

PRACE IPPT • IFTR REPORTS

Jan J. Sławianowski

TEORIA
DEFORMACJI WIELOMIANOWYCH



WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Jan J. Sławianowski

**TEORIA
DEFORMACJI WIELOMIANOWYCH**

WARSZAWA 1975

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 lipca 1975 r.

Zarejestrowana pod nr 45/1975



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark.wyd. 4,8. Ark. druk. 6,5
Oddano do drukarni w lipcu 1975 r.
Nr zamówienia 585/O/75

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Jan J. Sławianowski

Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych

TEORIA DEFORMACJI WIELOMIANOWYCH

WSTĘP

Wiele uwagi poświęca się obecnie zagadnieniom dyskretyzacji. Jedną z przyczyn jest coraz powszechniejsze użycie i szybki rozwój metod numerycznych. Technika dyskretyzacji jest doskonale dostosowana do tych metod i ułatwia korzystanie z nich. Teorie oparte na dyskretyzacji mogą też być dogodniejsze przy jakościowej analizie zagadnień nieliniowych.

Istotnie, jakościowa teoria układów nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, rozpoczęta przez Poincaré'go [1] jest już dość dobrze rozpracowanym działem matematyki, czego nie można powiedzieć o teorii nieliniowych równań cząstkowych. Dynamika teorii dyskretyzowanych oparta jest właśnie na równaniach zwyczajnych, podczas, gdy klasyczna teoria ośrodków ciągłych korzysta z równań cząstkowych. Krótko mówiąc, przejście od zwykłej teorii ośrodka ciągłego do dyskretyzowanej, polega na tym, że zamiast najogólniejszego pola przemieszczeń dopuszcza się do rozważań pewną rodzinę tych pól, scharakteryzowaną przez dyskretny, a nawet skończony układ parametrów. Metody takie były stosowane od dawna w rachunku wariacyjnym przez Eulera, Czebyszewa, Rietza i innych. Konfiguracja ośrodka zdyskretyzowanego jest jednoznacznie opisana przez podanie wartości przeliczalnej, lub nawet skończonej liczby parametrów.

Warto już w tym miejscu ustosunkować się do pewnego zarzutu, stawianego niekiedy teoriom dyskretnym. Odmawia się im mianowicie statusu teorii podstawowych, przyznając im jedynie

wartość ściśle techniczną /np.jako narzędzia pomocniczego w metodach cyfrowych/.Powodem ma tu być grubość przybliżenia, zagubienie zbyt wielkiej liczby stopni swobody podczas przejścia dyskretyzacyjnego.Pogląd ten oparty jest na nieporozumieniu.Przede wszystkim,teoria dyskretna może być wręcz równoważna zwykłej teorii ciągłej,opartej np.na równaniach Lamégo.Ma to miejsce np.wtedy,gdy materia wypełnia obszar zwarty i składowe pola przemieszczeń przedstawiamy w postaci szeregów funkcyjnych.Nieskończony układ współczynników szeregu jest wtedy dyskretnym opisem konfiguracji ciała.Wreszcie,co ważniejsze,wszystkie układy,jakimi zajmuje się mechanika,są dyskretno,a nawet skończone,gdyż zbudowane są ze skończonej liczby atomów,lub cząsteczek.Położenia tych cząsteczek są dobrymi zmiennymi fizycznymi,natomiast interpolacja przy pomocy ciągłego pola przemieszczeń,określonego w przestrzeni międzycząsteczkowej,jest właśnie chwytem technicznym ułatwiającym analizę niektórych problemów.Jeśli coś wymaga usprawiedliwienia,to właśnie ten chwyt.Wiadomo zresztą dobrze,że takie uciąglenie prowadzi do fałszywych wniosków gdy chodzi o propagację krótkich fal w ciałach stałych.Pojawiły się też ostatnio prace poddające ową ciągłą interpolację analizie krytycznej z bardziej zasadniczego punktu widzenia [45] . Zatem,opis dyskretny jest bardziej fizyczny,gdy zachowuje podstawową własność realnych układów mechanicznych: skończoną /choć czasem bardzo wielką/ liczbę stopni swobody.Konkretny wybór struktury dyskretyzacji i charakter parametrów,zależą od potrzeb;głównie- od struktury dynamicznej zagadnienia.Najlepiej tak wybrać parametry,aby przy danym reżimie dynamicznym,niewielka ich część "odprzęgała" się od pozostałych,t.zn.by można było dokonać dostatecznie szybkiego "obcięcia".Pominięte stopnie swobody uwzględnia się wtedy metodami termodynamicznymi.

W niniejszej pracy posługujemy się dyskretyzacją wielomianową.Oznacza to,że będziemy dopuszczali pola przemieszczeń będące wielomianami ustalonego stopnia /we współrzędnych

afinicznych/.Badana w naszych poprzednich pracach dynamika deformacji jednorodnych jest więc przypadkiem szczególnym [33] [35] [36] [38].Podejście takie jest szczególnie przydatne, gdy można dokonać dostatecznie szybkiego "obcięcia", a więc, gdy wystarczy przyjąć dosyć niski stopień wielomianów.Można oczekiwać, że będzie tak wtedy, gdy rozmiary ciała są małe, lub conajwyżej porównywalne z długością fali, lub zasięgiem oddziaływań wewnętrznych.Pozwala to spodziewać się zastosowań w teorii dużych cząsteczek /np.polimerów globularnych/, małych monokryształów i zawiesin w cieczy.Tym samym,można stosować nasze metody w teorii ośrodków uogólnionych [2] [21] zwłaszcza-mikromorficznych [8] [9] [30].Każde ziarno takiego ośrodka będzie ulegało wtedy deformacjom wielomianowym.Najlepszym przykładem fizycznym jest tu kryształ molekularny [18] substancji o dużych cząsteczkach.Ośrodki mikromorficzne były badane już przez Eringena i Rivlina, ale prawie całkowicie na gruncie teorii ośrodków ciągłych, kiedy już same ziarna były traktowane jako układy makroskopowe.Wyklucza to możliwość badania takich, zasadniczo dyskretnych zagadnień, jak propagacja fal krótkich w kryształ molekularnym.Aby móc te zagadnienia uwzględnić, należy pozostać na poziomie dyskretnej sieci, w węzłach której znajdują się cząsteczki o wewnętrznych stopniach swobody [2] [18]. Nasza teoria opisuje zachowanie pojedynczej cząsteczki w takim węźle.Dynamika sieci molekularnej jest wtedy zagadnieniem wielu takich ciał. W związku z pracami Eringena i Rivlina, warto wspomnieć, że nie wzięto w nich pod uwagę zagadnienia reakcji więzów, gwarantujących wielomianowy w przybliżeniu charakter dopuszczalnych deformacji ziaren.W przypadku, gdy ziarna deformują się jednorodnie /dopuszczamy wielomiany 1-go stopnia/, wynik końcowy przypadkowo jest dobry.Natomiast dla wielomianów wyższego stopnia, pominięcie sił reakcji prowadzi do błędów. Jest nimi obarczona zaproponowana przez Eringena teoria ośrodków mikromorficznych stopnia wyższego niż 1.Zagadnienie to omawiamy poniżej w pracy.W tym miejscu warto tylko

wspomnieć o geometrycznych powodach, dla których wyniki Eringena odnoszące się do ośrodków mikromorficznych rzędu 1, przypadkowo wolne są od błędu. Przyczyna leży w tym, że przekształcenia przestrzeni afinicznej dane wielomianami 1-go stopnia /we współrzędnych afinicznych/ tworzą półgrupę. Natomiast nie ma to miejsca dla wielomianów jakiegokolwiek innego, skończonego stopnia. Podobnie, teorie mikromorficzne rzędu k i stopnia $1 > k$ [8] [9] są niekonsystentne z tych samych powodów.

Warto zresztą wspomnieć, że znajomość reakcji więzów może być potrzebna w pewnych makroskopowych zagadnieniach technicznych, np. wtedy, gdy deformowalność zgodną z zadanymi więzami wymuszamy przy pomocy odpowiedniego zbrojenia.

Metoda wielomianowa może być dogodnym narzędziem do badania ruchu inkluzji i to nie tylko zawieszin w gazach i cieczach [16], lecz także wtrąceń w ciałach stałych. Możliwe są też bardziej podstawowe zastosowania w strukturalnej, mikroskopowej teorii ośrodków. Wspomnieliśmy już o kryształach molekularnych i ich ciągłym modelu-ośrodku mikromorficznym. W ten sam sposób można jednak opisywać wewnętrzne stopnie swobody cząsteczek gazu, co umożliwia sformułowanie dość ogólnej termodynamiczno-statystycznej teorii gazów wieloatomowych z wieloma oscylacyjnymi stopniami swobody. Deformacje jąder atomowych także można ująć przy pomocy metody wielomianowej; pozwoliłoby to uwzględnić w prosty sposób wewnętrzne stopnie swobody w gorącej plazmie.

Chociaż wykracza to poza temat niniejszej pracy, wspomnijmy o innych, pokrewnych metodach opisu dyskretnego, np. przy pomocy funkcji meromorficznych o biegunach leżących poza obszarem zajmowanym przez ciało /w konfiguracji odniesienia/. Najprostszym przykładem jest t.zw. ciało rzutowo-sztywne, dopuszczalne konfiguracje którego powiązane są między sobą przekształceniami rzutowymi. Jest to ciało z "zamrożonymi prostymi"; w trakcie deformacji każda prosta materialna przechodzi na prostą. Dobrym modelem jest cząsteczka polimeru

globularnego, "uzbrojona" segmentami swego własnego łańcucha.

Metoda wielomianowa wiąże się z używaną od dawna w hydrodynamice i astrofizyce metodą współczynników wirialnych [5] Teoria wirialna wychodzi od klasycznych równań dla cieczy i zastępuje je dyskretnym układem równań zwyczajnych, otrzymanych przez obliczenie coraz wyższych momentów multipolowych wyjściowych równań cząstkowych. Przy odpowiednich założeniach, hierarchię równań w momentach multipolowych można "obciąć" i otrzymać skończony układ równań na kilka pierwszych momentów. Przedstawiona poniżej metoda wielomianowa, oparta na równaniach Lagrange'a 1-go rodzaju, jest bardziej zgodna z duchem mechaniki analitycznej i po wyeliminowaniu sił reakcji więzów, prowadzi do zamkniętego układu Newtonowskich równań różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu, opisującego zależność czasową współczynników wielomianowych.

ROZDZIAŁ I
WSTĘP MATEMATYCZNY. OZNACZENIA.

Głównym narzędziem matematycznym tej pracy jest algebra wieloliniowa oraz geometria przestrzeni afinicznych. Ustalimy teraz oznaczenia i wprowadzimy kilka wygodnych pojęć.

Jeśli chodzi o algebrę wieloliniową i tensorową, to posługujemy się powszechnie używanymi oznaczeniami [3] [27] [24] [1], nie ma potrzeby przytaczania ich tutaj. Zaznaczmy tylko, że wszędzie poniżej korzystamy ze wszystkich znanych kanonicznych utożsamień algebry tensorowej, np. iloczyn tensorowy przestrzeni dualnych, $U^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes W^*$ utożsamia się z przestrzenią dualną iloczynu tensorowego, $(U \otimes V \otimes \dots \otimes W)^*$. Utożsamieniami tymi posługujemy się na ogół milcząco; kontekst, w jakim występują /np. struktura wzoru/ czyni je oczywistymi i jednoznaczными. Używając pojęć geometrii różniczkowej, posługujemy się językiem i oznaczeniami takich książek jak [1] [19] [40].

Nazewnictwo i oznaczenia z zakresu geometrii afinicznej są mniej popularne i jednolite, toteż poświęcimy im teraz nieco miejsca. Jest to tym bardziej potrzebne, że poniżej będziemy posługiwać się różnymi dość nietypowymi konstrukcjami. Na początek przypomnijmy samą definicję przestrzeni afinicznej [3]

Przestrzenią afiniczną nazywamy trójkę (M, V, \rightarrow) gdzie:
/i/ M jest zbiorem, V - przestrzenią wektorową, zaś $\rightarrow: M \times M \rightarrow V$ jest odwzorowaniem, które parze punktów $p, q \in M$ przyporządkowuje wektor $\overrightarrow{pq} \in V$.

/ii/ dla dowolnych $p, q, r \in M$ zachodzi:

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} + \overrightarrow{rp} = 0$$

/iii/ dla każdego $p \in M$, odwzorowanie: $\overrightarrow{p(\cdot)}: M \rightarrow V$ jest bijekcją zbioru M na przestrzeń liniową V .

Z aksjomatów tych wynika w szczególności, że dla dowolnych $p, q \in M$: $\overrightarrow{pc} + \overrightarrow{qp} = 0$, $\overrightarrow{pp} = 0$.

Elementy zbioru M nazywamy punktami przestrzeni afinicznej,

zaś elementy przestrzeni V -wektorami swobodnymi. Odwzorowanie o którym mowa w punkcie /iii/, oznaczamy symbolem $\mathcal{S}_p: M \rightarrow V$, t. zn.: $\mathcal{S}_p(q) = \vec{pq}$. Gdy punkt p jest ustalony, zaś q -zmienny, to wielkość \vec{pq} nazywamy wektorem wodzącym punktu bieżącego względem początku p . Odwzorowanie \mathcal{S}_p pozwala przenieść do M naturalną, analityczną strukturę różniczkową przestrzeni V ; przeniesiona struktura nie zależy od wyboru p . Wszędzie poniżej, używając jakichkolwiek pojęć różniczkowych w M , mamy na myśli tę właśnie wyróżnioną strukturę różniczkową klasy C^ω .

Gdy rozważamy kilka przestrzeni afinicznych na raz, to zasadniczo, wektory swobodne w różnych przestrzeniach, powinniśmy oznaczać różnymi symbolami. Będziemy jednak używali za każdym razem tego samego symbolu \rightarrow /odpowiednio \vec{pq} /. Nie prowadzi to do nieporozumień, a zwiększa ekonomię oznaczeń i przejrzystość wzorów.

Wielokrotnie będziemy używali pojęć afinicznych w przestrzeniach liniowych. Z każdą przestrzenią liniową jest bowiem związana pewna przestrzeń afiniczna; przestrzeni liniowej V odpowiada mianowicie struktura afiniczna (V, V, \rightarrow) , gdzie $\vec{xy} = y - x$.

Przestrzeń liniowa V jest oczywiście grupą abelową z dodawaniem jako działaniem grupowym. Działa ona w naturalny sposób na M , jako grupa przekształceń. Działanie to opisane jest przez odwzorowanie $t: V \times M \rightarrow M$, takie, że dla dowolnych $v \in V$, $p \in M$, $q = t(v, p)$ jest jedynym punktem, dla którego $\vec{pq} = v$. Odwzorowanie $t(v, \cdot): M \rightarrow M$ oznaczamy skrótowo przez t_v i nazywamy translacją o wektor v . Podobnie, jak to miało miejsce w przypadku symbolu wektora swobodnego, używamy tego samego symbolu t na oznaczenie translacji we wszystkich rozważanych przestrzeniach afinicznych.

Przestrzenia euklidesowa nazywamy czwórkę (M, V, \rightarrow, g) , gdzie (M, V, \rightarrow) jest przestrzenią afiniczną, zaś $g \in V^* \otimes V^*$ jest dwukrotnie kowariantnym, nieosobliwym i dodatnio określonym tensorem metrycznym; odwrotny tensor kontrawariantny

oznaczamy symbolem $\tilde{g} \in V \otimes V$. Zadanie tensora metrycznego umożliwia mierzenie odległości w M ; odległość $\delta(p, q)$ punktów $p, q \in M$, definiuje się wzorem:

$$\delta(p, q) = \sqrt{\langle g, \vec{pq} \otimes \vec{pq} \rangle}$$

W rachunkach często używamy współrzędnych afinicznych na M . Aby je określić, musimy zadać afiniczny układ odniesienia; składa się on z punktu $0 \in M$ /początku układu/ i bazy liniowej $\{e_i\} \subset V$. Odpowiednie współrzędne afiniczne x^i spełniają wtedy dla dowolnego $p \in M$, warunek: $\vec{Op} = x^i(p) e_i$, t.zn.: $x^i(p) = \langle e^i, \vec{Op} \rangle$, gdzie $\{e^i\} \subset V^*$ - baza dualna do $\{e_i\}$: $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$.

Niech teraz (N, U, \rightarrow) , (M, V, \rightarrow) będą dwiema przestrzeniami afinicznymi /jak zapowiedziano powyżej, wektory swobodne w obydwu przestrzeniach oznaczamy taką samą strzałką/. Odwzorowanie $f: N \rightarrow M$ nazywamy afinicznym, gdy zachowuje ono wszystkie relacje afiniczne, t.zn. gdy istnieje odwzorowanie liniowe $L(f) \in L(U, V)$, zwane częścią liniową f , takie, że dla dowolnych $p, q \in N$:

$$\vec{f(p)f(q)} = L(f) \cdot \vec{pq}$$

Zbiór wszystkich odwzorowań afinicznych N w M oznaczamy symbolem $Af(N, M)$. Zbiór izomorfizmów afinicznych, t.zn. odwzorowań afinicznych będących bijekcjami, oznaczamy przez $AfI(N, M)$. Gdy $f \in AfI(N, M)$, to $L(f)$ jest izomorfizmem liniowym.

Okazuje się, że zbiory odwzorowań o wartościach w przestrzeni afinicznej, same obdarzone są także strukturą przestrzeni afinicznych. Będziemy z tego wielokrotnie korzystali. Ustalmy najpierw kilka podstawowych oznaczeń. Symbol B^A oznacza zbiór wszystkich odwzorowań zbioru A w zbiór B . Gdy A, B są różniczkowymi różniczkowymi, to $C^r(A, B)$ oznacza podzbiór B^A złożony z odwzorowań klasy C^r . Niech teraz N będzie dowolnym zbiorem, zaś (M, V, \rightarrow) - przestrzenią afiniczną. Zbiór M^N obdarzony jest wyróżnioną strukturą afiniczną. Jej przestrzenią translacji jest V^N , przy czym działania

liniowe w tym ostatnim zbiorze rozumiane są w zwykłym sensie działań na wartościach: $(af + bg)(p) = af(p) + bg(p)$, dla dowolnego $p \in N$. Jeśli F, G są dwoma punktami M^N /dwoma odwzorowaniami N w M /, to wektor swobodny $\vec{FG} \in V^N$ zdefiniowany jest jako jedyne odwzorowanie N w przestrzeń liniową V , takie, że dla dowolnego $p \in N$:

$$\vec{FG}(p) = \overrightarrow{F(p)G(p)}$$

/Uwaga: Strzałka po lewej stronie oznacza wektor swobodny w M^N , strzałka po prawej - wektor swobodny w M ! /.

W dalszym ciągu interesują nas szczególnie struktury afiniczne w M^N , gdy nie tylko M , lecz także N obdarzone jest strukturą przestrzeni afinicznej.

Analogicznie, $C^X(N, M)$ jest przestrzenią afiniczną z przestrzenią liniową $C^X(N, V)$ w roli przestrzeni translacji.

Struktury afiniczne w zbiorach odwzorowań dlatego są dla nas tak ważne, gdyż przestrzeń konfiguracyjna ciała deformowalnego wielomianowo, jest podzbiorem otwartym w pewnej afinicznej przestrzeni odwzorowań. Jej elementami są t.zw. wielomiany afiniczne, t.zn. odwzorowania, które we współrzędnych afinicznych reprezentowane są przez wielomiany arytmetyczne. Przed uściśleniem tego pojęcia, musimy ustalić pewne oznaczenia z rachunku różniczkowego w przestrzeniach afinicznych.

Jeśli chodzi o różniczkowanie w przestrzeniach liniowych, to używamy standardowej notacji [1] [24] [26]. Pochodną odwzorowania $F: U \rightarrow V$ przestrzeni liniowej U w przestrzeń liniową V , wziętą w punkcie $u \in U$, oznaczamy przez $D_u F$; oczywiście $D_u F \in L(U, V)$ - jest odwzorowaniem liniowym U w V . Jak wiadomo, $D_u F \cdot h$ jest główną częścią różnicy $F(u+h) - F(u)$. Drugą pochodną D_u^2 definiujemy jako pochodną odwzorowania $x \mapsto D_x F$; identycznie rozumiemy symbole wyższych pochodnych $D_u^D F$. Niech teraz (N, U, \rightarrow) (M, V, \rightarrow) będą przestrzeniami afinicznymi, zaś $F: N \rightarrow M$ - dowolnym odwzorowaniem różniczkowalnym /w sensie naturalnych struktur różniczkowych w N, M /. Pochodną afiniczną F w punkcie $p \in N$ nazywamy odwzorowanie

liniowe $\nabla_p F \in L(U, V)$, takie, że $\nabla_p F \cdot h$ jest częścią główną wyrażenia: $\overrightarrow{F(p)F(t_h(p))}$:

$$\overrightarrow{F(p)F(t_h(p))} = \nabla_p F \cdot h + o(h)$$

Niech n, m będą dowolnymi punktami odpowiednio w N i w M .

Używając wprowadzonych powyżej odwzorowań $\mathcal{G}_n: N \rightarrow U$,

$\mathcal{G}_m: M \rightarrow V$, mamy oczywiście:

$$\nabla_p F = D_{\mathcal{G}_n(p)} (\mathcal{G}_m \circ F \circ \mathcal{G}_n^{-1})$$

W zmiennych afinicznych x^i, y^A na rozmaitościach M, N , macierzą dla $\nabla_p F$ jest oczywiście:

$$\left\| \frac{\partial (x^i \circ F)}{\partial y^A} (p) \right\|$$

Drugą pochodną $\nabla_p^2 F$ określamy jako pochodną ∇_p odwzorowania: $x \mapsto \nabla_x F$ / jego wartościami są już elementy przestrzeni wektorowej, nie zaś tylko afinicznej, jak to miało miejsce w przypadku F . Analogicznie definiuje się wyższe pochodne, przy czym:

$$\nabla_p^r F = D^r_{\mathcal{G}_n(p)} (\mathcal{G}_m \circ F \circ \mathcal{G}_n^{-1})$$

Przy wyprowadzaniu równań ruchu, potrzebne nam będzie parametryczne różniczkowanie afiniczne krzywych. Jest ono właściwie przypadkiem szczególnym poprzedniego:

Niech $\Theta: R \rightarrow M$ będzie krzywą w przestrzeni afinicznej (M, V, \rightarrow) . Jej pochodną afiniczną dla parametru $t \in R$ / w "cdw-
li" t /, określamy jako wektor $\Theta'(t) \in V$, dany wzorem:

$$\Theta'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Theta(t)\Theta(t+\varepsilon)}}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \overrightarrow{\Theta(t)\Theta(t+\varepsilon)} \Big|_{\varepsilon=0}$$

Będziemy też stosowali oznaczenia $\frac{\delta}{\delta t}$, lub $\dot{\Theta}(t)$. Krzywą $\Theta': R \rightarrow V$, która parametrowi $t \in R$ przyporządkowuje "prędkość" $\Theta'(t)$, nazywamy hodografem krzywej Θ .

Wróćmy teraz do wielomianów:

Wielomianem afinicznym stopnia k nazywamy każde odwzorowanie $F: N \rightarrow M$ klasy C^{k+1} o znikającym polu $(k+1)$ -ej pochodnej:

$$\nabla_p^{k+1} F = 0$$

Gdy w M wyróżnimy początek $m \in M$ oraz bazę liniową $\{e_i\} \subset V$, to każde odwzorowanie $F: N \rightarrow M$ można zapisać przy pomocy funkcji rzeczywistych $F_i: N \rightarrow R$, takich, że:

$$mF(p) = F^i(p) e_i$$

dla dowolnego $p \in N$. Jeśli F jest wielomianem afinicznym stopnia k , to F^i są zwykłymi, arytmetycznymi wielomianami stopnia k względem współrzędnych afinicznych y^A na N :

$$F^i = W^i(y^A) = \sum_{r=1}^k r^{F^i} A_1 \dots A_r y^{A_1} \dots y^{A_r}$$

Zbiór wielomianów k -go stopnia, określonych na N i przyjmujących wartości w M , oznaczamy symbolem $\mathcal{W}^k(N, M)$, lub krótko \mathcal{W}^k , gdy nie ma wątpliwości, o jakie przestrzenie afiniczne chodzi.

Jak pamiętamy, zbiór M^N obdarzony jest naturalną strukturą afiniczną z przestrzenią translacji V^N . Podzbiór złożony z wielomianów k -go stopnia, $\mathcal{W}^k(N, M) \subset M^N$ jest skończone-wymiarową podprzestrzenią afiniczną; odpowiednią przestrzenią translacji jest podprzestrzeń $\mathcal{W}^k(N, V)$ / złożona z wielomianów o wartościach w przestrzeni afinicznej $(V, V, -)$ /

Korzystając z naturalnej struktury afinicznej w przestrzeniach liniowych, możemy rozpatrywać przestrzenie wielomianów $\mathcal{W}^k(U, V)$, argumentami i wartościami których są wektory. Oczywiście, $\mathcal{W}^k(U, V)$ jest przestrzenią liniową, nie tylko afiniczną. Wielomiany takie będziemy nazywać algebraicznymi dla wyróżnienia ich wewnątrz ogólniejszej klasy wielomianów afinicznych. Jeśli F jest wielomianem algebraicznym stopnia k , to oczywiście $D_u^{k+1} F = 0$ dla każdego $u \in U$.

Niech $L^r(U, \dots, U; V)$ oznacza jak zwykle [1] [24] przestrzeń odwzorowań r -liniowych przestrzeni $\times_r U$ w przestrzeń V . Podprzestrzeń odwzorowań symetrycznych oznaczamy przez

$L_s^r(U, \dots, U; V)$. Z każdym wielomianem algebraicznym stopnia k

$\varphi \in \mathcal{W}^k(U, V)$, związany jest jednoznacznie układ odwzorowań ${}_r\varphi \in L_S^r U, \dots, U; V, r=0, 1, \dots, k$, taki, że dla dowolnego $X \in U$:

$$\varphi(X) = \sum_{r=0}^k \mathcal{P}_r(X, \dots, X)$$

Istnieje więc kanoniczny izomorfizm między przestrzenią $\mathcal{W}^k(U, V)$ a przestrzenią liniową:

$$\bigoplus_{r=0}^k L_S^r(U, \dots, U; V)$$

W używanej przez nas symbolice korzystamy konsekwentnie z całej menażerii utożsamień algebry tensorowej, np.:

$L^r(U, \dots, U; V)$ utożsamiamy z $V \otimes U^* \otimes \dots \otimes U^*$, a tym samym - z przestrzenią form liniowych na $\bigotimes_r U$, o wartościach w V , $L(\bigotimes_r U, V)$. Stosując jeszcze oznaczenie:

$$\overset{r}{X} = \underbrace{X \otimes \dots \otimes X}_r$$

/r-ta potęga tensorowa wektora X /, możemy wykorzystać powyższe utożsamienia do następującego uproszczenia wzorów na odwzorowanie φ :

$$\varphi(X) = \sum_{r=0}^k {}_r\varphi \cdot \overset{r}{X}$$

Jeśli z kontekstu jasno wynika, jaki jest stopień k rozpatrywanych wielomianów, to będziemy pisali jeszcze krócej:

$$\varphi(X) = {}_r\varphi \cdot \overset{r}{X}$$

Zauważmy, że algorytm utożsamień tensorowych prowadzi do linearyzacji zagadnienia, co jest zresztą istotą rachunku tensorowego: wielomian $\varphi \in \mathcal{W}^k(U, V)$ utożsamia się kanonicznie z odwzorowaniem liniowym przestrzeni:

$$\text{Exp}_k U = \bigoplus_{r=0}^k \text{Sym} \left(\bigotimes_r U \right)$$

w przestrzeni V . /Znak Sym oznacza, że bierzemy podprzestrzeń tensorów symetrycznych/. Stosujemy też skrótowe oznaczenie $\text{Exp } U$ zamiast $\text{Exp } \infty U$.

Poniżej będziemy wielokrotnie korzystali z kanonicznych izomorfizmów między przestrzeniami $\mathcal{W}^k(U, V)$, $\bigoplus_{r=0}^k L(\text{Sym}_r U, V)$, $\bigoplus_{r=0}^k V \otimes \text{Sym}_r U^*$.

Przestrzeń wielomianów afinicznych $\mathcal{W}^k(N, M)$ pozwala się utożsamiać kanonicznie z $\mathcal{W}^k(U, V)$, po wybraniu dwóch punktów $n \in N, m \in M$. Dla każdego $F \in \mathcal{W}^k(N, M)$ istnieje wtedy dokładnie jeden $\varphi \in \mathcal{W}^k(U, V)$, taki, że:

$$F = S_m^{-1} \circ \varphi \circ S_n$$

Ustalając jeden punkt $n \in N$, możemy utożsamiać $\mathcal{W}^k(N, M)$ z $M \times \left[\bigoplus_{r=1}^k L(\text{Sym}_r U, V) \right]$, gdzie sumowanie tym razem zaczyna się od $r=1$ zamiast od zera. Wielomian $\varphi \in \mathcal{W}^k(N, M)$ jest wtedy w sposób jedno-jednoznaczny opisany przez układ $(m, {}_1\varphi \dots {}_k\varphi) \in M \times \left[\bigoplus_{r=1}^k L(\text{Sym}_r U, V) \right]$, taki, że:

$\varphi(n) = m$, zaś dla dowolnego $p \in N$:

$$\overrightarrow{\varphi(n)} \varphi(p) = \sum_{r=1}^k {}_r\varphi \cdot r(\overrightarrow{np})$$

Zbiór $M \times \left[\bigoplus_{r=1}^k L(\text{Sym}_r U, V) \right]$ też oczywiście posiada natu-

ralną strukturę afiniczną, gdyż pierwszy czynnik M jest przestrzenią afiniczną, zaś drugi - przestrzenią wektorową.

ROZDZIAŁ II

MECHANIKA W PRZESTRZENI AFINICZNEJ.

DYSKRETYZACJA PRZY POMOCY SZEREGÓW FUNKCYJNYCH JAKO ZAGADNIENIE MECHANICZNE Z WIĘZAMI.

Podstawowymi pojęciami mechaniki ośrodków ciągłych są dwa zbiory: ciało materialne, zwane też przestrzenią materialną, lub przestrzenią odniesienia, oraz przestrzeń fizyczna, w której ośrodek materialny jest zanurzony. W tradycyjnym sformułowaniu, pochodzącym między innymi od Nolla i Toupina [28] [42] przestrzenią materialną jest abstrakcyjna różniczkowa z brzegiem, zaś przestrzenią fizyczną - różniczkowa obdarzona dodatkowo strukturą przestrzeni euklidesowej. To ostatnie ograniczenie nie jest zresztą istotne z punktu widzenia samych podstaw teorii. Każdy punkt przestrzeni materialnej symbolizuje jakiś realny punkt materialny. Konfiguracje ośrodka opisuje się przy pomocy odwzorowań przestrzeni materialnej w fizyczną; odwzorowanie takie jest interpretowane jako przyporządkowanie punktom materialnym ciała ich aktualnych położeń w przestrzeni.

Dla naszych celów, pojęcia te wymagają pewnych modyfikacji. Będziemy mianowicie rozróżniali między przestrzenią materialną a ciałem. Ciało, czyli zbiór realnych punktów materialnych nie będzie abstrakcyjną różniczką, lecz podzbiorem przestrzeni materialnej, rozumianej jako zbiór możliwych punktów materialnych. Oprócz konfiguracji w sensie Nolla-Toupina, będziemy używali t. zw. konfiguracji ekstrapolacyjnych, określonych na całej przestrzeni materialnej, a więc także - poza ciałem. Jest to potrzebne w teorii wielomianowej. Samo ciało może być zupełnie dowolnym zbiorem, niekoniecznie podróżniczką z brzegiem. Dopuszczalne są np. dyskretne, czy skończone układy punktów materialnych, lub ciała o nieustalonym wymiarze, np. zwięzające się ciało trójwymiarowe, przechodzące w pewnym miejscu w jednowymiarowy "drut" pozbawiony grubości, lub też

"naszpikowane" takimi "drutami", czy nieskończenie cienkimi "blaszkami".

Wszędzie poniżej pozostajemy na gruncie mechaniki Newtona. Z tego względu, przestrzeń fizyczna M , czyli zbiór możliwych położeń dowolnego punktu materialnego, jest rozmaitością różniczkową. Wyjście poza Newtonowski model przestrzeni stanów o strukturze różniczkowej, może być pożyteczne np. w dynamice wakansji. Sformułowania tego typu rodzą jednak wiele zagadnień czysto matematycznych, jak i fizyczno-interpretacyjnych [34]. Będziemy ograniczali nasze rozważania do przypadku, gdy M jest obdarzona strukturą euklidesową; podobnie, jak we wstępie, oznaczamy tę strukturę przez (M, V, \rightarrow, g) . / V jest przestrzenią wektorów swobodnych w M , " \rightarrow " -operacją przyporządkowującą punktom p, q wektor \vec{pq} , $g \in V^* \otimes V^*$ -tensorem metrycznym/. Używane przez nas sformułowanie mechaniki ośrodków ciągłych daje się natychmiast uogólnić na przypadek M jest rozmaitością bez żadnej dodatkowej struktury [1] [15]. Takie ogólne sformułowanie nie będzie nam jednak potrzebne, toteż nie będziemy się nim zajmować.

Założmy najpierw, że ciało S jest tylko zbiorem, bez żadnej dodatkowej struktury.

Konfiguracja singularna jednofazowego ciała S w przestrzeni fizycznej M nazywamy dowolne odwzorowanie $\varphi: S \rightarrow M$. Należy to rozumieć w ten sposób, że w konfiguracji φ , punkt materialny $X \in S$ zajmuje położenie $x = \varphi(X) \in M$. Zbiór wszystkich odwzorowań S w M , M^S będziemy też nazywali przestrzenią konfiguracji singularnych /PKS/. Wszystkim punktom zbioru S przypisujemy pewną realność fizyczną - są one modelem małych "płrcji" ośrodka. Dlatego też prawdziwe, fizyczne konfiguracje będziemy opisywać takimi odwzorowaniami, przy których różne punkty materialne zajmują różne położenia fizyczne.

Konfiguracja jednofazowego ciała S bez wewnętrznych stopni swobody, nazywamy dowolne włożenie $\varphi: S \rightarrow M$. Z definicji,

jest ono bijekcją /odwzorowaniem wzajemnie jednoznaczny/ S na obraz $\varphi(S)$.

Przestrzenią konfiguracyjną ciała nazywamy zbiór wszystkich konfiguracji, czyli włożeń $Q = \text{Inj}(S, M) \subset M^S$. Przestrzeń konfiguracyjna $\text{Inj}(S, M)$ jest podzbiorem otwartym M^S w topologii zbieżności punktowej. Gdy S jest zbiorem skończonym, n -elementowym, to M^S utożsamia się z M^n , używaną w mechanice analitycznej jako przestrzeń konfiguracyjna układu n punktów materialnych.

Pojęcie konfiguracji singularnych wprowadziliśmy tu dlatego, że wiele zagadnień wygodniej jest formułować w M^S niż w jej podzbiornie $\text{Inj}(S, M)$. Jak wspomniano we wstępie, geometria afiniczna w M wyróżnia geometrię afiniczną w M^S ; odpowiednią przestrzenią translacji jest V^S -przestrzeń liniowa V -wartościowych funkcji na zbiorze S . Ponieważ $Q = \text{Inj}(S, M)$ jest otwarte w M^S , więc prędkości uogólnione utożsamiają się z elementami V^S , t.z.n. z lagranżowskimi polami prędkości; jeśli $v \in V^S$ jest takim polem, to $v(X) \in V$ jest prędkością punktu materialnego $X \in S$.

Mechaniczną przestrzenią stanów ciała jest więc $\mathcal{P}_L = \text{Inj}(S, M) \times V^S$ -podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej $M^S \times V^S$. Hamiltonowska przestrzeń stanów, czyli przestrzeń fazową utożsamiamy z $\mathcal{P} = \text{Inj}(S, M) \times V^{S*}$.

Niech $B(S) \subset S^S$ będzie grupą wszystkich bijekcji S na siebie, zaś $\text{Dif } M$ -grupą dyfeomorfizmów M na siebie /nie precyzujemy klasy/. Grupy te w naturalny sposób działają na przestrzeni konfiguracyjnej $\text{Inj}(S, M)$. Niech $\varphi \in \text{Inj}(S, M)$, $A \in \text{Dif } M$, $\Pi \in B(S)$; odpowiednie działania określone są jak następuje:

$$\varphi \xrightarrow[A]{} A \circ \varphi \quad /II.1/$$

$$\varphi \xrightarrow[\Pi]{} \varphi \circ \Pi \quad /II.2/$$

Działania grupy $\text{Dif } M$ mają uchwytty sens fizyczny. Można je bowiem interpretować jako fizyczne odkształcenia /i obroty/ wymuszane przez oddziaływania /pola/ zewnętrzne /np. przez

zgniatanie ciała palcami/Grupa $B(S)$ działająca jeszcze przed zanurzeniem ciała w przestrzeni fizycznej, a więc permutująca same punkty materialne, ma na pozór mniej uchwytny sens fizyczny. Niemniej, w wielu zagadnieniach [33] [35] obiekty geometryczne odpowiadające tej grupie, pozwalają na znacznie prostszy opis problemu, niż odpowiedni obiekty dla $\text{Dif } M$. Wreszcie co bardzo ważne, o ile przy pomocy grupy $\text{Dif } M$ można opisywać symetrie przestrzeni fizycznej, to wewnętrzne symetrie materiału /np. jego jednorodność, lub izotropowość/ opisuje się przy pomocy grupy $B(S)$ działającej na $\text{Inj}(S, M)$. Zagadnienie to było badane przez Rogulę [31].

Działania grup $B(S)$, $\text{Dif } M$ podnoszą się w naturalny sposób do przestrzeni stanów P_L :

$$(\varphi, \xi) \xrightarrow{A} (A \cdot \varphi, A \cdot \xi) \quad /II.3/$$

$$(\varphi, \xi) \xrightarrow{\Pi} (\varphi \cdot \Pi, \xi \cdot \Pi) \quad /II.4/$$

Ruch ciała opisujemy przy pomocy dwukrotnie różniczkowalnej krzywej w przestrzeni konfiguracyjnej, $\Theta : R \rightarrow \text{Inj}(S, M)$. Krzywa ta utożsamia się kanonicznie z odwzorowaniem $\tilde{\Theta} : R \times S \rightarrow \text{Inj}(S, M)$, według wzoru: $(\Theta(t))(X) = \tilde{\Theta}(t, X)$ dla dowolnej chwili czasu i punktu materialnego X .

Dynamika w obrazie lagranżowskim jest opisana przy pomocy układu równań Newtona. Oddziaływania, jakim w chwili t poddany jest punkt materialny $X \in S$, gdy całe ciało znajduje się w stanie mechanicznym $(\varphi, \xi) \in P_L$, opisujemy przy pomocy wektora $\Phi(t, X; \varphi, \xi)$. Wielkość ta ma interpretację fizyczną masowej gęstości sił działających na punkty materialne w małym otoczeniu $X \in S$. Zależność Φ od (φ, ξ) jest określona przez związki konstytutywne i na ogół ma charakter funkcjonalny /np. w ośrodkach nielokalnych i gradientowych/. Gdy zależność od ξ jest nietrywialna, mówimy o materiale prędkościowym. Krzywa $\Theta : R \rightarrow \text{Inj}(S, M)$ opisuje ruch dopusz-

czalny dynamicznie, gdy spełniony jest układ równań Newtona:

$$\widetilde{\frac{\delta^2 \theta}{\delta t^2}}(\cdot, X) = \Phi\left(\cdot, X; \theta(\cdot), \frac{\delta \theta(\cdot)}{\delta t}\right) \quad /II.5/$$

dla dowolnego $X \in S$.

Gdy regularna miara dodatnia μ opisuje rozkład masy w ciele S /współtowarzyszący, niezależny od czasu/, to:

$$\mathcal{F}(t, A; \theta(t), \frac{\delta \theta}{\delta t}(t)) = \int_A \Phi(t, X; \theta(t), \frac{\delta \theta}{\delta t}(t)) d\mu(X) \quad /II.6/$$

jest pełną siłą działającą na podukład. Całkując równania Newtona względem miary μ po podukładzie A , dostajemy bilans pędu $P(A)$ dla A :

$$\frac{d}{dt} P(A) = \mathcal{F} \quad /II.7/$$

Narzućmy układowi więzy $\mathcal{M} \subset P_L$ - na ogół nieholonomiczne nie precyzując chwilowo ich natury. W zastosowaniach zwykle $\mathcal{M} = \Psi^{-1}(0)$, gdzie $\Psi: P_L \rightarrow W$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w pewną przestrzeń liniową. W teorii wielomianowej, Ψ jest odwzorowaniem afinicznym, więc \mathcal{M} jest przestrzenią afiniczną; więzy są w tej teorii holonomiczne.

W obecności więzów, równania Newtona należy zmodyfikować, dodając do prawej strony siły reakcji $\Phi_R(t, X; \theta, \xi)$ [43]. Siły te, oraz stopnie swobody wykluczone /zakazane/ przez więzy, eliminujemy z równań Newtona przy pomocy równań /definicji/ więzów, oraz warunku idealności więzów, stwierdzającego, że siły reakcji nie wykonują pracy. Jeśli $\theta: R \rightarrow \text{Inj}(S, M)$ jest dowolną krzywą klasy C^1 zgodną z więzami, t.zn. $\theta(R) \subset \mathcal{M}$ /ale nie spełniająca na ogół równań Newtona/, to warunek idealności przybiera postać:

$$\varepsilon_{ij} \int \frac{\delta \theta}{\delta t}(t, X)^i \Phi_R^j(t, X; \theta(t), \frac{\delta \theta}{\delta t}(t)) d\mu(X) = 0 \quad /II.8/$$

W oparciu o równania więzów i powyższe warunki, można otrzymać z równań Newtona zamknięty układ równań nie zawierający sił reakcji.

Omówimy teraz prosty, lecz ważny przykład, który jako przypadek szczególny zawiera w sobie teorię wielomianową. Teorie mikromorficzne Eringena oparte są w całości na idei tego przykładu.

Przykład II.1

Niech rozkład masy w ciele będzie opisany przez dodatnią miarę regularną μ na S . Gdy $S \ni X \mapsto \Xi(X) \in V$ jest lagranżowskim polem prędkości, zaś $S \ni X \mapsto \Phi(X) \in V$ - polem sił, to \mathcal{F} - momentem pędu i \mathcal{F} - momentem siły nazywamy odpowiednio wyrażenia:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} = \int \Xi(X) \mathcal{F}(X) d\mu(X) \quad /II.9/$$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \int \Phi(X) \mathcal{F}(X) d\mu(X) \quad /II.10/$$

\mathcal{F} jest tu pewną funkcją na S .

Poniżej $L^2(S, \mu)$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem względem miary μ ; jest to przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym:

$$\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \rangle = \int \overline{\mathcal{F}_1(X)} \mathcal{F}_2(X) d\mu(X) \quad /II.11/$$

Niech teraz $\Delta \subset L^2(S, \mu)$ będzie rzeczywistą, domkniętą podprzestrzenią liniową, zawierającą przestrzeń funkcji stałych.

$\mathcal{V}(\Delta)$ będzie oznaczać przestrzeń V -wartościowych funkcji na S , których składowe w dowolnej bazie należą do Δ ; inaczej:

$$\mathcal{V}(\Delta) = \{ \mathcal{F} : \lambda \circ \mathcal{F} \in \Delta \}, \quad \lambda \in V^* \quad /II.12/$$

Oczywiście, $\mathcal{V}(\Delta)$ zawiera podprzestrzeń funkcji stałych. Ustalmy teraz $o \in M$ i zdefiniujmy zbiór M -wartościowych odwzorowań

$$c(\Delta, o) = \{g_o^{-1} \circ \mathcal{F} : \mathcal{F} \in \mathcal{U}(\Delta)\} \quad /II.13/$$

Z założenia, że Δ , a więc i $\mathcal{U}(\Delta)$ zawiera funkcje stałe, wynika, że $c(\Delta, o)$ nie zależy od wyboru o , toteż będziemy używać symbolu $c(\Delta)$. Oczywiście, $c(\Delta)$ jest podprzestrzenią afiniczną w M^S ; jej przestrzenią translacji jest $\mathcal{U}(\Delta)$.

Narzućmy teraz układowi więzy holonomiczne ograniczające przestrzeń konfiguracji singularnych /PKS/, M^S do $c(\Delta)$, a więc-przestrzeń stanów singularnych $M^S \times V^S$ do:

$$\mathcal{M} = c(\Delta) \times \mathcal{U}(\Delta) \quad /II.14/$$

Przestrzeń konfiguracyjna układu z więzami ma więc postać:

$$Q(\Delta) = c(\Delta) \cap \text{Inj}(S, M) \quad /II.15/$$

a odpowiednia przestrzeń stanów:

$$P_L(\Delta) = Q(\Delta) \times \mathcal{U}(\Delta) \quad /II.16/$$

/Oczywiście, w topologii zbieżności punktowej, $Q(\Delta)$, $P_L(\Delta)$ są zbiorami otwartymi odpowiednio w Q , P_L /.

Hamiltonowską przestrzeń stanów, czyli przestrzeń fazową układu, można utożsamić z :

$$P(\Delta) = Q(\Delta) \times \mathcal{U}(\Delta)^* \quad /II.17/$$

Niech teraz: $R \ni t \mapsto \varphi(t) \in Q(\Delta)$ będzie ruchem zgodnym z więzami, a zatem, dla dowolnego $t \in R$: $\xi(t) = \frac{\delta \varphi(t)}{\delta t} \in \mathcal{U}(\Delta)$.

Równania Newtona mają postać:

$$\dot{\xi}(t, X) = \frac{d\xi(t, X)}{dt} = \frac{\delta \Phi}{\delta t}(t, X) = \Phi(t, X; \varphi, \xi) + \Phi_R(t, X; \varphi, \xi) \quad /II.18/$$

Niech teraz $\mathcal{F} \in \Delta$; obliczmy \mathcal{F} -momenty obu stron /II.18/:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}} + \mathcal{M}_{R\mathcal{F}} \quad /II.19/$$

gdzie $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ jest momentem sił danych, a $\mathcal{M}_{R\mathcal{F}}$ -momentem sił reakcji.

Z założenia o idealności więzów wynika, że $\mathcal{M}_{R\mathcal{F}}$ znika. Istotnie, niech $\mathcal{H} \in \mathcal{U}(\Delta)$ będzie dowolną prędkością wirtualną;

moc siły Φ przy ruchu z tą prędkością dana jest przez:

$$P = \int \langle \varepsilon, \Phi(x) \otimes \mathcal{H}(x) \rangle d\mu(x) \quad /II.20/$$

Podstawmy:

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}^i(x) e_i$$

gdzie $\{e_i\} \subset V$ jest bazą. Wtedy:

$$P = \varepsilon_{ij} \int \Phi^i(x) \mathcal{H}^j(x) d\mu(x) = \varepsilon_{ij} N^{ij} \mathcal{H} \quad /II.21/$$

Jeśli moc Φ_R sił reakcji znika dla dowolnej prędkości wirtualnej zgodnej z więzami, to znikają wszystkie \mathcal{F} -momenty sił reakcji dla $\mathcal{F} \in \Delta$. Równania Newtona przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}} \quad /II.22/$$

gdzie po prawej stronie występuje tylko moment sił danych /niereakcyjnych/. Zatem, równania w \mathcal{F} -momentach zawierają już tylko fizyczne stopnie swobody i nie występują w nich reakcje więzów.

Równania ruchu /II.22/ są prawami bilansu dla \mathcal{F} -momentów pędu, czyli inaczej mówiąc - dla wszystkich składowych Δ -momentu pędu. Gdy nie ma żadnych oddziaływań, przechodzą one w prawa zachowania dla $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$.

Każdej funkcji $\mathcal{F} \in \Delta$ odpowiada jedno wektorowe równanie Newtona /II.22/.

Używając bazy w przestrzeni Δ , dostajemy pełny, niezależny układ równań Newtona. Niech mianowicie $\{\mathcal{F}_r\} \subset \Delta$ będzie bazą w Δ , zaś $\{e_i\} \subset V$ - bazą w przestrzeni translacji. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\Gamma_{vs} = \langle \mathcal{F}_v | \mathcal{F}_s \rangle = \Gamma_{sv} \quad /II.23/$$

$$\mathcal{M}_v = \mathcal{M}_{\mathcal{F}_v} \quad \mathcal{R}_v = \mathcal{R}_{\mathcal{F}_v} \quad /II.24/$$

$$\mathcal{M}_v = \mathcal{M}_v^i e_i \quad \mathcal{R}_v = \mathcal{R}_v^i e_i \quad /II.25/$$

Równania Newtona /II.22/ mają wtedy postać:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_v^i = \mathcal{R}_v^i \quad /II.26/$$

Wyrazimy je przy pomocy parametrów opisujących konfigurację układu. Niech krzywa $R \ni t \mapsto \varphi(t) \in Q(\Delta)$ opisuje ruch układu. Możemy ją jednoznacznie opisać przez układ funkcji czasu $t \mapsto \varphi^{i\alpha}(t)$, takich, że:

$$S_0 \circ \tilde{\varphi}(t, \cdot) = e_i \varphi^{i\alpha}(t) \mathcal{F}_\alpha \quad /II.27/$$

Wtedy:

$$\mathcal{R}_\nu^i = \dot{\varphi}^{i\alpha} \Gamma_{\alpha\nu} = \dot{\xi}^{i\alpha} \Gamma_{\alpha\nu} \quad /II.28/$$

Równania Newtona przyjmują więc postać:

$$\frac{d^2 \varphi^{i\alpha}}{dt^2} \Gamma_{\alpha\nu} = \mathcal{R}_\nu^i \quad /II.29/$$

W zastosowaniach Δ jest zazwyczaj ósrodkowa i dlatego /jak zakładaliśmy już powyżej/ istnieje baza dyskretna. Układ równań Newtona jest więc dyskretny. W praktyce operuje się skończonymi układami równań /II.29/. Analogia między /II.29/ a równaniami Newtona sięga bardzo daleko: po lewej stronie występują iloczyny "przyśpieszeń" parametrów $\varphi^{i\alpha}$ i członów $\Gamma_{\alpha\nu}$ opisujących bezwładne własności ciała, zaś po prawej - wyrazy \mathcal{R}_ν^i opisujące oddziaływania.

Niech $\|\Gamma^{\mu\nu}\|$ będzie macierzą odwrotną do $\|\Gamma_{\mu\nu}\|$:
 $\Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$. Wtedy, układ /II.29/ może być rozwiązany względem przyśpieszeń:

$$\frac{d^2 \varphi^{i\mu}}{dt^2} = \Gamma^{\mu\nu} \mathcal{R}_\nu^i \quad /II.30/$$

Powody fizyczne, dla których uważamy $\Gamma_{\mu\nu}$ za parametry inercyjne są oczywiste: współczynniki te są momentami drugiego stopnia /kwadrupolowymi/ rozkładu masy względem bazy $\{\mathcal{F}_\mu\}$:

$$\Gamma_{\mu\nu} = \langle \mathcal{F}_\mu | \mathcal{F}_\nu \rangle = \int \mathcal{F}_\mu(x) \mathcal{F}_\nu(x) d\mu(x) \quad /II.31/$$

Jest to więc naturalne uogólnienie tensora bezwładności [3]. Podobnie, jak w mechanice punktu materialnego i ciała sztywnego, energia kinetyczna wyraża się liniowo przez parametry bezwładności. Istotnie, korzystając z ogólnego wzoru:

$$T = \frac{1}{2} \int \langle \xi, \xi(x) \otimes \xi(x) \rangle d\mu(x) \quad /II.32/$$

gdzie $\xi: S \rightarrow V$ jest lagranżowskim polem prędkości, mamy:

$$T = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \xi^{iv} \xi^{js} \Gamma_{vs} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \dot{\varphi}^{iv} \dot{\varphi}^{js} \Gamma_{vs} \quad /II.33/$$

Opis oddziaływań przy pomocy momentów \mathcal{R}_v^i obarczony jest pewną wadą, mianowicie są one obiektami geometrycznymi w $S \times M$ obliczanymi przy pomocy współtwarzyszającego rozkładu masy μ . Z tego względu trudno im nadać prosty sens operacyjny, gdyż operacje i pomiary fizyczne odbywają się w przestrzeni fizycznej M , nie zaś w przestrzeni odniesienia S . Z makroskopowego punktu widzenia, użyteczność tych momentów może więc być kwestionowana. Nie przeszkadza to jednak w teoriach operacyjnych na modelach mikroskopowych. Zakładając bowiem postać mikrooddziaływań w ciele, np. między atomami w cząsteczce, lub w kryształach, możemy - przynajmniej zasadniczo - obliczyć \mathcal{N}_v^i jako funkcję od $(\varphi^{i\mu}, \xi^{i\mu})$ t.zn. od stanu mechanicznego ciała. Wspomniana zależność funkcyjna \mathcal{R}_v^i od $(\varphi^{i\mu}, \xi^{i\mu})$ odpowiada związkowi konstytutywnym.

Dla przykładu załóżmy, że ciało składa się z jednakowych mikroelementów, oddziałujących między sobą binarnie /jak np. w kryształach molekularnym/. Niech $w(\vec{xy}, v(x), v(y)) \in V$ będzie masową gęstością siły, z jaką punkt materialny umieszczony w punkcie $x \in M$ przestrzeni fizycznej i obdarzony prędkością $v(x)$, oddziałuje na punkt materialny w punkcie $y \in M$, obdarzony prędkością $v(y)$. Podobnie, niech $z(x, v) \in V$ będzie masową gęstością siły, z jaką pola zewnętrzne oddziałują na punkt materialny znajdujący się w $x \in M$ i obdarzony prędkością $v(x)$. Wtedy, \mathcal{R}_v^i jest sumą części wewnętrznej i zewnętrznej:

$$\mathcal{R}_v^i = \text{int } \mathcal{R}_v^i + \text{ext } \mathcal{R}_v^i \quad /II.34/$$

gdzie, zgodnie z /II.10/ :

$$\int_{\text{int}} \mathcal{L}_v^1(\varphi^{jR}, \xi^{jR}) = \int_{\text{int}} [\varphi^{jR}(\mathcal{F}_\mu(x) - \mathcal{F}_\mu(y)), \xi^{jR} \mathcal{F}_\mu(x), \xi^{jR} \mathcal{F}_\mu(y)] \mathcal{F}_v(x) d\mu(x) d\mu(y) \quad /II.35/$$

$$\int_{\text{ext}} \mathcal{L}_v^1(\varphi^{jR}, \xi^{jR}) = \int_{\text{ext}} [t_{e_1} \varphi^{jR} \mathcal{F}_\mu(x)(0), \xi^{jR} \mathcal{F}_\mu(x)] \mathcal{F}_v(x) d\mu(x) \quad /II.36/$$

Zakładając, że w, z są znane /na podstawie jakichś przesłanek fizycznych/, możemy na podstawie powyższych danych obliczyć, lub przynajmniej oszacować funkcje \mathcal{L}_v^1 .

Podobnie jest w przypadku, gdy równania ruchu dają się wyprowadzić z zasady wariacyjnej, t.zn.gdy istnieje uogólniony potencjał. Niech $\mathcal{V}_2(\vec{xy}, v(x), v(y))$ będzie masową gęstością uogólnionego potencjału oddziaływań binarnych między mikroelementami umieszczonymi odpowiednio w punktach $x, y \in M$ przestrzeni fizycznej i poruszającymi się z prędkościami $v(x), v(y)$. Podobnie, $\mathcal{V}_1(x, v)$ oznacza masową gęstość uogólnionej energii potencjalnej dla oddziaływania między zewnętrznym polem a mikroelementem znajdującym się w $x \in M$ i obdarzonym prędkością $v(x) \in V$. Wtedy, na zależność pełnego uogólnionego potencjału \mathcal{V} od stanu mechanicznego (φ, ξ) mamy wzór:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{int}} + \mathcal{V}_{\text{ext}} \quad /II.37/$$

gdzie poszczególne składniki dane są wzorami:

$$\int_{\text{int}} \mathcal{V}(\varphi, \xi) = \int_{\text{int}} \mathcal{V}_2 [\varphi^{jR}(\mathcal{F}_\mu(x) - \mathcal{F}_\mu(y)), \xi^{jR} \mathcal{F}_\mu(x), \xi^{jR} \mathcal{F}_\mu(y)] d\mu(x) d\mu(y) \quad /II.38/$$

$$\int_{\text{ext}} \mathcal{V}(\varphi, \xi) = \int_{\text{ext}} \mathcal{V}_1 [t_{e_1} \varphi^{jR} \mathcal{F}_\mu(x)(0), \xi^{jR} \mathcal{F}_\mu(x)] d\mu(x) \quad /II.39/$$

Ruch jest wtedy opisany przez równania Lagrange'a drugiego rodzaju, otrzymane z lagrangianu $L = T - \mathcal{V}$ gdzie T - jak w /II.33/

K o n i e c p r z y k ł a d u II.1

Uwaga:

W powyższym przykładzie, wszystkie składowe pola przemieszczenia były szeregami funkcyjnymi względem tego samego układu funkcji. Na ogół nie jest to konieczne. W tej pracy nie zajmujemy się jednak zagadnieniami ogólniejszymi.

Jak już powiedzieliśmy, w teorii wielomianowej wygodnie jest rozróżniać pojęcia przestrzeni materialnej /odniesienia/ i ciała. Niech N będzie przestrzenią materialną; narazie jest ona tylko zbiorem, nic więcej nie zakładamy. Wewnętrzny /współtowarzyszący/ rozkład masy w badanym ciele opisujemy przy pomocy dodatniej miary regularnej μ określonej na N . Jak wiadomo, nośnikiem miary μ , oznaczanym $\text{Supp } \mu$, nazywa się najmniejszy /w sensie inkluzji/ spośród domkniętych podzbiorów $B \subset N$, takich, że :

$$\mu(A) = \mu(A \cap B)$$

dla dowolnego μ -mierzalnego $A \subset N$.

Ciałem będziemy nazywali właśnie nośnik miary μ . Oczywiście, w zastosowaniach praktycznych, $\text{Supp } \mu$ jest zbiorem zwartym. Punkty należące do $\text{Supp } \mu$ nazywamy punktami materialnymi ciała. Natomiast dopełnienie ciała składa się z możliwych punktów materialnych. Podejście takie jest zresztą o tyle uzasadnione, że w praktyce numeruje się często punkty materialne przy pomocy ich położeń początkowych w M ; wtedy $N = M$ i ciało jest w naturalny sposób zanurzone w przestrzeni materialnej.

Wygodnie będzie opisywać konfiguracje ośrodka i lagranżowskie pola prędkości przy pomocy ekstrapolacji określonych na całym N , nie tylko na ciele $S = \text{Supp } \mu$.

Singularną konfiguracją ekstrapolacyjną nazywamy dowolne odwzorowanie $\varphi : N \rightarrow M$. Zbiór wszystkich odwzorowań N w M będziemy nazywali ekstrapolacyjną przestrzenią konfiguracji singularnych /używamy poniżej skrótu EPKS/. Podobnie, konfiguracją ekstrapolacyjną ciała $S = \text{Supp } \mu$ w przestrzeni M nazywamy także odwzorowanie $\varphi : N \rightarrow M$, że obcięcie $\varphi|_{\text{Supp } \mu}$

jest konfiguracją. Ekstrapolacyjna przestrzeń konfiguracyjna nazywamy zbiór takich odwzorowań; oznaczymy go skrótowo EPK:

$$EPK = \left\{ \varphi: N \rightarrow M \mid \varphi \mid \text{Supp} \mu \in \text{Inj}(\text{Supp} \mu, M) \right\}$$

Podobnie, ekstrapolacyjne pola prędkości/lagrangowskie definiujemy jako odwzorowania N w V . Ekstrapolacyjne prędkości uogólnione utożsamiają się więc z elementami przestrzeni liniowej V^N . Oczywiście, EPKS jest przestrzenią afiniczną z przestrzenią V^N w roli przestrzeni translacji.

Ekstrapolacyjną przestrzenią stanów jest więc zbiór:

$$EP_L = EPK \times V^N \subset M^N \times V^N \quad /II.40/$$

Dwa odwzorowania $\varphi, \psi: N \rightarrow T$ będziemy nazywali μ -równoważnymi, gdy są one identyczne na ciele:

$$\left(\varphi \equiv_{\mu} \psi \right) \equiv \left(\varphi \mid \text{Supp} \mu = \psi \mid \text{Supp} \mu \right) \quad /II.41/$$

Dotyczy to w szczególności konfiguracji /wtedy $T = M/$ i lagrangowskich pól prędkości $/T=V/$. μ -równoważność ekstrapolacji oznacza wtedy, że opisują one tę samą konfigurację ciała, lub lagrangowskie pole prędkości.

Ruchy ekstrapolacyjne opisujemy przy pomocy dwukrotnie różniczkowalnych krzywych $\Theta: R \rightarrow EPK$. Równania Newtona można zapisać w języku ekstrapolacji. Mają one identyczną postać jak równania /II.5/, z tym, że po ich prawej stronie stoją siły ekstrapolacyjne Φ określone na całym N i zależne od stanów ekstrapolacyjnych (φ, ξ) . Aby ekstrapolacja poprawnie opisywała sytuację fizyczną, funkcjonały $\Phi(t, X; \cdot, \cdot)$ dla dowolnego $X \in \text{Supp} \mu$ nie mogą rozróżniać obiektów μ -równoważnych:

$$\Phi(t, X; \varphi_1, \xi_1) = \Phi(t, X; \varphi_2, \xi_2) \quad /II.42/$$

$$\text{gdy } \varphi_1 \mid \text{Supp} \mu = \varphi_2 \mid \text{Supp} \mu, (\xi_1 - \xi_2) \mid \text{Supp} \mu = 0.$$

Więzy także można narzucać wprost na EPK, lub EP_L . Gdy zachodzi /II.42/, to siły reakcji automatycznie spełniają warunek nierozróżnialności stanów μ -równoważnych. Oczywiście, interesują nas tylko istotne więzy, gdy ograniczenia nałożone

są na stany fizyczne, nie tylko na ich ekstrapolacje.

Niech $Z \subset M^N$ będzie podzbiorem EPKS. Mówimy, że jest on μ -zupełny, gdy odwzorowanie: $\varphi \mapsto \varphi|_{\text{Supp}\mu}$ jest surjekcją, t. zn. przeprowadza Z na całą PKS. Każda konfiguracja singularna $\Psi: \text{Supp}\mu \rightarrow M$ posiada wtedy ekstrapolację na N , zawartą w Z . Dlatego też podzbiór Z jest wystarczający, jeśli chodzi o ekstrapolowanie konfiguracji ośrodka poza ciało $\text{Supp}\mu$. Na ogół, różne konfiguracje ekstrapolacyjne mogą prowadzić do tej samej konfiguracji fizycznej. Stąd nowe pojęcie: Zbiór $Z \subset M^N$ nazywamy μ -jednoznaczny, gdy odwzorowanie: $\varphi \mapsto \varphi|_{\text{Supp}\mu}$ jest bijekcją, a więc gdy każda konfiguracja singularna posiada dokładnie jedną ekstrapolację w Z . Oczywiście cała EPKS, t. zn. M^N jest zupełna, ale na ogół -niejednoznaczna /gdy dopełnienie $N \setminus \text{Supp}\mu$ jest niepuste/. Niejednoznaczność EPKS lub jakichś więzów holonomicznych $Z \subset M^N$ narzuconych na ekstrapolacje, nie nastręcza żadnych zasadniczych trudności przy sformułowaniu dynamiki. Mamy wtedy po prostu "za dużo współrzędnych", zachodzą między nimi zależności. Jeśli siły ekstrapolacyjne spełniają zależności /II.42/, to wybór którejs z μ -równoważnych ekstrapolacji jest niefizycznym wyborem cechowania. Nie zależą od niego żadne obserwowalne efekty fizyczne. W szczególności, otrzymana dzięki równaniom Newtona zależność konfiguracji fizycznej $\varphi|_{\text{Supp}\mu}$ od czasu, nie zależy od wycechowania warunków początkowych. W analogicznym sensie mówimy o zupełności i jednoznaczności podzbioru $Z \subset M^N$ względem fizycznych więzów holonomicznych $Y \subset M^{\text{Supp}\mu}$ narzuconych na fizyczne konfiguracje /singularne/ ośrodka. Odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi|_{\text{Supp}\mu}$ ma być wtedy odpowiednio surjekcją lub bijekcją Z na Y .

Przykład II.2

Załóżmy, że M, N są 3-wymiarowymi przestrzeniami afinicznymi, zaś $\text{Supp}\mu$ -podzbiorem złożonym z czterech punktów nie leżących na jednej płaszczyźnie. Przestrzeń $C^k(N, M) \subset M^N$ jest

zupełna, ale bardzo wieloznaczna. Natomiast zbiór wielomianów afinicznych pierwszego stopnia, $\mathcal{W}^1(N, M) \subset C^k(N, M)$ jest jeszcze zupełny i już ^{jedno} wieloznaczny. Wiąże to się z faktem, że w trójwymiarowej przestrzeni afinicznej, układ czterech punktów materialnych jest - jeśli chodzi o stopnie swobody i kinematykę - równoważny ciału afinicznie sztywnemu, t.zn. deformowalnemu jednorodnie.

Można też na to spojrzeć nieco inaczej. Niech $\text{Supp } \mu$ będzie podzbiorem zupełnie dowolnym, byle nie leżącym w jednej płaszczyźnie. Narzucmy teraz ciału więzy afinicznej sztywności, t.zn. ograniczmy dopuszczalne ekstrapolacje do podzbioru:

$$Z = \mathcal{W}^1(N, \mu; M) = \left\{ \varphi \in C^2(N, M) : \forall \psi \in \mathcal{W}^1(N, M), \varphi \equiv \psi \right\} / \text{II.42/}$$

Jeśli $N \setminus \text{Supp } \mu$ jest zbiorem trójwymiarowym /np. gdy ciało wypełnia obszar ograniczony/, to podzbiór $\mathcal{W}^1(N, \mu; M)$ jest zupełny względem fizycznej przestrzeni konfiguracyjnej, lecz wieloznaczny. Ujednoznaczenie uzyskuje się przechodząc do $\mathcal{W}^1(N, M)$.

W większości zastosowań, także w teorii wielomianowej, którą badamy poniżej, przestrzeń materialna N jest obdarzona strukturą afiniczną i ma ten sam wymiar, co M . Niech (N, U, \rightarrow) oznacza tę strukturę afiniczną; U jest przestrzenią translacji. Wyposażenie przestrzeni materialnej w tak bogatą strukturę, ma doniosłe konsekwencje jeśli chodzi o opis konfiguracji ośrodka. Definicję podaną powyżej, dla przypadku, gdy N i $\text{Supp } \mu$ były abstrakcyjnymi zbiorami, należy teraz wzmocnić, uwzględniając strukturę różniczkową w N .

Odzworowanie $\varphi : \text{Supp } \mu \rightarrow M$ nazywamy konfiguracją singularną klasy C^k , gdy dla każdego podzbioru $A \subset \text{Supp } \mu$ będącego podrozmaitością różniczkową klasy C^k w N , $\varphi|_A$ jest odzworowaniem klasy C^k . W tym samym sensie mówimy o lagranżowskich polach prędkości klasy C^k , jako odpowiednich

odwzorowaniach $\xi: \text{Supp } \mu \rightarrow V$. Konfigurację singularną φ klasy C^k nazywamy konfiguracją klasy C^k , gdy dla dowolnego $A \subset \text{Supp } \mu$ będącego w N podzbiorem klasy C^k , $\varphi|_A$ jest dyfeomorfizmem klasy C^k zbioru A na jego obraz $\varphi(A)$ /będący także podzbiorem klasy C^k /. Analogicznie wprowadzamy ekstrapolacje klasy C^k :

Odwzorowanie $\varphi: N \rightarrow M$ nazywamy /singularną/ konfiguracją ekstrapolacyjną klasy C^k , gdy $\varphi|_{\text{Supp } \mu}$ jest konfiguracją /singularną/ klasy C^k . Tak samo ekstrapoluje się lagranżowskie pola prędkości jako odwzorowania $\xi: N \rightarrow V$.

Tak zdefiniowane konfiguracje są więc monomorfizmami nie tylko mnogościowymi /injekcjami/, lecz także różniczkowymi klasy C^k . Opisują one ciało bez wewnętrznych stopni swobody i bez defektów. Np. nieciągłości odwzorowania opisującego konfigurację mogą odpowiadać dyslokacjom. Wybór k zależy od rozpatrywanego zagadnienia.

Gdy N było dowolnym, abstrakcyjnym zbiorem, wybór M^N w roli EPKS był bardzo naturalny. Po przejściu do N obdarzonego strukturą różniczkową i afiniczną, sytuacja pod tym względem komplikuje się. W teorii zakładającej o konfiguracjach gładkość stopnia k , można w roli EPKS wybrać zbiór $C(N, M, k)$ wszystkich ekstrapolacji singularnych zdefiniowanych powyżej. Można jednak postąpić tak samo, jak w teorii z abstrakcyjnym N i w roli EPKS użyć M^N , zaś $C(N, M, k)$ potraktować jako pewne więzy. Z drugiej strony, we wszystkich zastosowaniach wystarczy wziąć mniejszą przestrzeń $C^k(N, M) \subset C(N, M, k)$ /na ogół inkluzja ta nie jest równością/ i potraktować ją bądź jako wyjściową EPKS, bądź jako więzy. Nie ma zasadniczej różnicy między traktowaniem $C(N, M, k)$, lub $C^k(N, M)$ jako EPKS, lub jako więzów, gdyż więzom tym nie towarzyszą żadne siły reakcji. Zarówno $C(N, M, k)$, jak i $C^k(N, M)$ są podprzestrzeniami afinicznymi w M^N ; odpowiednimi przestrzeniami translacji są $C(N, V, k)$ i $C^k(N, V)$.

Cały przykład II.1 daje się przetłumaczyć natychmiast na język ekstrapolacji. Oczywiście, na ogół $C(\Delta)$ nie jest zupeł-

na i więzy narzucone na ekstrapolacje prowadzą do pewnych więzów na konfiguracje fizyczne. Przy danych więzach narzuconych na przestrzeń konfiguracyjną, najwygodniejszy jest oczywiście taki wybór Δ , przy którym $C(\Delta)$ jest jednoznaczna względem więzów. Wtedy podzbiór $C(\Delta)$ utożsamia się z PKS dla danego zagadnienia.

Rozważmy teraz ważny przypadek szczególny przykładu II.1, gdy Δ jest przestrzenią funkcji analitycznych całkowitych określonych na afinicznej przestrzeni materialnej N . Zakładamy przy tym, że ciało $S = \text{Supp } \mu$ jest zbiorem zwartym. W roli bazy $\{\mathcal{F}_r\} \subset \Delta$ można wybrać zbiór jednomianów afinicznych względem ustalonego punktu materialnego $O \in N$. Dokładniej: niech $\{E_A\} \subset U$ będzie bazą materialnej przestrzeni translacji, zaś $\{X^A\}$ - współrzędnymi afinicznymi odpowiadającymi układowi odniesienia $(O, \{E_A\})$, t. zn.:

$$\vec{OP} = X^A(P)E_A, \quad X^A(P) = \langle E^A, \vec{OP} \rangle \quad /II.44/$$

dla dowolnego $P \in N$. Naszą bazą będzie zbiór jednomianów algebraicznych nad funkcjami X^A , t. zn.:

$$\left\{ X^{A_1} \dots X^{A_l} : A_i = 1 \dots N = \dim N, \quad i=0, 1, \dots \right\} \quad /II.45/$$

Zatem $\mu = (i; A_1, \dots, A_l)$. Zamiast numerowanych tym wskaźnikiem funkcji skalarnych, wygodniej jest w wielu wzorach używać funkcji tensorowych numerowanych tylko wskaźnikiem $i = 0, 1, \dots$. Będą to: funkcja skalarna 1, równa tożsamościowo jedności, funkcja wektorowa $X = S_0$, przyporządkowująca punktowi $P \in N$ jego wektor wodzący względem O :

$$X(P) = \vec{OP} \in U \quad /II.46/$$

oraz zbudowane z niej funkcje tensorowe ${}^m X$, gdzie:

${}^m X(P) = X(P) \otimes \dots \otimes X(P)$ /m czynników tensorowych/
Oczywiście:

$${}^m X(P) = X^{A_1}(P) \dots X^{A_m}(P) E_{A_1} \otimes \dots \otimes E_{A_m} \quad /II.47/$$

Wprowadzone w przykładzie II.1 Δ -momenty są teraz układem wszystkich materialnych /współtowarzyszących/ momentów

multipolowych. W szczególności, bezwładne własności ciała opisane są układem symetrycznych multipolowych tensorów rozkładu masy μ :

$$J_m = \int_m X(P) d\mu(P) = \int \underbrace{X(P) \otimes \dots \otimes X(P)}_{m \text{ razy}} d\mu(P) \in \otimes^m U \quad /II.48/$$

Są to oczywiście niezależne od czasu tensory materialne /współtowarzyszące/. Zatem bezwładność ciała jest opisana przez dyskretny układ stałych parametrów:

$$J_m^{A_1 \dots A_m} = \int X^{A_1} \dots X^{A_m} d\mu \quad /II.49/$$

Podobnie: $\mathcal{M}_m^{A_1 \dots A_m i} = \int X^{A_1} \dots X^{A_m} \Xi^i d\mu \quad /II.50/$

lub, w języku funkcji tensorowych:

$$\mathcal{M}_m = \int_m X(P) \otimes \Xi(P) d\mu(P)$$

Podobnie: $\mathcal{M}_m^{A_1 \dots A_m i} = \int X^{A_1} \dots X^{A_m} \Phi^i d\mu \quad /II.51/$

$$\mathcal{M}_m = \int_m X(P) \otimes \Phi(P) d\mu(P) \quad /II.52/$$

Równania Newtona mają postać:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_m = \mathcal{M}_m, \quad m=0, 1, \dots \quad /II.53/$$

Niech ruch będzie dany przez krzywą $t \mapsto \varphi(t)$, opisaną dyskretnym układem rzeczywistych funkcji czasu $\mathcal{M}_m^i A_1 \dots A_m$, lub odpowiednio, tensorowych funkcji $\mathcal{M}_m \varphi$, t. zn:

$$\mathcal{S}_o \circ \tilde{\varphi}(t, \cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{M}_m \varphi(t) \circ \mathcal{M}_m X = e_i \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{M}_m \varphi^i A_1 \dots A_m(t) X^{A_1} \dots X^{A_m} \quad /II.54/$$

gdzie $o \in M$ jest dowolnym ustalonym punktem, zaś $\mathcal{M}_m \varphi(t) \in (L \text{ Sym}_m \otimes U, V)$, a więc daje się utożsamiać kanonicznie z pewnym m -liniowym odwzorowaniem $\otimes_m U$ w V , lub z elementem

$V \otimes (\text{Sym}_m U^*)$ /patrz wstęp matematyczny, rozdział I/. Parametry:

$\varphi^i_{A_1 \dots A_m}(t)$ są po prostu współczynnikami szeregów Taylora dla składowych pola przemieszczenia; rozwinięcie dokonywane jest wokół punktu materialnego $\circ \in N$.

Zauważmy, że przedstawienie /II.54/ można zapisać w następującej postaci:

$$\overrightarrow{\varphi(\circ)} \varphi(P) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi^i(t) \cdot {}^m I(P); \quad /II.54a/$$

punkt $\circ \in M$ nie występuje w tym przedstawieniu; z zerowym wyrazem rozwinięcia $\circ \varphi$ wiąże on się jak następuje:

$$\circ \varphi(\circ) = \circ \varphi \in V \quad /II.54b/$$

Ustalając punkt materialny $\circ \in N$ i fizyczny $\circ \in M$, utożsamiamy singularną przestrzeń konfiguracyjną $C(\Delta)$ z $L(\text{Exp}U, V)$ /patrz rozdział I/ t.zn. ze zbiorem V -wartościowych form liniowych na $\bigoplus_{r=0}^{\infty} \text{Sym}(\bigotimes_r U)$:

$$C(\Delta) = \left\{ \varrho_0^{-1} \circ \left[\sum_{m=0}^{\infty} \varphi^i \cdot {}^m \varrho_0 \right] : \varphi^i \in L(\text{Sym} \bigotimes_m U, V) \right\} /II.55/$$

Oczywiście, $C(\Delta)$ nie zależy od wyboru $\circ \in N, \circ \in M$.

Składowe Δ -momentów wyrażają się przez:

$${}^1 \mathcal{M}^{A_1 \dots A_1 i} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m+1}^J A_1 \dots A_1 B_1 \dots B_m \varphi^i_{B_1 \dots B_m} \quad /II.56/$$

Zatem, równania Newtona II.29, lub II.53, zapisują się jak następuje:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} \varphi^i_{B_1 \dots B_m} \sum_{m+1}^J B_1 \dots B_m A_1 \dots A_1 = {}^1 \mathcal{M}^{A_1 \dots A_1 i} \quad /II.57/$$

W notacji tensorowej:

$$\sum_{m=0}^{\infty} e_m \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi^i \otimes \sum_{m+1}^J \right) = {}^1 \mathcal{M} \quad /II.57a/$$

gdzie e_m oznacza kontrakcję względem m wskaźników materialnych, $\sum_{m+1}^J \in \bigotimes_{m+1} U$ utożsamia się z odpowiednim odwzorowaniem liniowym osi rzeczywistej R w przestrzeń tensorową

$\otimes_{m+1} U$, zaś $\mathcal{R} \in \otimes_1 U \otimes V$, utożsamia się z odwzorowaniem liniowym R w przestrzeń $\otimes_1 U \otimes V$.

Równania ruchu można też zapisać w postaci /II.30/. Macierzy odwrotnej $\| \| \Gamma_{\mu\nu} \| \|$ w /II.30/ odpowiada teraz układ symetrycznych tensorów kowariantnych $\tilde{J} \in \otimes_m U^*$, takich, że:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m+1} J^{A_1 \dots A_1 B_1 \dots B_m} \tilde{J}_{m;l}^{B_1 \dots B_m C_1 \dots C_1} = \delta^{A_1} (C_1 \dots \delta^{A_1} C_1) \quad /II.58/$$

oraz:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m+1} J^{A_1 \dots A_1 B_1 \dots B_m} \tilde{J}_{m;k}^{B_1 \dots B_m C_1 \dots C_k} = 0, \text{ gdy } k \neq 1 \quad /II.59/$$

Wtedy, zamiast /II.57/, mamy:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_m \varphi^i_{A_1 \dots A_m} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m;l} \tilde{J}^{A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l} \mathcal{R}^{B_1 \dots B_l i} \quad /II.60/$$

lub, tensorowo:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_m \varphi = \sum_{l=0}^{\infty} e_l (\tilde{J} \otimes_l \mathcal{R}) \quad /II.60a/$$

Niech $\xi \in \mathcal{V}(\lambda)$ będzie prędkością uogólnioną zgodną z więzami

$$\xi = \sum_m \xi_m \circ m_X \quad /II.61/$$

Wzór /II.33/ na energię kinetyczną przybiera wtedy postać:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{m,k=0}^{\infty} \langle g_{m+k} (\xi_m \otimes \xi_k) \cdot J_{m+k} \rangle = \frac{1}{2} g_{1j} \sum_{m,k=0}^{\infty} \sum_m \xi_m^1 A_1 \dots A_m \sum_k^j B_1 \dots B_k \sum_{m+k}^{A_1 \dots A_m B_1 \dots B_k} J_{m+k}$$

Jeśli istnieje uogólniony potencjał $\mathcal{V}(\varphi, \xi)$, to zachowanie ciała można opisywać w języku mechaniki hamiltonowskiej o przeliczalnej liczbie stopni swobody z lagrangianem $L = T - \mathcal{V}$.

Istotne jest, że wszędzie powyżej używaliśmy ekstrapolacyjnych konfiguracji i pól prędkości. Równania Newtona /II.57/ można więc w zasadzie stosować do opisu ciał nie wypełniających sobą całej przestrzeni, w szczególności - do dyskretnego układu punktów materialnych.

Podobnie, jak w ogólnym przypadku, Δ -momenty ${}_{1m}, {}_{1N}$ pozbawione są przejrzystej treści operacyjno-laboratoryjnej. Z tego względu, może być interesujące wyrazić równania Newtona przy pomocy fizycznych momentów, obliczonych przy pomocy wektorów wodzących w M zamiast w N .

Niech funkcja wektorowa $x: M \rightarrow V$ oznacza wektor wodzący względem ustalonego punktu $o \in M$, t. zn. $x = \mathcal{S}_o$. Niech $p \mapsto v(p)$ będzie eulerowskim polem prędkości, zaś $p \mapsto \Phi(p)$ polem masywej gęstości siły na M . Aktualny /fizyczny/ rozkład masy opisujemy przy pomocy dodatniej miary regularnej m na M .

Fizycznym /aktualnym/ multipolowym momentem pedu rzędu m nazywamy tensor ${}_{mK} \in \otimes_{m+1} V$ dany przez:

$${}_{mK} = \int {}^m x(p) \otimes v(p) dm(p) = {}_{mK}^{i_1 \dots i_m j} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m} \otimes e_j \quad /II.63/$$

gdzie: ${}_{mK}^{i_1 \dots i_m j} = \int x^{i_1}(p) \dots x^{i_m}(p) v^j(p) dm(p) \quad /II.63a/$

Podobnie, fizyczny multipolowy moment siły rzędu m , ${}_{mN}$ definiujemy i oznaczamy jak następuje:

$${}_{mN} = \int {}^m x(p) \otimes \Phi(p) dm(p) = {}_{mN}^{i_1 \dots i_m j} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m} \otimes e_j \quad /II.64/$$

Zauważmy, że wielkości ${}_{1K}, {}_{1N}$ są tym, co w pracy [35] nazwaliśmy odpowiednio afinicznym momentem pedu i afinicznym momentem sił; ich części antysymetryczne ${}_{1K}^{[i,j]}$, ${}_{1N}^{[i,j]}$ są równe odpowiednio pełnemu momentowi pedu ciała względem $o \in M$ i pełnemu momentowi skręcającemu /względem $o \in M$ /.

Niech teraz $(\varphi, \xi) \in P_L(\Delta)$ będzie stanem mechanicznym ciała, reprezentowanym, po wyróżnieniu punktów $o \in N, o \in M$ /patrz /II.55/ przez układ odwzorowań ${}_{m\varphi}, {}_{m\xi}, m=0, 1, \dots$. Wtedy:

$${}_m K(\varphi, \xi) = \sum_{r_1 \dots r_m s=0}^{\infty} \left(r_1 \varphi \otimes \dots \otimes r_m \varphi \otimes s \xi \right) \cdot \int_{(r_1 + \dots + r_m + s)} \quad /II.65/$$

Wyrazimy teraz równania Newtona w postaci praw bilansu dla układu tensorów ${}_m K$. Zamieniając w /II.63/ całkowanie po aktualnym rozkładzie masy na całkowanie po współtowarzyszącym rozkładzie masy μ , różniczkując ${}_m K$ po czasie, oraz stosując II Zasadę Dynamiki Newtona do każdego punktu materialnego,

dostajemy:

$$\frac{d}{dt} {}_m K = {}_m N + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r_1 \dots r_m s=0}^{\infty} \left(r_1 \varphi \otimes \dots \otimes r_k \xi \otimes \dots \otimes r_m \varphi \otimes s \xi \right) \cdot \int_{(r_1 + \dots + r_m + s)} \quad /II.66/$$

Różniczkując po czasie /II.65/ i porównując wynik z /II.66/,

mamy:

$$\sum_{r_1 \dots r_m s=0}^{\infty} \left(r_1 \varphi \otimes \dots \otimes r_m \varphi \otimes \frac{d^2}{dt^2} s \varphi \right) \cdot \int_{(r_1 + \dots + r_m + s)} = {}_m N \quad /II.67/$$

Równania Newtona w postaci /II.67/ lub /II.66/ są równoważne odpowiednim równaniom /II.57/ lub /II.53/. Ich przewaga polega na tym, że występują w nich tensory ${}_m K$, ${}_m N$ w przestrzeni fizycznej M . Są to więc obiekty geometryczne interpretowalne laboratoryjnie /np. momenty sił/. Natomiast wadą równań /II.66/, /II.67/ jest ich silna nieliniowość występująca nawet przy braku oddziaływań. Co jednak najważniejsze, równania dla momentów fizycznych są nieprzydatne, gdy ciało deformuje się wielomianowo, t. zn. gdy $m=0, 1 \dots k < \infty$. Będzie o tym mowa w następnym rozdziale.

Zauważmy przy okazji, że w odróżnieniu od /II.53/, prawo bilansu /II.66/ nie staje się prawem zachowania przy braku oddziaływań, ${}_m N = 0$. Momenty fizyczne nie są więc stałymi ruchu nawet wtedy, gdy na punkty materialne ciała nie działają żadne siły.

Oczywiście, mechanika oparta na równaniach Newtona /II.67/, /II.57/ jest równoważna teorii używającej cząstkowych równań Lamégo, rozwiązywanych w funkcjach całkowitych. /II.67/, /II.57/ są momentami cząstkowych równań teorii ośrodków ciągłych.

ROZDZIAŁ III
TEORIA WIELOMIANOWA.

Narzućmy ciału więzy, zgodnie z którymi, kartezjańskie składowe ekstrapolacyjnych pól przemieszczenia są wielomianami ustalonego, skończonego stopnia k względem materialnych współrzędnych afinicznych. Dzięki operowaniu konfiguracjami ekstrapolacyjnymi nie musimy nic zakładać o strukturze ciała. Może ono być zarówno ośrodkiem ciągłym / $\text{Supp } \mu$ jest mocy kontinuum/, jak i dyskretnym układem punktów materialnych / $\text{Supp } \mu$ jest przeliczalny/. Może być nawet skończonym zbiorem punktów materialnych. Ten ostatni przypadek jest szczególnie ważny w zastosowaniach, ponieważ wszystkie układy badane w mechanice składają się w istocie ze skończonej liczby punktów materialnych. W szczególności, teoria wielomianowa może być stosowana przy badaniu skończonych, nieliniowych drgań dużych cząsteczek i w teorii układów takich cząsteczek, np. kryształów molekularnych. Wyrazy do pierwszego stopnia włącznie zdają sprawę z ruchu translacyjnego /postępowego/, obrotowego i z deformacji jednorodnych. Wyższe stopnie opisują odchylenia deformacji od jednorodności.

Teoria wielomianowa stopnia k jest przypadkiem szczególnym sytuacji omówionej w poprzednim rozdziale, w przykładzie II.1. Zakładamy mianowicie, że przestrzeń materialna N obdarzona jest strukturą afiniczną z przestrzenią translacji U . Modelem przestrzeni fizycznej jest nadal przestrzeń afiniczna (M, V, \rightarrow) . Przestrzenią Δ jest teraz zbiór $\mathcal{W}^k(N, R)$ rzeczywistych wielomianów afinicznych na N . Ekstrapolacyjną przestrzenią konfiguracji singularnych jest $C(\Delta) = \mathcal{W}^k(N, M)$ - zbiór M -wartościowych wielomianów afinicznych k -go stopnia na N . Przestrzenią dopuszczalnych prędkości uogólnionych /ekstrapolacji lagranżowskich pól prędkości/ jest $\mathcal{V}(\Delta) = \mathcal{W}^k(N, V)$. Tym samym, ekstrapolacyjną przestrzenią stanów jest $P_L(\Delta) = \mathcal{W}^k(N, M) \times \mathcal{W}^k(N, V)$. Przestrzenią fazową me- *chaniki hamiltonowskiej jest $P(\Delta) = \mathcal{W}^k(N, M) \times \mathcal{W}^k(N, V)$.

Jak wspomniano w rozdziale II, $C(\Delta)$ ma tutaj naturalną strukturę afiniczną; jej przestrzenią translacji jest $\mathcal{U}(\Delta)$.

EPK ośrodka jest więc podzbiorem otwartym w skończenie-wymiarowej przestrzeni afinicznej. Chodzi tu o otwartość w topologii zbieżności punktowej w $\mathcal{W}^k(N, M)$, równoważnej euklidesowej topologii "współczynnikowej" w zbiorze wielomianów.

Wróćmy do wyjściowych równań Newtona /II.18/ :

$$\frac{d}{dt} \Xi(t, X) = \Phi(t, X; \varphi, \xi) + \Phi_R(t, X; \varphi, \xi) / \text{III.1/}$$

gdzie X przebiega N , a praktycznie $\text{Supp } \mu$, zaś Φ_R są siłami reakcji odpowiedzialnymi za to, że ciało deformuje się tylko w sposób opisywalny wielomianami k -go stopnia.

Założmy, że $\text{Supp } \mu$ jest zbiorem zwartym-badamy ciało o skończonych rozmiarach. Z równań /III.1/ wynikają równania momentowe /II.19/ :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}} + \mathcal{M}_{R\mathcal{F}} / \text{III.2/}$$

które w tej postaci ważne są dla każdej funkcji $\mathcal{F} \in L^2(N, \mu)$.

Elementy podprzestrzeni $\Delta = \mathcal{W}^k(N, R) \subset L^2(N, \mu)$ cechują się tym, że przy założeniu idealności więzów, znikają odpowiednie momenty reakcyjne $\mathcal{M}_{R\mathcal{F}}$. Dostajemy wtedy równanie:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}} / \text{III.3/}$$

nie zawierające już sił reakcji; gdy \mathcal{F} przebiega $\mathcal{W}^k(N, R)$ dostajemy stąd pełny układ równań ruchu. Krótko mówiąc:

Pełnym układem równań ruchu teorii k -wielomianowej są prawa bilansu dla materialnych multipolowych momentów rozkładu pędu, aż do stopnia k -go włącznie. Multipolowe momenty sił reakcji, aż do stopnia k -go włącznie, znikają na mocy założenia o idealności więzów. Materialne momenty multipolowe rozkładu pędu, aż do stopnia k -go włącznie, opisują więc te stopnie swobody, które pozostają układowi po narzuceniu więzów k -wielomianowych. Wyższe momenty odnoszą się do stopni swobody zakazanych przez więzy i są "czułe" na siły reakcji.

Momenty multipolowe dostarczają więc nam "uwspółrzednienia" dopasowanego do struktury więzów.

Zapišemy teraz układ równań ruchu /III.3/ w postaci analitycznej, korzystając z pojęć i oznaczeń wprowadzonych w poprzednim rozdziale. Ustalmy mianowicie punkt materialny $0 \in N$ i punkt fizyczny $o \in M$. Tak, jak w poprzednim rozdziale, wektory wodzące względem $0 \in N$ i $o \in M$, oznaczamy skrótowo: $X = S_0: N \rightarrow U$, $x = S_o: M \rightarrow V$. Używamy też funkcji ${}^m X: N \rightarrow \otimes_m U$, ${}^m x: M \rightarrow \otimes_m V$ o wartościach tensorowych. Funkcje rzeczywiste opisujące składowe wektorów wodzących w bazach $\{E_A\} \subset U$, $\{e_i\} \subset V$ oznaczamy odpowiednio przez $X^A: N \rightarrow R$, $x^i: M \rightarrow R$.

W postaci tensorowej, pełny układ równań Newtona zapisuje się, jak następuje:

$$\frac{d}{dt} {}^m \mathcal{M} = {}^m \mathcal{M} \quad m=0, 1 \dots k \quad /III.4/$$

gdzie ${}^m \mathcal{M}$ są materialnymi momentami multipolowymi stopnia m , /II.50/, /II.51/.

Niech ruch układu będzie dany przez krzywą:

$R \ni t \mapsto \Phi(t) \in W^k(N, M)$. Skorzystamy z przedstawienia:

$$S_o \circ \tilde{\Phi}(t, \cdot) = x \circ \tilde{\Phi}(t, \cdot) = \sum_{m=0}^k {}^m \Phi(t) \circ {}^m X =$$

$$= \sum_{m=0}^k e_i {}^m \Phi^i_{A_1 \dots A_m}(t) X^{A_1} \dots X^{A_m}, \quad /III.5/$$

podobnego do /II.54/, lecz urwanego na $m=k$.

Zamiast wzoru /II.56/ będziemy teraz mieli podobny wzór urwany na $m=k$:

$${}^1 \mathcal{M}^{A_1 \dots A_1 i} = \sum_{m=0}^k \sum_{J \text{ m+1}}^{A_1 \dots A_1 B_1 \dots B_m} {}^m \dot{\Phi}^i_{B_1 \dots B_m} \quad /III.6/$$

Toteż równania Newtona przyjmują postać:

$$\sum_{m=0}^k \frac{d^2}{dt^2} {}^m \Phi^i_{B_1 \dots B_m} \sum_{J \text{ m+1}}^{B_1 \dots B_m A_1 \dots A_1} \mathcal{M}^{A_1 \dots A_1 i} = 1 \quad /III.7/$$

$$1=0, 1 \dots k,$$

lub, w notacji absolutnej:

$$\sum_{m=0}^k e_m \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi \otimes_{m+1}^J \right) = {}_1 \mathcal{R} \quad /III.7a/$$

1=0, 1...k

gdzie e_m oznacza kontrakcję po m wskaźnikach materialnych, zaś $\otimes_{m+1}^J, {}_1 \mathcal{R}$, podobnie, jak w /II.57a/ utożsamia-

ne są z odwzorowaniami liniowymi R odpowiednio w $\otimes_{m+1} U$ i w $\otimes U \otimes V$.

Warunek na odwrotny układ tensorów $\tilde{J} \in \otimes_{m+1} U$, 1+m=0, 1...2k, przybiera teraz postać:

$$\sum_{m=0}^k \sum_{m+1}^J A_1 \dots A_1 B_1 \dots B_m \tilde{J}_{m+1} B_1 \dots B_m C_1 \dots C_1 = \delta_{C_1}^{A_1} \dots \delta_{C_1}^{A_1} \quad /III.8/$$

1=0, 1... k

$$\sum_{m=0}^k \sum_{m+1}^J A_1 \dots A_1 B_1 \dots B_m \tilde{J}_{m;p} B_1 \dots B_m C_1 \dots C_p = 0, \text{ gdy } 1 \neq p \quad /III.9/$$

Zakładamy, że układ ten istnieje. Jest to sytuacja typowa. Osobliwość macierzy $\|\Gamma_{\mu\nu}\|$ /II.23/ ma miejsce np. wtedy, gdy Supp μ leży w całości na jakiejś podrozmiarowości afinicznej $T \subset N$, o wymiarze mniejszym niż $n = \dim N = \dim M$. Zresztą w wypadku, gdy nie istnieje układ odwrotny tensorów \tilde{J} , teoria jest nadal poprawna i równania ruchu /III.7/, są nadal skuteczne, tyle, że nie są już niezależne. Sytuacje takie badał Dirac w swej uogólnionej mechanice [6]. Mamy wtedy mniej fizycznych stopni swobody, niż parametrów ${}_m \varphi^i A_1 \dots A_m$ w równaniach ruchu.

Zakładając istnienie układu odwrotnego, możemy zapisać równania ruchu w postaci rozwiązanej względem przyspieszeń:

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi^i A_1 \dots A_m = \sum_{l=0}^k \sum_{m+1}^J \tilde{J}_{m+1} A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l \mathcal{R}^{B_1 \dots B_l} \quad /III.10/$$

lub, w notacji absolutnej:

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi = \sum_{l=0}^k e_l \left(\tilde{J}_{m+1} \otimes {}_1 \mathcal{R} \right) \quad /III.10a/$$

Korzystając z równań Newtona /III.1/, /III.10a/, można obliczyć ekstrapolacyjne pole masowej gęstości sił reakcji wymuszających k-wielomianowy charakter deformacji:

$$\Phi_R(t, \cdot; \varphi, \Xi) = \sum_{m=0}^k \frac{d^2}{dt^2} {}_m\varphi \circ {}^mX - \Phi(t, \cdot; \varphi, \Xi) =$$

$$= \sum_{m=0}^k e_i \frac{d^2}{dt^2} {}_m\varphi^1_{A_1 \dots A_m}(t) X^{A_1} \dots X^{A_m} - \Phi(t, \cdot; \varphi, \Xi)$$

gdzie φ dane jest przez /III.5/ ,

$$\Xi = \sum_{m=0}^k \frac{d}{dt} {}_m\varphi \circ {}^mX = \sum_{m=0}^k \frac{d}{dt} {}_m\varphi^1_{A_1 \dots A_m} X^{A_1} \dots X^{A_m} \quad /III.11/$$

zaś $\frac{d^2}{dt^2} {}_m\varphi$ podstawiamy z /III.10/. Ostatecznie dostajemy:

$$\Phi_R(t, \cdot; \varphi, \Xi) = \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^k e_l \left(\underset{m;l}{\mathcal{J}} \otimes \underset{l}{\mathcal{R}} \right) \circ {}^mX - \Phi(t, \cdot; \varphi, \Xi) =$$

/III.12/

$$= e_i \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^k \underset{m;l}{\mathcal{J}}_{A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l} \underset{l}{\mathcal{R}}^{B_1 \dots B_l} X^{A_1} \dots X^{A_m} - \Phi(t, \cdot; \varphi, \Xi)$$

Pełna siła działająca ze strony reakcji na zbiór punktów materialnych znajdujących się w podzbiorze $A \subset N$ przestrzeni materialnej, dana jest wzorem:

$$\Phi_{R,A}(t; \varphi, \Xi) = \int_A \Phi'_R(t, P; \varphi, \Xi) d\mu(P) \quad /III.13/$$

Oczywiście, całkowanie przebiega naprawdę po podzbiorze :

$$A \cap \text{Supp } \mu$$

Wprowadzone powyżej równania ruchu oparte są na prawach bilansu dla materialnych momentów multipolowych rozkładu pedu. Powstaje pytanie, czy podobnie, jak w poprzednim rozdziale/dla $k = \infty$ /, nie można ich przedstawić w równoważnej postaci praw bilansu dla fizycznych momentów multipolowych. Okazuje się, że

nie, a ściślej mówiąc, że odpowiednie równania są nieefektywne z powodu jawnej zależności od niewyznaczonych sił reakcji.

Korzystając z /II.63/, dostajemy zamiast /II.65/ :

$${}_m K(\varphi, \xi) = \sum_{r_1 \dots r_m s=0}^k \left(r_1 \varphi \otimes \dots \otimes r_m \varphi \otimes \xi \right) \cdot J_{r_1 + \dots + r_m + s} \quad /III.14/$$

$m=0, 1, \dots$

Podobnie, zamiast /II.66/, /II.67/, dostajemy następujące równania zawierające sumy skończone:

$$\frac{d}{dt} {}_m K = {}_m N_{tot} + \sum_{l=1}^m \sum_{r_1 \dots r_m s=0}^k \left(r_1 \varphi \otimes \dots \otimes r_l \dot{\varphi} \otimes \dots \otimes r_m \varphi \right) \cdot J_{r_1 + \dots + r_m + s} \quad /III.15/$$

$$\sum_{r_1 \dots r_m s=0}^k \left(r_1 \varphi \otimes \dots \otimes r_m \varphi \otimes \frac{d^2}{dt^2} \varphi \right) \cdot J_{r_1 + \dots + r_m + s} = {}_m N_{tot} \quad /III.16/$$

$m=0, 1, 2, \dots$

Zarówno prawo bilansu /III.15/, jak i równoważne mu równanie /III.16/ są słuszne dla dowolnego m . Zauważmy jednak, że występują w nich pełne siłowe momenty fizyczne ${}_m N_{tot}$, zawierające zarówno siły dane, jak siły reakcji:

$${}_m N_{tot} = {}_m N + {}_m N_R$$

W prawach bilansu dla momentów materialnych problem ten nie występował, ponieważ z założenia o idealności więzów wynikało natychmiast znikanie momentów siłowych dla $m \leq k$:

$\mathcal{M}_R = 0$. Układ pierwszych k multipolowych praw bilansu, nie zawierających sił reakcji, był więc automatycznie pełnym układem równań ruchu; liczba zmiennych niezależnych/stopni swobody/ była równa liczbie równań. Tymczasem, z wyjątkiem momentu dipolowego ${}_1 N_R$, który w [35] nazywaliśmy afinicznym, materialne momenty sił reakcji nie znikają. Istotnie, łatwo pokazać, że

$${}_m N^{i_1 \dots i_m j} = \sum_{r_1 \dots r_m s=0}^k r_1 \varphi^{i_1} A_1^1 \dots A_{r_1}^1 \dots r_m \varphi^{i_m} A_1^m \dots A_{r_m}^m \times \mathcal{M}^{i_1 \dots i_m j} \quad /III.17/$$

\times

Oznaczając kontrakcję względem p wskaźników materialnych przez C_p , możemy to zapisać:

$${}^m N = \sum_{r_1 \dots r_m=0}^k \left(\varphi \otimes \dots \otimes \varphi \otimes \right)_{r_1 + \dots + r_m} / \text{III.17a/}$$

gdzie ${}^1 \mathcal{R} \in \otimes U \otimes V$ zostało utożsamione z odpowiednim odwzorowaniem 1 liniowym osi rzeczywistej R w $\otimes U \otimes V$ i podobnie, ${}^m N$ utożsamia się z odwzorowaniem liniowym osi R w przestrzeń $\otimes V$.

Jak widać, fizyczny moment multipolowy rzędu m wyraża się liniowo przez momenty materialne wszystkich stopni od 0 aż do km. Jeśli więc $m > 1$, to ${}^m N$ wyraża się przez momenty wyższe, niż k, odpowiadające stopniom swobody zakazanym przez więzy. Dlatego też, nawet przy założeniu idealności więzów, ${}^m N_R \neq 0$ przy $m > 1$.

Zatem, dla skończonego $k > 1$, żaden podukład praw bilansu /III.15/ dla momentów fizycznych, nie może być użyty w roli efektywnego układu równań ruchu. Każdy taki układ zależy bowiem w istotny sposób od nieznanymi sił reakcji.

Wyjątkiem jest przypadek $k=0$, równoważny mechanice punktu materialnego oraz $k=1$ t. zn. mechanika ciała deformowalnego jednorodnie /afinicznie sztywnego/ omówiona przez nas w [33], [35]. Dla $k=1$, układ równań /III.7/ z $l=0, 1$, jest równoważny analogicznemu układowi /III.16/ z $m=0, 1$:

$$M \frac{d^2}{dt^2} {}^0 \varphi^i = F^i \quad / \text{III.18/}$$

$$\int {}^1 \varphi^i_A \frac{d^2}{dt^2} {}^1 \varphi^j_B = {}^1 N^{ij} \quad / \text{III.19/}$$

gdzie $M = J$ jest pełną masą ciała, zaś $F^i = {}^0 N^i$ - pełną siłą działającą na ciało. Zaletą równań /II.18/, /II.19/ jest fakt, że oddziaływania opisane są przez obiekty geometryczne F, N w przestrzeni fizycznej M. Z tego względu są to pojęcia operacyjne, wielkości mierzalne bezpośrednio metodami laboratoryjnymi /przy pomocy dynamometrów, dźwigni i.t.p./

Fakt, że dla $k=1$, równania ruchu można efektywnie przedstawić w postaci praw bilansu dla momentów fizycznych, wiąże się z tym, że przekształcenia afiniczne tworzą grupę /mowa o izomorfizmach afinicznych/. Przekształcenie odwrotne do afinicznego /opisanego wielomianami 1-go stopnia/ jest też afiniczne /opisane wielomianami 1-go stopnia/ i z tego względu związki między momentami materialnymi stopni 0,1, tłumaczą się natychmiast na związki między momentami fizycznymi stopnia 0,1.

W swych pracach o ciałach mikromorficznych [8][9], Eringen zajmował się ośrodkiem ciągłym, złożonym z nieskończenie małych ziaren deformujących się w sposób wielomianowy. Głównie chodziło o ciała, których ziarna deformują się jednorodnie /wielomiany 1-go stopnia/. Gdyby przetłumaczyć zasady stosowane przez Eringena, na mechanikę pojedynczych ziaren, to sprowadziłyby się one do oparcia równań ruchu na prawach bilansu /III.15/ dla momentów fizycznych. Przy tym, teorie Eringena scharakteryzowane są przez dwie nieujemne liczby całkowite: stopień wielomianów k /degree k / i parametr rzędu l /grade l / wskazujący, jaki jest najwyższy rząd multipoli w przyjętym do opisu ciała podukładzie nieskończonego układu praw bilansu dla m . Eringen nie nakłada żadnej zależności między k i l . Otóż teorie, w których $l > k$ muszą być niekonsystentne już choćby z tego względu, że operują nadokreślonymi, z zasady - sprzecznym układem równań. Gdy $l < k$, to z wyjątkiem pewnych patologicznych sytuacji cechujących się m.in. nieistnieniem układu odwrotnego \mathcal{N} , równań będzie za mało. Jeśli jednak nawet $l=k$, to metoda $m:l$ Eringena i tak jest ogólnie błędna, jeśli pominąć N_R , lub nieefektywna, jeśli używać równań /III.15/ z nieznanymi momentami reakcyjnymi N_R . Przypadkowo, ze względu na wspomnianych powyżej, błędy te znoszą się dla przypadku $k=l=1$, kiedy ziarna deformują się jednorodnie. Wtedy bowiem ${}_1N_R = 0$, a wyższe momenty siłowe nie występują w równaniach. Inna sprawa, że i wtedy można mieć zastrzeżenia fizyczne innego rodzaju. Mianowicie, w teorii Eringena już same ziarna traktowane są jako ciała makroskopowe i do ich opisu używa

się takich, zasadniczo makroskopowych pojęć, jak tensor naprężenia. Wyklucza to natychmiast najważniejszą i trudną do zakwestionowania możliwość zastosowania teorii mikromorficznych: dynamikę kryształów molekularnych. Natomiast nasze rozumowania są skuszone niezależnie od struktury ziaren. Można je więc stosować w zagadnieniach mikroskopowych, np. w teorii drgań cząsteczek, a także w makroskopowych - np. w tradycyjnych zagadnieniach teorii sprężystości.

Sposób współrzędniowania, analitycznego opisu konfiguracji był u nas uzależniony od wyboru ustalonego punktu materialnego $O \in N$ i fizycznego $o \in M$. Chcielibyśmy, by wybór ten nie był zupełnie dowolny, lecz podyktowany jakimiś przesłankami fizycznymi. Najprościej przyjąć, że $O \in N$ jest środkiem masy ciała / w konfiguracji odniesienia/, t.zn.:

$$J = 0$$

/III.20/

Ze względów fizycznych wygodnie jest rozdzielić ruch ciała na ruch jego środka masy /ruch postępowy, orbitalny ciała jako całości/ i ruch wewnętrzny, t.zn. ruch punktów materialnych ciała względem jego ruchomego środka masy. Jest to wręcz niezbędne w takich zagadnieniach, jak teoria cząsteczek i ich układów /jak kryształy molekularne, ciecze i gazy/. W teorii ciała deformowalnego jednorodnie, aktualne położenie $\Phi(O) \in M$ środka masy $O \in N$ dane jest przez ${}_0\Phi^i$ - współczynniki wielomianów przy wyrazach zerowego stopnia /są to składowe wektora wodzącego aktualnego środka masy względem ustalonego początku $o \in M$ /. Współczynniki ${}_1\Phi^i_A$ przy wyrazach pierwszego stopnia opisują konfigurację wewnętrzną ciała. W teorii wielomianowej stopnia $k > 1$ sytuacja się komplikuje: $\Phi(O) \in M$ nie jest już aktualnym środkiem masy ciała zanurzonego w M i znajdującego się w konfiguracji Φ . Istotnie, środek masy jest niezmiennikiem afinicznym, ale dla $k > 1$, Φ nie są odwzorowaniami afinicznymi. Stąd wynika, że ${}_0\Phi^i$ nie są już składowymi wektora wodzącego środka masy. Niech $o_\Phi \in M$ będzie położeniem aktualnego środka masy w przestrzeni fizycznej,

gdy konfiguracja ciała dana jest przez $\varphi \in \mathcal{W}^k(N, M)$. Łatwo pokazać, że:

$$\overrightarrow{\varphi(0)} \circ_{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^k \varphi_m \cdot J_m = \frac{1}{M} e_i \sum_{m=1}^k \varphi_m^i A_1 \dots A_m J_m^{A_1 \dots A_m} \quad /III.21/$$

gdzie $M = \sum_{m=1}^k J_m \in \mathbb{R}$ jest masą ciała. Aktualny środek masy i aktualne położenie materialnego środka masy są więc przesunięte względem siebie o wektor /III.21/, znikający tylko w przypadku deformacji jednorodnych, gdy $\varphi \in \mathcal{W}^1(N, M)$. Podobnie, jak w /II.54a/, mamy:

$$\overrightarrow{\varphi(0)\varphi(P)} = \sum_{m=1}^k \varphi_m \cdot {}^m X(P) = e_i \sum_{m=1}^k \varphi_m^i A_1 \dots A_m X^{A_1}(P) \dots X^{A_m}(P) \quad /III.22/$$

Jest bardzo ważne, że we wzorach /III.21/, /III.22/, szereg zaczyna się od wyrazu pierwszego, nie zaś zerowego stopnia. Dlatego przedstawienia te są wolne od niefizycznego wyboru jakiegoś ustalonego $o \in M$. Wektor wodzący P -go punktu materialnego w konfiguracji φ , względem aktualnego środka masy $o_{\varphi} \in M$ wyraża się jednoznacznie przez układ φ_m , $m=1 \dots k$:

$$o_{\varphi} \varphi(P) = \overrightarrow{\varphi(0)\varphi(P)} - \overrightarrow{\varphi(0)} \circ_{\varphi} = \sum_{m=1}^k \varphi_m \cdot \left({}^m X(P) - \frac{1}{M} J_m \right) \quad /III.23/$$

Zatem, układ odwzorowań $\varphi_m \in L(\text{Sym}_m \otimes U, V)$, $m=1 \dots k$ jednoznacznie opisuje konfigurację wewnętrzną ciała, a zależności czasowe $t \mapsto \varphi_m(t)$ opisują ruch wewnętrzny /względny/. Położenie ciała jako całości dane jest przez o_{φ} i może być opisane analitycznie przy pomocy wektora wodzącego $r = \overrightarrow{o o_{\varphi}} = x(o_{\varphi})$, względem wybranego początku $o \in M$.

Zatem, ekstrapolacyjna przestrzeń konfiguracji singularnych $\mathcal{W}^k(N, M)$ ciała wielomianowego k -go stopnia utożsamia się kanonicznie z rozmaitością różniczkową:

$$Q = M \times \bigoplus_{m=1}^k L(\text{Sym}_m \otimes U, V) \quad /III.24/$$

Rozmaitości $\mathcal{W}^k(N, M)$, Q utożsamiają się kanonicznie z chwilą ustalenia punktu $0 \in N$. My założyliśmy, że 0 jest material-

nym środkiem masy, $J=0$, co czyni nasz wybór niearbitralnym i uzasadnionym fizycznie.

Ruch orbitalny ciała opisujemy przy pomocy krzywej $r: R \rightarrow M$ klasy C^2 , zaś ruch wewnętrzny przy pomocy układu dwukrotnie różniczkowalnych krzywych $R \ni t \mapsto {}_m\varphi(t) \in L(\text{Sym} \otimes U, V)$. Łatwo pokazać, że nasze równania ruchu /III.7/ można doprowadzić do następującej, równoważnej postaci:

$$M \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} = F \quad \text{/III.25/}$$

$$\sum_{m=1}^k \frac{d^2}{dt^2} {}_m\varphi^i B_1 \dots B_m \left(J - \frac{1}{M} J \otimes J \right)_{m+1} B_1 \dots B_m A_1 \dots A_1 = \mathcal{R}_{int} A_1 \dots A_1^i =$$

$$= \left(\mathcal{R} - \frac{1}{M} F \otimes J \right) A_1 \dots A_1^i \quad i=1 \dots k \quad \text{/III.26/}$$

Na ogół, F, \mathcal{R} zależą zarówno od parametrów wewnętrznych, jak i orbitalnych. Dlatego też ruch wewnętrzny i orbitalny warunkują się wzajemnie i wpływają na siebie. Oczywiście, $F = \mathcal{R} \in V$ jest pełną siłą działającą na środek masy ciała. Równania /III.26/ można zapisać w postaci podobnej do /III.7a/ bez użycia wskaźników:

$$\sum_{m=1}^k \mathcal{C}_m \left[\frac{d^2}{dt^2} {}_m\varphi \otimes \left(J - \frac{1}{M} J \otimes J \right) \right] = \mathcal{R} - \frac{1}{M} F \otimes J = \mathcal{R}_{int} \quad \text{/III.26a/}$$

Równania /III.26/ opisują zjawiska wewnętrzne w ciele. W szczególności, gdy badany układ jest cząsteczką w nieprymitywnej, molekularnej sieci krystalicznej, to drgania opisane równaniami /III.26/ dają wkład do powstania gałęzi optycznych krzywej dyspersyjnej.

Obliczmy teraz energie kinetyczną T ciała. Przedstawmy lagranżowskie pole prędkości w postaci:

$$\Sigma = \sum_{m=0}^k \Sigma_m \otimes m_X \quad \text{/III.27/}$$

gdzie $\sum_m \in L(\text{Sym}_m \otimes U, V)$. Słuszny jest wtedy "obcięty" wzór /II.62/:

$$T(\Phi, \Sigma) = \frac{1}{2} \sum_{m, l=0}^k \langle \xi_{m, l} (\sum_m \otimes \sum_l) \cdot J_{m+1} \rangle = \quad \text{/III.28/}$$

$$= \frac{1}{2} \xi_{ij} \sum_{m, l}^i A_1 \dots A_m \sum_l^j B_1 \dots B_l \sum_{m+1}^j A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l$$

Wyrazimy teraz T przez zmienne orbitalne i wewnętrzne. Uogólnionymi prędkościami wewnętrznymi są \sum_m , $m=1 \dots k$. Zamiast $\sum_m \in V$ wprowadzamy $\zeta \in V$ - prędkość ruchu środka masy:

$$\zeta = \sum_0 + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^k \sum_m \cdot J_m$$

Dostajemy:

$$T(\zeta, \Sigma) = \frac{M}{2} \langle \xi_{m, l} (\zeta \otimes \zeta) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{m, l=1}^k \langle \xi_{m, l} (\sum_m \otimes \sum_l) \cdot \left(J_{m+1} - \frac{1}{M} J_m \otimes J_l \right) \rangle \quad \text{/III.29/}$$

Zatem $T = T_{\text{orb}} + T_{\text{int}}$, gdzie T_{orb} jest energią kinetyczną ruchu postępowego, zaś T_{int} - pełną energią kinetyczną ruchu wewnętrznego względem środka masy. Nie ma wyrazów interferencyjnych, orbitalno-wewnętrznych.

Zauważmy, że zarówno w równaniach Newtona /III.26a/, jak i w wyrażeniu na energię kinetyczną, /III.29/, bezwładne własności ciała ze względu na ruch wewnętrzny, opisane są przez tensory

$$J_{m, l} = J_{m+1} - \frac{1}{M} J_m \otimes J_l \quad m, l = 1 \dots k \quad \text{/III.30/}$$

Zauważmy, że gdyby miarę $\frac{1}{M} \mu$ interpretować statystycznie/co ma zresztą sens, jeśli założyć dyskretną strukturę realnych obiektów fizycznych/, to wielkości $\frac{1}{M} J_{m, l}$ opisywałyby po prostu korelację tensorowych zmiennych m, l losowych ${}^m X, {}^l X$. Fizycznie jest to oczywiste-istnienie niezerowych korelacji odpowiada rozmyciu przestrzennemu ciała. Gdy ciało redukuje się do jednego punktu materialnego w N , to wszystkie tensory

J^m znikają, jak być powinno, gdyż nie ma wtedy wewnętrznych stopni swobody. Wewnętrzne równania ruchu /III.26/ są wtedy trywialne, zaś energia kinetyczna /III.29/ redukuje się do energii ruchu postępowego.

Również multipolowe momenty rozkładu pędu wyrażają się w prosty sposób przez parametry orbitalne, wewnętrzne i momenty korelacyjne $J_{m,1}$:

$$\mathcal{M}_1^{A_1 \dots A_l i}(\xi, \xi_m) = J_1^{A_1 \dots A_l i} \xi + \sum_{m=1}^k J_{m,1}^{A_1 \dots A_l B_1 \dots B_m i} \xi_{B_1 \dots B_m} \quad /III.31/$$

Bez używania wskaźników, wzór ten ma postać:

$$\mathcal{M}_1(\xi, \dots, \xi_m \dots) = J_1 \otimes \xi + \sum_{m=1}^k \mathcal{C}_m \left(J_{m,1} \otimes \xi_m \right) \quad /III.31a/$$

gdzie podobnie, jak poprzednio, \mathcal{C}_m oznacza pełną kontrakcję po wskaźnikach materialnych, zaś $J_{m,1}$ utożsamia się z odwzorowaniem liniowym R w $\otimes U$; Podobnie \mathcal{M}_1, J, ξ utożsamiają się z odwzorowaniami liniowymi przestrzeni R odpowiednio w $\otimes U \otimes V, \otimes U, V$.

W odróżnieniu od momentów materialnych, momenty fizyczne stopnia > 1 mają dość zawiłą strukturę, gdyż wiążą się one ze stopniami swobody zakazanymi przez więzy. Wyjątkiem są, jak wspomniano momenty stopnia 1, czyli afiniczne. Afiniczne momenty fizyczne względem punktu $o \in M$, rozkładają się także na część orbitalną i wewnętrzną:

$$K_o^{ij} = K_{orb}^{ij} + K_{int}^{ij} \quad /III.32/$$

$$N_o^{ij} = N_{orb}^{ij} + N_{int}^{ij} \quad /III.33/$$

gdzie momenty wewnętrzne K_{int}, N_{int} obliczone są przy pomocy wzoru /II.63/, ale względem aktualnego środka masy $o_\varphi \in M$ zamiast ustalonego punktu $o \in M$. Natomiast momenty orbitalne odniesione są do początku $o \in M$ ustalonego w przestrzeni.

Łatwo sprawdzić, że:

$$K_{orb}^{ij} = M r^i \xi^j \quad /III.34/$$

$$K_{int}^{ij} = \sum_{m,l=1}^k m \varphi_{A_1 \dots A_m}^i \xi_{B_1 \dots B_l}^j \xi_{m,l}^{A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l} \quad /III.35/$$

$$N_{orb}^{ij} = r^i F^j \quad /III.36/$$

$$N_{int}^{ij} = \sum_{m=1}^k m \varphi_{A_1 \dots A_m}^i \left(m \mathcal{D}^{A_1 \dots A_m j} - \frac{1}{M} \xi_{A_1 \dots A_m}^j F \right) \quad /III.37/$$

Jak widać, w nawiasie kwadratowym w /III.37/ stoi prawa strona /III.26a/, czego zresztą należało oczekiwać.

Wielkość K_{int} będziemy nazywać spinem afinicznym; jej część antysymetryczna opisuje zwykły spin /wewnętrzny moment pędu względem aktualnego środka masy \circ_{φ} /.

Łatwo pokazać, że układ równań ruchu /III.25/-/III.26/, można zapisać w następującej, równoważnej postaci:

$$M \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} = F \quad /III.38/$$

$$\sum_{m,l=1}^k m \varphi_{A_1 \dots A_m}^i \frac{d^2}{dt^2} \xi_{B_1 \dots B_l}^j \xi_{m,l}^{A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l} = N_{int}^{ij} \quad /III.39/$$

$$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{d^2}{dt^2} m \varphi_{B_1 \dots B_m}^i \xi_{m,l}^{B_1 \dots B_m A_1 \dots A_l} = \left(\mathcal{D} - \frac{1}{M} \xi \otimes F \right)_{A_1 \dots A_l}^i \quad /III.40/$$

l=2...k

Dwa pierwsze równania układu /III.38/, /III.39/, wyrażone są przy pomocy momentów fizycznych/aktualnych/, co, jak wspomniano, czyni je bardziej przejrzystymi fizycznie. Są to po prostu prawa bilansu dla pędu orbitalnego $p = M \xi$, oraz spinu afinicznego K_{int} :

$$\frac{dp}{dt} = F \quad /III.38a/$$

$$\frac{d}{dt} K_{int}^{ij} = \sum_{m,l=1}^k m \xi_{A_1 \dots A_m}^i \xi_{B_1 \dots B_l}^j \xi_{m,l}^{A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l} \quad /III.39a/$$

Równania ruchu /III.38/-/III.40/ są szczególnie użyteczne, gdy wyrazy wielomianowe stopnia $m > 1$ są małe i stanowią poprawkę nałożoną na skończony ruch afinicznie sztywny/deformację jednorodną/.W szczególności, może to być ruch sztywny zaburzony małymi deformacjami /małe drgania żyroskopu/.W tym ostatnim przypadku, "tło" problemu opisane jest równaniem /III.38/ i antysymetryczną częścią równania /III.39/,opisującą bilans spinu:

$$\frac{d}{dt} S^{ij} = 2 \frac{d}{dt} N_{int}^{[ij]} = 2 N_{int}^{[ij]} \quad /III.39b/$$

Wyprowadzone przez nas równania ruchu /III.25/,/III.26/ są słuszne przy dowolnej postaci oddziaływań, także wtedy, gdy w układzie występują siły dyssypatywne.Równania te nie dają się więc na ogół wyprowadzić z zasady wariacyjnej.Przypuśćmy na chwilę, że:

$$i \mathcal{L}^{A_1 \dots A_1 i} = - g^{ij} \frac{\partial V}{\partial \Pi^j_{A_1 \dots A_1}} + D^{A_1 \dots A_1 i}_{A_1 \leq \dots \leq A_1}$$

gdzie energia potencjalna V zależy tylko od konfiguracji Φ , zaś D_1 znika, gdy ciało jest w spoczynku.Oznacza to, że D_1 może opisywać oddziaływania magnetyczne i siły tarcia.Wtedy, bilans pełnej energii mechanicznej, $E=T+V$, przyjmuje postać:

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon_{ij} \sum_{m=0}^k \xi^i_{A_1 \dots A_m} D^{A_1 \dots A_m j}$$

Do bilansu wnoszą wkład tylko siły tarcia.Siły magnetyczne zależą liniowo od prędkości uogólnionych w ten sposób, że wyrażenie po prawej stronie powyższego wzoru znika.Zjawiska dyssypacji są szczególnie aktualne w takich zagadnieniach, jak ruch zawieszin.Należy je wtedy badać metodami wprowadzonymi w [35] dla przypadku deformacji jednorodnych.Również typowe, makroskopowe zagadnienia teorii sprężystości wymagają uwzględnienia sił tarcia /wewnętrznego i zewnętrznego/.Natomiast takie układy, jak cząsteczki, można w zasadzie badać metodami wariacyjnymi mechaniki hamiltonowskiej, gdyż tarcie,

zjawisko typowo makroskopowe, właściwie tam nie występuje.

Na zakończenie tego rozdziału warto zatrzymać się chwilę nad zagadnieniem fizycznej natury więzów. Powyżej postępowaliśmy w sposób czysto formalny - narzuciliśmy ciału więzy wielomianowe i wyprowadziliśmy równania ruchu wolne od sił reakcji /w oparciu o zasadę d'Alamberta, oraz równania Lagrange'a pierwszego rodzaju/. Nie wspomnieliśmy jednak nic o czynnikach fizycznych odpowiedzialnych za wielomianowy /w przybliżeniu/ charakter ruchu w omawianych zagadnieniach. Otóż wydaje się, że narzucenie więzów wielomianowych może być uzasadnione np. wtedy, gdy zasięg wewnętrznych/międzycząsteczkowych/ oddziaływań w ciele lub długość fali są porównywalne z rozmiarami ciała. Struktura oddziaływań organizuje wtedy stopnie swobody ośrodka w taki sposób, że znikają właściwie propagacyjne efekty falowe w zwykłym sensie. W najgrubszym przybliżeniu występują wtedy kolektywne deformacje jednorodnego ciała. Wzięcie pod uwagę wielomianów stopnia wyższego niż 1 zwiększa dokładność opisu zachowania deformacyjnego. Jest też prawdopodobne, że wielomianowość /przybliżoną/ można wymusić odpowiednio zaprojektowanym zbrojeniem. W szczególności dotyczy to ciał deformowalnych jednorodnie/wielomiany 1-go stopnia/. Wyobraźmy sobie, że ciało zostało naszpikowane dużą ilością losowo rozrzuconych, długich i cienkich sztywnych igieł, mogących poruszać się swobodnie bez tarcia wzdłuż swej długości. Zakładamy przy tym, że rozkład orientacji igieł także jest całkowicie chaotyczny. Podczas deformacji wszystkie igły zachowują swój prostoliniowy kształt. Ponieważ jest ich dużo, więc można powiedzieć, że w przybliżeniu wszystkie proste materialne przechodzą w proste podczas ruchu ciała. Ale jedynymi nieosobliwymi przekształceniami zachowującymi wszystkie proste są przekształcenia afiniczne, czyli deformacje jednorodne. Dopuszczając osobliwości leżące poza obszarem zajmowanym przez ciało, musielibyśmy dopuścić przekształcenia rzutowe/co też prowadziłoby do dyskretyzacji, zważywszy skończony wymiar grupy rzutowej/. Można jednak oczekiwać, że w

najniższym przybliżeniu wystarczy ograniczyć się do deformacji jednorodnych. Dokładność tego przybliżenia można łatwo poprawić dopuszczając kilka wyższych stopni wielomianowych. Przykład ten jest raczej akademicki, jeśli rozumieć go dosłownie. Można jednak wskazać pewne obiekty będące w jakimś sensie jego realizacją. Są to cząsteczki polimerów globularnych, mających strukturę zwiniętego w kłębek łańcucha. Zauważmy, że segmenty łańcucha można do pewnego stopnia uważać za "igły" z powyższego akademickiego przykładu. Cząsteczka jest "uzbrojona" segmentami swego własnego łańcucha. Można więc oczekiwać przybliżonej deformowalności wielomianowej, lub przynajmniej-wielomianowej niskiego stopnia.

ROZDZIAŁ IV.
MECHANIKA ANALITYCZNA ODKSZTAŁCEN WIELOMIANOWYCH.
ZASADA WARIACYJNA.

Jak wiemy z poprzednich rozdziałów, ekstrapolacyjna przestrzeń konfiguracji singularnych ciała odkształcalnego k -wielomianowo, $M^k(N, M)$, utożsamia się w naturalny sposób z mnogością różniczkową:

$$Q_k = M \times W_k \quad /IV.1/$$

gdzie przestrzeń liniowa W_k jest sumą prostą:

$$W_k = \bigoplus_{r=1}^k Y_r = \bigoplus_{r=1}^k L \left(\text{Sym}_r \otimes U, V \right) \quad /IV.1a/$$

Gdy jest jasne, o jaki stopień k chodzi, piszemy po prostu Q , W zamiast Q_k, W_k . Z chwilą wyprowadzenia równań /III.25/, /III.26/, /III.29/ i po wyrażeniu momentów siłowych ¹ \mathcal{M} /lub potencjału uogólnionego/ jako funkcji od położeń w Q_k i prędkości uogólnionych, można wogóle zapomnieć o wyjściowych pojęciach teorii ośrodków ciągłych. Nasza teoria staje się wtedy zwykłym, skończenie-wymiarowym zagadnieniem mechanicznym w mnogości Q_k . Pojęcia rozdziału II będą potrzebne tylko do otrzymania jawnej postaci momentów lub potencjału, w oparciu o model mikroskopowy /patrz np. /II.36/, /II.39/.

W wielu zagadnieniach można przyjąć niedysspacyjny model dynamiczny. Równania ruchu dają się wtedy wyprowadzić z zasady wariacyjnej, co umożliwia operowanie metodami mechaniki hamiltonowskiej. Jest tak na ogół w zagadnieniach mikroskopowych, jak teoria drgań cząsteczek i oparta na niej teoria kryształów molekularnych i gazów wieloatomowych. Zagadnienia te wymagają często podejścia kwantowego. Jak wiadomo, pojęcia teorii kwantowej pozostają w ścisłym związku z pojęciami klasycznej mechaniki hamiltonowskiej. Tym bardziej więc należy zbadać strukturę tej ostatniej.

Zacniemy od zbadania struktury przestrzeni konfiguracyjnej Q_k , ze szczególnym uwzględnieniem wyróżnionych grup automorfizmów. Jak mówiliśmy, Q_k jest w naturalny sposób

przestrzenią afiniczną; jej przestrzenią translacji jest:

$$L(\text{Exp}_k U, V) = V \times W_k = \bigoplus_{r=0}^k L(\text{Sym}_r \otimes U, V) \quad /IV.2/$$

Konfiguracjom dopuszczalnym fizycznie /niesingularnym/ odpowiada w Q_k podzbiór otwarty. Jego dopełnienie jest zbiorem miary zero, opisującym konfiguracje singularne, w których kilka punktów materialnych może być ulokowanych w jednym punkcie fizycznym.

Grupa izomorfizmów afinicznych przestrzeni M , $Af I(M)$, działa w naturalny sposób na Q_k . Działanie to określone jest wzorem:

$$(m, {}_1\varphi \dots {}_k\varphi) \xrightarrow{A} (A(m), L(A) \circ {}_1\varphi, \dots, L(A) \circ {}_k\varphi) \quad /IV.3/$$

dla dowolnych $A \in Af I(M)$, $(m, \dots, {}_r\varphi \dots) \in Q_k$. Przypominamy, że $L(A): V \rightarrow V$ jest częścią liniową odwzorowania afinicznego A /patrz wstęp matematyczny/. Odwzorowanie /IV.3/ będzie oznaczane symbolem $A_k: Q_k \rightarrow Q_k$, zaś zbiór takich odwzorowań symbolem $Af I_k(M)$. Przyporządkowanie $A \mapsto A_k$ jest wierną reprezentacją grupy $Af I(M)$ w grupę $Af I(Q_k)$ automorfizmów przestrzeni konfiguracyjnej.

Przekształcenie /IV.3/ odpowiada przypadkowi szczególnemu /II.1/, gdy ograniczamy się do odwzorowań afinicznych. Jest to jedyny przypadek szczególny /II.1/, który zachowuje $\mathcal{M}^k(N, M)$, a tym samym - posiada odpowiedniki w Q_k /Gdy $k=0$, co odpowiada brakowi wewnętrznych stopni swobody, nie jest to jedyny możliwy przypadek/. Grupa $Af I_k(M)$ opisuje fizyczne deformacje jednorodnego ciała deformowalnego wielomianowo. Zauważmy, że nie działa ona tranzytywnie na Q_k . Jej powłoki, czyli klasy równoważności względem $Af I_k(M)$ składają się z konfiguracji, które można ze sobą powiązać przy pomocy odkształcenia jednorodnego /obrotu afinicznego w przestrzeni fizycznej/.

Oczywiście, grupa liniowa $GL(V)$ także działa naturalnie na rozmaitości Q_k :

$$(m, \dots, {}_r\varphi \dots) \xrightarrow{L} (m, \dots, L \circ {}_r\varphi \dots) = L_k(m, \dots, {}_r\varphi \dots) \quad /IV.4/$$

ozn.

dla każdego $L \in GL(V)$. Grupa takich przekształceń, $GL_k(V)$ "porusza" tylko wewnętrznymi stopniami swobody.

Podobnie, $AfI(N)$ jest największą grupą, która, podstawiona do /II.2/ zachowuje $\mathbb{W}^k(N, M)$, a więc - przenosi się do Q_k /gdy $k=0$, nie jest to największa grupa o tej własności/. Zauważmy, że wyróżniony punkt materialny $0 \in N$ /materialny środek masy/, utożsamia kanonicznie $AfI(N)$ z $U \times GL U$. $B \in GL(U)$ działa na Q_k według wzoru:

$$\left(m, \dots, {}_r\Phi \dots \right) \xrightarrow{B} \left(m, \dots, {}_r\Phi \circ \otimes_r B, \dots \right) \quad /IV.5/$$

Podobnie, jak poprzednio, działanie to oznaczamy symbolem $E_k: Q_k \rightarrow Q_k$, a grupę tych działań - $GL_k(U)$. Grupa ta także rusza tylko wewnętrznymi stopniami swobody. Oczywiście, $GL_k(U)$ też działa nietranzytywnie na Q_k .

W odróżnieniu od $GL_k(U)$, abelowa grupa translacji materialnych U działa zarówno na orbitalne, jak i na wewnętrzne stopnie swobody/to ostatnie nie ma miejsca tylko dla $k=1$, t.zn. dla ciała deformowalnego jednorodnie./Działanie to / z wyjątkiem przypadku $k=1$ / ma nieco bardziej skomplikowaną postać i nie będzie nam potrzebne, toteż nie wypisujemy go explicit.

Omówione tu transformacje w Q_k były indukowane przez przekształcenia /afiniczne/ przestrzeni fizycznej M i materialnej N . Nie są to najogólniejsze transformacje w Q_k , z którymi można związać jakąś interpretację fizyczną. Spośród wszystkich możliwych dyfeomorfizmów Q_k , struktura afiniczna tej rozmaitości wyróżnia grupę afiniczną $AfI(Q_k)$. Ważną jej podgrupą jest $AfI(M) \times GL(W_k)$. Oczywiście, element (A, F) tej grupy działa na Q_k według wzoru:

$$\left(m, w \right) \xrightarrow{(A, F)} \left(A(m), Fw \right) \quad /IV.6/$$

Grupa $AfI(M) \times GL(W_k)$ nie miesza orbitalnych stopni swobody z wewnętrznymi. Na wewnętrzne stopnie swobody działa w sposób liniowy, zgodnie z liniową strukturą zbioru stanów wewnętrznych. Z kolei, w grupie tej wyróżnioną rolę odgrywa podgrupa

$AfI(M) \times GL(Y_1) \times \dots \times GL(Y_k)$. Na wewnętrzne stopnie swobody działa ona w ten sposób, że nie miesza ze sobą stopni swobody odpowiadających różnym przestrzeniom Y_r , czyli różnym stopniom odchylenia od jednorodności deformacji. Omówione powyżej grupy $AfI_k(M)$, $GL_k(V)$, $GL_k(U)$ są wszystkie jej podgrupami. Są one wyróżnione tym, że indukowane są przez przekształcenia w zbiorze argumentów i w zbiorze wartości odwzorowań opisujących konfigurację /ekstrapolacyjną/ ciała. Natomiast już grupa $AfI(M) \times GL(Y_r)$ nie ma tej własności; jej przekształcenia działają na konfigurację w "całościowy" sposób, niesprowadzalny do przekształceń ciała $Supp M \subset N$, lub przestrzeni fizycznej M .

Wszędzie poniżej, w roli współrzędnych na Q_k będziemy używali współrzędnych afinicznych odpowiadających bazom $\{e_i\} \subset \{E_A\} \subset U$ i punktom $0 \in N$, $o \in M$. Niech $r^i, {}_m\Phi^i_{A_1 \dots A_m}$ będą funkcjami na Q_k takimi, że dla $(r; \dots {}_m\Phi \dots) \in Q_k$, $r^i(r; \dots {}_m\Phi \dots)$ są składowymi wektora wodzącego o^r w bazie $\{e_i\}$, zaś ${}_m\Phi^i_{A_1 \dots A_m}(r; \dots {}_m\Phi \dots)$ są składowymi obiektu ${}_m\Phi$ względem baz $\{e_i\}$, $\{E_A\}$. Z wyjątkiem przypadku $k=1$, ten układ funkcji nie jest niezależny funkcjonalnie. W roli układu niezależnych współrzędnych możemy wybrać: $r^i, \dots {}_m\Phi^i_{A_1 \dots A_m} \dots$, gdzie $A_1 \leq \dots \leq A_m$.

Opiszemy teraz przekształcenia infinitezymalne odpowiadające wspomnianym grupom symetrii.

Jak wiadomo, algebry Liego grup $AfI(M)$, $GL(V)$, $GL(U)$, $GL(W)$ można utożsamić odpowiednio z $Af(M, V)$, $L(V)$, $L(U)$, $L(W)$. Każdy element algebry Liego wyróżnia podgrupę jednoparametrową odpowiedniej grupy, a tym samym - jednoparametrową grupę transformacji w Q_k . Z kolei, grupom jednoparametrowym odpowiadają generujące je pola wektorowe na Q_k . Przyporządkowanie pól wektorowych na Q_k elementom algebry Liego, jest oczywiście reprezentacją tej algebry w algebrę Liego pól wektorowych / w sensie komutatora/ [19][40].

Niech $A \in Af(M, V)$ będzie infinitezymalnym odwzorowaniem

grupy afinicznej $Af(M)$, działającej na Q_k . Odpowiadające mu pole wektorowe $X[A]$, ma postać operatora różniczkowego, działającego na funkcje klasy $C^1(Q_k)$ według wzoru:

$$(X[A]\Psi)(p; \dots_m \varphi \dots) = \langle \nabla_p \Psi(\dots_m \varphi \dots, A(p) \rangle + \sum_{m=1}^k \langle D_m \varphi \Psi(p; \dots_{m-1} \varphi, \dots_{m+1} \varphi \dots, L(A) \circ_m \varphi \rangle \quad /IV.7/$$

We wprowadzonych powyżej współrzędnych $r^i, \varphi^i_{A_1 \dots A_m}$, dzięki utożsamieniu $Af(M, V)$ z $V \times L(V)$, odpowiadającego punktowi $o \in M$, operator ten przyjmuje postać:

$$X[a, \alpha] = a^i \frac{\partial}{\partial r^i} + \alpha^j r^j \frac{\partial}{\partial r^i} + \alpha^j \sum_{m=1}^k \varphi^j_{A_1 \dots A_m} \frac{\partial}{\partial \varphi^i_{A_1 \dots A_m}}$$

gdzie $A_1 \leq \dots \leq A_m$ /IV.7a/

Infinityzmalne działanie grupy $GL_k(V)$, odpowiadające elementowi $\alpha \in L(V)$, opisuje operator różniczkowy ${}_1X[\alpha]$, taki, że:

$$({}_1X[\alpha]\Psi)(p; \dots_m \varphi \dots) = \sum_{m=1}^k \langle D_m \varphi \Psi(p; \dots_{m-1} \varphi, \dots_{m+1} \varphi \dots, \alpha \circ_m \varphi \rangle \quad /IV.8/$$

We współrzędnych $r^i, \varphi^i_{A_1 \dots A_m}$:

$${}_1X[\alpha] = \alpha^j \sum_{m=1}^k \varphi^j_{A_1 \dots A_m} \frac{\partial}{\partial \varphi^i_{A_1 \dots A_m}} \quad /IV.8 a/$$

$A_1 \leq \dots \leq A_m$

Przekształcenie $\beta \in L(U)$, prowadzi do infinyzmalnego działania grupy $GL_k(U)$, danego przez pole wektorowe ${}_rX[\beta]$:

$$({}_rX[\beta]\Psi)(p; \dots_m \varphi \dots) \quad -$$

$$\sum_{m=1}^k \left\langle D_m \Psi(p; \dots, \varphi_{m-1}, \dots, \varphi_{m+1}, \dots) \otimes \varphi_m \otimes \sum_{l=0}^{m-1} \otimes_{l=1}^{m-1} \text{Id}_U \otimes \beta \otimes_{m-1-1} \text{Id}_U \right\rangle$$

/IV.9/

We współrzędnych:

$$r^X[\beta] = \sum_{m=1}^k \left[\sum_{l=1}^m \varphi_l^i A_{1-1} \dots A_{l-1} B_{l+1} \dots A_m \beta_{A_l}^B \right] \frac{\partial}{\partial \varphi_{A_1 \dots A_m}^i}$$

$$A_1 \leq \dots \leq A_m \quad /IV.9 \text{ a}/$$

Zapiszmy jeszcze wzór na infinitezymalne działanie grupy $\text{Id}_M \times \text{GL}(W_k)$ na $Q_k = M \times W_k$. /IV.8/, /IV.9/ są szczególnymi przypadkami tego działania. Algebra Liego tej grupy utożsma - mia się z $L(W_k)$. Niech $L \in L(W_k)$ będzie dowolnym endomorfizmem W_k . Wtedy, odpowiednie pole wektorowe $X[L]$ ma postać:

$$(X[L]\Psi)(p, w) = \langle D_w \Psi(p, \cdot), Lw \rangle \quad /IV.10/$$

Jeśli $\{\varepsilon_\nu\} \subset W_k$ jest bazą w W_k , zaś funkcje $w^\nu : Q_k \rightarrow R$ są współrzędnymi elementów W_k względem tej bazy, to:

$$X[L] = L^\mu_{\nu} w^\nu \frac{\partial}{\partial w^\mu} \quad /IV.10a/$$

Podgrupa ruchów euklidesowych $\mathcal{E}(M, g) \subset \text{AfI}(M)$ zachowujących tensor metryczny g , działająca na Q_k zgodnie z /IV.3/, poddaje ciało sztywnym translacjom i obrotom żyroskopowym. Infinitezymalne ruchy sztywne ciała opisane są przez pola wektorowe $X[a, \alpha]$ /IV.7 a/, gdy podstawić tam g -skośnieszymetryczne odwzorowania α , t.zn. takie, że:

$$\langle g, v \otimes \alpha u \rangle = - \langle g, (\alpha v) \otimes u \rangle \quad /IV.11/$$

dla dowolnych $u, v \in V$. Z przekształceniami $\alpha \in L(V)$ zawierającymi niezerową część g -symetryczną, związane są infinitezymalne deformacje ciała.

Przejdźmy teraz do własności przestrzeni stanów. Jak już mówiliśmy, przestrzeń konfiguracyjna ciała wielomianowego

jest podzbiorem otwartym w $Q_k = M \times W_k$, dopełnieniem pewnego zbioru miary zero.

Wiązkę styczną TQ_k można utożsamiać kanonicznie z rozmaitością $P_L = Q_k \times V \times W_k = Q_k \times L(\text{Exp}_k U, V)$, gdyż $V \times W_k$ jest przestrzenią translacji w przestrzeni afinicznej Q_k .

Lagranżowska przestrzeń stanów utożsamiamy więc z podzbiorem otwartym w rozmaitości P_L , lub wprost z P_L , jeśli dopuszczamy konfiguracje singularne, zlepiające punkty materialne.

Wiązka ko-styczna T^*Q_k utożsamia się kanonicznie z rozmaitością $Q_k \times V^* \times W_k^* = Q_k \times L(\text{Exp}_k U, V)^*$. Zauważmy z kolei, że przestrzeń $L(\text{Exp}_k U, V)^*$, dualna do $L(\text{Exp}_k U, V)$, utożsamia się kanonicznie z przestrzenią odwzorowań liniowych $L(V, \text{Exp}_k U)$. Istotnie, odwzorowanie $f \in L(V, \text{Exp}_k U)$, traktowane jako funkcjonal liniowy na $L(\text{Exp}_k U, V)$, działa według wzoru:

$$\langle f, g \rangle_{\text{def}} = \text{Tr}(g \circ f) \quad /IV.12/$$

Wygodnie będzie też korzystać z utożsamienia przestrzeni $L(V, \text{Exp}_k U)$ z $V^* \times T_k = V^* \times_{r=1}^k Z_r$, gdzie $Z_r = L(V, \text{Sym}_r U)$ utożsamia się kanonicznie z $L(\text{Sym}_r U, V)$ także według wzoru /IV.12/. Dla uproszczenia notacji, nigdzie poniżej nie wprowadzamy specjalnych oznaczeń dla izomorfizmów realizujących wspomniane utożsamienia kanoniczne. Wprost traktujemy odpowiednie przestrzenie jako tożsame.

Hamiltonowska przestrzeń stanów, czyli przestrzeń fazowa układu utożsamiamy zatem z podzbiorem otwartym rozmaitości

$$P = Q_k \times V^* \times T_k = Q_k \times L(V, \text{Exp}_k U) = Q_k \times \bigoplus_{r=0}^k L(V, \text{Sym}_r U) \quad /IV.13/$$

Zarówno P_L , jak i P są w naturalny sposób przestrzeniami afinicznymi; ich przestrzeniami translacji są odpowiednio:

$$\prod_L = L(\text{Exp}_k U, V) \times L(\text{Exp}_k U, V) \quad /IV.14/$$

oraz:

$$\prod = L(\text{Exp}_k U, V) \times L(V, \text{Exp}_k U) \quad /IV.15/$$

Struktura fazowa w P określona jest przy pomocy naturalnej,

niesobliwej biformy symplektycznej Γ określonej na Π :
 $\langle \Gamma, (\xi_1, \eta_1) \wedge (\xi_2, \eta_2) \rangle = \text{Tr}(\xi_2 \circ \eta_1) - \text{Tr}(\xi_1 \circ \eta_2) / \text{IV.16/}$
 Biwektor odwrotny do biformy symplektycznej $\Gamma \in \Lambda^2 \Pi^*$, oznaczamy symbolem $\overline{\Gamma} \in \Lambda^2 \Pi$.

Nawias Poissona funkcji $F, G \in C^1(P)$ definiujemy zwykłym wzorem:

$$\{F, G\} = \langle \nabla F \wedge \nabla G, \overline{\Gamma} \rangle \quad / \text{IV.17/}$$

/gdzie ∇ oznacza pochodną afiniczną/.

Naturalne rzuty przestrzeni stanów P_L, P na /singularną/ przestrzeń konfiguracyjną Q_k , t.zn. na pierwszy czynnik iloczynu kartezjańskiego, oznaczamy odpowiednio symbolami:

$$\tau : P_L \rightarrow Q_k, \quad \tau^* : P \rightarrow Q_k$$

Będziemy poniżej korzystali często ze współrzędnych afinicznych na P_L i P , indukowanych przez współrzędne afiniczne $(r^i, m^i_{A_1 \dots A_m})$ na Q_k , odpowiadające bazom $\{E_A\} \subset U$,

$\{e_i\} \subset V$. Odpowiednie współrzędne na P_L oznaczamy symbolami: $q^i, m^i_{A_1 \dots A_m}, v^i, m^i_{A_1 \dots A_m}$, zaś na P -symbolami: $Q^i, m^i_{A_1 \dots A_m}, P_i, m^i_{A_1 \dots A_m}$. Oczywiście: $q^i = r^i \circ \tau$,

$$m^i_{A_1 \dots A_m} = m^i_{A_1 \dots A_m} \circ \tau, \quad Q^i = r^i \circ \tau^*, \quad m^i_{A_1 \dots A_m} =$$

$m^i_{A_1 \dots A_m} \circ \tau^*$. Wartości funkcji $v^i, m^i_{A_1 \dots A_m}$ na sta-

nie $(x, \dots_r \varphi \dots; v, \dots_r \xi \dots) \in P_L$ są odpowiednio składowymi prędkości orbitalnej v i uogólnionej prędkości wewnętrznej ξ . Podobnie, wartości $P_i, m^i_{A_1 \dots A_m}$ i na sta-

nie fazowym $(x, \dots_r \varphi \dots; p, \dots_m \pi \dots) \in P$ są odpowiednio składowymi pędu orbitalnego i pędu wewnętrznego w bazach $\{E_A\}, \{e_i\}$.

Nawiasy Poissona dla takich współrzędnych na P przyjmują znaną postać:

$$\{Q^i, P_j\} = \delta^i_j \left\{ m^{Q^i} A_1 \dots A_m, m^P B_1 \dots B_m \right\} = \delta^i_j \delta(A_1 \dots \delta A_m^{B_m})$$

/IV.18/

wszystkie pozostałe znikają.

Biforma różniczkowa γ na P , indukowana przez $\Gamma \in \Lambda^2 \Pi^*$, we współrzędnych tych przyjmuje postać:

$$\gamma = dP_i \wedge dQ^i + \sum_m d m^P A_1 \dots A_m \wedge d m^{Q^i} A_1 \dots A_m$$

/IV.19/

Działanie wszystkich omówionych powyżej grup przekształceń na rozmaitości Q_k , podnosi się w naturalny sposób do przeszerzeni stanów P_L, P .

Rzeczywiście, niech $A_k \in \text{AfI}_k(M)$, $L_k \in \text{GL}_k(V)$, $B_k \in \text{GL}_k(U)$. Podnosząc te przekształcenia do P_L , dostajemy następujące transformacje:

$$(m, \dots, {}_r\varphi \dots; v, \dots, {}_r\xi \dots) \xrightarrow{A} (A(m), \dots, L(A) \circ {}_r\varphi \dots; L(A)v, \dots, L(A) \circ {}_r\xi \dots)$$

/IV.20/

$$(m, \dots, {}_r\varphi \dots; v, \dots, {}_r\xi \dots) \xrightarrow{L} (m, \dots, L \circ {}_r\varphi \dots; v, \dots, L \circ {}_r\xi \dots)$$

/IV.21/

$$(m, \dots, {}_r\varphi \dots; v, \dots, {}_r\xi \dots) \xrightarrow{B} (m, \dots, {}_r\varphi \circ B \dots; v, \dots, {}_r\xi \circ B)$$

/IV.22/

/IV.21/, /IV.22/ są przypadkami szczególnymi działania grupy $\text{id}_M \times \text{GL } W_k$; jeśli $\Lambda \in \text{GL}(W_k)$, to odpowiednie działanie podnosi się do P_L , jak następuje:

$$(m, w; v, \zeta) \xrightarrow{\Lambda} (m, \Lambda w; v, \Lambda \zeta)$$

/IV.23/

Naturalne podniesienia wymienionych operacji do rozmaitości P , wyrażają się przez operacje liniowe kontrgradientne do występujących we wzorach /IV.20/-/IV.23/. W jawnej postaci:

$$(m, \dots, {}_r\varphi \dots; p, \dots, {}_r\pi \dots) \xrightarrow{A} (A(m), \dots, L(A) \circ {}_r\varphi \dots; p \circ L(A)^1, \dots, \pi \circ L(A)^{-1} \dots)$$

/IV.24/

$$(m, \dots, {}_r\varphi \dots; p, {}_r\pi \dots) \xrightarrow{L} (m, \dots, L \circ {}_r\varphi \dots; p, \dots, {}_r\pi \circ L^{-1} \dots)$$

/IV.25/

$$(m, \dots, {}_r\varphi \dots; p, \dots, {}_r\pi \dots) \xrightarrow{B} (m, \dots, {}_r\varphi \circ B \dots; p, \dots, {}_r\pi \circ B^{-1} \dots)$$

/IV.26/

$$(m, w; p, \eta) \xrightarrow{\wedge} (m, \wedge w; p, \eta \circ \wedge^{-1}) \quad /IV.27/$$

Wszystkie odwzorowania /IV.24/, /IV.27/ są automatycznie przekształceniami kanonicznymi przestrzeni fazowej (P, \mathcal{Y}) - zachowują one biformę \mathcal{Y} . Co więcej, są to t.zw. rozszerzone przekształcenia punktowe odpowiadające grupom $AfI_k(M)$, $GL_k(V)$, $GL_k(U)$, $id_M \times GL(W_k)$.

Wszystkim przekształceniom infinitesimalnym przestrzeni konfiguracyjnej Q_k , w szczególności przekształceniom /IV.7/-/IV.10/ związanym z wyróżnionymi grupami automorfizmów, odpowiadają jednoznacznie infinitesimalne przekształcenia punktowe w P . Każdemu z pól wektorowych /IV.7/-/IV.10/ można przyporządkować funkcję różniczkowalną na P - generator odpowiedniej grupy jednoparametrowej w P . Jeśli infinitesimalne przekształcenie przestrzeni konfiguracyjnej dane jest przez pole wektorowe:

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial r^i} + \sum_{m=1}^k m \xi^i A_1 \dots A_m \frac{\partial}{\partial m \varphi^i A_1 \dots A_m} \quad /IV.28/$$

to odpowiadający generator $F[X]$ dany jest wzorem $A_1 \leq \dots \leq A_m$ [1][38][40]:

$$F[X] = G^i P_i + \sum_{m=1}^k m G^i A_1 \dots A_m m^P A_1 \dots A_m \quad /IV.29/$$

gdzie $G^i = \xi^i \cdot \alpha^*$, $m G^i A_1 \dots A_m = m \xi^i A_1 \dots A_m \cdot \alpha^*$ zależą tylko od współrzędnych uogólnionych, ale nie od pędów. Oznaczając generatory odpowiadające polom /IV.7/-/IV.10/ odpowiednio przez $M[A]$, $M[a, \alpha]$, $F[\alpha]$, $\mathcal{F}[\beta]$, $G[L]$, mamy zatem:

$$M[a, \alpha] = a^i P_i + \alpha^i_j Q^j P_i + \alpha^i_j \sum_{m=1}^k m Q^j A_1 \dots A_m m^P A_1 \dots A_m \quad /IV.30/$$

$$F[\alpha] = \alpha^i_j \sum_{m=1}^k m Q^j A_1 \dots A_m m^P A_1 \dots A_m \quad /IV.31/$$

$$\mathcal{F}[\xi] = \sum_{m=1}^k \left[\sum_{l=1}^m Q^l A_1 \dots A_{l-1} B A_{l+1} \dots A_m \beta A_l \right]_{m^P}^{A_1 \dots A_m} \quad /IV.32/$$

$$G[L] = L^H W^V \mathcal{P}_r \quad /IV.33/$$

/gdzie $Q^i, P_i, W^r, \mathcal{P}_v$ -afiniczne współrzędne kanoniczne na P , odpowiadające bazom $\{e_i\} \subset V$, $\{\varepsilon_v\} \subset W_k$ / .

Wzory te można łatwo zapisać bez używania współrzędnych:

$$\mathcal{M}[A](m, \dots, \varphi \dots; p, \dots, \pi \dots) = \langle p, A(m) \rangle + \sum_{r=1}^k \text{Tr}(L(A)_r \varphi \circ \pi) \quad /IV.30a/$$

$$\mathcal{M}[a, \alpha](m, \dots, \varphi \dots; p, \dots, \pi \dots) = \langle p, a \rangle + \langle p, \alpha \cdot \vec{om} \rangle + \sum_{r=1}^k \text{Tr}(\alpha \circ_r \varphi \circ_r \pi) \quad /IV.30b/$$

$$F[\alpha](m, \dots, \varphi \dots; p, \dots, \pi \dots) = \sum_{r=1}^k \text{Tr}(\alpha \circ_r \varphi \circ_r \pi) /IV.31a/$$

$$\mathcal{F}[\beta](m, \dots, \varphi \dots; p, \dots, \pi \dots) = \sum_{s=1}^k \text{Tr} \left[\pi \circ_s \varphi \circ \sum_{l=0}^{s-1} \otimes_1 \text{id}_U \otimes \beta \otimes_{n-1} \text{id}_U \right] \quad /IV.32a/$$

$$G[L](m, \varphi; p, \pi) = \langle \pi, L \cdot \varphi \rangle \quad /IV.33a/$$

Przaporządkowanie elementom algebr Liego wspomnianych grup odpowiednich generatorów F , jest oczywiście reprezentacją w algebrę Liego funkcji gładkich, z nawiasem Poissona jako działaniem Liego. W szczególności:

$$\{\mathcal{M}[0, \alpha_1], \mathcal{M}[0, \alpha_2]\} = \mathcal{M}[0, \alpha_1 \circ \alpha_2 - \alpha_2 \circ \alpha_1] /IV.34/$$

$$\{F[\alpha_1], F[\alpha_2]\} = F[\alpha_1 \circ \alpha_2 - \alpha_2 \circ \alpha_1] \quad /IV.35/$$

$$\{F[\beta_1], F[\beta_2]\} = F[\beta_1 \circ \beta_2 - \beta_2 \circ \beta_1] \quad /IV.36/$$

$$\{G[L_1], G[L_2]\} = G[L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1] \quad /IV.37/$$

Nie wypisujemy już nieco bardziej skomplikowanego wzoru dla $M[A] = M[a, \alpha]$. Podobnie, jak w pracach [33] [35] [38], wielkość fizyczną $M[0, \alpha]$ generującą styczną do α grupę jednoparametrową obrotów afinicznych wokół $o \in M$, nazywamy α -tą składową kanonicznego, afinicznego momentu pędu. Jest to moment całkowity, natomiast $F[\alpha]$ jest α -tą składową odpowiedniego momentu wewnętrznego, czyli kanonicznego spinu afinicznego. Spin ten jest po prostu momentem afinicznym ruchu wewnętrznego. Różnica $M[0, \alpha] - F[\alpha] = \alpha^i_j \alpha^j P_1$ jest orbitalnym kanonicznym momentem afinicznym, czyli afinicznym momentem pędu środka masy. $F[\beta]$ jest β -tą składową kanonicznego spinu afinicznego względem współtowarzyszącego układu odniesienia, włożonego w ciało. F, \mathcal{F} związane są ze sobą przekształceniem $\varphi \in W^k(N, M)$ opisującym konfigurację.

Niech $e^i_j \in L(V)$ będzie takim odwzorowaniem, że: $e^i_j \circ e_k = e_j \delta^i_k$, zaś $E^A_B \in L(U)$ - odwzorowaniem o analogicznej własności: $E^A_B \circ E_C = E_B \delta^A_C$. Wtedy, stosujemy skrótowe oznaczenia:

$$M[0, e^i_j] = M^i_j, \quad F[e^i_j] = F^i_j, \quad \mathcal{F}[E^A_B] = \mathcal{F}^A_B \quad /IV.38/$$

Oczywiście:

$$M[0, \alpha] = \alpha^i_j M^j_i, \quad F[\alpha] = \alpha^i_j F^j_i, \quad \mathcal{F}[\beta] = \beta^A_B \mathcal{F}^B_A \quad /IV.39/$$

Gdy $\alpha \in L(V)$ jest g -antysymetryczna, t.zn. spełnia /IV.11/, to $M[0, \alpha]$ generuje jednoparametrową grupę obrotów sztywnych wokół $o \in M$, styczną do α , a tym samym jest α -tą składową kanonicznego momentu pędu. Podobnie, $F[\alpha]$ jest wtedy α -tą składową spinu kanonicznego, t.zn. tej części kanonicznego momentu pędu, która związana jest z wewnętrznymi stopniami

swobody. $\mathcal{M} [0, \alpha] - F[\alpha]$ jest α -tą składową orbitalnego kanonicznego momentu pędu, przyporządkowanego środkowi masy.

Podobnie, gdy $\beta \in L(U)$ jest odwzorowaniem η -antysymetrycznym, to $\mathcal{F}[\beta]$ generuje materialne obroty sztywne i jest β -tą składową spinu kanonicznego względem współtowarzyszącego układu odniesienia.

Posługując się współrzędnymi, możemy rozpiąć pełny układ momentów pędu na częściach g-antysymetrycznych /IV.38/ :

$$2\mathcal{M}^{[ij]} = (\mathcal{M}_{k\ell}^i \delta^{kj} - \mathcal{M}_{k\ell}^j \delta^{ki}) \quad 2F^{[ij]} = (F_{k\ell}^i \delta^{kj} - F_{k\ell}^j \delta^{ki})$$

$$2\mathcal{F}^{[AB]} = (\mathcal{F}_C^A \eta^{CB} - \mathcal{F}_C^B \eta^{CA}) \quad /IV.40/$$

Wszystkie generatory obrotów sztywnych wokół $o \in M$, są kombinacjami liniowymi $\mathcal{M}^{[ij]}$. Gdy $n = \dim N = \dim M = 3$, co odpowiada przypadkowi fizycznemu i bazy $\{e_i\} \subset V$, $\{E_A\} \subset U$ są odpowiednio g- i η -ortonormalne, to zwykle, pseudowektory składowe momentu pędu dane są wzorami:

$$\mathcal{M}_i = \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}^{[jk]}, \quad F_i = \varepsilon_{ijk} F^{[jk]}, \quad \mathcal{F}_A = \varepsilon_{ABC} \mathcal{F}^{[BC]} \quad /IV.41/$$

Wróćmy teraz do lagranżowskiej przestrzeni stanów P_L . Podstawowe dla naszej teorii wielkości fizyczne, mianowicie materialne i fizyczne momenty multipolowe ${}^1\mathcal{M}$, 1K , oraz energia kinetyczna T są funkcjami gładkimi na P_{L_1} . Wygodnie będzie wyrazić je przez współrzędne afiniczne $q^i, m^q A_1 \dots A_m$

$v^i, m^v A_1 \dots A_m$ na P_L :

$$T = \frac{M}{2} \xi_{ij} v^i v^j + \frac{1}{2} \sum_{m,l=1}^k \xi_{ij} m^q A_1 \dots A_m m_{m,l}^j A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l v_{B_1 \dots B_l}^j \quad /IV.42/$$

Pierwszy człon, T_{orb} , jest energią kinetyczną ruchu postępowego, zaś drugi, T_{int} -energiją kinetyczną wewnętrznych stopni swobody.

Podobnie, materialny multipolowy moment pędu:

$${}_1 \mathcal{M}^{A_1 \dots A_l i} = \sum_{j=1}^J A_1 \dots A_l v^j + \sum_{m=1}^k \sum_{l,m} J A_1 \dots A_l B_1 \dots B_m \frac{1}{m} v^{B_1 \dots B_m} \quad /IV.43/$$

rozkłada się na część orbitalną opisującą ruch postępowy:

$${}_1 \mathcal{M}_{orb}^{A_1 \dots A_l i} = \sum_{j=1}^J A_1 \dots A_l v^j \quad /IV.44/$$

i część odpowiedzialną za kinematykę wewnętrznych stopni swobody:

$${}_1 \mathcal{M}_{int}^{A_1 \dots A_l i} = \sum_{m=1}^k \sum_{l,m} J A_1 \dots A_l B_1 \dots B_m \frac{1}{m} v^{B_1 \dots B_m} \quad /IV.45/$$

Wzory te są słuszne dla dowolnego l , ale interesującą interpretację fizyczną posiadają oczywiście tylko przypadki $l \leq k$. Istotnie, jak pamiętamy z poprzedniego rozdziału, prawa bilansu dla ${}_1 \mathcal{M}$, $l \leq k$, nie zależą od sił reakcji więzów i są równoważne równaniom ruchu. Natomiast w przypadku $l > k$, siły reakcji występują explicite w prawach bilansu.

Z tego samego powodu, wśród wszystkich fizycznych multipolowych momentów pędu ${}_1 K$, wyróżnioną rolę odgrywa moment dipolowy ${}_1 K$, czyli kinetyczny afiniczny moment pędu/kinetyczny w odróżnieniu od kanonicznego \mathcal{M} , wprowadzonego powyżej/. Istotnie, gdy $l > 1$, ${}_1 K$ wyraża się liniowo przez momenty materialne ${}_1 \mathcal{M}$ stopnia wyższego niż k , a więc "odczuwające" siły reakcji. Natomiast afiniczny moment pędu wyraża się tylko przez momenty materialne stopni $l \leq k$:

$$K^{ij} = M q^i v^j + \sum_{m=1}^k m q^i A_1 \dots A_m \frac{1}{m} \mathcal{M}_{int}^{A_1 \dots A_m j} \quad /IV.46/$$

Korzystając z /IV.45/ mamy zatem:

$$K^{ij} = M q^i v^j + \sum_{m,l=1}^k m q^i A_1 \dots A_m \sum_{j=1}^J A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l \frac{1}{m} v^{B_1 \dots B_l} \quad /IV.47/$$

W notacji tensorowej:

$$K_o(p, \dots, {}_m \Phi, \dots, {}_r \xi, \dots) = M \vec{op} \otimes \xi + \sum_{m,l=1}^k ({}_m \Phi \otimes {}_l \xi) \cdot \sum_{j=1}^J \quad /IV.47a/$$

gdzie indeks o oznacza, że momenty liczone są względem ustalonego punktu przestrzeni $o \in M$.

Jak widać, kinetyczny afiniczny moment pędu także rozpada się na część orbitalną K_{orb} , zależną od ustalonego punktu $o \in M$ i część wewnętrzna K_{int} , czyli afiniczny spin kinetyczny mierzony względem środka masy ciała:

$$K_{orb}^{ij} = M q^i v^j \quad /IV.48/$$

lub:

$$K_{orb} (p, \dots, \underbrace{\varphi}_{m} \dots; \underbrace{\zeta}_{m}, \dots, \underbrace{\xi}_{m} \dots) = M \vec{op} \otimes \underline{\zeta} \quad /IV.48a/$$

oraz:

$$K_{int}^{ij} = \sum_{m, l=1}^k m^q \underbrace{A_1 \dots A_m}_{m, l} \underbrace{A_m B_1 \dots B_l}_{m, l} v^j \quad /IV.49/$$

lub:

$$K_{int} (p, \dots, \underbrace{\varphi}_{m} \dots; \underbrace{\zeta}_{m}, \dots, \underbrace{\xi}_{m} \dots) = \sum_{m, l=1}^k (\underbrace{\varphi}_{m} \otimes \underbrace{\xi}_{l})_{m, l} \cdot J \quad /IV.49a/$$

Jak pamiętamy, część antysymetryczna tensora K jest zwykłym momentem pędu ciała; antysymetryzacja K_{orb} daje orbitalny moment pędu, zaś K_{int} - spin, czyli moment pędu ruchu wewnętrznego.

Strukturę dynamiczną układu niedyssypatywnego opisuje się przy pomocy funkcji Lagrange'a $L: P_L \rightarrow R$. Ruch układu jest wtedy opisany przez odpowiednie równania Eulera-Lagrange'a; są one przypadkiem szczególnym naszych równań /III.25//III.26/. Przechodząc przy pomocy przekształcenia Legendre'a $\mathcal{L}: P_L \rightarrow P$ do przestrzeni fazowej, możemy opisać dynamikę układu przy pomocy hamiltonowskich równań kanonicznych.

Jak wiadomo, stanowi lagranżowskiemu $(m, \dots, \underbrace{\varphi}_r; \underbrace{\zeta}_r, \dots, \underbrace{\xi}_r \dots)$ przekształcenie Legendre'a przyporządkowuje punkt fazowy

$(\underbrace{m, \dots, \varphi}_r; \underbrace{p, \dots, \pi}_r \dots) \in P$, taki, że:

$$p = D_{\zeta} L(m, \dots, \underbrace{\varphi}_r \dots; \dots, \underbrace{\xi}_r \dots) \quad /IV.50a/$$

$$\overline{\pi} = D_{\xi} L(m, \dots, \underbrace{\varphi}_r \dots; \underbrace{\zeta}_r, \dots, \underbrace{\xi}_{r-1}, \dots, \underbrace{\xi}_{r+1}, \dots) \quad /IV.50b/$$

gdzie $\overline{\pi} \in L(\text{Sym} \otimes U, V)$ jest funkcjonałem utożsamiającym

się kanonicznie z ${}_r\pi \in L(V, \text{Sym} \otimes U)$ według /IV.12/. Szczególnie ważny jest przypadek, gdy \mathcal{L}^r jest dyfeomorfizmem. Wtedy równania Lagrange'a prowadzą wprost do równań kanonicznych Hamiltona. Jeśli natomiast obrazem \mathcal{L} jest właściwa podrozmaitość w P, to trzeba stosować metody uogólnionej mechaniki Diraca [6], t.zn. wziąć pod uwagę istnienie więzów fazowych $\mathcal{L}(P_L) \subset P$ i uzgodnić je z równaniami ruchu. Gdy \mathcal{L} nie jest wzajemnie jednoznaczne, to niesprzeczność równań ruchu nie jest na ogół zagwarantowana. Poniżej będziemy zakładać, że \mathcal{L} jest odwracalne. Możemy wtedy zdefiniować funkcję Hamiltona:

$$H = E \circ \mathcal{L}^{-1}, H: P \rightarrow R \quad /IV.51/$$

gdzie energia $E: P_L \rightarrow R$ dana jest wzorem:

$$E(m, \dots, {}_r\varphi, \zeta, \dots, {}_r\xi, \dots) = \langle p, \zeta \rangle + \sum_{r=1}^k \text{Tr}({}_r\Sigma \circ {}_r\pi) + \quad /IV.52/$$

$$- L(m, \dots, {}_r\varphi, \dots; \zeta, \dots, {}_r\xi, \dots)$$

przy czym ${}_r\pi$ należy podstawić z wzoru /IV.50/.

Znając funkcję H możemy wypisać jawnie hamiltonowskie równania ruchu i badać dynamikę układu metodami mechaniki analitycznej /jak teoria Hamiltona-Jacobiego i.t.p./

Założmy teraz, że w układzie występują wyłącznie siły potencjalne, niezależne od prędkości, a więc, że nie ma np. oddziaływań magnetycznych. Zatem $L=T-V$, gdzie potencjał V nie zależy od prędkości uogólnionych. W notacji wskaźnikowej, wzory /IV.50/ przyjmują teraz postać:

$$p_i = m \varepsilon_{ij} \zeta^j \quad /IV.53a/$$

$${}_m\pi^{A_1 \dots A_m} = \varepsilon_{ij} \sum_{l=1}^k \sum_{m,1}^j A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l \zeta^j B_1 \dots B_l \quad /IV.53b/$$

W rozważanym przypadku \mathcal{L} jest więc dyfeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy układ $J \in \otimes U$ posiada układ odwrotny \tilde{J} , co wszędzie poniżej zakładamy. Zmodyfikowane warunki na układ odwrotny przybierają teraz postać:

$$\sum_{l=1}^k \int_{m,l} A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l \tilde{J}_{1,m} B_1 \dots B_l C_1 \dots C_m = \delta_{C_1}^{A_1} \dots \delta_{C_m}^{A_m} /IV.54a/$$

$$\sum_{l=1}^k \int_{m,l} A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l \tilde{J}_{1,p} B_1 \dots B_l C_1 \dots C_p = 0, \text{ gdy } m \neq p /IV.54b/$$

Jak stąd wynika, wzory odwrotne do /IV.53/, opisujące \mathcal{L}^{-1} , mają postać:

$$\xi^i = \frac{1}{M} g^{ij} p_j /IV.55a/$$

$$m \int_{m,l}^1 A_1 \dots A_m = g^{ij} \sum_{l=1}^k \int_{m,l} \tilde{J}_{m,l} A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l \prod_{j=1}^m B_1 \dots B_l /IV.55b/$$

Pierwszym wnioskiem wynikającym z takiej postaci lagrangianu L i przekształcenia Legendre'a \mathcal{L} , jest następujący wzór na kinetyczny człon hamiltonianu:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2M} g^{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^k \int_{m,l} \tilde{J}_{m,l} A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l m^p A_1 \dots A_m i^p B_1 \dots B_l j g^{ij} /IV.56/$$

W notacji tensorowej:

$$\mathcal{T}(m, \dots, r, \dots, p, \dots, r, \dots) = \frac{1}{2M} \langle p \otimes p, \tilde{g} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^k \int_{m,l} \tilde{J}_{m,l} ({}_m \mathcal{T} \otimes {}_l \mathcal{T}) \cdot \tilde{g} /IV.56a/$$

gdzie $\tilde{g} \in V \otimes V$ - tensor odwrotny do metryki g .

Ponadto okazuje się, że przekształcenie Legendre'a \mathcal{L} utożsamia ze sobą materialne momenty multipolowe pędu $1 \int \mathcal{M}$, $1 \leq k$ z pędami uogólnionymi:

$$1 \int_{int} \mathcal{M} A_1 \dots A_l j \circ \mathcal{L}^{-1} = g^{ji} p^i A_1 \dots A_l /IV.57a/$$

$$1\mathcal{M}^{A_1 \dots A_1^i} \cdot \mathcal{L}^{-1} = g^{ij} \left[\begin{matrix} i \\ M \\ j \end{matrix} A_1 \dots A_1 P_j + 1P A_1 \dots A_1 j \right] /IV.57b/$$

Natomiast wyższe momenty $1\mathcal{M}$, $l > k$ przechodzą pod działaniem \mathcal{L} w bardziej skomplikowane kombinacje pędów uogólnionych $1P$.

Najważniejszą konsekwencją takiej postaci L i \mathcal{L} , usprawiedliwiająca też używaną powyżej nomenklaturę, jest fizyczna tożsamość dwu rodzajów afinicznego / atakże zwykłego, antysymetrycznego/ momentu pędu: kinetycznego K i kanonicznego \mathcal{M} . Dotyczy to także z osobna momentów orbitalnych i spinowych. Odpowiednie wzory przyjmują postać:

$$K^{ij} \circ \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{M}^i_k g^{kj} \quad K_{orb}^{ij} \circ \mathcal{L}^{-1} = Q^i P_k g^{kj} \\ K_{int}^{ij} \circ \mathcal{L}^{-1} = P^i_k g^{kj} \quad /IV.58/$$

Fakt, że \mathcal{L} utożsamia kinetyczne momenty afiniczne z generatorami fizycznej grupy afinicznej, jest jeszcze jednym argumentem za fizycznie wyróżnioną rolą momentu dipolowego $1K$ wśród innych momentów fizycznych $1K$.

Zakładaliśmy powyżej, że L nie zawierało członów typu magnetycznego. Nie ma to jednak istotnego znaczenia, gdyż członki te są liniowe w prędkościach uogólnionych. Jedyna modyfikacja polega więc na tym, że przekształcenie Legendre'a działa wtedy na prędkości uogólnione w sposób afiniczny - do części liniowej względem prędkości, dodaje się stała translacja. Pędy uogólnione ulegają wtedy przecechowaniu o wyraz zależny tylko od współrzędnych uogólnionych i będący odpowiednikiem wektorowego potencjału magnetycznego w mechanice naładowanego punktu materialnego.

W języku geometrii fazowej, szczególnie prosto formułują się mechaniczne twierdzenia Noether. Jeśli mianowicie hamiltonian H jest niezmienniczy względem jednoparametrowej grupy przekształceń generowanej przez pole hamiltonowskie \tilde{dG} /gdzie $\tilde{dG} \lrcorner \mathcal{V} = -dG [1] [15]$ /to wielkość fizyczna G jest stałą

ruchu. Różniczkowym wyrazem tego faktu jest znikanie nawiasu Poissona:

$$\{H, G_i\} = 0 \quad /IV.59/$$

Jeśli np. H jest niezmienniczy względem euklidesowej podgrupy w $AfI_k(M)$ złożonej z obrotów euklidesowych wokół ustalonego punktu $o \in M$, to wszystkie składowe pełnego momentu pędu $M^{[ij]}$ są stałymi ruchu. Jeśli symetria sferyczna właściwa jest także oddziaływaniom wzajemnym wewnętrznym stopni swobody, t. zn. H jest niezmiennicze względem podgrupy ortogonalnej $E(V, g)_k \subset GL_k(V)$ a raczej - względem jej podniesienia kanonicznego do P , to wewnętrzny moment pędu $F^{[ij]}$ i orbitalny moment pędu $Q^{[i] P^j}$ są z osobna stałymi ruchu.

Szczególnie interesujące są grupy symetrii hamiltonianu, będące podgrupami wymienionych na początku tego rozdziału grup transformacji rozmaitości Q_k . Grupy te zdają bowiem sprawę /w sensie Kleinowskim/ z geometrii Q_k , a więc z kinematycznych symetrii stopni swobody. Zaś koincydencja symetrii kinematycznych z dynamicznymi /t. zn. z symetriaми hamiltonianu/ jest przejawem faktu, że - przynajmniej częściowo - struktura oddziaływań występujących w układzie, podporządkowana jest strukturze geometrycznej. Na ogół, oddziaływania fizyczne łamią symetrię kinematyczną; z reguły "najbardziej symetryczny" względem grup kinematycznych jest człon swobodny \mathcal{T} , czyli energia kinetyczna. W naszym wypadku \mathcal{T} jest niezmiennicza względem grupy ruchów sztywnych $E(M, g)_k \subset AfI_k(M)$:

$$\{\mathcal{T}, P_i\} = \{\mathcal{T}, M^{[kl]}\} = 0 \quad /IV.60/$$

i względem grupy sztywnych obrotów wewnętrznych $CGL_k(V)$:

$$\{\mathcal{T}, F^{[kl]}\} = \{\mathcal{T}, Q^{[k] P^l}\} = 0 \quad /IV.61/$$

Warto podkreślić, że nawet wtedy, gdy nie ma oddziaływań, sam człon kinetyczny \mathcal{T} łamie afiryczną symetrię kinematyczną:

$$\{\mathcal{T}, M^{(kl)}\} \neq 0 \quad /IV.62/$$

Powodem jest jawna zależność energii kinetycznej \mathcal{T} od metryki g ; dzięki niej, \mathcal{T} nie może być niezmiennicza względem deformacji fizycznych [33] [35] [38].

Ciekawe, że grupa euklidesowa nie jest największą podgrupą afinicznej kinematycznej grupy symetrii, $AfI(Q_k)$, względem której niezmienniczą jest energia kinetyczna \mathcal{T} . Istotnie, oznaczmy skrótowo konfigurację układu $(m, \dots, r\varphi \dots)$ przez z , a jego układ pędów uogólnionych $(p, \dots, r\pi \dots)$ - przez $y \in \bigoplus_{r=0}^k L(V, \text{Sym} \otimes U)$. Zapiśmy \mathcal{T} w postaci:

$$\mathcal{T}(z, y) = \frac{1}{2} \langle y \otimes y, \tilde{G} \rangle \quad /IV.63/$$

gdzie G - tensor metryczny przestrzeni $\bigoplus_{r=0}^k L(\text{Sym} \otimes U, V) = L(\text{Exp}_k U, V)$, zależny od metryki fizycznej $g \in V^* \otimes V^*$ i od układu momentów bezwładnych $J \in \bigotimes_m U, m=0 \dots 2k$. Największą grupą kinematyczną zachowującą \mathcal{T} jest oczywiście grupa G - euklidesowa, t. zn. $\mathcal{E}(Q_k, G) \subset AfI(Q_k)$.

Wspomniana powyżej grupa euklidesowa generowana przez $\mathcal{M}^{[i,j]}$ jest oczywiście jej podgrupą. $\mathcal{E}(Q_k, G)$ zawiera jednak przekształcenia nie dające się sprowadzić do transformacji w M , lub w N , lecz działające na konfiguracje jako całość. Szczególnie ważna jest podgrupa w $\mathcal{E}(Q_k, G)$ zachowująca osobno metrykę fizyczną g i wewnętrzną G_{int} , t. zn. grupa $\mathcal{E}(M, g) \times E(W_k, G_{int}) \subset AfI M \times GL(W_k)$. Korzystając z rozkładu $Q_k = M \times W_k$ mamy bowiem

$$\mathcal{T}(m, \pi; p, \pi) = \frac{M}{2} \langle p \otimes p, \tilde{g} \rangle + \frac{1}{2} \langle \pi \otimes \pi, \tilde{G}_{int} \rangle \quad /IV.64/$$

Grupa ta zachowuje z osobna translacyjną i wewnętrzną energię kinetyczną. Należą do niej m.in. te przekształcenia grupy materialnej $GL_k(U)$, które zachowują wszystkie tensory bezwładności $J, m=0 \dots 2k$ /nietrywialne przekształcenia liniowe o tej własności nie muszą na ogół istnieć/. Na ogół, oddziaływania /potencjał, lub uogólniony potencjał V / są symetryczne względem jakichś podgrup właściwych wymienionych tu grup symetrii energii kinetycznej. Im mniejsza taka podgrupa, tym bardziej dynamika układu jest niezależna od geometrii stopni swobody.

Szczególnie interesująca fizycznie jest grupa symetrii dynamicznych dla wewnętrznych stopni swobody.

DODATEK I.
KWANTOWANIE TEORII.

W wielu zastosowaniach musimy posługiwać się teorią kwantową. Dotyczy to głównie mikroukładów, takich, jak molekuly. Zwłaszcza zjawiska związane z wewnętrznymi stopniami swobody wymagają podejścia kwantowego, nawet jeśli ruch postępowy układu rządzony jest prawami klasycznymi; jest tak np. w mechanice statystycznej gazów wieloatomowych, a także w teorii kryształów molekularnych.

Ogólna procedura kwantowania układów mechanicznych w dowolnej rozmaitości została podana przez Mackey'a [25]. Tutaj podamy tylko główne idee jej zastosowania do naszego prostego przypadku.

Rozmaitość Q_k , jak każda przestrzeń afiniczna, wyposażona jest w naturalną i jedyną /z dokładnością do stałego czynnika/ miarę Δ_k niezmienniczą względem wszystkich translacji. We współrzędnych afinicznych /a przy tym g-kartezjańskich/ na Q_k :

$$\int f d\Delta_k = \int f dr^1 \wedge \dots \wedge dr^n \wedge d_1 \varphi^1 \wedge \dots \wedge d_k \varphi^n \quad /D1.1/$$

$A_1^{k,n} \dots A_k^{k,n}$

gdzie oczywiście:

$$A_1^{m,i} \leq \dots \leq A_m^{m,i} \text{ przy dowolnych } m, i.$$

Przestrzenią unormowanych funkcji falowych opisujących stany czyste jest w naszym wypadku przestrzeń Hilberta $L^2(Q_k, \Delta_k)$ z iloczynem skalarnym:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \bar{\Psi}_1(z) \Psi_2(z) d\Delta_k(z) \quad /D1.2/$$

Wielkości fizyczne opisujemy przy pomocy operatorów hermitowskich, lub przynajmniej-formalnie samosprzężonych w $L^2(Q_k, \Delta_k)$. Wymienimy kilka szczególnie ważnych.

Położeniowe wielkości fizyczne odpowiadają rzeczywistym, ograniczonym funkcjom mierzalnym na Q_k i polegają na mnożeniu funkcji falowych przez takie funkcje. Operatory współrzędnych afinicznych $\hat{Q}^i, \hat{m}^{Q^i}_{A_1 \dots A_m}$ mnożące funkcje falowe przez nieograniczone funkcje na Rozmaitości $Q_k: r^i, \Phi^i_{A_1 \dots A_m}$ nie są oczywiście hermitowskie /nieograniczonosc/, ale są formalnie samosprężone:

$$\langle \Psi_1 | \hat{Q}^i \Psi_2 \rangle = \langle \hat{Q}^i \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$$

/D1.3/

$$\langle \Psi_1 | \hat{m}^{Q^i}_{A_1 \dots A_m} \Psi_2 \rangle = \langle \hat{m}^{Q^i}_{A_1 \dots A_m} \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$$

dla dowolnych $\Psi_1, \Psi_2 \in C_0^\infty(Q_k)$.

Wewnętrzne pędy uogólnione opisane są przez operatory:

$$\hat{m}^P_{A_1 \dots A_m} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \Phi^i_{A_1 \dots A_m}} = \hat{m}^{A_1 \dots A_m j} \varepsilon_{ji} \quad /D1.4/$$

$$A_1 \leq \dots \leq A_m$$

i oczywiście:

$$\hat{\pi}^P_{A_1 \dots A_m} = \hat{m}^P_{A_1 \dots A_m} \quad A_1 \leq \dots \leq A_m$$

dla dowolnej permutacji π .

Pędom orbitalnym odpowiadają operatory:

$$P_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r^i} \quad /D1.5/$$

Nieograniczone operatory pędu, określone tylko na podprzestrzeni $C^1(Q_k) \cap L^2(Q_k, \Delta_k)$ także są formalnie samosprężone:

$$\langle \Psi_1 | \hat{P}_i \Psi_2 \rangle = \langle \hat{P}_i \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$$

$$\langle \Psi_1 | \hat{m}^P_{A_1 \dots A_m} \Psi_2 \rangle = \langle \hat{m}^P_{A_1 \dots A_m} \Psi_1 | \Psi_2 \rangle \quad /D1.6/$$

dla dowolnych $\Psi_1, \Psi_2 \in C_0^\infty(Q_k)$.

Wiąże to się z tym, że dla dowolnego $(a, \xi) \in Q_k = M \times W_k$, translacja $U(a, w)$ zdefiniowana wzorem:

$$(U(a, \xi)\Psi)(m, w) = \Psi(t_a(m), w - \xi) \quad /D1.7/$$

jest operatorem unitarnym w $L^2(Q_k, \Delta_k)$. Zaś operatory \hat{P}_i , $\hat{A}_1 \dots \hat{A}_m$ są infinitesimalnymi generatorami unitarnej grupy translacji /D1.7/.

Ponieważ we wzorze /IV.56/ na kinetyczny człon hamiltonianu występują tylko pędy uogólnione, więc nie ma znanych kłopotów z porządkiem operatorów nieprzemiennej. Zatem, zgodnie z ogólnymi zasadami [25] operator energii kinetycznej zastępujący klasyczne wyrażenie /IV.56/, ma postać:

$$\hat{T} = \frac{1}{2M} g^{ij} \hat{P}_i \hat{P}_j + \quad /D1.8/$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \tilde{J}_{m,l}^{A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l} g^{ij}$$

Inaczej:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2M} g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial r^i \partial r^j} + \quad /D1.8a/$$

$$- \frac{\hbar^2}{2} \sum_{m,l=1}^k \tilde{J}_{m,l}^{A_1 \dots A_m B_1 \dots B_l} \delta(A_1 \dots A_m) \delta(B_1 \dots B_l) g^{ij} \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial_m \varphi^i_{A_1 \dots A_m} \partial_l \varphi^j_{B_1 \dots B_l}} ; \quad A_1 \leq \dots \leq A_m$$

$$B_1 \leq \dots \leq B_l$$

gdzie $\delta(A_1 \dots A_m)$ jest liczbą istotnie różnych permutacji układu $A_1 \dots A_m$ /gdy $A_1 < \dots < A_m$, to $\delta(A_1 \dots A_m) = m!$ /.

Gdy w układzie występują tylko niezależne od prędkości oddziaływania potencjalne o klasycznym potencjale V , to operator Hamiltona dany jest przez:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} \quad /D1.9/$$

gdzie \hat{V} -operator potencjału, mnożący funkcje falowe przez V .

Dopuszczalne wartości energii E układu są elementami widma operatora \hat{H} . W szczególności, stanom związanym odpowiadają wartości własne:

$$\hat{H} \Psi_E = E \Psi_E$$

Gdy w układzie występuje pole magnetyczne, to H modyfikuje się w ten sposób, że operatory pędu, $\hat{P}_i, m \hat{P}_i^{A^1 \dots A_m}$ ulegają przecechowaniu o wyraz $A_{i m}^{A^1 \dots A_m}$, niezależny od pędów uogólnionych.

Na zakończenie wspomnijmy o symetriach kinematycznych układu. Jeśli $S \in \text{AfI}(Q_k)$, to odpowiadające mu działanie $U[S]$ w przestrzeni funkcji falowych, definiujemy wzorem:

$$(U[S]\Psi)(z) = \text{Det } L(S)^{-1/2} \Psi(S^{-1}(z)) \quad /D1.10/$$

Przyporządkowanie: $S \mapsto U[S]$ jest reprezentacją liniową grupy kinematycznej w $L^2(Q_k, \Delta_k)$.

Dla dowolnego S , $U[S]$ jest unitarne w $L^2(Q_k, \Delta_k)$:

$$\langle U[S]\Psi_1, U[S]\Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle \quad /D1.11/$$

dla dowolnych $\Psi_1, \Psi_2 \in L^2(Q_k, \Delta_k)$. Zawdzięczamy to wyrazowi z pierwiastkiem wyznacznika części liniowej $L(S)$; samo przekształcenie afiniczne argumentu funkcji falowej nie wystarcza, bo na ogół S nie zachowuje miary.

Wzór /D1.10/ stosuje się w szczególności do działania grupy $\text{AfI}_k(M)$ zdefiniowanego w /IV.3/. Gdy $A \in \text{AfI}(M)$, to z D1.10 wynika, że odpowiednia operacja unitarna $U_A = U[A_k]$, działa, jak następuje:

$$(U_A \Psi)(m; \dots_r \varphi \dots) = \det L(A)^{-\frac{t+1}{2}} \Psi(A^{-1}(m), \dots_r L(A)^{-1}_r \varphi \dots) \quad /D1.12/$$

gdzie:

$$t = \frac{\dim M \wedge k}{\dim M} \quad /D1.12a/$$

Zauważmy, że dla podgrupy ruchów sztywnych, $\mathcal{E}(M, g)$, /D1.12/ sprowadza się do działania na argumenty, gdyż wtedy $\det L(A)=1$.

Niech $\Sigma \in \text{Af}(Q_k, V \times \mathcal{M}_k)$ reprezentuje jakiś element algebry Liego grupy $\text{AfI}(Q_k)$, zaś $X[\Sigma]$ niech będzie polem wektorowym generującym jednoparametrową grupę w $\text{AfI } Q_k$, styczną

styczną do Σ . Klasycznemu generatorowi $F[\Sigma]$ odpowiedniej 1-parametrowej grupy przekształceń kanonicznych w P, na poziomie kwantowym odpowiada operator $\hat{F}[\Sigma]$ dany wzorem:

$$\hat{F}[\Sigma]\Psi = \frac{\hbar}{i} X[\Sigma]\Psi + \frac{\hbar}{2i} \text{Tr} L[\Sigma] \Psi \quad /D1.13/$$

Wynika to z /D1.10/ 25. Człon nieróżniczkowy $\frac{\hbar}{2i} \text{Tr} L[\Sigma]$ zapewnia, że $\hat{F}[\Sigma]$ jest operatorem formalnie samosprzężonym.

W szczególności, mamy następujące kwantowe odpowiedniki /IV.38/ -operatory afinicznego momentu pędu:

$$\hat{M}^i_j = \hat{Q}^i \hat{P}_j + \sum_{m=1}^k m \hat{Q}^i_{A_1 \dots A_m} m \hat{P}^{A_1 \dots A_m}_j + \frac{\hbar}{2i} (t+1) \delta^i_j \quad /D1.14/$$

W szczególności, dla zwykłych momentów pędu: całkowitego, orbitalnego i spinowego, mamy operatory:

$$\hat{J}^i_j = \hat{Q}^i \hat{P}_j - \hat{Q}^j \hat{P}^i + 2 \sum_{m=1}^k m \hat{Q}^i_{A_1 \dots A_m} g^{jk} m \hat{P}^{A_1 \dots A_m}_k \quad /D1.15a/$$

$$\hat{L}^i_j = \hat{Q}^i \hat{P}_j - \hat{Q}^j \hat{P}^i \quad /D1.15b/$$

$$\hat{S}^i_j = 2 \sum_{m=1}^k m \hat{Q}^i_{A_1 \dots A_m} g^{jk} m \hat{P}^{A_1 \dots A_m}_k \quad /D1.15c/$$

Na poziomie kwantowym pozostaje w mocy wszystko, co było powiedziane w poprzednim rozdziale na temat symetrii dynamicznych. Należy tylko pamiętać, że w teorii kwantowej rolę nawiasu Poissona pełni komutator operatorów, podzielony przez \hbar .

DODATEK 2.
OŚRODEK CIĄGŁY.

Ogólność dotychczasowych rozważań umożliwia zastosowania do opisu dowolnych ciał, niezależnie od ich wielkości i modelu /ciała makroskopowe i mikroskopowe, ośrodek ciągły i skończony układ punktów materialnych/. Zajmijmy się teraz ośrodkiem ciągłym. Pokażemy, w jaki sposób typowe pojęcia teorii kontinuum, np. tensor naprężenia, wiążą się z pojęciami i metodami teorii wielomianowej.

Wszędzie poniżej, w roli współrzędnych w przestrzeni materialnej N i fizycznej M , używamy odpowiednich współrzędnych afinicznych. Niech $X^A: N \rightarrow R$, $x^i: M \rightarrow R$ będą takimi współrzędnymi, zaś T^{Ai} - odpowiednimi składowymi tensora Kirchhoffa $T: N \rightarrow U \otimes V$. / U, V , jak zwykle oznaczają przestrzenie translacji odpowiednio w N, M /.

Gdy nie ma zewnętrznych sił objętościowych, materialny moment siłowy \mathcal{M}_m wyraża się wzorem:

$$\mathcal{M}_m^{A_1 \dots A_m i} = \int_N X^{A_1} \dots X^{A_m} T^{Ai},_A \quad /D2.1/$$

Dokonajmy prostego przekształcenia:

$$\mathcal{M}_m^{A_1 \dots A_m i} = \int_N \left(X^{A_1} \dots X^{A_m} T^{Ai} \right),_A + \\ - \sum_{p=1}^m \int_N X^{A_1} \dots X^{A_{p-1}} X^{A_{p+1}} \dots X^{A_m} T^{A_p i}$$

Twierdzenie Gaussa pozwala zastąpić pierwszą całkę przez całkę powierzchniową po nieskończonej odległej powierzchni; w fizycznym przypadku ciała o skończonych rozmiarach będzie ona znikająca. Zatem, \mathcal{M}_m wyraża się liniowo przez momenty multipolowe stopnia $m-1$ z tensora Kirchhoffa:

$$\mathcal{M}_m^{A_1 \dots A_m i} = - \sum_{p=1}^{m-1} \int_N X^{A_1} \dots X^{A_{p-1}} T^{A_p i} X^{A_{p+1}} \dots X^{A_m} /D2.2/$$

Niech σ^{ij} będą składowymi tensora naprężenia Cauchy'ego $\sigma: M \rightarrow V \otimes V$ względem zmiennych x^i . Analogicznie do D2.2, aktualny /fizyczny/ moment siłowy wyraża się wzorem:

$$N_m^{i_1 \dots i_m j} = - \sum_{p=1}^m \int_M x^{i_1} \dots x^{i_{p-1}} \sigma^{i_p j} x^{i_{p+1}} \dots x^{i_m} \quad /D2.3/$$

Jak więc widać, pochodne tensora naprężenia nie ingerują w prawach bilansu dla multipolowych /wielomianowych/ momentów pędu.

Szczególnie prostą postać mają momenty dwu najniższych stopni:

$$\mathcal{M}_0 = 0 \quad N_0 = 0 \quad , \quad /D2.4/$$

co wyraża zasadę zachowania pędu /suma sił wewnętrznych znika/, oraz:

$$\mathcal{M}_1^{Ai} = - \int_N T^{Ai} \quad N_1^{ij} = - \int_M \sigma^{ij} \quad /D2.5/$$

Dipolowe momenty siłowe określające bilans spinu afinicznego są więc po prostu średnimi wartościami odpowiednich tensorów naprężenia. Oczywiście $N_1^{[ij]} = 0$, co prowadzi do prawa zachowania pełnego momentu pędu dla ciała niepolarnego, wolnego od wpływów zewnętrznych. Wzory /D2.5/ są ważne ze względu na zastosowania w wyjątkowo interesującym przypadku szczególnym, jakim jest ciało afinicznie sztywne /wielomiany 1-go stopnia/.

Zależność tensorów naprężenia T^{Ai} , σ^{ij} od zmiennych deformacyjnych i ewentualnie od parametrów termodynamicznych, dana jest przez związki konstytutywne. Podstawiając tę zależność do /D2.2/ i /D2.3/, oraz korzystając z jawnej postaci więzów wielomianowych, możemy zasadniczo wyrazić \mathcal{M}_m, N_m

przez parametry Φ_p, ξ_p /współczynniki wielomianowe i ich prędkości/. Ze względu na to, że T^{Ai} , σ^{ij} zależą od konfiguracji przez pochodne przestrzenne odwzorowania zanurzającego $\Phi: N \rightarrow M$, mamy tu: $p=1 \dots k$. \mathcal{M}_m, N_m zależą tylko od obiektów tensorowych $\Phi_p, \xi_p, p=1 \dots k$; nie ma natomiast zależności

od parametrów φ_0, ξ_0 , zależnych od wyboru początku układu odniesienia.

Na zastosowania teorii wielomianowej można liczyć głównie w przypadku ciał sprężystych z tarciem wewnętrznym /i zewnętrznym/. Dla ustalenia uwagi będziemy więc zakładali, że naprężenie zależy od pola lokalnej deformacji /gradientu zanurzenia $\varphi : N \rightarrow M$ / , jego prędkości i temperatury - wszystkie zmiennebrane są w tej samej chwili czasu i w tym samym punkcie ciała. Materiał, choć lepki jest więc pozbawiony pamięci i lokalny. Niech T^{AB} będą materialnymi składowymi tensora Kirchhoffa:

$$T^{Ai} = T^{AB} \varphi^i_{,B} \quad /D2.6/$$

gdzie $\varphi : N \rightarrow M$ - odwzorowanie zanurzające opisujące konfigurację. Deformacyjny tensor Greena oznaczamy symbolem G:

$$G_{AB} = \varepsilon_{ij} \varphi^i_{,A} \varphi^j_{,B} \quad /D2.7/$$

Jego pochodna czasowa opisuje prędkość deformacji w reprezentacji materialnej :

$$\frac{d}{dt} G_{AB} = 2 d_{ij} \varphi^i_{,A} \varphi^j_{,B} = 2d_{AB} \quad /D2.8/$$

Gdy nie ma oddziaływań zewnętrznych /przestrzeń fizyczna M-dynamicznie izotropowa/, założenia nasze oznaczają, że T^{AB} jest algebraiczną funkcją od tensorów materialnych, takich, jak G_{AB} , d_{AB} i temperatury absolutnej T, branych w tym samym punkcie przestrzeni materialnej. Przyjmijmy dla przykładu najprostszy model:

$$T^{AB} = T^{AB}(G_{AB}, d_{AB}, T) \quad /D2.9/$$

W teorii czysto mechanicznej temperatura T nie ingeruje jako zmienna dynamiczna; tensory deformacji T^{Ai} , \mathcal{G}^{ij} , a tym samym momenty N_m , \mathcal{C}_m zależą tylko od konfiguracji $\varphi : N \rightarrow M$ i prędkości $\xi : N \rightarrow V$. Ewolucję układu opisują równania III.7, ewentualnie /III.25/-/III.26/. Z reguły jednak, procesom deformacyjnym w ośrodku ciągłym towarzyszą zjawiska termiczne

i tensory $T^{AB}, T^{Ai}, \sigma^{ij}, \mathcal{K}_m^{A_1 \dots A_m i}, N_m^{i_1 \dots i_m j}$ w nietrywialny sposób zależą od temperatury. Mechaniczny układ równań /III.7/ przestaje być wtedy zamknięty i winien być uzupełniony jednym równaniem skalarnym opisującym dynamikę zjawisk termicznych. Jest nim równanie bilansu energii:

$$\frac{D}{Dt} u = \frac{1}{2\rho_0} T^{AB} \frac{D}{Dt} G_{AB} + q = \frac{1}{\rho_0} T^{AB} d_{AB} + q \quad /D2.10/$$

gdzie u - energia wewnętrzna na jednostkę masy, ρ_0 - gęstość masy w konfiguracji odniesienia, q - wydzielane ciepło na jednostkę masy, zaś $\frac{D}{Dt}$ - pochodna materialna.

Zależność u, q od zmiennych mechanicznych i termicznych określona jest przez związki konstytutywne.

W interesującym nas przypadku /ciało sprężyste z tarcie wewnętrznym/ sensownie jest założyć, że T^{AB} rozбивa się na część sprężystą i dyssypatywną:

$$T^{AB}(G, \dot{G}, T) = T_{el}^{AB}(G, T) + T_{dys}^{AB}(G, \dot{G}, T) \quad /D2.11/$$

gdzie część dyssypatywna znika dla ciała spoczywającego:

$$T_{dys}^{AB}(G, 0, T) = 0 \quad /D2.12/$$

Określenie to jest na tyle nieścisłe, że siły typu magnetycznego także zależą od prędkości, ale jak wiadomo nie wnoszą one wkładu do bilansu energii /D2.10/. Wzór /D2.12/ sugeruje użycie przedstawienia:

$$T_{dys}^{AB} = \frac{1}{2} \mathcal{V}^{ABCD}(G, \dot{G}, T) \dot{G}_{CD} \quad /D2.13/$$

gdzie tensor \mathcal{V}^{ABCD} opisujący lepkie własności ciała, jest gładką funkcją swych argumentów. W zagadnieniach dotyczących procesów dostatecznie powolnych, można założyć, że \mathcal{V} nie zależy od \dot{G} - siły tarcia wewnętrznego są liniowe w prędkościach. W infinitezymalnej teorii liniowej zawsze przyjmuje się to założenie.

Zgodnie z II zasadą termodynamiki:

$$\frac{1}{2S_0} T_{dys}^{AB} \dot{G}_{AB} + q = T \frac{DS}{Dt} \quad /D2.14/$$

Wynika stąd w szczególności, że energia wewnętrzna u jest niezależna od prędkości. Korzystając z II zasady termodynamiki, można też pokazać, że:

$$2S_0 \frac{\partial u}{\partial G_{AB}} = -T \frac{\partial T_{el}^{AB}}{\partial T} + T_{el}^{AB} \quad /D2.15/$$

Ciepło właściwe w warunkach stałego odkształcenia oznaczamy symbolem:

$$C_G = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_G \quad /D2.16/$$

Zasadę zachowania energii można więc w następujący sposób zapisać przy użyciu obiektów geometrycznych łatwych do wyznaczenia doświadczalnego:

$$C_E \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{S_0} T \frac{\partial T_{el}^{AB}}{\partial T} \frac{DE_{AB}}{Dt} - \frac{1}{S_0} T_{dys}^{AB} \frac{DE_{AB}}{Dt} = q \quad /D2.17/$$

gdzie E_{AB} -lagranżowski tensor deformacji:

$$2E_{AB} = G_{AB} - \eta_{AB} \quad /D2.18/$$

i odpowiednio symbol C_G został zastąpiony przez C_E .

Posługujemy się tu lagranżowskim polem temperatury $T: N \rightarrow R$ /wartości temperatury przyporządkowane elementom ciała, nie zaś miejscom w przestrzeni./

Będziemy dalej zakładali, że $q = h^A_{,A}$, gdzie $h: N \rightarrow U$ -lagranżowskie pole strumienia ciepła / $h^i = h^A \Phi^i_{,A} \det \|\Phi^i_{,A}\|$ /. Pomijamy w ten sposób przekaz ciepła na drodze promieniowania. W szczególności, pomija się promieniowanie cieplne brzegu ciała, lub absorpcję promieniowania docierającego do brzegu z zewnątrz. Jest to uzasadnione w zwykłych, makroskopowych zastosowaniach teorii sprężystości, przy słabym efekcie termicznym. W wielu zagadnieniach można przyjąć następującą, Fourierską postać wektora strumienia ciepła [44] :

$$h^A = \mathcal{L}^{AB} T_{,B} \quad /D2.19/$$

W przypadku izotropowym $\mathcal{L}^{AB} = \eta^{AB}$.

Równanie /D2.17/, jako prawo bilansu energii, zachowuje swą ważność w teorii wielomianowej; należy tylko wyrazić w nim tensor E_{AB} przez obiekty tensorowe ${}^m\Phi$, $m=1\dots k$, opisujące deformację ${}^0\Phi$ nie ingeruje w /D2.17/ /:

$$G_{AB} = \varepsilon_{ij} \sum_{m,l=1}^k {}^m\Phi^i A_{A_1} \dots A_{m-1} {}^l\Phi^j B_{B_1} \dots B_{l-1} X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} X^{B_1} \dots X^{B_{l-1}} \quad /D2.20/$$

$$d_{AB} = \frac{DE_{AB}}{Dt} = \frac{1}{2} \frac{DG_{AB}}{Dt} = \quad /D2.21/$$

$$= \varepsilon_{ij} \sum_{m,l=1}^k {}^m\Phi^i A_{A_1} \dots A_{m-1} (A^l \Phi^j) B_{B_1} \dots B_{l-1} X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} X^{B_1} \dots X^{B_{l-1}}$$

Po tym podstawieniu, równania /III.7/ /lub /III.25/-/III.26// i /D2.17/ tworzą zamknięty układ równań, w którym zmiennymi dynamicznymi są ${}^m\Phi$ oraz pole temperatury T. Jest to w ogólnym przypadku skomplikowany układ równań różniczkowo-całkowych, gdyż pole temperatury T ingeruje w równaniach mechanicznych w sposób nielokalny, poprzez całkę /D2.2//jak pamiętamy, T^{Ai} w ogólnym przypadku zależy od temperatury/. W ogólnym przypadku, równania termosprężystości dla ciała deformowalnego wielomianowo, są więc raczej nieefektywne w użyciu. Można je rozwiązywać przy pomocy metod perturbacyjnych. Sytuacja upraszcza się jednak znacznie w pewnych praktycznie ważnych przypadkach szczególnych, gdy efekt termiczny jest względnie słaby, np. w teorii liniowej. Wróćmy do tej sprawy w następnym dodatku.

Jak już wielokrotnie wspominaliśmy powyżej, szczególną rolę odgrywa w teorii i zastosowaniach, przypadek deformacji wielomianowych stopnia 1, czyli jednorodnych [32][33][35][38]. Mam tu na myśli zarówno zastosowania w teorii mikromorficznej

jak i w dynamice inkluzji. Model ciała afinicznie sztywnego jest także często stosowany w zagadnieniach geofizycznych i astrofizycznych [5]. W związku z tym, należy wyjaśnić pewne obiegowe nieporozumienia. Często twierdzi się mianowicie, że każda konfiguracja jednorodnego, lokalnego ośrodka ciągłego deformowalnego jednorodnie, jest konfiguracją równowagową [7] [13] [17] i wszystkie możliwe ruchy deformacyjne mają znikające przyspieszenie:

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi^i_A = 0, \text{ t. zn. } \varphi^i_A = a^i_A t + b^i_A \quad /D2.22/$$

Ma to pochodzić stąd, że tensor deformacji jest wtedy stały /niezależny od punktu w ciele, lub w przestrzeni fizycznej/, w związku z czym, na mocy jednorodności ciała, tensor naprężenia jest także stały w ciele /lub w przestrzeni fizycznej/. Jego dywergencja znika więc tożsamościowo i punkty materialne ciała nie są poddane działaniu żadnych sił. Rozumowanie to jest całkowicie błędne, gdyż nie bierze pod uwagę skończonych rozmiarów ciała, a tym samym - niejednorodności związanej z istnieniem brzegu. Jeśli przyjąć rozmyty model brzegu, o szybko zanikającej gęstości, ciało przestanie być jednorodne i cała powyższa argumentacja traci rację bytu. Przy skokowym, nieciągłym modelu brzegu, dywergencja tensora naprężenia będzie δ -wata dystrybucją skupioną na brzegu; dystrybucja ta jest po prostu objętościowym opisem napięć powierzchniowych działających na brzeg ciała. Jak więc widać, ciało deformowalne jednorodnie i zbudowane z jednorodnego materiału nie jest wolne od działania sił sprężystych. Równanie /D2.22/ jest wtedy fałszywe, co widać choćby ze wzoru /D2.5/. Istotnie, na mocy /III.26/ oraz /D2.5/ mamy wtedy:

$$\varphi^i_A \frac{d^2}{dt^2} \varphi^j_B J^{AB} = N^{ij} = - \int_M \sigma^{ij} \quad /D2.23/$$

Jak widać, prawa strona opisująca strukturę dynamiczną zagadnienia, wyraża się przez średnią wartość tensora naprężenia i na ogół jest różna od zera, nawet wtedy, gdy tensor σ

jest stały w ciele.

W zastosowaniach praktycznych wygodnie jest posługiwać się macierzową postacią /D2.23/. Kładąc mianowicie $N=M=U=V=R^N$ /przez ustalenie kartezyjskich układów współrzędnych/, mamy mianowicie:

$$\Phi J \ddot{\Phi}^T = N \quad /D2.24/$$

lub, odpowiednio:

$$\ddot{\Phi} J \Phi^T = N^T \quad /D2.24a/$$

Energia kinetyczna i kinetyczny spin afiniczny wyrażają się wtedy następująco:

$$T = \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\Phi} J \dot{\Phi}^T), \quad K = \Phi J \dot{\Phi}^T \quad /D2.25/$$

Spin kinetyczny wyraża się przez część antysymetryczną K:

$$S = \Phi J \dot{\Phi}^T - \dot{\Phi} J \Phi^T = K - K^T \quad /D2.26/$$

Deformacyjnym tensorom Greena i Cauchy'ego odpowiadają macierze:

$$G = \Phi^T \Phi, \quad C = \Phi^{-1T} \Phi^{-1}, \quad G^{-1} = \Phi^{-1} \Phi^{-1T}, \quad C^{-1} = \Phi \Phi^T /D2.27/$$

Gdy narzucimy ciału więzy nieściśliwości / $\det \Phi = 1$ /, równania ruchu przyjmują postać:

$$\Phi J \ddot{\Phi}^T - \frac{1}{n} \text{Tr}(\Phi J \ddot{\Phi}^T) I = N - \frac{1}{n} \text{Tr} N I \quad /D2.28/$$

Gdy zachowanie deformacyjne ciała ograniczone jest do dylatacji: $\Phi^T \Phi = \lambda^2 I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, to równania ruchu sprowadzają się do:

$$\Phi J \ddot{\Phi}^T - \ddot{\Phi} J \Phi^T = N - N^T \quad /D2.29/$$

$$\text{Tr}(\Phi J \ddot{\Phi}^T) = \text{Tr} N$$

Wygodnie jest korzystać z rozkładów biegunowych:

$$\Phi = \Lambda R = RL, \quad \Lambda = RLR^T \quad /D2.30/$$

gdzie macierze Λ , L są symetryczne, zaś R -ortogonalna. W pewnym sensie pozwala to na wyodrębnienie deformacyjnych i obrotowych stopni swobody. Macierze deformacyjne wyrażają się wtedy jak następuje:

$$G = L^2, \quad C = \Lambda^{-2} \quad /D2.31/$$

Wprowadźmy współtowarzyszącą prędkość kątową ${}_{\circ}\omega$ odpowiadającą części R :

$${}_{\circ}\omega = R^{-1} \dot{R} = R^T \dot{R} ; \quad {}_{\circ}\omega^T = - {}_{\circ}\omega \quad /D2.32/$$

Rozbijając równania ruchu /D2.24/ na część antysymetryczną i symetryczną i korzystając z /D2.30/, mamy:

$$LJL_{\circ}\omega^2 - {}_{\circ}\omega^2 LJL - LJL_{\circ}\dot{\omega} - {}_{\circ}\dot{\omega} LJL - 2LJL_{\circ}\omega - 2{}_{\circ}\omega LJL + LJL\ddot{L} - \ddot{L}JL = R^T(N - N^T)R \quad /D2.33a/$$

$$LJL_{\circ}\omega^2 + {}_{\circ}\omega^2 LJL - LJL_{\circ}\dot{\omega} + {}_{\circ}\dot{\omega} LJL - 2LJL_{\circ}\omega + 2{}_{\circ}\omega LJL + LJL\ddot{L} + \ddot{L}JL = R^T(N + N^T)R \quad /D2.33b/$$

Gdy ciało jest ciągłym ośrodkiem sprężystym, nie poddanymy wpływowi zewnętrznemu, to prawa strona /D2.33a/ znika, zaś prawa strona /D2.33b/ nie zależy od R. Formalnie /D2.33/ opisują wtedy ciało sztywne o momencie bezwładności LJL /zmiennym, bo L jest zmienne/, oddziałujące z $\frac{n(n+1)}{2}$ deformacyjno-oscylacyjnymi stopniami swobody.

W ogólnym przypadku, rozwiązanie równań ruchu /D2.33/ nastroićza poważnych trudności. Można jednak nabrać pewnego, jakościowego wyobrażenia o ruchu, znajdując specjalną rodzinę trajektorii, cechującą się warunkami: ${}_{\circ}\omega = \text{const}, L = \text{const}$, lub: ${}_{\circ}\omega = \text{const}, D = \text{const}$, gdzie D jest diagonalną postacią macierzy $L / L = ODO^{-1}$, gdzie O-ortogonalna, D-diagonalna/. Następnie, można zbadać liniowe zagadnienie małych drgań wokół tego typu trajektorii. Metody takie mogą być szczególnie przydatne w geofizyce i astrofizyce, a także w dynamice inkluzji i zawieszin. Wyznaczenie szczególnej rodziny trajektorii, o której mowa powyżej, sprowadza się formalnie do odpowiedniego zagadnienia z dynamiki bryły sztywnej i do rozwiązania układu równań algebraicznych.

DODATEK 3.

METODY INFINITEZYMALNE. ZAGADNIENIA LINEARYZACJI.

Przybliżeniem liniowym można posługiwać się zarówno na poziomie klasycznym, jak i kwantowym. Poniżej interesuje nas tylko przypadek klasyczny. Linearyzacja umożliwia znalezienie jawnej postaci rozwiązań równań ruchu w przybliżeniu małych drgań. Rozwiązania te wyrażają się przez stałe materiałowe, znane z doświadczenia lub z teorii statystycznych.

Całkowita linearyzacja zagadnienia polega na tym, że wszystkie ruchy mechaniczne i efekty termiczne zachodzące w ciele traktuje się jako małe i pomija w równaniach wyrazy wyższego stopnia. Znajduje się w ten sposób układ równań liniowych dla wielomianowej termosprężystości. W praktyce często stosuje się także metody częściowej linearyzacji, gdy tylko o niektórych parametrach zakłada się, że ulegają one małym zmianom. Pełny układ równań nie jest wtedy liniowy, tylko niektóre zależności linearyzują się. Ważny przykład praktyczny: można rozpatrywać sytuacje, gdy ciało wykonuje ruchy skończone w deformacjach wielomianowych, natomiast towarzyszące im efekty termiczne są słabe /linearyzacja temperaturowa/. Jest to o tyle ważne, że przy pewnych dodatkowych założeniach, można wtedy układ równań III.7 - D2.17 zastąpić układem równań różniczkowych zwyczajnych, co umożliwia efektywne rozwiązywanie zagadnień dynamicznych liniowej termosprężystości. Także jeśli chodzi o czysto mechaniczne stopnie swobody, możliwe są różne typy linearyzacji cząstkowej, istotne w pewnych zagadnieniach praktycznych. Najbardziej typowe przykłady: /i/ małe drgania wielomianowe nałożone na skończony ruch afinicznie sztywny /t.zn. w deformacjach jednorodnych/, /ii/ małe drgania wielomianowe nałożone na skończony ruch sztywny /żyroskopowy/. Przybliżenia tego typu mogą być użyteczne w teorii dużych cząsteczek, lub inkluzji i zawieszin. Prace Chandrasekhara sugerują także zastosowania geofizyczne i astrofizyczne.

Dla przykładu omówmy krótko przypadek całkowitej linearyzacji zagadnienia termosprężystego. Mamy wtedy:

$$T_{el}^{AB} = c^{ABCD} E_{CD} + \lambda^{AB} (T - T_0) \quad /D3.1/$$

gdzie c^{ABCD} - stały tensor sprężysty /materiałny/, λ^{AB} - symetryczny tensor odpowiedzialny za naprężenia termiczne, zaś T_0 - stała temperatura odniesienia. Podobnie, kładziemy:

$$T_{dys}^{AB} = \gamma^{ABCD} d_{CD} = \gamma^{ABCD} \dot{E}_{CD} \quad /D3.2/$$

gdzie γ^{ABCD} - stały tensor lepkości.

W przybliżeniu liniowym zakłada się oczywiście, że ciepło właściwe C_E jest stałą. Założenie małości deformacji należy także wprowadzić do parametrów tensorowych ${}_m\Phi$, $m=1\dots k$. Dla $m > 1$ oznacza ono, że ${}_m\Phi$, ${}_m\Xi$ są także małe. Natomiast wyraz afiniczny ${}_1\Phi$ mało różni się od pewnego standardowego $\Phi \in L(U, V)$, opisującego konfigurację odniesienia. Oczywiście, ${}_1\Xi$ też jest małe. Zatem, w przybliżeniu liniowym:

$$G_{AB} = 2g_{1j} \sum_{m=1}^k {}_m\Phi^i_{A_1\dots A_{m-1}} (A \Phi^j_B) X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} \quad /D3.3/$$

$$d_{AB} = \frac{1}{2} \dot{G}_{AB} = \dot{E}_{AB} = \varepsilon_{1j} \sum_{m=1}^k {}_m\Xi^i_{A_1\dots A_{m-1}} (A \Phi^j_B) X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} \quad /D3.4/$$

$$\text{Oraz : } T^{Ai} = T^{AB} \Phi^i_B \quad /D3.5/$$

W szczególności:

$$T_{el}^{Ai} = \Phi^i_B c^{ABCD} \left(\varepsilon_{1j} \sum_{m=1}^k {}_m\Phi^l_{A_1\dots A_{m-1}} (C \Phi^j_D) X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} \frac{1}{2} \eta_{CD} \right) \quad /D3.5a/$$

$$T_{dys}^{Ai} = \Phi^i_B \gamma^{ABCD} \varepsilon_{1j} \sum_{m=1}^k {}_m\Xi^l_{A_1\dots A_{m-1}} (C \Phi^j_D) X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} \quad /D3.5b/$$

Podstawiając do /III.26/ równania /D3.1/, /D3.2/, /D3.3/, /D3.4/ /D3.5/, dostajemy układ równań liniowych rozwiązany względem

przyspieszeń dla parametrów mechanicznych. Temperatura ingeruje w ten układ równań za pośrednictwem momentów multipolowych przyrostu $\Theta = T - T_0$:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{term}}^{A_1 \dots A_m} &= - \sum_{p=1}^m \int_B X^{A_1} \dots X^{A_{p-1}} \lambda^{A_p B} \Phi^i_{,B} X^{A_{p+1}} \dots X^{A_m} (T - T_0) = \\ &= - \Phi^i_B \sum_{p=1}^m \lambda^{A_p B} \mathcal{D}_{m-1}^{A_1 \dots A_{p-1} A_{p+1} \dots A_m} \end{aligned} \quad /D3.6/$$

gdzie:

$$\mathcal{D}_1^{A_1 \dots A_1} = \int_B X^{A_1} \dots X^{A_1} (T - T_0) = \int_B X^{A_1} \dots X^{A_1} \Theta \quad /D3.7/$$

Całka /D3.7/ jest rozciągnięta tylko na obszar B zajmowany przez ciało. Równania mechaniczne zależą od $(k-1)$ pierwszych momentów temperatury $\Theta = (T - T_0)$. Zajmijmy się teraz równaniem /D2.17/ rozwiązany względem $\frac{DT}{Dt}$, a więc opisującym dynamikę procesów termicznych. Zauważmy, że człon dysypacyjny $T_{\text{dys}}^{AB} \dot{E}_{AB}$ jest kwadratowy w parametrach nieskończenie małych ξ^i , $m=1 \dots k$. Należy go więc pominąć, wyjąwszy przypadek bardzo dużych lepkości ν . Pomijając w /D2.17/ inne wyrazy 2-go stopnia, dostajemy:

$$\begin{aligned} C_{ED} \frac{D\Theta}{Dt} - \frac{1}{\rho_0} T_0 \lambda^{AB} \varepsilon_{ij} \sum_{m=1}^k \xi^i_{,m} A_1 \dots A_{m-1} (A \Phi^j_B) X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} = \\ = q = \chi^{AB} \Theta_{,BA} \end{aligned} \quad /D3.8/$$

W przypadku, gdy ze względu na stosunki między stałymi, nie można pominąć członu dysypacyjnego, dostajemy równania nieliniowe:

$$C_E \frac{D\Theta}{Dt} - \frac{1}{\rho_0} T_0 \lambda^{AB} \varepsilon_{ij} \sum_{m=1}^k \xi^i_{,m} A_1 \dots A_{m-1} (A \Phi^j_B) X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} +$$

$$-\frac{1}{\varrho_0} \nu^{ABCD} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} \sum_{m=1}^k \xi_m^i A_1 \dots A_{m-1} (\Phi^j_B) \xi_m^r c_1 \dots c_{l-1} (\Phi^s_D) \times$$

$$\times X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} X^{C_1} \dots X^{C_{l-1}} = \mathfrak{L}^{AB} \theta_{,BA}$$

Linearyzując równanie /D2.17/, automatycznie wyłączyliśmy z równania ruchu dla temperatury nieodwracalny proces tarcia /Niemniej, w równaniach mechanicznych tarcie jest ciągle obecne, gdyż występuje tam za pośrednictwem liniowego członu /D3.2/ /.W charakterze przykładu rozpatrzmy najpierw przypadek szczególny, gdy można także zaniedbać drugi proces nieodwracalny, mianowicie przewodnictwo cieplne. Jest to usprawiedliwione w sytuacjach fizycznych, gdy współczynniki \mathfrak{L}^{AB} są stosunkowo małe w porównaniu z innymi stałymi równania D3.8. Wtedy, /D3.8/ redukuje się do:

$$C_{EDt}^D = \frac{1}{\varrho_0} T_0 \lambda^{AB} \varepsilon_{ij} \sum_{m=1}^k \xi_m^i A_1 \dots A_{m-1} (\Phi^j_B) X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} \quad /D3.9/$$

lub, równoważnie:

$$\frac{d}{dt} \left[C_E \theta - \frac{1}{\varrho_0} T_0 \lambda^{AB} \varepsilon_{ij} \sum_{m=1}^k \xi_m^i A_1 \dots A_{m-1} (\Phi^j_B) X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} \right] \quad /D3.9a/$$

co natychmiast daje się scałkować, prowadząc do wielomianowego rozkładu temperatury:

$$\theta = \frac{T_0}{\varrho_0 c_E} \lambda^{AB} \varepsilon_{ij} \left\{ \sum_{m=1}^k \xi_m^i A_1 \dots A_{m-1} (\Phi^j_B) X^{A_1} \dots X^{A_{m-1}} \Phi^i_A (\Phi^j_B) \right\} \quad /D3.10/$$

Uwzględniono tu automatycznie, przez odpowiedni wybór stałej całkowania, że w konfiguracji równowagowej $\theta = 0$, t.zn. $T = T_0$. Wprowadzmy parametry przemieszczeniowe Ψ_m , $m=1 \dots k$, opisujące odchylenie konfiguracji ciała od równowagi Φ^i_A :

$${}_1\Psi = {}_1\Phi - \Phi, \quad {}_m\Psi = {}_m\Phi \quad \text{dla } m=2\dots k \quad /D3.11/$$

Wtedy /D3.10/ przyjmuje postać:

$$\Theta = \frac{T_0}{\rho_0 c_E} \lambda^{AB} \varepsilon_{ij} \sum_{m=1}^k {}_m\Psi_{A_1\dots A_{m-1}}^i (\Phi^j_B)^{X^1\dots X^{A_{m-1}}} \quad /D3.12/$$

Temperatura jest więc wielomianem stopnia $(k-1)$.

Podstawiając tę zależność algebraiczną do /III.7/lub/III26/ dostajemy zamknięty układ równań ruchu dla zmiennych mechanicznych ${}_m\Phi$ w warunkach adiabatycznych, przy małej lepkości wnoszącej znikomą wkład do termodynamicznego bilansu energii. Jest to układ równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych.

Jego rozwiązanie sprowadza się do numerycznego wyznaczenia częstości własnych /rozwiązania odpowiedniego równania charakterystycznego/.

Rozpiszmy teraz jawnie powyższe równania w przypadku ciała afinicznie sztywnego, izotropowego pod każdym względem /mechanicznym i termicznym/. Stosujemy formalizm macierzowy naskzicowany w Dodatku 2. Założenie izotropowości termicznej oznacza, że termiczny człon naprężenia opisany jest przez macierz proporcjonalną do jednostkowej, λKI , $\lambda \in R$, K -moduł ściskania wszechstronnego.

Wprowadzmy następujące oznaczenia, dostosowane do opisu infinitesimalnego:

$$\Phi = I + \alpha, \quad e = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^T), \quad r = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^T) \quad /D3.13/$$

W teorii infinitesimalnej $\alpha \approx 0$; e jest infinitesimalnym tensorem deformacji, zaś r - infinitesimalnym obrotem.

Macierz bezwładności oznaczamy symbolem J , zaś macierz odwrotną przez \tilde{J} . Łatwo pokazać, że mechaniczne równania ruchu ciała afinicznie sztywnego zbudowanego z materiału całkowicie izotropowego, przyjmują postać:

$$\frac{d^2}{dt^2} r = \nu \mu (\tilde{J}e - e\tilde{J}) + \nu \eta \left(\tilde{J} \frac{de}{dt} - \frac{de}{dt} \tilde{J} \right) \quad /D3.14a/$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e = -v\mu (\tilde{J}e + e\tilde{J}) - v\eta \left(\tilde{J} \frac{de}{dt} + \frac{de}{dt} \tilde{J} \right) - v \left(K - \frac{2\mu}{n} \right) \text{Tr} e \tilde{J} + \quad /D3.14b/ \\ - v \left(\xi - \frac{2\eta}{n} \right) \text{Tr} \frac{de}{dt} \tilde{J} + \lambda K \tilde{J} \int (T - T_0)$$

gdzie V -objętość ciała /w.podejściu infinitezymalnym nie ma znaczenia, czy jest to objętość odniesienia, czy zdeformowana/, K, μ -moduły sprężyste, η, ξ -stałe lepkości, λ -współczynnik rozszerzalności.

Ponieważ konfiguracja odniesienia jest teraz opisywana przez macierz jednostkową I , więc wzór /D3.12/ przyjmuje postać:

$$\Theta = T - T_0 = \frac{T_0 \lambda K}{\rho_0 c_E} \text{Tr} \alpha = \frac{T_0 \lambda K}{\rho_0 c_E} \text{Tr} e \quad /D3.15/$$

Ostatecznie więc, w warunkach adiabatycznych, ciało afinicznie sztywne spełnia następujący, zlinearyzowany układ równań:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = v\mu (\tilde{J}e - e\tilde{J}) + v\eta \left(\tilde{J} \frac{de}{dt} - \frac{de}{dt} \tilde{J} \right) \quad /D3.15a/$$

$$\frac{d^2 e}{dt^2} = -v\mu (\tilde{J}e + e\tilde{J}) - v\eta \left(\tilde{J} \frac{de}{dt} + \frac{de}{dt} \tilde{J} \right) - v \left[K \left(1 - \frac{\lambda^2 K T_0}{\rho_0 c_E} \right) - \frac{2\mu}{n} \right] \text{Tr} e \tilde{J} + \\ - v \left(\xi - \frac{2\eta}{n} \right) \frac{d}{dt} \text{Tr} e \tilde{J} \quad /D3.15b/$$

Jak widać, równania deformacyjne /D3.15b/ tworzą układ zamknięty. W sytuacjach ogólniejszych niż adiabatyczne, /D3.15b/i równanie temperaturowe, także tworzą układ zamknięty, niezależny od r . Podstawiając jakiegokolwiek rozwiązanie układu deformacyjno-temperaturowego do /D3.15a/, dostajemy równanie liniowe na r , z prawą stroną jawnie zależną od czasu. Rozwiązanie spełniające założenie małych drgań można znaleźć natychmiast przez kwadraturę i odpowiedni dobór stałych.

Układ /D3.15/ upraszcza się znacznie, gdy bezwładność ciała także jest izotropowa:

$$J = bI, \quad \tilde{J} = 1/b I \quad /D3.16/$$

Wtedy:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \quad /D3.17a/$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 e}{dt^2} = & -2 \frac{\mu V}{b} e - 2 \frac{\eta V}{b} \frac{de}{dt} - V \left[K \left(1 - \frac{\lambda^2 K T_0}{\rho_0 c_E} \right) - \frac{2}{n} \right] \frac{1}{b} \text{Tre I} + \\ & - \frac{V}{b} \left(\rho - \frac{2\eta}{n} \right) \frac{d}{dt} \text{Tre I} \end{aligned} \quad /D3.17b/$$

Równania rozdzielają się i jedyne rozwiązania dla obrotów r , zgodne z przybliżeniem małych drgań, mają postać $r = \text{const}$.

Oznaczmy:

$$K_{ad} = K \left(1 - \frac{\lambda^2 K T_0}{\rho_0 c_E} \right) \quad /D3.18/$$

Układ równań deformacyjnych można wtedy zapisać, jak następuje

$$\frac{d^2 e}{dt^2} = -2 \frac{\mu V}{b} e - 2 \frac{\eta V}{b} \frac{de}{dt} - \frac{V}{b} \left(K_{ad} - \frac{2\mu}{n} \right) \text{Tre I} - \frac{V}{b} \left(\rho - \frac{2\eta}{n} \right) \frac{d}{dt} \text{Tre I} \quad /D3.19/$$

Układ ten rozpada się na dwa niezależne podukłady: dylatacyjny i ścinający:

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Tre} = - \frac{nV_0}{b} K_{ad} \text{Tre} - n \frac{V}{b} \rho \frac{d}{dt} \text{Tre} \quad /D3.20/$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(e - \frac{1}{n} \text{Tre} \right) = -2 \frac{\mu V}{b} \left(e - \frac{1}{n} \text{Tre} \right) - 2 \frac{\eta V}{b} \frac{d}{dt} \left(e - \frac{1}{n} \text{Tre} \right) \quad /D3.21/$$

Izotropia powoduje, że układ jest zwyrodniały i ma tylko dwie istotne częstości własne /i dwa dekrementy tłumienia/zamiast sześciu /liczba deformacyjnych stopni swobody/.

W powyższych przykładach zakładaliśmy lokalną adiabatyczność ciała /brak przewodnictwa/. W liniowej teorii infinitezimalnej można jednak bez trudu rozpatrywać sytuacje ogólniejsze. Co najważniejsze, dynamiczne zagadnienia wielomianowej termosprężystości dają się wtedy efektywnie opisać przy

pomocy zamkniętego układu równań różniczkowych zwyczajnych /liniowych/. Okazuje się także, że metody, o których mowa poniżej, dają się także zastosować w teorii wielomianowej o skończonych deformacjach i przyrostach temperatury, w reżimie nieliniowym, przy założeniu, że związki konstytutywne są dane wielomianami skończonego stopnia.

Istotnie, założymy, że w każdej chwili czasu t , lagranżowskie pole przyrostu temperatury jest funkcją analityczną afinicznych zmiennych materialnych X^A :

$$\Theta(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_{A_1 \dots A_m}(\bar{x}) X^{A_1} \dots X^{A_m} \quad /D3.22/$$

Podstawiając to do /D3.8/, dostajemy:

$$\begin{aligned} c_E \frac{d}{dt} \Theta_{A_1 \dots A_m} - (m+1) \frac{T_0}{\varrho_0} \lambda^{CD} \varepsilon_{1j} \frac{d}{dt} \Phi_{A_1 \dots A_m}^i (c \Phi^j_D) = \\ = (m+1)(m+2) \Theta_{A_1 \dots A_m}^{CD} \mathcal{L}_{m=0 \dots k-1}^{CD} \end{aligned} \quad /D3.23a/$$

$$c_E \frac{d}{dt} \Theta_{A_1 \dots A_m} = (m+1)(m+2) \Theta_{A_1 \dots A_m}^{CD} \mathcal{L}_{m=k \dots}^{CD} \quad /D3.23b/$$

Nieskończony podukład /D3.23b/ jest zamknięty jako układ na $\Theta_{m=k \dots \infty}$. Podstawiając jakiegokolwiek jego rozwiązanie do /D3.23a/ dostajemy wzory wyrażające pochodne czasowe $\frac{d}{dt} \Theta_{m=0 \dots k-1}$ przez $\Theta_{l=2 \dots k+1}$, $\Phi_{m=1 \dots k-1}$. Po tym podstawieniu układ /D3.23a/ tworzy wraz z /III.7/ skończony i zamknięty układ równań różniczkowych zwyczajnych nałożony na zależność czasową parametrów Φ_m , $\Theta_{l=0 \dots k-1}$. Struktura /D3.23/ sugeruje następującą technikę rozwiązywania: Θ_k, Θ_{k+1} przyjmujemy jako zupełnie dowolne funkcje czasu. Wtedy, na mocy /D3.23b/ możemy natychmiast wyznaczyć iteracyjnie wszystkie pozostałe Θ_m , $m \geq k$; wielkości te nie są jednak dla nas istotne. Podstawiając zadane Θ_k, Θ_{k+1} do /D3.23a/, dostajemy równania liniowe niejednorodne,

z niejednorodnością jawnie zależną od czasu przez $k^{\Theta}, k+1^{\Theta}$.
 Możemy w szczególności podstawić $k^{\Theta} = \text{const}, k+1^{\Theta} = \text{const}$,
 co odpowiada najogólniejszemu stacjonarnemu rozwiązaniu dla
 /D3.23b/ /Wtedy dla $m > k+1, m^{\Theta} = 0$ /. Oczywiście, to samo
 podstawienie należy wtedy zrobić w równaniach mechanicz-
 nych /III.7/, a raczej w ich zlinearyzowanej postaci. Dowolność
 funkcji $k^{\Theta}, k+1^{\Theta}$ zastępuje nielokalność ogólnych równań
 skończonej termosprężystości wielomianowej i wiąże się z
 nieskończoną liczbą termicznych stopni swobody. Oczywiście,
 dowolność ta ogranicza się pewnymi wymogami fizycznymi. k^{Θ}
 $k+1^{\Theta}$ muszą zależeć od czasu w taki sposób, by odpowiednie
 rozwiązania zagadnienia dynamicznego nie wychodziły poza za-
 kres przybliżenia małych drgań. Jeśli np. $k^{\Theta} = \text{const}, k+1^{\Theta} = \text{const}$
 to jest to możliwe wyłącznie przy założeniu $k^{\Theta} = 0, k+1^{\Theta} = 0$.
 /Pole temperatury /lagranżowskie/ będzie wtedy wielomianem
 stopnia $(k-1)$ /. Można więc oczekiwać, że w ogólnym przypadku
 funkcje $k^{\Theta}, k+1^{\Theta}$ muszą szybko zanikać /np. w sposób wykład-
 niczy/, lub oscylować /w sposób trygonometryczny/.

Wniosek:

W przybliżeniu miowym, przy ustalonych powyżej związkach kon-
 stytutywnych, zagadnienie dynamiczne wielomianowej termosprę-
 żystości, prowadzi do skończonego układu równań różniczkowych
zwyczajnych, nałożonego na zależność czasową układu zmiennych
 $m^{\Phi}, m=1 \dots k, 1^{\Theta}, 1=0 \dots k-1$ charakteryzujących configura-
 cję ciała i rozkład temperatury w ciele, jak następuje:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi(0)} \varphi(P) &= \sum_{m=1}^k m^{\Phi} A_1 \dots A_m (X^1 \dots X^m) (P) \\ &= T - T_0 = \sum_{m=0}^{k-1} m^{\Theta} A_1 \dots A_m X^1 \dots X^m + k^{\Theta} A_1 \dots A_k X^1 \dots X^k + \\ &+ (k+1)^{\Theta} A_1 \dots A_{k+1} X^1 \dots X^{k+1} + \sum_{m=k+2}^{\infty} m^{\Theta} A_1 \dots A_m X^1 \dots X^m ; \end{aligned}$$

gdzie ${}^m\Theta$, $m \geq k+2$ wyrażają się przez ${}^k\Theta$, ${}^{k+1}\Theta$ zgodnie z /D3.23b/, zaś same ${}^k\Theta$, ${}^{k+1}\Theta$ są dowolnymi funkcjami czasu zgodnymi z założeniem małych drgań. Zmienne ${}^m\Theta$, $m \geq k$ nie są dynamicznymi parametrami teorii. W praktyce przyjmuje się zazwyczaj: ${}^m\Theta = 0$ dla $m \geq k$, co oznacza, że pole temperatury jest wielomianem stopnia $(k-1)$. Przy tym podstawieniu metoda jest najbardziej efektywna. W przypadku ciała afinicznie sztywnego jest to równoważne przybliżeniu adiabatycznemu.

Na zakończenie wspomnijmy jeszcze raz o najważniejszych zagadnieniach cząstkowej linearyzacji. Przy badaniu ruchu z tłem afinicznie sztywnym, zakłada się, że φ , ξ są skończone, natomiast ${}^m\varphi$, ${}^m\xi$ dla $m > 1$ - małe. Wygodnie jest wtedy używać równań mechanicznych w postaci /III.38/-/III.40/. Równanie /III.39/ zdaje wtedy sprawę z afinicznie sztywnego "tła" zagadnienia. Można w szczególności poszukiwać ściśle rozwiązań równań ruchu należących do tła, t. zn. takich, że ${}^m\varphi = 0$ dla $m > 1$. Następnie, można badać małe drgania wielomianowe wokół takich rozwiązań. Mimo, że pełny układ równań nie jest wtedy liniowy, to równania dla małych drgań wokół ustalonego ruchu tła, będą oczywiście liniowe. Zasadniczo tak samo postępuje się w sytuacjach, gdy tłem jest obrót sztywny /żyroskopowy/, będący przecież przypadkiem szczególnym ruchu afinicznie sztywnego. Należy wtedy skorzystać z przedstawienia biegunowego:

$${}^1\varphi_A^i = R^i_B L^B_A$$

gdzie $R:U \rightarrow V$ jest izometrią / $\eta_{AB} = \xi_{ij} R^i_A R^j_B$ /, zaś $L:U \rightarrow U$ jest odwzorowaniem η -symetrycznym / t. zn. $L^A_C \eta^{CB} = L^B_C \eta^{CA}$ /. Następnie zakłada się, że skończone wartości przyjmuje tylko R , natomiast $L^B_A = \delta^B_A + l^B_A$, gdzie l^B_A jest małe, podobnie, jak wszystkie ${}^m\varphi$, $m > 1$. Tłu zagadnienia odpowiada wtedy antysymetryczna część równania III.39

Wszędzie w powyższym dodatku opieraliśmy się na modelu ośrodka ciągłego. Metody linearyzacji można oczywiście stosować także w ogólnej teorii mechanicznej przedstawionej w

rozdziale III, bez zakładania czegokolwiek o strukturze ciała. Nie będziemy tu jednak zajmowali się tą sprawą.

UWAGI KOŃCOWE

Metoda wielomianowa, jak każda metoda dyskretyzacji, pozwala na zastąpienie równań różniczkowych cząstkowych teorii /lepkosprężystości, skończonym układem równań różniczkowych zwyczajnych. Sytuacja komplikuje się nieco, gdy uwzględniamy zjawiska termiczne, gdyż wtedy, pełny układ równań wielomianowej termosprężystości ma charakter różniczkowo-całkowy. W dodatku 3 pokazaliśmy jednak, że w przybliżeniu liniowym, zjawiska termosprężyste zachodzące w ciele deformowalnym w sposób wielomianowy, można także opisać przy pomocy układu równań różniczkowych zwyczajnych. Zmiennymi dynamicznymi teorii są wtedy wartości k pierwszych pochodnych pola przemieszczeń, oraz $(k-1)$ pierwszych pochodnych pola temperatury, wszystkie liczone w materialnym środku ciężkości ciała /w konfiguracji odniesienia/. Okazuje się, że metodę przedstawioną w dodatku 3 można także z powodzeniem stosować w szerszej klasie zagadnień nieliniowych. Są to te zagadnienia, w których związki konstytutywne też mają charakter wielomianowy, a więc energia wewnętrzna u , tensory naprężenia T_{el}^{AB} , T_{dya}^{AB} i.t.d są wielomianami swych argumentów. Pełny układ równań termosprężystości wielomianowej /III.26/, /D2.17/ /z uwzględnieniem /D2.19/ / wyraża się wtedy przez wielomiany względem afinicznych zmiennych materialnych X^A i temperatury T . Można go efektywnie rozwiązać dokonując podstawienia /D3.22/, a następnie stosując te same metody, co w dodatku 3. Jedyna różnica polega na tym, że układ zmiennych dynamicznych będzie się wtedy składał z $m \Phi$, $m=1 \dots k$, oraz $p \Theta$, $p=0 \dots s$, gdzie s zależy od stopni wielomianów występujących w związkach konstytutywnych. W zagadnieniu nieliniowym $s > k-1$. Dynamikę zagadnienia będzie opisywał wtedy układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, narzucony na zależność czasową tych zmiennych. W termodynamicznym bilansie energii uwzględnia się wtedy nieliniowy

człon dyssypatywny opuszczony w równaniu /D3.8/.

Ze względu na powszechne użycie przybliżeń wielomianowych w teorii związków konstytutywnych [7], metoda przedstawiona w dodatku 3 dostarcza praktycznej i efektywnej techniki dyskretyzacyjnej dla termosprężystości.

PODZIĘKOWANIE

Pragnę w tym miejscu wyrazić swoją głęboką wdzięczność profesorowi Henrykowi Zorskiemu za inspirację, zainteresowanie i cenne wskazówki, które wybitnie przyczyniły się do powstania tej pracy. Wiele zawdzięczam także dyskusjom prowadzonym z profesorem Czesławem Woźniakiem na temat teorii ośrodków ciągłych z więzami.

BIBLIOGRAFIA

- 1 .R.Abraham: Foundations of Mechanics, W.A.Benjamin, New York, 1967
- 2 .J.Baumgarte, E.Kröner: "3n-dimensional Mechanics of Generalized Continua", Proceedings of the XII International Congress of Applied Mechanics. Stanford University, August 1968 , 114, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1969
- 3 .N.Bourbaki: Algèbre, Livre II, Hermann C^{ie}, Paris 1958
- 4 .B.N.Buzzmanow, J.A.Chromow: Fizyka Ciała Stałego, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1973
- 5 .S.Chandrasekhar: Ellipsoidal Figures of Equilibrium, New Haven and London, Yale University Press, 1969
- 6 .P.A.M.Dirac: Proc.Roy.Soc./London/ Vol.A, 246 , 326 /1958/
- 7 .A.C.Eringen: Nonlinear Theory of Continuous Media, Mc Graw Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, 1962
- 8 .A.C.Eringen: "Mechanics of Micromorphic Materials", Proc.of the XI International Congress of Applied Mechanics, 131
- 9 .A.C.Eringen: "Mechanics of Micromorphic Continua", Proc. of the IUTAM-Symposium, Freudenstadt and Stuttgart 1967, 18, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1968, Ed.E.Kröner
- 10.A.C.Eringen: "Mechanics of Micropolar Continua", Contributions to Mechanics, Ed.D.Abir, Pergamon Press-Oxford and New York 1970
11. A.C.Eringen: Int.Journ.Eng.Sci., 10, 1, /1972/
- 12.A.C.Eringen: Int.Journ.Eng.Sci., 10, 623, 1972
- 13.I.I.Goldenblatt: Nielinieinyje Problemy Teorii Uprugosti, Izd."Nauka", Moskwa 1969
- 14.H.Goldstein: Classical Mechanics, Cambridge, 1950
- 15.A.A.Gołębiewska, J.J.Sławianowski, Prace IPPT, 28 /1971/
- 16.M.Gosiewski: Prace IPPT, 67 , /1972/
- 17.A.E.Green, J.E.Adkins: Large Elastic deformations, Oxford, At the Clarendon Press, 1960

18. A.J. Kitajgorodski: Molekularnyje Kristally, Izd. "Nauka", Moskwa, 1971
19. S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, New York, London, 1963
20. A.M. Kosievic: Osnovy Miekhaniki Kristalliceskoj Riesostki, Izd. "Nauka", Moskwa 1972
21. E. Kröner /Editor/: Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium, Freudenstadt-Stuttgart 1967, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1968
22. L. Landau, E. Lifszic: Mechanika Ośrodków Ciągłych, PWN, Warszawa, 1958
23. L. Landau, E. Lifszic: Teoria Sprężystości, PWN, Warszawa, 1968
24. S. Lang: Introduction to Differentiable Manifolds, Wiley /Interscience/, New York, London, 1962
25. G.W. Mackey: The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Benjamin, New York, Amsterdam, 1963
26. K. Maurin: General Eigenfunction Expansions, PWN, Warszawa, 1968
27. K. Maurin: Analiza, PWN, Warszawa, 1971
28. W. Noll: "Inhomogeneities in Materially Uniform Simple Bodies", Proceedings of the IUTAM-Symposium, Freudenstadt and Stuttgart, 1967, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1968, str. 239
29. W. Nowacki: Teoria Niesymetrycznej Sprężystości, Wrocław-Warszawa-Kraków 1970. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wyd. PAN
30. R.S. Rivlin: "Generalized Mechanics of Continuous Media", Proc. IUTAM Symposium, Freudenstadt-Stuttgart 1967, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1968, Ed. E. Kröner
31. D. Rogula: Biuletyn WAT XV, Nr. 8, 1966
32. J.J. Sławianowski: Prace IPPT 8, 1973
33. J.J. Sławianowski: Archives of Mechanics, 25, Nr. 4, 569/1974/
34. J.J. Sławianowski: Reports on Mathematical Physics, 5, Nr. 3 293 /1974/
35. J.J. Sławianowski: Archives of Mechanics, 27, Nr. 1, 93, /1975/

36. J.J. Sławianowski: Biuletyn PAN, Seria Techniczna, XXIII, N.1
17, /1975/
37. J.J. Sławianowski: Biuletyn PAN, Seria Techniczna, XXIII, N.2
43/97/ ,/1975/
38. J.J. Sławianowski: International Journal of Theoretical
Physics, 12 , 271 /1975/
39. J.J. Sławianowski: Geometria Przestrzeni Fazowych, PWN,
Warszawa, 1975
40. S. Sternberg: Lectures on Differential Geometry, Prentice
Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1964
41. J.L. Synge: Classical Dynamics, Springer, Berlin-Göttingen-
Heidelberg , 1960
42. R.A. Toupin: "Dislocated and Oriented Media", Mechanics of
Generalized Continua /Ed. E. Kröner/, Proceedings of the
IUTAM-Symposium, Freudenstadt and Stuttgart, 1967, Springer
Berlin-Heidelberg-new York, 1968
43. C. Woźniak: Archives of Mechanics, 26, Nr. 1, /1974/
44. K. Wilmański: Zarys Termodynamiki Ośrodków Ciągłych,
Prace IPPT , 6 /1975
45. H. Zorski: Archive for Rational Mechanics and Analysis,
56, 320, Nr. 4, /1974/

SPIS TREŚCI

Wstęp.....	3
Rozdział 1. Wstęp matematyczny. Oznaczenia.....	8
Rozdział 2. Mechanika w przestrzeni afinicznej. Dyskretyzacja przy pomocy szeregów funkcyjnych jako zagadnienie mechaniczne z więzami.....	16
Rozdział 3. Teoria wielomianowa.....	38
Rozdział 4. Mechanika analityczna odkształceń wielomianowych. Zasada wariacyjna.....	55
Dodatek 1. Kwantowanie teorii.....	75
Dodatek 2. Ośrodek ciągły.....	80
Dodatek 3. Metody infinitesimalne. Zagadnienia linearyzacji.....	89
Uwagi końcowe.....	99
Bibliografia.....	101

