed by the same equations as a single body.

ośrodek jednorodny i izotropowy, a składniki są względem siebie chemicznie obojętne. Nie nakłada się żadnych ograniczeń na przemieszczenia i prędkości przemieszczeń składników. Przyjmuje się natomiast, że gradienty tych wielkości są małe.

Niniejsza praca ma na celu:

Po pierwsze, wprowadzenie do teorii mieszanin jakościowo nowego efektu jakim jest sprzężenie ruchu przez masę. Efekt ten nie był dotychczas brany pod uwagę w pracach dotyczących teorii mieszanin, a może mieć istotne znaczenie przy analizie propagacji fal.

Po drugie, w związku z wprowadzeniem do rozważań sprzężeń ruchu przez masę, proponuje się koncepcję współrzędnych normalnych jako efektywną metodę analizy ruchu sprzężonego.

Po trzecie, wyeliminowanie z dotychczasowych równań teorii mieszanin tzw. wielkości średnich wagowych (barycentrycznych) i wyrażenie ich za pomocą wielkości bardziej adekwatnych do rzeczywistości, tj. wielkości wyrażonych za pomocą współrzędnych normalnych. Głównym powodem podjęcia tego zamierzenia są trudności z formułowaniem warunków brzegowych dla równań wyrażonych za pomocą wielkości średnich barycentrycznych.

Po czwarte, rzucenie nowego światła na stosowane dotychczas, lecz różnie interpretowane pojęcia parcjalnego i globalnego tensora naprężenia.

Po piąte, przedstawienie w miarę prostej i jasno zinterpretowanej metody bilansu energii i entropii. Na ich podstawie wyciągnięcie wniosków odnośnie uogólnionego prawa przepływu ciepła, wymiany ciepła pomiędzy składnikami i postaci sił dyfuzji (tarcia).

Po szóste, przedstawia się propozycję związków fizycznych i równania przewodnictwa ciepła dla ogólnej teorii mieszaniny ciał odkształcalnych.

Niniejsza praca pretenduje do przedstawienia teorii zamkniętej, tzn. efektem końcowym jest pełny zestaw równań teorii mieszanin z uwagami na temat formułowania warunków brzegowych.

Praca składa się z 7 rozdziałów. W rozdziale I przedstawiono szczegółowo istotę sprzężenia ruchu przez masę w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą. Wyprowadzając równania ruchu dla tego ośrodka na podstawie równań Lagrange'a, zasugerowano sens współrzędnych normalnych. Ponadto, w rozdziale tym zaprezentowano własny punkt widzenia autora dotyczący interpretacji współczynników w równaniach ruchu BIOTA, [3]. Współczynniki te nie posiadały dotąd jasnej interpretacji i budziły wiele kontrowersji w kręgu zainteresowanych.

Rozdział II poświęcono kinematyce ośrodka wieloskładnikowego. Wskazano na znaczenie sprzężeń ruchu przez masę oraz uzasadniono potrzebę wprowadzenia dwójakiego podziału mieszaniny: ze względu na własności fizyczne (składniki fizyczne) oraz ze względu na naturalne pola prędkości (składniki kinematyczne). Naszkicowano sposób opisu ruchu mieszaniny za pomocą współrzędnych normalnych. Wprowadzono pojęcia udziału objętościowego, powierzchniowego i masowego składników oraz zdefiniowano energię kinetyczną mieszaniny we współrzędnych normalnych. W ostatnim punkcie tego rozdziału podano równania ciągłości masy i wskazano, że masa składnika kinematycznego w ogólnym przypadku nie musi być zachowana.

W rozdziale III dokonano krytycznej oceny prezentowanych w literaturze poglądów na temat parcjalnego tensora naprężenia oraz zaproponowano definicję tej wielkości z punktu widzenia współrzędnych normalnych. W kolejnych punktach tego rozdziału

dokonano bilansu pędu oraz momentu pędu i wyprowadzono równania ruchu mieszaniny.

W rozdziale IV, poświęconym termodynamicznym podstawom teorii mieszanin dokonano bilansu energii i entropii. Formalnie przyjęto, że temperatury składników są różne, aczkolwiek w rozważaniach posługiwano się równaniem Gibbsa. Bilansując entropię określono funkcję dysypacji energii. Na podstawie ograniczeń wynikających z drugiej zasady termodynamiki i postulatu, że funkcja dysypacji ma postać formy kwadratowej dodatnio określonej zaproponowano postać prawa przepływu ciepła w mieszaninie oraz postać sił dyfuzji. Posługując się klasycznym równaniem Gibbsa dla układu otwartego zastosowanym do dowolnego składnika fizycznego określono funkcję wymiany masy pomiędzy składnikami kinematycznymi.

Rozdział V poświęcono równaniom konstytutywnym. Wykorzystując funkcję energii swobodnej rozwiniętą w szereg Taylora i równania stanu wyspecyfikowano związki fizyczne i funkcje stanu. W punkcie 5.4 tego rozdziału wyprowadzono równania przewodnictwa dla mieszaniny.

W rozdziale VI zestawiono funkcje niewiadome, które należałoby określić przy rozwiązywaniu problemów początkowo-brzegowych w teorii mieszanin oraz równania służące do ich określenia. W punkcie 6.2 tego rozdziału wskazano na trudności jakie mogą wyniknąć przy formułowaniu warunków brzegowych, jeśli równania teorii będą wyrażone za pomocą wielkości średnich barycentrycznych.

W rozdziale VII przedstawiono przykład, w którym ilustruje się przejście z równań ogólnych do równań teorii termokonsolidacji zaprezentowanej w pracach [18], [20], [21].

Rozdział I

PROBLEM SPRZĘŻENIA RUCHU PRZEZ MASĘ

W TEORII KONSOLIDACJI

1.1. Analiza kinematyczna ośrodka porowatego wypełnionego cieczą

Zanim przystąpimy do systematycznego ujęcia problematyki teorii mieszanin z uwzględnieniem sprzężeń ruchu przez masę, pragniemy wprowadzić Czytelnika w to zagadnienie na modelu prostszym. W tym rozdziale ograniczymy się mianowicie do ośrodka dwuskładnikowego, a ściślej mówiąc do ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Czynimy to przede wszystkim dlatego, że teoria ośrodka porowatego wypełnionego cieczą, zwana teorią konsolidacji, posiada już pewne tradycje*, aczkolwiek nie została jeszcze zupełnie ugruntowana.

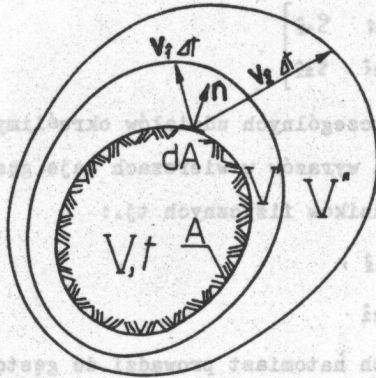
Teoria konsolidacji i teoria mieszanin mimo, że obie traktują o ośrodku wieloskładnikowym, uważane były do tej pory za

* Sformułowanie ogólnej teorii odkształcalnego ośrodka porowatego wypełnionego cieczą należy do BIOTA (1941r.), [2], chociaż za twórcę teorii konsolidacji uważany jest TERZAGHI (1925r.), [75]. Systematyczne ujęcie teorii mieszanin należy do TRUESDELLA (1957r.), który opracował teorię mechaniczną, [78], a następnie rozwinął teorię termodynamiczną, [79]. Pewne przyczynki do teorii mieszanin wnieśli FICK (1855r.), STEPAN (1871r.) i inni (patrz [41]).

dwie oddzielne dyscypliny (por. przegląd literatury w pracy DZIĘCIELAKA, [27]). We WSTĘPIE zasygnalizowaliśmy, że przyczyną rozbieżności tych dwóch teorii jest pominięcie efektu sprzężeń ruchu przez masę w teorii mieszanin. Efekt ten jest uwzględniony w teorii konsolidacji i odgrywa istotną rolę przy analizie fal w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą (por. np. prace BIOTA, [3], [4], [5], [6], DERESIEWICZA, [13], [14], DERESIEWICZA i RICA, [15], DERESIEWICZA i WOLFA, [16] i inne.

Chęć unaocznienia efektu sprzężenia ruchu przez masę nie jest jedyną przyczyną prezentowania w tej pracy teorii ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Jak wspomnieliśmy wyżej, teoria ta nie jest jeszcze ugruntowana. Przede wszystkim, współczynniki formy kwadratowej, za pomocą której BIOT wyraził energię kinetyczną, (por. [3]), nie posiadają jasnej interpretacji fizycznej. Próby indywidualnego interpretowania tych współczynników przez poszczególnych badaczy prowadzą do szeregu nieporozumień. Różne opinie na ten temat można usłyszeć na seminariach i podczas dyskusji w kręgu zainteresowanych. Podejmuje się też próby wyprowadzenia równań BIOTA na podstawie zasady zachowania pędu (BIOT wyprowadził swoje równania operując się na równaniach Lagrange'a). Pokażemy wkrótce, że są to próby raczej daremne.

Rozważania rozpoczniemy od analizy kinematycznej i napisania równań pędu. W tym celu wyodrębnijmy w przestrzeni zajętej w sposób ciągły przez szkielet i przez ciecz pewną objętość V , ograniczoną gładką powierzchnią A , zorientowaną w kierunku na zewnątrz jednostkowym wektorem normalnym \mathbf{n} (rys. 1).



Rys. 1. Konfiguracja przestrzenna ośrodka porowatego wypełnionego cieczą.

Konfiguracja V w chwili t przejdzie w konfiguracje V' i V'' w chwili $t + \Delta t$. Konfiguracje V' i V'' są zdeterminowane przez dwa rzeczywiste pola prędkości $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{v}_2(\mathbf{x}, t)$. Załóżmy, że pierwsze z tych pól opisuje ruch szkieletu wraz z pewną ilością cieczy, która porusza się wraz ze szkieletem. Drugie natomiast pole niech opisuje ruch cieczy wraz z pewnymi częstkami szkieletu, o ile szkielet jest niekonsystentny. Niech ρ_1 oznacza parcjalaną gęstość szkieletu, natomiast ρ_{1f} i ρ_{1s} te jej części, które poruszają się odpowiednio z prędkością \mathbf{v}_1 i \mathbf{v}_2 . Z kolei niech ρ_2 oznacza parcjalaną gęstość cieczy, a ρ_{2f} i ρ_{2s} te jej części, którym przypisana jest prędkość odpowiednio \mathbf{v}_1 i \mathbf{v}_2 .

Wprowadzimy pojęcie macierzy udziałów masowych, którą

w odniesieniu do ośrodka porowatego wypełnionego cieczą określimy jak następuje:

$$(1.1.1) \quad \begin{bmatrix} \rho_{\alpha\alpha} \\ \rho_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}.$$

Sposób wyznaczania poszczególnych udziałów określimy w punkcie 1.3. Teraz zauważmy, że suma wyrazów w wierszach daje gęstości parcjalne poszczególnych składników fizycznych tj.:

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} \rho_1 &= \rho_{11} + \rho_{12}, \\ \rho_2 &= \rho_{21} + \rho_{22}. \end{aligned}$$

Suma wyrazów w kolumnach natomiast prowadzi do gęstości pewnych mas o tych samych prędkościach tj.:

$$(1.1.3) \quad \begin{aligned} \rho_1^* &= \rho_{11} + \rho_{21}, \\ \rho_2^* &= \rho_{12} + \rho_{22}. \end{aligned}$$

Te ostatnie gęstości będziemy w dalszym ciągu nazywać gęstościami składników kinematycznych.

Globalna gęstość ośrodka jest następującą sumą:

$$(1.1.4) \quad \rho = \rho_1 + \rho_2 = \rho_1^* + \rho_2^*.$$

Równania pędów możemy zapisać na dwa sposoby:

- dla składników fizycznych:

$$(1.1.4a) \quad \mathbf{P}_1 = \int_V (\rho_{11} \mathbf{v}_1 + \rho_{12} \mathbf{v}_2) dV,$$

$$(1.1.4b) \quad \mathbf{P}_2 = \int_V (\rho_{21} \mathbf{v}_1 + \rho_{22} \mathbf{v}_2) dV,$$

- dla składników kinematycznych:

$$(1.1.5a) \quad \mathbf{P}_1^* = \int_V \rho_1^* \mathbf{v}_1 dV,$$

$$(1.1.5b) \quad \mathbf{P}_2 = \int_V \rho_2 \mathbf{v}_2 dV.$$

Prędkość zmian tych pędów wyrażają równania:

$$(1.1.6a) \quad \dot{\mathbf{P}}_1 = \frac{d^1}{dt} \int_V (\rho_1 \mathbf{v}_1) dV + \frac{d^2}{dt} \int_V (\rho_{12} \mathbf{v}_2) dV,$$

$$(1.1.6b) \quad \dot{\mathbf{P}}_2 = \frac{d^1}{dt} \int_V (\rho_2 \mathbf{v}_1) dV + \frac{d^2}{dt} \int_V (\rho_{22} \mathbf{v}_2) dV,$$

$$(1.1.7a) \quad \dot{\mathbf{P}}_1 = \frac{d^1}{dt} \int_V (\rho_1 \mathbf{v}_1) dV,$$

$$(1.1.7b) \quad \dot{\mathbf{P}}_2 = \frac{d^2}{dt} \int_V (\rho_2 \mathbf{v}_2) dV,$$

przy czym d^1/dt i d^2/dt oznaczają pochodne materialne z prędkościami konwekcji odpowiednio \mathbf{v}_1 i \mathbf{v}_2 .

Równania bilansu pędu i na ich podstawie równania ruchu napiszemy w punkcie 1.4. Przedtem nasświetlimy sposób ich otrzymywania za pomocą równań Lagrange'a, zaproponowany przez BIOTA, [3]. Dla tego celu konieczne jest określenie energii kinetycznej. Energia ta, odniesiona do jednostki objętości, przyjmuje w naszym przypadku postać:

$$(1.1.8) \quad \mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} (\rho_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2).$$

BIOT napisał tę energię w postaci pełnej formy kwadratowej. Zachodzi więc pytanie: kiedy energia kinetyczna przyjmie postać pełnej formy kwadratowej? Głębsza analiza zagadnienia (patrz twierdzenia dotyczące przejścia z pełnej do kanonicznej formy kwadratowej zamieszczone np. w książce JEFIMOWA i ROZENDORNA, [43]) oraz częściowa interpretacja fizyczna współczynników pełnej formy podana przez BIOTA, [3], sugerują przypuszczenie, że energia kinetyczna ma postać pełnej formy kwadratowej, jeśli jest ona wyrażona przez średnie barycentryczne prędkości ruchu składników fizycznych.

Prędkości te w naszym przypadku wyrażają się jak następuje:

$$(1.1.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}_1 \mathbf{V}_1 &\stackrel{df}{=} \mathcal{S}_{11} \mathbf{V}_1 + \mathcal{S}_{12} \mathbf{V}_2, \\ \mathcal{S}_2 \mathbf{V}_2 &\stackrel{df}{=} \mathcal{S}_{21} \mathbf{V}_1 + \mathcal{S}_{22} \mathbf{V}_2. \end{aligned}$$

Jeśli rozwiążemy układ równań (1.1.9) względem prędkości rzeczywistych \mathbf{V}_1 i \mathbf{V}_2 i otrzymane zależności podstawimy do wzoru (1.1.8), to otrzymamy następującą postać energii kinetycznej:

$$(1.1.10) \quad \mathcal{X}_1 = \frac{1}{2} (B_{11} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + 2B_{12} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 + B_{22} \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2),$$

gdzie:

$$(1.1.11) \quad \begin{aligned} B_{11} &= \frac{\mathcal{S}_1^2}{W^2} [(\mathcal{S}_{11} + \mathcal{S}_{21}) \mathcal{S}_{22}^2 + (\mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{22}) \mathcal{S}_{21}^2], \\ B_{12} &= -\frac{\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2}{W^2} [(\mathcal{S}_{11} + \mathcal{S}_{21}) \mathcal{S}_{12} \mathcal{S}_{22} + (\mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{22}) \mathcal{S}_{21} \mathcal{S}_{11}], \\ B_{22} &= \frac{\mathcal{S}_2^2}{W^2} [(\mathcal{S}_{11} + \mathcal{S}_{21}) \mathcal{S}_{12}^2 + (\mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{22}) \mathcal{S}_{11}^2], \\ W &= \det [\mathcal{S}_{\alpha\beta}]. \end{aligned}$$

Wyżej wypisane współczynniki $B_{\alpha\beta}$ nie mogą być utożsamiane ze współczynnikami udziałów masowych $\mathcal{S}_{\alpha\alpha}$, jak to się niekiedy sądzi.

Macierz $[B_{\alpha\beta}]$ jest macierzą sześć na sześć. Forma (1.1.10) odpowiada ośrodkowi izotropowemu i w tym przypadku macierz $[B_{\alpha\beta}]$ przyjmuje prostszą postać, [54]:

$$(1.1.12) \quad [B_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & B_{12} & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & 0 & 0 & B_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{11} & 0 & 0 & B_{12} \\ B_{12} & 0 & 0 & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & B_{12} & 0 & 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{12} & 0 & 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

Czy współczynniki $B_{\alpha\beta}$ odpowiadają tym, które występują w definicji energii kinetycznej podanej przez BIOTA (BIOT oznaczał: $B_{11} \equiv \mathcal{S}_{11}$, $B_{12} \equiv \mathcal{S}_{12}$, $B_{22} \equiv \mathcal{S}_{22}$)? Należy przypuszczać, że tak bowiem współczynniki te, zgodnie z ich interpretacją podaną przez BIOTA muszą spełniać warunki:

$$(1.1.13) \quad \begin{aligned} B_{41} + B_{42} &= s_1, & B_{41} &> 0, \\ B_{22} + B_{42} &= s_2, & B_{42} &\leq 0, \\ B_{41} + 2B_{42} + B_{22} &= s, & B_{22} &> 0, \\ B_{41} B_{22} - B_{42}^2 &> 0. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że współczynniki (1.1.11) spełniają te warunki. Świadczy to o tym, że forma (1.1.10) pokrywa się dokładnie z tą, jaką postulował BIOT, [3].

Reasumując stwierdzamy, że w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą energię kinetyczną można wyrazić w dwóch równoważnych postaciach: w postaci kanonicznej i w postaci pełnej formy kwadratowej. Stwierdzenie to ma charakter bardziej ogólny w tym sensie, że odnosi się do dowolnej N-składnikowej mieszaniny, w której zachodzi ruch sprzężony. Do tematu tego wrócimy w następnym rozdziale.

Obecnie pokażemy jakie konsekwencje wynikają ze stosowania pełnej lub kanonicznej formy przy wyprowadzaniu równań ruchu na podstawie równań Lagrange'a.

1.2. Równania ruchu ośrodka porowatego wypełnionego cieczą z punktu widzenia Lagrange'a

Przyjmujemy słuszność następujących założeń:

- ośrodek porowaty jest jednorodny i izotropowy,
- w każdym punkcie przestrzeni znajduje się reprezentacja każdego składnika,
- istnieje możliwość dwójakiego podziału dwuskładnikowej "cząsteczki" mającej masę właściwą ρ :

I. podział fizyczny: na "cząsteczkę" szkieletu o gęstości

parcjalnej ϱ_1 i "cząsteczkę" cieczy o gęstości parcjalnej ϱ_2 ;

$$S = S_1 + S_2.$$

II. podział kinematyczny: na "cząstkę" poruszającą się z

prędkością rzeczywistą \mathbf{V}_1 o gęstości parcjalnej ϱ_1 i

"cząsteczkę" poruszającą się z prędkością rzeczywistą \mathbf{V}_2

o gęstości parcjalnej ϱ_2 ; $S = S_1 + S_2$,

- wyżej wymienione cząsteczki traktujemy jako punkty materialne,
- dwuskładnikowa "cząsteczka" jako złożona z dwóch punktów materialnych, mających swobodę ruchu posiada sześć stopni swobody,
- masy poszczególnych składników fizycznych i kinematycznych w jednostce objętości całkowitej są stałe, tzn. nie ulegają zmianie w trakcie ruchu.

Zgodnie z przyjętymi założeniami, dla opisanie ruchu każdej dwuskładnikowej "cząsteczki" należy zadać sześć współrzędnych uogólnionych. Będą to:

- trzy współrzędne wektora przemieszczenia szkieletu i trzy współrzędne wektora przemieszczenia cieczy przy podziale fizycznym:

$$(1.2.1) \quad \left\{ \xi_L ; L = 1, 2, \dots, 6 \right\} = \left\{ u_1^1, u_1^2, u_1^3, u_2^1, u_2^2, u_2^3 \right\},$$

lub też:

- trzy współrzędne wektora przemieszczenia składnika kinematycznego $\hat{1}$ (o prędkości \mathbf{V}_1) i trzy współrzędne wektora przemieszczenia składnika kinematycznego $\hat{2}$ (o prędkości \mathbf{V}_2) przy podziale kinematycznym:

$$(1.2.2) \quad \left\{ \xi_L ; \hat{L} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{6} \right\} = \left\{ u_1^1, u_1^2, u_1^3, u_2^1, u_2^2, u_2^3 \right\}.$$

Równania ruchu ośrodka porowatego wypełnionego cieczą wyprowadzimy przy pomocy równań Lagrange'a, [3]:

$$(1.2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{K}_L}{\partial \dot{\xi}_L} + \frac{\partial D_L}{\partial \xi_L} = g_L ; \quad L = 1, 2, \dots, 6$$

gdzie:

\mathcal{K}_1 - oznacza energię kinetyczną na jednostkę objętości,

D_1 - oznacza energię dysypowaną na jednostkę objętości,

g_L - oznacza uogólnioną siłę na jednostkę objętości.

Wykorzystując definicję współrzędnych uogólnionych (1.2.1), możemy równania (1.2.3) zapisać w równoważnej postaci:

$$(1.2.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial \dot{u}_1^i} + \frac{\partial D_1}{\partial \dot{u}_1^i} = g_1^i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial \dot{u}_2^i} + \frac{\partial D_1}{\partial \dot{u}_2^i} = g_2^i; \quad i = 1, 2, 3$$

przy czym:

$$(1.2.5) \quad \mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} (B_{11} \dot{u}_1^i \dot{u}_1^i + 2B_{12} \dot{u}_1^i \dot{u}_2^i + B_{22} \dot{u}_2^i \dot{u}_2^i),$$

$$D_1 = \frac{1}{2} b (\dot{u}_1^i - \dot{u}_2^i)(\dot{u}_1^i - \dot{u}_2^i),$$

$$g_\alpha^i = \sigma_{j,i}^\alpha + \varrho_\alpha X_i; \quad \alpha = 1, 2.$$

W powyższych wzorach energię kinetyczną przepisano zgodnie ze wzorem (1.1.10) przyjmując $\mathbf{V}_1 = \dot{\mathbf{U}}_1$ i $\mathbf{V}_2 = \dot{\mathbf{U}}_2$. Funkcję dysypacji energii, która zależy wyłącznie od ruchu względnego składników, przyjęto za BIOTEM, [3], jako jednorodną kwadratową formę prędkości względnych. Podobnie za BIOTEM przyjęto, że siła uogólniona jest równa dywergencji tensora naprężenia $\sigma_{j,i}^\alpha$, przy czym dla cieczy $\sigma_{j,i}^2 = \delta_{ij}^2$. Tutaj założyliśmy dodatkowo, że częścią siły uogólnionej jest siła masowa $\varrho_\alpha X_i$.

Równania (1.2.4), po wykorzystaniu (1.2.5), możemy przepisać w następującej postaci:

$$(1.2.6) \quad \sigma_{j,i}^1 + \varrho_1 X_i + b(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i) = B_{11} \ddot{u}_1^i + B_{12} \ddot{u}_2^i,$$

$$\sigma_{j,i}^2 + \varrho_2 X_i - b(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i) = B_{12} \ddot{u}_1^i + B_{22} \ddot{u}_2^i.$$

Są to równania ruchu ośrodka porowatego wypełnionego cieczą, podane przez BIOTA, [3]. Po prawej stronie tych równań widoczne są człony wyrażające sprzężenie ruchu przez masę.

Obecnie, równania Lagrange'a wyrazimy we współrzędnych opisujących położenie składników kinematycznych. Wykorzystując ich definicję (1.2.2) możemy napisać przez analogię do (1.2.4):

$$(1.2.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial \dot{u}_1} + \frac{\partial D_1}{\partial \dot{u}_1} = g_1^i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial \dot{u}_2} + \frac{\partial D_1}{\partial \dot{u}_2} = g_2^i; \quad i=1,2,3.$$

przy czym tutaj:

$$(1.2.8) \quad \mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} (S_1 \dot{u}_1^i \dot{u}_1^i + S_2 \dot{u}_2^i \dot{u}_2^i),$$

$$D_1 = \frac{1}{2} \hat{b} (\dot{u}_1^i - \dot{u}_2^i)(\dot{u}_1^i - \dot{u}_2^i),$$

$$g_\alpha^i = G_{j,i}^{\hat{\alpha}} + S_\alpha X_i.$$

Współrzędne opisujące położenie składników kinematycznych nazywać będziemy **współrzędnymi normalnymi**.

Ich charakterystyczną cechą jest, że energia kinetyczna wyrażona w tych współrzędnych posiada postać kanoniczną formy kwadratowej. Równania ruchu wyrażone we współrzędnych normalnych przedstawiają się następująco:

$$(1.2.9) \quad G_{j,i}^{\hat{\alpha}} + S_1 X_i + \hat{b} (\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i) = S_1 \ddot{u}_1^i,$$

$$G_{j,i}^{\hat{\alpha}} + S_2 X_i - \hat{b} (\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i) = S_2 \ddot{u}_2^i.$$

Zależność pomiędzy naprężeniami $G_{j,i}^{\hat{\alpha}}$ i $G_{j,i}^{\alpha}$ otrzymujemy z warunku, że moce sił uogólnionych na odpowiadających im prędkościach przemieszczeń możliwych są równe tj.:

$$(1.2.10) \quad \sum_{\alpha=1}^2 G_{j,i}^{\hat{\alpha}} \delta \dot{u}_\alpha^i = \sum_{\alpha=1}^2 G_{j,i}^{\alpha} \delta \dot{u}_\alpha^i.$$

Wykorzystamy zależności (1.1.9), na podstawie których znajdujemy:

$$(1.2.11) \quad \delta \dot{u}_\alpha^i = \frac{\varrho_{\alpha 1}^1}{\varrho_\alpha} \delta \dot{u}_1^i + \frac{\varrho_{\alpha 2}^2}{\varrho_\alpha} \delta \dot{u}_2^i; \quad \alpha = 1, 2.$$

Po podstawieniu do (1.2.10) zależności (1.2.5)₃, (1.2.8)₃ i (1.2.11) i przyrównaniu wyrazów występujących przy odpowiednich prędkościach przemieszczeń możliwych po obu stronach równania mamy:

$$(1.2.12) \quad \begin{aligned} \hat{G}_{j^i, j}^1 &= \hat{G}_{j^i, j}^1 \frac{\varrho_{11}^1}{\varrho_1} + \hat{G}_{j^i, j}^2 \frac{\varrho_{21}^1}{\varrho_2}, \\ \hat{G}_{j^i, j}^2 &= \hat{G}_{j^i, j}^1 \frac{\varrho_{12}^2}{\varrho_1} + \hat{G}_{j^i, j}^2 \frac{\varrho_{22}^2}{\varrho_2}. \end{aligned}$$

Związki (1.1.2), (1.1.3), (1.1.9), (1.1.10), (1.1.12), (1.2.12) oraz zależność

$$(1.2.13) \quad \hat{b} = b \left(\frac{w}{\varrho_1 \varrho_2} \right)^2; \quad w = \det [\varrho_{\alpha \dot{\alpha}}]$$

pozwalają przetransformować układ równań (1.2.6) w układ równań (1.2.9) i na odwrót. Świadczy to, że układy te są równoważne w sensie opisywanych przez nie zjawisk. Sprzężenia ruchu przez masę widoczne po prawej stronie równań (1.2.6) zostały uwzględnione, lecz w odmienny sposób, w równaniach (1.2.9). Wyrażają się one poprzez udziały masowe danych składników w ruchu innych składników. Możemy też powiedzieć, że równania (1.2.9) są równaniami ruchu dwóch kontinuu o gęstościach odpowiednio ϱ_1 i ϱ_2 , które są scharakteryzowane poprzez rzeczywiste pola przemieszczeń u_1 i u_2 , bądź też prędkości przemieszczeń $\dot{u}_1 = v_1$ i $\dot{u}_2 = v_2$. Należy tu podkreślić zalety równań (1.2.9) w stosunku do (1.2.6):

- po pierwsze: wielkości kinematyczne takie jak: przemieszczenie u_α , prędkość $\dot{u}_\alpha = v_\alpha$, przyspieszenie \ddot{u}_α , są wielkościami rzeczywistymi,
- po drugie: forma matematyczna równań (1.2.9) jest prostsza w stosunku do (1.2.6),

- po trzecie: równania (1.2.9) można wyprowadzić korzystając z równań bilansu pędu, podczas gdy w przypadku równań (1.2.6) jest to raczej niemożliwe.

Na zakończenie tego punktu zwróćmy jeszcze uwagę na dwie rzeczy:

- gdy szkielet ośrodka porowatego jest konsystentny, to $\varrho_{12} \equiv 0$, a równania (1.2.9) odpowiadają równaniom prezentowanym przez DERSKIEGO, [17],
- gdy przyjmiemy również $\varrho_{21} = 0$, to równania (1.2.6) i (1.2.9) mają taką samą postać:

$$(1.2.14) \quad \begin{aligned} \sigma_{j,j}^1 + \varrho_1 X_i + b(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i) &= \varrho_1 \ddot{u}_1^i, \\ \sigma_{j,j}^2 + \varrho_2 X_i - b(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i) &= \varrho_2 \ddot{u}_2^i. \end{aligned}$$

Taką postać równań ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą otrzymalibyśmy na podstawie dotychczasowej teorii mieszanin. Jak widać, nie opisują one sprzężeń ruchu przez masę.

1.3. Równania bilansu masy

W punkcie 1.1 wprowadziliśmy pojęcie udziałów masowych, nie mówiąc nic o sposobie ich wyznaczania. Obecnie zajmiemy się tym zagadnieniem przy okazji bilansowania masy. Rozważania prowadzić będziemy bazując na ogólnej teorii równania bilansu w opisie przestrzennym. W odniesieniu do masy, równanie to wyraża zmiany masy w objętości, spowodowane strumieniem masy przez powierzchnię oraz ewentualnymi źródłami masy. Napisanie równania bilansu dla ośrodka jednoskładnikowego nie nastręcza trudności, gdyż składnik ten wypełnia całkowicie myślowo wyodrębnioną objętość

i jest gęsto rozłożony na powierzchni bilansowej oraz scharakteryzowany przez jedno pole prędkości. Zachodzi natomiast pytanie: jak można zbilansować masę danego składnika w mieszaninie, który posiada jedynie pewien udział na powierzchni, a ponadto pole prędkości tego składnika na powierzchni może być, wskutek sprzężenia ruchu przez masę, niejednorodne. Otóż równanie bilansu sugeruje, że warunkiem koniecznym poprawnego zbilansowania masy danego składnika w mieszaninie jest znajomość jego udziału w objętości i względem powierzchni, a ponadto rozróżnienie jego udziałów powierzchniowych o danych prędkościach.

Powyższe stwierdzenie ogólne wyrazimy formułami matematycznymi. W tym celu wyodrębnijmy pewną objętość V wypełnioną przez ośrodek porowaty wypełniony cieczą. Część V_1 tej objętości zajmuje szkielet, a część V_2 ciecz, przy czym $V = V_1 + V_2$. Masę szkieletu oraz cieczy możemy formalnie wyrazić następującymi całkami:

$$(1.3.1) \quad m_1 = \int_{V_1} \rho_1^{rz} dV, \\ m_2 = \int_{V_2} \rho_2^{rz} dV,$$

gdzie ρ_1^{rz} i ρ_2^{rz} oznaczają rzeczywiste gęstości szkieletu i cieczy.

Budujemy teorię kontynualną. Zakładamy więc, że trójwymiarową przestrzeń Euklidesa R^3 wypełnia bez reszty ośrodek dwuskładnikowy. Można go zdefiniować podając zbiór V_1 - "ziaren, które tworzą szkielet" i jego dopełnienie V_2 - "pory".

Celem opisu takiego ośrodka porowatego można wprowadzić pewną funkcję alternatywną $f(\mathbf{x})$, którą nazywamy "porowatością". Definiuje się ją jak następuje:

$$f(\mathbf{x}) = 1, \text{ jeżeli } \mathbf{x} \text{ znajduje się w porach,}$$

$f(x) = 0$ jeżeli x znajduje się w ziarnach szkieletu.

Z eksperymentalnego punktu widzenia, ośrodek porowaty charakteryzuje się przez wybór stałych parametrów makroskopowych takich jak: porowatość średnia, przepuszczalność itp. Zakłada się przy tym zawsze, że do pomiarów użyty jest ośrodek o objętości wielokrotnie większej w porównaniu do wymiarów granulometrycznych tego ośrodka. Zakłada się też dodatkowo, że tą dużą objętość można wydzielić w dowolnym miejscu przestrzeni zajmowanej przez ośrodek. Tak pojęta jednorodność ma naturę czysto statystyczną. Możemy zatem powiedzieć, że tak pojęta jednorodność statystyczna $f(x)$ jest realizacją pewnej funkcji losowej alternatywnej, ergodycznej i stacjonarnej. Hipoteza ta jest matematycznym sformułowaniem obserwacji doświadczalnej: istnienia jednorodnego ośrodka porowatego.

Funkcję losową $f(x)$ można zastąpić odpowiednią nadzieją matematyczną. Zatem, porowatość średnia równa się średniej wartości $f(x)$ w dostatecznie dużej objętości:

$$\frac{1}{V} \int f(x) dV(x).$$

W praktyce, porowatość objętościową definiujemy jak następuje:

$$(1.3.2a) \quad f_2^V \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dV_2}{dV}.$$

Porowatość objętościowa oznacza jednocześnie udział cieczy w danej objętości. Analogicznie możemy określić udział szkieletu w danej objętości:

$$(1.3.2b) \quad f_1^V \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dV_1}{dV}.$$

Wykorzystując pojęcia udziałów objętościowych (1.3.2a i b), możemy dokonać zamiany zmiennych pod całkami (1.3.1) i określić masy

składników jak następuje:

$$(1.3.3) \quad m_1 = \int_V \rho_1 dV ; \quad \rho_1 = \rho_1^{rz} f_1^V,$$

$$m_2 = \int_V \rho_2 dV ; \quad \rho_2 = \rho_2^{rz} f_2^V,$$

przy czym ρ_1 i ρ_2 nazywamy gęstościami parcjalnymi szkieletu i cieczy. Całki (1.3.3) są dobrze określone tak ze względu na funkcję podcałkową jak i na obszar całkowania.

Równania bilansu masy szkieletu i cieczy możemy formalnie wyrazić jak następuje:

$$(1.3.4) \quad \dot{m}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} \rho_1^{rz} dV_1 + \oint_{A_{1\hat{1}}} \rho_1^{rz} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} dA_{1\hat{1}} + \oint_{A_{1\hat{2}}} \rho_1^{rz} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} dA_{1\hat{2}} = 0,$$

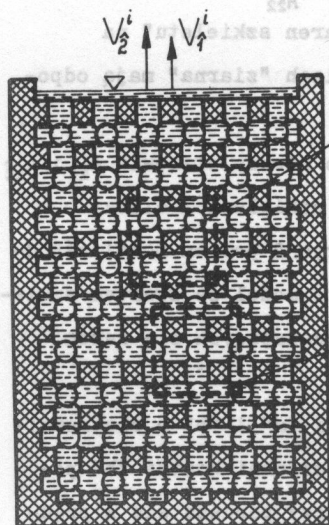
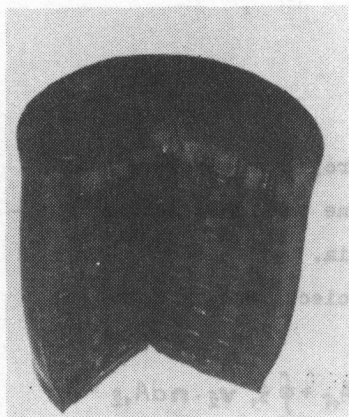
$$\dot{m}_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_2} \rho_2^{rz} dV_2 + \oint_{A_{2\hat{1}}} \rho_2^{rz} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} dA_{2\hat{1}} + \oint_{A_{2\hat{2}}} \rho_2^{rz} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} dA_{2\hat{2}} = 0,$$

gdzie $A_{1\hat{1}}$ i $A_{1\hat{2}}$ oznaczają powierzchnie "ziaren szkieletu" na powierzchni A , na których to powierzchniach "ziarna" mają odpowiednio prędkości \mathbf{v}_1 i \mathbf{v}_2 .

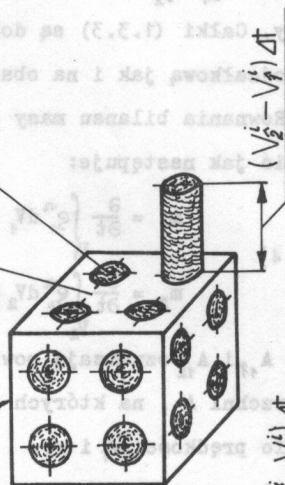
Analogiczne powierzchnie w odniesieniu do cieczy stanowią $A_{2\hat{1}}$ i $A_{2\hat{2}}$. Celem bliższego unaocznienia powierzchni szkieletu i cieczy o danych prędkościach, przedstawiamy na rys. 2 pewien model ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Jest to model ze zwartym szkieletem, tzn. nie ma "ziaren szkieletu" poruszających się razem z cieczą.

Z ośrodka tego wycięto myślowo dwie kostki "a" i "b" o ekstremalnych powierzchniach cieczy. Ciecz na powierzchni kostki "b" posiada dwie różne prędkości. Część tej cieczy porusza się z prędkością szkieletu \mathbf{v}_1 , a część z własną prędkością \mathbf{v}_2 .

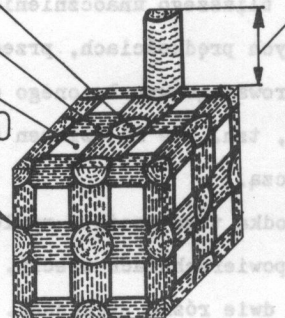
W obliczeniach posługujemy się średnimi wartościami powierzchni składników o danych prędkościach.



$$\begin{aligned} A_{22}^{rz} \\ A_{21}^{rz} = 0 \\ A_{11}^{rz} \\ A_{12}^{rz} = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_{22}^{rz} \\ A_{21}^{rz} \\ A_{11}^{rz} \\ A_{12}^{rz} = 0 \end{aligned}$$



Rys. 2. Model ośrodka porowatego wypełnionego cieczą.

Udziały powierzchniowe definiujemy w podobny sposób jak udziały objętościowe, a mianowicie:

$$(1.3.5a) \quad f_{1\hat{1}}^A \frac{df}{dA} = \frac{dA_{1\hat{1}}}{dA}$$

oznacza średni udział na powierzchni A szkieletu mającego prędkość \mathbf{v}_1 ;

$$(1.3.5b) \quad f_{1\hat{2}}^A \frac{df}{dA} = \frac{dA_{1\hat{2}}}{dA}$$

oznacza średni udział powierzchniowy szkieletu mającego prędkość \mathbf{v}_2 ;

$$(1.3.5c) \quad f_{2\hat{1}}^A \frac{df}{dA} = \frac{dA_{2\hat{1}}}{dA}$$

oznacza średni udział na powierzchni A cieczy mającej prędkość \mathbf{v}_1 ;

$$(1.3.5d) \quad f_{2\hat{2}}^A \frac{df}{dA} = \frac{dA_{2\hat{2}}}{dA}$$

oznacza średni udział powierzchniowy cieczy mającej prędkość \mathbf{v}_2 .

Aby mieć pełny zestaw definicji, podajemy że:

$$(1.3.6a) \quad f_1^A = f_{1\hat{1}}^A + f_{1\hat{2}}^A$$

oznacza średni całkowity udział szkieletu na powierzchni A, oraz:

$$(1.3.6b) \quad f_2^A = f_{2\hat{1}}^A + f_{2\hat{2}}^A$$

oznacza średni całkowity udział cieczy na powierzchni A.

Dla ośrodka jednorodnego i izotropowego, średni udział powierzchniowy składnika jest równy udziałowi objętościowemu, [57], tj.:

$$(1.3.7) \quad f_1^V = f_1^A \cdot 1.$$

Wykorzystując pojęcia udziałów powierzchniowych i objętościowych, możemy równania bilansu (1.3.4) przepisać jak następuje:

$$(1.3.8a) \quad \int_V \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV + \oint_A (\rho_{1\hat{1}} \mathbf{v}_1 + \rho_{1\hat{2}} \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n} dA = 0,$$

$$(1.3.8b) \quad \int_V \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dV + \oint_A (\rho_{2\hat{1}} \mathbf{v}_1 + \rho_{2\hat{2}} \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n} dA = 0,$$

przy czym:

$$(1.3.8c) \quad \varrho_{1f} = \varrho_1^{rz} f_{1f}^A; \quad \varrho_{12} = \varrho_1^{rz} f_{12}^A; \quad \varrho_{2f} = \varrho_2^{rz} f_{2f}^A; \quad \varrho_{22} = \varrho_2^{rz} f_{22}^A$$

nazywamy udziałami masowymi danego składnika w ruchu innego składnika.

Wykorzystując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego oraz odpowiednie założenia gładkości funkcji, otrzymujemy na podstawie (1.3.6a i b) następujące lokalne postaci równań bilansu masy dla szkieletu i cieczy:

$$(1.3.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \operatorname{div} [\varrho_{1f} \mathbf{v}_f + \varrho_{12} \mathbf{v}_2] &= 0, \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial t} + \operatorname{div} [\varrho_{2f} \mathbf{v}_f + \varrho_{22} \mathbf{v}_2] &= 0. \end{aligned}$$

Równanie globalne bilansu masy w formie lokalnej otrzymamy sumując równania (1.3.9) tj.:

$$(1.3.10) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} [\varrho_f \mathbf{v}_f + \varrho_2 \mathbf{v}_2] = 0,$$

gdzie ϱ_f i ϱ_2 oznaczają gęstości składników kinematycznych określone wzorem (1.1.3).

Masy składników kinematycznych wyrażają następujące całki:

$$(1.3.11) \quad \begin{aligned} m_1 &= \int_V \varrho_1 dV, \\ m_2 &= \int_V \varrho_2 dV. \end{aligned}$$

Tak jak dla składników fizycznych postulowanie zasady zachowania, wobec braku reakcji chemicznej było słuszne, tak dla składników kinematycznych zasada ta może nie być spełniona. Wskutek deformacji ośrodka mogą się zmieniać udziały masowe składników fizycznych w ruchu poszczególnych składników kinematycznych. Dlatego też, w bilansie masy poszczególnych składników kinematycznych wprowadzimy formalnie funkcję źródła danego składnika

kinematycznego.

Równania bilansu przedstawiają się następująco:

$$(1.3.12) \quad \begin{aligned} \dot{m}_1 &= \int_V \frac{\partial \varrho_1}{\partial t} dV + \oint_A \varrho_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \varrho_1^* dV, \\ \dot{m}_2 &= \int_V \frac{\partial \varrho_2}{\partial t} dV + \oint_A \varrho_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \varrho_2^* dV, \end{aligned}$$

gdzie ϱ_1^* i ϱ_2^* oznaczają wspomniane źródła składników kinematycznych.

Przy żądanych założeniach gładkości, równania (1.3.12) możemy napisać w formie lokalnej tj.:

$$(1.3.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_1 \mathbf{v}_1 &= \varrho_1^*, \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_2 \mathbf{v}_2 &= \varrho_2^*. \end{aligned}$$

Suma powyższych równań prowadzi do globalnego równania bilansu masy (1.3.10). Musi być przy tym spełniony warunek:

$$(1.3.14) \quad \varrho_1^* + \varrho_2^* = 0.$$

Funkcje źródeł określa się przez założenia konstytutywne, [36], [64].

1.4. Równania bilansu pędu

W punkcie 1.1 wypisaliśmy ogólne formuły określające zmianę pędu poszczególnych składników ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Celem napisania równań bilansu pędu należy określić siły powierzchniowe i siły masowe działające na poszczególne składniki, a także ewentualne źródła sił wynikające z ruchu względnego składników. Zanim to uczynimy, nawiążemy do uwagi zamieszczonej w punkcie 1.1 odnośnie trudności uzyskania równań BIOTA (1.2.6) na podstawie równań bilansu pędu, a ściślej, z równań bilansu pędu

składników fizycznych. Pędy te oraz ich pochodne wyrażają wzory (1.1.4a i b) oraz (1.1.6a i b).

Rozpisując pochodne materialne całek (1.1.6a i b) stwierdzamy, że nie uzyskujemy wyrażeń odpowiadających prawej stronie równań (1.2.6). Wyrażeń takich nie uzyskujemy też, gdy równania pędu (1.1.4a i b) wyrazimy za pomocą pędów średnich (1.1.9) tj., gdy napiszemy:

$$\mathbf{P}_\alpha = \int_V \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha dV ; \quad \alpha = 1, 2 .$$

Pochodna materialna tego pędu:

$$\dot{\mathbf{P}}_\alpha = \int_V \rho_\alpha \frac{d^\alpha \mathbf{v}_\alpha}{dt} dV ; \quad \frac{d^\alpha(\)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \text{grad}(\) ; \quad \alpha = 1, 2$$

zupełnie nie przypomina ruchu sprzężonego przez masę.

Zdaniem autora, aby dojść do równań BIOTA (1.2.6) na podstawie równań bilansu pędu, należałoby w odpowiedni sposób określić siły powierzchniowe, a ściślej mówiąc parcjalne tensory naprężenia. Nie dysponujemy jednakże żadnym kryterium umożliwiającym konstruowanie takich tensorów.

Problem definicji tensorów parcjalnych stanowi jeden z najślabszych punktów teorii ośrodków wieloskładnikowych. Zdecydowana większość autorów zajmujących się tymi zagadnieniami akceptuje pojęcie parcjального tensora naprężenia. Pojęcie to umożliwia opis ruchu dyfuzyjnego. Nie ma jednakże w literaturze ścisłych definicji tej wielkości. Definicja podana przez TRUESDELLA, {por. [79], str.567} została zakwestionowana przez GURTINA, OLIVERA i WILLIAMSA, [42], jako implikująca paradoksalną symetrię oddziaływań (por. również: praca WILMAŃSKIEGO, [84] oraz praca doktorska UZIEMBY, [80]). Propozycję tych autorów podziału parcjального wektora naprężenia na część wewnętrzną i zewnętrzną

nie można uznać obecnie za zadowalającą ze względu na brak jasnej interpretacji tych wyróżnionych części.

W tej pracy, wprowadzając pojęcie parcjalnego tensora naprężenia, oprzemy się na koncepcji BIOTA, która zdobyła sobie szerokie uznanie w literaturze (por. przegląd literatury w pracy [27]). Koncepcję tą wykorzystaliśmy w punkcie 1.2. Jej istotą jest traktowanie diwergencji parcjalnego tensora naprężenia jako siły uogólnionej w równaniu Lagrange'a.

WOŹNIAK {por. [86], str. 141 wzór (25.24)} otrzymał równania ruchu ośrodka wieloskładnikowego, które w przypadku dwóch składników pokrywają się z równaniami BIOTA (1.2.6), lecz bez specyfikacji sił dyfuzji.

DERSKI, [17], opierając się na równaniach bilansu masy, wyprowadził również równania ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Jego równania różniły się formą matematyczną od równań BIOTA. Autor, w pracy [54], wykazał, że równania DERSKIEGO pokrywają się z równaniami BIOTA, gdy te ostatnie wyrazimy we współrzędnych normalnych, tj. w postaci (1.2.9). Oznacza to, że diwergencja parcjalnego tensora naprężenia w równaniach DERSKIEGO jest siłą uogólnioną w sensie Lagrange'a, lecz wyrażoną we współrzędnych normalnych. Stąd wniosek, że jeżeli równania bilansu pędu napiszemy dla składników kinematycznych, to otrzymane na ich podstawie równania ruchu będą zawierały parcjalne tensory naprężenia w sensie BIOTA z tym, że wyrażone we współrzędnych normalnych.

Obecnie napiszemy równania bilansu pędu z wykorzystaniem określonych przez wzory (1.1.7a i b) predkości zmian pędu.

Równania te wyrazimy jak następuje:

$$(1.4.1) \quad \oint_A \mathbf{T}_1 dA + \int_V \mathcal{S}_1 \mathbf{X} dV + \int_V \mathbf{F}_{12} dV = \int_V (\mathcal{S}_1 \frac{d^1 \mathbf{v}_1}{dt} + \mathcal{S}_1^* \mathbf{v}_1) dV,$$

$$\oint_A \mathbf{T}_2 dA + \int_V \mathcal{S}_2 \mathbf{X} dV + \int_V \mathbf{F}_{21} dV = \int_V (\mathcal{S}_2 \frac{d^2 \mathbf{v}_2}{dt} + \mathcal{S}_2^* \mathbf{v}_2) dV.$$

Przy obliczaniu pochodnych materialnych całek pędu wykorzystano równania ciągłości (1.3.13).

W równaniach (1.4.1) \mathbf{T}_1 i \mathbf{T}_2 oznaczają siły powierzchniowe odniesione do jednostki powierzchni całkowitej, działające na składniki kinematyczne $\hat{1}$ i $\hat{2}$. Siły te będziemy w dalszym ciągu nazywać parcjalnymi wektorami naprężenia.

Przyjmujemy, że wektory te wyrażają się wzorami Cauchy'ego:

$$(1.4.2) \quad \mathbf{T}_1^i = \mathcal{G}_{ji}^{\hat{1}} n_j,$$

$$\mathbf{T}_2^i = \mathcal{G}_{ji}^{\hat{2}} n_j.$$

Ponadto, w równaniach (1.4.1) \mathbf{X} oznacza siłę masową odniesioną do jednostki masy, natomiast \mathbf{F}_{12} i \mathbf{F}_{21} oznaczają siły dyfuzji na jednostkę objętości (źródła sił).

Siły dyfuzji można wyspecyfikować w sposób zaproponowany przez BIOTA. Polega on na zapostulowaniu funkcji dysypacji jako jednorodnej kwadratowej formy prędkości względnych, i zdefiniowaniu sił dyfuzji jako pochodnej tej funkcji względem prędkości.

DERSKI i autor, [20], [21], zaproponowali inną metodę określania tych sił. Ich postać można mianowicie ustalić na podstawie

wniosku wynikającego z nierówności Clausiusa-Duhema. Oczywiście, aby globalne równanie bilansu było zachowane, suma sił dyfuzji musi się zerować tj.:

$$(1.4.3) \quad \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0.$$

Podstawiamy wzory Cauchy'ego (1.4.2) do równań (1.4.1) oraz wykorzystujemy twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego celem zamiany

całek powierzchniowych na objętościowe.

Zakładając, że funkcje podcałkowe są ciągłe, a dobór objętości V był zupełnie dowolny, możemy napisać następujące postacie lokalnych równań bilansu pędu:

$$(1.4.4) \quad \begin{aligned} G_{j,i}^i + \varrho_1^i X_i + F_{12}^i &= \varrho_1^i \frac{d^i v_1^i}{dt} + \varrho_1^* v_1^i, \\ G_{j,i}^i + \varrho_2^i X_i + F_{21}^i &= \varrho_2^i \frac{d^i v_2^i}{dt} + \varrho_2^* v_2^i. \end{aligned}$$

Jest to ogólna postać równań ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą.

Jeśli przyjmiemy, że masy składników kinematycznych są zachowane oraz założymy, że $F_{12}^i = -F_{21}^i = \hat{b} (v_2^i - v_1^i)$, to równania (1.4.4) oznaczają równania (1.2.9) wyrażone we współrzędnych normalnych.

Z kolei, aby równania (1.4.4) pokrywały się z tymi jakie wyprowadził DERSKI, [17], należy przyjąć: $\varrho_1^* = \varrho_2^* \approx 0$, $\varrho_1^i = \varrho - \bar{\varrho}$, $\varrho_2^i = \bar{\varrho}$, gdzie $(\varrho - \bar{\varrho})$ oznacza parcjalaną gęstość szkieletu wraz z cieczą uwięzioną, $\bar{\varrho}$ oznacza ciecz swobodną.

Równania DERSKIEGO odpowiadają ośrodkowi porowatemu z konsyntenym szkieletem. Macierz udziałów masowych dla tych równań wyraża się jak następuje:

$$(1.4.5) \quad [S_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \varrho_1 & 0 \\ (\varrho_2 - \bar{\varrho}) & \bar{\varrho} \end{bmatrix}$$

Problem symetrii tensorów parcjalnych przedyskutujemy w rozdziale III.

Rozdział II

KINEMATYKA MIESZANINY

2.1. Fizyczny i kinematyczny podział ośrodka wieloskładnikowego

Punktem wyjścia do rozważań nad teorią mieszanin w niniejszej pracy jest stwierdzenie oparte na przesłankach doświadczalnych, że w ośrodku wieloskładnikowym pole prędkości danego składnika na hipotetycznej powierzchni poprowadzonej przez ten ośrodek jest niejednorodne. Przyczyną tej niejednorodności jest zjawisko sprzężenia ruchu przez masę, tj. zjawisko narzucania ruchu części danego składnika przez inny składnik. * Zjawisko to ingeruje przede wszystkim w równania bilansu i prawach zachowania. Równania bilansu w ujęciu przestrzennym opisują, najogólniej mówiąc, zmiany danej wielkości w objętości spowodowane jej transportem przez powierzchnię. Oczywiście, niekiedy odgrywają też rolę objętościowe oddziaływania zewnątrz i funkcja źródeł. Oddziaływaniem dalekozasięgowym w tej pracy zajmować się nie będziemy.

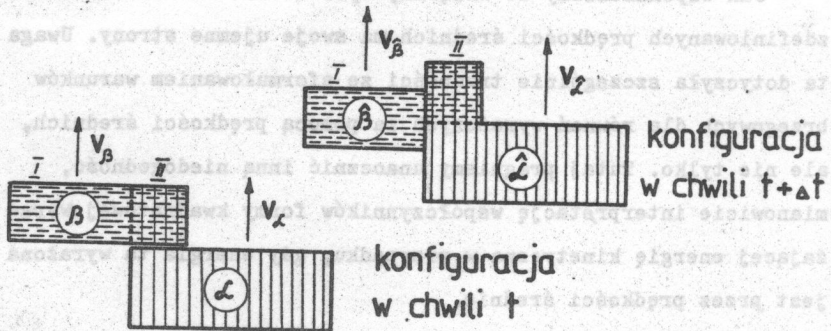
Jak z powyższego wynika, przy pisaniu równań bilansu dla

* W hydrodynamice zjawisko to nazwano efektem masy przyłączonej, [58], [69].

poszczególnych składników mieszaniny decydujące znaczenie ma znajomość udziałów tego składnika w objętości i względem powierzchni, a także znajomość rozkładu jego pola prędkości.

W związku z niejednorodnością pola prędkości dla danego składnika fizycznego, proponuje się w niniejszej pracy wyróżnić, oprócz podziału mieszaniny na składniki fizyczne, także podział ze względu na naturalne pola prędkości. Ten drugi podział nazywać będziemy krótko podziałem kinematycznym, a składniki przy tym podziale składnikami kinematycznymi. Składniki kinematyczne są fizycznie niejednorodne, tzn. są złożone z tych części składników fizycznych, które posiadają tę samą naturalną (rzućmyślną) prędkość. Jak już zasygnalizowaliśmy w rozdziale I, ruch składników kinematycznych opisują współrzędne normalne.

Dla ustalenia uwagi rozpatrzmy element dwuskładnikowy, naszkicowany poglądowo na rys.3.



Rys. 3. Poglądowe objaśnienie fizycznego i kinematycznego podziału składników.

Przy podziale fizycznym wyróżniamy składniki α i β jako, że każdy z nich stanowi materię o określonych własnościach fizycznych. Przy podziale kinematycznym wyróżnimy składnik $\hat{\beta} = \beta_I$ posiadający prędkość \mathbf{v}_β oraz składnik $\hat{\alpha} = \alpha \mathbf{v}_{\beta_I}$, posiadający prędkość $\mathbf{v}_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \neq \mathbf{v}_\beta)$.

Fakt, że w ośrodku wieloskładnikowym ruch części składnika fizycznego może być narzucony przez ruch innego składnika fizycznego (niejednorodność pola prędkości danego składnika fizycznego) sugeruje przypuszczenie, iż przez prędkość takiego składnika rozumieć można jedynie prędkość średnią np. prędkość barycentryczną.

Tak więc, składnikowi fizycznemu β na rys.3 możemy przypisać średnią prędkość \mathbf{v}_β określoną np. z równania bilansu pędu w sposób następujący:

$$(2.1.1) \quad m_\beta \mathbf{v}_\beta = m_{\beta_I} \mathbf{v}_{\hat{\beta}} + m_{\beta_{II}} \mathbf{v}_{\hat{\alpha}},$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_{\hat{\alpha}},$$

gdzie $m_\beta = m_{\beta_I} + m_{\beta_{II}}$ oznacza całkowitą masę składnika β .

Jak wspomnieliśmy we WSTĘPIE, wprowadzanie do rozważań tak zdefiniowanych prędkości średnich ma swoje ujemne strony. Uwaga ta dotyczyła szczególnie trudności ze sformułowaniem warunków brzegowych dla równań wyrażonych za pomocą prędkości średnich, ale nie tylko. Tutaj pragniemy unaocznic inną niedogodność, mianowicie interpretację współczynników formy kwadratowej wyrażającej energię kinetyczną w przypadku, gdy energia ta wyrażona jest przez prędkości średnie.

Posłużymy się rys.3 i dla przedstawionego tam elementu dwuskładnikowego napiszemy równanie energii kinetycznej. Energia ta (we współrzędnych normalnych) wyraża się następująco:

$$(2.1.2) \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} [m_{\rho I} \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{v}_{\beta} + (m_{\alpha} + m_{\rho I}) \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}].$$

Wykorzystując równania (2.1.1), wyrazimy wzór (2.1.2) za pomocą średnich prędkości przemieszczeń składników fizycznych:

$$(2.1.3) \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} [(m_{\rho} + m^*) \mathbf{v}_{\rho} \mathbf{v}_{\rho} - 2m^* \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{v}_{\alpha} + (m_{\alpha} + m^*) \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}],$$

przy czym $m^* = m_{\rho I} (m_{\rho} / m_{\rho I})$ oznacza pewien parametr, który w dalszym ciągu będziemy nazywać parametrem sprzężenia ruchu przez masę.

Widzimy, że energia kinetyczna wyrażona za pomocą prędkości średnich przyjęła postać pełnej formy kwadratowej. Współczynniki takiej formy jest znacznie trudniej zinterpretować niż współczynniki formy kanonicznej (por. punkt 1.1).

Ponieważ powyższe rozumowanie można drogą indukcji przenieść na model N-składnikowy, zatem postulujemy słuszność następujących aksjomatów:

- A1. Energia kinetyczna N-składnikowej mieszaniny przy podziale kinematycznym ma postać kanoniczną formy kwadratowej, tzn. jest wyrażona za pomocą współrzędnych normalnych; współczynnikami formy są masy składników kinematycznych.
- A2. Energia kinetyczna N-składnikowej mieszaniny przy podziale fizycznym ma postać pełnej formy kwadratowej; współczynniki z góry zapostulowanej formy są trudne do określenia i zinterpretowania.

W y j a ś n i e n i e :

Liczba składników w podziale fizycznym N może być różna od liczby składników w podziale kinematycznym \hat{N} np. N-składnikowa mieszanina sztywno związanych składników jest z punktu widzenia kinematyki jednoskładnikowym kompozytem ($\hat{N} = \hat{1}$). Dla opisu jej ruchu wystarczy podać jedno równanie.

Wykorzystując poglądowy rysunek 3, zwrócimy jeszcze uwagę na możliwość wieloznacznej definicji prędkości dyfuzji, w przypadku stosowania prędkości barycentrycznych.

W tym celu określimy barycentryczną prędkość ruchu całego dwuskładnikowego elementu, tj. prędkość równą:

$$(2.1.4) \quad m \mathbf{v} \stackrel{df}{=} m_{\beta} \mathbf{v}_{\beta} + m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = m_{\hat{\beta}} \mathbf{v}_{\hat{\beta}} + m_{\hat{\alpha}} \mathbf{v}_{\hat{\alpha}},$$

gdzie: $m = m_{\alpha} + m_{\beta} = m_{\hat{\alpha}} + m_{\hat{\beta}}$; $m_{\beta} = m_{\beta_I} + m_{\beta_{II}}$; $m_{\alpha} = m_{\alpha} + m_{\alpha_{II}}$.

Widzimy, że masie $m_{\beta_{II}}$ przypisana jest prędkość $\mathbf{v}_{\hat{\alpha}}$ (naturalna) i prędkość \mathbf{v}_{β} (średnia barycentryczna).

Tej samej masie $m_{\beta_{II}}$ można więc przypisać dwie różne prędkości dyfuzji, a mianowicie:

$$(2.1.5) \quad \mathbf{u}_{\beta} = \mathbf{v}_{\beta} - \mathbf{v},$$

oraz

$$(2.1.6) \quad \mathbf{u}_{\alpha} = \mathbf{v}_{\hat{\alpha}} - \mathbf{v} \neq \mathbf{u}_{\beta}.$$

Na tym prostym przykładzie pragniemy unaocznic fakt, że korzystanie z wielkości barycentrycznych może prowadzić do różnych definicji tego samego zjawiska. Nasuwa się tu problem wyboru, która z wprowadzonych wielkości bliżej opisuje obiektywną rzeczywistość. Wydaje się, że najbardziej naturalną prędkością dyfuzji w naszym przykładzie byłaby prędkość:

$$(2.1.7) \quad \mathbf{u}_{\hat{\alpha}} = \mathbf{v}_{\hat{\alpha}} - \mathbf{v}_{\hat{\beta}} \neq \mathbf{u}_{\hat{\alpha}} \neq \mathbf{u}_{\beta},$$

tj. różnica prędkości naturalnych składników kinematycznych.

W niniejszej pracy, ruch dyfuzyjny określać będziemy względem naturalnego ruchu dowolnego składnika kinematycznego, a prędkość dyfuzji wyrażać we współrzędnych normalnych (patrz punkt następnny).

2.2. Opis ruchu mieszaniny

Zgodnie z koncepcją opisu ruchu ośrodków wieloskładnikowych metodami mechaniki ośrodków ciągłych zakładamy, że w każdym punkcie X trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa znajdują się cząsteczki $X_{\alpha} (\alpha = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N})$ reprezentujące składniki kinematyczne danej mieszaniny. Cząsteczki te znakujemy poprzez przypisanie im miejsca $X_{\alpha} (\alpha = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N})$ w konfiguracji początkowej. Ruch każdej cząsteczki opisuje jednoparametrowa rodzina konfiguracji przestrzennych:

$$(2.2.1) \quad x_{\alpha}(\tau) = \mathcal{X}_{\alpha}(X, \tau); \quad (-\infty < \tau \leq t).$$

Współrzędne kartezjańskie $x_{\alpha}^i(\tau)$ opisujące przestrzenną konfigurację cząstek X_{α}^K składników kinematycznych nazywać będziemy w s p ó ł r z ę d n y m i n o r m a l n y m i . Nazwę tą zaczerpnięto z terminologii używanej przy opisie ruchu za pomocą równań Lagrange'a (por. punkt 1.2). Mówiąc najprościej, energia kinetyczna składników kinematycznych ma postać kanoniczną formy kwadratowej i to jest cecha, która wyróżnia współrzędne normalne. Innymi słowy, energia kinetyczna mająca postać kanoniczną formy kwadratowej jest wyrażona we współrzędnych normalnych lub głównych. Aby odwzorowanie cząstek materialnych w przestrzeń konfiguracji było jedno-jednoznaczne, jacobian przekształcenia musi być większy od zera:

$$(2.2.2) \quad \left| \frac{\partial x_{\alpha}^i(\tau)}{\partial X^K} \right| > 0.$$

W takim przypadku możliwe jest odwrócenie funkcji (2.2.1) i określenie położenia początkowego cząstki w konfiguracji początkowej, w zależności od jej położenia chwilowego w chwili τ ($-\infty < \tau \leq t$):

$$(2.2.3) \quad \mathbf{X}_{\hat{\alpha}} = \mathbf{X}_{\hat{\alpha}}^{-1}(\mathbf{x}, \tau).$$

Wybieramy w chwili $\tau = t$ dowolny punkt \mathbf{x} w przestrzeni. W punkcie tym znajduje się jednocześnie \hat{N} cząstek kinematycznych. Wektory pozycyjne tych cząstek są równe:

$$(2.2.4) \quad \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_{\hat{N}}(t) \equiv \mathbf{x}.$$

Konfigurację cząstek w chwili $\tau = t$ nazywać będziemy konfiguracją aktualną.

Historię $\mathbf{X}_{\hat{\alpha}}(\tau)$ cząstek, które w chwili t znajdują się w miejscu możemy określić za pomocą (2.2.1) i (2.2.3) w sposób następujący:

$$(2.2.5) \quad \mathbf{X}_{\hat{\alpha}}(\tau) = \mathbf{X}_{\hat{\alpha}}(\mathbf{x}, t, \tau) = \mathbf{X}_{\hat{\alpha}}^t(\mathbf{x}, \tau).$$

Oczywiście, dla tej rodziny konfiguracji musi być również spełniony warunek:

$$(2.2.6) \quad \left| \frac{\partial \mathbf{X}_{\hat{\alpha}}^t(\tau)}{\partial x_j} \right| > 0.$$

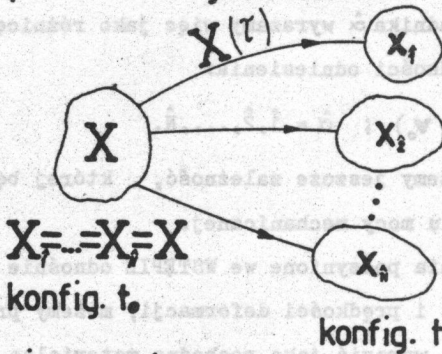
Rys.4 ilustruje wyżej omawiane konfiguracje przestrzenne cząstek składników kinematycznych.

Każdy składnik posiada odrębną kinematykę, a więc każdemu składnikowi przypisane jest inne pole prędkości:

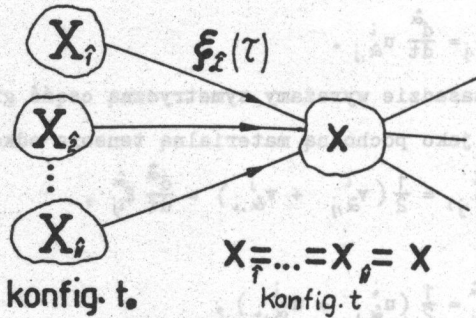
$$(2.2.7) \quad \mathbf{v}_{\hat{\alpha}}(\mathbf{X}_{\hat{\alpha}}, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}_{\hat{\alpha}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_{\hat{\alpha}}}$$

Prędkość cząstki $\mathbf{X}_{\hat{\alpha}}$, która w chwili $\tau = t$ znajduje się w punkcie \mathbf{x} przestrzeni, wyrażamy następująco:

a) opis materialny



b) opis przestrzenny



Rys. 4. Konfiguracje przestrzenne składników.

$$(2.2.8) \quad \mathbf{v}_{\hat{\alpha}}(X_{\hat{\alpha}}, t) = \frac{d^{\hat{\alpha}} \mathbf{x}_{\hat{\alpha}}(\mathbf{x}, t)}{dt} ; \quad \frac{d^{\hat{\alpha}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} v_i^{\hat{\alpha}} \Big|_{X_{\hat{\alpha}}}$$

Prędkość względną składników $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ określamy jako różnicę ich prędkości tj.:

$$(2.2.9) \quad \mathbf{w}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (\mathbf{v}_{\hat{\alpha}} - \mathbf{v}_{\hat{\beta}}) ; \quad \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}.$$

Prędkość odniesienia \mathbf{v}_0 , względem której określać będziemy prędkość dyfuzji, stanowić będzie prędkość dowolnego składnika kinematycznego, tj.:

$$(2.2.10) \quad \mathbf{v}_0 \in \left\{ \mathbf{v}_{\hat{\alpha}} ; \hat{\alpha} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N} \right\}.$$

Prędkość dyfuzji składnika $\hat{\alpha}$ wyrażamy więc jako różnicę prędkości tego składnika i prędkości odniesienia:

$$(2.2.11) \quad \mathbf{u}_{\hat{\alpha}} = (\mathbf{v}_{\hat{\alpha}} - \mathbf{v}_o) ; \quad \hat{\alpha} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}.$$

Na zakończenie wypiszemy jeszcze zależność, w której będziemy używać przy określaniu mocy mechanicznej.

Wykorzystując założenia poczynione we WSTĘPIE odnośnie małych gradientów deformacji i prędkości deformacji, możemy przestrzenny gradient prędkości wyrazić jako pochodną materialną gradientu wektora przemieszczenia tj.:

$$(2.2.12) \quad v_{\hat{\alpha},j}^i = \frac{d^{\hat{\alpha}}}{dt} u_{\hat{\alpha},j}^i.$$

Na tej samej zasadzie wyrażamy symetryczną część gradientu wektora prędkości, jako pochodną materialną tensora odkształcenia tj.:

$$(2.2.13) \quad v_{\hat{\alpha},j}^{(i)} = \frac{1}{2} (v_{\hat{\alpha},j}^i + v_{\hat{\alpha},i}^j) = \frac{d^{\hat{\alpha}}}{dt} \hat{\epsilon}_{ij}^{\hat{\alpha}},$$

gdzie:

$$(2.2.14) \quad \hat{\epsilon}_{ij}^{\hat{\alpha}} = \frac{1}{2} (u_{\hat{\alpha},j}^i + u_{\hat{\alpha},i}^j),$$

W rozważaniach nie czyniliśmy żadnych ograniczeń odnośnie przemieszczeń i prędkości przemieszczeń. Stąd też, pochodna materialna $d^{\hat{\alpha}}/dt$ posiada tak część lokalną jak i konwekcyjną.

2.3. Udziały objętościowe, powierzchniowe i masowe składników mieszaniny. Energia kinetyczna mieszaniny

Jak stwierdzono w punkcie 1.1, znajomość udziału składników w objętości i względem powierzchni stanowi warunek poprawnego ustawienia równań bilansu. Sposób określenia tych udziałów zademonstrowaliśmy na przykładzie ośrodka porowatego wypełnionego

cieczą w punkcie 1.3. Oczywiście, sposoby te mogą być różne. Nie będziemy tutaj ich analizować.

Przystępujemy do ogólnego sformułowania definicji, które zapoczątkowaliśmy w punkcie 1.3. W tym celu wyodrębnijmy w otoczeniu punktu \mathbf{x} przestrzeni elementarną objętość $dV(\mathbf{x})$. Objętość ta wypełniona jest N-składnikową (tu: w sensie fizycznym) mieszaniną. Rozdzielamy myślowo tę mieszaninę na składniki w taki sposób, aby każdy z nich po rozdzieleniu posiadał takie same parametry stanu jak w mieszaninie. Wówczas udział objętościowy możemy zdefiniować jak następuje:

Def.I. Stosunek objętości wydzielonego składnika $dV_\alpha(\mathbf{x}, t)$ do objętości $dV(\mathbf{x})$, w której ten składnik się znajduje nazywać będziemy udziałem objętościowym danego składnika w mieszaninie:

$$(2.3.1) \quad f_\alpha^V(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dV_\alpha(\mathbf{x}, t)}{dV(\mathbf{x})} .$$

Zgodnie z prawem Leduca mamy:

$$(2.3.2) \quad \sum_{\alpha=1}^N f_\alpha^V(\mathbf{x}, t) = 1 ,$$

tzn., objętość rozważanej mieszaniny jest sumą objętości jej składników.

Definicja udziału powierzchniowego, którą tu chcemy podać jest bardziej złożona niż definicja udziału objętościowego. W definicji tej, oprócz udziału danego składnika fizycznego α na wyodrębnionej w przestrzeni powierzchni, chcemy jeszcze wyróżnić jego podział ze względu na naturalne pola prędkości.

Niech $dA(\mathbf{x})$ oznacza element powierzchni w otoczeniu punktu \mathbf{x} .

Niech $dA_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$ oznacza część powierzchni $dA(\mathbf{x})$ zajęta w chwili t

przez tą część składnika fizycznego α , która porusza się z prędkością naturalną (rzeczywistą) $\mathbf{V}_{\hat{\beta}}$.

Def.II. Udziałem powierzchniowym składnika fizycznego mającego prędkość $\mathbf{V}_{\hat{\beta}}$ na powierzchni $dA(\mathbf{x})$ nazywamy funkcję ciągłą i różniczkowalną, wyrażającą stosunek powierzchni $dA_{\alpha\hat{\beta}}(\mathbf{x}, t)$ do $dA(\mathbf{x})$ tj.:

$$(2.3.3) \quad f_{\alpha\hat{\beta}}^A(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{dA_{\alpha\hat{\beta}}(\mathbf{x}, t)}{dA(\mathbf{x})}$$

Przez całkowity udział składnika fizycznego α na przestrzennym elemencie powierzchniowym $dA(\mathbf{x})$ będziemy rozumieć wartość średnią równą sumie:

$$(2.3.4) \quad f_{\alpha}^A = \sum_{\hat{\beta}=1}^N f_{\alpha\hat{\beta}}^A$$

Można wykazać, {por.np. [57]}, że dla ośrodka izotropowego średni udział powierzchniowy f_{α}^A i udział objętościowy f_{α}^V są sobie równe, tzn.:

$$(2.3.5) \quad f_{\alpha}^V(\mathbf{x}, t) = f_{\alpha}^A(\mathbf{x}, t) \cdot 1; \quad 1 \left[\frac{\text{m}}{\text{m}} \right]$$

Niech $\varrho_{\alpha}^r(\mathbf{x})$ oznacza rzeczywistą funkcję gęstości składnika fizycznego .

Def.III. Udziałem masowym składnika fizycznego α w ruchu składnika kinematycznego $\hat{\beta}$ nazywamy funkcję ciągłą i różniczkowalną postaci:

$$(2.3.6) \quad \varrho_{\alpha\hat{\beta}}(\mathbf{x}, t) = \varrho_{\alpha}^r(\mathbf{x}) f_{\alpha\hat{\beta}}^A(\mathbf{x}, t) \cdot 1$$

Def.IV. Gęstością parcjalaną składnika fizycznego nazywamy następującą sumę udziałów masowych:

$$(2.3.7) \quad \varrho_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\hat{\beta}=1}^N \varrho_{\alpha\hat{\beta}}(\mathbf{x}, t)$$

Def.V. Gęstością parcjalaną składnika kinematycznego nazywamy następującą sumę udziałów masowych:

$$(2.3.8) \quad \rho_{\hat{\alpha}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \hat{\rho}_{\alpha}(\mathbf{x}, t).$$

Jeżeli współczynniki udziałów masowych zapiszemy w formie macierzej:

$$(2.3.9) \quad \left[\rho_{\alpha \hat{\beta}} \right] = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \dots & \rho_{NN} \end{bmatrix},$$

to suma wyrazów w wierszu α oznacza gęstość parcjalaną składnika fizycznego α , natomiast suma wyrazów w kolumnie $\hat{\beta}$ oznacza gęstość parcjalaną składnika kinematycznego $\hat{\beta}$. Suma wszystkich wyrazów macierzy stanowi całkowitą gęstość mieszaniny $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$(2.3.10) \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} = \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \rho_{\hat{\beta}} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \rho_{\alpha \hat{\beta}}.$$

Energia kinetyczna mieszaniny zawartej w jednostce objętości całkowitej, zapisana we współrzędnych normalnych, wyraża się następująco (por. punkt 2.1, aksj.1):

$$(2.3.11) \quad \mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha}.$$

Tak napisana forma kwadratowa jest słuszna dla mieszaniny izotropowej, [54]. Tą formę energii kinetycznej będziemy stosować w niniejszej pracy.

Dla pełnego obrazu podajemy; że energia kinetyczna, wyrażona za pomocą średnich prędkości składników fizycznych, przyjmuje postać pełnej formy kwadratowej (por. punkt 2.1, aksj.2):

$$(2.3.12) \quad \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N B_{\alpha\beta} \mathbf{v}'_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\beta},$$

gdzie $B_{\alpha\beta}$ są współczynnikami tej formy.

Przejścia z jednej formy kwadratowej do drugiej, (por. np. rozdz. I), można dokonać za pomocą przekształcenia liniowego postaci:

$$(2.3.13) \quad \mathcal{S}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \mathcal{S}_{\alpha\hat{\beta}} \mathbf{v}_{\hat{\beta}}.$$

Związek (2.3.13) otrzymuje się z zasady zachowania pędu danego składnika fizycznego. Stanowi on jednocześnie definicję prędkości średniej \mathbf{v}_{α} . W przypadku, gdy ilości składników fizycznych i kinematycznych są równe, tzn. $N = \hat{N}$ i $\det[\mathcal{S}_{\alpha\hat{\beta}}] \neq 0$, to przekształcenie (2.3.13) jest niezdegenerowanym przekształceniem liniowym.

Układ równań tego przekształcenia można rozwiązać względem prędkości $\mathbf{v}_{\hat{\beta}}$:

$$(2.3.14) \quad \mathbf{v}_{\hat{\beta}} = \frac{1}{\det[\mathcal{S}_{\alpha\hat{\beta}}]} \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{S}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} A_{\alpha\hat{\beta}},$$

gdzie $A_{\alpha\hat{\beta}}$ oznacza dopełnienie algebraiczne elementu $\mathcal{S}_{\alpha\hat{\beta}}$ macierzy (2.3.9).

Współczynniki formy (2.3.12) wyrażają się wtedy jak następuje:

$$(2.3.15) \quad B_{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{S}_{\alpha} \mathcal{S}_{\beta}}{(\det[\mathcal{S}_{\alpha\hat{\beta}}])^2} \sum_{\hat{\gamma}=1}^{\hat{N}} \mathcal{S}_{\hat{\gamma}} A_{\alpha\hat{\gamma}} A_{\hat{\gamma}\beta} = B_{\beta\alpha}.$$

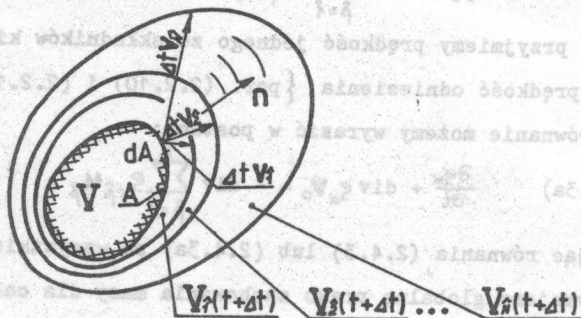
Dla zdegenerowanych przekształceń (2.3.13), przejście z kanonicznej do pełnej formy kwadratowej lub odwrotnie, należy rozważać indywidualnie dla każdego przypadku.

2.4. Równania bilansu masy

Bilansować będziemy masy składników fizycznych i kinematycznych. Równania ciągłości składników fizycznych wykorzystywać będziemy przy bilansowaniu energii i entropii, natomiast równanie ciągłości składników kinematycznych przede wszystkim przy bilansowaniu pędu, ale także przy bilansie energii.

Wyodrębnimy w przestrzeni zajętej przez N -składnikową mieszaninę dowolną objętość V ograniczoną gładką powierzchnią A i zorientowaną w kierunku na zewnątrz jednostkowym wektorem normalnym \mathbf{n} (rys. 5). Ponieważ przestrzeń wypełniona jest składnikami w sposób ciągły, zatem możemy założyć, że w chwili t : $V_1(t) = V_2(t) = \dots = V_N(t) = V$.

Cząstki mieszaniny w chwili $t+\Delta t$ zajmują pozycje w konfiguracjach $V_1(t+\Delta t) \neq V_2(t+\Delta t) \neq \dots \neq V_N(t+\Delta t) \neq V$, zdeterminowanych przez pola prędkości naturalnych $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \neq \dots \neq \mathbf{v}_N$ (rys. 5).



Rys. 5. Konfiguracja $V_1(t) = V_2(t) = \dots = V_N(t) \equiv V$ składników mieszaniny w chwili t i odpowiednio $V_1(t+\Delta t) \neq V_2(t+\Delta t) \neq \dots \neq V_N(t+\Delta t) \neq V$ w chwili $t+\Delta t$.

W pierwszej kolejności dokonamy bilansu masy składnika fizycznego α .

Masę tego składnika, znajdującą się w objętości V w chwili t określa następująca całka:

$$(2.4.1) \quad m_{\alpha}(t) = \int_V \varrho_{\alpha}(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}).$$

Funkcja $m_{\alpha}(t)$ jest dobrze określona z uwagi na ciągłość funkcji podcałkowej $\varrho_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ i regularność obszaru całkowania.

Z uwagi na chemiczną obojętność składników, masa każdego składnika fizycznego musi być zachowana, tzn.:

$$(2.4.2) \quad \dot{m}_{\alpha}(t) = \int_V \frac{\partial \varrho_{\alpha}}{\partial t} dV + \int_A \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \varrho_{\alpha \hat{\beta}} \mathbf{v}_{\hat{\beta}} \cdot \mathbf{n} \cdot dA = 0.$$

Z równania (2.4.2), po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego i opuszczeniu znaku całki po objętości, wynika następujące równanie ciągłości składnika fizycznego α :

$$(2.4.3) \quad \frac{\partial \varrho_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \varrho_{\alpha \hat{\beta}} \mathbf{v}_{\hat{\beta}} = 0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

Jeśli przyjmiemy prędkość jednego ze składników kinematycznych jako prędkość odniesienia {por. (2.2.10) i (2.2.11)}, to powyższe równanie możemy wyrazić w postaci:

$$(2.4.3a) \quad \frac{\partial \varrho_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{\alpha} \mathbf{v}_0 = - \operatorname{div} \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \varrho_{\alpha \hat{\beta}} \mathbf{u}_{\hat{\beta}}$$

Sumując równania (2.4.3) lub (2.4.3a) po wszystkich składnikach, otrzymujemy globalne prawo zachowania masy dla całej mieszaniny w postaci lokalnej tj.:

$$(2.4.4) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \varrho_{\hat{\beta}} \mathbf{v}_{\hat{\beta}} = 0; \quad \varrho = \sum_{\alpha=1}^N \varrho_{\alpha},$$

lub

$$(2.4.4a) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v}_0 = - \operatorname{div} \varrho_{\hat{\beta}} \mathbf{u}_{\hat{\beta}}.$$

Wykorzystując zależność (2.3.10), możemy równanie (2.4.4) przepisać w następującej formie:

$$(2.4.5) \quad \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{\hat{\beta}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{G}_{\hat{\beta}} \mathbf{v}_{\hat{\beta}} \right) = 0.$$

W odróżnieniu od masy składnika fizycznego, nie mamy podstaw do stwierdzenia, że masa składnika kinematycznego jest zachowana. Innymi słowy, nie mamy podstaw do stwierdzenia, że wyrażenie w nawiasie we wzorze (2.4.5) jest równe zeru. Wręcz przeciwnie, istnieją przesłanki ku temu, że masa składnika kinematycznego ulega zmianie. Powodem tej zmiany mogą być deformacje (zmiany objętości) poszczególnych składników, w wyniku których zmieniają się udziały masowe składników fizycznych w ruchu składników kinematycznych. Zakładamy więc, że:

$$(2.4.6) \quad \frac{\partial \mathcal{G}_{\hat{\beta}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{G}_{\hat{\beta}} \mathbf{v}_{\hat{\beta}} = \mathcal{G}_{\hat{\beta}}^* ; \quad \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \mathcal{G}_{\hat{\beta}}^* = 0,$$

gdzie $\mathcal{G}_{\hat{\beta}}^*$ oznacza "źródła" składnika kinematycznego $\hat{\beta}$.

Źródło masy danego składnika kinematycznego wynika, jak wspomnieliśmy wyżej, ze zmiany udziałów masowych składników fizycznych, lub inaczej mówiąc, ze wzajemnej wymiany masy pomiędzy składnikami kinematycznymi:

$$(2.4.7) \quad \mathcal{G}_{\hat{\beta}}^* = \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \mathcal{G}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* ; \quad \mathcal{G}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* = -\mathcal{G}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}^* ,$$

gdzie $\mathcal{G}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^*$ oznacza zmianę masy składnika kinematycznego $\hat{\alpha}$ na rzecz składnika kinematycznego $\hat{\beta}$. Funkcje źródeł masy należy specyfikować przez założenia konstytutywne, [36], [64].

Rozdział III

DYNAMIKA MIESZANINY

3.1. Analiza sił w mieszaniu

W prezentowanej tu teorii mieszanin ograniczamy się do rozważenia oddziaływań mechanicznych i termicznych. Pomijamy inne oddziaływania, takie jak np. elektryczne, magnetyczne, chemiczne itd. Zgodnie z mechaniką kontinuum, oddziaływania mechaniczne reprezentowane są przez siły powierzchniowe i masowe. Przez siły powierzchniowe rozumiemy wzajemne oddziaływania dwóch, rozdzielonych hipotetyczną powierzchnią, części mieszaniny. Pojęcie sił masowych ograniczamy do sił grawitacyjnych.

Poza siłami powierzchniowymi i masowymi, w teorii mieszanin zachodzi potrzeba uwzględnienia dodatkowo sił dyfuzji (sił tarcia, lepkości), które mogą towarzyszyć ruchowi względnemu składników. Siły te będziemy odnosić do jednostki objętości całej mieszaniny. Siły dyfuzji mają charakter funkcji źródłowej, tj. ujawniają się tylko wtedy, gdy istnieje ruch względny i znikają w globalnym bilansie pędu.

Opis ruchu dyfuzyjnego w mieszaniu jest jednym z trudniejszych zagadnień teorii. Należy wtedy rozpatrywać indywidualny ruch poszczególnych składników. Trudność polega na określeniu realnej siły, która byłaby odpowiedzialna za ten ruch.

W przypadku sił powierzchniowych, problem próbuje się rozwiązać

poprzez wprowadzenie pojęcia parcjalnego wektora naprężenia. Niestety, do tej pory nie ma sukcesu na tym polu. Intuicyjnie czujemy i potrafimy zmierzyć ciśnienia cząstkowe mieszaniny gazów w zamkniętym naczyniu, tym bardziej gdy są to gazy doskonałe. Problem jest jednakże bardzo złożony w ogólnym pojęciu mieszaniny np. mieszaniny ciała stałego i cieczy.

Istnieje kilka różnych poglądów odnośnie definicji parcjalnego wektora naprężenia. W rozdziale I wspomnieliśmy już o definicji TRUESDELLA {por. [79], str.567}, która została zakwestionowana przez GURTINA, OLIVERA i WILLIAMS, [42], jako implikująca paradoksalną symetrię oddziaływań. GREEN i NAGHDI, {[34], str.430} podważają słuszność podanej przez TRUESDELLA {por. [79], str.567}, a częściowo zinterpretowanej przez MÜLLERA, {[64], str.5}, definicji globalnego tensora naprężenia. Własne poglądy na temat parcjalnego tensora naprężenia prezentowali także BOWEN [9], UZIEMBŁO, [80], WILLIAMS, [82], i inni. UZIEMBŁO, [80], i WILLIAMS, [82], uzasadnili na drodze teoretycznej propozycję GURTINA, OLIVERA i WILLIAMS, [42], dotyczącą usunięcia paradoksu TRUESDELLA. przez rozdzielenie parcjalnego tensora naprężenia na części wyrażające oddziaływania zewnętrzne i wewnętrzne. W swoich rozważaniach oparli się oni na postulacie ciągłości dla sił. Brak jasnej interpretacji fizycznej poszczególnych części tego nowo proponowanego tensora utrudnia formułowanie warunków brzegowych dla sił na powierzchni.

Niniejsza praca nie pretenduje do rozwiązania problemu parcjalnego tensora naprężenia. Tutaj będziemy postulowali, że taka wielkość istnieje, i że jest to siła powierzchniowa, odpowiedzialna za ruch składnika kinematycznego, tj. ruch masy

wyróżnionej na podstawie rzeczywistego pola prędkości. Z punktu widzenia opisu ruchu we współrzędnych Lagrange'a, postulowany przez nas parcjalny tensor naprężenia odpowiada tensorowi wyrażonemu we współrzędnych normalnych (por. rozdz. I).

Ponieważ opis ruchu we współrzędnych normalnych jest opisem najbardziej naturalnym, postulowany przez nas parcjalny tensor naprężenia wydaje się być również naturalny. Tensor ten definiujemy jako siłę powierzchniową, wyrażającą wzajemne oddziaływania dwóch, rozdzielonych hipotetyczną powierzchnią, części tego samego składnika kinematycznego. Działanie tej siły na składnik kinematyczny powoduje naturalne (a nie średnie barycentryczne?) jego przyspieszenie, tj. naturalną zmianę pędu. Określenie realnej zmiany pędu składnika fizycznego, charakteryzującego się średnią barycentryczną prędkością (lub niejednorodnym polem prędkości) jest, jak to pokazaliśmy w rozdziale I, niezwykle trudne.

Przez globalny tensor naprężenia będziemy rozumieć prostą sumę tensorów parcjalnych, tj.:

$$(3.1.1) \quad \bar{\sigma}_{ji} = \sum_{\alpha=1}^N \bar{\sigma}_{ji}^{\alpha}$$

TRUESDELL, {[79], str. 567}, określił ten tensor jako sumę tensorów parcjalnych pomniejszonych o pewien człon dyfuzyjny, tj.:

$$(3.1.2) \quad \bar{\sigma}_{ji} \stackrel{df}{=} \sum_{\alpha=1}^N (6_{ji}^{\alpha} - \varrho_{\alpha} \dot{u}_{\alpha}^i \bar{u}_{\alpha}^j),$$

gdzie \bar{u}_{α}^i oznacza prędkość dyfuzji odniesioną do prędkości barycentrycznej całej mieszaniny. Konstrukcja tensora (3.1.2) wynika z pewnego formalizmu matematycznego (trzeciej zasady metafizycznej TRUESDELLA). Brak jej podstaw fizycznych tj. uzasadnienia, że taki tensor może mieć znaczenie praktyczne. Taka wątpliwość nasuwała się właśnie GREENOWI i NAGHDIEMU, [34], oraz GREENOWI i

LAWS, [36], którzy wyrażają obawę, że sformułowanie warunków brzegowych dla tensora (3.1.2) może napotkać na duże trudności. Interpretacja tego tensora, zaproponowana przez MÜLLERA {[64], str.5} taka, że $\bar{g}_{\alpha} dA_{\alpha}$ stanowi siłę działającą na powierzchnię dA_{α} , która jest w spoczynku względem barycentrycznego ruchu", nie rozwiązuje trudności z postawieniem warunków brzegowych. Dlatego też, autor niniejszej pracy podziela opinię GREENA i NAGHDIEGO oraz GREENA i LAWS i uważa, że z punktu widzenia warunków brzegowych, definicja (3.1.1) jest bardziej uzasadniona niż (3.1.2).

3.2. Bilans pędu. Równania ruchu

Równania bilansu pędu wyrazimy we współrzędnych normalnych. Dla mieszaniny zawartej w objętości V ograniczonej gładką powierzchnią A , zorientowaną w kierunku na zewnątrz jednostkowym wektorem normalnym \mathbf{n} , równania pędu przyjmują postać :

$$(3.2.1) \quad \mathbf{P}_{\alpha} = \int_V \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} dV; \quad \hat{\alpha} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}$$

Pochodna materialna tego pędu, po wykorzystaniu równania ciągłości (2.1.6) wyraża się następująco:

$$(3.2.2) \quad \mathbf{P}_{\alpha} = \int_V \left[\rho_{\alpha} \frac{d^{\hat{\alpha}} \mathbf{v}_{\alpha}}{dt} + \rho_{\alpha}^* \mathbf{v}_{\alpha} \right] dV; \quad \frac{d^{\hat{\alpha}}(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \text{grad}(\cdot)$$

Widzimy, że pod całką pojawił się człon $\rho_{\alpha}^* \mathbf{v}_{\alpha}$ wyrażający zmianę pędu składnika kinematycznego wskutek istnienia "źródeł" masy tego składnika.

Według praw ruchu Newtona, "zmiana pędu masy w inercjalnym układzie odniesienia jest równa wektorowi głównemu przyłożonych sił" tzn.:

$$(3.2.3) \quad \dot{\mathbf{P}}_{\hat{\alpha}} = \mathbf{W}_{\hat{\alpha}}.$$

W rozważanym przypadku, wektor główny $\mathbf{W}_{\hat{\alpha}}$ sił działających na wybrany składnik kinematyczny jest sumą sił powierzchniowych, masowych i dyfuzyjnych, a zatem:

$$(3.2.4) \quad \mathbf{W}_{\hat{\alpha}} = \oint_A \mathbf{T}_{\hat{\alpha}} dA + \int_V \mathcal{S}_{\hat{\alpha}} \mathbf{X} dV + \int_V \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \mathbf{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} dV.$$

Pierwsza całka po prawej stronie (3.2.4) reprezentuje siły powierzchniowe, druga masowe, a trzecia dyfuzji. Siły dyfuzji na jednostkę objętości wyrażają tu opory ruchu składnika $\hat{\alpha}$ względem składnika $\hat{\beta}$. Oczywiście, na podstawie prawa akcji i reakcji mamy:

$$(3.2.5) \quad \mathbf{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\mathbf{F}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}.$$

Wobec asymetrii sił dyfuzji, totalny wektor główny nie zawiera członów dyfuzyjnych:

$$(3.2.6) \quad \mathbf{W} = \oint_A \mathbf{T} dA + \int_V \mathcal{S} \mathbf{X} dV,$$

przy czym, w przyjętych oznaczeniach $\mathbf{W} = \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \mathbf{W}_{\hat{\alpha}}$, $\mathbf{T} = \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \mathbf{T}_{\hat{\alpha}}$, $\mathcal{S} = \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \mathcal{S}_{\hat{\alpha}}$ oraz $\sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \mathbf{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0$.

Zgodnie z zasadą naprężeń Cauchy'ego, przyjmujemy liniową zależność wektora naprężenia $\mathbf{T}_{\hat{\alpha}}$ od kierunku, tj.:

$$(3.2.7) \quad \mathbf{T}_{\hat{\alpha}} = \mathcal{G}_{ji}^{\hat{\alpha}} n_j,$$

gdzie współczynniki $\mathcal{G}_{ji}^{\hat{\alpha}}$ formy liniowej (3.2.7) nazywać będziemy współrzędnymi parcjalnymi tensora naprężenia.

Podstawiamy zależność (3.2.7) do (3.2.4) i po zamianie całki powierzchniowej na objętościową przy pomocy twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego otrzymujemy:

$$(3.2.8) \quad \mathbf{W}_{\hat{\alpha}}^i = \int_V (\mathcal{G}_{ji}^{\hat{\alpha}} + \mathcal{S}_{\hat{\alpha}} X^i + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \mathbf{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^i) dV.$$

Po podstawieniu wzorów (3.2.2) i (3.2.8) do równania (3.2.3) i opuszczeniu znaku całki jako, że rozumowanie jest słuszne dla dowolnie dużej objętości V , otrzymujemy następującą postać lokalną równania bilansu pędu:

$$(3.2.9) \quad \sigma_{jij}^{\dot{\alpha}} + \rho_{\dot{\alpha}} X^i + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} F_{\dot{\alpha}\hat{\beta}}^i = \rho_{\dot{\alpha}} \frac{d^{\dot{\alpha}} v_{\dot{\alpha}}^i}{dt} + \rho_{\dot{\alpha}}^* v_{\dot{\alpha}}^i ; \quad \dot{\alpha} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}.$$

Równania (3.2.9) stanowią ogólną postać równań ruchu mieszaniny, wyrażonych we współrzędnych normalnych.

Siły dyfuzji $F_{\dot{\alpha}\hat{\beta}}^i$, podobnie jak źródła masy $\rho_{\dot{\alpha}}^*$ należy wyspecyfikować przez związki konstytutywne. Do tematu tego wrócimy w punkcie 4.2, analizując funkcję dysypacji energii.

Pragniemy zaznaczyć, że sumując równania (3.2.9) można dojść do równania spełniającego trzecią zasadę metafizyczną TRUESDELLA. Ponieważ w tej pracy nie będziemy korzystać z takiego globalnego równania, więc rezygnujemy z jego wypisywania.

3.3. Bilans momentu pędu

Aczkolwiek nie będziemy uwzględniać w tej pracy efektów mikropolarnych, to w tym punkcie, aby unaozcnić dalej czynione założenia upraszczające, dokonamy bilansu momentu pędu z uwzględnieniem tych efektów. Skorzystamy tu z prawa ruchu Newtona, zgodnie z którym zmiana krętu $H_{\dot{\alpha}}$ jest równa wypadkowemu momentowi przyłożonych sił $M_{\dot{\alpha}}$ tj.:

$$(3.3.1) \quad \dot{H}_{\dot{\alpha}} = M_{\dot{\alpha}}$$

Kręt w rozważanym przypadku jest sumą momentu pędu $x_{\dot{\alpha}} \times \rho_{\dot{\alpha}} v_{\dot{\alpha}}$ oraz "spinowego" momentu pędu $J_{\dot{\alpha}} \omega_{\dot{\alpha}}$ tj.:

$$(3.3.2) \quad \mathbf{H}_{\dot{\alpha}} = \int_V (\mathbf{x}_{\dot{\alpha}} \times \mathcal{S}_{\dot{\alpha}} \mathbf{v}_{\dot{\alpha}} + J_{\dot{\alpha}} \boldsymbol{\omega}_{\dot{\alpha}}) dV,$$

gdzie $J_{\dot{\alpha}}$ oznacza moment bezwładności rotacyjnej, natomiast $\boldsymbol{\omega}_{\dot{\alpha}}$ prędkość kątową.

Pochodna materialna krętu przyjmuje postać:

$$(3.3.3) \quad \mathbf{H}_{\dot{\alpha}} \Big| = \int_V \left[\mathbf{x}_{\dot{\alpha}} \times \left(\mathcal{S}_{\dot{\alpha}} \frac{d\dot{\mathbf{v}}_{\dot{\alpha}}}{dt} + \mathcal{S}_{\dot{\alpha}}^* \mathbf{v}_{\dot{\alpha}} \right) + J_{\dot{\alpha}} \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\dot{\alpha}}}{dt} + J_{\dot{\alpha}}^* \boldsymbol{\omega}_{\dot{\alpha}} \right] dV,$$

gdzie przez $J_{\dot{\alpha}}^*$ oznaczono źródła momentu bezwładności rotacyjnej tzn.:

$$(3.3.4) \quad \frac{\partial J_{\dot{\alpha}}}{\partial t} + \text{div} J_{\dot{\alpha}} \mathbf{v} = J_{\dot{\alpha}}^*$$

Wypadkowy moment sił stanowi suma momentu wektora głównego oraz momentu głównego tj.:

$$(3.3.5) \quad \mathbf{M}_{\dot{\alpha}} = \oint_A \mathbf{x}_{\dot{\alpha}} \times \mathbf{T}_{\dot{\alpha}} dA + \int_V \mathbf{x}_{\dot{\alpha}} \times \left(\mathcal{S}_{\dot{\alpha}} \mathbf{X} + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \mathbf{F}_{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \right) dV + \\ + \oint_A \mathbf{M}_{\dot{\alpha}} dA + \int_V \left(\mathbf{Y}_{\dot{\alpha}} + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \mathbf{M}_{\dot{\alpha}\hat{\beta}} \right) dV,$$

W równaniu tym $\mathbf{M}_{\dot{\alpha}}$ oznacza wektor naprężeń momentowych, $\mathbf{Y}_{\dot{\alpha}}$ oznacza momenty masowe, natomiast $\mathbf{M}_{\dot{\alpha}\hat{\beta}}$ oznacza źródła momentu (momenty dyfuzji).

Przyjmujemy liniową zależność naprężeń momentowych od kierunku:

$$(3.3.6) \quad \mathcal{M}_{\dot{\alpha}}^i = \mu_{ji}^{\dot{\alpha}} n_j,$$

którą podstawiamy wraz z (3.2.7) do wzoru (3.3.5).

Po zamianie całek powierzchniowych na objętościowe za pomocą twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego otrzymujemy:

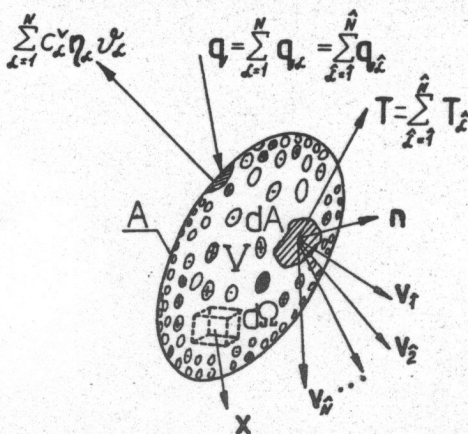
$$(3.3.7) \quad \mathbf{M}_{\dot{\alpha}}^i = \int_V \left[e_{ijk} x_j \left(\mathcal{G}_{ik}^{\dot{\alpha}} + \mathcal{S}_{\dot{\alpha}} \chi_k + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \mathbf{F}_{\dot{\alpha}\hat{\beta}}^k \right) + e_{ilk} \mathcal{G}_{ik}^{\dot{\alpha}} + \right. \\ \left. + \mu_{ji}^{\dot{\alpha}} + Y_{\dot{\alpha}}^i + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} M_{\dot{\alpha}\hat{\beta}}^i \right] dV,$$

Rozdział IV

PODSTAWY TERMODYNAMICZNE TEORII MIESZANIN

4.1. Bilans energii

Bilans energii, podobnie jak bilans masy, i pędu, przeprowadzimy dla mieszaniny zawartej w dowolnej objętości V , wydzielonej w przestrzeni Euklidesa wypełnionej mieszaniną. Założymy, że wydzieloną objętość ogranicza gładka i zorientowana w przestrzeni powierzchnia A , zwana też powierzchnią kontrolną lub bilansową. Jednostkowy wektor normalny \mathbf{n} orientujący powierzchnię A w przestrzeni, skierowany jest na zewnątrz objętości (rys.6).



Rys.6. Mechaniczne i termiczne oddziaływania w mieszaninie.

Globalne równanie bilansu energii dla tej wydzielonej objętości ma postać:

$$(4.1.1) \quad \dot{U} + \dot{K} = \dot{L} + \dot{Q},$$

gdzie \dot{U} oznacza prędkość zmian energii wewnętrznej, \dot{K} prędkość zmian energii kinetycznej, \dot{L} moc sił mechanicznych, \dot{Q} moc nie-mechaniczną.

Rozważania ograniczamy do oddziaływań mechanicznych i termicznych. Zmiana energii mieszaniny wynika zatem ze zmian pracy mechanicznej oraz ciepła. Przystąpimy do napisania lokalnej formy równania bilansu energii, zakładając słuszność zasady stanu lokalnego, [48], [85].

Niech u_α oznacza energię wewnętrzną na jednostkę masy składnika fizycznego α . Energię wewnętrzną na jednostkę masy składnika kinematycznego określamy wykorzystując własność addytywności tj.:

$$(4.1.2) \quad \rho_\alpha u_\alpha \stackrel{df}{=} \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha\alpha} u_\alpha.$$

Globalną prędkość zmian energii wewnętrznej wyrażamy jak następuje:

$$(4.1.3) \quad \dot{U} = \int_V \dot{U}_1 dV,$$

przy czym:

$$(4.1.4) \quad \dot{U}_1 = \sum_{\alpha=1}^N \left(\rho_\alpha \frac{d^{\dot{\alpha}} u_\alpha}{dt} + \rho_\alpha^* u_\alpha \right); \quad \frac{d^{\dot{\alpha}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} v_\alpha^i.$$

Przy różniczkowaniu materialnym całki objętościowej (4.1.3) wykorzystano równanie ciągłości masy (2.4.6).

Energię kinetyczną mieszaniny na jednostkę objętości przedstawia wzór (2.3.11). W odniesieniu do mieszaniny zawartej w objętości V , energię tą przedstawia całka:

$$(4.1.5) \quad \dot{K} = \int_V \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} dV.$$

Różniczkowanie materialne tej całki i wykorzystanie równania ciągłości (2.4.6) prowadzi do następującej formuły wyrażającej prędkości zmian energii kinetycznej:

$$(4.1.6) \quad \dot{K} = \int_V \sum_{\alpha=1}^N \left(\rho_{\alpha} \frac{d^{\alpha} v_{\alpha}^i}{dt} v_{\alpha}^i + \frac{1}{2} \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^i v_{\alpha}^i \right) dV.$$

Moc mechaniczna jest równa mocy sił powierzchniowych i mocy sił objętościowych tj.:

$$(4.1.7) \quad \dot{L} = \oint_A \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{T}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} dA + \int_V \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} dV.$$

Wykorzystamy wzór Cauchy'ego (3.2.7) i zamienimy całkę powierzchniową na całkę objętościową według formuły Gaussa-Ostrogradskiego. Następnie grupujemy wyrazy w taki sposób, że po podstawieniu równań ruchu (3.2.9) otrzymujemy:

$$(4.1.8) \quad \dot{L} = \int_V \sum_{\alpha=1}^N \left[\rho_{\alpha} \hat{v}_{\alpha, j}^i v_{\alpha, j}^i + \frac{1}{2} \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^i v_{\alpha}^i - \sum_{\beta=1}^N F_{\alpha\beta}^i v_{\alpha}^i \right] dV + \dot{K}.$$

We wzorze tym wydzielono całkę wyrażającą prędkość zmian energii kinetycznej (4.1.6). Wykorzystamy jeszcze wzór (2.4.7) dla źródeł masy i wyrazimy człon dyfuzyjny i człon źródłowy we wzorze (4.1.8) w następujący sposób:

$$(4.1.9) \quad \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{1}{2} \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^i v_{\alpha}^i - \sum_{\beta=1}^N F_{\alpha\beta}^i v_{\alpha}^i \right] = - \sum_{\beta=\alpha+1}^N \sum_{\alpha=1}^{N-1} F_{\alpha\beta}^i (v_{\alpha}^i - v_{\beta}^i),$$

przy czym:

$$(4.1.10) \quad F_{\alpha\beta}^i = F_{\alpha\beta}^i - \rho_{\alpha\beta}^* \frac{v_{\alpha}^i + v_{\beta}^i}{2} = - F_{\beta\alpha}^i.$$

oznacza siły dyfuzji pomniejszone o człon $\rho_{\alpha\beta}^* \frac{v_{\alpha}^i + v_{\beta}^i}{2}$, wyrażający zmianę pędu z tytułu wymiany masy pomiędzy składnikami $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$.

Moc niemechaniczna równa się ciepłu dostarczonemu do układu w postaci strumienia ciepła q przez powierzchnię A oraz wskutek

przepływu ciepła transportowanego z masą przez tą powierzchnię. Założymy, że globalny strumień ciepła jest sumą strumieni parcyjalnych:

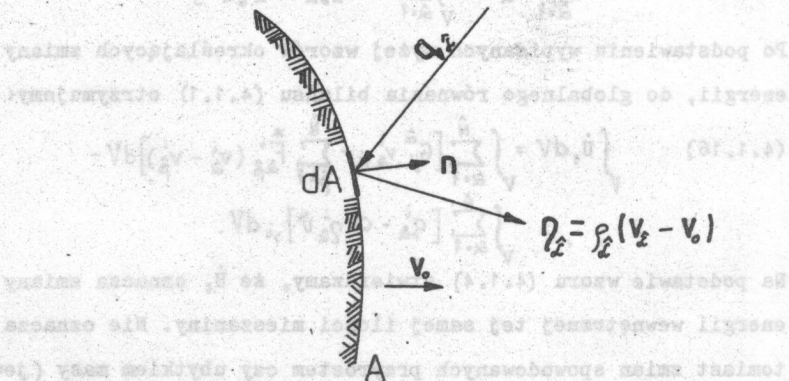
$$(4.1.11) \quad \mathbf{q} = \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \mathbf{q}_{\hat{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{q}_{\alpha},$$

przy czym $\mathbf{q}_{\hat{\alpha}}$ odnosi się do składnika kinematycznego $\hat{\alpha}$, natomiast \mathbf{q}_{α} do składnika fizycznego α .

Przy założeniu idealnej wymiany ciepła pomiędzy składnikami, temperatura $\psi_{\hat{\alpha}}(\mathbf{x}, t) = T_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = T_{\alpha\alpha}$ wszystkich składników w danym punkcie przestrzeni jest taka sama tj. $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_N \equiv \psi$. Wtedy ilość ciepła dostarczoną do danego składnika kinematycznego określamy jak następuje:

$$(4.1.12) \quad Q_{\hat{\alpha}} = - \oint_A [\mathbf{q}_{\hat{\alpha}} - c_{\hat{\alpha}} \varrho_{\hat{\alpha}} (\mathbf{v}_{\hat{\alpha}} - \mathbf{v}_0) \psi] \cdot \mathbf{n} dA.$$

Wzór ten interpretujemy następująco. Niech powierzchnia A w chwili t będzie związana z tym składnikiem kinematycznym, którego pole prędkości wynosi $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t) \in \{\mathbf{v}_{\hat{\alpha}}; \hat{\alpha} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}\}$ (rys. 7).



Rys. 7. Schemat strumieni ciepła i masy na powierzchni bilansowej.

Wektor \mathbf{q}_α oznacza strumień ciepła transportowanego przez powierzchnię poruszającą się z prędkością \mathbf{v}_0 .

Jeśli pole prędkości $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ składnika α jest różne od pola prędkości $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t)$, to strumień ciepła \mathbf{q}_α należy pomniejszyć (powiększyć) o ilość ciepła transportowanego przez strumień masy \mathcal{V}_α (rys. 7).

Strumień ciepła transportowanego z masą wynosi:

$$(4.1.13) \quad c_\alpha \mathcal{V}_\alpha \psi; \quad \mathcal{V}_\alpha = S_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_0),$$

gdzie c_α oznacza ciepło właściwe składnika kinematycznego $\hat{\alpha}$.

Ciepło to możemy wyrazić za pomocą ciepł właściwych składników fizycznych zgodnie z formułą:

$$(4.1.14) \quad c_\alpha S_\alpha \stackrel{df}{=} \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha\hat{\alpha}} c_\alpha.$$

Globalne ciepło mieszaniny w objętości V jest sumą ciepł parcjalnych poszczególnych składników. Na tej podstawie piszemy:

$$(4.1.15) \quad Q = \sum_{\hat{\alpha}=1}^N Q_{\hat{\alpha}} = - \int_V \sum_{\hat{\alpha}=1}^N \operatorname{div} [\mathbf{q}_{\hat{\alpha}} - c_{\hat{\alpha}} \mathcal{V}_{\hat{\alpha}} \psi] dV.$$

Po podstawieniu wypisanych wyżej wzorów określających zmiany energii, do globalnego równania bilansu (4.1.1) otrzymujemy:

$$(4.1.16) \quad \int_V \dot{U}_i dV = \int_V \sum_{\hat{\alpha}=1}^N [G_{ji}^{\hat{\alpha}} v_{\hat{\alpha}j}^i - \sum_{\hat{\beta}=1}^N \bar{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^i (v_{\hat{\alpha}}^i - v_{\hat{\beta}}^i)] dV - \\ - \int_V \sum_{\hat{\alpha}=1}^N [q_{\hat{\alpha}}^i - c_{\hat{\alpha}} \mathcal{V}_{\hat{\alpha}} \psi]_{,i} dV.$$

Na podstawie wzoru (4.1.4) stwierdzamy, że \dot{U}_i oznacza zmiany energii wewnętrznej tej samej ilości mieszaniny. Nie oznacza natomiast zmian spowodowanych przyrostem czy ubytkiem masy (jeśli weźmiemy pod uwagę, że $\sum_{\hat{\alpha}=1}^N S_{\hat{\alpha}}^* = 0$). Aby więc zachodziła równość obu stron we wzorze (4.1.16) musimy przyjąć, że nie ma przyrostu

masy mieszaniny w danej objętości, czyli:

$$(4.1.17) \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_{\dot{\alpha}} = 0.$$

Ponadto, wykorzystamy własność energii wewnętrznej jako funkcji stanu tj. własność, że funkcja ta nie zależy od drogi przejścia z jednego stanu do drugiego. Pozwala to nam rozdzielić moc nie-mechaniczną na ciepło dostarczone do układu przy stałej objętości oraz na energię ekspansji termicznej. Tą ostatnią energię włączymy do członu mechanicznego przyjmując, że gradient prędkości deformacji zawiera poza deformacją mechaniczną część termiczną tj.:

$$(4.1.18) \quad v_{\dot{\alpha},j}^{(i)} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt} \varepsilon_{ij}^{\dot{\alpha}},$$

przy czym:

$$(4.1.19) \quad \varepsilon_{ij}^{\dot{\alpha}} = (\varepsilon_{ij}^{\dot{\alpha}})_M + (\varepsilon_{ij}^{\dot{\alpha}})_T = \frac{1}{2} (u_{\dot{\alpha},j}^i + u_{\dot{\alpha},i}^j).$$

We wzorze (4.1.18) wzięliśmy pod uwagę tylko część symetryczną gradientu prędkości deformacji jako, że iloczyn symetrycznego tensora $\varepsilon_{ji}^{\dot{\alpha}}$ i antysymetrycznej części gradientu prędkości deformacji $v_{\dot{\alpha},j}^{[i]}$ zerują się tj.:

$$(4.1.20) \quad \varepsilon_{ji}^{\dot{\alpha}} v_{\dot{\alpha},j}^{[i]} = \varepsilon_{ji}^{\dot{\alpha}} (v_{\dot{\alpha},j}^{(i)} + v_{\dot{\alpha},j}^{[i]}) = \varepsilon_{ji}^{\dot{\alpha}} v_{\dot{\alpha},j}^{(i)}.$$

We wzorze (4.1.19), $(\varepsilon_{ij}^{\dot{\alpha}})_M$ oznacza tensor małych odkształceń mechanicznych, $(\varepsilon_{ij}^{\dot{\alpha}})_T$ tensor małych odkształceń termicznych, natomiast $\mathbf{u}_{\dot{\alpha}}$ oznacza wektor przemieszczenia składnika $\dot{\alpha}$.

Uwzględniając powyższe uwagi, a także tą, że funkcje podcałkowe we wzorze (4.1.16) są z założenia ciągłe, a objętość V dobrana dowolnie, możemy napisać następującą lokalną postać globalnego równania bilansu energii:

$$(4.1.21) \quad \dot{U}_1 = \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} G_{ij}^{\alpha} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} [q_{\alpha,i}^i - c_{\alpha}^v \eta_{\alpha}^i v_{\alpha,i}^i] - \sum_{\beta=\alpha+1}^{\hat{N}} \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}-1} F_{\alpha\beta}^{*i} (v_{\alpha}^i - v_{\beta}^i),$$

przy czym $(\dot{\quad}) = \frac{d^{\alpha}}{dt}$ oznacza pochodną materialną indywidualnego składnika, natomiast c_{α}^v oznacza ciepło właściwe składnika α przy stałej objętości.

Na podstawie (4.1.21) stwierdzamy, że prędkość zmian energii wewnętrznej jest równa mocy mechanicznej (pierwszy człon), ciepłu dostarczonemu do układu w postaci strumienia ciepła i ciepłu transportowanemu przez masę (drugi człon), oraz ciepła powstałego wewnątrz układu wskutek dysypacji mocy sił dyfuzji na prędkościach względnych (trzeci człon).

Równanie bilansu energii (4.1.21) zostało wyprowadzone przy założeniu idealnej wymiany ciepła pomiędzy składnikami. Jeśli taka wymiana nie ma miejsca lub jeżeli procesy zachodzą dostatecznie szybko, to może zachodzić konieczność wyróżnienia temperatur poszczególnych składników fizycznych. Przy określaniu ciepła wygodniej jest wtedy posługiwać się ciepłem dostarczonym do danego składnika fizycznego:

$$(4.1.22) \quad Q_{\alpha} = - \oint_A [q_{\alpha}^i - c_{\alpha}^v \eta_{\alpha}^i v_{\alpha,i}^i] dA + \int_V \sum_{\beta=1}^{\hat{N}} h_{\alpha\beta} dV,$$

gdzie c_{α}^v oznacza ciepło właściwe składnika α , $h_{\alpha\beta} = -h_{\beta\alpha}$ oznacza ciepło na jednostkę objętości, wymieniane pomiędzy składnikami α i β , natomiast;

$$(4.1.23) \quad \eta_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} s_{\alpha\alpha} (v_{\alpha} - v_0)$$

oznacza dyfuzyjny strumień masy składnika α .

Wykorzystując wszystkie uwagi, które uczyniliśmy określając ciepło przy założeniu idealnej wymiany pomiędzy składnikami, otrzymujemy następującą postać globalnego równania bilansu:

energii z uwzględnieniem różnych temperatur składników:

$$(4.1.24) \quad \dot{U}_1 = \sum_{\alpha=1}^N \dot{Q}_{1j}^{\alpha} \dot{E}_{1j}^{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N [q_{\alpha,i}^i - c_{\alpha}^v \rho_{\alpha} \dot{V}_{\alpha,i}^i] - \sum_{\beta=\alpha+1}^N \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} F_{\alpha\beta}^i (v_{\alpha}^i - v_{\beta}^i)$$

przy czym wykorzystano tu warunek znikania ciepła wymienianego pomiędzy składnikami w bilansie globalnym:

$$(4.1.25) \quad \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N h_{\alpha\beta} = 0,$$

oraz warunek bilansu energii tej samej ilości masy, analogiczny do (4.1.17):

$$(4.1.26) \quad \text{div} \dot{v}_{\alpha} = 0.$$

4.2. Bilans entropii. Uogólnione prawo przepływu ciepła. Siły dyfuzji

W punkcie tym dokonamy bilansu entropii i określimy funkcję dysypacji energii postulując, że jest ona formą kwadratową dodatnio określoną. Postulat ten oraz ograniczenia wynikające z drugiej zasady termodynamiki pozwolą nam wyciągnąć wnioski odnośnie prawa przepływu ciepła i sił dyfuzji. Bilans entropii przeprowadzimy najpierw dla równych, później dla różnych temperatur składników.

Entropia całkowita S mieszaniny zawartej w objętości V dzieli się na entropię S_z wymienianą z otoczeniem przez powierzchnię A oraz na entropię wzrastającą nieodwracalnie S_w . Zgodnie z postulatem Clausiusa-Duhema, prędkości zmian tych entropii muszą spełniać nierówność wyrażającą drugą zasadę termodynamiki:

$$(4.2.1) \quad \dot{S}_w = \dot{S} - S_z \geq 0.$$

Przyjęliśmy za obowiązującą zasadę stanu lokalnego, zgodnie z którą powyższa nierówność jest spełniona w każdym punkcie przestrzeni zajętej przez mieszaninę.

Prędkość zmian globalnej entropii \dot{S} określimy analogicznie jak prędkość zmian energii wewnętrznej w punkcie 4.1, tj. napiszemy:

$$(4.2.2) \quad \dot{S} = \int_V \dot{S}_i dV,$$

gdzie:

$$(4.2.3) \quad \dot{S}_i = \sum_{\alpha=1}^N (s_{\alpha} \frac{d\hat{\alpha}}{dt} + s_{\alpha}^* \hat{\alpha}); \quad \frac{d\hat{\alpha}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} V_{\alpha}^i,$$

$$s_{\alpha} \hat{\alpha} = \frac{df}{d\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N s_{\alpha} \hat{\alpha},$$

przy czym s_{α} i s_{α}^* oznaczają entropie odniesione do jednostki masy składnika kinematycznego $\hat{\alpha}$ i fizycznego α . Funkcja \dot{S}_i wyraża prędkość zmian entropii mieszaniny w jednostce objętości, spowodowanych zmianą stanu tej samej ilości mieszaniny ($\sum_{\alpha=1}^N s_{\alpha}^* = 1$).

Prędkość zmian entropii \dot{S}_2 wyliczamy ze strumienia ciepła przez powierzchnię, przy czym uwzględniamy tu ciepło dostarczone drogą przewodnictwa oraz ciepło transportowane wraz z masą, tj.:

$$(4.2.4) \quad \dot{S}_2 = - \oint_A \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_{\alpha}^i - C_{\alpha}^v \eta_{\alpha}^i \psi^i}{T} n_i dA = - \int_V \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{q_{\alpha}^i - C_{\alpha}^v \eta_{\alpha}^i \psi^i}{T} \right)_{,i}.$$

Na podstawie (4.2.1), (4.2.2) i (4.2.4) określamy następującą lokalną postać nierówności Clausiusa-Duhema:

$$(4.2.5) \quad \dot{S}_1 + \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{q_{\alpha}^i - C_{\alpha}^v \eta_{\alpha}^i \psi^i}{T} \right)_{,i} \geq 0.$$

Zrózniczkujemy drugie wyrażenie we wzorze (4.2.5) i całą nierówność pomnożymy przez T. Następnie wyeliminujemy z tej nierówności człon wyrażający ciepło dostarczone przez powierzchnię A, wykorzystując w tym celu równanie bilansu energii (4.1.21).

Nierówność nasza przyjmie wtedy postać:

$$(4.2.6) \quad T\dot{S}_1 - \dot{U}_1 + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i,j} \hat{G}_{ij}^{\alpha} \dot{\xi}_{ij}^{\alpha} + D \geq 0,$$

przy czym przez:

$$(4.2.7) \quad D = - \sum_{\beta=\alpha+1}^N \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{i,j} F_{\alpha\beta}^* (v_{\alpha}^i - v_{\beta}^i) - \frac{1}{T} \sum_{\alpha=1}^N (q_{\alpha}^i - c_{\alpha}^v \eta_{\alpha}^i) \dot{\eta}_{\alpha}^i,$$

oznaczono tą część energii, która jest dysypowana.

Konstrukcję funkcji konstytutywnych oprzemy na metodzie możliwie najprostszej, a mianowicie na równaniu Gibbsa. Równanie to pozwala konstruować proste związki konstytutywne o jasno zinterpretowanych współczynnikach. Bardziej ogólny formalizm, który zastosował np. MÜLLER [64], daje ogólniejsze informacje odnośnie postaci związków konstytutywnych lecz współczynniki posiadają mniej jasną interpretację.

Równanie Gibbsa jest słuszne dla stanów niezbyt oddalonych od stanów równowagi. Ograniczenie naszych rozważań dla procesów przebiegających w bliskim sąsiedztwie stanów równowagi wprowadziliśmy już wcześniej, postulując słuszność zasady stanu lokalnego.

Równanie Gibbsa w naszym przypadku wyraża się jak następuje:

$$(4.2.8) \quad \dot{U}_1 = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i,j} \hat{G}_{ij}^{\alpha} \dot{\xi}_{ij}^{\alpha} + T\dot{S}_1.$$

Podstawiając to równanie do nierówności (4.2.6) stwierdzamy, że funkcja dysypacji energii D jest dodatnio określona tj.:

$$(4.2.9) \quad - \sum_{\beta=\alpha+1}^N \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{i,j} F_{\alpha\beta}^* (v_{\alpha}^i - v_{\beta}^i) - \frac{1}{T} (q_{\alpha}^i - \dot{\eta}_{\alpha}^i \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha}^v \eta_{\alpha}^i) \dot{\eta}_{\alpha}^i \geq 0.$$

Określimy teraz analogiczną nierówność w przypadku, gdy temperatury składników są różne. Wtedy w równaniu (4.2.8) człon $T\dot{S}_1$ zastępujemy przez $\sum_{\alpha=1}^N T_{\alpha} \dot{S}_{1\alpha}$ i otrzymujemy:

$$(4.2.10) \quad \dot{U}_1 = \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} G_{ij}^{\alpha} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} T_{\alpha} \dot{S}_{1\alpha},$$

przy czym $\dot{S}_{1\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial s_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial s_{\alpha}}{\partial x_i} v_{\alpha}^i \right)$ oznacza prędkość zmian entropii składnika fizycznego α na jednostkę objętości.

Z porównania (4.2.10) i (4.1.24) widzimy, że:

$$(4.2.11) \quad \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} T_{\alpha} \dot{S}_{1\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} (q_{\alpha,i}^i - c_{\alpha}^v \varrho_{\alpha} v_{\alpha,i}^i) - \sum_{\beta=\hat{\alpha}+1}^{\hat{N}} \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}-1} F_{\alpha\beta}^{*i} (v_{\alpha}^i - v_{\beta}^i).$$

Bazując na powyższej zależności postulujemy następujące równanie określające prędkość zmian entropii każdego składnika α :

$$(4.2.12) \quad \dot{S}_{1\alpha}^* = \frac{-(q_{\alpha,i}^i - c_{\alpha}^v \varrho_{\alpha} v_{\alpha,i}^i) + \sum_{\beta=\hat{\alpha}+1}^{\hat{N}} h_{\alpha\beta}}{T_{\alpha}} + S_{1\alpha}^*,$$

gdzie $h_{\alpha\beta}$ oznacza występujące we wzorze (4.1.22) ciepło wymienne pomiędzy składnikami wskutek ich różnych temperatur, natomiast $S_{1\alpha}^*$ oznacza źródła entropii dla składnika α . Jeśli równanie

(4.2.12) pomnożymy obustronnie przez T_{α} i zsumujemy, a następnie wykorzystamy (4.1.25) i otrzymamy wynik porównamy ze wzorem

(4.2.11) to zauważymy, że źródła entropii powstają wskutek dysypacji pracy sił dyfuzji tj.:

$$(4.2.13) \quad \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} T_{\alpha} S_{1\alpha}^* = - \sum_{\beta=\hat{\alpha}+1}^{\hat{N}} \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}-1} F_{\alpha\beta}^{*i} (v_{\alpha}^i - v_{\beta}^i).$$

Na podstawie (4.2.12) stwierdzamy, że globalna prędkość zmian entropii wyraża się następująco:

$$(4.2.14) \quad \dot{S} = \int_V \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} \dot{S}_{1\alpha}^* dV = \int_V \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} \left[\frac{-(q_{\alpha,i}^i - c_{\alpha}^v \varrho_{\alpha} v_{\alpha,i}^i) + \sum_{\beta=\hat{\alpha}+1}^{\hat{N}} h_{\alpha\beta}}{T_{\alpha}} + S_{1\alpha}^* \right] dV$$

Entropia wymieniana z otoczeniem ma postać analogiczną do (4.2.4), a mianowicie:

$$(4.2.15) \quad \dot{S}_2 = - \oint_A \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} \frac{q_{\alpha}^i - c_{\alpha}^v \varrho_{\alpha} v_{\alpha}^i}{T_{\alpha}} n_i dA = - \int_V \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} \left(\frac{q_{\alpha}^i - c_{\alpha}^v \varrho_{\alpha} v_{\alpha}^i}{T_{\alpha}} \right)_i dV.$$

Różnica tych dwóch wyżej wymienionych całek oznacza, zgodnie ze wzorem (4.2.1), prędkość produkcji entropii w objętości V. Według obowiązującej tu zasady stanu lokalnego, produkcja entropii jest nieujemna w każdym punkcie przestrzeni zajętej przez mieszaninę, tzn.:

$$(4.2.16) \quad \sum_{\alpha=1}^N S_{1\alpha}^* + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{h_{\alpha\beta}}{T_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_{\alpha}^i - C_{\alpha}^v \rho_{\alpha}^i \dot{v}_{\alpha}}{T_{\alpha}^2} \dot{v}_{\alpha}^i \geq 0.$$

Omówimy teraz wnioski wypływające z powyższej nierówności, przy czym są one jednocześnie słuszne w odniesieniu do nierówności (4.2.9). Jak wynika z (4.2.16), tworzenie się entropii ma miejsce z trzech powodów. Po pierwsze, z powodu zamiany pracy sił dyfuzji na ciepło (źródła ciepła i jednocześnie entropii). Zakładamy, że ten rodzaj produkcji entropii jest nieujemny w każdym składniku tj.:

$$(4.2.17) \quad S_{1\alpha}^* \geq 0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

Jeśli przyjmujemy słuszność (4.2.17), to automatycznie spełniona będzie również następująca nierówność:

$$(4.2.18) \quad \sum_{\alpha=1}^N T_{\alpha} S_{1\alpha}^* = - \sum_{\hat{\beta}=\hat{\alpha}+1}^{\hat{N}} \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}-1} \hat{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* (v_{\hat{\alpha}}^i - v_{\hat{\beta}}^i) \geq 0$$

jako, że $T_{\alpha} > 0$.

Aby zapewnić dodatnią określoność wyrażenia (4.2.18) przyjmujemy, że jest ona formą kwadratową dodatnio określoną, tzn.:

$$(4.2.19) \quad \hat{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* = - b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} (v_{\hat{\alpha}}^i - v_{\hat{\beta}}^i).$$

Warunek dodatniej określoności formy kwadratowej (kryterium Sylwestra) żąda, aby wszystkie minory główne macierzy $\mathbf{B} = [b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}]$ były dodatnie. Warunek ten w naszym przypadku sprowadza się do żądania, aby $b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = b_{\hat{\beta}\hat{\alpha}} > 0$; $\hat{\alpha}, \hat{\beta} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}$. Współczynniki $b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$

nazywać będziemy współczynnikami oporu ruchu składnika $\hat{\alpha}$ względem składnika $\hat{\beta}$. W ogólności należy je określać na drodze doświadczalnej. W pewnych przypadkach szczególnych (jak np. współczynnik Darcy, [66]), można je również określić na drodze teoretycznej.

Z porównania wzorów (4.1.10) i (4.2.19) określamy siły dyfuzji występujące w równaniach ruchu (3.2.9) tj.:

$$(4.2.20) \quad F_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^i = -b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^i (v_{\hat{\alpha}}^i - v_{\hat{\beta}}^i) + \varrho_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^i \frac{v_{\hat{\alpha}}^i + v_{\hat{\beta}}^i}{2}.$$

Pierwszy człon wyraża opory ruchu (tarcie, lepkość), drugi natomiast średnią prędkość zmiany różnicy pędów pomiędzy dwoma składnikami, z tytułu wzajemnej wymiany masy. Ten drugi człon wyraża efekt analogiczny do tego, jaki zachodzi na przykład pomiędzy dwoma obiektami $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$, poruszającymi się obok siebie, gdy z jednego obiektu na drugi przetrzucana jest w sposób ciągły jakaś substancja. Efekt ten uwidoczni się w równaniach ruchu w zredukowanym współczynniku oporów $b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^*$, a mianowicie:

$$(4.2.21) \quad F_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^i = -b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* (v_{\hat{\alpha}}^i - v_{\hat{\beta}}^i) + \varrho_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* v_{\hat{\alpha}}^i.$$

Drugi człon po prawej stronie uprości się po podstawieniu do równań ruchu, natomiast:

$$(4.2.22) \quad b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* = b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + \frac{1}{2} \varrho_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* \neq b_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}^*; \quad \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \varrho_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}^* = 0.$$

Zróznicowanie współczynników $b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* \neq b_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}^*$ wpływa na zmniejszenie lub zwiększenie się różnicy prędkości pomiędzy dwoma składnikami.

Drugą przyczyną tworzenia się entropii jest proces wyrównywania się temperatur składników. Produkcja entropii przy wymianie ciepła pomiędzy składnikami przypomina dysypowaną pracę silnika Carnota, pracującego pomiędzy źródłem ciepła o tempera-

turze T_β i chłodnicą o temperaturze T_α {por. [48], str.35}. Stwierdzenie to staje się bardziej jasne, jeśli drugi człon we wzorze (4.2.16) zapiszemy jak następuje:

$$(4.2.23) \quad \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{h_{\alpha\beta}}{T_\alpha} = \sum_{\beta=\alpha+1}^N \sum_{\alpha=1}^{N-1} S_{\alpha\beta}^*$$

przy czym:

$$(4.2.24) \quad S_{\alpha\beta}^* = \frac{h_{\alpha\beta}}{T_\alpha} + \frac{(-h_{\alpha\beta})}{T_\beta} = h_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{T_\alpha} - \frac{1}{T_\beta} \right).$$

Trzecią przyczyną powstawania entropii jest pole gradientu temperatury. Zakładamy, że proces wyrównywania się temperatur składników, jak też przewodzenie ciepła wywołane gradientem temperatury dają dodatnią produkcję entropii niezależnie, tzn.:

$$(4.2.25) \quad \sum_{\beta=\alpha+1}^N \sum_{\alpha=1}^{N-1} h_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{T_\alpha} - \frac{1}{T_\beta} \right) \geq 0$$

oraz:

$$4.2.26 \quad - \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{T_\alpha^2} (q_\alpha^i - c_\alpha^v \rho_\alpha^i \vartheta_\alpha^i) \vartheta_{\alpha,i} \geq 0.$$

Słuszność niezależnego spełnienia nierówności (4.2.25) oraz

(4.2.26) uzasadnia się odmienną reprezentacją tensorową strumienia ciepła (wektor) i międzyskładnikowej wymiany ciepła (skalar). W myśl zasady Curie, przyczyna będąca skalarzem (różnica temperatur) nie może wywołać skutku o charakterze wektorowym (strumień ciepła).

Postulujemy, jak poprzednio, że wyrażenia (4.2.25) i (4.2.26) są formami kwadratowymi dodatnio określonymi. Zatem strumień ciepła q_α^i i prędkość wymiany ciepła między składnikami $h_{\alpha\beta}$ możemy określić następująco:

$$(4.2.27) \quad q_\alpha^i = -\kappa_\alpha \vartheta_{\alpha,i} + c_\alpha^v \rho_\alpha^i \vartheta_\alpha^i; \quad \kappa_\alpha \geq 0,$$

$$(4.2.28) \quad h_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} (T_\beta - T_\alpha); \quad \kappa_{\alpha\beta} \geq 0.$$

Równanie (4.2.27) jest uogólnieniem w stosunku do Fouriera prawem

przewodzenia ciepła; α_α oznacza parcyjalny współczynnik przewodzenia ciepła. W prawie tym interweniuje strumień ciepła transportowanego wraz ze strumieniem masy $\eta_\alpha^i = \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha\alpha} (v_\alpha^i - v_0^i)$.

Wzór (4.2.28), zwany w literaturze wzorem Newtona, { por. [8] str.231}, określa ruch ciepła przez konwekcję względnie wnikanie. Współczynnik $\alpha_{\alpha\beta}$, zwany współczynnikiem konwekcyjnego wnikania ciepła, określa ile ciepła w ciągu jednostki czasu wnika od składnika β do składnika α , przy różnicy temperatur równej jedności. W przypadku równych temperatur składników, nie ma wymiany ciepła pomiędzy składnikami; $\alpha_{\alpha\beta} = 0$. Prawo przewodzenia ciepła (4.2.27) możemy zastąpić wtedy jednym wzorem ogólnym dla całej mieszaniny:

$$(4.2.29) \quad q^i = -\kappa v_{,i}^i + v^i \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha^v \eta_\alpha^i$$

gdzie:

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha^i; \quad \kappa = \sum_{\alpha=1}^N \kappa_\alpha; \quad \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha^v \eta_\alpha^i = \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha^v \eta_\alpha^i.$$

Dotychczas stosowaliśmy równanie Gibbsa, wyrażone za pomocą wielkości odniesionych do jednostki objętości mieszaniny. Równanie to w literaturze jest często wyrażone za pomocą funkcji odniesionych do jednostki masy mieszaniny, której przypisuje się prędkość barycentryczną. Zmiany udziału poszczególnych składników w całkowitej masie mieszaniny oraz ruch dyfuzyjny poszczególnych składników względem ruchu barycentrycznego określa się, wprowadzając pojęcie potencjału chemicznego. Przykładowo, jeśli w mieszaninie pominiemy sprzężenia ruchu przez masę, a masy poszczególnych składników są zachowane i temperatury równe, to równanie Gibbsa, wyrażone za pomocą funkcji odniesionych do jednostki masy ma postać:

$$(4.2.30) \quad \dot{u} = \frac{1}{\rho} \bar{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + T \dot{\lambda} + \sum_{\alpha=1}^N M_{\alpha} \dot{c}_{\alpha},$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

u - całkowita energia wewnętrzna mieszaniny na jednostkę masy,

s - całkowita entropia mieszaniny na jednostkę masy,

T - temperatura bezwzględna,

$\bar{\sigma}_{ij}$ - globalny tensor naprężenia,

ϵ_{ij} - globalny tensor odkształcenia,

M_{α} - potencjał chemiczny (entalpia swobodna) składnika α ,

$c_{\alpha} = \rho_{\alpha}/\rho$ - udział gramowy składnika α w mieszaninie.

Pochodne materialne występujące we wzorze (4.2.30) odnoszą się do ruchu średniego barycentrycznego.

Termodynamiczna teoria mieszanin oparta na równaniu Gibbsa (4.2.30) przedstawiona jest w monografiach GUGGENHEIMA, [38], GUMIŃSKIEGO: [39], [40], WIŚNIEWSKIEGO, STANISZEWSKIEGO, SZYMANIKA, [85] i innych. Teoria ta stosowana jest najczęściej do mieszanin gazów lub płynów, i w związku z tym moc mechaniczna wyrażona jest przez moc sił objętościowych, tj. tensor naprężenia posiada jedynie część kulistą: $\bar{\sigma}_{ij} = -p \delta_{ij}$.

Teorię zaprezentowaną w wyżej wymienionych monografiach wraz z formalizmem matematycznym służącym do opisu reakcji chemicznych (por. też WILMAŃSKI [83], str.131), wykorzystamy w niniejszej pracy do określenia "źródeł" mas składników kinematycznych.

GREEN i LAWS, [36], MÜLLER [64], proponują określać źródła masy przez założenia konstytutywne. Funkcję źródeł traktują jako funkcję konstytutywną, która na podstawie zasady współlobočnosti zależy od tych samych parametrów stanu co np. energia wewnętrzna. Następnie wykorzystują zasady: obiektywności, determinizmu,

nierówność Clausiusa-Duhema i ustalają faktyczną zależność tej wielkości od danych parametrów stanu. Formalizm ten daje jedynie ogólne pojęcie o funkcji źródeł, tj. pozwala jedynie określić zależność funkcyjną. Konstrukcja konkretnej postaci funkcji źródeł jest na ogół trudna.

W tej pracy podamy propozycję określenia tych źródeł na podstawie równania Gibbsa, napisanego dla funkcji stanu odniesionych do jednostki masy składnika fizycznego α . Równanie to ma analogiczną postać do równania (4.2.30) tj.:

$$(4.2.31) \quad \dot{u}_\alpha = \frac{1}{s_\alpha} \mathcal{G}_{ij}^\alpha \dot{\xi}_{ij}^\alpha + s_\alpha T_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{M}_\alpha \dot{c}_{\alpha\alpha}.$$

W równaniu tym oznaczono:

u_α - energia wewnętrzna składnika fizycznego α na jednostkę jego masy,

\mathcal{G}_{ij}^α - średni tensor naprężenia, analogiczny do tego, jaki występuje w równaniach ruchu BIOTA (1.2.6),

$\dot{\xi}_{ij}^\alpha = \frac{1}{2} (v_{\alpha,j}^i + v_{\alpha,i}^j)$ - średni tensor prędkości odkształceń, przy czym średnią barycentryczną prędkość \mathbf{v}_α określa wzór (2.3.13),

s_α - entropia składnika fizycznego α na jednostkę jego masy,

T_α - temperatura absolutna składnika α ,

\mathcal{M}_α - potencjał chemiczny (entalpia swobodna) składnika kinematycznego $\hat{\alpha}$,

$c_{\alpha\hat{\alpha}} = s_{\alpha\hat{\alpha}} / s_\alpha$ - udział gramowy składnika fizycznego α mającego prędkość $\mathbf{v}_{\hat{\alpha}}$.

Człon konwekcyjny pochodnych materialnych we wzorze (4.2.31)

zawiera średnią barycentryczną prędkość \mathbf{v}_α tj. $(\cdot) = \partial/\partial t + (\partial/\partial x_i) v_\alpha^i$,

Wykorzystamy równanie ciągłości masy (2.4.3), które tu napiszemy w dwóch różnych postaciach, a mianowicie:

$$(4.2.32) \quad \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} g_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\dot{\alpha}}}{\partial t} + \operatorname{div} g_{\alpha\dot{\alpha}} \mathbf{v}_{\dot{\alpha}} = g_{\alpha\dot{\alpha}}^*,$$

gdzie $g_{\alpha\dot{\alpha}}^*$ oznacza prędkość zmian ("źródła") masy składnika fizycznego α w ruchu składnika kinematycznego $\dot{\alpha}$. Kombinacja równań (4.2.32) pozwala określić pochodną materialną udziałów gramowych w następujący sposób:

$$(4.2.33) \quad g_{\alpha} \dot{c}_{\alpha\dot{\alpha}} = -\operatorname{div} g_{\alpha\dot{\alpha}} (\mathbf{v}_{\dot{\alpha}} - \mathbf{v}_{\alpha}) + g_{\alpha\dot{\alpha}}^*.$$

Zależność tę podstawiamy do równania Gibbsa (4.2.31), które przepisujemy wyrażając zmiany entropii w funkcji pozostałych parametrów:

$$(4.2.34) \quad g_{\alpha} \dot{s}_{\alpha} = \frac{g_{\alpha} \dot{u}_{\alpha} - \tilde{c}_{ij}^{\alpha} \dot{\epsilon}_{ij}^{\alpha}}{T_{\alpha}} + \sum_{\dot{\alpha}=1}^N \frac{\eta_{\dot{\alpha}}}{T_{\alpha}} [\operatorname{div} g_{\alpha\dot{\alpha}} (\mathbf{v}_{\dot{\alpha}} - \mathbf{v}_{\alpha}) - g_{\alpha\dot{\alpha}}^*].$$

Różnica pomiędzy prędkością zmian energii wewnętrznej i mocy mechanicznej określa moc niemechaniczną składnika α tj. prędkość zmian ciepła. Ciepło to określiliśmy już częściowo w punkcie poprzednim {por.wzór (4.1.22)}. Obecnie należy je uzupełnić o człon źródłowy oraz zmienić prędkość odniesienia w strumieniu masy η_{α} z \mathbf{v}_0 na \mathbf{v}_{α} . Łatwo sprawdzić, wykorzystując wzór (2.3.13), że po tej zamianie strumień ciepła transportowanego wraz z masą zeruje się:

$$(4.2.35) \quad c_{\alpha}^v \eta_{\alpha}^i \dot{v}_{\alpha,i}^v = \sum_{\dot{\alpha}=1}^N c_{\alpha}^v g_{\alpha\dot{\alpha}} (V_{\dot{\alpha}}^i - v_{\alpha}^i) \dot{v}_{\alpha,i}^v = 0.$$

Wzór (4.2.34), po wprowadzeniu prędkości zmian ciepła, wyrazi się jak następuje:

$$(4.2.36) \quad g_{\alpha} \dot{s}_{\alpha} = \frac{-\tilde{q}_{\alpha,i}^i + \sum_{\beta=1}^N h_{\alpha\beta}}{T_{\alpha}} + S_{\alpha}^* + \sum_{\dot{\alpha}=1}^N \frac{\eta_{\dot{\alpha}}}{T_{\alpha}} (\tilde{\eta}_{\alpha,i}^i - g_{\alpha\dot{\alpha}}^*),$$

przy czym oznaczono:

\bar{q}_α - strumień ciepła przez hipotetyczną powierzchnię poruszającą się z prędkością \mathbf{v}_α ,

$\bar{q}_{\alpha\beta}^i = \varrho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)$ - dyfuzyjny strumień masy składnika α względem prędkości barycentrycznej \mathbf{v}_α .

Prędkość zmian entropii (4.2.37) możemy wyrazić jako sumę prędkości zmian entropii wymienianej z otoczeniem $\varrho_\alpha \dot{s}_\alpha^e$ oraz prędkości entropii wzrastającej nieodwracalnie $\varrho_\alpha \dot{s}_\alpha^i$ tj.:

$$(4.2.37) \quad \varrho_\alpha \dot{s}_\alpha = \varrho_\alpha \dot{s}_\alpha^e + \varrho_\alpha \dot{s}_\alpha^i,$$

przy czym:

$$(4.2.38) \quad \varrho_\alpha \dot{s}_\alpha^e = - \left(\frac{\bar{q}_\alpha^i - \sum_{\beta=1}^N \mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{q}_{\alpha\beta}^i}{T_\alpha} \right),_i$$

$$(4.2.39) \quad \varrho_\alpha \dot{s}_\alpha^i = \left\{ - \frac{\bar{q}_\alpha^i - \sum_{\beta=1}^N \mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{q}_{\alpha\beta}^i}{T_\alpha^2} T_{\alpha,i} + \frac{1}{T_\alpha} \sum_{\beta=1}^N h_{\alpha\beta} + S_{1\alpha}^* - \frac{1}{T_\alpha} \mathcal{M}_{\alpha\alpha} \varrho_{\alpha\alpha}^* - \frac{1}{T_\alpha} \sum_{\beta=1}^N \bar{q}_{\alpha\beta}^i \mathcal{M}_{\beta,i} \right\} \geq 0.$$

Niektóre składniki nierówności (4.2.39) omawialiśmy już analizując ograniczenia wynikające z nierówności (4.2.16). Dlatego, aby nie powtarzać dyskusji, dokonamy następującego przekształcenia tej nierówności: pomnożymy ją przez T_α i zsumujemy po wszystkich składnikach. Otrzymamy wtedy:

$$(4.2.40) \quad \left\{ \left[\sum_{\alpha=1}^N T_\alpha S_{1\alpha}^* - \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{T_\alpha} \left(\bar{q}_\alpha^i - \sum_{\beta=1}^N \mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{q}_{\alpha\beta}^i \right) \vartheta_{\alpha,i} \right] + \left[- \sum_{\beta=\alpha+1}^N \sum_{\alpha=1}^{N-1} S_{\alpha\beta}^* (\mathcal{M}_\alpha - \mathcal{M}_\beta) - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \bar{q}_{\alpha\beta}^i \mathcal{M}_{\beta,i} \right] \right\} \geq 0$$

przy czym wykorzystano tu zależność:

$$(4.2.41) \quad \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha\beta}^* = S_\alpha^* = \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha\alpha}^*; \quad S_{\alpha\beta}^* = -S_{\beta\alpha}^*,$$

oraz wzór (4.1.25).

Na podstawie (4.2.18) i (4.2.26) należy sądzić, że wyrażenie w pierwszym nawiasie prostokątnym jest nieujemne. Zakładamy również,

że wyrażenie w drugim nawiasie prostokątnym, wyrażające dyfuzyjny ruch masy, powoduje nieodwracalny wzrost entropii tj.:

$$(4.2.42) \quad \left[- \sum_{\hat{\beta}=\hat{\alpha}+1}^{\hat{N}} \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}-1} S_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* (\mathcal{M}_{\hat{\alpha}} - \mathcal{M}_{\hat{\beta}}) - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \bar{\eta}_{\alpha\hat{\alpha}}^i \mathcal{M}_{\hat{\alpha},i} \right] \geq 0.$$

Ponadto, różne reprezentacje tensorowe (funkcje skalarne w pierwszym członie, a wektorowe w drugim) sugerują, że poszczególne składniki powinny spełniać nierówności niezależnie tzn.:

$$(4.2.43) \quad - \sum_{\hat{\beta}=\hat{\alpha}+1}^{\hat{N}} \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}-1} S_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* (\mathcal{M}_{\hat{\alpha}} - \mathcal{M}_{\hat{\beta}}) \geq 0,$$

$$(4.2.44) \quad - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \bar{\eta}_{\alpha\hat{\alpha}}^i \mathcal{M}_{\hat{\alpha},i} \geq 0.$$

Dodatnią określoność wielomianów (4.2.43) i (4.2.44) zapewnimy, przyjmując podobnie jak poprzednio, że są one formami kwadratowymi dodatnio określonymi. Warunek ten spełnimy, jeśli:

$$(4.2.45) \quad S_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* = \nu_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} (\mathcal{M}_{\hat{\beta}} - \mathcal{M}_{\hat{\alpha}}); \quad \nu_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \geq 0,$$

$$(4.2.46) \quad \bar{\eta}_{\alpha\hat{\alpha}}^i = - \pi_{\alpha\hat{\alpha}} \mathcal{M}_{\hat{\alpha},i}; \quad \pi_{\alpha\hat{\alpha}} \geq 0.$$

Pierwszy wzór przypomina wzór Newtona (4.2.28) dla przenikania ciepła pomiędzy składnikami. Możemy go zinterpretować następująco: przepływ masy ze składnika kinematycznego $\hat{\beta}$ do składnika kinematycznego $\hat{\alpha}$ nastąpi wtedy, jeśli potencjał chemiczny (entalpia swobodna) składnika $\hat{\beta}$ będzie większy niż składnika $\hat{\alpha}$. Prędkość przenikania tej masy jest wprost proporcjonalna do różnicy potencjałów. Wzór (4.2.46) nazywać tu będziemy uogólnionym prawem Ficka. Swoją budową przypomina on prawo Fouriera dla ciepła. Informuje, że dyfuzja składnika α zachodzi w kierunku przeciwnym do gradientu potencjału chemicznego.

Rozdział V

RÓWNANIA KONSTITUTYWNE

5.1. Równania stanu

Równania stanu dla N-składnikowej mieszaniny określimy bazując na tożsamości Gibbsa (4.2.18). Wprowadzimy przekształcenie Legendre'a dla tej tożsamości i wyrazimy ją w funkcji energii swobodnej Helmholtza:

$$(5.1.1) \quad \dot{F}_1 = \sum_{\hat{\alpha}=1}^N G_{ij}^{\hat{\alpha}} \dot{\epsilon}_{ij}^{\hat{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^N S_{1\alpha} \dot{T}_{\alpha},$$

przy czym:

$$(5.1.2) \quad \dot{F}_1 \stackrel{df}{=} U_1 - \sum_{\alpha=1}^N T_{\alpha} S_{1\alpha}.$$

Zakładamy, że zmiennymi niezależnymi funkcji energii swobodnej są tensory odkształceń poszczególnych składników kinematycznych oraz ich temperatury tj.:

$$(5.1.3) \quad \dot{F}_1 = \dot{F}_1(\epsilon_{ij}^{\hat{\alpha}}, \dots, \epsilon_{ij}^{\hat{N}}; T_1, \dots, T_N).$$

Pochodna materialna tej funkcji wyraża się jak następuje:

$$(5.1.4) \quad \dot{F}_1 = \sum_{\hat{\alpha}=1}^N \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_{ij}^{\hat{\alpha}}} \dot{\epsilon}_{ij}^{\hat{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial F_1}{\partial T_{\alpha}} \dot{T}_{\alpha}.$$

Z porównania pochodnej materialnej funkcji energii swobodnej wyrażonej wzorami (5.1.1) i (5.1.4) otrzymujemy zależność:

$$(5.1.5) \quad \sum_{\hat{\alpha}=1}^N (G_{ij}^{\hat{\alpha}} - \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_{ij}^{\hat{\alpha}}}) \dot{\epsilon}_{ij}^{\hat{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^N (S_{1\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial T_{\alpha}}) \dot{T}_{\alpha}.$$

Aby powyższa zależność była spełniona dla każdego dopuszczalnego procesu, a ściślej mówiąc dla dowolnych zmian parametrów stanu $\xi_{ij}^{\hat{\alpha}}$ i T_{α} , które są od siebie niezależne, muszą być spełnione następujące równania:

$$(5.1.6) \quad \hat{G}_{ij}^{\hat{\alpha}} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_{ij}^{\hat{\alpha}}} ; \quad \hat{\alpha} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N} ,$$

$$(5.1.7) \quad S_{\alpha} = - \frac{\partial F_1}{\partial T_{\alpha}} ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

Równania (5.1.6) i (5.1.7) nazywamy równaniami stanu. W następnych punktach pracy wykorzystamy je przy określaniu związków fizycznych i funkcji stanu.

5.2. Związki fizyczne

Celem określenia związków fizycznych, wyrazimy energię swobodną (5.1.3) w funkcji niezmienników poszczególnych tensorów odkształcenia oraz temperatur. Z uwagi na to, że naszym celem jest teoria quasiliniowa,* pomijamy trzecie niezmienniki tensorów odkształcenia jako wielkości wyższego rzędu. Energię swobodną wyrażamy więc w funkcji dwóch pierwszych niezmienników tensorów odkształceń i temperatur tj.:

$$(5.2.1) \quad F_1 = F_1 (I_I^{\hat{1}}, I_{II}^{\hat{1}}, I_I^{\hat{2}}, I_{II}^{\hat{2}}, \dots, I_I^{\hat{N}}, I_{II}^{\hat{N}} ; T_1, T_2, \dots, T_N),$$

*nazwa "teoria quasiliniowa" wynika z przyjętego wcześniej założenia, iż rozważamy małe gradienty przemieszczeń i prędkości przemieszczeń, natomiast nie czynimy ograniczeń odnośnie samych przemieszczeń i prędkości przemieszczeń. Stąd też, niektóre współczynniki przy pochodnych mogą zależeć od prędkości przemieszczeń (rzadziej samego przemieszczenia). Tak np. współczynnik b_{22} wyrażający opory ruchu we wzorze (4.2.19) może być funkcją prędkości, pochodna materialna posiada człon lokalny i konwekcyjny, który w świetle powyższego wywodu jest quasiliniowy, stałe materiałowe mogą być funkcją temperatury itp.

przy czym:

$$(5.2.2) \quad \begin{aligned} I_I^{\hat{\alpha}} &= \varepsilon^{\hat{\alpha}} = \varepsilon_{ij}^{\hat{\alpha}} \delta_{ij}, \\ I_{II}^{\hat{\alpha}} &= \varepsilon_{ij}^{\hat{\alpha}} \varepsilon_{ij}^{\hat{\alpha}}; \quad \hat{\alpha} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}. \end{aligned}$$

Rozwijamy funkcję energii swobodnej (5.2.1) w szereg Taylora w otoczeniu stanu o zerowym polu mechanicznym i danym polu temperatury:

$$(5.2.3) \quad \begin{aligned} F_1(\langle I \rangle; \langle T \rangle) &= F_1(0; \langle T \rangle) + \sum_{\hat{\alpha}=\hat{1}}^{\hat{N}} \frac{\partial F_1(0; \langle T \rangle)}{\partial I_I^{\hat{\alpha}}} I_I^{\hat{\alpha}} + \\ &+ \sum_{\hat{\alpha}=\hat{1}}^{\hat{N}} \frac{\partial F_1(0; \langle T \rangle)}{\partial I_{II}^{\hat{\alpha}}} I_{II}^{\hat{\alpha}} + \frac{1}{2} \sum_{\hat{\alpha}=\hat{1}}^{\hat{N}} \sum_{\hat{\beta}=\hat{1}}^{\hat{N}} \frac{\partial F_1(0; \langle T \rangle)}{\partial I_I^{\hat{\alpha}} \partial I_I^{\hat{\beta}}} I_I^{\hat{\alpha}} I_I^{\hat{\beta}}, \end{aligned}$$

przy czym dla skrócenia zapisu oznaczono przez $\langle I \rangle$ zbiór niezmienników, a przez $\langle T \rangle$ zbiór temperatur.

W rozwinięciu (5.2.3) pominęliśmy konsekwentnie człony rzędu wyższego niż drugi.

Wykorzystamy teraz równania stanu (5.1.6) i napiszemy związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami:

$$(5.2.4) \quad \sigma_{ij}^{\hat{\alpha}} = 2\mu_{\hat{\alpha}} \varepsilon_{ij}^{\hat{\alpha}} + \left(\sum_{\hat{\beta}=\hat{1}}^{\hat{N}} \lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \varepsilon^{\hat{\beta}} + \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon^{\hat{\alpha}}} \right) \delta_{ij},$$

gdzie:

$$(5.2.5) \quad \begin{aligned} \mu_{\hat{\alpha}}(\langle T \rangle) &= \frac{\partial F_1(0; \langle T \rangle)}{\partial I_{II}^{\hat{\alpha}}}, \\ \lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\langle T \rangle) &= \frac{\partial F_1(0; \langle T \rangle)}{\partial I_I^{\hat{\alpha}} \partial I_I^{\hat{\beta}}} = \lambda_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}(\langle T \rangle). \end{aligned}$$

Z geometrycznej interpretacji rozwinięcia funkcji F_1 w szereg Taylora wynika następująca interpretacja mechaniczna jej pochodnych:

$\mu_{\hat{\alpha}}$ - oznacza parcjalny moduł odkształceń postaciowych składnika $\hat{\alpha}$,

$\lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ - oznacza współczynnik wpływu odkształcenia objętościowego składnika $\hat{\beta}$ na naprężenie w składniku $\hat{\alpha}$, gdy $\hat{\alpha} \neq \hat{\beta}$.

Współczynniki $\lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ dla $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ są odpowiednikami stałej Lamego dla danego składnika.

Wyjaśnimy obecnie znaczenie pochodnych $\frac{\partial F_1}{\partial \epsilon^{\hat{\alpha}}}$, ($\hat{\alpha} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}$), w związkach fizycznych (5.2.4). W tym celu założymy, że ośrodek poddany został działaniu tylko pola temperatury. Mamy więc zerowe pole naprężeń i odkształceń mechanicznych. Ze względu na zróżnicowaną rozszerzalność cieplną składników, w mieszaninie mogą powstać naprężenia termiczne. Mogą one odgrywać rolę szczególnie w tych mieszaninach, w których składniki mają znacznie ograniczoną swobodę ruchu. Zagadnienie naprężeń termicznych w mieszaninach jest zbyt szerokie i wykracza poza ramy tej pracy. Dlatego też tutaj zakładamy, że składniki mają swobodę ruchu na tyle dużą, że ewentualne naprężenia termiczne można zaniedbać. Podtrzymujemy wcześniej uczynione założenie o izotropii i jednorodności rozważanej mieszaniny dodając, że pod tymi pojęciami rozumiemy również izotropię i jednorodność termiczną. W związku z powyższymi założeniami, pole temperatury nie będzie wywoływać naprężeń termicznych, a zatem przyjmujemy $\sigma_{ij}^{\hat{\alpha}} = 0$. Dla takiego stanu można określić odkształcenia ośrodka, posługując się pojęciem parcjalnego współczynnika rozszerzalności cieplnej $\kappa_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. Współczynnik ten wyraża udział składnika fizycznego $\hat{\alpha}$ w odkształceniu termicznym składnika kinematycznego $\hat{\beta}$. Aby bliżej wyjaśnić jego sens, skorzystamy z zależności (2.3.1), (2.3.2) i wyrazimy objętość mieszaniny poprzez sumę objętości parcjalnych:

$$(5.2.6) \quad dV = \sum_{\alpha=1}^N dV_{\alpha} .$$

Wskutek zmiany pola temperatury, elementarna objętość mieszaniny zmieni się i wyniesie:

$$dV' = \sum_{\alpha=1}^N dV'_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (3\kappa_{\alpha} \vartheta_{\alpha} + 1) dV_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N 3\kappa_{\alpha} \vartheta_{\alpha} f_{\alpha}^{\beta} dV + dV,$$

lub

$$(5.2.7) \quad \frac{dV' - dV}{dV} = \sum_{\alpha=1}^N 3\kappa_{\alpha} \vartheta_{\alpha} f_{\alpha}^{\beta},$$

przy czym κ_{α} oznacza współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej składnika fizycznego α , ϑ_{α} jego temperaturę względną.

Korzystając z zależności (2.3.5) i (2.3.4) możemy wzór (5.2.7) przepisać w postaci:

$$(5.2.8) \quad \frac{dV' - dV}{dV} = \sum_{\beta=1}^N \xi_{\beta}^{\beta},$$

gdzie:

$$(5.2.9) \quad \xi_{\beta}^{\beta} = \sum_{\alpha=1}^N 3\kappa_{\alpha\beta}^T \vartheta_{\alpha},$$

$$\kappa_{\alpha\beta}^T = \kappa_{\alpha}^T f_{\alpha\beta}^A.$$

Obecnie dokonamy kontrakcji wskaźników w związkach (5.2.4) i podstawimy zerową wartość naprężeń oraz odkształcenia określonego wzorem (5.2.9)₁.

Po przekształceniach otrzymamy:

$$(5.2.10) \quad - \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon_{\alpha}^{\beta}} = \sum_{\alpha=1}^N \delta_{\alpha\alpha}^T \vartheta_{\alpha},$$

gdzie:

$$(5.2.11) \quad \delta_{\alpha\alpha}^T = 2\mu_{\alpha}^T \kappa_{\alpha\alpha}^T + \sum_{\beta=1}^N 3\lambda_{\alpha\beta}^T \kappa_{\alpha\beta}^T.$$

W przypadku, gdy temperatury wszystkich składników lokalnie są takie same, tzn. $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_N \equiv \vartheta$, zależność (5.2.10) przyjmuje prostszą postać:

$$(5.2.12) \quad - \frac{\partial F_1}{\partial e^{\hat{\alpha}}} = \gamma_{\hat{\alpha}}^T \psi^{\hat{\alpha}} ; \quad \gamma_{\hat{\alpha}}^T = \sum_{\alpha=1}^N \gamma_{\alpha\hat{\alpha}}^T$$

Związki fizyczne (5.2.4) ostatecznie wyrażają się jak następuje:

$$(5.2.13) \quad \hat{G}_{ij}^{\hat{\alpha}} = 2\mu_{\hat{\alpha}} \hat{E}_{ij}^{\hat{\alpha}} + \left[\sum_{\hat{\beta}=1}^N \lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{E}^{\hat{\beta}} - \sum_{\alpha=1}^N \gamma_{\alpha\hat{\alpha}}^T \psi^{\hat{\alpha}} \right] \delta_{ij}$$

W przypadku, gdy temperatury składników lokalnie są takie same mamy:

$$(5.2.14) \quad \hat{G}_{ij}^{\hat{\alpha}} = 2\mu_{\hat{\alpha}} \hat{E}_{ij}^{\hat{\alpha}} + \left[\sum_{\hat{\beta}=1}^N \lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{E}^{\hat{\beta}} - \gamma_{\hat{\alpha}}^T \psi \right] \delta_{ij}$$

5.3. Funkcje stanu

W punkcie tym wyspecyfikujemy te funkcje stanu, które będą nam pomocne przy wyprowadzaniu równania przewodnictwa ciepła. Rozpocniemy od funkcji energii swobodnej (5.2.3). Dla pełnej jej specyfikacji należy określić jeszcze jej wartość dla zerowego pola mechanicznego, tj. funkcję $F_1(0; \langle T \rangle) \equiv F_1^0$. W tym celu wykorzystamy znaną w termodynamice, {por. np. [28], [40]}, zależność pomiędzy ciepłem właściwym przy stałej objętości a drugą pochodną energii swobodnej. Dla naszego przypadku zależność ta wyraża się jak następuje:

$$(5.3.1) \quad c_{\alpha}^E = T_{\alpha} \left(\frac{\partial S_{1\alpha}}{\partial T_{\alpha}} \right)_{\epsilon} = -T_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 F_{1\alpha}^0}{\partial T_{\alpha}^2} \right)_{\epsilon}$$

przy czym c_{α}^E jest parcjalnym ciepłem właściwym składnika fizycznego α przy stałej objętości, odniesionym do objętości, natomiast $F_{1\alpha}^0$ jest energią swobodną składnika α dla stanu wyjściowego. Energia swobodna jest wielkością ekstensywną tzn. podlega prawu sumowalności. W naszym przypadku całkowita energia mieszaniny zawartej w jednostce objętości jest sumą parcjalnych energii

poszczególnych składników tj.:

$$(5.3.2) \quad F_1^0 = \sum_{\alpha=1}^N F_{1\alpha}^0.$$

Związek (5.3.1) całkujemy dwukrotnie względem temperatury, a otrzymany wynik podstawiamy do (5.3.2). Otrzymujemy wtedy:

$$(5.3.3) \quad F_1^0 = - \sum_{\alpha=1}^N \int_{T_{0\alpha}}^{T_{\alpha}} dT_{\alpha} \int_{T_{0\alpha}}^{T_{\alpha}} \frac{c_{\alpha}^{\epsilon}}{T_{\alpha}} dT_{\alpha}.$$

Jeśli założyć, że c_{α}^{ϵ} nie zależy od temperatury, to całkowanie nie następuje trudności.

Obecnie można energię swobodną napisać w postaci jawnej, a mianowicie:

$$(5.3.4) \quad F_1 = - \sum_{\alpha=1}^N \int_{T_{0\alpha}}^{T_{\alpha}} dT_{\alpha} \int_{T_{0\alpha}}^{T_{\alpha}} \frac{c_{\alpha}^{\epsilon}}{T_{\alpha}} dT_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\alpha=1}^N \gamma_{\alpha\alpha}^T \nu_{\alpha}^{\alpha} \epsilon^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \mu_{\alpha}^{\alpha} \epsilon_{ij}^{\alpha} \epsilon_{ij}^{\alpha} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^N \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha} \epsilon^{\beta}.$$

Drugą funkcję stanu, entropię, otrzymujemy natychmiast, różniczkując energię swobodną względem temperatury { por. (5.1.7) }, przy czym zakładamy, że dla interesującego nas przedziału temperatur $\mu_{\alpha}^{\alpha} = \text{const}$ i $\lambda_{\alpha\beta} = \text{const}$:

$$(5.3.5) \quad S_1 = \sum_{\alpha=1}^N S_{1\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \left[c_{\alpha}^{\epsilon} \ln \frac{T_{\alpha}}{T_{0\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^N \gamma_{\alpha\alpha}^T \hat{\epsilon}^{\alpha} \right].$$

Trzecią i ostatnią interesującą nas funkcją stanu jest entalpia swobodna, zdefiniowana wzorem:

$$(5.3.6) \quad G_1 = \sum_{\alpha=1}^N G_{1\alpha} = F_1 - \sum_{\alpha=1}^N \hat{G}_{ij}^{\alpha} \epsilon_{ij}^{\alpha}.$$

Funkcja ta, wyrażona za pomocą naprężeń, pozwoli nam określić ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu. Różnica ciepła przy stałym ciśnieniu i przy stałej objętości stanowi kolejną wielkość, którą wykorzystamy przy wyprowadzaniu równania przewodnictwa ciepła.

Celem wyrażenia funkcji G_1 za pomocą naprężeń, należy

odwrócić związki fizyczne (5.2.13), tzn. wyrazić odkształcenia za pomocą naprężeń. Otrzymane zależności należy podstawić do funkcji energii swobodnej oraz entalpii swobodnej. Nie będziemy tu przepisywać otrzymanej w ten sposób funkcji, lecz od razu piszemy drugą pochodną parcjalnej entalpii swobodnej $G_{1\alpha}$ względem temperatury T_α tj.:

$$(5.3.7) \quad \frac{\partial^2 G_{1\alpha}}{\partial T^2} = - \frac{c_\alpha^\epsilon}{T_\alpha} - \Gamma_\alpha^T,$$

gdzie

$$(5.3.8) \quad \Gamma_\alpha^T = \frac{1}{D} \sum_{\beta=1}^N \sum_{\alpha=1}^N \delta_{\alpha\alpha}^T \delta_{\alpha\beta}^T D_{\alpha\beta},$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\mu_1 + \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \frac{2}{3}\mu_2 + \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \frac{2}{3}\mu_N + \lambda_{NN} \end{bmatrix} = \det \left[\frac{2}{3}\mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta} \right],$$

$D_{\alpha\beta}$ oznacza dopełnienie algebraiczne elementu $(\frac{2}{3}\mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta})$
 $\delta_{\alpha\beta}$ oznacza deltę Kroneckera.

Parcjalne ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu składnika α , odniesione do jednostki objętości całkowitej określone jest wzorem, [28], [40], :

$$(5.3.9) \quad c_\alpha^\epsilon = T_\alpha \left(\frac{\partial S_{1\alpha}}{\partial T_\alpha} \right)_G = -T_\alpha \left(\frac{\partial G_{1\alpha}}{\partial T_\alpha} \right)_G.$$

Na podstawie (5.3.7) i (5.3.9) znajdujemy poszukiwaną różnicę pomiędzy parcjalnymi ciepłami właściwymi przy stałym ciśnieniu i stałej objętości, a mianowicie:

$$(5.3.10) \quad c_\alpha^\epsilon - c_\alpha^\epsilon = \Gamma_\alpha^T T_\alpha.$$

5.4. Równanie przewodnictwa ciepłego

Celem wyprowadzenia równania przewodnictwa ciepłego wykorzystamy zależność (4.2.12), którą przepisujemy tu w następującej formie:

$$(5.4.1) \quad T_{\alpha} \dot{S}_{1\alpha} = - (q_{\alpha,i}^i - c_{\alpha}^v n_{\alpha}^i \psi_{\alpha,i}^i) + \sum_{\beta=1}^N h_{\alpha\beta} + S_{1\alpha}^* T_{\alpha}.$$

Wyrażenie po lewej stronie wzoru (5.4.1) możemy, na podstawie (5.3.5), określić następująco:

$$(5.4.2) \quad T_{\alpha} \dot{S}_{1\alpha} = c_{\alpha}^{\epsilon} \dot{T}_{\alpha} + T_{\alpha} \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \delta_{\alpha\hat{\alpha}}^T \dot{\hat{\epsilon}}_{\hat{\alpha}}$$

Wykorzystując różnicę pomiędzy ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu i przy stałej objętości (5.3.10), eliminujemy temperaturę T_{α} :

$$(5.4.3) \quad T_{\alpha} \dot{S}_{1\alpha} = c_{\epsilon}^{\alpha} (\dot{T}_{\alpha}) + (c_{\epsilon}^{\alpha} - c_{\epsilon}^{\alpha}) \cdot \frac{1}{T_{\alpha}} \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \delta_{\alpha\hat{\alpha}}^T \dot{\hat{\epsilon}}_{\hat{\alpha}}.$$

Obecnie przekształcimy prawą stronę wzoru (5.4.1). W tym celu wykorzystamy uogólnione prawo przewodzenia ciepła (4.2.27), wzór określający wymianę ciepła między składnikami (4.2.28) oraz warunek (4.1.26). Po podstawieniu tych wzorów do prawej strony równania (5.4.1) otrzymujemy:

$$(5.4.4) \quad T_{\alpha} \dot{S}_{1\alpha} = \kappa_{\alpha} \dot{\psi}_{\alpha,ii} + \sum_{\beta=1}^N \kappa_{\alpha\beta} (T_{\beta} - T_{\alpha}) + S_{1\alpha}^* T_{\alpha}.$$

Z porównania wzorów (5.4.3) i (5.4.4) otrzymujemy poszukiwane równanie przewodnictwa ciepła dla składnika α :

$$(5.4.5) \quad \kappa_{\alpha} \nabla^2 \psi_{\alpha} + S_{1\alpha}^* T_{\alpha} = c_{\alpha}^{\epsilon} \dot{\psi}_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^N \kappa_{\alpha\beta} (T_{\beta} - T_{\alpha}) + \frac{c_{\epsilon}^{\alpha} - c_{\epsilon}^{\alpha}}{T_{\alpha}} \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \delta_{\alpha\hat{\beta}}^T \dot{\hat{\epsilon}}_{\hat{\beta}},$$

przy czym ∇^2 oznacza operator Laplace'a. Jeśli uwzględnimy związek pomiędzy ciepłami właściwymi przy stałej objętości odniesionymi do jednostki objętości i do jednostki masy tj. związek:

$$(5.4.6) \quad c_{\alpha}^{\epsilon} = g_{\alpha} c_{\alpha}^{\nu},$$

to człon $c_{\alpha}^{\epsilon} \dot{v}_{\alpha}^{\nu}$ możemy określić jak następuje:

$$(5.4.7) \quad \dot{c}_{\alpha}^{\epsilon} \dot{v}_{\alpha}^{\nu} = \dot{c}_{\alpha}^{\epsilon} \dot{v}_{\alpha}^{\nu} + c_{\alpha}^{\nu} \eta_{\alpha}^i \dot{v}_{\alpha}^i.$$

Kropka nad symbolem oznacza pochodną materialną z prędkością konwekcji \mathbf{v}_0 . Drugi człon po prawej stronie oznacza ciepło transportowane przez masę [por. (4.1.22)+(4.1.24)].

W przypadku idealnej wymiany ciepła znika człon wyrażający przenikanie ciepła od składnika do składnika. Wprowadzając globalne parametry dla całej mieszaniny, wystarczy rozwiązywać jedno równanie globalne aby znaleźć pole temperatury mieszaniny. Równanie to ma postać:

$$(5.4.8) \quad \kappa \nabla^2 \dot{v} + Q^* = c^{\epsilon} \dot{v} + \dot{v}_i \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha}^{\nu} \eta_{\alpha}^i + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \delta_{\hat{\beta}}^T \dot{\epsilon}^{\hat{\beta}},$$

gdzie:

$$\kappa = \sum_{\alpha=1}^N \kappa_{\alpha},$$

$$c^{\epsilon} = \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha}^{\epsilon},$$

$$\delta_{\hat{\beta}}^T = \sum_{\alpha=1}^N \delta_{\alpha \hat{\beta}}^T \frac{C_{\alpha}^{\epsilon} - c_{\alpha}^{\epsilon}}{\Gamma^{\alpha}},$$

$$Q^* = \sum_{\hat{\beta}=\hat{\alpha}+1}^{\hat{N}} \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}-1} b_{\hat{\alpha} \hat{\beta}} (\dot{v}_{\hat{\alpha}}^i - \dot{v}_{\hat{\beta}}^i) (\dot{v}_{\hat{\alpha}}^i - \dot{v}_{\hat{\beta}}^i).$$

Przy całkowaniu równania przewodnictwa pomija się zwykle człony konwekcyjne w pochodnych materialnych, tj. rozwiązuje się równanie postaci:

$$(5.4.9) \quad \kappa \nabla^2 \dot{v} = c^{\epsilon} \dot{v}_{,t} + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} \delta_{\hat{\beta}}^T \dot{\epsilon}_{,t}^{\hat{\beta}}; \quad (\cdot, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}.$$

W pierwszym przybliżeniu pomija się też niekiedy wpływ zmian dyatacji na rozkład temperatury.

Rozdział VI

RÓWNANIA ZBIORCZE I WARUNKI BRZEGOWE

6.1. Zestawienie równań

Zestawimy tutaj równania, które są niezbędne przy rozwiązywaniu problemów początkowo-brzegowych w teorii mieszanin. Rozpoczniemy od napisania równań ruchu (3.2.9) w postaci jawnej, tzn. z wyspecyfikowanymi siłami dyfuzji. Siły te określone są wzorem (4.2.21). Równania ruchu po uwzględnieniu tych sił wyrażają się następująco:

$$(6.1.1) \quad G_{ij}^{\dot{\alpha}} + \varrho_{\dot{\alpha}} X_i = \varrho_{\dot{\alpha}} \dot{v}_{\dot{\alpha}}^i + \sum_{\beta=1}^N b_{\dot{\alpha}\beta}^* (v_{\beta}^i - v_{\dot{\alpha}}^i).$$

Współczynniki $b_{\dot{\alpha}\beta}^*$ omówiliśmy szczegółowo w punkcie 4.2. Przypomnimy, że wyrażają one opory ruchu składnika $\dot{\alpha}$ z tytułu tarcia, lepkości ($b_{\dot{\alpha}\beta} = b_{\beta\dot{\alpha}}$) oraz wymiany masy pomiędzy składnikami kinematycznymi ($\frac{1}{2}\varrho_{\dot{\alpha}\beta}^* = -\frac{1}{2}\varrho_{\beta\dot{\alpha}}^*$):

$$(6.1.2) \quad b_{\dot{\alpha}\beta}^* = b_{\beta\dot{\alpha}}^* + \frac{1}{2}\varrho_{\dot{\alpha}\beta}^* \neq b_{\beta\dot{\alpha}}^*.$$

W punkcie 4.2 wspomnieliśmy, że współczynniki $b_{\dot{\alpha}\beta}^*$ należy, w ogólnym przypadku, określać drogą eksperymentalną, ale niekiedy można również na drodze teoretycznej jak np. współczynnik Darcy [66]. Prawo Darcy, wyrażające ustalony przepływ cieczy w ośrodku porowatym, przy nieobecności sił masowych, wynika natychmiast z (6.1.1).

Przyjmujemy mianowicie: $G_{ij}^{\hat{2}} = G \delta_{ij}$, $X_i \equiv 0$, $\dot{v}_\alpha^i \approx 0$, $\hat{N} = 2$ i otrzymujemy:

$$(6.1.3) \quad G_{i1} = b(v_1 - v_2); \quad b_{22} = b,$$

przy czym wskaźnik $\hat{1}$ odnosi się do szkieletu ośrodka porowatego, a składnik $\hat{2}$ do cieczy w porach.

Prędkość wymiany masy pomiędzy składnikami kinematycznymi $S_{\alpha\beta}^*$ jest proporcjonalna do różnicy potencjałów chemicznych składników kinematycznych {por. (4.2.45)}:

$$(6.1.4) \quad S_{\alpha\beta}^* = \nu_{\alpha\beta} (\mathcal{M}_{\beta} - \mathcal{M}_{\alpha}); \quad \nu_{\alpha\beta} \geq 0.$$

Współczynniki $\nu_{\alpha\beta}$, podobnie jak współczynniki wymiany ciepła w prawie Newtona (4.2.28), są zwykle wyznaczane doświadczalnie i tabelaryzowane {patrz literatura związana z wymianą ciepła i masy np. [81]}.

Przy rozwiązywaniu problemów początkowo-brzegowych teorii mieszanin należy w ogólnym przypadku określić następujące funkcje:

- 1). \hat{N} funkcji gęstości $\rho_\alpha(\mathbf{x}, t)$;
- 2). $3\hat{N}$ współrzędnych \hat{N} wektorów przemieszczeń $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}, t)$;
- 3). $6\hat{N}$ współrzędnych \hat{N} parcjalnych tensorów naprężenia $G_{ij}^{\alpha}(\mathbf{x}, t)$,
- 4). N funkcji temperatur $\vartheta_\alpha(\mathbf{x}, t)$.

Wprowadziliśmy $10\hat{N}+N$ niewiadomych wielkości. Celem ich wyznaczenia dysponujemy $10\hat{N}+N$ równaniami:

- 1). \hat{N} równań ciągłości (2.4.6),
- 2). $3\hat{N}$ równań ruchu (6.1.1),
- 3). $6\hat{N}$ związków fizycznych (5.2.13), przy czym wykorzystujemy związki geometryczne dla małych odkształceń,
- 4). N równań przewodnictwa cieplnego (5.4.5).

Liczbę równań możemy zmniejszyć, jeżeli do równań ruchu wprowadzimy związki fizyczne i skorzystamy ze znanych związków geometrycznych dla małych odkształceń. W wyniku opisanego procedury otrzymujemy równania zbiorcze:

$$(6.1.5) \quad \mu_{\hat{\alpha}} \nabla^2 u_{\hat{\alpha}}^i + (\mu_{\hat{\alpha}} + \lambda_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}) \dot{\epsilon}_{\hat{\alpha},i}^{\hat{\alpha}} + \sum_{\substack{\hat{\beta}=1 \\ \hat{\beta} \neq \hat{\alpha}}}^{\hat{N}} \lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \dot{\epsilon}_{\hat{\alpha},i}^{\hat{\beta}} + \varrho_{\hat{\alpha}} X_i = \\ = \varrho_{\hat{\alpha}} \ddot{u}_{\hat{\alpha}}^i + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* (\dot{u}_{\hat{\beta}}^i - \dot{u}_{\hat{\alpha}}^i) + \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \delta_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}^T \dot{v}_{\hat{\alpha},i}; \quad \hat{\alpha} = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}.$$

Wypisany układ równań uzupełniają wspomniane równania ciągłości masy (2.4.6) i równania przewodnictwa (5.4.5).

Razem, równania te stanowią pełny zestaw równań teorii mieszanin, w której uwzględnione są sprzężenia ruchu przez masę. Są to równania quasiliniowe. Niektóre współczynniki przy pochodnych są funkcjami prędkości przemieszczeń (np. człony konwekcyjne w pochodnych materialnych) bądź też niektóre człony są kwadratami prędkości, jak np. źródła ciepła. Zwykle w pierwszym przybliżeniu pomijamy tego typu quasiliniowe człony. Przyjmujemy też, że gęstości masowe, wobec małych odkształceń, są niezmiennie oraz, że temperatury poszczególnych składników w danym punkcie są równe (procesy bliskie stanom równowagi). Po tych uproszczeniach otrzymujemy następujące równania:

$$(6.1.6) \quad \mu_{\hat{\alpha}} \nabla^2 u_{\hat{\alpha}}^i + (\mu_{\hat{\alpha}} + \lambda_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}) \dot{\epsilon}_{\hat{\alpha},i}^{\hat{\alpha}} + \sum_{\substack{\hat{\beta}=1 \\ \hat{\beta} \neq \hat{\alpha}}}^{\hat{N}} \lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \dot{\epsilon}_{\hat{\alpha},i}^{\hat{\beta}} + \varrho_{\hat{\alpha}} X_i = \\ = \varrho_{\hat{\alpha}} \ddot{u}_{\hat{\alpha}}^i + \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^* (\dot{u}_{\hat{\beta}}^i - \dot{u}_{\hat{\alpha}}^i) + \delta_{\hat{\alpha}}^T \dot{v}_i, \\ \kappa \nabla^2 \dot{v} = c^e \dot{v} + \sum_{\hat{\alpha}=1}^{\hat{N}} \delta_{\hat{\alpha}}^T \dot{\epsilon}^{\hat{\alpha}}, \quad (\cdot) \cong \frac{\partial}{\partial t} \\ \varrho_{\hat{\alpha}} = \text{const}.$$

Jest to liniowy układ równań teorii mieszanin.

6.2. Warunki początkowo-brzegowe

Jednym z istotnych elementów tej pracy jest zwrócenie uwagi na problem warunków granicznych dla ośrodka wieloskładnikowego. Na brzegu obszaru zajętego przez dowolny ośrodek spotykamy się zawsze z obiektywnie istniejącą rzeczywistością. Są to obiektywnie istniejące siły, wymuszenia kinematyczne czy określone warunki termiczne. Od warunków na brzegu zależy stan wnętrza obszaru, który mamy opisać przy pomocy równań teorii otrzymanej w wyniku abstrakcyjnego rozumowania, wspartego prawami przyrody (zasady mechaniki i termodynamiki). Kłopoty z adekwatnym powiązaniem obiektywnej rzeczywistości na brzegu ze stanem ośrodka w jego wnętrzu zaczynają się wtedy, gdy symbole, za pomocą których wyrażone są równania teorii, oznaczają wielkości nierealne. Takimi wielkościami są np. prędkości barycentryczne składników fizycznych:

$$(6.2.1) \quad \mathbf{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_\alpha} \mathbf{v}_\alpha$$

Nie istnieje w rzeczywistości pole prędkości barycentrycznej. Żadna "cząstka" składnika α w przypadku ruchu sprzężonego takiej prędkości nie posiada.

Podobnie, nierzeczywistą wielkością jest globalna prędkość barycentryczna:

$$(6.2.2) \quad \mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{g_\alpha}{g} \mathbf{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \frac{g_\alpha}{g} \mathbf{v}_\alpha$$

Nie naturalnym jest też równanie ruchu barycentrycznego środka masy:

$$(6.2.3) \quad \sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \frac{dv^i}{dt}$$

Tensor naprężenia w tym równaniu zdefiniowany jest jako "siła $\bar{G}_{ij} dA_j$ działająca na powierzchnię dA_j , która pozostaje w bezruchu względem barycentrycznego ruchu" {[64], str.5}. Nie wiemy natomiast jak ta siła ma się względem powierzchni brzegowej, na której punkty barycentryczne nie leżą, a na której mogą działać obiektywnie istniejące siły. GREEN i NAGHDI, [34], kwestionując definicję tensora:

$$(6.2.4) \quad \bar{G}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N (\bar{G}_{ij}^{\alpha} - \rho_{\alpha} u_{\alpha}^i u_{\alpha}^j); \quad u_{\alpha}^i = v_{\alpha}^i - v^i,$$

podnieśli właśnie trudność sformułowania warunków brzegowych dla tego tensora.

Siła T^i wyrażona przez ten tensor tj.:

$$(6.2.5) \quad T^i = \bar{G}_{ji} n_j$$

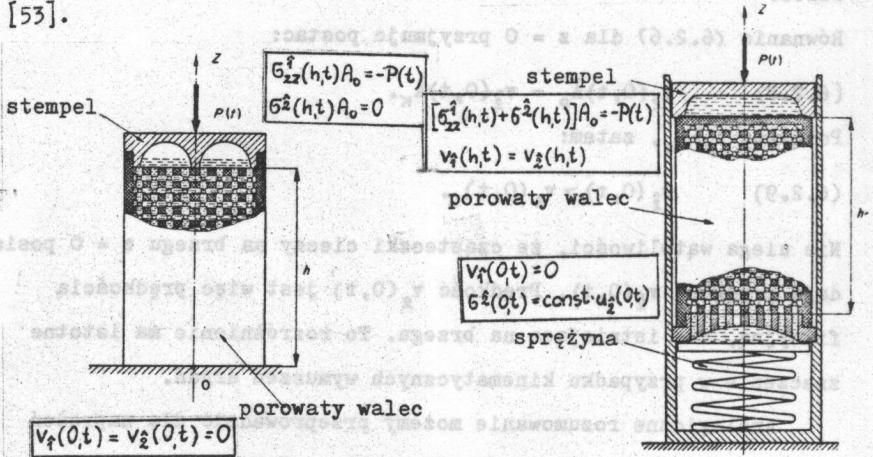
w świetle wyżej zaprezentowanej interpretacji, nie jest na pewno siłą, która mogłaby istnieć na brzegu.

Nasuwa się pytanie: jakie może być znaczenie równania (6.2.3) w teorii mieszanin, jeśli formułowanie warunków brzegowych dla tego równania nastęrcza trudności? Z punktu widzenia warunków brzegowych, równanie to i koncepcja tensora naprężenia (6.2.4) są nie do przyjęcia. Być może, posiadają one inne pozytywne cechy nieznanne autorowi.

W tej pracy wprowadziliśmy podział kinematyczny składników mając na uwadze naturalne (rzeczywiste) pola prędkości. Bilansując pęd wprowadziliśmy pojęcie sił, które są odpowiedzialne za zmianę tych naturalnych prędkości. Trudno jest dać zdecydowaną odpowiedź, że taka koncepcja opisu ruchu jest najlepsza. Wskazemy jednakże przykłady potwierdzające jej słuszność.

Na rys.8 przedstawiono warunki brzegowe dla porowatego walca

wypełnionego cieczą, którego drgania analizował autor [51], [52], [53].



Rys. 8. Przykład warunków brzegowych dla porowatego walca wypełnionego cieczą.

Pragniemy tu przede wszystkim zwrócić uwagę na prędkość cieczy na powierzchni brzegowej na rys.8b (dolna podstawa walca).

Skorzystamy z zależności (1.1.9) pomiędzy średnią barycentryczną prędkością cieczy a jej prędkościami rzeczywistymi tj.:

$$(6.2.6) \quad \rho_2 v_2(z,t) \stackrel{df}{=} \rho_{2\uparrow} v_{\uparrow}(z,t) + \rho_{2\downarrow} v_{\downarrow}(z,t) .$$

Na dolnej podstawie rozpatrywanego walca mamy $v_{\uparrow}(z,t)|_{z=0} = 0$.

Ponadto gęstości w świetle (1.3.3) i (1.3.8c) możemy wyrazić następująco:

$$(6.2.7) \quad \rho_2 = \rho_2^{\alpha} \frac{V_p}{V} = \rho_2^{\alpha} \frac{V_p}{h \cdot A_0} = \rho_2^{\alpha} \frac{\bar{A}_p}{A_0} ,$$

$$\rho_{2\downarrow} = \rho_2^{\alpha} \frac{A_K}{A_0} ,$$

gdzie $V = A_0 h$ oznacza objętość walca, V_p objętość por, $\bar{A}_p = V_p/h$ średnią powierzchnię por, A_K powierzchnię kanałów pionowych, A_0 całkowitą powierzchnię przekroju walca, h wysokość

walca.

Równanie (6.2.6) dla $z = 0$ przyjmuje postać:

$$(6.2.8) \quad v_2(0, t) \bar{A}_p = v_2(0, t) A_K.$$

Ponieważ $\bar{A}_p > A_K$, zatem:

$$(6.2.9) \quad v_2(0, t) > v_2(0, t).$$

Nie ulega wątpliwości, że cząsteczki cieczy na brzegu $z = 0$ posiadają prędkość $v_2(0, t)$. Prędkość $v_2(0, t)$ jest więc prędkością fikcyjną, nie istniejącą na brzegu. To rozróżnienie ma istotne znaczenie w przypadku kinematycznych wymuszeń drgań.

Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla naprężeń na przepuszczalnych powierzchniach walca. Zależności pomiędzy naprężeniami występującymi we współrzędnych normalnych i naprężeniami średnimi, określone przez wzór (1.2.12), możemy w naszym przypadku wyrazić następująco:

$$(6.2.10a) \quad \hat{\sigma}_{ij}^1 = \sigma_{ij}^1 + \sigma_{,i}^2 \frac{\bar{A}_p - A_K}{\bar{A}_p}$$

$$(6.2.10b) \quad \hat{\sigma}_{,i}^2 = \sigma_{,i}^2 \frac{A_K}{\bar{A}_p}$$

Jeśli p oznacza rzeczywiste ciśnienie cieczy, to aby zachodziła zależność (6.2.10 b) musi być:

$$(6.2.11) \quad \hat{\sigma}^2 = -p \frac{A_K}{A_0}$$

$$\sigma^2 = -p \frac{\bar{A}_p}{A_0}$$

Ewentualna siła działająca na ciecz na powierzchni brzegowej $z = h$ na rys.8a byłaby:

$$(6.2.12) \quad P_C(t) = p(h, t) A_K \neq p(h, t) \bar{A}_p.$$

W analizowanym przykładzie, wobec swobodnej powierzchni cieczy

siła ta jest równa zeru tzn. $G^2(h, t) = 0$. Nie oznacza to, że G^2 jest równe zeru. Zatem G^2 jest w ogólnym przypadku wielkością fikcyjną na brzegu.

IIV Wskazówki

Nieemożliwe jest, w ramach jednej pracy, omówienie wszystkich problemów związanych z formułowaniem warunków brzegowych w teorii ośrodków wieloskładnikowych. Zagadnienia te wymagają indywidualnego rozpatrzenia w każdym szczególnym przypadku. Tak np. formułowaniu warunku dla składowej stycznej prędkości cieczy na powierzchni brzegowej poświęcili swoje prace BEAVERS i JOSEPH, [1], oraz SAFFMAN, [70]. W pierwszej przeprowadzono badania doświadczalne i ustalono pewien empiryczny warunek, w drugiej natomiast podano jego teoretyczne uzasadnienie. Warunki brzegowe dla ośrodka porowatego analizował też MULLER, [65].

Naszym zasadniczym celem było zasygnalizowanie trudności z formułowaniem warunków brzegowych w teorii mieszanin w przypadku, gdy równania tej teorii są wyrażone za pomocą wielkości średnich barycentrycznych. Jako drogę wyjścia z tych trudności wskazaliśmy możliwość formułowania tych równań we współrzędnych normalnych. Wielkości wyrażone we współrzędnych normalnych są bardziej naturalne i lepiej opisują obiektywną rzeczywistość na brzegu.

Rozdział VII

TERMOKONSOLIDACJA-Przykład

W rozdziale I dokonaliśmy szczegółowej analizy ruchu ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Teraz pokażemy, że wprowadzone tam równania ruchu mieszczą się w ramach ogólnej teorii mieszanin. Ponadto uzupełnimy rozważania o podstawy termodynamiczne i równania konstytutywne. Będzie to właściwie przejście z równań ogólnych, zaprezentowanych w tej pracy, do równań termokonsolidacji, prezentowanych w pracach [20], [21] i w pracy [18], przy czym w stosunku do tej ostatniej zaprezentowano tu nieco inny sposób określania wymiany ciepła pomiędzy składnikami. Rozważania dotyczyć będą ośrodka porowatego z konsystentnym szkieletem tj. przyjmiemy $\varrho_{42} = 0$ (por. rozdział I). W stosunku do pozostałych gęstości używac będziemy następujących określeń: $\varrho_1 = \varrho - \bar{\varrho} = \varrho_{41} + \varrho_{21}$ - gęstość szkieletu wraz z cieczą uwięzioną, $\varrho_2 = \bar{\varrho} = \varrho_{22}$ - gęstość cieczy swobodnej. Gęstość szkieletu wraz z cieczą uwięzioną posiada prędkość $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$, natomiast ciecz swobodna posiada prędkość $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$ (oznaczenia zgodne z pracami [17], [18], [20], [21], [22]). Naprężenia będziemy oznaczać $\sigma_{ij}^f = \bar{\sigma}_{ij}$, $\sigma_{ij}^s = \bar{\sigma}_{ij}$, natomiast współczynnik oporów przepływu $b_{42} = b_{24} = b$. Równania ruchu (6.1.1) dla $\hat{N} = 2$ możemy zapisać jak następuje:

$$(7.0.1) \quad G_{i,jj} + (\varrho - \bar{\varrho})X_i = (\varrho - \bar{\varrho}) \frac{dv_i}{dt} + (b + \frac{1}{2} \varrho_{12}^*) (w_i - v_i),$$

$$G_{,i} + \bar{\varrho} X_i = \bar{\varrho} \frac{Dw_i}{Dt} - (b + \frac{1}{2} \varrho_{21}^*) (w_i - v_i),$$

przy czym $d/dt = \partial/\partial t + (\partial/\partial x_i) v_i$; $D/Dt = \partial/\partial t + (\partial/\partial x_i) w_i$ oraz

$$(7.0.2) \quad \varrho_{12}^* = v_{12} (\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1) = -\varrho_{21}^* ;$$

\mathcal{M}_1 i \mathcal{M}_2 oznaczają odpowiednio potencjały chemiczne dla szkiele-
tu wraz z cieczą uwięzioną oraz dla cieczy swobodnej.

Przepiszemy tu jeszcze raz równania ciągłości, aby bliżej zinter-
pretować źródła masy. Dla składników fizycznych mamy (por. punkt
1.3 lub 2.4):

$$(7.0.3) \quad \frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \frac{\partial \varrho_s v_i}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{\partial \varrho_f}{\partial t} + \frac{\partial \varrho_f v_i}{\partial x^i} = -[\bar{\varrho} (w_i - v_i)]_{,i}$$

gdzie $\varrho_s \equiv \varrho_1$ oznacza gęstość parcjalaną szkiele-
tu, $\varrho_f = \varrho_2$ gęstość parcjalaną cieczy.
Równania ciągłości dla składników kinematycznych wyrażają się
następująco:

$$(7.0.4) \quad \frac{\partial(\varrho - \bar{\varrho})}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho - \bar{\varrho})v_i}{\partial x^i} = \varrho_{12}^* ,$$

$$\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\varrho} w_i}{\partial x^i} = \varrho_{21}^* .$$

Pierwsze z równań (7.0.4) możemy uprościć wiedząc, że:

$$(7.0.5) \quad \varrho - \bar{\varrho} = \varrho_s + \varrho_u ; \quad \varrho_u = \varrho_f - \bar{\varrho}$$

gdzie ϱ_u oznacza parcjalaną gęstość cieczy uwięzionej tj. cieczy
poruszającej się razem ze szkieletem.

Po podstawieniu (7.0.5) do pierwszego z równań (7.0.4) i

i wykorzystaniu (7.03) otrzymamy:

$$(7.0.6) \quad \frac{\partial \varrho u}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u v_i}{\partial x^i} = \varrho_{12}^*$$

Widoczne jest teraz, że "źródła" masy składników kinematycznych wynikają z wzajemnej wymiany cieczy swobodnej, mającej prędkość \mathbf{w} , i cieczy uwięzionej w kawernach szkieletu tj. mającej prędkość \mathbf{v} .

Sumowanie stronami równań (7.0.4)₂ i (7.0.6) prowadzi do równania ciągłości dla całej cieczy (7.0.3), przy czym uwzględnia się, że:

$$(7.0.7) \quad \varrho_{12}^* + \varrho_{21}^* = 0.$$

Sumowanie równań (7.0.3) lub (7.0.4) prowadzi do globalnego równania ciągłości:

$$(7.0.8) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_i}{\partial x^i} = - [\bar{\varrho} (\mathbf{w}_i - \mathbf{v}_i)]_{,i},$$

przy czym: $\varrho = \varrho_s + \varrho_f = (\varrho - \bar{\varrho}) + \bar{\varrho}$.

Równanie bilansu energii (4.1.21), przy założeniu równych temperatur składników, przyjmuje postać, [20], [21];:

$$(7.0.9) \quad \dot{U}_1 = \bar{G}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \bar{G} w_{i,i} - [q_{i,i} - c_f^v \bar{\varrho} (\mathbf{w}_i - \mathbf{v}_i) \vartheta_{,i}] + \bar{F}_{12}^* (\mathbf{w}_i - \mathbf{v}_i),$$

przy czym:

$$(7.0.10) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}).$$

Dla różnych temperatur mamy:

$$(7.0.11) \quad U_1 = \bar{G}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \bar{G} w_{i,i} - [q_{i,i} - c_f^v \bar{\varrho} (\mathbf{w}_i - \mathbf{v}_i) \vartheta_{,i}] + \bar{F}_{12}^* (\mathbf{w}_i - \mathbf{v}_i).$$

Prędkość zmian entropii w poszczególnych składnikach określamy na podstawie wzoru (4.2.12):

$$(7.0.12) \quad \frac{dS_{1s}}{dt} = \frac{-q_{s,i}^i + h_{sf}}{T_s} + S_{1s}^* \quad (7.0.12)$$

$$\frac{DS_{1f}}{Dt} = \frac{-[q_{f,i}^i - c_f^v \bar{g}(w_i - v_i) \psi_{f,i}^i] + h_{fs}}{T_f} + S_{1f}^* \quad (7.0.13)$$

przy czym:

$$q = q_s + q_f$$

$$(7.0.13) \quad S_{1s}^* T_s + S_{1f}^* T_f = \bar{F}_{12}^i (w_i - v_i),$$

$$h_{sf} + h_{fs} = 0 \quad (7.0.14)$$

h_{sf} - ciepło wnikaające od cieczy do szkieletu.

Na podstawie (4.2.19) mamy:

$$(7.0.14) \quad \bar{F}_{12}^i = b(w_i - v_i).$$

Prawo przepływu ciepła, określone wzorem (4.2.27) wyraża się tu jak następuje:

$$(7.0.15) \quad \begin{aligned} q_s^i &= -\alpha_s \psi_{s,i}^i ; & \alpha_s &\geq 0, \\ q_f^i &= -\alpha_f \psi_{f,i}^i + c_f^v \bar{g}(w_i - v_i) \psi_f^i ; & \alpha_f &\geq 0. \end{aligned} \quad (7.0.15)$$

W przypadku równych temperatur składników, globalny strumień ciepła określamy:

$$(7.0.16) \quad q^i = -\alpha \psi_{f,i}^i + c_f^v \bar{g}(w_i - v_i) \psi_f^i,$$

przy czym $\alpha = \alpha_s + \alpha_f > 0$.

Ciepło wnikaające od cieczy do szkieletu określamy na podstawie wzoru (4.2.28) tj.:

$$(7.0.17) \quad h_{sf} = \alpha_{sf} (T_f - T_s) ; \quad \alpha_{sf} \geq 0.$$

Związki fizyczne teorii termokonsolidacji wyrażają się następująco:

$$(7.0.18) \quad G_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda_{11} \varepsilon + \lambda_{12} \theta - \delta_{s1}^T \dot{v}_s - \dot{v}_{f1} \dot{v}_f) \delta_{ij},$$

$$G = \lambda_{12} \varepsilon + \lambda_{22} \theta - \delta_{s2}^T \dot{v}_s - \delta_{f2}^T \dot{v}_f,$$

przy czym $\varepsilon = u_{1,i}^i$ - dylatacja szkieletu, $\theta = u_{2,i}^i$ - dylatacja cieczy oraz $\delta_{\alpha\beta}^T$ - współczynniki wyrażające wpływ temperatury na naprężenia {por. (5.2.11) i (5.2.9)}.

Równania przewodnictwa cieplnego dla ośrodka porowatego z cieczą (por. punkt 4.5) przyjmują postać:

$$(7.0.19) \quad \chi_s \nabla^2 \dot{v}_s + S_{15}^* T_s = c_s^e \frac{d\dot{v}_s}{dt} + \chi_{sf} (T_f - T_s) + \frac{c_s^e - c_s^e}{\Gamma_f} (\delta_{s1}^T \frac{d\varepsilon}{dt} + \delta_{s2}^T \frac{D\theta}{Dt}),$$

$$\chi_f \nabla^2 \dot{v}_f + S_{1f}^* T_f = c_f^e \frac{D\dot{v}_f}{Dt} + \chi_{fs} (T_s - T_f) + \frac{c_f^e - c_f^e}{\Gamma_f} (\delta_{f1}^T \frac{d\varepsilon}{dt} + \delta_{f2}^T \frac{D\theta}{Dt}).$$

Równania ruchu dla termokonsolidacji wyrażone za pomocą przemieszczeń przedstawiają się jak następuje:

$$(7.0.20) \quad \begin{aligned} & \mu \nabla^2 u_{1,i}^i + (\mu + \lambda_{11}) \varepsilon_{,i} + \lambda_{12} \theta_{,i} + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) X_{,i} = \\ & = (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \frac{dv_i}{dt} + (b + \frac{1}{2} S_{12}^*) (w_i - v_i) + \delta_{s1}^T \dot{v}_{s,i} + \delta_{f1}^T \dot{v}_{f,i}, \\ & \lambda_{12} \varepsilon_{,i} + \lambda_{22} \theta_{,i} + \bar{\varepsilon} X_{,i} = \bar{\varepsilon} \frac{Dw_i}{Dt} - (b - \frac{1}{2} S_{12}^*) (w_i - v_i) + \delta_{s2}^T \dot{v}_{s,i} + \\ & + \delta_{f2}^T \dot{v}_{f,i}. \end{aligned}$$

Pełny zestaw równań liniowej termokonsolidacji, analogiczny do zaprezentowanych w pracach [20] i [21], ma postać:

$$(7.0.21) \quad \begin{aligned} & \mu \nabla^2 u_{1,i}^i + (\mu + \lambda_{11}) \varepsilon_{,i} + \lambda_{12} \theta_{,i} + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) X_{,i} = (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \ddot{u}_{1,i}^i + \\ & + b(\dot{u}_{2,i}^i - \dot{u}_{1,i}^i) + \delta_{11}^T \dot{v}_{1,i}, \\ & \lambda_{12} \varepsilon_{,i} + \lambda_{22} \theta_{,i} + \bar{\varepsilon} X_{,i} = \bar{\varepsilon} \ddot{u}_{2,i}^i - b(w_i - v_i) + \delta_{22}^T \dot{v}_{2,i}, \\ & \chi \nabla^2 \dot{v} = c^e \dot{v} + \delta_{11}^T \dot{\varepsilon} + \delta_{22}^T \dot{\theta}, \\ & (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) = \text{const}, \quad \bar{\varepsilon} = \text{const}, \quad (\cdot) \cong \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Przyjęto tu założenie, że temperatury cieczy i szkieletu lokalnie są takie same.

UWAGI KOŃCOWE

W pracy tej przedstawiono teorię mieszanin w sposób możliwie najprostszy, biorąc pod uwagę jedynie oddziaływania mechaniczne i termiczne. Mimo to, równania końcowe przedstawione w punkcie 6.1 są złożone. Ich złożoność wynika nie tylko z wieloskładnikowości opisywanego ośrodka, ale przede wszystkim z istnienia sprzężeń ruchu i deformacji (wspominaliśmy o tym we WSTĘPIE), a także sprzężeń termicznych poprzez temperatury. W tej pracy nie uwzględniliśmy wielu zjawisk mogących mieć znaczenie w teorii mieszanin, jak np. efekty mikropolarne, oddziaływania magnetyczne, elektryczne, reakcje chemiczne itp. Zdaniem autora, uogólnienie teorii mieszanin na tego typu zjawiska jest sprawą przyszłości. Aktualnie prace powinny się koncentrować nad dalszym doskonaleniem opisu ruchu, na bardziej wnikliwym, opartym na przesłankach fizykalnych, formułowaniu równań bilansu, na jasnym interpretowaniu wprowadzanych współczynników, na eliminowaniu członów mało ważnych celem otrzymania teorii w miarę prostej. Pod takim kierunkiem była między innymi orientowana niniejsza praca. Zjawiska autentycznie występujące w mieszaninach, takie jak np. sprzężenie ruchu przez masę czy transport ciepła przez masę staraliśmy się uwzględnić u samych podstaw. Takie podejście pozwala bowiem jasno interpretować stałe występujące w równaniach teorii (w naszym przypadku między innymi współczynniki w równaniach BIOTA, współczynniki w uogólnionym prawie przepływu ciepła, siły dyfuzji, itp.).

Nie ujmując nic metodom matematycznym warto podkreślić, że nadmierny formalizm matematyczny stosowany przy opracowywaniu teorii może niekiedy znacznie zaciemniać fizyczny obraz zjawisk. Podobnie, przedwczesna aksjomatyzacja nieugruntowanej teorii może być przeszkodą w dalszym jej rozwoju. Stwarza ona bowiem pozory porządku i dopracowania, a tak obecnie w teorii mieszanin jeszcze nie jest.

Wróćmy tu jeszcze raz do trzeciej zasady metafizycznej TRUESDELLA (por.str.7) by stwierdzić, że spełnienie tej zasady wymaga wprowadzenia pojęć wielkości średnich barycentrycznych, a te jak wiadomo, nie mogą być spełnione na brzegu obszaru. Pozostaje więc problem wyboru: czy spełniona ma być zasada metafizyczna, czy warunki brzegowe? Do wielkości barycentrycznych prowadzi również koncepcja traktująca mieszaninę jako algebrę Boole'a, a składniki jako skończony podział tej algebry (por.[82],[80]). Chcemy też zwrócić uwagę na pewien aspekt formalizmu stosowanego przez MULLERA [64],[65], oraz DUNWOODY i MULLERA [26], przy wyprowadzaniu związków konstytutywnych teorii mieszanin. Formalizm ten wymaga spełnienia zasad: współobecności, obiektywności, lokalności działania, determinizmu, termodynamicznej dopuszczalności, symetrii materiałowej. Nie może on stanowić, podobnie jak formalizm Onsagera, przepisu na otrzymywanie równań konstytutywnych. Spełnienie wyżej wyszczególnionych zasad, aczkolwiek konieczne, nie zwalnia od wnikliwej analizy fizycznej zjawisk. W przeciwnym razie, stałe występujące w formalnie napisanych związkach konstytutywnych nie będą miały jasnej interpretacji. Dla przykładu porównamy prawo przepływu ciepła w ośrodku dwuskładnikowym, otrzymane w tej pracy i przez MULLERA w pracy [64].

Tutaj prawo to, przy założeniu równych temperatur składników, ma postać (7.0.16) tj.:

$$q^i = -\kappa_T \dot{v}_i + c_f^v \bar{q}^i \dot{v} (w_i - v_i).$$

Aby otrzymać to równanie, poświęciliśmy w tej pracy wiele miejsca zagadnieniu ciepła transportowanego wraz z masą już przy bilansowaniu energii. Bardziej ogólne prawo otrzymał MÜLLER bez analizy takiego ciepła {por. [64], str. 9+11 i wzór (7.3)} tj.:

$$q = -\kappa_T \dot{v}_i + \kappa_D (w_i - v_i) - \kappa_{\mathcal{E}_1} \mathcal{E}_{1,i} - \kappa_{\mathcal{E}_2} \mathcal{E}_{2,i}.$$

W tym miejscu chcemy podkreślić, że trud który włożyliśmy w analizę ciepła transportowanego wraz z masą procentował przy interpretacji współczynników w równaniach końcowych. MÜLLER otrzymał wyżej wypisane prawo przepływu ciepła w sposób niemalże mechaniczny, jednakże napotkał na trudności przy interpretacji współczynników $\kappa_T, \kappa_D, \kappa_{\mathcal{E}_1}, \kappa_{\mathcal{E}_2}$. Interpretacji tej poświęcił wiele miejsca w swojej pracy i po długiej dyskusji doszedł do wniosku, że $\kappa_{\mathcal{E}_1} = \kappa_{\mathcal{E}_2} = 0$ {por. [64] wzór (7.12)}. Nie podał natomiast dostatecznej interpretacji współczynnika κ_D {por. [64], wzór (9.9)}. Otrzymane przez nas prawo przepływu ciepła ma tu przewagę nad prawem otrzymanym przez MÜLLERA, gdyż wiemy co oznacza współczynnik κ_D , mianowicie w naszym przypadku $\kappa_D = c_f^v \bar{q}^i \dot{v}$. Tego typu uwag można wymienić więcej.

Na zakończenie pragniemy podkreślić, że niniejsza praca nie wyczerpuje wszystkich problemów związanych z doskonaleniem dotychczasowych podejść do teorii mieszanin. Niektóre problemy zdołaliśmy zaledwie zasygnalizować, wiele też zapewne uszło na szerszą uwagę. Zakres rozważań ujętych w tej pracy podsumowujemy następującymi uwagami ogólnymi:

1. Teoria mieszanin, w której uwzględniono efekt sprzężenia

ruchu przez masę, zawiera w sobie teorię ośrodka porowatego wypełnionego cieczą, którą do tej pory traktowano jako odrębną dyscyplinę.

2. Równania teorii mieszanin, z uwagi na warunki brzegowe, powinny być formułowane we współrzędnych normalnych; należy unikać formułowania tych równań za pomocą wielkości średnich barycentrycznych.
3. Dokładna identyfikacja zjawisk zachodzących w mieszaninie i ich uwzględnienie u podstaw teorii, pozwalają jasno interpretować współczynniki występujące w równaniach końcowych.
4. Teoria mieszanin wymaga dalszych wnikliwych badań i doskonalień.

Szereg wniosków szczegółowych Czytelnik znajdzie wewnątrz pracy.

SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

x^i [m] - współrzędna układu kartezjańskiego,

x_{α}^i [m] - współrzędna normalna,

t [s] - czas,

$\mathbf{V}_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}^i)$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ - średnia prędkość przemieszczeń składnika fizycznego α ,

$\mathbf{V}_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}^i)$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ - prędkość przemieszczeń składnika kinematycznego $\hat{\alpha}$,

$\mathbf{W}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \mathbf{V}_{\hat{\alpha}} - \mathbf{V}_{\hat{\beta}}$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ - prędkość względna,

\mathbf{V}_o $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ - prędkość odniesienia,

$\mathbf{u}_{\hat{\alpha}} = \mathbf{V}_{\hat{\alpha}} - \mathbf{V}_o$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ - prędkość dyfuzji,

$A = \sum_{\hat{\alpha}=1}^N A_{\alpha}$ $[\text{m}^2]$ - powierzchnia całkowita,

$A_{\alpha} = \sum_{\hat{\beta}=1}^N A_{\alpha\hat{\beta}}$ $[\text{m}^2]$ - powierzchnia składnika fizycznego α na powierzchni A ,

$A_{\alpha\hat{\beta}}$ $[\text{m}^2]$ - powierzchnia tej części składnika fizycznego α na powierzchni A , której prędkość wynosi $\mathbf{V}_{\hat{\beta}}$,

$V = \sum_{\alpha=1}^N V_{\alpha}$ $[\text{m}^3]$ - objętość globalna mieszaniny,

V_{α} $[\text{m}^3]$ - objętość zajmowana przez składnik fizyczny α w objętości V ,

$f_{\alpha\hat{\beta}}^A = A_{\alpha\hat{\beta}}/A$ [1] - współczynnik udziału powierzchniowego tej części składnika fizycznego α , która ma prędkość $\mathbf{V}_{\hat{\beta}}$,

$f_{\alpha}^A = \sum_{\hat{\beta}=1}^N f_{\alpha\hat{\beta}}^A$ [1] - współczynnik udziału składnika fizycznego α na powierzchni A ,

$f_{\alpha}^V = V_{\alpha}/V$ [1] - współczynnik udziału składnika fizycznego α w objętości V ,

- $S_{\alpha\hat{\beta}} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ - masowy udział składnika fizycznego α w ruchu składnika kinematycznego $\hat{\beta}$,
- $S_{\alpha} = \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} S_{\alpha\hat{\beta}} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ - parcjalna gęstość składnika fizycznego α ,
- $S_{\hat{\beta}} = \sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} S_{\alpha\hat{\beta}} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ - parcjalna gęstość składnika kinematycznego $\hat{\beta}$,
-
- $S_{\alpha}^z \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ - rzeczywista gęstość składnika fizycznego α ,
- $T_{\hat{\beta}} \left[\frac{N}{m^2} \right]$ - parcjalny wektor naprężenia działający na składnik kinematyczny $\hat{\beta}$ na powierzchni A,
- $T = \sum_{\hat{\beta}=1}^{\hat{N}} T_{\hat{\beta}} \left[\frac{N}{m^2} \right]$ - globalny wektor naprężenia na powierzchni A,
- $\sigma_{ij}^{\alpha} \left[\frac{N}{m^2} \right]$ - parcjalny tensor naprężenia odnoszący się do składnika fizycznego α ,
- $\sigma_{ij}^{\hat{\beta}} \left[\frac{N}{m^2} \right]$ - parcjalny tensor naprężenia odnoszący się do składnika kinematycznego $\hat{\beta}$,
- $\varepsilon_{ij}^{\alpha} [1]$ - tensor małych odkształceń składnika fizycznego α ,
- $\varepsilon_{ij}^{\hat{\beta}} [1]$ - tensor małych odkształceń składnika kinematycznego $\hat{\beta}$,
- F [J] - funkcja Helmholtza,
- G [J] - funkcja Gibbsa,
- \mathcal{K} [J] - energia kinetyczna,
- L [J] - moc sił mechanicznych,
- Q [J] - moc sił niemechanicznych,
- $q(q_i) \left[\frac{J}{m^2 s} \right]$ - strumień ciepła,
- S $\left[\frac{J}{\circ K} \right]$ - entropia,
- U [J] - energia wewnętrzna,
- $T_{\alpha} [^{\circ}K]$ - temperatura bezwzględna składnika fizycznego α ,

- $\psi_{\alpha} = T_{\alpha} - T_{\alpha\alpha} \text{ [}^{\circ}\text{K]}$ - temperatura względna składnika fizycznego α ,
- $C_{\alpha}^v \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}^{\circ}\text{K}} \right]$ - ciepło właściwe składnika α przy stałej objętości odniesione do jednostki masy,
- $C_{\alpha}^{\epsilon} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{ }^{\circ}\text{K}} \right]$ - ciepło właściwe składnika α przy stałej objętości odniesione do jednostki objętości,
- $C_{\alpha}^{\xi} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{ }^{\circ}\text{K}} \right]$ - ciepło właściwe składnika α przy stałym ciśnieniu odniesione do jednostki objętości,
- $\chi_f \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{ }^{\circ}\text{K}} \right]$ - parcyjny współczynnik przewodzenia ciepła,
- $\chi_{\alpha\beta} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{ }^{\circ}\text{K}} \right]$ - parcyjny współczynnik wymiany ciepła pomiędzy składnikami α i β ,
- $\nu_{\alpha\beta} \left[\frac{\text{kg}^2}{\text{m}^3\text{S}^2\text{J}} \right]$ - parcyjny współczynnik wymiany masy pomiędzy dwoma składnikami kinematycznymi.

Wszystkie wielkości wyrażone za pomocą współrzędnych normalnych oznaczać będziemy " ^ " - daszkiem nad symbolem indeksu np. ξ_{α} oznacza gęstość parcyjną wyrażoną we współrzędnych normalnych. Indeks "1" oznacza wielkość odniesioną do jednostki objętości np. S_1 oznacza całkowitą entropię na jednostkę objętości. Kartezjańskie wektory i tensory wyróżniać będziemy indeksami łacińskimi, które przyjmują wartości 1,2,3. Dla tych indeksów obowiązuje umowa sumacyjna. Greckie indeksy $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, N$ stosować będziemy dla wyróżnienia składników fizycznych, natomiast $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \dots = \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}$ dla wyróżnienia składników kinematycznych. Dla greckich indeksów umowa sumacyjna nie obowiązuje. Wektory oznaczać będziemy grubym drukiem.

LITERATURA

1. G.S.BEAVERS, D.D.JOSEPH, Boundary conditions at a naturally permeable wall, J.Fluid Mech. Vol.30, part 1, 197-207, 1967.
2. M.A.BIOT, General theory of three-dimensional consolidation, J.Appl.Phys., 12, 115-164, 1941.
3. M.A.BIOT, Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid, I.Low-frequency range, J.Acoust.Soc. of Amer., Vol.28, 2, 1956.
4. M.A.BIOT, Theory of propagation of elastic waves in a fluid -saturated porous solid, II.Higher frequency range, J.Acoust. Soc.of Amer., Vol.28, 2, 1956.
5. M.A.BIOT, Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, J.Appl.Phys., 33, 1482-1498, 1962.
6. M.A.BIOT, Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media, J.Acoust.Soc.of Amer.,34, 1254-1264, 1962.
7. M.A.BIOT, Theory of finite deformations of porous solids, Indiana University Mathematics Journal, 21, 7, 1972.
8. M.A.BIOT, Nonlinear and semilinear rheology of porous solids, Journal of Geophysical Research, 78, 23, 1973.
9. R.M.BOWEN, Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures, Arch.Rational Mech.Anal.,Vol.24, 5, 370-403, 1967.
10. R.M.BOWEN, D.J.GARCIA, On the thermodynamics of mixtures with several temperatures, Int.J.Engng.Sci.,Vol.8, 63-83, 1970.
11. R.M.BOWEN, Continuum theories of mixtures, Report No 45, RDTE No 1B062113A660, BRL, Aberdeen Proving Grounds, June 1971.

12. R.M.BOWEN, R.L.RANKIN, Acceleration waves in ideal fluid mixtures with several temperatures, Arch.Rational Mech.Anal., Vol.51, No 4, 261-277, 1973.
13. H.DERESIEWICZ, The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: I.Reflection of plane waves at a free plane boundary /Non-dissipative case/, Bull.Seism.Soc.Am., 50, 4, 599-607, 1960.
14. H.DERESIEWICZ, The effect of boundaries in wave propagation in a liquid-filled porous solid: II.Love waves in a porous layer, Bull.Seism.Soc.Am., 51, 1, 51-59, 1961.
15. H.DERESIEWICZ, J.T.RICE, The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: III.Reflection of plane waves at a free plane boundary /General case/, IV.Surface waves in a half-space, Bull.Seism.Soc.Am., 52, 3, 595-638, 1962.
16. H.DERESIEWICZ, B.WOLF, The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: VIII.Reflection of plane waves at an irregular boundary, Bull.Seism.Soc.Am., 54, 4, 1537-1561, 1964.
17. W.DERSKI, Equations of motion for a fluid-saturated porous solids, Bull.Acad.Pol.Sc.,Ser.tech. Vol.XXVI, No 1, 11-16, 1978.
18. W.DERSKI, Equations of thermoconsolidation in case of temperature difference between components of medium, Bull.Acad.Sci. Ser.tech.Vol.XXVI, No 12,1978.
19. W.DERSKI, H.I.ENE, Les equations du mouvement dans les milieux poreux, Preprint Series in Mathematics No 4, Bucuresti 1978.
20. W.DERSKI, S.J.KOWALSKI, Equations of linear thermoconsolidation, Bull.Acad.Pol.Sci.,No 4, 1978.

21. W.DERSKI, S.J.KOWALSKI, Equations of linear thermoconsolidation, Arch.Mech.Stos. 31, 3, 1979.
22. W.DERSKI, S.J.KOWALSKI, O równaniach ruchu i ciągłości masy w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, Studia Geotechnica et Mechanica, w druku.
23. M.L.DORIA, Some general results for non-reacting binary mixtures of fluids, Arch.Rational Mech.Anal.Vol.32, 343-368, 1969.
24. D.S.DRUMHELLER, A.BEDFORD, On the mechanics and thermodynamics of fluid mixtures, Arch.Rational Mech.Anal.Vol.71, No 4, 345-355, 1979.
25. W.DUDZIAK, S.J.KOWALSKI, Wpływ mechanicznej deformacji ośrodka na proces termodyfuzji, Arch.Bud.Masz., praca złożona do druku.
26. N.T.DUNWOODY, I.MULLER, A thermodynamic theory of two chemically reacting ideal gases with different temperatures, Arch. Rational Mech.Anal. Vol.29, No 5, 344-369, 1968.
27. R.DZIĘCIELAK, Propagacja fal nieciągłości w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, Praca habilitacyjna, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej /będzie publikowana/.
28. D.ELWELL, A.J.POINTON, Termodynamika klasyczna, WNT, Warszawa, 1976.
29. H.ENE, On the thermodynamic theory of mixtures, Preprint Series in Mathematics, No 33, Bukaresti 1979.
30. A.C.ERIGEN, J.D.INGRAM, A continuum theory of chemically reacting media-I, Int.J.Engng.Sci.,Vol.3, 2, 1965.
31. R.E.GRAINE, A.E.GREEN, P.M.NAGHDI, A mixture of viscous elastic materials with different constituent temperatures, Quart. Journ.Mech.and Appl.Math. 23, 1970.

32. A.E.GREEN, P.M.NAGHDI, A dynamical theory of interacting continua, Int.J.Engng.Sci.,Vol.3, 231-241, 1965.
33. A.E.GREEN, P.M.NAGHDI, A note on mixtures, Int.J.Engng.Sci. Vol.6, 631-635, 1968.
34. A.E.GREEN, P.M.NAGHDI, On basic equations for mixtures, Quart.Journ.Mech. and Applied Math.,Vol.XXII, 4, 427-438,1969.
35. A.E.GREEN, P.M.NAGHDI, The flow of fluid through an elastic solid, Acta Mechanica, 2, 329-340, 1970.
36. A.E.GREEN, N.LAWS, Global properties of mixtures, Arch. Rational Mech.Anal., Vol.43, 1, 45-61, 1971.
37. A.E.GREEN, P.M.NAGHDI, On thermodynamics and the nature at the second law for mixtures of interacting continua, Quart. Journal.Mech. and Appl.Math., Vol.XXXI, 3, 1978.
38. E.A.GUGGENHEIM, Thermodynamics, Amsterdam 1959.
39. K.GUMIŃSKI, Termodynamika procesów nieodwracalnych, PWN, Warszawa 1962.
40. K.GUMIŃSKI, Termodynamika, PWN, Warszawa 1974.
41. M.E.GURTIN, G.M.de la PHENA, On the thermodynamics of mixtures. I.Mixtures of rigid heat conductors, Arch.Rational Mech. Anal., Vol.36, 5, 390-410, 1970.
42. M.E.GURTIN, M.L.OLIVER, W.O.WILLIAMS, On balance of forces for mixtures, Quarterly of Applied Mathematics, Vol.XXX, 4, 527-530, 1973.
43. N.W.JEFIMOW, E.R.ROZENDORN, Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową, PWN, Warszawa 1976.
44. A.V.KARAKIN, L.I.LOBKOVSKII, Mechanics of porous two-phase visco-deformed medium and its geophysical applications,

Lett.Appl.Engng.Sci., Vol.17, 797-805, 1979.

45. J.U.KELLER, The fundamental inequality for thermodynamic systems with heat and mass transfer, *J.Non-Equilib.Thermodyn.*, Vol.1, 67-73, 1976.
46. D.E.KENYON, Thermostatitics of solid-fluid mixtures, *Arch. Rational Mech.Anal.*, 62, 117-129, 1976.
47. D.E.KENYON, The theory of an incompressible solid-fluid mixtures, *Arch.Rational Mech.Anal.*, 62, 1976.
48. J.KESTIN, Rola termodynamiki w termoplastyczności, *Materiały Konferencji Szkoleniowej nt.Termoplastyczność, Ossolineum 1975.*
49. S.J.KOWALSKI, Teoretyczny opis porowatych materiałów poddanych działaniu obciążeń statycznych i dynamicznych, *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, (w druku).*
50. S.J.KOWALSKI, Równania liniowej termokonsolidacji z anizotropowym szkieletem, *Prace IPPT*, 7, 1978.
51. S.J.KOWALSKI, Drgania porowatego walca wypełnionego cieczą, *Arch.Bud.Masz.*, No 4, 1979.
52. S.J.KOWALSKI, R.KUC, Wpływ strukturalnego przesunięcia fazowego na postać drgań w porowatym walcu wypełnionym cieczą, *Arch.Bud.Masz.*, No 5, 1980.
53. S.J.KOWALSKI, Application of fluid-saturated porous solids to vibration problems, *Journal of Sound and Vibration* 66, 2, 1979.
54. S.J.KOWALSKI, Comparison of the M.A.Biot equations of motion for a fluid saturated porous solid with those of W.Derski, *Bull.Aca.Pol.Sci.*, No 8, 1979.
55. S.J.KOWALSKI, Warunki brzegowe w teorii konsolidacji, *Studia Geotechnica et Mechanica /w druku/.*

56. S.J.KOWALSKI, Ogólna postać równań ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą, Arch.Mech.Stos., /praca złożona do druku/.
57. J.KUBIK, A.RYBICKI, Porowatość objętościowa ośrodka porowatego scharakteryzowanego wektorem przepuszczalności. Porowatość powierzchniowa średnia i efektywna, Prace IPPT, w druku.
58. L.LANDAU, E.LIFSZIC, Mechanika ośrodków ciągłych, Warszawa 1958.
59. C.MARLE, Écoulements monophasiques en milieu poreux, Revue de L'Institut Francais du Petrole, 1967.
60. N.MILLS, T.R.STEEL, Non-linear deformations of a mixture of two isotropic elastic solids, Acta Mechanica, 2, 229-244, 1970.
61. L.W.MORLAND, A simple constitutive theory for a fluid-saturated porous solid, J.Geophys.Res. 77, 890-900, 1972.
62. L.W.MORLAND, Effective stress in mixture theory, Arch.Mech. Stos.27, 1975.
63. Z.MOSSAKOWSKA, Equations of nonlinear theory of elasticity. The case of mass sources, Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Techn., 16, 1968.
64. I.MULLER, A thermodynamic theory of mixtures of fluids, Arch. Rational Mech.Anal., Vol.28, No 1, 1-39, 1968.
65. I.MULLER, Entropy, absolute temperature and coldness in thermodynamics. Boundary conditions in porous materials, International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures, No 76, Udine 1971.
66. S.P.NEUMAN, Theoretical derivation of Darcy's law, Acta Mechanica, 25, 153-170, 1977.

67. M.L.OLIVER, On balanced interactions in mixtures, Arch.Rational Mech.Anal., Vol.49, 3, 195-224, 1979.
68. C.PECKER, H.DERESIEWICZ, Thermal effects on wave propagation in liquid-filled porous media, Acta Mechanica, 16, 45-64, 1973.
69. J.M.ROBERTSON, Hydrodynamics in theory and application, Prentice-Hall International Series in Theoretical and Applied Mechanics, USA, 1965.
70. P.G.SAFFMAN, On the boundary condition at the surface of a porous medium, Studies in Applied Mathematics, Vol.L, No 2, 93-101, 1971.
71. R.SAMPAIO, An axiomatic theory of mixtures with diffusion, Arch.Rational Mech.Anal., 63, 1976.
72. A.E.SCHEIDEGGER, The physics of flow through porous media, Toronto, 1957.
73. G.SZEFER, Nonlinear problems of consolidations theory, Materiały Konf.Polsko-Francuskiej, Kraków, 1977.
74. F.TABADDOR, R.W.LITTLE, Interacting continuous medium composed of an elastic solid and an incompressible newtonian fluid, Int.J.Solids Structures, 7, 825-841, 1971.
75. K.TERZAGHI, Erdbaumechanik auf bodenphysikalischen grundlage, Leipzied, Deuticke, \$20, 1925.
76. H.F. TIERSTEN, Variational Principle for Saturated Magnetoelastic Insulators, J.Math.Phys. 6, No 5, 779, 1965
77. H.F.TIERSTEN, C.F. TSAI, On the Interaction of the Electromagnetic Field with Heat Conducting Deformable Insulators, 13, No 3, 361, 1972

78. C.TRUESDELL, *Sulle basi della termomeccanica*, Rend.Linces, 18, 22, 33-38 i 158-166, 1957.
79. C.TRUESDELL, R.Å.TOUPIN, *The classical field theories*, In *Handbuch der Physik*, Bd.III/1 Edited by S.Flügge, Berlin -Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
80. B.UZIEMBŁO, *Podstawy termodynamiki aksjomatycznej wieloskładnikowych ośrodków ciągłych*, Prana doktorska, IPPT, Warszawa, 1974.
81. J.R.WELTY, C.E.WICKS, R.E.WILSON, *Fundamentals of momentum heat and mass transfer*, New York, 1976.
82. W.O.WILLIAMS, *On the theory of mixtures*, Arch.Rational Mech. Anal., Vol.51, No 4, 239-260, 1973.
83. K.WILMAŃSKI, *Podstawy termodynamiki fenomenologicznej*, PWN, Warszawa, 1974.
84. K.WILMAŃSKI, *Zarys termodynamiki ośrodków ciągłych*, Prace IPPT No 6/1975.
85. S.WIŚNIEWSKI, B.STANISZEWSKI, R.SZYMANIK, *Termodynamika procesów nierównowagowych*, PWN, Warszawa, 1973.
86. Cz.WOŹNIAK, *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa, 1969.
87. K.ZALEWSKI, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, PWN, Warszawa, 1973.
88. H.ZORSKI, *Pseudocontinuum analysis of discrete structures*, Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, London 1976.
89. H.ZORSKI, *Relation between discrete and continuous mechanical systems*, CISM, Udine, Springer Verlag 1978.
90. H.ZORSKI, *Direct continuum model of particle system*, Proc.Symp. Waterloo, 1978.

SPIS TREŚCI

strona

WSTĘP	3
Rozdział I. Problem sprzężenia ruchu przez masę w teorii konsolidacji	11
1.1. Analiza kinematyczna ośrodka porowatego wypełnionego cieczą	11
1.2. Równania ruchu ośrodka porowatego wypełnionego cieczą z punktu widzenia Lagrange'a	17
1.3. Równania bilansu masy	22
1.4. Równania bilansu pędu	29
Rozdział II. Kinematyka mieszaniny	34
2.1. Fizyczny i kinematyczny podział ośrodka wieloskładnikowego	34
2.2. Opis ruchu mieszaniny	39
2.3. Udziały objętościowe, powierzchniowe i masowe składników mieszaniny. Energia kine- tyczna mieszaniny	42
2.4. Równania bilansu masy	47
Rozdział III. Dynamika mieszaniny	50
3.1. Analiza sił w mieszaninie	50
3.2. Bilans pędu. Równania ruchu	53
3.3. Bilans momentu pędu	55
Rozdział IV. Podstawy termodynamiczne teorii mieszanin	58
4.1. Bilans energii	58
4.2. Bilans entropii. Uogólnione prawo prze- pływu ciepła. Siły dyfuzji.	65

Rozdział V. Równania konstytutywne	78
5.1. Równania stanu	78
5.2. Związki fizyczne	79
5.3. Funkcje stanu	83
5.4. Równania przewodnictwa cieplnego	86
Rozdział VI. Równania zbiorcze i warunki graniczne	88
6.1. Zestawienie równań	88
6.2. Warunki początkowo-brzegowe	91
Rozdział VII. Termokonsolidacja-przykład	96
Uwagi końcowe	101
Spis ważniejszych oznaczeń	105
Literatura	108

