

PRACE IPPT • IFTR REPORTS

Wojciech Krzysztof Nowacki

BOZENTLANIE OKAZO

TRÓJWYMIAROWE ZAGADNIENIA
ROZPRZESTRZENIANIA SIĘ FAL
W OŚRODKACH
SPRĘŻYSTO—LEPKOPLASTYCZNYCH

Nr 74/1974r.



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Wojciech Krzysztof Nowacki
BOZENIARZ OKAZOI

**TRÓJWYMIAROWE ZAGADNIENIA
ROZPRZESTRZENIANIA SIĘ FAL
W OŚRODKACH
SPRĘŻYSTO—LEPKOPLASTYCZNYCH**

Nr 74/1974r.

WARSZAWA 1974

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 grudnia 1974 r.

Zarejestrowana pod nr 74/1974



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 5,3. Ark. druk. 7,5

Oddano do drukarni w grudniu 1974 r.

Nr zamówienia 62/0/75 B - 49 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Wojciech Krzysztof Nowacki
Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

TRÓJWYMIAROWE ZAGADNIENIA ROZPRZESTRZENIANIA SIĘ FAL W OŚRODKACH SPRĘŻYSTO/LEPKOPLASTYCZNYCH

WSTĘP

Niniejsza praca jest poświęcona zagadnieniom falowym w teorii lepkoplastyczności. Zagadnienia te są związane z działaniem intensywnych obciążeń dynamicznych na elementy konstrukcji, przy czym intensywność naprężenia jest na tyle duża, że powoduje plastyczne odkształcenie tych elementów.

Wiele zagadnień, zwłaszcza jednowymiarowych zostało już szczegółowo zbadanych. Istnieje szereg monografii przedstawiających w sposób ogólny teorię uderzenia w układach ciągłych. Zagadnienia falowe w ciałach niesprężystych są opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi quasi-liniowymi lub prawie liniowymi. W większości wypadków nie udaje się znaleźć rozwiązania w postaci zamkniętych wzorów. Rozwiązania te konstruuje się na drodze numerycznej, lub wprowadza się pewne uproszczenia w równaniach konstytutywnych. I tak w przypadku wprowadzenia modelu ośrodka z tzw. "sztywnym odciążeniem", np. [48,49,83,84,43], równania cząstkowe opisujące ruch ośrodka w zagadnieniach jednowymiarowych, redukują się w procesie odciążenia do równań zwozajnych lub też do równań całkowych. W przypadku ośrodków sprężysto/lepkoplastycznych, pomijając w równaniach ruchu człony niższego rzędu, skonstruowane są rozwiązania propagacji fal jednowymiarowych w pręcie, propagacji fal kulistych, lub też wprowadzając szczególną postać niejednorodności ośrodka otrzymuje się zamkniętą postać rozwiązania, sprowadzając równania problemu do równań typu

Eulera-Darboux [123] .

Jednak większość problemów falowych w ośrodkach niesprężystych można rozwiązać tylko na drodze numerycznej.

W ostatnich latach dokonał się szybki rozwój technik obliczeniowych. Opracowano szereg metod numerycznego obliczania równań różniczkowych cząstkowych quasi-liniowych i prawie liniowych, np. [57] . Badaniem tym towarzyszą studia nad odpowiednim opracowaniem metod analitycznych rozwiązywania zagadnień granicznych dla ciał niesprężystych. Głównie dotyczy to zagadnień rozprzestrzeniania się fal naprężenia w przypadku problemów przestrzennych, fal naprężenia w przypadku złożonego stanu naprężenia, fal jednowymiarowych, wreszcie termicznych fal naprężenia.

Wiele zagadnień związanych z rozprzestrzenianiem się fal naprężenia w ośrodkach niesprężystych bazuje na założeniu symetrii ośrodka oraz symetrii warunków brzegowych - np. symetrii cylindrycznej lub sferycznej, bądź też na założeniu, że siły powierzchniowe na brzegu ośrodka są rozłożone w sposób równomierny, zmieniają się jedynie w czasie - por. grupa rozwiązań zagadnień tzw. "samopodobnych" [11,12,107, 108] . Jednakże w rzeczywistości rzadko realizuje się równomierny rozkład naprężenia na powierzchni ośrodka. Na ogół przy wybuchu na powierzchni ośrodka następuje koncentracja ciśnienia na małej powierzchni, poza którą ciśnienie maleje. Rozwiązania zagadnień tego typu są skomplikowane i w literaturze istnieje bardzo mała liczba prac , np. [1,2,4-9,10, 27,30,66] , rozwiązujących te zagadnienia, ważne ze względów praktycznych. Również nie istnieją pełne rozwiązania zagadnień dyfrakcji fal cylindrycznych lub kulistych na płaskich powierzchniach w ośrodku plastycznym lub lepkoelastycznym.

Wszystkie te zagadnienia wymagają oprócz opracowań teoretycznych bardzo skomplikowanych i pracochłonnych obliczeń numerycznych. W literaturze można głównie znaleźć badania związane z określeniem prędkości dwuwymiarowych fal naprę-

żenia, ewentualnie rozwiązania przybliżone [119], które są skonstruowane w otoczeniu czoła fali [95].

Układ pracy jest następujący. W rozdziale I są opisane w skrócie własności dynamiczne metali. Podane są równania konstytutywne ośrodków plastycznych, wrażliwych na prędkość odkształcenia. Bazuje się na równaniach konstytutywnych teorii lepkoplastyczności, zaproponowanych przez P. PERZYŃĘ [87, 88]. Równania te sformułowano w układzie współrzędnych krzywoliniowych. Podano również sformułowanie równań ruchu ośrodka, jak również równanie ciągłości oraz warunki ciągłości dynamicznej i kinematycznej, we współrzędnych krzywoliniowych.

Zasadniczą częścią pracy jest rozdział drugi w którym jest przedstawione rozwiązanie problemu dynamicznego pustki cylindrycznej znajdującej się w ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym. Rozwiązanie przedstawiono w układzie współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych - w układzie współrzędnych bipolarnych.

Celem wprowadzenia opisu problemu we współrzędnych bipolarnych było to, że :

- 1° we współrzędnych tych obszar nieograniczony [półprzestrzeń] transformuje się w obszar ograniczony - w prostokąt, którego jeden bok reprezentuje powierzchnię półprzestrzeni a drugi bok - pustkę cylindryczną.
- 2° można łatwo spełnić we współrzędnych bipolarnych warunki brzegowe na powierzchni półprzestrzeni i jednocześnie na otworze cylindrycznym.

W rozdziale II podano szereg przypadków, które można rozwiązać przy pomocy przedstawionej metody, wykorzystując równania problemu zapisane we współrzędnych bipolarnych, np. zagadnienie propagacji fal w półprzestrzeni obciążonej na brzegu obciążeniami wieloparametrowymi, zmiennymi w czasie oraz w poszczególnych punktach powierzchni półprzestrzeni; zagadnienie propagacji fal kulistych w półprzestrzeni, spo-

wodowanych eksplozją wewnątrz pustki cylindrycznej zanurzonej w półprzestrzeni; dyfrakcji fal cylindrycznych na innej konturze cylindrycznej w nieograniczonej przestrzeni; propagacji fal w cylindrze z niewspółkońcentrycznym otworem poddanym działaniu obciążeń dynamicznych. Sformułowane również zagadnienie dynamiki pustki kulistej w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej, również w układzie współrzędnych bipolarnych, przy założeniu symetrii osiowej.

Przedstawiono szczegółowo rozwiązanie problemu rozprzestrzeniania się fal w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej i dyfrakcji ich na konturze cylindrycznej. Rozwiązanie uzyskano na drodze numerycznej, wykorzystując do całkowania równań problemu w czasie uogólnioną metodę TREANORA [118]. Dokonano jednocześnie oceny przydatności wspomnianej metody w rozwiązaniach problemów propagacji fal w ośrodkach lepkoplastycznych. Podano liczne wyniki obliczeń numerycznych i przeprowadzono ich dyskusję.

Rozdział trzeci zawiera uwagi o pewnych rozwiązaniach zagadnień propagacji jednowymiarowych fal niesprężystych. Przeprowadzono dyskusję propagacji fal w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej obciążonej na brzegu trzyparametrowymi obciążeniami. Również przeprowadzono dyskusję, na podstawie wyników pracy [80], nad zagadnieniami wpływu pola temperatury na pole odkształcenia i pole naprężenia w zagadnieniach falowych teorii plastyczności. Pokazano na przykładzie propagacji fal w pręcie sprężysto/lepkoplastycznym wpływ przyjętych hipotez dla równania termodynamiki na pole temperatury i pole odkształcenia w pręcie.

Obliczenia numeryczne wykonano na maszynie cyfrowej UNIVAC 1018 w Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique w Paryżu. Program obliczeń numerycznych wykonano w języku FORTRAN IV i PHYSICTRAN.

I. RÓWNANIA DYNAMIKI OŚRODKÓW NIESPRĘŻYSTYCH

1. Dynamiczne własności metali

Przedstawimy w skrócie analizę dynamicznych własności materiałów na podstawie istniejących badań doświadczalnych. Prace doświadczalne są prowadzone w kilku kierunkach. Podstawowym kierunkiem badań jest określenie dynamicznej charakterystyki materiału. Ponadto prowadzi się liczne badania których celem jest znalezienie rozkładu odkształceń trwałych wzdłuż badanej próbki, jak też badania wpływu ruchu poprzecznego podczas rozchodzenia się podłużnych fal naprężenia w próbie, powodującego efekt dyspersji fal. Przeprowadzane są również liczne badania doświadczalne określające wpływ temperatury, wpływ napromieniowania na dynamiczne zachowanie się metali.

W przypadku procesów statycznych, własności mechaniczne materiału ujmuje wykres naprężenie-odkształcenie. Natomiast w przypadku obciążeń dynamicznych ujawnia się wpływ prędkości odkształcenia na związek odkształcenie-naprężenie. Obserwuje się również istotny wpływ szeregu innych czynników, jak temperatury, napromieniowania itp.

W niniejszym punkcie zostaną przedstawione podstawowe własności dynamiczne metali.

Badania doświadczalne nad własnościami dynamicznymi metali: D.S.CLARKA i P.E.DUWEZA [21], M.MANJOINE [60], F.E.HAUSERA, J.A.SIMMONSA, J.E.DORNA [39], J.D.CAMPBELLA, W.G.FERGUSONA [19], K.J.MARSHA, J.D.CAMPBELLA [64], U.S.LINDHOLMA [54-56], oraz wielu innych autorów, jak np. [18, 31, 50, 53] wykazują, że metale wymagają znacznie wyższego naprężenia, aby osiągnąć uplastycznienie przy nagłym obciążeniu

nię przy obciążeniu powolnym. W przypadku szeregu praktycznie ważnych materiałów [np. stале wysokowęglowe] w warunkach dynamicznych obciążeń można posługiwać się związkami niezależnym w sposób jawny od prędkości odkształcenia [94]:

$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\dot{\epsilon})$, otrzymanym przy dynamicznym obciążeniu próbki. Związek ten różni się w sposób istotny od charakterystyki statycznej. Jednak w wielu pracach doświadczalnych stwierdzono, że metale, które posiadają wyraźną granicę plastyczności, są szczególnie wrażliwe na prędkość odkształcenia. Dobrym przykładem metalu, który zachowuje się odmiennie podczas statycznego i dynamicznego odkształcenia, wykazującego dużą wrażliwość na prędkość odkształcenia, jest miękka stal oraz czyste żelazo. Wpływ prędkości odkształcenia na zmianę granicy plastyczności dla miękkiej stali był zbadany między innymi w pracach [20, 21, 56, 61, 64]. Na przykład D.S. CLARK i P.E. DUWEZ [21] stwierdzili w przypadku miękkiej stali [0.22 % węgla], że granica plastyczności wzrasta wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia, od wartości około 2760 KG/cm^2 [statyczna granica plastyczności] do wartości około 5870 KG/cm^2 , przy prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon} \approx 200 \text{ s}^{-1}$. Granica plastyczności wzrasta do momentu, dopóki nie połączy się z krzywą obrazującą zmianę granicy wytrzymałości. Umowna granica wytrzymałości wzrasta w zakresie prędkości odkształcenia od 0 do około 200 s^{-1} .

Większość badań, związanych z określeniem charakterystyki dynamicznej materiału, przeprowadzono w warunkach jednoosiowego rozciągania bądź ściskania lub w przypadku czystego ścinania. Istnieją jedynie nieliczne badania doświadczalne, których efektem jest podanie dynamicznych charakterystyk materiału w warunkach obciążeń złożonych. Do pionierskich prac w tej dziedzinie należą prace U.S. LINDHOLMA [54-56]. Przedstawiają one wyniki badania próbek aluminiowych oraz stalowych, poddanych jednoosiowemu rozciąganiu i ścinaniu.

W chwili obecnej istnieje dość obszerna literatura dotycząca zarówno wpływu prędkości odkształcenia jak i wpływu

temperatury na związki między naprężeniem i odkształceniem, przy czym wpływ każdej z tych wielkości jest rozważany oddzielnie. Na drodze doświadczalnej stwierdzono, że w niskich temperaturach dolna granica plastyczności metali nie jest zależna od prędkości odkształcenia, natomiast w wysokich temperaturach nawet bardzo małe zmiany prędkości odkształcenia powodują znaczny wzrost lub spadek granicy plastyczności [19,20] .

2. Ośrodki plastyczne wrażliwe na prędkość odkształcenia

Przedstawimy równania konstytutywne dla ośrodków sprężysto/lepkoplastycznych w przypadku przyjęcia małych odkształceń. Badania w tym kierunku były zapoczątkowane w 1932 roku przez K.HOHENEMSERĄ i W.PRAGERĄ [40] . Ich idea była kontynuowana następnie w pracach W.W.SOKOŁOWSKIEGO [109] i L.E.MALVERNA [59] [dla zagadnień jednowymiarowych], którzy wykazali, że w oparciu o założenia K.HOHENEMSERĄ i W.PRAGERĄ [40] można opisać pewne własności dynamiczne ośrodków wrażliwych na prędkość odkształcenia. Teoria K.HOHENEMSERĄ i W.PRAGERĄ została uogólniona przez P.PERZYŃĘ [87,88] .

Początkowy warunek plastyczności [ze względu na to, że ośrodek w obszarach sprężystych nie posiada cech lepkich] nie różni się od znanych kryteriów plastyczności w klasycznej teorii plastyczności.

Przyjmuje się, że funkcja uplastycznienia jest postaci

$$/2.1/ \quad F(\bar{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \frac{f(\bar{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)}{\alpha} - 1,$$

gdzie $f(\bar{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ zależy od stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ i od stanu odkształcenia plastycznego ε_{ij}^p [zakłada się, że prędkość odkształcenia rozkłada się na część sprężystą i niesprężystą $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, przy czym $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ reprezentuje sprzężenie efektów lepkich i plastycznych], α jest parametrem

wzmocnienia, zdefiniowanym jako

$$/2.2/ \quad \alpha = \alpha(W^P) = \alpha \left(\int_0^t \dot{\sigma}_{kl} d\varepsilon_{kl}^P \right),$$

W^P oznacza energię odkształcenia plastycznego materiału.

Zakłada się, że powierzchnia płynięcia $F = 0$ rozważana w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężenia jest regularna i wypukła.

P.PERZYNA [88] zaproponował przy powyższych założeniach następujące równania konstytutywne dla materiałów wrażliwych na prędkość odkształcenia:

$$/2.3/ \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{\lambda}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie ε_{ij} , λ_{ij} są odpowiednio składowymi tensora odkształcenia, składowymi dewiatora tensora naprężenia, E jest modułem Younga, ν - współczynnikiem Poissona, γ współczynnikiem lepkości materiału, Φ jest ogólnie nieliniową funkcją argumentu F , symbol $\langle \Phi(F) \rangle$ jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$/2.4/ \quad \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } F \leq 0, \\ \Phi(F) & \text{dla } F > 0. \end{cases}$$

Funkcja $\Phi(F)$ jest określana na podstawie rezultatów badań eksperymentalnych, dotyczących dynamicznych własności materiału. Odpowiedni dobór tej funkcji pozwala na opis wpływu prędkości odkształcenia na granicę plastyczności.

Równania konstytutywne /2.3/ można również przedstawić w innej postaci, mianowicie

$$/2.5/ \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} - \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{\varepsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii},$$

gdzie e_{ij} są składowymi dewiatora tensora odkształcenia, K jest modułem odkształcenia objętościowego.

Powyższe równania świadczą, że prędkość niesprężystego odkształcenia jest funkcją stanu naprężenia, który jest

różnicą między stanem rzeczywistym i stanem odpowiadającym statycznemu warunkowi uplastycznienia. Funkcja różnicy stanu naprężenia określa prędkość odkształcenia niesprężystego zgodnie z prawem lepkości Maxwella. Natomiast składowe sprężyste tensora odkształcenia nie są zależne od prędkości odkształcenia. W równaniach konstytutywnych /2.3/ lub /2.5/ uwzględnione również wzmocnienie materiału. Funkcją F można opisać zarówno wzmocnienie izotropowe jak i anizotropowe.

Szczególным przypadkiem materiału sprężysto/lepkoplastycznego jest materiał plastyczny wrażliwy na prędkość odkształcenia i wykazujący wzmocnienie izotropowe. Założymy, że funkcja F ma postać

$$/2.6/ \quad F = \frac{f(\sigma_{ij})}{c} - 1,$$

zn. że funkcja f zależy jedynie od stanu naprężenia. Ograniczając rozważania do warunku plastyczności Hubera-Nisesa, zn. przyjmując, że

$$/2.7/ \quad f(\sigma_{ij}) = (J_2)^{1/2},$$

gdzie J_2 jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia, otrzymujemy z /2.5/ równania

$$/2.8/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2} \gamma \left\langle \Phi \left(\frac{\sqrt{J_2}}{c} - 1 \right) \right\rangle \frac{\dot{s}_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}.$$

Równania konstytutywne opisujące ośrodek sprężysto/lepkoplastycznie plastyczny otrzymuje się zakładając, że funkcja F jest niezależna od odkształceń, zn.

$$/2.9/ \quad F = \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1,$$

gdzie J_3 jest trzecim niezmiennikiem dewiatora naprężenia, a c jest stałą materiałową.

Równania konstytutywne w tym przypadku mają postać

$$/2.10/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left[\frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1 \right] \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \delta_{ij}}, \quad \dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}$$

Gdy się przyjmie, że funkcja F jest postaci

$$/2.11/ \quad F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1,$$

gdzie k oznacza granicę plastyczności przy czystym ściananiu, to równania konstytutywne /2.10/ przyjmą postać:

$$/2.12/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{\gamma}{2} \left\langle \Phi \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right) \right\rangle \frac{\dot{s}_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}.$$

W ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym ze względu na to, że J_2 jest funkcją prędkości odkształcenia, odkształcenie lepkoplastyczne występuje, jeżeli $J_2 > k^2$ niezależnie od znaku pochodnej czasowej \dot{J}_2 . Znak pochodnej \dot{J}_2 jest istotny przy określeniu stanu ośrodka [obciążenie, odciążenie, stan neutralny] w odkształceniowej teorii plastyczności.

W przypadku szczególnym przy założeniu liniowej funkcji $\Phi(F)$, tzn. $\Phi(F) = F$, z równań /2.12/ otrzymuje się równania przedstawione przez A.M.FREUDENTHALA [35]. Zakładając ponadto, że odkształcenia sprężyste są małe w porównaniu z odkształceniami niesprężystymi, otrzymuje się równania konstytutywne K.Hohenemsera i W.Pragera [40].

Równania konstytutywne ośrodków sprężysto/lepkoplastycznych przedstawione w tym punkcie były podane we współrzędnych prostokątnych. Przedstawimy obecnie sformułowanie równań konstytutywnych /2.3/ w układzie współrzędnych krzywoliniowych w składowych kontrawariantnych tensora naprężenia oraz tensora prędkości odkształcenia, w bazie naturalnej.

Równania /2.3/ przyjmą postać:

$$/2.13/ \quad d\ddot{y}^i = \frac{1}{2\mu} \dot{s}^i_j + \frac{1-2\nu}{E} \text{Tr } \sigma^k \cdot g^i_j + \gamma \left\langle \Phi(F) \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \delta_{ij}},$$

przy czym

$$/2.14/ \quad \delta^i_j = \delta^i_j - \frac{1}{2} \text{Tr} \, \delta^k_k g^{ij}, \quad \delta^k_k = g_{km} \delta^{km},$$

d^{ij} jest tensorem prędkości odkształcenia, zdefiniowanym następująco:

$$/2.15/ \quad d^{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{Dv^k}{\partial q^l} + \frac{Dv^l}{\partial q^k} \right),$$

gdzie $v^i = \frac{Dq^i}{dt}$ są składowymi kontrawariantnymi wektora prędkości, $\frac{D}{\partial q^j}$ oznacza pochodną kowariantną wektora prędkości, która jest zdefiniowana jako :

$$/2.16/ \quad \frac{Dv^k}{\partial q^l} = \frac{\partial v^k}{\partial q^l} + \Gamma^k_{jl} v^j,$$

q^i są współrzędnymi punktu w układzie współrzędnych krzywoliniowych, g^{ij} są składowymi tensora metrycznego, Γ^k_{jl} oznaczają symbole Christoffela drugiego rodzaju /por. p.3/.

W przypadku małych odkształceń tensor odkształcenia we współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych będzie miał następującą postać [61,63]:

$$/2.17/ \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[g_{ii} \frac{\partial u^i}{\partial q^j} + g_{jj} \frac{\partial u^j}{\partial q^i} \right] \quad \text{dla } i \neq j,$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u^i}{\partial q^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k} u^k$$

dla $i = j$
/nie sumować względem i /,

gdzie \vec{u} jest wektorem przemieszczenia. Składowe kowariancyjne tensora odkształcenia określimy na podstawie związku

$$/2.18/ \quad \varepsilon^{ij} = g^{im} g^{jn} \varepsilon_{mn}.$$

Składowe fizyczne tensora naprężenia $\sigma^{(ij)}$, składowe

fizyczne tensora odkształcenia $\varepsilon^{(ij)}$ oraz składowe fizyczne wektora prędkości $v^{(i)}$ określimy na podstawie związków:

$$/2.19/ \quad \sigma^{(ij)} = \sigma_{ij} h_i h_j, \quad \varepsilon^{(ij)} = \varepsilon_{ij} h_i h_j, \quad v^{(i)} = v^i h_i,$$

gdzie $h_i = \sqrt{\varepsilon_{11}}$.

3. Równania ruchu, równania i warunki ciągłości

Równania ruchu we współrzędnych prostokątnych x^i są postaci:

$$/3.1/ \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^i} = \rho \frac{dv_i}{dt} + X_i,$$

lub po wykorzystaniu definicji pochodnej materialnej

$$/3.2/ \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x^i} v_j + X_i.$$

W przypadku małych gradientów przemieszczenia równania ruchu upraszczają się do postaci:

$$/3.3/ \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + X_i.$$

Wyprowadzimy obecnie z równań ruchu we współrzędnych kartezjańskich /3.3/ równania ruchu w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych.

Oznaczmy w przestrzeni E_3 , punkt M o współrzędnych kartezjańskich prostokątnych x^1, x^2, x^3 i o współrzędnych q^1, q^2, q^3 w układzie współrzędnych krzywoliniowych. Oznaczmy przez $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ wektory jednostkowe osi x^1, x^2, x^3 . Tworzą one bazę stałą /ortonormalną/. Rozważmy jednocześnie w punkcie M wektory

$$/3.4/ \quad \vec{g}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q^i} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \vec{i}_k.$$

Są one styczne do linii współrzędnych krzywoliniowych. Tworzą one bazę /nie ortonormalną/ zwaną bazą naturalną w punkcie M , która zmienia się od punktu M do punktu sąsiedniego.

Składowe tensora metrycznego [podstawowego] g_{ij} są określone następująco

$$/3.5/ \quad g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}.$$

Wyznacznik macierzy g_{ij} jest równy :

$$/3.6/ \quad g = |g_{ik}| = \left| \frac{\partial x^r}{\partial q^i} \right| \left| \frac{\partial x^r}{\partial q^s} \right|.$$

Symbole Christoffela pierwszego rodzaju Γ_{ijk} są wyrażone przez składowe tensora metrycznego g_{ij} w następujący sposób :

$$/3.7/ \quad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right).$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju Γ^i_{jk} są określone jako :

$$/3.8/ \quad \Gamma^i_{jk} = g^{ih} \Gamma_{hjk},$$

z warunkiem symetrii względem indeksów dolnych $\Gamma^k_{lm} = \Gamma^k_{ml}$.

W przypadku współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych symbole Christoffela drugiego rodzaju są określone następująco :

$$/3.9/ \quad \begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= 0 && \text{jeżeli 3 indeksy } i, j, k \text{ są różne,} \\ \Gamma^i_{ij} &= \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^j} \\ \Gamma^i_{ii} &= -\frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^i} \end{aligned} \quad \text{gdzie } i \neq j.$$

[kręseozki pod jednakowymi indeksami oznaczają, że nie można sumować względem tych par indeksów].

Równania ruchu /3.3/ możemy we współrzędnych krzywoliniowych napisać w postaci :

$$/3.10/ \quad \frac{D\delta_i^j}{\partial q^j} = g_{ij} - X_i,$$

lub

$$/3.11/ \quad \frac{D\delta^{ij}}{\partial q^j} = g^{ij} - X^i,$$

gdzie $\vec{\delta}$ jest wektorem przemieszczenia, symbol $\frac{D}{\partial q^j}$ oznacza pochodną kowariantną.

Składowe kowariantne wektora przyspieszenia a_i mają postać :

$$/3.12/ \quad a_i = \frac{d}{dt}(g_{ij}v^j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hk}}{\partial q^i} v^h v^k,$$

składowe kontrawariantne wektora przyspieszenia a^i są wyrażone następująco :

$$/3.13/ \quad a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial q^k} v^k + g^{ih} \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial q^r} v^r v^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial q^h} v^r v^s \right),$$

przy czym v^i oznaczają składowe kontrawariantne wektora prędkości : $v^i = \frac{dq^i}{dt}$. Korzystając z definicji symboli Christoffela /3.7/ i /3.8/ można wyrażenie /3.13/ przedstawić w prostszej postaci, mianowicie :

$$/3.14/ \quad a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial q^k} v^k + \Gamma_{hk}^i v^h v^k.$$

Równania ruchu /3.10/ i /3.11/ w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych będą odpowiednio postaci :

$$/3.15/ \quad \frac{D\delta_i^j}{\partial q^j} = g \left[\frac{d}{dt}(g_{ij}v^j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hk}}{\partial q^i} v^h v^k \right] - X_i,$$

$$/3.16/ \quad \frac{D\sigma^{ij}}{Dq^j} = \rho \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial q^k} v^k + \Gamma_{hk}^i v^h v^k \right] - X^i.$$

W przypadku współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych, biorąc pod uwagę wyrażenia /3.9/, możemy równania ruchu /3.16/ przedstawić w postaci :

$$/3.17/ \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} [\sqrt{g} \sigma^{ij} g_{jj}] - \frac{1}{2} [\sigma^{jj} \frac{\partial g_{jj}}{\partial q^i}] = g_{ii} (\rho a^i - X^i),$$

gdzie a^i jest wyrażone wzorem /3.14/.

Równanie ciągłości otrzymuje się z warunku zachowania masy. W układzie współrzędnych krzywoliniowych równanie ciągłości przybiera postać [w zmiennych Eulera] :

$$/3.18/ \quad \sqrt{g} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^i} (\rho \sqrt{g} v^i) = 0.$$

We współrzędnych prostokątnych równanie to upraszcza się do postaci :

$$/3.19/ \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_{i,i} = 0.$$

Na frontach fal silnych nieciągłości [na powierzchniach na których składowe tensora naprężenia σ_{1j} oraz składowe wektora prędkości cząstek materialnych v_1 mają nieciągłość] powinny być spełnione następujące warunki [38,112] :

- warunek ciągłości dynamicznej

$$/3.20/ \quad [\sigma_{ij}] n^j = -\rho G [v_i] \quad \text{przy czym } v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t},$$

- warunek ciągłości kinematycznej

$$/3.21/ \quad [v_j] = -G n^i [\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}], \quad \varepsilon_{ij} = u_{[j,i]}, \quad \omega_{ij} = u_{[j,i]}.$$

W wyrażeniach tych nawiasy kwadratowe oznaczają wielkości

skoków wartości w nich zawartych, przy przejściu przez powierzchnię nieciągłości, np. $[v_1] = v_1^+ - v_1^-$, \vec{n} jest wektorem normalnej do powierzchni nieciągłości, G jest prędkością propagacji fali.

Jeżeli ruch jest bezwrotny, to wówczas $\omega_{1j} = 0$, a zatem warunek ciągłości kinematycznej /3.21/ przybiera postać:

$$/3.22/ \quad [v_j] = -G n^i [\varepsilon_{ij}]$$

II. DYNAMIKA PUSTKI CYLINDRYCZNEJ W OŚRODKU SPRĘŻYSTO/LEPKOPLASTYCZNYM

4. Sformułowanie problemu

W rozdziale tym zostanie przedstawione rozwiązanie zagadnienia rozprzestrzeniania się fal w półprzestrzeni sprężysto-lepkoplastycznej, zawierającej pustkę cylindryczną, wywołanych przez obciążenie brzegu zmienne w czasie i w przestrzeni, przy przyjęciu płaskiego stanu odkształcenia oraz małych deformacji.

Zostaną przedstawione rozwiązania, uzyskane na drodze numerycznej, określające stan dynamiczny pustki cylindrycznej w funkcji jej zagiębnia w półprzestrzeni oraz w funkcji intensywności obciążeń dynamicznych, w zakresie odkształceń plastycznych.

Wprowadzimy układ współrzędnych bipolarnych, pozwalający na uproszczenie geometrii rozważanego problemu. Poprzez dyskretyzację w stosunku do wprowadzonych współrzędnych bipolarnych, rozwiążemy zagadnienie propagacji fal, całkując równania problemu w czasie przy wykorzystaniu metody TRENOR'A [118] o zmiennym kroku całkowania.

W rozdziale tym zostaną podane sformułowania innych zagadnień, które można rozwiązać we współrzędnych bipolarnych przy zastosowaniu opracowanego programu obliczeń numerycznych, zmieniając w nim jedynie warunki brzegowe.

4.1. Problem dynamiczny pustki cylindrycznej w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej.

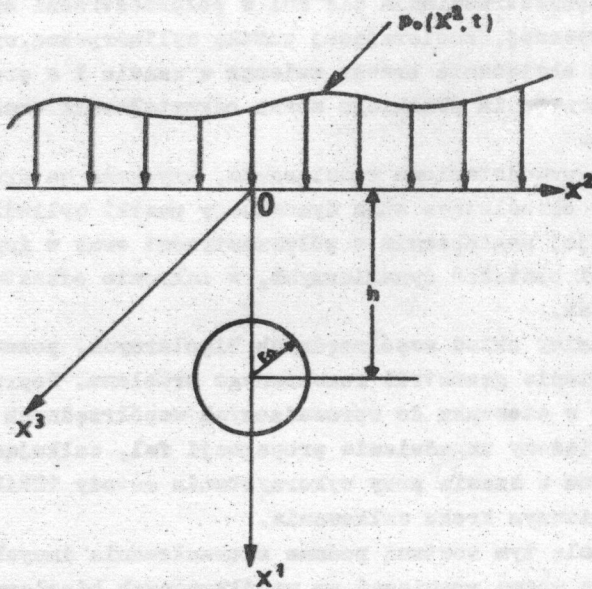
4.1.1. Półprzestrzeń zawierająca pustkę cylindryczną, obciążoną na brzegu zmiennym ciśnieniem normalnym.

Zbadamy ruch ośrodka sprężysto/lepkoplastycznego, wypełniającego półprzestrzeń $x^1 > 0$, na powierzchni której są

przyłożone zmienne w czasie oraz w funkcji x^2 , a natomiast stałe w funkcji x^3 , naprężenia normalne /rys.1/ :

$$/4.1/ \quad \sigma^{11} = -p_0(x^2, t).$$

Zakłada się, że naprężenia te są funkcją ciągłą czasu, reszującą od zera, w chwili $t = 0$ i których intensywność w pew-



Rys. 1 .

nym przedziale x^2 przekracza granicę plastyczności materiału przy czystym ścinaniu. Na brzegu półprzestrzeni można również założyć naprężenia styczne σ^{12} zmienne w czasie jak i w funkcji x^2 .

Wewnątrz półprzestrzeni $x^1 > 0$ znajduje się w odległości h od brzegu półprzestrzeni pustka cylindryczna o promieniu $r=r_0$, której oś jest równoległa do osi x^3 .

W rozważanym zagadnieniu płaskiego stanu odkształcenia,

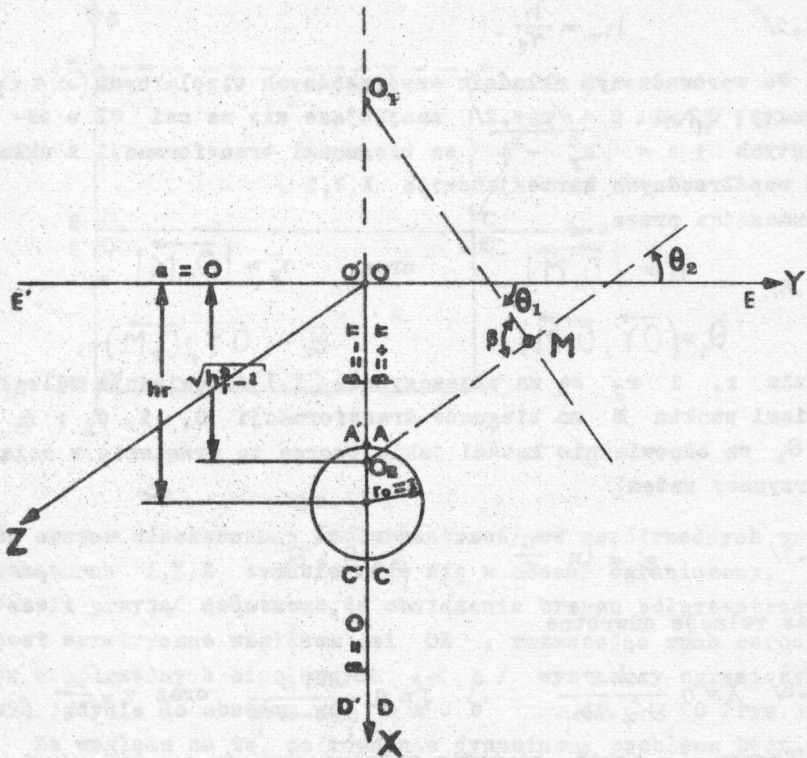
rach środka jest niezależny od składowej wektora przemieszczenia w kierunku osi x^3 , tzn. $u^3 = 0$. Znikają zatem składowe tensora odkształcenia :

$$/4.2/ \quad e^{33} = e^{43} = e^{23} = 0,$$

oraz składowe tensora naprężenia :

$$/4.3/ \quad \sigma^{43} = \sigma^{23} = 0.$$

W rozważanym przypadku celowe jest wprowadzenie współrzęd-



Rys.2 .

-nych krzywoliniowych. W płaszczyźnie (x^1, x^2) wybrano układ współrzędnych krzywoliniowych bipolarnych (α, β) - rys. 2 [4.2, 65, 62]. Na rysunku 2 x^1 i x^2 oznaczają współrzędne punktu M wewnątrz półprzestrzeni, r_0 - promień pustki cylindrycznej, X i Y są współrzędnymi zredukowanymi punktu M

$$/4.4/ \quad X = \frac{x^1}{r_0}, \quad Y = \frac{x^2}{r_0},$$

h_r oznacza głębokość zanurzenia pustki cylindrycznej wewnątrz półprzestrzeni:

$$/4.5/ \quad h_r = \frac{h}{r_0}.$$

We wprowadzonym układzie współrzędnych bipolarnych (α, β, z) , punkty O_1 i O_2 /rys.2/ znajdujące się na osi OX o odciętych $\pm a = \sqrt{h_r^2 - 1}$ są biegunami transformacji z układu współrzędnych kartezjańskich X, Y, Z.

Oznaczają przez

$$/4.6/ \quad r_1 = |\overrightarrow{O_1 M}| \quad \text{oraz} \quad r_2 = |\overrightarrow{O_2 M}|,$$

$$\theta_1 = (\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{O_1 M}) \quad \text{i} \quad \theta_2 = (\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{O_2 M}),$$

gdzie r_1 i r_2 są na płaszczyźnie (X, Y) odpowiednio odległościami punktu M od biegunów transformacji O_1 i O_2 ; θ_1 i θ_2 są odpowiednio kątami jakie tworzą te promienie z osią Y. Otrzymamy zatem

$$/4.7/ \quad \alpha = \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \beta = \theta_1 - \theta_2,$$

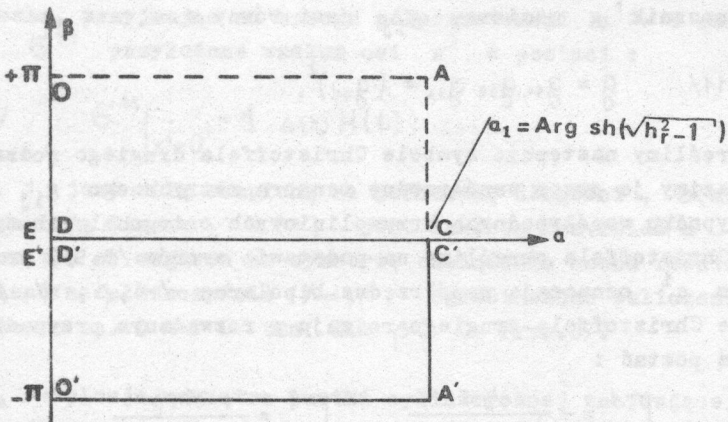
oraz relacje odwrotne

$$/4.8/ \quad X = a \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad Y = a \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \quad \text{oraz} \quad z = \frac{x^3}{r_0}.$$

Krzywe $\alpha = \text{const.}$ stanowią rodzinę okręgów o promieniach $a \operatorname{ch} \alpha$, mających bieguny $/0, -a/$ i $/0, +a/$. Oś x^2 odpowiada krzywej $\alpha = 0$, wartości $\alpha = \alpha_1$ /dodatniej/,

gdzie $\alpha_1 = \text{Arg sh } a$, odpowiada okrąg pokrywający się z konturem pustki cylindrycznej. Krzywe $\beta = \text{const.}$ przedstawiają łuki kół przechodzących przez bieguny $/0, \pm a/$, przy czym β jest kątem zawartym między promieniami r_1 i r_2 . Krzywe $\beta = \text{const.}$ mają nieciągłość wartości 2π między biegunami 0_1 i 0_2 na osi x^1 .

Na płaszczyźnie (α, β) półprzestrzeń $X > 0$, na zewnątrz pustki cylindrycznej, transformuje się w prostokąt $0 O'A'A$ [rys. 3]. Zaletą tej transformacji jest ponadto to,



Rys. 3 .

że obszar nieskończony [półprzestrzeń] we współrzędnych prostokątnych X, Y, Z transformuje się w obszar ograniczony. Jeżeli przyjąć dodatkowo, że obciążenie brzegu półprzestrzeni jest symetryczne względem osi OX , rozważając ruch ośrodka we współrzędnych bipolarnych $/\alpha, \beta/$ wystarczy ograniczyć się jedynie do obszaru np. $O'A'C'D'$ tzn. do $\beta \leq 0$ [rys.3] /.

Ze względu na to, że równania dynamiczne problemu będziemy zapisywali w układzie współrzędnych krzywoliniowych - bipolarnych wprowadzimy najpierw metrykę przestrzeni. Tensor me-

tryczny g_{ij} na podstawie /3.5/ we współrzędnych bipolar-
nych α, β, z / ma następujące składowe :

$$/4.9/ \quad g_{11} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}, \quad g_{22} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}, \quad g_{33} = 1,$$

oraz składowe macierzy odwrotnej g^{ij} są następujące [we
współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych] :

$$/4.10/ \quad g^{11} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}{a^2}, \quad g^{22} = g^{11}, \quad g^{33} = 1.$$

Wyznacznik g macierzy g_{ij} jest równy :

$$/4.11/ \quad g = g_{11} g_{22} g_{33} = (g_{11})^2.$$

Określimy następnie symbole Christoffela drugiego rodzaju.
Wyrazimy je przez współrzędne tensora metrycznego g_{ij} . W
przypadku współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych symbo-
le Christoffela określimy na podstawie wzorów /3.9/, przy-
czym q^i oznaczają współrzędne bipolarne α, β, z . Sym-
bole Christoffela drugiego rodzaju w rozważanym przypadku
mają postać :

$$/4.12/ \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \\ \Gamma_{12}^1 &= -\Gamma_{11}^2, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{11}^1, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\Gamma_{11}^1, & \Gamma_{22}^2 &= -\Gamma_{11}^2, \\ \Gamma_{21}^1 &= -\Gamma_{11}^2, & \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{11}^1. \end{aligned}$$

Pozostałe są równe zeru.

Sformułujemy obecnie inne problemy przestrzenne w przypad-
ku płaskiego stanu odkształcenia, które można łatwo opisać
we wprowadzonych współrzędnych bipolarnych. Metryka przes-
trzeni α, β, z pozostaje w tych przypadkach niezmienio-
na.

4.1.2. Półprzestrzeń obciążona na brzegu obciążeniami zmiennymi.

Przyjmując h bardzo duże w stosunku do promienia pustki cylindrycznej r_0 możemy w układzie współrzędnych bipolarnych $\{\alpha, \beta, z\}$ skonstruować rozwiązanie zagadnienia propagacji fal w półprzestrzeni na brzegu której są założone naprężenia σ^{11} oraz σ^{12} zmienne w czasie jak i w funkcji współrzędnej x^2 , natomiast stałe w funkcji x^3 [płaski stan odkształcenia].

W przypadku granicznym można rozwiązać dynamiczne zagadnienie Lamba, przyjmując na brzegu półprzestrzeni $x^1 = 0$ obciążenie σ^{11} przyłożone wzdłuż osi x^3 w postaci :

$$/4.13/ \quad \sigma^{11} \Big|_{x^1=0} = 1 \Delta(x) H(t),$$

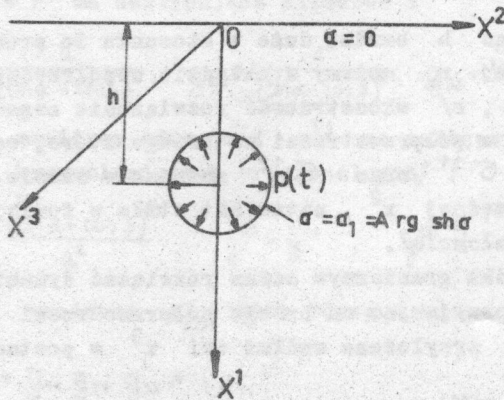
gdzie 1 jest siłą skupioną na jednostkę długości, $\Delta(x)$ jest funkcją Diraca, $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a. Problem ten ze względu na symetrię obciążenia można również rozwiązać na płaszczyźnie $\{\alpha, \beta\}$ ograniczając obliczenia do obszaru np. $OACD$ tzn. dla $\beta \geq 0$ /rys.3/.

4.1.3. Eksplozja wewnątrz pustki cylindrycznej znajdującej się w półprzestrzeni.

Na brzegu pustki cylindrycznej znajdującej się w odległości h od brzegu półprzestrzeni /rys.4/ dla $\alpha = \alpha_1$, gdzie $\alpha_1 = \text{Arg sh } a$ /rys.2/, możemy założyć ciśnienie zmienne w czasie

$$/4.14/ \quad \sigma^{(\alpha\alpha)} = -p_0(t) g_1 \quad \text{dla } \alpha = \alpha_1.$$

Można zbadać we współrzędnych bipolarnych zagadnienie propagacji fal cylindrycznych i dyfrykacji ich na brzegu półprzestrzeni $\alpha = 0$. Również ze względu na symetrię obciążenia /4.14/ możemy ograniczyć rozważania do obszaru np. $OACD$, tzn. dla $\beta \geq 0$ /rys.3/.



Rys. 4 .

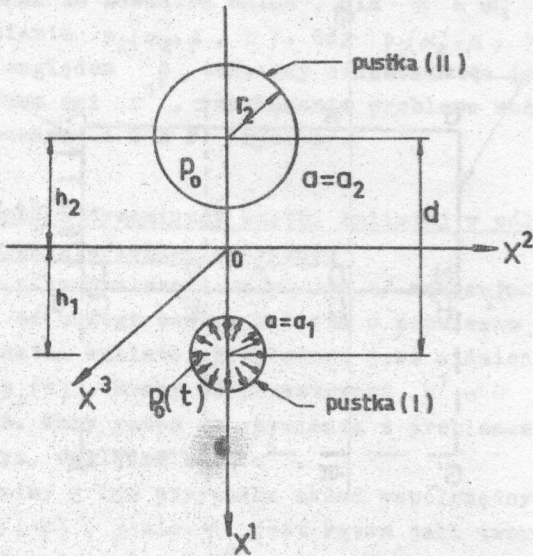
4.1.4. Dyfrakcja fal cylindrycznych na konturze cylindrycznym w półprzestrzeni nieograniczonej.

Niech wewnątrz półprzestrzeni znajdują się dwie pustki cylindryczne o różnych promieniach, równych $r = r_1$ oraz $r = r_2$ /rys.5/, których osie są do siebie równoległe. Odległość osi pustek cylindrycznych wynosi d . Niech wewnątrz pustki o promieniu r_1 będzie przyłożone ciśnienie $p(t)$ - warunek brzegowy /4.14/. Pustka o promieniu r_2 niech będzie wolna od naprężeń, lub niech wewnątrz niej panuje stałe ciśnienie p_0 . Jest to również przypadek płaskiego stanu odkształcenia.

Dobieramy układ współrzędnych bipolarnych $\{\alpha, \beta, z\}$ tak, aby okręgi o promieniach $\alpha = \alpha_1$ oraz $\alpha = \alpha_2$, przy czym $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$, w wybranym układzie współrzędnych x^1 i na płaszczyźnie (x^1, x^2) pokrywały się z konturami pustek cylindrycznych.

Obszar nieograniczony w przestrzeni x^1 , zawierający pustki cylindryczne transformuje się we współrzędnych bipo-

larnych $\{\alpha, \beta, z\}$ w obszar ograniczony $A A' G G'$ /rys.6/. Ze względu na to, że problem jest symetryczny względem x^1



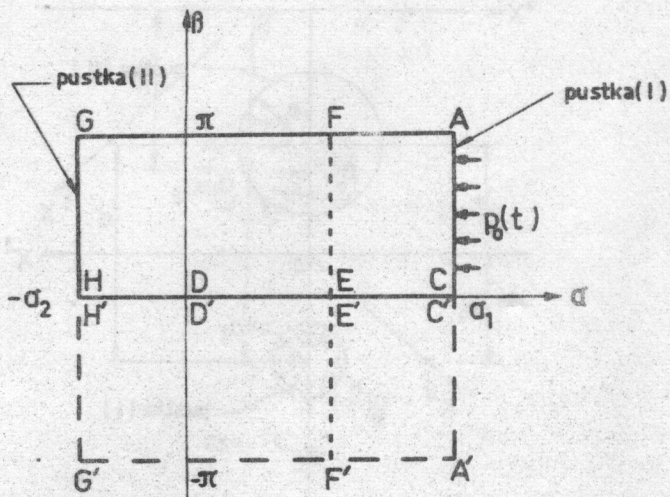
Rys. 5 .

wystarczy, że ograniczymy się w przestrzeni $\{\alpha, \beta, z\}$ do obszaru w którym $\beta \geq 0$ - obszar $A C H G$, (por. rys. 6.).

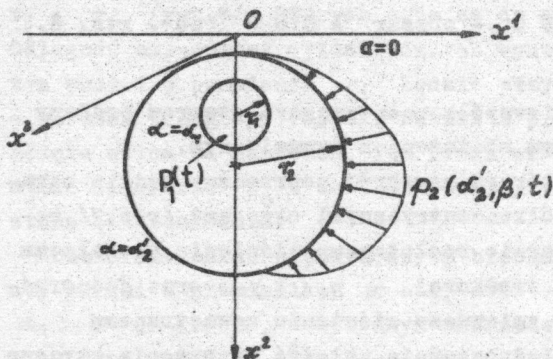
4.1.5. Cylinder z niewspółkcentrycznym otworem poddany radialnym lub stycznemu obciążeniu dynamicznemu.

Niech cylinder, którego przekrój poprzeczny będzie ograniczony dwoma niewspółkcentrycznymi okręgami /rys.7/, będzie poddany równomiernie rozłożonemu ciśnieniu normalnemu wewnątrz powierzchni środkowej - $p_1(t)$, oraz jednorodnemu w funkcji x^3 , zmiennemu ciśnieniu zewnętrznemu $p_2(\alpha_2', \beta, t)$. Można jednocześnie założyć naprężenia styczne $\sigma^{\alpha\beta}$ na obu powierzchniach zmienne w funkcji konturu i w czasie, oraz można założyć ewentualnie, że jedna z powierzchni cylindrycznych jest wolna od naprężeń normalnych.

Zagadnienie powyższe jest również przypadkiem płaskiego stanu odkształcenia, gdyż ze względu na przyjęte obciążenia



Rys. 6 .



Rys. 7 .

ruch ośrodka jest niezależny od współrzędnej x^3 .

We współrzędnych bipolarnych α, β, z na płaszczyźnie $\alpha\beta$ zdefiniujemy przekrój zewnętrzny cylindra przez $\alpha = \alpha'_2$ a brzeg wewnętrzny przez $\alpha = \alpha_1$. Przyjmijemy α_1 i α'_2 dodatnie oraz $\alpha_1 > \alpha_2$ /rys. 7 / .

We współrzędnych bipolarnych problem sprowadza się do rez-

wiązania w prostokącie $A A' F F'$ /rys.6/, przyjmując na otwore wewnętrzny walca $\alpha = \alpha_1$ [na brzegu $A A'$] ciśnienie $p_1(t)$, oraz na zewnątrz walca, dla $\alpha = \alpha_2'$ [na brzegu $F F'$] ciśnienie $p_2(\alpha_2', \beta, t)$. Gdy $p_2(\alpha_2', \beta, t)$ jest symetryczne względem β tzn. gdy ciśnienie to jest symetryczne względem osi x^1 , rozwiązanie problemu można ograniczyć do obszaru $A C E F$ /rys. 6/.

4.2. Problem dynamiczny pustki kulistej w półprzestrzeni sprężyste/lepkoplastycznej

Niech w półprzestrzeni $x^1 > 0$ /rys.1/ znajduje się w odległości h od brzegu pustka kulista o promieniu $r = r_0$. Wewnątrz pustki kulistej przyłożone jest ciśnienie zmienne w czasie $p_0(t)$. Brzeg półprzestrzeni $x^1 = 0$ jest wolny od naprężeń. Mamy zatem do czynienia z problemem osiowo-symetrycznym, względem osi x^1 .

Wprowadzimy w tym przypadku układ współrzędnych bipolarnych (α, β, φ) , gdzie φ jest kątem jaki tworzy wektor \vec{OM} z dodatnią osią Ox^2 - rys. 8. Związki /4.4/ i /4.7/ przybiorą obecnie następującą postać :

$$/4.15/ \quad X = \frac{x^1}{r_0}, \quad Y = \frac{x^2}{r_0}, \quad Z = \frac{x^3}{r_0},$$

oraz

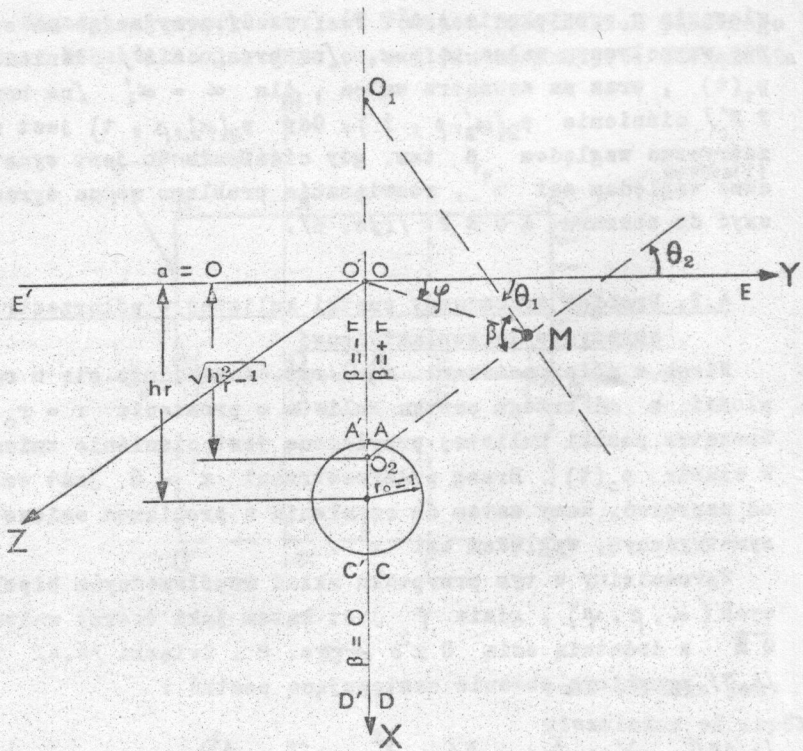
$$/4.16/ \quad \alpha = \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \beta = \theta_1 - \theta_2, \quad \varphi = (\vec{OY}, \vec{OM}).$$

Relacje odwrotne do /4.16/ będą postaci :

$$/4.17/ \quad X = a \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad Y = a \frac{\sin \beta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad Z = a \frac{\sin \beta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}.$$

Tensor metryczny ε_{ij} ma we współrzędnych bipolarnych (α, β, φ) następujące składowe :

$$/4.18/ \quad g_{11} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}, \quad g_{22} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}, \quad g_{33} = \frac{a^2 \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}.$$



Rys. 8 .

Mamy do czynienia z układem współrzędnych ortogonalnych, zatem symbole Christoffela drugiego rodzaju określa się na podstawie wzorów /3.9/. Otrzymamy :

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta},$$

$$/4.19/ \quad \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{11}^1,$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\sin^2 \beta \Gamma_{11}^1, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \beta (\cos \beta - \sin \beta \Gamma_{11}^2),$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{\sin \beta} (\cos \beta - \Gamma_{11}^2).$$

Podobnie jak w przypadku dynamiki pustki cylindrycznej w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej można sformułować szereg innych zagadnień brzegowych, które można opisać w układzie współrzędnych bipolarnych (α, β, φ) .

Mianowicie :

1. dyfrakcja fal płaskich na konturze kuli [podobnie jak w 4.1.1] ,
2. dyfrakcja fal kulistych na innym konturze kulistym [podobnie jak w 4.1.4] ,
3. propagacja fal w kuli z niewspółkoncentrycznym otworem kulistym , spowodowanych obciążeniem dynamicznym powierzchni zewnętrznej lub wewnętrznej [podobnie jak w 4.1.5].

5. Równania problemu w przypadku pustki cylindrycznej w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej

Zakładamy , że ośrodek wypełniający półprzestrzeń $x^1 \geq 0$ /rys. 1/ jest ośrodkiem sprężysto/lepkoplastycznym. Równania dynamiczne problemu zapiszemy w składowych kontrawariantnych tensora naprężenia w bazie naturalnej σ^{ij} , tensora prędkości odkształcenia d^{ij} , oraz w składowych kontrawariantnych wektora prędkości v^i . Równania konstytutywne dla ośrodka sprężysto/lepkoplastycznego przyjęto zatem postaci /2.13/, ograniczając się do warunku Hubera-Misesa /2.6/, przy którym równania te przybiorą następującą postać :

$$/5.1/ \quad \sigma^{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}^{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \text{Tr} \dot{\sigma}^k_k g^{ij} + \gamma \langle \Phi(\frac{\sqrt{J_2}}{\alpha} - 1) \rangle \frac{\dot{\sigma}^{ij}}{\sqrt{J_2}} ,$$

gdzie

$$\sigma^k_k = g_{km} \sigma^{km} , \quad J_2 = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^{ij} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^{ij} \dot{\sigma}^{kl} g_{ki} g_{lj} .$$

We współrzędnych bipolarnych (α, β, z) tensor naprężenia σ^{ij} ma następujące niezerowe składowe :

$$\sigma^{\alpha\alpha} = \sigma^{\alpha\alpha}(\alpha, \beta, t), \quad \sigma^{\beta\beta} = \sigma^{\beta\beta}(\alpha, \beta, t),$$

$$/5.2/ \quad \sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}(\alpha, \beta, t), \quad \sigma^{\alpha z} = \sigma^{\alpha z}(\alpha, \beta, t),$$

a tensor odkształcenia ma następujące niezerowe składowe :

$$/5.3/ \quad \varepsilon^{\alpha\alpha} = \varepsilon^{\alpha\alpha}(\alpha, \beta, t), \quad \varepsilon^{\beta\beta} = \varepsilon^{\beta\beta}(\alpha, \beta, t), \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta}(\alpha, \beta, t).$$

Określimy składowe kontrawariantne tensora prędkości odkształcenia d^{ij} . Na podstawie /2.16/ pochodne kowariantne v^i wektora prędkości $v^\alpha = v^\alpha(\alpha, \beta, t)$, $v^\beta = v^\beta(\alpha, \beta, t)$, biorąc pod uwagę wartości symboli Christoffela /4.12/ są następujące :

$$\frac{Dv^\alpha}{D\alpha} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{cosh}\beta} (v^\alpha \operatorname{sh}\alpha + v^\beta \sin\beta),$$

$$\frac{Dv^\beta}{D\beta} = \frac{\partial v^\beta}{\partial \beta} - \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{cosh}\beta} (v^\alpha \operatorname{sh}\alpha + v^\beta \sin\beta),$$

$$/5.4/ \quad \frac{Dv^\alpha}{D\beta} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{cosh}\beta} (v^\alpha \sin\beta - v^\beta \operatorname{sh}\alpha),$$

$$\frac{Dv^\beta}{D\alpha} = \frac{\partial v^\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{cosh}\beta} (v^\alpha \sin\beta - v^\beta \operatorname{sh}\alpha).$$

Na podstawie wzoru /2.15/ składowe tensora prędkości odkształcenia d^{ij} są następujące :

$$d^{\alpha\alpha} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{cosh}\beta} (v^\alpha \operatorname{sh}\alpha + v^\beta \sin\beta),$$

$$d^{\beta\beta} = \frac{\partial v^\beta}{\partial \beta} - \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{cosh}\beta} (v^\alpha \operatorname{sh}\alpha + v^\beta \sin\beta),$$

$$/5.5/ \quad d^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial \alpha} \right),$$

$$d^{\beta\alpha} = d^{\alpha\beta}, \quad d^{\alpha z} = d^{\alpha z} = 0, \quad d^{\beta z} = d^{\beta z} = 0, \quad d^{zz} = 0.$$

Równania konstytutywne /5.1/ [biorąc pod uwagę niezerowe wartości tensora prędkości odkształcenia /5.5/ oraz nie-

zerowe składowe tensora naprężenia /5.2/, jak również wyrażenia /4.10/] redukują się do następującej postaci :

$$\begin{aligned}
 d^{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}^{\alpha\alpha} - \frac{1}{3} \dot{\sigma} g^{11}) + \frac{1}{9k} \dot{\sigma} g^{11} + \gamma \langle \bar{\Phi}(F) \rangle (\sigma^{\alpha\alpha} - \frac{1}{3} \sigma g^{11}), \\
 d^{\beta\beta} &= \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}^{\beta\beta} - \frac{1}{3} \dot{\sigma} g^{11}) + \frac{1}{9k} \dot{\sigma} g^{11} + \gamma \langle \bar{\Phi}(F) \rangle (\sigma^{\beta\beta} - \frac{1}{3} \sigma g^{11}), \\
 /5.6/ \quad 0 &= \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}^{zz} - \frac{1}{3} \dot{\sigma}) + \frac{1}{9k} \dot{\sigma} + \gamma \langle \bar{\Phi}(F) \rangle (\sigma^{zz} - \frac{1}{3} \sigma), \\
 d^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}^{\alpha\beta} + \gamma \langle \bar{\Phi}(F) \rangle \sigma^{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$

przy czym

$$/5.7/ \quad \langle \bar{\Phi}(F) \rangle = \langle \Phi \left(\frac{\sqrt{J_2}}{\alpha} - 1 \right) \rangle \frac{1}{\sqrt{J_2}},$$

$$\text{oraz} \quad \sigma = g_{11} (\sigma^{\alpha\alpha} + \sigma^{\beta\beta}) + \sigma^{zz},$$

$$/5.8/ \quad J_2 = \frac{1}{2} \left\{ g_{11}^2 [(\sigma^{\alpha\alpha})^2 + (\sigma^{\beta\beta})^2 + 2(\sigma^{\alpha\beta})^2] + (\sigma^{zz})^2 - \frac{1}{9} [\sigma^{\alpha\alpha} + \sigma^{\beta\beta} + \sigma^{zz} g^{11}]^2 - [2g_{11}(3 - g_{11}) - 1] \right\}.$$

Dla uproszczenia rozwiązań ograniczymy się do ośrodka sprężysto/lepko-idealnie plastycznego. Przyjmijemy, że funkcja F jest postaci /2.11/. Wyrażenie /5.7/ będzie zatem następującej postaci :

$$/5.9/ \quad \langle \bar{\Phi}(F) \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right\rangle \frac{1}{\sqrt{J_2}}.$$

Wyprowadzimy równania ruchu ośrodka, we współrzędnych bipolarnych α, β, z . Z równań ruchu w przypadku współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych /3.17/, przy pominięciu wektora sił masowych $\vec{X} = 0$, uwzględniając /5.2/ oraz /4.9/ i /4.11/ otrzymamy następujący układ dwu równań :

$$\frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (g_{\alpha\alpha}^2 \sigma^{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (g_{\alpha\alpha}^2 \sigma^{\alpha\beta}) \right\} + \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{cosp}} (\sigma^{\alpha\alpha} + \sigma^{\beta\beta}) = g \alpha^{\alpha},$$

/5.10/

$$\frac{1}{g_{\beta\beta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (g_{\beta\beta}^2 \sigma^{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (g_{\beta\beta}^2 \sigma^{\beta\beta}) \right\} + \frac{\operatorname{sin} \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{cosp}} (\sigma^{\alpha\alpha} + \sigma^{\beta\beta}) = g \alpha^{\beta}.$$

Składowe kontrawariantne wektora przyspieszenia \vec{a} , występujące w równaniach ruchu /5.19/ określimy na podstawie /3.14/, biorąc pod uwagę wartości symboli Christoffella /4.12/. Otrzymamy zatem :

$$\alpha^{\alpha} = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial \alpha} v^{\alpha} + \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial \beta} v^{\beta} - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{cosp}} \left\{ \operatorname{sh} \alpha (v^{\alpha} v^{\alpha} - v^{\beta} v^{\beta}) + 2 \operatorname{sin} \beta v^{\alpha} v^{\beta} \right\},$$

/5.11/

$$\alpha^{\beta} = \frac{\partial v^{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial \alpha} v^{\alpha} + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial \beta} v^{\beta} + \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{cosp}} \left\{ \operatorname{sin} \beta (v^{\alpha} v^{\alpha} - v^{\beta} v^{\beta}) - 2 \operatorname{sh} \alpha v^{\alpha} v^{\beta} \right\}.$$

Otrzymaliśmy ostatecznie układ sześciu równań - równania /5.6/ i /5.10/ z uwzględnieniem /5.5/ i /5.11/. Jest to układ sześciu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu względem sześciu poszukiwanych wielkości : czterech składowych tensora naprężenia $\sigma^{\alpha\alpha} / \alpha, \beta, t /$, $\sigma^{\alpha\beta} / \alpha, \beta, t /$, $\sigma^{\beta\alpha} / \alpha, \beta, t /$, $\sigma^{\beta\beta} / \alpha, \beta, t /$ oraz dwóch składowych wektora prędkości $v^{\alpha} / \alpha, \beta, t /$ i $v^{\beta} / \alpha, \beta, t /$.

Powyższy układ równań rozwiążemy z zerowymi warunkami początkowymi dla $t = 0$:

$$\sigma^{\alpha\alpha}(\alpha, \beta, 0) = \sigma^{\beta\beta}(\alpha, \beta, 0) = \sigma^{\alpha\beta}(\alpha, \beta, 0) = \sigma^{\beta\alpha}(\alpha, \beta, 0) \equiv 0,$$

/5.12/

$$v^{\alpha}(\alpha, \beta, 0) = v^{\beta}(\alpha, \beta, 0) \equiv 0,$$

oraz z następującymi warunkami brzegowymi :

PRZYPADEK I : Dla zagadnienia dynamiki pustki cylindrycznej w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej obciążonej

na brzegu ciśnieniem zmiennym w czasie oraz we współrzędnej x^2 : [przypadek opisany w punkcie 4.4.1.]

dla $\alpha = 0$ [brzeg półprzestrzeni]

$$/5.13/ \quad \sigma^{\alpha\alpha}(0, \beta, t) = (1 - \cos \beta)^2 \sigma_0^{\alpha\alpha}(\beta, t),$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(0, \beta, t) = 0,$$

przy czym $\sigma_0^{\alpha\alpha}/\beta$, $t/\beta = -p_0/\beta$, $t/\frac{1}{a_2}$ jest zadaną składową normalną do powierzchni półprzestrzeni tensora naprężenia, wyrażoną w składowych fizycznych,

dla $\alpha = \alpha_1$, przy czym $\alpha_1 = \text{Arg sh } a$
[brzeg pustki cylindrycznej]

$$/5.14/ \quad \sigma^{\alpha\alpha}(\alpha_1, \beta, t) = 0, \quad \sigma^{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta, t) = 0.$$

PRZYPADK II : Dla zagadnienia rozprzestrzeniania się w półprzestrzeni falcylindrycznych wywołanych dynamicznym obciążeniem pustki cylindrycznej, znajdującej się wewnątrz tej półprzestrzeni [wewnątrz półprzestrzeni jest przyłożone ciśnienie $p_0/t/\frac{1}{a_2}$] : [przypadek opisany w punkcie 4.1.3]
dla $\alpha = \alpha_1$ [brzeg pustki cylindrycznej]

$$/5.15/ \quad \sigma^{\alpha\alpha}(\alpha_1, \beta, t) = (h_r - \cos \beta)^2 p_0(t),$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta, t) = 0,$$

dla $\alpha = 0$ [brzeg półprzestrzeni]

$$/5.16/ \quad \sigma^{\alpha\alpha}(0, \beta, t) = 0, \quad \sigma^{\alpha\beta}(0, \beta, t) = 0.$$

Wprowadzimy obecnie następujące wielkości bezwymiarowe :

$$/5.17/ \quad U = \frac{v^\alpha}{a_1}, \quad V = \frac{v^\beta}{a_1}, \quad P = \frac{\sigma^{\alpha\alpha}}{g a_1^2}, \quad Q = \frac{\sigma^{\beta\beta}}{g a_1^2}, \quad S = \frac{\sigma^{zz}}{g a_1^2},$$

$$/5.17/ \text{ c.d. } T = \frac{\sigma \alpha^2}{\rho a_1^2}, \quad \Gamma = \frac{a_1}{a_2}, \quad W = \frac{k_0}{\rho a_1^2}, \quad \tau = \frac{a_1 t}{r_0}, \quad P_0 = \frac{p_0}{\rho a_1^2},$$

gdzie a_1 jest prędkością propagacji fal podłużnych, a_2 jest prędkością propagacji fal poprzecznych

$$a_1 = \left(\frac{3K + 4\mu}{3\rho} \right)^{1/2}, \quad a_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2},$$

k_0 jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu.

Układ równań problemu: równania konstytutywne /5.6/, równania ruchu /5.10/, z uwzględnieniem /5.5/ i /5.11/, we wprowadzonych wielkościach bezwymiarowych /5.17/, po dokonaniu przekształceń algebraicznych, można przedstawić w następującej formie:

$$U_{,\tau} = -U_{,\alpha} U - U_{,\beta} V + \frac{1}{\text{ch}\alpha - \text{cosh}\beta} [(U^2 - V^2) \text{sh}\alpha + 2UV \cdot \sin\beta] + \frac{1}{g_{11}^2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (g_{11}^2 P) + \frac{\partial}{\partial \beta} (g_{11}^2 T) \right] + \frac{\text{sh}\alpha}{\text{ch}\alpha - \text{cosh}\beta} (P + Q),$$

$$V_{,\tau} = -V_{,\alpha} U - V_{,\beta} V - \frac{1}{\text{ch}\alpha - \text{cosh}\beta} [(U^2 - V^2) \sin\beta - 2UV \cdot \text{sh}\alpha] + \frac{1}{g_{11}^2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (g_{11}^2 T) + \frac{\partial}{\partial \beta} (g_{11}^2 Q) \right] + \frac{\sin\beta}{\text{ch}\alpha - \text{cosh}\beta} (P + Q),$$

$$/5.18/ \quad P_{,\tau} = c_3 U_{,\alpha} - c_5 V_{,\beta} - \frac{1}{\text{ch}\alpha - \text{cosh}\beta} (U \text{sh}\alpha + V \sin\beta) \cdot b_{21} + \tilde{f} \langle \tilde{\Psi} \rangle \{ c_5 c_6 [(P + Q) c_7 + g^{11} c_8 S] - 3 [P c_3 - Q c_5] \},$$

$$Q_{,\tau} = c_3 V_{,\beta} - c_5 U_{,\alpha} - \frac{1}{\text{ch}\alpha - \text{cosh}\beta} (U \text{sh}\alpha + V \sin\beta) b_{21} + \tilde{f} \langle \tilde{\Psi} \rangle \{ c_5 c_6 [(P + Q) c_7 + g^{11} c_8 S] + 3 [P c_5 - Q c_3] \},$$

$$T_{,\tau} = \frac{1}{\Gamma^2} (U_{,\beta} + V_{,\alpha}) - \tilde{f} \frac{6}{\Gamma^2} \langle \tilde{\Psi} \rangle T,$$

$$S_{,\tau} = -b_2 (P_{,\tau} + Q_{,\tau}) g_{11} - \frac{1}{b_2} \tilde{f} \langle \tilde{\Psi} \rangle [2S - (P + Q) g_{11}],$$

gdzie

$$b_2 = \Gamma^2 \frac{\Gamma^2 - 1}{3\Gamma^2 - 4}, \quad b_3 = \frac{\Gamma^2}{2} \frac{2 - \Gamma^2}{3\Gamma^2 - 4}, \quad b_7 = \frac{b_3}{b_2},$$

$$/5.19/ \quad c_1 = \frac{g a_1^2}{2\mu}, \quad c_2 = (1 - b_7) b_3, \quad c_4 = 2c_1 c_2 \frac{1}{a^2}, \quad c_6 = \frac{c_1}{c_2},$$

$$c_3 = \frac{c_1 + c_2}{c_1(c_1 + 2c_2)}, \quad c_5 = \frac{c_2}{c_1(c_1 + 2c_2)}, \quad c_7 = 1 - b_7,$$

$$c_8 = 1 + 2b_7, \quad b_{21} = c_3 - c_5, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\pi_0 \lambda}{3a_4},$$

oraz

$$/5.20/ \quad \langle \tilde{\Psi} \rangle = \langle \Phi \left(\frac{\sqrt{\tilde{J}_2}}{W} - 1 \right) \rangle \frac{1}{\sqrt{\tilde{J}_2}},$$

$$/5.21/ \quad \tilde{J}_2 = \frac{1}{2} \left\{ g_{11}^2 [P^2 + Q^2 + 2T^2] + S^2 - \frac{1}{g} [P + Q + Sg^{11}] \times \right. \\ \left. \times [2g_{11}(3 - g_{11}) - 1] \right\}.$$

Warunki początkowe /5.12/ będą postaci :

$$/5.22/ \quad P(\alpha, \beta, 0) = Q(\alpha, \beta, 0) = T(\alpha, \beta, 0) = S(\alpha, \beta, 0) \equiv 0,$$

$$U(\alpha, \beta, 0) = V(\alpha, \beta, 0) \equiv 0.$$

Warunki brzegowe /5.13/ - /5.16/ będą obecnie następujące:

PRZYPADK I :dla $\alpha = 0$

$$P(0, \beta, \tau) = (1 - \cos \beta)^2 P_0(\beta, \tau),$$

$$/5.23/ \quad T(0, \beta, \tau) = 0,$$

dla $\alpha = \alpha_1$

$$P(\alpha_1, \beta, \tau) = 0,$$

$$T(\alpha_1, \beta, \tau) = 0.$$

PRZYPADEK II :dla $\alpha = 0$

$$/5.24/ \quad P(0, \beta, \tau) = 0, \quad T(0, \beta, \tau) = 0,$$

dla $\alpha = \alpha_1$

$$P(\alpha_1, \beta, \tau) = (h_r - \cos \beta)^2 P_0(\tau), \quad T(\alpha_1, \beta, \tau) = 0.$$

Składowe tensora odkształcenia ε_{ij} można określić na podstawie wzorów /2.17/. Ponieważ wektor przemieszczenia \vec{u} ma składowe niezerowe u_α i u_β , otrzymamy następujące wyrażenia dla składowych tensora odkształcenia :

$$/5.25/ \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) - u_\beta \sin \beta \right], \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) - u_\alpha \operatorname{sh} \alpha \right], \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2a} \left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} \right) (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + u_\alpha \sin \beta + u_\beta \operatorname{sh} \alpha \right]. \end{aligned}$$

Składowe kontrawariantne tensora odkształcenia ε^{ij} określimy na podstawie /2.18/, otrzymując :

$$/5.26/ \quad \begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\alpha} &= g^{11} g^{11} \varepsilon_{\alpha\alpha}, \\ \varepsilon^{\beta\beta} &= g^{11} g^{11} \varepsilon_{\beta\beta}, \\ \varepsilon^{\alpha\beta} &= g^{11} g^{11} \varepsilon_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Składowe fizyczne tensora naprężenia $\sigma^{(ij)}$, tensora odkształcenia $\varepsilon^{(ij)}$ oraz wektora prędkości $v^{(i)}$, określimy na podstawie /2.19/ i /4.9/, otrzymując relacje :

$$/5.27/ \quad \sigma^{(\alpha\alpha)} = g_{11} \sigma^{\alpha\alpha}, \quad \sigma^{(\beta\beta)} = g_{11} \sigma^{\beta\beta},$$

$$\sigma^{(zz)} = \sigma^{zz}, \quad \sigma^{(\alpha\beta)} = g_{\alpha\mu} \sigma^{\alpha\beta},$$

$$/5.27/ \text{ o.d. } \varepsilon^{(\alpha\alpha)} = g_{\alpha\mu} \varepsilon^{\alpha\alpha}, \quad \varepsilon^{(\rho\rho)} = g_{\rho\mu} \varepsilon^{\rho\rho}, \quad \varepsilon^{(\alpha\rho)} = g_{\alpha\mu} \varepsilon^{\alpha\rho},$$

$$v^{(\alpha)} = \sqrt{g_{\alpha\mu}} v^{\alpha}, \quad v^{(\rho)} = \sqrt{g_{\rho\mu}} v^{\rho}.$$

Oznaczmy w wielkościach bezwymiarowych /5.17/ składowe fizyczne tensora naprężenia oraz składowe fizyczne wektora prędkości, wężykiem u góry. Otrzymamy następujące relacje:

$$/5.28/ \quad \tilde{P} = g_{\mu\alpha} P, \quad \tilde{Q} = g_{\mu\alpha} Q, \quad \tilde{S} = S, \quad \tilde{T} = g_{\mu\alpha} T,$$

$$\tilde{u} = \sqrt{g_{\mu\alpha}} u, \quad \tilde{v} = \sqrt{g_{\mu\alpha}} v.$$

6. Wybór metody rozwiązania

Układ równań problemu /5.6/ i /5.10/ z uwzględnieniem wyrażeń /5.5/ i /5.11/ można przedstawić w bardziej zwartej zapisie macierzowym

$$/6.1/ \quad L[u] = \underline{A} u_{,t} + \underline{B} u_{,\alpha} + \underline{C} u_{,\rho} + D = 0,$$

gdzie u jest wektorem, \underline{A} , \underline{B} i \underline{C} są macierzami symetrycznymi o wymiarach 6×6 , oraz ponadto macierz \underline{A} jest określona dodatnio, \underline{D} jest nieliniowym wektorem:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & -b_3 b_3 g^{\mu\mu} \\ 0 & 0 & 0 & -b_3 & b_2 b_3 g^{\mu\mu} \\ 0 & 0 & 0 & -b_3 g^{\mu\mu} & -b_3 g^{\mu\mu} b_2 g^{\mu\mu} \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} v & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

/6.2/

$$\underline{u}^T = [U, V, T, P, Q, S]$$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{matrix} /6.2/_{\text{od}} \\ \sim \\ \text{B} \end{matrix} \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & U & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} -\varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ \Phi_{44} \\ -\Phi_{11} \\ -\Phi_{22} \\ \Phi_{33} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\varphi_1 = \frac{1}{\text{ch}\alpha - \cos\beta} [\text{sh}\alpha (P+Q-U^2+V^2) + 2 \sin\beta UV],$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\text{ch}\alpha - \cos\beta} [\sin\beta (P+Q-U^2+V^2) + \Sigma \text{sh}\alpha UV],$$

$$\Phi_{44} = \frac{1}{\text{ch}\alpha - \cos\beta} [U \text{sh}\alpha + V \sin\beta] + \tilde{y} \langle \tilde{\Psi} \rangle (P - \frac{1}{3} \Sigma g^{nn}),$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{\text{ch}\alpha - \cos\beta} [U \text{sh}\alpha + V \sin\beta] + \tilde{y} \langle \tilde{\Psi} \rangle (Q - \frac{1}{3} \Sigma g^{nn}),$$

$$\Phi_{33} = g^{nn} \tilde{y} \langle \tilde{\Psi} \rangle (S - \frac{1}{3} \Sigma g^{nn}),$$

$$\Phi_{44} = 2 \tilde{y} \langle \tilde{\Psi} \rangle T,$$

$$\Sigma = g_{nn} (P+Q) + S.$$

Elementy macierzy $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$ oraz wektora $\underset{\sim}{D}$ są funkcjami α , β oraz \underline{u} . Układ równań /6.1/ jest układem równań różniczkowych quasi-liniowych, typu hiperbolicznego.

Ze względu na nieliniowość problemu będziemy poszukiwali rozwiązania zagadnienia granicznego na drodze numerycznej. Układ równań /6.1/ można rozwiązać metodą różnic skończonych wzdłuż biocharakterystyk. Metoda ta była stosowana w przestrzennych zagadnieniach dynamiki gazów przez D.S.BUTLERA [17], M.BURNATA, A.KIEŁBASIŃSKIEGO i A.WAKULICZA [16], D.J.RICHARDSONA [103], W.W.RUSANOWA [104]. Metoda ta była również stosowana w dynamicznych zagadnieniach teorii sprężystości przez P.C.CHOU i R.R.KARPA [22], R.J.GLIFTONA [26], W.W.BECKERA [102], P.F.SABADASZA i R.A.CZERWIENIENKO [105], W.N.

KUKUDŻANOWA [52] oraz M.Ziva [128-130]. W dynamicznych zagadnieniach teorii plastyczności metodę tę stosowali: M.I.ESTRIN [30], R.J.CLIFTON [27], L.D.BERTHOLF [10] oraz H.SAUERWEIN [106]. W zagadnieniach falowych teorii lepkoplastyczności metoda była adaptowana przez A.BAŁTOWA [1,2], D.KOLAROWA i A.BAŁTOWA [51], J.BEJDĘ [4-9] oraz S.MURAKAMI i J.BEJDĘ [66].

Metoda różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk polega na określeniu powierzchni charakterystycznych układu równań /6.2/; stożków charakterystycznych; bicharakterystyk równań /6.2/, a zatem prędkości propagacji fal, wreszcie równań różniczkowych wzdłuż bicharakterystyk. Następnie poszukuje się rozwiązania problemu granicznego metodą różnic skończonych, rozpisanych wzdłuż bicharakterystyk. W przypadku zagadnień dynamicznych dwuwymiarowych [dwie zmienne przestrzenne α , β oraz czas t] w trójwymiarowej przestrzeni α, β, t obiera się rodzinę płaszczyzn $t = n \Delta t$, gdzie Δt jest małą liczbą dodatnią równą odcinkowi podziału siatki w kierunku osi czasu t , n jest liczbą całkowitą. Znajdąc rozwiązanie równania /6.1/ na n -tej płaszczyźnie $t = \text{const.}$, poszukuje się rozwiązania w dowolnym punkcie α_0, β_0 płaszczyzny $(n+1)$ -szej w obszarze określoności, całkując związki różnicowe wzdłuż bicharakterystyk biegnących od punktu α_0, β_0 do punktu przecięcia się tych bicharakterystyk z płaszczyzną n -tą. Całkowanie wykonuje się w sposób przybliżony, najczęściej zgodnie z regułą trapezów. Występujące w równaniach różnicowych pochodne cząstkowe, w punkcie α_0, β_0 płaszczyzny n -tej, eliminuje się z dodatkowych równań - kombinacji liniowych równań różnicowych wzdłuż pewnych wybranych bicharakterystyk, jak też samych równań /6.1/ scałkowanych względem czasu [tzn. przy $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$]. Pochodne cząstkowe względem α i β w płaszczyźnie $(n-1)$ -szej występujące w równaniach różnicowych problemu zastępuje się przez schematy różnicowe.

Ponieważ powierzchnie charakterystyczne są jednocześnie powierzchniami falowymi, przedstawiona w skrócie metoda różnic skończonych rozpisanych wzdłuż biocharakterystyk ma tę zaletę, że daje ona dobrą ilustrację procesu rozprzestrzeniania się fal, ich odbić oraz ich wzajemnych współdziałań. Ponadto w nielicznych przypadkach udaje się skonstruować rozwiązanie problemu na frontach fal w postaci zamkniętej.

Metoda ta posiada jednak pewną wadę. Mianowicie, otrzymuje się schematy różnicowe w skomplikowanej postaci, por. np. [5]. Rozwiązanie problemu brzegowego na drodze numerycznej można wykonać jedynie na maszynie cyfrowej posiadającej bardzo dużą pamięć wewnętrzną. Ponadto czas liczenia jest bardzo długi.

W zagadnieniach jednowymiarowych rozprzestrzeniania się fal plastycznych lub lepkoplastycznych najczęściej stosowaną metodą jest metoda charakterystyk. W przypadku gdy ruch rozważanego ośrodka zależy tylko od jednej zmiennej przestrzennej x , układ równań /6.1/ redukuje się do postaci:

$$/6.3/ \quad L[\underline{u}] = \underline{A} \underline{u}_{,t} + \underline{B} \underline{u}_{,x} + \underline{D} = 0.$$

Ponieważ macierz \underline{A} jest określona dodatnio [zatem jest macierzą nieosobliwą] i jeżeli $a/x, t/$ jest rzeczywistym rozwiązaniem równania algebraicznego

$$/6.4/ \quad Q = |\underline{B} - a \underline{A}|.$$

rzędu n -tego względem a , to krzywe określone równaniem różniczkowym zwozajnym

$$/6.5/ \quad dx = \pm a(x, t) dt,$$

są krzywymi charakterystycznymi układu równań /6.3/.

Układ równań /6.3/ można zastąpić ekwiwalentnym mu

układem równań różniczkowych zwyczajnych wzdłuż charakterystyk, mianowicie :

$$/6.6/ \quad \underline{\underline{L}} L[\underline{u}] = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{B}} \left(\frac{d\underline{u}}{dt} \right) + \underline{\underline{L}} \underline{\underline{D}} = 0,$$

gdzie $\underline{\underline{L}}$ jest lewym wektorem własnym macierzy

$$/6.7/ \quad \underline{\underline{L}} (\underline{\underline{B}} - a \underline{\underline{A}}) = 0.$$

Równania /6.6/ opisują związki na charakterystykach. Wektor $\underline{\underline{L}}$ określa się z równań /6.7/. Tak więc w przypadku układu równań /6.3/ typu hiperbolicznego tzn. gdy istnieje n rodzin krzywych charakterystycznych, można ten układ równań zastąpić układem równań /6.6/, w którym każde równanie zawiera różniczkowanie jedynie w kierunku jednego tylko kierunku charakterystycznego.

Rozwiązanie poszczególnych problemów brzegowych opisanym układem równań /6.3/ dokonuje się metodą przybliżoną, polegającą na zamianie różniczkowych równań charakterystycznych /6.6/ na płaszczyźnie hodografu oraz na płaszczyźnie fazowej równaniami w przyrostach skończonych. W szczególnych przypadkach można przy użyciu metody charakterystyk skonstruować ściśle analityczne rozwiązanie zagadnień granicznych, zwłaszcza na frontach fal silnych nieciągłości.

Powróćmy do zagadnienia przestrzennego, opisanego równaniami /6.1/.

W niniejszej pracy postanowiono zastosować do rozwiązania postawionego przestrzennego problemu brzegowego metodę bezpośredniego całkowania równań problemu /6.1/. Do całkowania równań problemu w czasie wykorzystano metodę TREANORA [148], uogólniając ją na przypadek układu równań różniczkowych, oraz uogólniając na przypadek zmiennego kroku całkowania w czasie. Metoda ta pozwala na szybkie rozwiązanie postawionego problemu przy użyciu maszyn cyfrowych średniej wielkości. Ze względu na możliwość uzmiennienia kroku cał-

kowania w czasie metoda ta nadaje się doskonale do rozwiązywania zagadnień dynamicznych, gdzie mamy do czynienia z szybkimi zmianami naprężenia w trakcie procesu obciążeń dynamicznych.

Metoda ta zaproponowana poraz pierwszy przez Ch.E. TREANORA [118], jest przydatna do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych typu $y / t = f [y / t - y / t]$, gdy funkcja f przybiera znaczne wartości a y jest funkcją wolno zmienną w funkcji czasu t . Metodę tę można w prosty sposób uogólnić na przypadek układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Aby się przekonać o przydatności tej metody w rozwiązywaniu zagadnień falowych teorii lepkoplastyczności rozwiązano prosty przypadek propagacji fal plastycznych w pręcie. Rozważono przypadek pręta o skończonej długości l , którego brzeg $x = 0$ został obciążony ciśnieniem zmiennym w czasie, narastającym w krótkim czasie monotonicznie od zera do stałej wartości, przewyższającej granicę plastyczności na rozciąganie. Brzeg pręta $x = l$ jest utwierdzony.

Równania konstytutywne /2.12/ w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia upraszczają się do postaci:

$$/6.8/ \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mu^* \operatorname{sign} \sigma \Phi \left\langle \frac{|\sigma|}{k} - 1 \right\rangle,$$

gdzie $\mu^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \mu$.

Równania ruchu i równanie ciągłości będą miały postać:

$$/6.9/ \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Przyjęto zerowe warunki początkowe:

$$/6.10/ \quad \sigma(x, 0) = v(x, 0) \equiv 0,$$

oraz warunki brzegowe:

$$/6.11/ \quad \sigma(0, t) = p_0(1 - e^{-t}), \quad p_0 > 0 \quad \text{oraz} \quad \sigma(0, l) = 0.$$

Przedstawimy pierwszy przypadek efektywności metody Treanora. Mianowicie przedstawimy rozwiązanie na froncie fali silnej nieciągłości propagującej się w półnieskończonym pręcie sprężysto/lepkoplastycznym.

Zgodnie z /6.4/ układ równań /6.8/ , /6.9/ posiada następujące rodziny charakterystyk : $dx = \pm a dt$, gdzie $a = \sqrt{E/\rho}$. Wzdłuż charakterystyk otrzymany na podstawie /6.6/ następujące związki :

$$/6.12/ \quad d\sigma \mp \rho a dv + \rho a \gamma^* \operatorname{sign} \sigma \Phi \left\langle \frac{|\sigma|}{k} - 1 \right\rangle dt = 0, \quad \text{dla} \quad dx = \pm a dt$$

Fala silnej nieciągłości spowodowana nagłym obciążeniem brzegu [przyjmijmy warunek brzegowy $\sigma(0, 0) = -p_0$], będzie pokrywała się z charakterystyką o równaniu $x = at$. Na fali tej powinien być spełniony warunek ciągłości dynamicznej /3.20/, z którego otrzymany $\sigma = -\rho a v$ [przy przyjęciu warunków początkowych /6.11/].

Otrzymany zatem na froncie fali silnej nieciągłości $x = at$ równanie :

$$/6.13/ \quad \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{2} \rho a \gamma^* \operatorname{sign} \sigma \Phi \left\langle \frac{|\sigma|}{k} - 1 \right\rangle = 0.$$

Dla modelu ciała SOKOŁOWSKIGO [124] , tzn. przy $\Phi \langle F \rangle = \langle F \rangle$, oznaczając $\eta = 0.5 \rho a \gamma^* \operatorname{sign} \sigma$ oraz $S = \frac{|\sigma|}{k} - 1$ i $\tau = k \eta t$ otrzymamy równanie wzdłuż fali silnej nieciągłości :

$$/6.14/ \quad \frac{dS}{d\tau} + \langle S \rangle = 0,$$

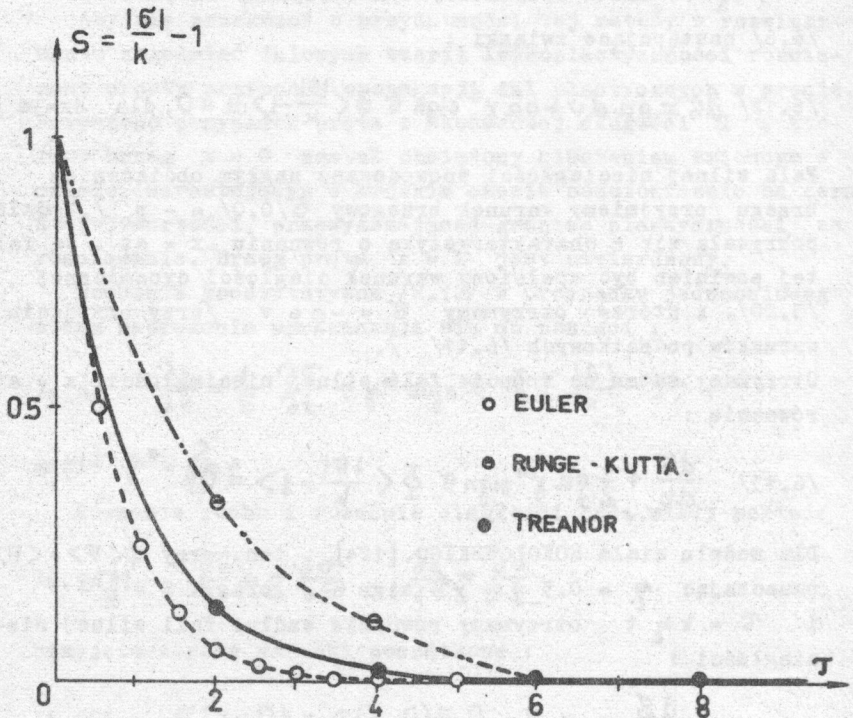
które rozwiążemy z warunkiem początkowym dla $\tau = 0$:

$$S(0) = S_0 = \frac{P}{k} - 1.$$

Rozwiązanie równania /6.14/ jest postaci :

$$/6.15/ \quad S(\tau) = S_0 e^{-\tau}.$$

Równanie /6.14/ rozwiązano również numerycznie, metodą Eulera, metodą Runge-Kutta czwartego rzędu i metodą Treanora o stałym kroku całkowania. Rozwiązania te oraz rozwiązanie ścisłe /6.15/ przedstawiono na rys. 9, przy przyjęciu



Rys. 9 .

$\frac{P}{k} = 2$. Znaczkami "o" oznaczone rozwiązanie metodą Treano-

ra, przyjmując $\Delta\tau = 2$. Znaczkami "e" oznaczono rozwiązanie metodą Runge-Kutta, przy przyjęciu takiego samego kroku całkowania $\Delta\tau = 2$. Natomiast znaczkami "o" oznaczono rozwiązanie metodą Eulera, przyjmując $\Delta\tau = 0.5$, co jest uwarunkowane zbieżnością metody, tzn. koniecznością spełnienia warunku $\Delta\tau \leq 2$.

Widać, że metoda Treanora daje rozwiązanie ścisłe w całym przedziale czasu [Rozwiązanie ścisłe jest oznaczone linią ciągłą]. Ponadto przyjęty krok całkowania $\Delta\tau$ w metodzie tej jest znacznie większy niż dopuszczalny w metodzie Eulera.

W szeregu innych problemach propagacji lepkoplastycznych fal silnych nieciągłości, na frontach tych fal zmiana naprężenia opisywana jest równaniami podobnymi do /6.14/. Z powyższej przytoczonego przykładu widać jak metoda Treanora jest przydatna w rozwiązywaniu zagadnień na frontach fal silnych nieciągłości. Błąd obliczeń popełniony przy wyznaczaniu parametrów rozwiązań na froncie fali przenosi się następnie w obszar za falą, gdzie następuje jego nawarstwienie.

Z tych względów zastosowano algorytm Treanora nie tylko w zagadnieniach przestrzennych propagacji fal lepkoplastycznych, lecz również w zagadnieniach jednowymiarowych, rozwiązywanych metodą charakterystyk. Algorytm ten zastosowano do rozwiązań na frontach fal silnych nieciągłości jak też do całkowania związków wzdłuż rodziny charakterystyk określonej równaniem $dx = 0$.

Następnie, również w charakterze przykładu rozwiązano zagadnienie propagacji fal lepkoplastycznych w pręcie o skończonej długości, przy przyjęciu warunków brzegowych /6.11/. Zagadnienie to rozwiązano kilkoma metodami numerycznymi i porównano otrzymane wyniki.

Rozwiązania skonstruowano następującymi metodami :

- 1^o metodą siatek charakterystyk : określono charakterystyki układu równań /6.8/ i /6.4/, następnie określono równania różniczkowe wzdłuż tych charakterystyk. Równania te zastąpiono schematami różnicowymi.

- 2° metodą różnic skończonych [explicitie]: rozwiązano układ równań problemu, zastępując go odpowiednim układem równań w przyrostach skończonych, przyjmując schemat dyskretyzacji explicitie, spełniając warunek stateczności rozwiązania $\Delta x \leq \frac{\Delta x}{a}$, gdzie $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.
- 3° metodą różnic skończonych [schemat implicitie]: jak poprzednio, lecz przyjmując schemat dyskretyzacji implicitie - schemat bezwarunkowo stateczny [57]. Otrzymany układ równań zwyczajnych [układ 2 n równań algebraicznych, gdzie n oznacza liczbę odcinków dyskretyzacji na jakie został podzielony pręt] rozwiązano metodą relaksacyjną - metoda Gaussa-Seidela z tzw. parametrem relaksacji [57].
- 4° metodą różnic skończonych [Treanor]: przyjęto schemat dyskretyzacji explicitie, całkując względem czasu układ równań problemu przy zastosowaniu algorytmu Treanora, zakładając kolejno stały i zmienny krok całkowania w czasie.

Rozwiązania numeryczne wykonano dla wszystkich czterech przypadków na maszynie cyfrowej, dla identycznych danych liczbowych. Przyjęto jednakową liczbę odcinków dyskretyzacji wzdłuż długości pręta. Rozwiązania poszukiwano na płaszczyźnie fazowej $/x, t/$ dla tej samej wielkości obszaru. Dla ustalonego czasu $t = 4 \text{ l/a}$ otrzymano tymi metodami rozwiązania identyczne z dokładnością rzędu 10^{-4} .

Porównano również czas obliczeń dla poszczególnych metod [przy dokonaniu optymalizacji każdego z programów obliczeń numerycznych]:

1° metoda charakterystyk	12 " 221
2° metoda różnic skończonych /explicitie/	27 " 012
3° metoda różnic skończonych /implicitie/	52 " 814
4° metoda różnic skończonych /Treanor/	16 " 386 .

Można stwierdzić od razu, że metoda druga i trzecia jest najmniej efektywna. Czas obliczeń numerycznych dwóch pozostałych metod jest porównywalny.

7. Rozwiązanie numeryczne problemu rozprzestrzeniania się fal plastycznych w półprzestrzeni z pustą cylindryczną

7.1. Dyskretyzacja problemu.

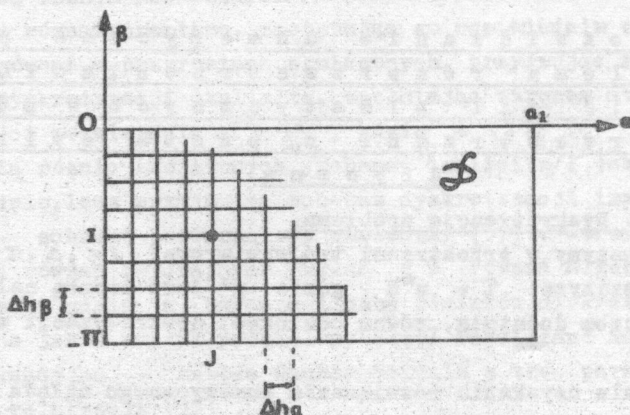
Rozważmy w przestrzeni trójwymiarowej $/\alpha, \beta, \tau/$ rodzinną płaszczyzn $\tau = n^*H$, gdzie n^* jest liczbą całkowitą, H - liczbą dodatnią, równą odcinkowi dyskretyzacji względem czasu.

W celu uzyskania rozwiązania numerycznego układu równań /6.1/ poszukujemy takiego operatora różnicowego $L[\underline{u}] = 0$, by w dowolnym punkcie obszaru określoności $/n+1/-$ szej płaszczyzny dyskretyzacji $\tau = \text{const}$ rozwiązanie było aproksymowane z żądaną dokładnością przez operację $L[\underline{u}] = 0$, przy czym \underline{u} jest zadane na n -tej płaszczyźnie $\tau = \text{const}$. [schemat dyskretyzacji explicite]. W punktach wewnętrznych obszaru, problem sprowadza się do rozwiązania zagadnienia Cauchy. W punktach leżących na granicy obszaru dla danego problemu mieszanego początkowo-brzegowego, wektor \underline{u} musi spełniać dodatkowo warunki brzegowe.

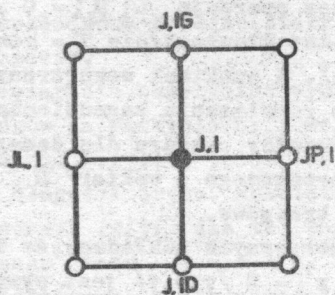
Dla uproszczenia obliczeń numerycznych zakładamy, że obciążenie brzegu półprzestrzeni $x^1 = 0$ /rys.1/ jest symetryczne względem osi $0 x^1$. Nie ogranicza to przedstawionej metody, pozwala jedynie na ograniczenie obliczeń do obszaru np. $\beta \leq 0$ /rys.3/, co powoduje dwukrotne zmniejszenie czasu obliczeń numerycznych.

7.1.1. Dyskretyzacja obszaru.

Obszar \mathcal{D} $[0 \leq \alpha \leq \alpha_1, -\infty < \beta < 0]$ dzielimy prostokątną siatką prostych $\alpha = \text{const}$. i $\beta = \text{const}$. /rys.10/, o podziale Δh_α i Δh_β , gdzie $\Delta h_\alpha = \frac{\alpha_1}{n_1}$, $\Delta h_\beta = \frac{\beta}{n_2}$, przy czym n_1 i n_2 są liczbami odcinków podziału obszaru \mathcal{D} w kierunkach α i β . Ponadto przyjmiemy $n_\alpha = n_1 + 1$, $n_\beta = n_2 + 1$.



Rys. 10 a .



Rys. 10 b .

W punktach węzłowych siatki określimy geometrię problemu, tzn. określimy w tych punktach składową tensora metrycznego g^{11} [oraz ξ_{11}], oraz jego pochodne w kierunkach $\alpha = \text{const.}$ i $\beta = \text{const.}$ Na rys. 10 b przedstawiono elementarne oczko siatki podziału obszaru \mathcal{S} .

7.1.2. Dyskretyzacja funkcji i pochodnych.

Zakładamy, że na n -tej płaszczyźnie dyskretyzacji względem czasu, znane są wartości wektora \underline{u} w punktach przecięcia siatki $/J, I/$, $J = 1, \dots, n$, $I = 1, \dots, n$. Macierze \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} oraz wektor \underline{D} w równaniu /6.1/ są również określone na płaszczyźnie n -tej. W płaszczyźnie $/n+1/-szej$ poszukujemy operatora $L[\underline{u}] = 0$.

W punktach wewnętrznych obszaru \mathcal{D} /rys.10 a/ pochodne cząstkowe składowych wektora \underline{u} w kierunkach α i β zastępujemy odpowiednie przez różnice centrowane [dla ustalonego czasu $\tau = \text{const.}$]:

$$\frac{d u_i}{d \alpha} = \frac{1}{\Delta h_\alpha} [u_i(\gamma+1, I) - u_i(\gamma, I)],$$

$$/7.1/ \quad \frac{d u_i}{d \beta} = \frac{1}{\Delta h_\beta} [u_i(\gamma, I+1) - u_i(\gamma, I)]. \quad /i=1, \dots, 6/$$

W punktach leżących na brzegach obszaru \mathcal{D} dla $\alpha = 0$ i $\alpha = \alpha_1$ pochodne cząstkowe składowych wektora \underline{u} w kierunku α [dla ustalonego czasu $\tau = \text{const.}$] zastąpimy odpowiednie przez różnice w przód i w tył :

$$\frac{d u_i}{d \alpha} = \frac{1}{\Delta h_\alpha} [u_i(2, I) - u_i(1, I)],$$

$$/7.2/ \quad \frac{d u_i}{d \alpha} = \frac{1}{\Delta h_\alpha} [u_i(n_\alpha, I) - u_i(n_\alpha - 1, I)].$$

Składowe wektora \underline{u} w płaszczyźnie /n+1/-szej tzn. dla $\tau = /n+1/ \cdot H$ powinny spełniać warunki brzegowe /5.23/ dla $\alpha = 0$ [brzeg półprzestrzeni] oraz dla $\alpha = \alpha_1$ [brzeg pustki cylindrycznej]. Dodatkowo składowe wektora \underline{u} powinny spełniać warunki wynikające z symetrii problemu [założono bowiem, że obciążenie brzegu $x^1 = 0$ jest symetryczne względem osi $0 x^1$]. Powinny być zatem spełnione warunki :

$$/7.3/ \quad \begin{aligned} T(\alpha, 0, \tau) &= 0, \\ V(\alpha, 0, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad \text{dla } \beta = 0,$$

$$/7.4/ \quad \begin{aligned} T(\alpha, -\bar{n}, \tau) &= 0, \\ V(\alpha, -\bar{n}, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad \text{dla } \beta = -\bar{n}.$$

Ponadto, ze względu na to, że następujące składowe wektora \underline{u} : P, Q, S i U są symetryczne względem osi $0 x^1$ oraz składowe V i T są antysymetryczne względem tej osi, otrzymamy następujące warunki :

$$\begin{aligned}
 & P(\alpha, \pi - \Delta h_p, \tau) = P(\alpha, -\pi + \Delta h_p, \tau), \\
 & Q(\alpha, \pi - \Delta h_p, \tau) = Q(\alpha, -\pi + \Delta h_p, \tau), \\
 /7.5/ \quad & S(\alpha, \pi - \Delta h_p, \tau) = S(\alpha, -\pi + \Delta h_p, \tau), \\
 & U(\alpha, \pi - \Delta h_p, \tau) = U(\alpha, -\pi + \Delta h_p, \tau), \\
 & V(\alpha, \pi - \Delta h_p, \tau) = -V(\alpha, -\pi + \Delta h_p, \tau), \\
 & T(\alpha, \pi - \Delta h_p, \tau) = -T(\alpha, -\pi + \Delta h_p, \tau),
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 & P(\alpha, \Delta h_p, \tau) = P(\alpha, -\Delta h_p, \tau), \\
 & Q(\alpha, \Delta h_p, \tau) = Q(\alpha, -\Delta h_p, \tau), \\
 & S(\alpha, \Delta h_p, \tau) = S(\alpha, -\Delta h_p, \tau), \\
 /7.6/ \quad & U(\alpha, \Delta h_p, \tau) = U(\alpha, -\Delta h_p, \tau), \\
 & V(\alpha, \Delta h_p, \tau) = -V(\alpha, -\Delta h_p, \tau), \\
 & T(\alpha, \Delta h_p, \tau) = -T(\alpha, -\Delta h_p, \tau).
 \end{aligned}$$

Przyjmijmy dekompozycję wektora \underline{u} w postaci :

$$/7.7/ \quad \underline{u} = [\underline{u}]_{el} + [\underline{u}]_{pl},$$

gdzie $[\underline{u}]_{el}$ przedstawia część sprężystą wektora, a $[\underline{u}]_{pl}$ część plastyczną.

Z układu równań problemu $L[\underline{u}] = 0$ /6.1/ możemy wy-

eliminować pochodną czasową wektora $\mathcal{U}_{, \tau}$, otrzymując następujący układ równań różniczkowych dla dowolnego punktu wewnętrznego $/J, I/$ obszaru \mathcal{D} :

- dla części sprężystej mamy:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dU}{d\tau} / J, I \right] &= \frac{1}{\Delta h_{\alpha}} \left[P / JP, IG / \cdot (\varepsilon_{11} / JP, I /)^2 - P / JL, I / \right] \\ &\quad \cdot (\varepsilon^{11} / J, I /)^2 + \frac{1}{\Delta h_{\rho}} \left[T / J, IG / \cdot (\varepsilon_{11} / J, IG /)^2 - \right. \\ &\quad \left. T / J, ID / \right] \cdot (\varepsilon^{11} / J, I /)^2 + \text{sh } / J \cdot \Delta h_{\alpha} / \left[P / J, I / \right. \\ &\quad \left. + Q / J, I / \right] \cdot BA / J, I / + \left\{ \left[/ U / J, I / \right]^2 - \left[/ V / J, I / \right]^2 \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \text{sh } / J \cdot \Delta h_{\alpha} / + 2 U / J, I / \cdot V / J, I / \cdot \sin / I \cdot \Delta h_{\rho} / \cdot \\ &\quad \cdot BA / J, I / - \frac{1}{\Delta h_{\alpha}} \left[U / JP, I / - U / JL, I / \right] \cdot U / J, I / - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta h_{\rho}} \left[U / J, IG / - U / J, ID / \right] \cdot V / J, I / \quad , \\ \left[\frac{dV}{d\tau} / J, I \right] &= \frac{1}{\Delta h_{\alpha}} \left[T / JP, I / \cdot (\varepsilon_{11} / JP, I /)^2 - T / JL, I / \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (\varepsilon_{11} / JL, I /)^2 \right] \cdot (\varepsilon^{11} / J, I /)^2 + \frac{1}{\Delta h_{\rho}} \left[Q / J, IG / \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (\varepsilon_{11} / J, IG /)^2 - Q / J, ID / \cdot (\varepsilon_{11} / J, ID /)^2 \right] \cdot (\varepsilon^{11} / J, I /)^2 + \\ &\quad + \sin / I \cdot \Delta h_{\rho} / \cdot \left[P / J, I / + Q / J, I / \right] \cdot BA / J, I / - \\ &\quad - \left\{ \left[/ U / J, I / \right]^2 - \left[/ V / J, I / \right]^2 \right\} \cdot \sin / I \cdot \Delta h_{\rho} / - 2 \cdot U / J, I / \cdot \\ &\quad \cdot V / J, I / \cdot \text{sh } / J \cdot \Delta h_{\alpha} / \cdot BA / J, I / - \frac{1}{\Delta h_{\alpha}} \left[V / JP, I / - \right. \\ &\quad \left. - V / JL, I / \right] \cdot U / J, I / - \frac{1}{\Delta h_{\rho}} \left[V / J, IG / - V / J, ID / \right] \cdot V / J, I / \quad , \end{aligned}$$

$$\left[\frac{dP}{d\tau} / J, I / \right]_{e1} = \frac{\sigma_3}{\Delta h_\alpha} [U/J, P, I / - U/J, L, I /] - \frac{\sigma_5}{\Delta h_\beta} [V/J, I, G / - V/J, I, D /] - b_{21} \cdot BA/J, I / \cdot [U/J, I / \cdot \text{sh } / J \cdot \Delta h_\alpha / + V/J, I / \cdot \sin / I \cdot \Delta h_\beta /] ,$$

$$\left[\frac{dQ}{d\tau} / J, I / \right]_{e1} = \frac{\sigma_3}{\Delta h_\beta} [V/J, I, G / - V/J, I, D /] - \frac{\sigma_5}{\Delta h_\alpha} [U/J, P, I / - U/J, L, I /] - b_{21} \cdot BA/J, I / \cdot [U/J, I / \cdot \text{sh } / J \cdot \Delta h_\alpha / + V/J, I / \cdot \sin / I \cdot \Delta h_\beta /] ,$$

$$\left[\frac{dS}{d\tau} / J, I / \right]_{e1} = - b_7 \cdot \left[\frac{dP}{d\tau} / J, I / + \frac{dQ}{d\tau} / J, I / \right] \cdot \varepsilon_{11} / J, I / ,$$

$$\left[\frac{dT}{d\tau} / J, I / \right]_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta h_\beta} [U/J, I, G / - U/J, I, D /] + \frac{1}{\Delta h_\alpha} [V/J, P, I / - V/J, L, I /] \right\} .$$

Dla części plastycznej mamy :

$$\left[\frac{dP}{d\tau} / J, I / \right]_{p1} = \tilde{\gamma} \langle \text{PRI} \rangle \cdot \left\{ \sigma_5 \cdot \sigma_6 \cdot [\sigma_7 \cdot (P/J, I / + Q/J, I /) + \sigma_8 \cdot S/J, I / \cdot g^{11} / J, I /] - 3 \cdot [P/J, I / \cdot \sigma_3 - Q/J, I / \cdot \sigma_5] \right\} ,$$

$$\left[\frac{dQ}{d\tau} / J, I / \right]_{p1} = \tilde{\gamma} \langle \text{PRI} \rangle \cdot \left\{ \sigma_5 \cdot \sigma_6 \cdot [\sigma_7 \cdot (P/J, I / + Q/J, I /) + \sigma_8 \cdot S/J, I / \cdot g^{11} / J, I /] + 3 \cdot [P/J, I / \cdot \sigma_5 - Q/J, I / \cdot \sigma_3] \right\} ,$$

17.9/

$$\left[\frac{dS}{d\tau} / J, I / \right]_{p1} = - \frac{1}{b_2} \tilde{\gamma} \langle \text{PRI} \rangle \left\{ 2 \cdot S/J, I / - [P/J, I / + Q/J, I /] \varepsilon_{11} / J, I / \right\} ,$$

$$\left[\frac{dT}{d\tau} / J, I / \right]_{p1} = - \frac{6}{\sqrt{2}} \tilde{\gamma} \langle \text{PRI} \rangle \cdot T/J, I / ,$$

gdzie przyjęto :

$$\langle \text{PRI} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ (\varepsilon_{11}/J, I)^2 \left[(P/J, I)^2 + (Q/J, I)^2 + 2(T/J, I)^2 \right] \right. \\ \left. + (S/J, I)^2 - \frac{1}{3} [P/J, I + Q/J, I + S/J, I \cdot \right. \\ \left. \cdot g^{11}/J, I] \cdot [2 \cdot \varepsilon_{11}/J, I \cdot (3 - \varepsilon_{11}/J, I) - 1] \right\} ,$$

$$\tilde{\delta} = \frac{\lambda}{a_1} ,$$

$$\text{BA}/J, I/ = \frac{1}{\text{ch } J \cdot \Delta h_a/ - \cos I \cdot \Delta h_p/} .$$

Odpowiednie wyrażenia dla pochodnych czasowych wektora \underline{u} dla punktów zewnętrznych obszaru \mathcal{D} możemy znaleźć z wzorów /7.8/ i /7.9/ , uwzględniając warunki brzegowe /5.23/ oraz warunki wynikające z symetrii - warunki /7.3/ + /7.6/.

W punkcie O , który jest punktem osobliwym na płaszczyźnie $\langle \alpha, \beta \rangle$, na płaszczyźnie $\langle x^1, x^2 \rangle$ odpowiadającym obszarowi nieskończenie odległemu od początku układu współrzędnych, zakładamy, że $\underline{u} = 0$. Oznacza to, że w punktach przestrzeni kartezjańskiej x^1 , odległych nieskończenie daleko od początku układu współrzędnych, zaburzenia spowodowane obciążeniem zewnętrznym nie docierają w czasie w którym badamy ruch ośrodka. Przyjmujemy zatem warunek :

$$/7.10/ \quad \underline{u}_i = (0, 0, \tau) = 0.$$

Warunek ten wynika z założenia , że w punkcie O /rys.3/, składowa wektora prędkości $\underline{U} /0, 0, \tau/$ jest równa zero, następnie z warunków brzegowych /5.23/ wynika, że $P(0, 0, \tau) = T /0, 0, \tau/ = 0$. Ponadto z warunku /7.3/ wynika, że $V /0, 0, \tau/ = 0$, oraz z /5.18/₆ otrzymamy, że $S /0, 0, \tau/ = 0$.

7.2. Całkowanie względem czasu.

Otrzymany układ równań możemy zapisać w postaci :

$$/7.11/ \quad \frac{dU_i}{d\tau} = f_i(\tau, U_i) \quad , \quad i = 1, \dots, 6 \quad ,$$

z warunkiem początkowym dla $\tau = \tau_n = n \cdot H : U_1 = U_{11}(\tau_n)$.
 Powyższy układ równań scałkujemy wykorzystując algorytm TREANORA [118, 34] , który można uogólnić na przypadek układu równań różniczkowych. Algorytm ten jest podobny do metody Runge-Kutta czwartego rzędu.

Przyjmujemy, że funkcja $f_i / \tau, U_i /$ jest aproksymowana w przedziale $\tau_n, \tau_{n+1} = /n+1 \cdot H$ w następujący sposób /w dowolnym punkcie $/J, I/$ obszaru \mathcal{D} / :

$$/7.12/ \quad \frac{dU_i}{d\tau} \approx -P_m^i (U_i - U_{i1}) + a_m^i + b_m^i (\tau - \tau_n) + c_m^i (\tau - \tau_n)^2$$

Rozwiązując równanie /7.12/ otrzymamy rozwiązanie przybliżone na określenie wektora \underline{U} w postaci :

$$/7.13/ \quad U_i(\tau) \approx U_{i1}(\tau_n) - \frac{1}{P_m^i} \left(a_m^i - \frac{b_m^i}{P_m^i} + 2 \frac{c_m^i}{(P_m^i)^2} \right) \exp[-P_m^i (\tau - \tau_n)] + \\ + \frac{1}{P_m^i} \left\{ \left[a_m^i - \frac{b_m^i}{P_m^i} + 2 \frac{c_m^i}{(P_m^i)^2} \right] + \left(b_m^i - 2 \frac{c_m^i}{P_m^i} \right) (\tau - \tau_n) + c_m^i (\tau - \tau_n)^2 \right\} .$$

Powyższe rozwiązanie zależy od stałych : $P_n^i, a_n^i, b_n^i, c_n^i$, które zostaną określone na wybranych płaszczyznach $\tau = \text{const.}$ w przedziale czasu τ_n, τ_{n+1} .

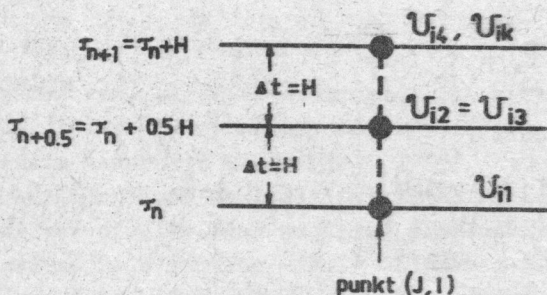
Identycznie jak poprzednio rozważymy następujące rozwiązanie :

$$/7.14/ \quad \frac{dU_i}{dt} = f_i(\tau, U_i) \approx -P_m^i (U_i - U_{i1}) + a_m^i + d_m^i (\tau - \tau_n) ,$$

otrzymamy podobnie jak poprzednio :

$$/7.15/ \quad U_i(\tau) \approx U_{i1}(\tau_n) - \frac{1}{P_m^i} \left(a_m^i - \frac{d_m^i}{P_m^i} \right) \exp[-P_m^i(\tau - \tau_n)] + \\ + \frac{1}{P_m^i} \left\{ \left(a_m^i - \frac{d_m^i}{P_m^i} \right) + d_m^i(\tau - \tau_n) \right\},$$

gdzie rozwiązanie zależy od stałych: P_n^1 , a_n^1 i d_n^1 .
Stałe te wyznaczamy na płaszczyznach $\tau = \tau_n$, $\tau = \tau_{n+\frac{1}{2}} = \tau_n + 0.5 \cdot H$ oraz $\tau = \tau_{n+1} = \tau_n + H$ /rys.11/.



Rys. 11 .

W płaszczyźnie $\tau = \tau_n$ oznaczymy $U_i(\tau_n) = U_{i1}$ oraz $f_{i1} = U'_{i1}$, w płaszczyźnie $\tau = \tau_n + \frac{1}{2}$ otrzymamy zatem :

$$U_{i2} = U_{i1} + \frac{1}{2} \cdot H \cdot f_{i1} \quad \text{dla } \tau = \tau_n + \frac{1}{2} H .$$

Następnie na płaszczyźnie $\tau_n + \frac{1}{2}$ napiszemy : $f_{i2} = U'_{i2}$, otrzymując w płaszczyźnie τ_{n+1} :

$$U_{i3} = U_{i1} + \frac{1}{2} H \cdot f_{i2} \quad \text{dla } \tau = \tau_n + H .$$

Z kolei na płaszczyźnie τ_{n+1} mamy $f_{i3} = U'_{i3}$.

Wstawiając powyższe wyrażenia do /7.14/ otrzymamy :

$$\begin{aligned} a_n^i &= f_{i1}, \\ /7.16/ \quad P_n^i &= -\frac{f_{i2} - f_{i3}}{u_{i2} - u_{i3}}, \\ d_n^i &= \frac{1}{H} \{ f_{i2} + P_n^i (u_{i2} + u_{i3}) + f_{i2} + f_{i3} - 2(f_{i1} + P_n^i u_{i1}) \}. \end{aligned}$$

Na podstawie /7.16/₂ wyznaczmy kolejno stałe P_n^i i przyjmijmy w dalszych rozważaniach ich wartość maksymalną:

$$/7.17/ \quad P_n = \left\langle \sup_{i=1, \dots, 6} \{ P_n^i \} \right\rangle.$$

Oznaczmy obecnie

$$/7.18/ \quad F_1 = \frac{1 - \exp(-P_n H)}{P_n H}, \quad F_2 = \frac{1 - F_1}{P_n H}, \quad F_3 = \frac{0.5 - F_2}{P_n H}, \\ V_1 = 4F_3 - F_2, \quad V_2 = 2(F_2 - 2F_3), \quad V_3 = 4F_3 - 3F_2.$$

Przyjmując aproksymację postaci /7.14/ otrzymamy na podstawie /7.15/ na płaszczyźnie $\tau_{n+1} = \tau_n + H$:

$$/7.19/ \quad u_{i4} = u_{i1} + H [2f_{i3} F_2 + f_{i2} P_n H \cdot F_2 + f_{i1} (F_1 - 2F_2)].$$

Następnie określimy a_n oraz b_n i c_n , wstawiając kolejne pary wielkości $/\tau_n, u_{i1}/, \dots, / \tau_{n+1}, u_{i4}/$ do /7.12/.

Z /7.13/ otrzymamy w wyniku wyrażenie na określenie wektora \underline{u} na płaszczyźnie $\tau = \tau_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
 /7.20/ \quad U_{i(n+1)} &= U_i(\tau_n + H) = U_{i1} + H[f_{i1}F_1 + HV_3(P_n U_{i1} + \\
 &+ f_{i1}) + HV_2(P_n U_{i2} + f_{i2}) + HV_2(P_n U_{i3} + \\
 &+ f_{i3}) + HV_1(P_n V_{i4} + f_{i4})].
 \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że w przypadku gdy współczynnik korekcyjny metody P_n jest równy zeru należy do obliczeń numerycznych przyjąć wyrażenia /7.18/ w następującej postaci:

$$/7.21/ \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 0.5, \quad F_3 = \frac{1}{6}, \quad \text{gdy } P_n = 0.$$

W przypadku tym, gdy w równaniach /7.20/ przyjmiemy, że $P_n \rightarrow 0$, otrzymamy wyrażenia identyczne jak dla metody Runge-Kutta czwartego rzędu [29].

Do chwili obecnej zakładaliśmy stały krok całkowania H . Załóżmy obecnie, że błąd względny popełniony przy określeniu rozwiązania w punkcie $/J, I/$ obszaru \mathcal{D} /rys.10 a/ na płaszczyźnie $\tau_{n+1} = \tau_n + H$ jest równy:

$$\begin{aligned}
 /7.22/ \quad Er /J, I/ &= \sup_{i=1, \dots, 6} \{Er_i /J, I/\} = \\
 &= \sup_{i=1, \dots, 6} \left\{ \frac{|U_{i(n+1)} /J, I/ - U_{i4} /J, I/|}{|U_{i(n+1)} /J, I/|} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\text{jeżeli } U_{i(n+1)} /J, I/ \neq 0.$$

Przyjmiemy następnie, że błąd popełniony przy określeniu rozwiązania na płaszczyźnie τ_{n+1} w całym obszarze \mathcal{D} jest równy:

$$/7.23/ \quad Er = \sum_{\substack{J=1, n_d \\ I=1, n_p}} Er /J, I/.$$

Zakładając, że Er_d jest błędem dopuszczalnym metody [przyjęto Er_d rzędu 10^{-2}]. Następnie w zależności od stosunku

$$/7.24/ \quad B = \frac{Er}{Er_d} ,$$

przyjmujemy następujące prawa zmienności kroku całkowania w czasie $H(\tau)$:

- gdy $0.96 \leq B \leq 1.04$ to rozwiązanie /7.20/ w punktach $/J, I/$ obszaru \mathcal{D} na płaszczyźnie τ_{n+1} jest poprawne, przystępujemy do obliczeń na płaszczyźnie $\tau_{n+2} = \tau_{n+1} + H$,
- gdy $B < 0.96$ rozwiązanie /7.20/ jest bardzo dobre, możemy zatem nieznacznie zwiększyć krok całkowania przed przystąpieniem do obliczeń na płaszczyźnie τ_{n+2} :

$$/7.25/ \quad H(\tau_{n+1}) = H(\tau_n) \cdot k(B), \quad k(B) > 1 ,$$

- gdy natomiast $B > 1.04$ uważamy, że obliczenia na płaszczyźnie τ_{n+1} są dokonane z niewystarczającą dokładnością, powtarzamy te obliczenia przyjmując znacznie mniejszy krok całkowania :

$$/7.26/ \quad H(\tau_n) = H(\tau_{n-1}) \cdot k(B) , \quad k(B) < 1 .$$

W celu optymalizacji programu numerycznego funkcję $k(B)$ przyjmujemy w postaci [127] :

$$/7.27/ \quad k(B) = \exp \left\{ g_1 \left[1 - \exp(-g_2 \log^2 B) \right] \right\} ,$$

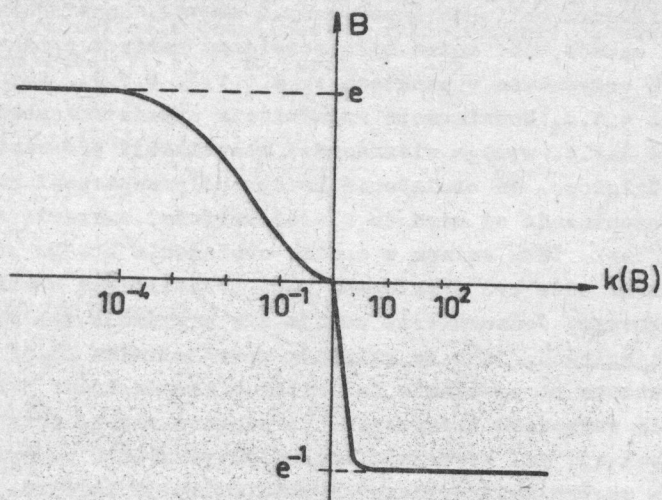
gdzie stałe g_1 i g_2 zostały określone empirycznie :

$$g_1 = 1 \quad \text{gdy } B < 0.96 ,$$

$$g_2 = 0.05$$

$$g_1 = -1 \quad \text{gdy } B > 1.04 .$$

$$g_2 = 10$$



Rys. 12 .

Funkcja $k(B)$ przedstawiona jest na rysunku 12. W przypadku gdy $B > 1.04$ można przyjąć w obliczeniach zamiast warunku /7.26/ warunek :

$$/7.28/ \quad H(\tau_n) = H(\tau_{n-1}) \cdot e^{-1} .$$

8. Rezultaty numeryczne i ich dyskusja

W obliczeniach numerycznych założono, że funkcja $\bar{\Phi}(F)$ określona wzorem /5.9/ występująca w równaniach konstytutywnych ośrodka jest funkcją liniową swego argumentu, czyli $\bar{\Phi}(F) = F$ [równania typu FREUDENTHALA [33]] .

W obliczeniach numerycznych przyjęto następujące wartości liczbowe dla stałych fizycznych [dla aluminium] :

$$/8.1/ \quad E_0 = 7.2 \cdot 10^5 \text{ KG/cm}^2, \quad \rho = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3, \\ k_0 = 500 \text{ KG/cm}^2, \quad \nu = 0.3 .$$

Obszar \mathcal{D} /rys. 10 a/ podzielono siatką prostokątną, przyjmując $n_1 = n_2 = 20$.

Program obliczeń numerycznych został skonstruowany w ten sposób, aby można było rozwiązać każdy z przedstawionych przypadków w punktach : 4.1.1. , 4.1.2., 4.1.3. oraz 4.1.5. Rozwiązanie zagadnienia przedstawionego w punkcie 4.1.4. wymaga nieznacznej modyfikacji programu.

Założono, że obciążenie brzegu półprzestrzeni narasta monotonicznie od zera do stałej wartości, w czasie rzędu 10^{-6} sek. Taka zmiana w czasie obciążenia brzegu półprzestrzeni może być traktowana jako przybliżenie obciążenia skokowego. Jednocześnie pomija się przypadek fal silnych nieciągłości, jako że przyjęty model ośrodka /5.1/ nie dopuszcza na powstanie fal silnych nieciągłości przy ciągłych warunkach brzegowych. Rozwiązano szereg przypadków propagacji fal sprężysto/lepkoplastycznych w półprzestrzeni z pustką cylindryczną. Przedstawimy je kolejno.

Przypadek 1.

Przyjmujemy warunki brzegowe typu /5.23/, zakładając obciążenie półprzestrzeni $P_0 / \beta, \tau /$ w postaci :

$$P_0 / \beta, \tau / = \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{\beta - \beta_k}{a_{10}} \right)^2 \right) \right] P_0 / 1 - e^{\tau} /$$

dla $0 < \tau \leq \tau_k$,

$$/8.2/ \quad P_0 / \beta, \tau / = \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{\beta - \beta_k}{a_{10}} \right)^2 \right) \right] P_0 / 1 - e^{\tau_k} /$$

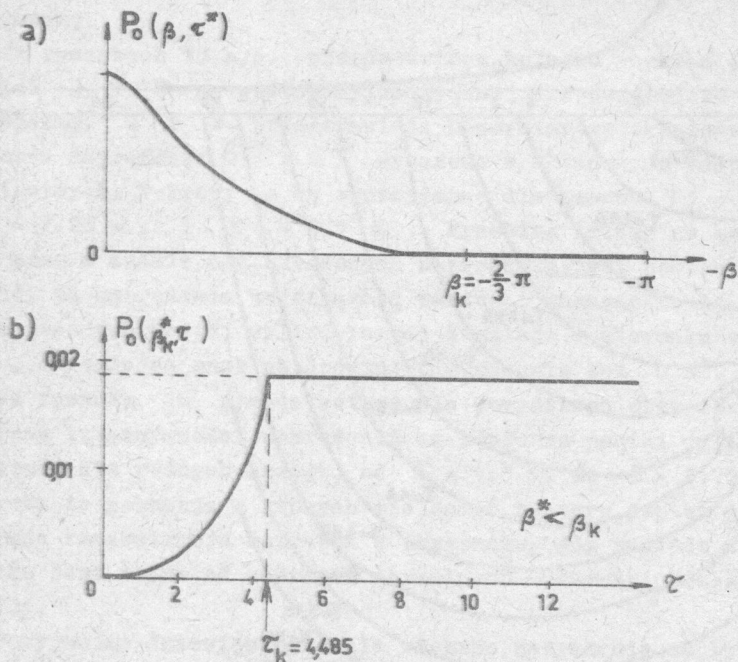
dla $\tau \geq \tau_k$,

przy czym przyjęte wartości liczbowe

$$\beta_k = \frac{2}{3}, \quad \tau_k = 4.485, \quad a_{10} = 10, \quad P_0 = 0.02, \quad 0, 2.$$

Obciążenie brzegu półprzestrzeni dla ustalonego czasu jest postaci jak na rys. 13a. Obciążenie to w dowolnym punkcie półprzestrzeni w przedziale $-\beta_k \leq \beta \leq \beta_k$ narasta monotonicznie od zera w funkcji wykładniczej czasu, osiągając po czasie $\tau_k = 4.485$ [co odpowiada czasowi $t = 7.475 \cdot 10^{-6}$ sek] wartość stałą, kilkakrotnie przekra-

czającą granicę sprężystości przy czystym ścinaniu. Obliczenia przeprowadzono dla czasu $0 < \tau \leq 4 \cdot \alpha_1$, przyjmując różne wartości odległości pustki cylindrycznej od brzegu półprzestrzeni: $h_r = 10$ oraz $h_r = 5$.

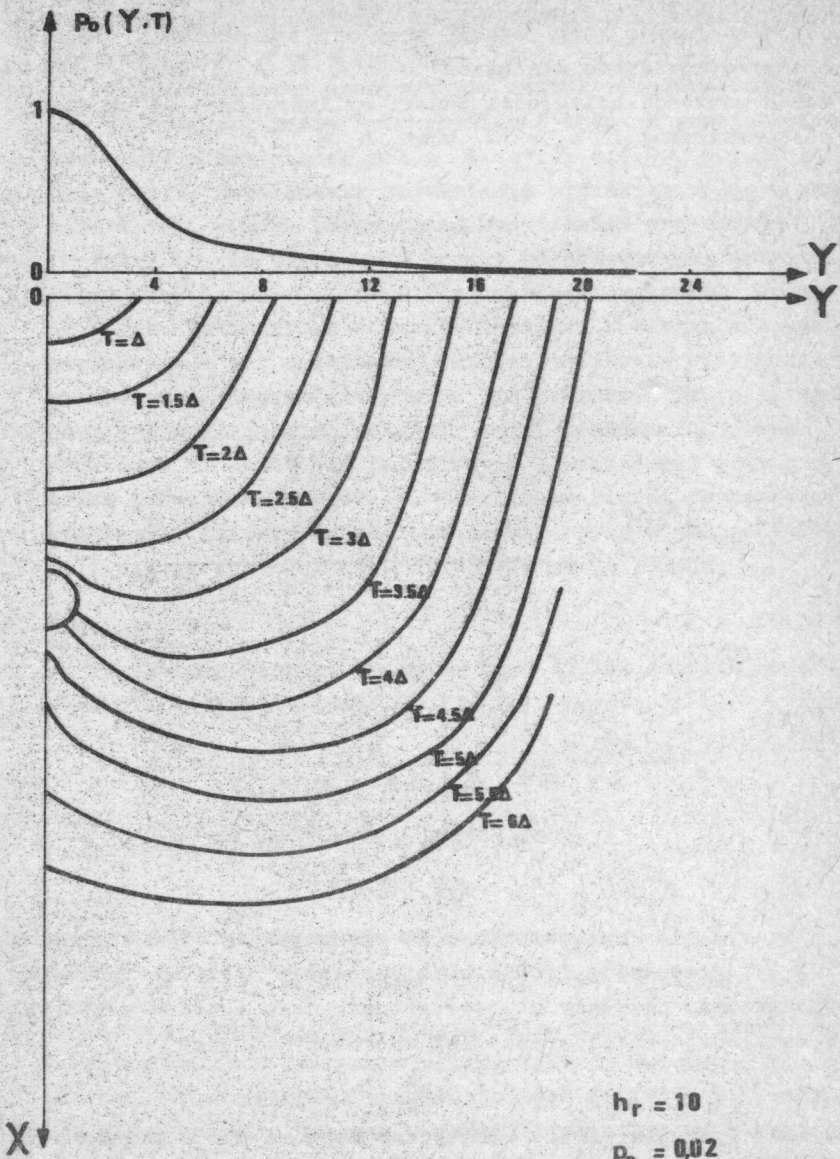


Rys. 13.

Na rys. 14 przedstawiono na płaszczyźnie $/XY/$, dla $Y \geq 0$, propagację frontu plastycznego w czasie. Frontem plastycznym nazywamy miejsce geometryczne punktów w których w ustalonej chwili czasu jest spełniony warunek

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} = k_0^2,$$

Ogólniej mówiąc, front plastyczny oznacza miejsce geometryczne punktów w których w ustalonym czasie zaczynają się pojawiać odkształcenia plastyczne. Na rys. 14 przedstawiono rozprzestrzenianie się frontu plastycznego dla czasu $0 < \tau \leq 3\alpha_1$.



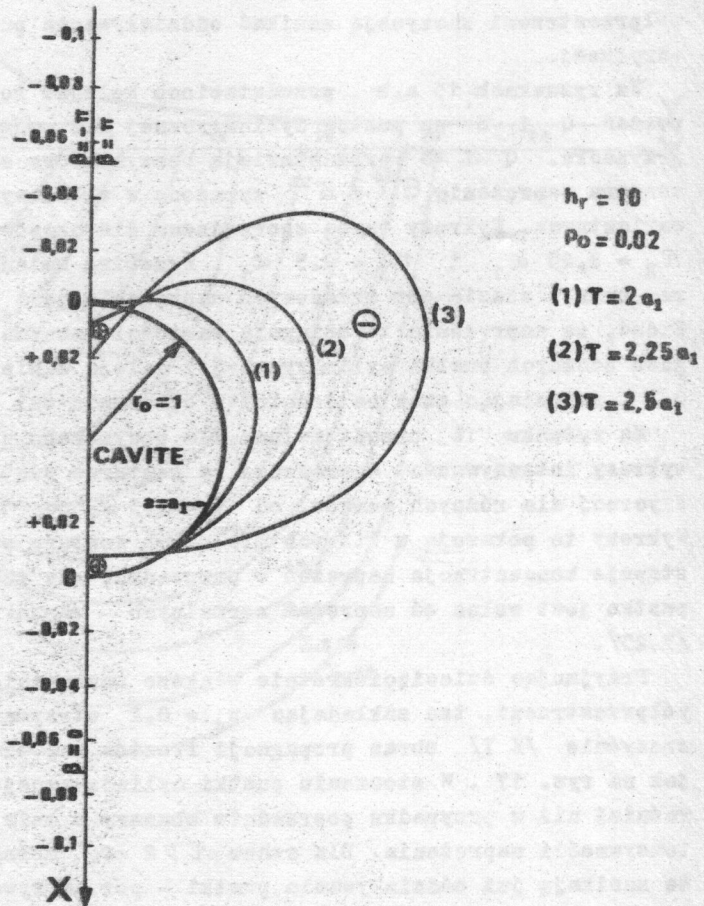
Rys. 14 .

w płaszczyźnie $/X Y/$ dla $Y \geq 0$, dla wartości $p_0 = 0.02$ oraz przy zagłębieniu pustki w półprzestrzeni $h_T = 10$. W otoczeniu pustki cylindrycznej widać wyraźnie obszary o mniejszej intensywności naprężenia. Dla czasu $\tau > 3\alpha_1$ w półprzestrzeni zaczynają zanikać oddziaływania pustki cylindrycznej.

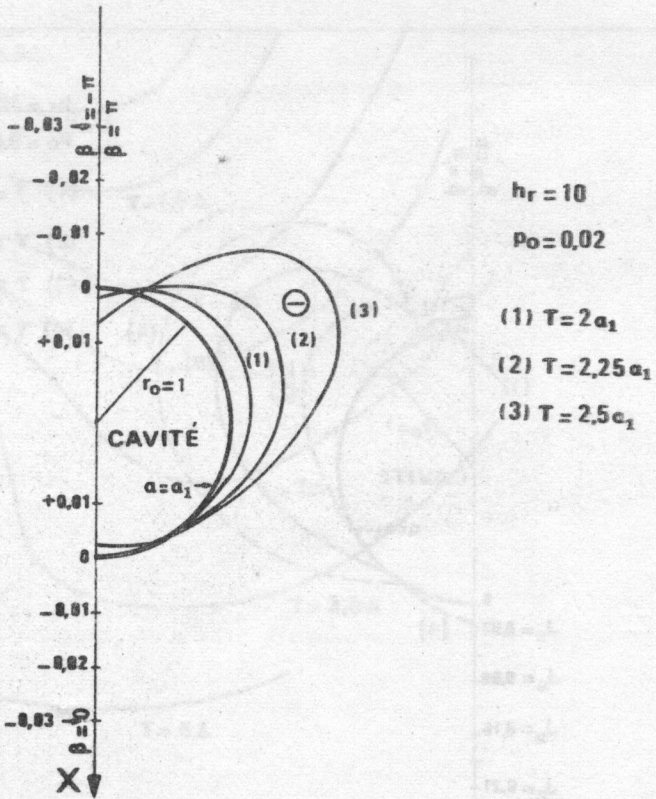
Na rysunkach 15 a, b przedstawiono kolejno rozkład naprężeń Q i S na pustce cylindrycznej dla omówionego przypadku. Q i S przedstawiają bezwymiarowe składowe tensora naprężenia σ^{11} i σ^{33} wyrażone w składowych kontrawariantnych. Wykresy te są sporządzone dla czasów $\tau_1 = 2\alpha_1$, $\tau_2 = 2,25\alpha_1$ i $\tau_3 = 2,5\alpha_1$. Przebieg zmiany na konturze oraz w czasie obu składowych naprężenia jest podobny. Widać, że naprężenia te osiągają wartości maksymalne na brzegach bocznych pustki cylindrycznej i maleją w kierunku osi $O X$, zmieniając znak na dodatni w otoczeniu osi $O X$.

Na rysunku 16 przedstawiono dla powyższego przypadku wykresy intensywności naprężenia na konturze pustki cylindrycznej dla różnych czasów, od $\tau = 1,5\alpha_1$ do $\tau = 2,75\alpha_1$. Wykresy te pokazują w których miejscach konturu pustki występuje koncentracja naprężeń w przypadku, gdy zakłada się, że pustka jest wolna od naprężeń normalnych - warunki brzegowe /5.23/.

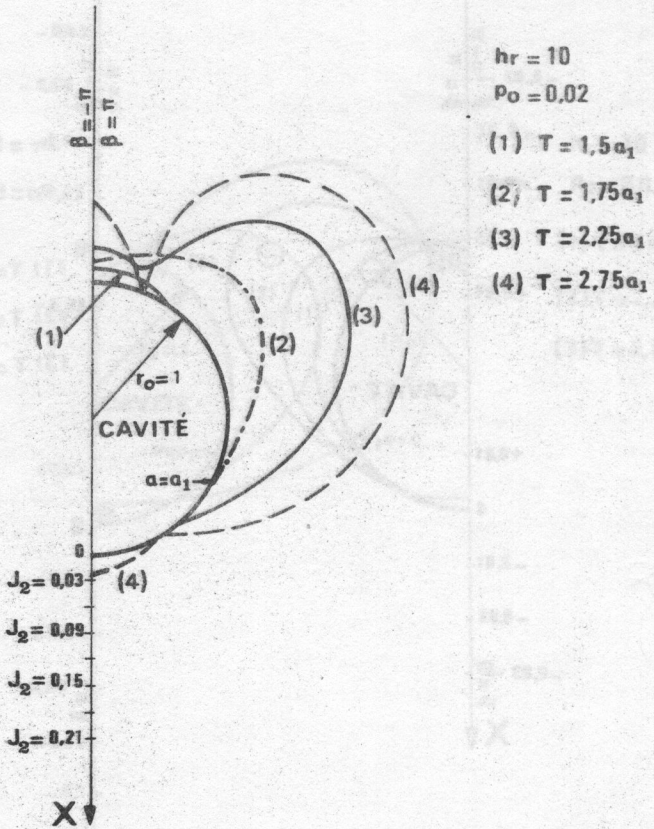
Przyjmując dziesięciokrotnie większe naprężenie na brzegu półprzestrzeni, tzn zakładając $p_0 = 0.2$ otrzymamy na płaszczyźnie $/X Y/$ obraz propagacji frontów fal plastycznych jak na rys. 17. W otoczeniu pustki cylindrycznej widać wyraźniej niż w przypadku poprzednim obszary o mniejszej intensywności naprężenia. Dla czasu $\tau > 2\alpha_1$ można uważać, że zanikają już oddziaływania pustki - por. krzywe dla $\tau = 4\Delta$. W otoczeniu pustki cylindrycznej otrzymano podobny kształt rozkładu naprężeń Q i S w czasie, jak w przypadku przyjęcia obciążenia p_0 równego $p_0 = 0.02$ /por. rys. 15a, b/. Również rozkład intensywności naprężenia na konturze pustki cylindrycznej ma kształt podobny jak na rys. 16.



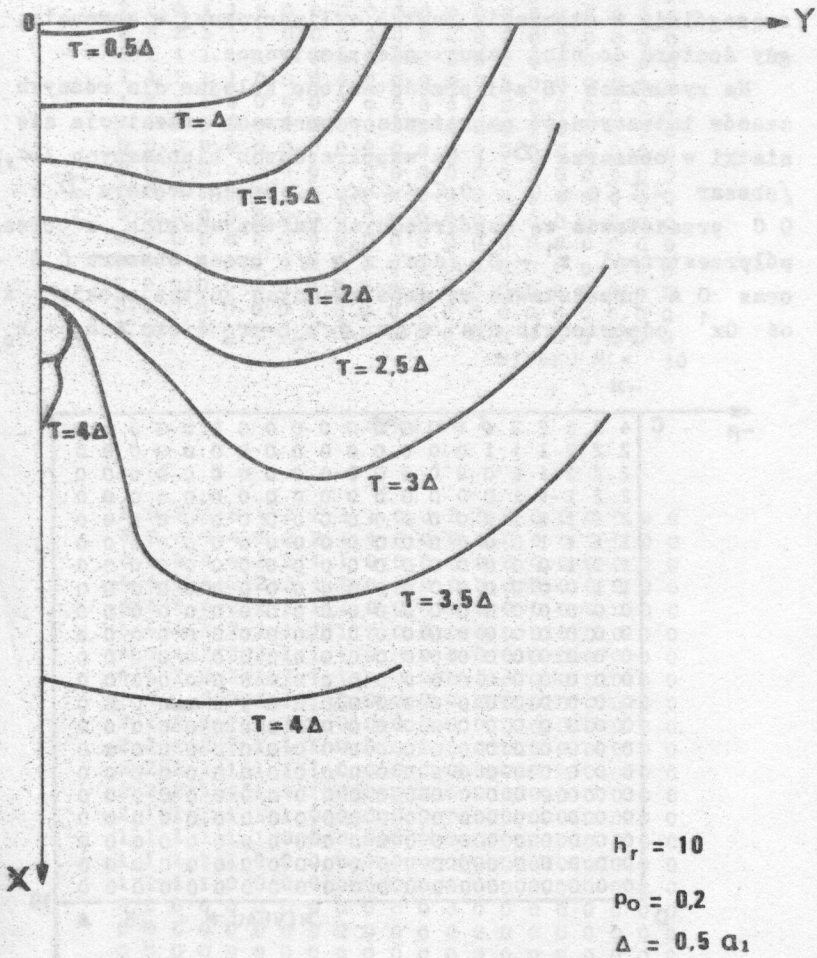
Rys. 15 a .



Rys. 15 b .



Rys. 16 .



Rys. 17 .


```

8 8 8 6 6 4 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 6 4 4 2 2 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 6 6 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 8 6 4 2 2 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 6 6 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 6 4 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 6 6 4 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
6 6 6 4 4 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
6 6 4 4 4 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4 4 4 4 2 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4 4 4 4 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4 4 4 2 2 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4 4 2 2 2 2 2 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

NIVEAU M = 40

Rys. 18 d .

```

8 8 6 6 6 4 4 2 2 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 6 6 6 4 4 2 2 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 6 4 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 8 6 4 4 2 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 8 6 6 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 8 8 6 4 4 2 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 8 8 6 4 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 8 6 6 4 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 8 6 6 4 4 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 8 6 4 4 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
8 8 8 6 6 4 4 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
8 6 6 6 6 4 4 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
6 6 6 6 4 4 4 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
6 6 6 4 4 4 4 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
4 4 4 4 4 4 4 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
4 4 4 4 4 4 2 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
2 2 2 4 4 4 2 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 2 2 2 2 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 2 2 2 2 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0

```

NIVEAU M = 45

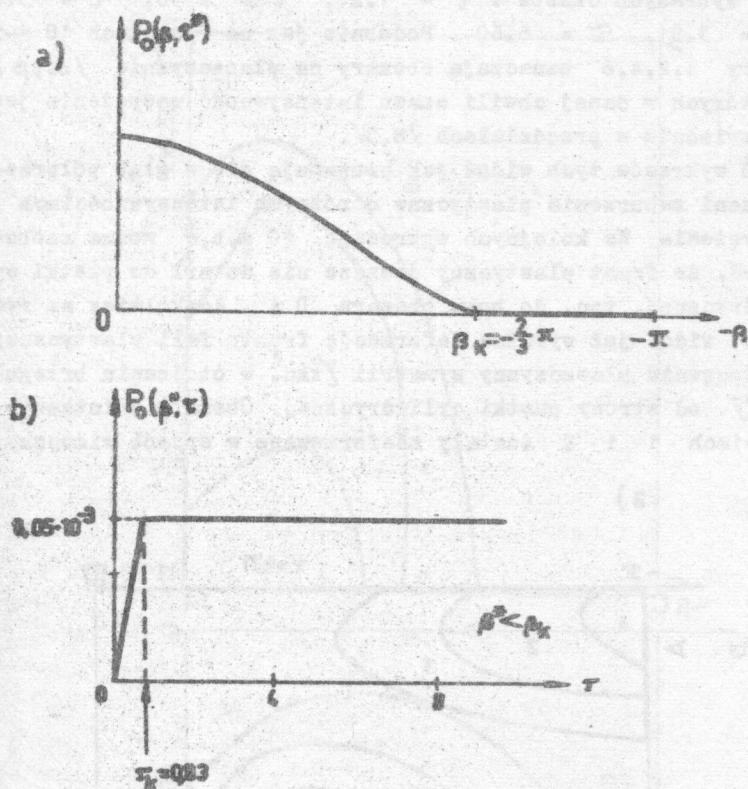
Rys. 18 e .

$\tau = 3.77$. Na rysunkach tych widać jak fale plastyczne propagują się od brzegu półprzestrzeni w głąb obszaru \mathcal{D} z coraz to większymi intensywnościami naprężenia na ich frontach. Z pierwszych trzech rysunków [Rys. 18 a, b, c] widać, że front plastyczny jeszcze nie dotarł do brzegu pustki cylindrycznej. W czasie $\tau = 3.91$ [Rys. 18d] front plastyczny dotarł do brzegu pustki cylindrycznej. Pierwsze zaburzenia plastyczne pojawiają się najpierw na boku konturu pustki a nie na jej powierzchni górnej. W otoczeniu punktu D intensywność naprężenia jest mniejsza od jedności. Na boku konturu pojawiają się naprężenia, których intensywność jest zawarta w przedziale $1 \leq J_2 < 2$. W dalszych chwilach czasu [por. Rys. 18e, f] obszar nieuplastyczniony w otoczeniu punktu D zawęża się a na bocznym konturze pustki cylindrycznej pojawiają się większe intensywności naprężenia. Zaburzenia plastyczne na osi Ox^1 oraz w jej otoczeniu, powyżej pustki cylindrycznej pojawiają się dopiero dla czasu rzędu $\tau \approx 3.6$ [por. Rys. 18e]. Jednocześnie na skutek tego, że pustka cylindryczna jest swobodna, tzn. na jej konturze $\sigma^{act} = 0$, fale odbite od pustki niosą naprężenia przeciwnego znaku. Odbicie się fal od swobodnego brzegu pustki powoduje, że w otoczeniu osi Ox^1 tzn. w otoczeniu boku C D obszaru \mathcal{D} [na Rys. 18 e, f] fale o równych intensywnościach naprężenia na ich frontach rozprzestrzeniają się wolniej niż w punktach odległych od pustki.

PRZYPADEK 3.

Warunki brzegowe przyjmujemy ponownie typu /5.23/, przyjmując obecnie obciążenie brzegu półprzestrzeni w postaci - por. rys.19.

$$\begin{aligned}
 /8.4/ \quad P_0 / \beta, \tau / &= \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{\beta - \beta_k}{a_{10}} \right)^2 \right) \right] p_0 \tau, \\
 &\text{dla } 0 < \tau \leq \tau_k, \\
 P_0 / \beta, \tau / &= \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{\beta - \beta_k}{a_{10}} \right)^2 \right) \right] p_0 \tau_k, \\
 &\text{dla } \tau_k < \tau,
 \end{aligned}$$



Rys. 19 .

przyjmując następujące stałe :

$$\beta_K = \frac{2}{3}\pi, \quad \tau_K = 0.83, \quad a_{10} = 3, \quad \rho_0 = 0.001, \quad h_T = 5.$$

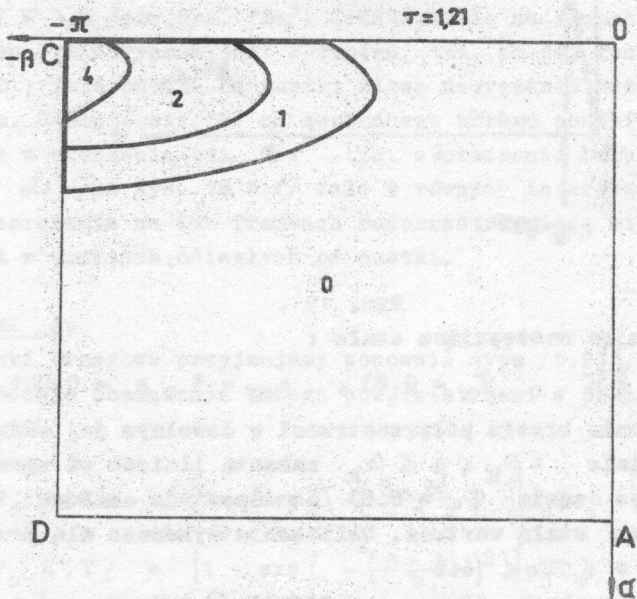
Obciążenie brzoza półprzestrzeni w dowolnym jej punkcie w przedziale $-\beta_K \leq \beta \leq \beta_K$ narasta liniowo od zera, osiągając po czasie $\tau_K = 0.83$ [co odpowiada czasowi $t = 1.384 \cdot 10^{-6}$ sek] stałą wartość. Obliczenia wykonane dla przedziału czasu $0 \leq \tau \leq 6.6$.

Na rysunkach 20a-e przedstawione intensywności naprężenia w obszarze \mathcal{D} , we współrzędnych bipolarnych $|\alpha, \beta|$,

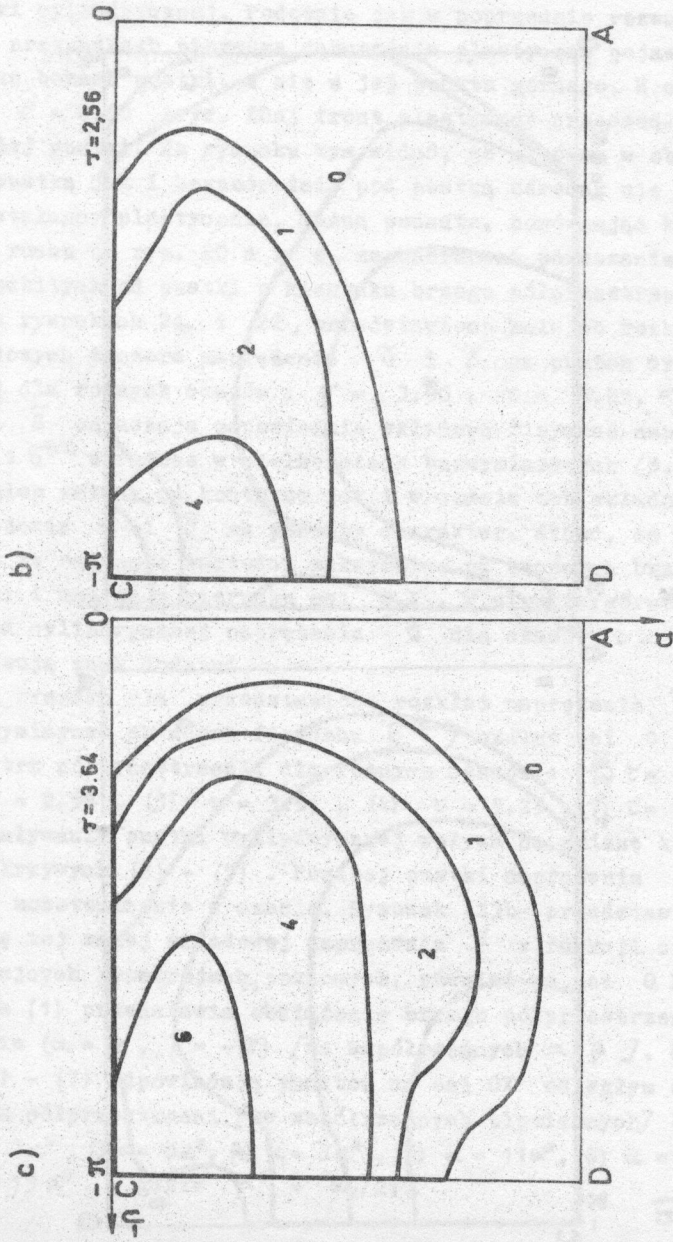
dla wybranych czasów : $\tau = 1.21$, $\tau = 2.56$, $\tau = 3.64$,
 $\tau = 3.91$, $\tau = 6.60$. Podobnie jak na rysunkach 18 a-f
 cyfry 1,2,4,6 oznaczają obszary na płaszczyźnie α, β
 w których w danej chwili czasu intensywność naprężenia jest
 odpowiednio w przedziałach /8.3/.

Z wykresów tych widać jak propagują się w głąb półprze-
 strzeni zaburzenia plastyczne o różnych intensywnościach
 naprężenia. Na kolejnych wykresach 20 a,b,c można zaobser-
 wować, że front plastyczny jeszcze nie dotarł do pustki cy-
 lindrycznej, tzn. do boku obszaru D A . A szkolwiek na rys.
 20 c widać już wyraźną deformację frontu fali plastycznej
 w otoczeniu płaszczyzny symetrii [tzn. w otoczeniu brzegu
 C D] od strony pustki cylindrycznej. Obszary o intensywno-
 ściach 1 i 2 zostały zdeformowane w sposób widoczny.

a)

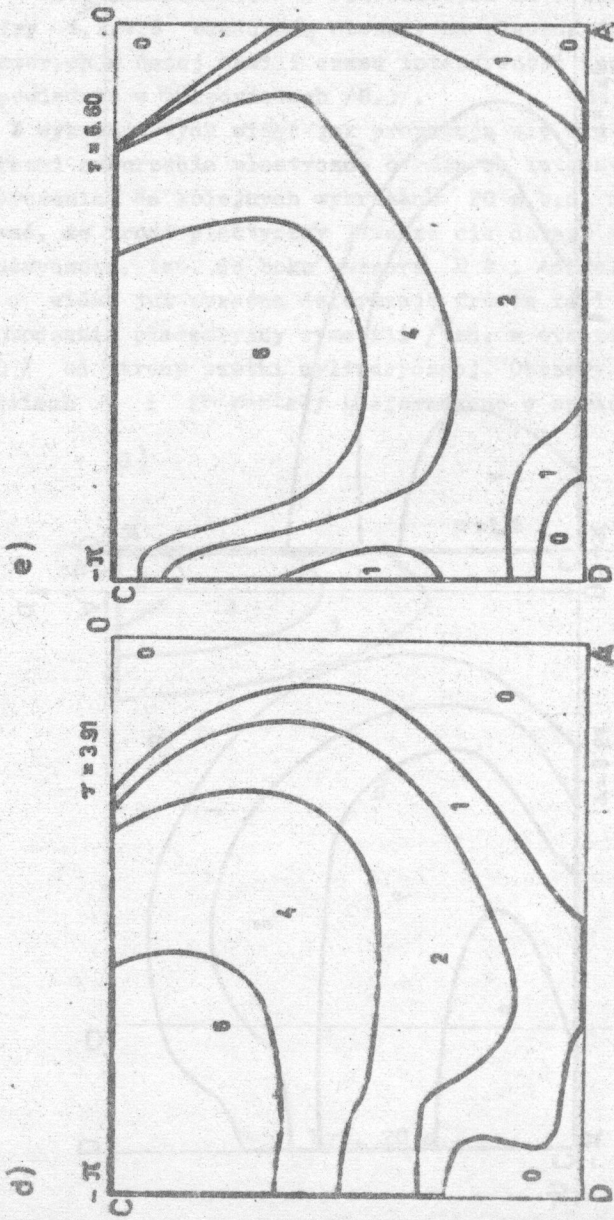


Rys. 20 a .



Rys. 20 b.

Rys. 20 o.



Rys. 20 d .

Rys. 20 e .

Na rys. 20 d widać, że front plastyczny dotarł już do pustki cylindrycznej. Podobnie jak w poprzednio rozważanych przypadkach pierwsze zaburzenia plastyczne pojawiają się na bokach pustki, a nie u jej punktu górnego. W czasie $\tau = 6.60$ /rys. 20e/ front plastyczny przeszedł już poniżej pustki. Na rysunku tym widać, że zarówno w obszarze nad pustką jak i bezpośrednio pod pustką ośrodek nie został odkształcony plastycznie. Można ponadto, porównując kolejne fazy ruchu na rys. 20 d i e, zaobserwować poruszanie się fal odbitych od pustki w kierunku brzegu półprzestrzeni.

Na rysunkach 21 i 22 przedstawiono kolejno rozkład składowych tensora naprężenia \tilde{Q} i \tilde{S} na pustce cylindrycznej dla różnych czasów: $\tau = 3.90$, $\tau = 5.25$, $\tau = 6.6$. \tilde{Q} i \tilde{S} oznaczają odpowiednio składowe fizyczne naprężenia $\sigma^{(\beta\beta)}$ i $\sigma^{(\alpha\alpha)}$ wyrażone w wielkościach bezwymiarowych /5.28/.

Przebieg zmiany na konturze jak i w czasie obu składowych naprężenia \tilde{Q} i \tilde{S} ma podobny charakter. Widać, że naprężenia te osiągają wartości maksymalne na bocznych brzegach pustki i maleją w kierunku osi $O X$. W strefie górnej pustki cylindrycznej naprężenia \tilde{Q} dla czasów $\tau > 4.5$ przyjmują znak dodatni.

Na rysunku 23a przedstawiono rozkład naprężenia \tilde{P} [bezwymiarowe składowe fizyczne $\sigma^{(\alpha\alpha)}$] wzdłuż osi $O X$ wewnątrz półprzestrzeni, dla różnych czasów: (1) $\tau = 1.21$, (2) $\tau = 2.56$, (3) $\tau = 3.91$, (4) $\tau = 5.25$, (5) $\tau = 6.60$. Oddziaływanie pustki cylindrycznej wpływa na zmianę kolejnych krzywych (2) - (5). Poniżej pustki naprężenia \tilde{P} rosną monotonicznie w czasie. Rysunek 23b przedstawia zmianę tej samej składowej naprężenia \tilde{P} w funkcji czasu, w kolejnych przekrojach poziomych, również na osi $O X$. Krzywa (1) przedstawia obciążenie brzegu półprzestrzeni w punkcie ($\alpha = 0$, $\beta = -\tilde{r}$) [we współrzędnych α, β]. Krzywe (2) - (7) odpowiadają punktom na osi $O X$ odległym od brzegu półprzestrzeni [we współrzędnych bipolarnych] o:
 (2) $\alpha = 3\alpha^*$, (3) $\alpha = 5\alpha^*$, (4) $\alpha = 7\alpha^*$, (5) $\alpha = 11\alpha^*$, (6) $\alpha = 15\alpha^*$,
 (7) $\alpha = 19\alpha^*$, gdzie $\alpha^* = \alpha_4/21$.

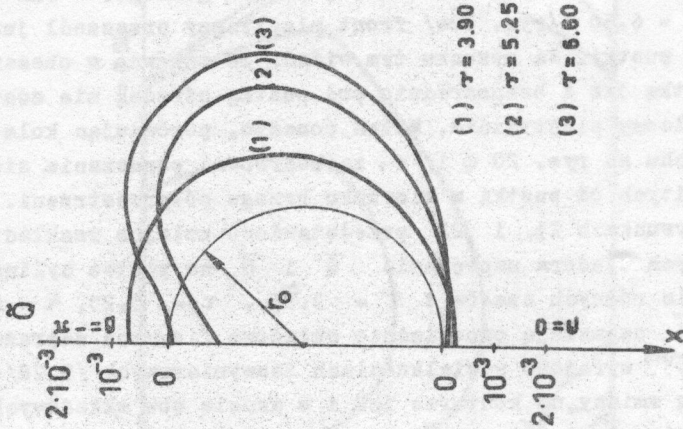


Рис. 21 .

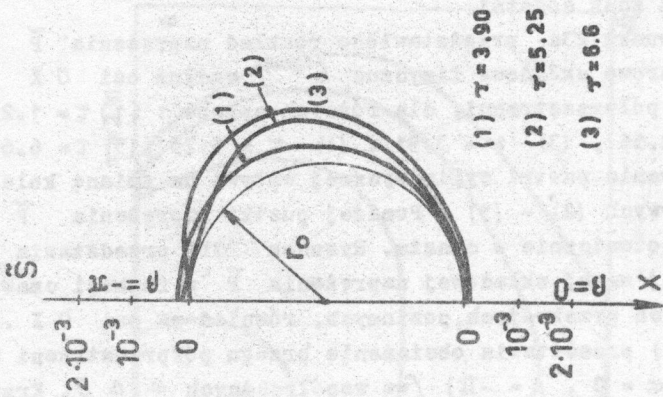
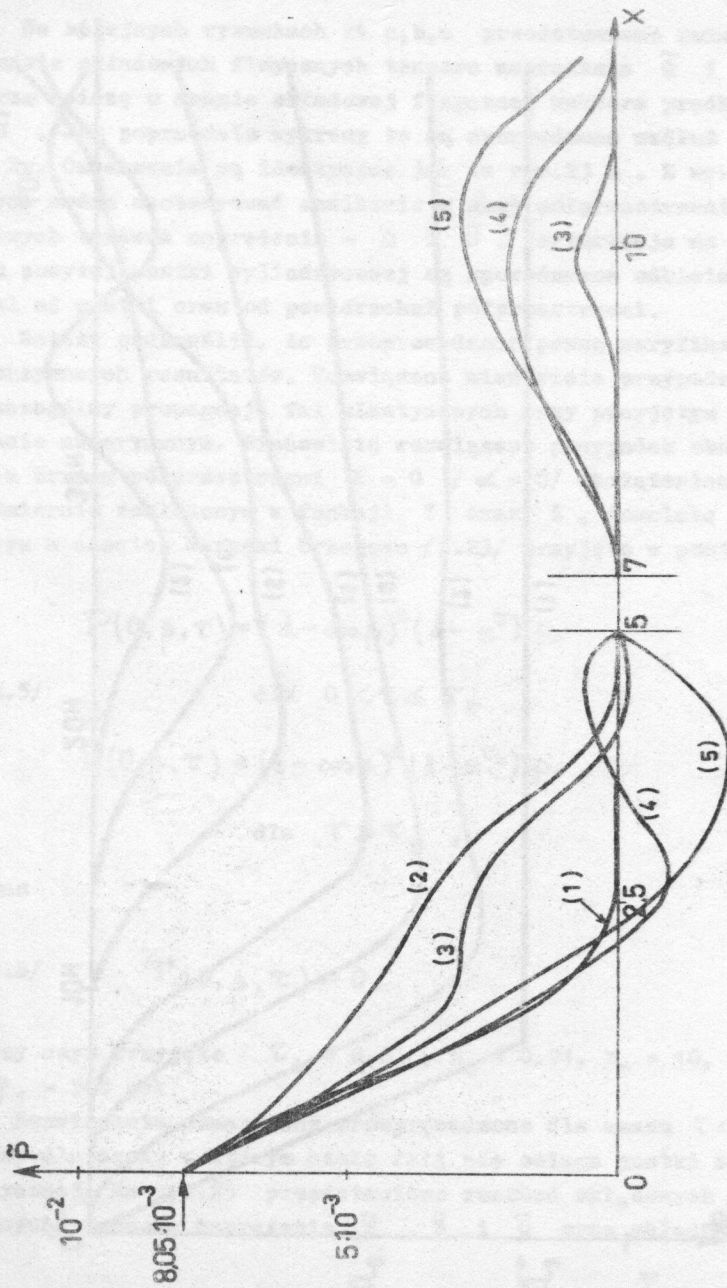
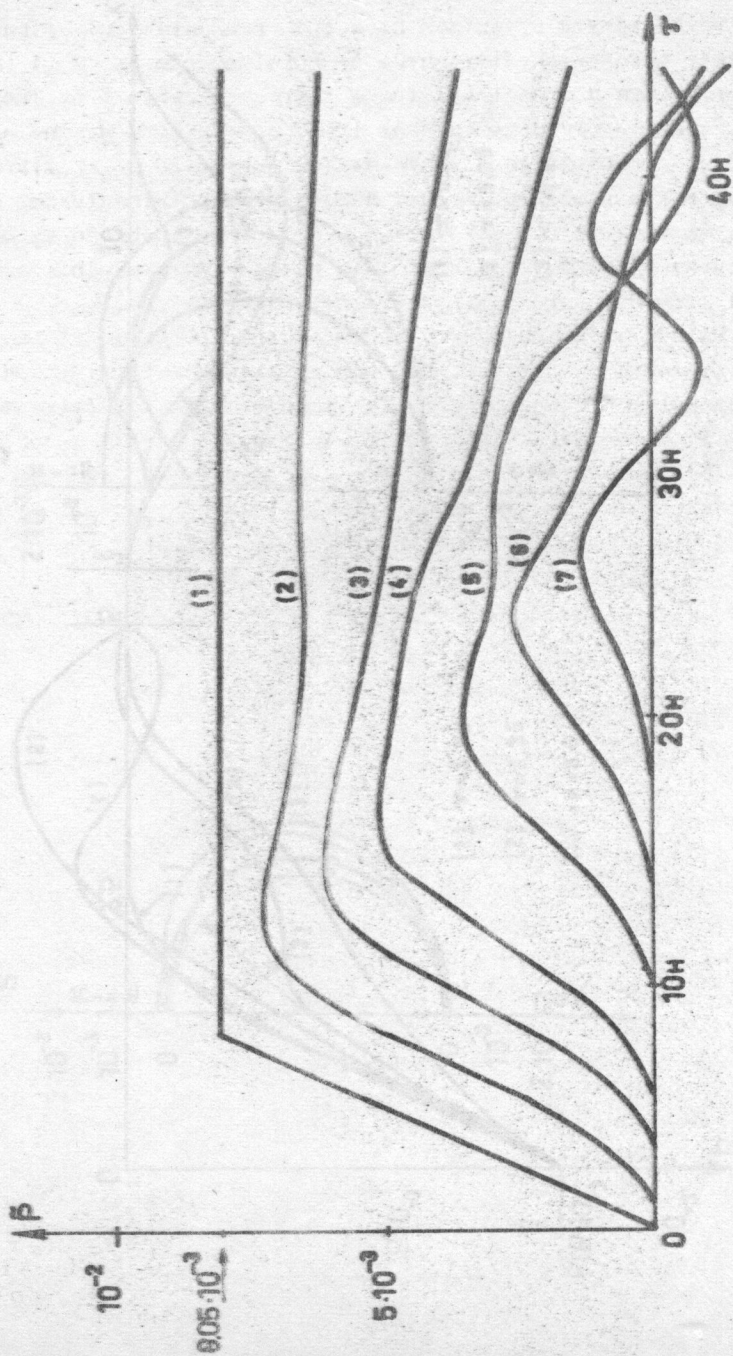


Рис. 22 .



Rys. 23 a.



Na kolejnych rysunkach 24 a, b, c przedstawiono zmianę w czasie składowych fizycznych tensora naprężenia \tilde{Q} i \tilde{S} oraz zmianę w czasie składowej fizycznej wektora prędkości \tilde{U} . Jak poprzednio wykresy te są sporządzone wzdłuż osi $O X$. Oznaczenia są identyczne jak na rys. 23 a. Z wykresów tych można zaobserwować zanikanie w głąb półprzestrzeni składowych tensora naprężenia - \tilde{Q} i \tilde{S} . Perturbacje na odcinku powyżej pustki cylindrycznej są spowodowane odbiciami fal od pustki oraz od powierzchni półprzestrzeni.

Należy podkreślić, że przeprowadzono pewną weryfikację otrzymanych rezultatów. Rozwiązano mianowicie przypadek szczególny propagacji fal plastycznych przy przyjętym schemacie numerycznym. Mianowicie rozwiązano przypadek obciążenia brzegu półprzestrzeni $X = 0$ / $\alpha = 0$ / obciążeniem równomiernie rozłożonym w funkcji Y oraz Z , dowolnie zmieniającym w czasie. Warunki brzegowe /5.23/ przyjęto w postaci

$$P(0, \beta, \tau) = (1 - \cos \beta)^2 (1 - e^{-\tau}) p_0$$

$$/8.5/ \quad \text{dla } 0 < \tau \leq \tau_k,$$

$$P(0, \beta, \tau) = (1 - \cos \beta)^2 (1 - e^{-\tau_k}) p_0$$

$$\text{dla } \tau \geq \tau_k,$$

oraz

$$/8.6/ \quad T(0, \beta, \tau) = 0,$$

przy czym przyjęto $\tau_k = 0.83$, $p_0 = 0.01$, $h_r = 10$,
 $\gamma_1 = 500 \text{ sek}^{-1}$.

Rozwiązanie numeryczne przeprowadzono dla czasu $\tau < \alpha_1$, tzn. dla czasu w którym oszło fali nie osiąga pustki cylindrycznej. Na rys. 25 przedstawiono rozkład składowych [fizycznych] tensora naprężenia \tilde{P} , \tilde{S} i \tilde{Q} oraz składowej

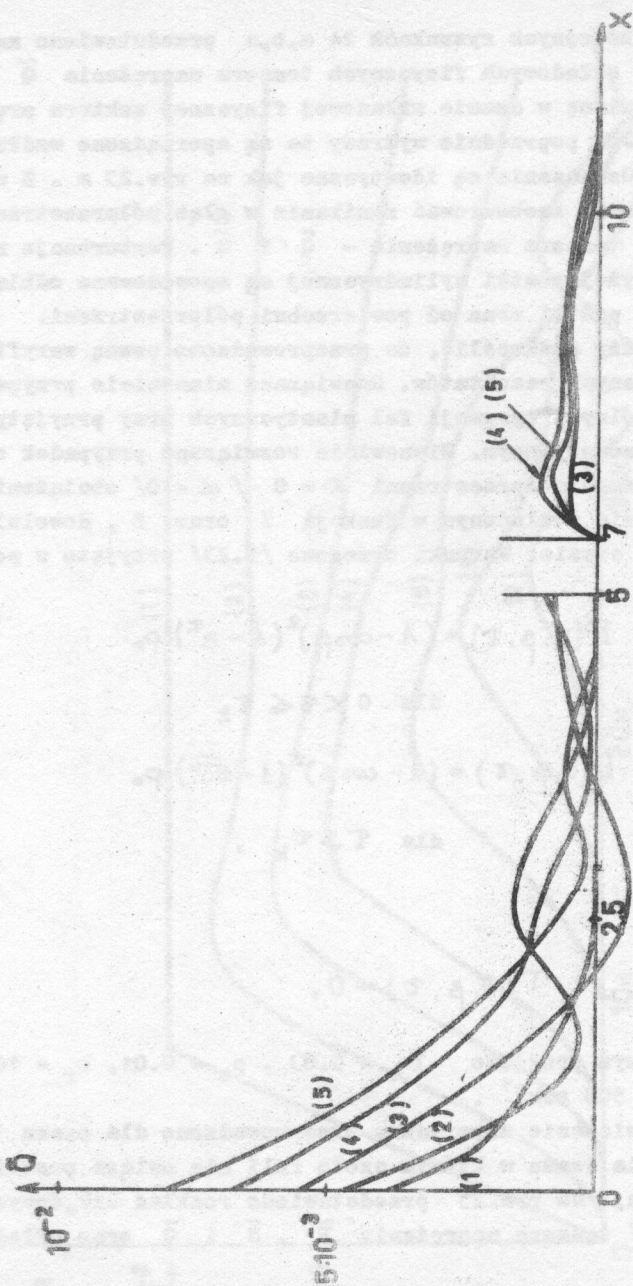
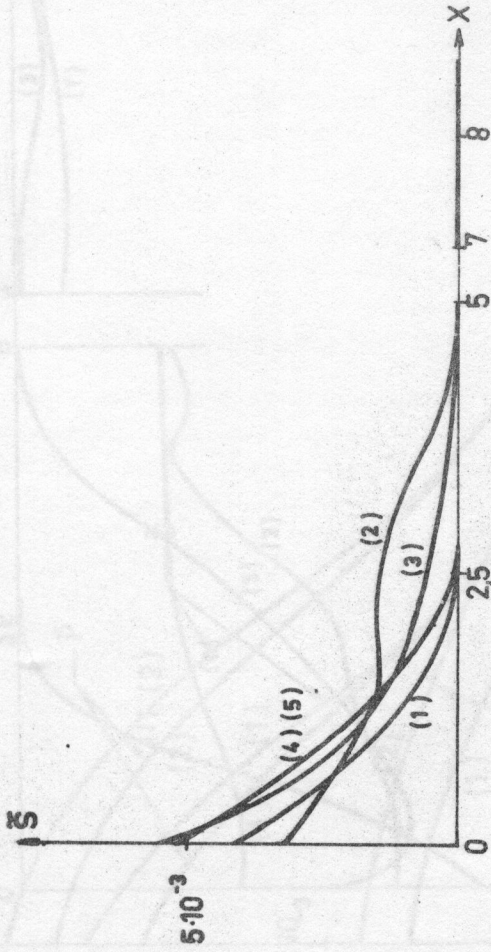


Рис. 24 а.



Rys. 24 b.

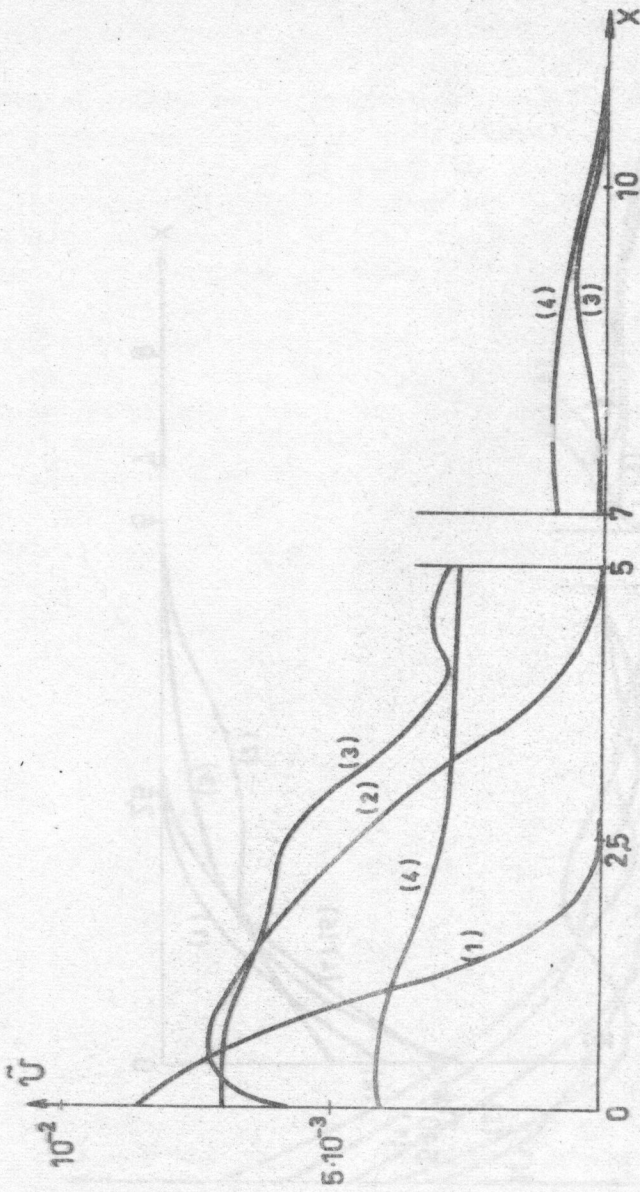
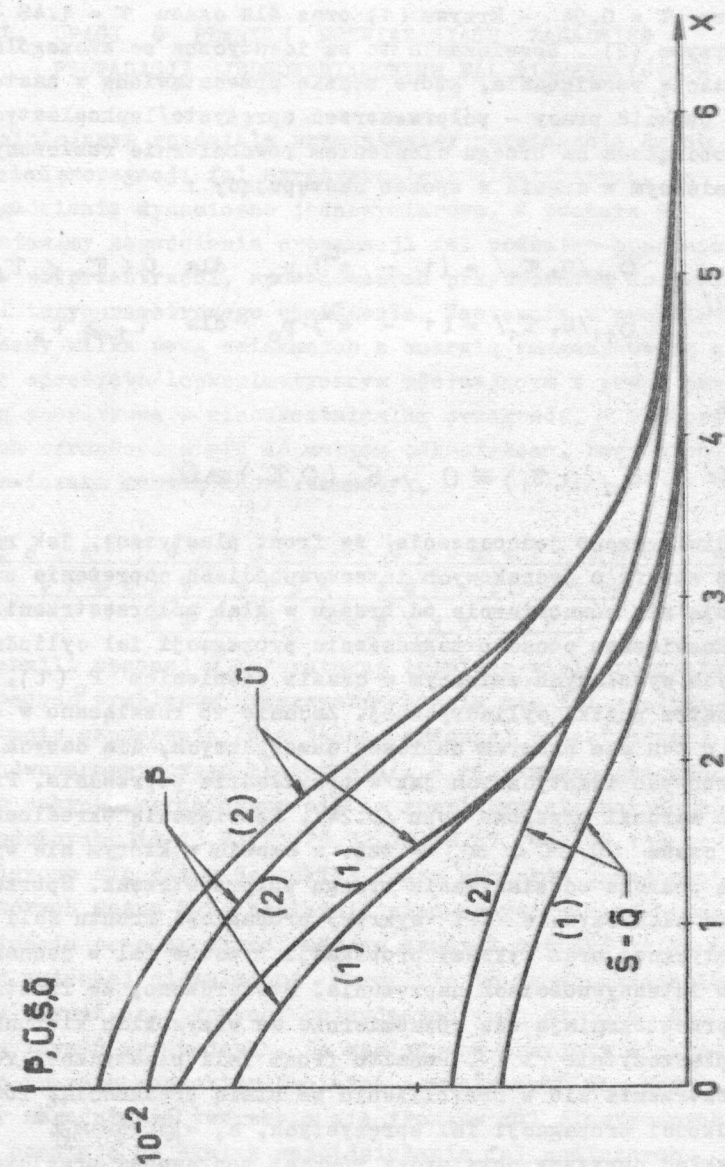


Рис. 24 о .



[fizycznej] wektora prędkości \tilde{U} wzdłuż osi $O X$, dla czasu $\tau = 0.94$ - krzywe (1) oraz dla czasu $\tau = 1.48$ - krzywe (2). Rozwiązania te są identyczne ze szczególną postacią rozwiązania, które będzie przedstawione w następnym punkcie pracy - półprzestrzeń sprężysto/lepkoplastyczna obciążona na brzegu ciśnieniem równomiernie rozłożonym i zmiennym w czasie w sposób następujący :

$$\begin{aligned} /8.7/ \quad \sigma_{11}/0, \tau_1/ &= (1 - e^{\tau_1}) \cdot p_0 \quad \text{dla } 0 < \tau_1 < \tau_k, \\ \sigma_{11}/0, \tau_1/ &= (1 - e^{\tau_k}) \cdot p_0 \quad \text{dla } \tau_1 \geq \tau_k, \end{aligned}$$

oraz

$$/8.8/ \quad \sigma_{12}(0, \tau_1) \equiv 0, \quad \sigma_{13}(0, \tau_1) \equiv 0.$$

Stwierdzono jednocześnie, że front plastyczny, jak również strefy o jednakowych intensywnościach naprężenia propagują się równomiernie od brzegu w głąb półprzestrzeni.

Rozwiązano ponadto zagadnienie propagacji fal cylindrycznych wywołanych zmiennym w czasie ciśnieniem $P_0(\tau)$, wewnątrz pustki cylindrycznej. Zadanie to rozwiązano w oparciu o ten sam program obliczeń numerycznych, dla danych liczbowych identycznych jak w przykładzie poprzednim. Przyjęto warunki brzegowe typu /5.24/. Rozwiązanie określone dla czasu $0 < \tau < \alpha_1$ - tzn. w czasie w którym nie występują jeszcze oddziaływania brzegu półprzestrzeni. Sporządzono na płaszczyźnie $X Y$ wykresy propagacji frontu fali plastycznej oraz wykresy propagacji frontów fal o jednakowych intensywnościach naprężenia. Stwierdzono, że fronty te rozprzestrzeniają się równomiernie we wszystkich kierunkach na płaszczyźnie $X Y$. Ponadto front fali plastycznej rozprzestrzenia się w przybliżeniu ze stałą prędkością, równą prędkości propagacji fal sprężystych, $a_1 = [(3K+4\mu)/3\rho]^{1/2}$. Przykład powyższy potwierdza również poprawność przyjętej metody rozwiązania.

III. UWAGI O PEWNYCH ROZWIĄZANIACH ZAGADNIEŃ PROPAGACJI JEDNOWYMIAROWYCH FAŁ NIESPRĘŻYSTYCH

W niniejszym rozdziale przedstawimy rozwiązania dwóch zagadnień propagacji fał sprężysto/lepkoplastycznych. Są to zagadnienia dynamiczne jednowymiarowe. W punkcie 9 przedstawimy zagadnienie propagacji fał podłużno-poprzecznych w półprzestrzeni, spowodowanych przyłożeniem do powierzchni trzyparametrowego obciążenia. Następnie w punkcie 10 podamy kilka uwag związanych z energią zmagazynowaną w przecie sprężysto/lepkoplastycznym uderzającym z pewną prędkością początkową w nieodkształcalną przegrodę. W obu przypadkach ograniczono się do małych odkształceń. Zagadnienia te rozwiązano metodą charakterystyk.

9. Fale podłużno-poprzeczne w półprzestrzeni sprężysto/ lepkoplastycznej

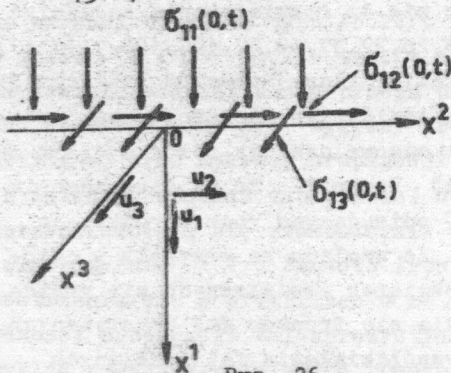
W chwili obecnej w literaturze istnieje wiele rozwiązań dotyczących problemów rozprzestrzeniania się fał w złożonym stanie naprężenia [dla jednej zmiennej przestrzennej i dla dwuparametrowego obciążenia]. W pierwszych pracach z tego zakresu ograniczono się do rozwiązywania zagadnień samopodobnych [11-13, 23, 25, 28, 32, 37, 58, 67, 107, 108, 113-117]. Ograniczono się zatem do takiej klasy warunków brzegowych, dla których można było uzależnić stan naprężenia, stan odkształcenia oraz prędkości masowe cząstek ośrodka tylko od jednej zmiennej niezależnej. Pozwoliło to na sprowadzenie układu równań cząstkowych, opisujących ruch ośrodka, do układu równań zwyczajnych. Ze względu na przyjęty w cytowanych pracach charakter obciążeń zewnętrznych nie występowały zagadnienia tworzenia się frontów fał plastycznych, które powstają na skutek współdziałania fał podłużnych

i poprzecznych. Również nie występowały zagadnienia powstawania fali odciążenia. Na oba te zagadnienia położono nacisk w pracach [41, 44-47, 24, 121-123], w których rozwiązano problem rozprzestrzeniania się fal podłużno-poprzecznych w ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym dla dowolnych zmian w czasie obciążeń zewnętrznych.

W przypadku przyjęcia równań biliniowej teorii plastyczności, oraz sztywnego odciążenia rozwiązano zagadnienie rozprzestrzeniania się fal podłużno-poprzecznych w pracach [71, 72], przy czym określono prędkość propagacji fali odciążenia.

Zbadamy obecnie ruch ośrodka sprężysto/lepkoplastycznego wypełniającego półprzestrzeń $x_1 > 0$, na powierzchni której są przyłożone obciążenia σ_{11} normalne do powierzchni oraz dwie składowe obciążenia stycznych σ_{12} i σ_{13} , zmienne w czasie, równomiernie rozłożone na powierzchni $x_1 = 0$ [73] ./rys. 26/.

Niech $v_1/x_1, t/$, $v_2/x_1, t/$, $v_3/x_1, t/$ będą składowymi wektora prędkości punktu znajdującego się w odległości x_1 od brzegu półprzestrzeni, będącymi jedynie funkcjami x_1 i t . Niech $\sigma_{11}/x_1, t/$ będzie składową normalną tensora naprężenia w kierunku x_1 ; $\sigma_{22}/x_1, t/$ i $\sigma_{33}/x_1, t/$ - składowymi poprzecznymi naprężeń normalnych; $\sigma_{12}/x_1, t/$ i $\sigma_{13}/x_1, t/$ - naprężeniami ścinającymi.



Składowe tensora odkształcenia w kierunkach x_2 i x_3 są równe zero, co prowadzi do zależności $\sigma_{22}/x_1, t/ = \sigma_{33}/x_1, t/$.

Rys. 26 .

Równania konstytutywne ośrodka przyjęto postaci /2.8/.
W rozważanym przypadku są spełnione następujące warunki :

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{12} = u_{2,1}, \quad \varepsilon_{13} = u_{3,1}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = 0.$$

$$/9.1/ \quad \dot{u}_1 = v_1, \quad \dot{u}_2 = v_2, \quad \dot{u}_3 = v_3, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33},$$

$$v_{1,1} = \dot{\varepsilon}_{11}, \quad v_{2,1} = \dot{\varepsilon}_{12}, \quad v_{3,1} = \dot{\varepsilon}_{13}.$$

Równania ruchu /3.3/ przy pominięciu sił masowych, ($\vec{I} = 0$),
redukują się do postaci :

$$\sigma_{11,1} - \rho \dot{v}_1 = 0,$$

$$/9.2/ \quad \sigma_{12,1} - \rho \dot{v}_2 = 0,$$

$$\sigma_{13,1} - \rho \dot{v}_3 = 0.$$

Dla małych odkształceń mamy dodatkowo następujące związki,
wynikające z równań /2.17/ :

$$/9.3/ \quad v_{1,1} = \dot{\varepsilon}_{11}, \quad v_{2,1} = 2 \dot{\varepsilon}_{12}, \quad v_{3,1} = 2 \dot{\varepsilon}_{13}.$$

Uwzględniając wyrażenia /9.1/ oraz związki /9.2/, układ
równań konstytutywnych /2.8/ redukuje się do trzech następujących
równań :

$$\left(1 + \frac{3K}{4\mu}\right) v_{1,1} - \frac{3}{4\mu} \dot{\sigma}_{11} - \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sqrt{J_2}} = 0,$$

$$/9.4/ \quad v_{2,1} - \frac{1}{\mu} \dot{\sigma}_{12} - 2\gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{J_2}} = 0,$$

$$v_{3,1} - \frac{1}{\mu} \dot{\sigma}_{13} - 2\gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\sigma_{13}}{\sqrt{J_2}} = 0,$$

gdzie

$$/9.5/ \quad J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2.$$

Układ równań problemu /9.2/ i /9.4/ możemy przedstawić w postaci macierzowej :

$$/9.6/ \quad L[u] = \underline{A} u_{,t} + \underline{B} u_{,x} + \underline{D} = 0,$$

przy czym

$$/9.7/ \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ 2\Psi \sigma_{12} \\ 2\Psi \sigma_{13} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{1}{\sqrt{12}},$$

elementy macierzy \underline{A} i \underline{B} są równe :

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = +g, \quad a_{44} = \frac{3}{4\mu}, \quad a_{55} = a_{66} = \frac{1}{\mu}, \\ b_{14} = b_{25} = b_{36} = b_{52} = b_{63} = -1, \quad b_{41} = -1 - \frac{3K}{4\mu},$$

pozostałe elementy tych macierzy są równe zero.

Charakterystykami układu równań /9.6/, określonymi na podstawie warunku /6.4/ są linie :

$$/9.8/ \quad x = \pm a_1 t + \text{const.} \\ x = \pm a_2 t + \text{const.} \quad a_1 = \left(\frac{3K+4}{3g} \right)^{1/2}, \quad a_2 = \left(\frac{4}{g} \right)^{1/2}.$$

Wzdłuż charakterystyk /9.8/ otrzymany na podstawie /6.6/ równania różniczkowe zwyczajne :

$$/9.9/_1 \quad d\sigma_{11} + g a_1 dv_1 + \frac{4}{3}\mu \Psi (\sigma_{11} - \sigma_{22}) dt = 0, \\ \text{dla } x = \pm a_1 t + \text{const.},$$

$$/9.9/_2 \quad d\sigma_{12} + g a_2 dv_2 + 2\mu \Psi \cdot \sigma_{12} dt = 0, \\ \text{dla } x = \pm a_2 t + \text{const.},$$

$$/9.9/3 \quad d\epsilon_{13} + \rho a_2 dv_3 + 2\mu \Psi \cdot \epsilon_{13} dt = 0,$$

dla $x = \pm a_2 t + \text{const.}$

Wprowadzając następujące wielkości bezwymiarowe :

$$/9.10/ \quad \xi = \frac{x}{x^*}, \quad \eta = \frac{a_1 t}{x^*}, \quad R = \frac{\epsilon_{11}}{k_0}, \quad S = \frac{\epsilon_{22}}{k_0}, \quad Q = \frac{\epsilon_{12}}{k_0},$$

$$T = \frac{\epsilon_{13}}{k_0}, \quad U = \frac{v_1}{k_0} \rho a_1, \quad V = \frac{v_2}{k_0} \rho a_2, \quad W = \frac{v_3}{k_0} \rho a_2,$$

$$A = \frac{\rho_2}{a_1}, \quad B = \frac{K}{k_0}, \quad C = \frac{\mu}{k_0}, \quad D = 2 \frac{\mu x^*}{k_0 a_1} \delta,$$

$$D_1 = \frac{x^* \gamma}{a_1}, \quad \tilde{\Psi}^2 = \frac{1}{3}(R+S)^2 + Q^2 + T^2,$$

gdzie x^* jest wartością ustaloną x_1 , równania różniczkowe wzdłuż charakterystyk przybiorą postać :

$$dR + dU + \frac{2}{3} D \langle \Phi(\tilde{\Psi}-1) \rangle \frac{R-S}{\tilde{\Psi}} d\eta = 0, \quad \text{dla } \xi = \pm \eta + c,$$

$$/9.11/ \quad dQ + dV + D \langle \Phi(\tilde{\Psi}-1) \rangle \frac{Q}{\tilde{\Psi}} d\eta = 0, \quad \text{dla } \xi = \pm \eta + c,$$

$$dT + dW + D \langle \Phi(\tilde{\Psi}-1) \rangle \frac{T}{\tilde{\Psi}} d\eta = 0, \quad \text{dla } \xi = \pm \eta + c.$$

Równania konstytutywne /9.4/ scałkowane względem czasu będą postaci :

$$d\epsilon_{11} = \frac{1}{2C} (dR - dS) + D_1 \langle \Phi(\tilde{\Psi}-1) \rangle \frac{R-S}{\tilde{\Psi}} d\eta,$$

$$/9.12/ \quad d\epsilon_{12} = \frac{1}{2C} dQ + D_1 \langle \Phi(\tilde{\Psi}-1) \rangle \frac{Q}{\tilde{\Psi}} d\eta,$$

$$d\epsilon_{13} = \frac{1}{2C} dT + D_1 \langle \Phi(\tilde{\Psi}-1) \rangle \frac{T}{\tilde{\Psi}} d\eta.$$

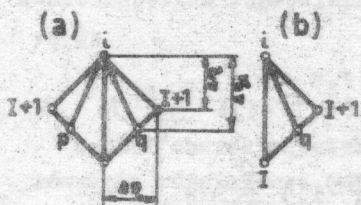
Warunek ścisłości /2.8/2 będzie wyrażony jako :

$$/9.13/ \quad R + 2S = 3BE.$$

W obszarach odkształceń sprężystych [oraz w obszarach odciążenia], ponieważ $\bar{Q}(F) = 0$, układ równań /9.6/ rozpręga się i jego rozwiązanie składa się z nie oddziaływujących ze sobą fal Riemanna - podłużnych i poprzecznych. W obszarach odkształceń lepkoplastycznych, układ równań /9.6/ należy rozwiązać numerycznie.

Identycznie jak to uosyniono w pracach [44 - 47], można określić lokalną prędkość rozprzestrzeniania się frontu fali zaburzeń plastycznych jak też i "fali odciążenia". Można udowodnić, że również w przypadku obecnie rozpatrywanym fala zaburzeń plastycznych [jak też fala "odciążenia"] rozprzestrzenia się z prędkością mniejszą lub równą prędkości sprężystych fal podłużnych oraz z większą lub równą niż fale poprzeczne sprężyste. Jednakże, ze względu na to, że obliczenia są przeprowadzane numerycznie, nie jest sprawą istotną określenie a priori frontu fali zaburzeń plastycznych ani frontu "fali odciążenia".

Układ równań /9.11/ - /9.13/ pozwala na określenie rozwiązania problemu w punkcie i siatki charakterystyk /rys. 27/. Powyższy układ równań rozwiązano metodą różnic



Rys. 27 .

skończonych rozpisanych wzdłuż charakterystyk, zastępując różniczki różnicami skończonymi, identycznie jak to uosyniono w pracach [44-47]. Algorytm obliczeń numerycznych został skonstruowany dla dowolnego stosunku prędkości fal podłużnych i poprzecznych $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Wartości rozwiązań w punktach $i, i-1, i+1$ [element środkowy] jak również w punktach $i, i+1$ [element brzegowy] są znane bezpośrednio z obliczeń w poprzecznych odcinkach.

W przypadku elementu brzegowego znane są składowe tensora naprężenia w punkcie i - warunki brzegowe. W celu określenia wartości rozwiązań w punktach p i q przyjęto interpolację liniową, odpowiednio między wartościami rozwiązań w punktach $I-1, I$ oraz $I+1, I$. Np. naprężenia normalne R w punkcie q są równe :

$$/9.14/ \quad R(q) = R(I) + 2\Delta\eta_2 [R(I+1) - R(I)],$$

gdzie

$$/9.15/ \quad \Delta\eta_2 = \frac{2}{1+A} \Delta\eta.$$

Rozwiązania wzdłuż fal silnej nieciągłości, które otrzymuje się z równań /9.11/, uwzględniając w nich warunki ciągłości dynamicznej

$$/9.16/ \quad [U] = \mp [R] \quad \text{dla} \quad \xi = \pm \eta + \text{const.}$$

$$[V] = \mp [Q], [W] = \mp [T] \quad \text{dla} \quad \xi = \pm A\eta + \text{const.},$$

sprowadzają się do rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych postaci :

$$/9.17/ \quad \frac{d\Sigma}{d\eta} = f(\Sigma - \Sigma^*),$$

a zatem typu /6.14/. Do rozwiązania równań wzdłuż fal silnych nieciągłości zastosowano algorytm Treanora.

Składowe tensora odkształcenia $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}$ i ϵ_{13} oraz składową naprężenia S , zarówno na frontach fal silnej nieciągłości jak i w obszarze, określono z wzorów /9.12/ i /9.13/, również całkując je w czasie przy zastosowaniu algorytmu Treanora.

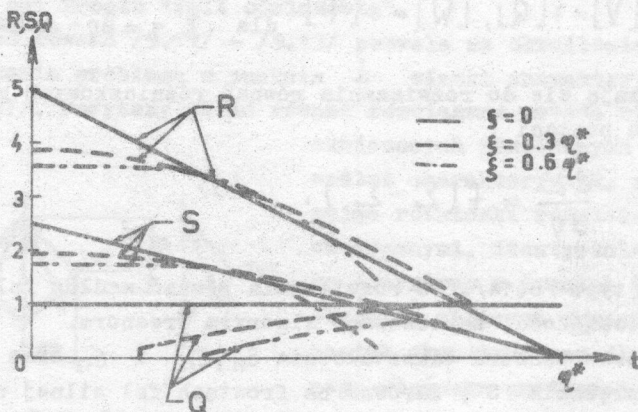
Przedstawimy w skrócie pewne interesujące wyniki obliczeń numerycznych. Przyjęto następujące obciążenia brzegu półprzestrzeni : $R/O, \eta/ = -R_0 / 1 - \eta/\eta^*$ dla $0 < \eta < \eta^*$, $R/O, \eta/ = 0$ dla $\eta > \eta^*$, $Q/O, \eta/ = -Q_0$, $T/O, \eta/ = -T_0$, $\eta^* = 100$. Przyjęto zerowe warunki początkowe. Obliczenia wykonano dla następujących wartości liczbowych: $E_0 = 2.1 \cdot 10^6$ KG/cm^2 , $k = 2100$ KG/cm^2 , $\lambda = 900$ sek^{-1} , $\rho = 7.8 \cdot 10^{-3}$ kg/cm^3 , współczynnik Poissona $\nu = 0.25$ oraz $\nu = 0.3$. Przyjęto następujące wartości dla R_0, Q_0, T_0 :

Przypadek 1 : $R_0 = 5, Q_0 = 1, T_0 = 0,$

Przypadek 2 : $R_0 = 5, Q_0 = 1, T_0 = 1,$

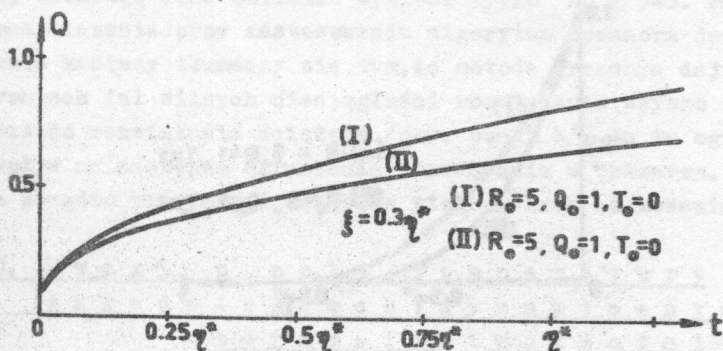
Przypadek 3 : $R_0 = 8, Q_0 = 1, T_0 = 1.$

Przyjęto ponadto liniową funkcję $\bar{\Phi}(F)$, czyli $\bar{\Phi}(F) = F$. Na rysunku 28 przedstawiono wykresy zmian składowych tensora naprężenia R, S oraz Q w czasie, dla przypadku 1, kolejno w odległościach od brzegu : $\xi = 0$, $\xi = 0.3\eta^*$, oraz $\xi = 0.6\eta^*$.



Rys. 28 .

Na rysunku 29 przedstawiono zmianę naprężenia Q w osie dla przypadku 1 oraz dla przypadku 2, dla $\xi = 0.3\eta^*$. W obu tych przypadkach stwierdzono, że składowe naprężenia R i S są mało zależne od składowych Q i T . W obu przypadkach różnice w naprężeniach R i S są rzędu 2% dla małych wartości ξ i η i różnice te maleją szybko



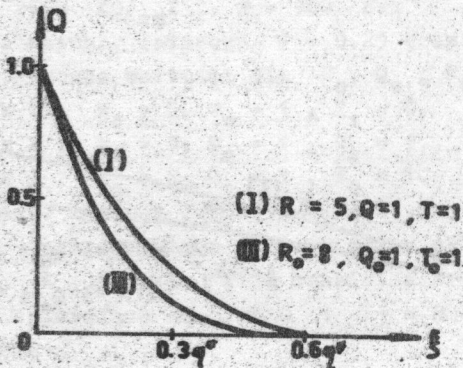
Rys. 29 .

w funkcji odległości od brzegu półprzestrzeni. Różnice te maleją ponadto ze wzrostem stosunku prędkości fal poprzecznych do fal podłużnych.

Można stąd wywnioskować następujący wniosek :

Wniosek 1 : Na rozkład naprężeń normalnych w płaszczyźnie równoległej do brzegu półprzestrzeni, znajdującej się w pewnej odległości od brzegu, nie mają istotnego wpływu naprężenia styczne przyłożone do brzegu. Zatem w obliczeniach inżynierskich można pominąć wpływ składowych stycznych na rozkład naprężeń normalnych. Natomiast należy zauważyć istotną zależność składowych naprężeń Q i T , co obrazują wykresy na rysunku 29 .

Na rysunku 30 pokazane są wykresy zmiany naprężenia Q w funkcji czasu dla przypadku 2 i 3, tzn. odpowiednio dla różnych wartości R_0 , równych odpowiednio 5 i 8, przy jednakowych wartościach dla Q_0 i T_0 , równych 1.



Rys. 30 .

Wniosek 2 : Naprężenia normalne R mają istotny wpływ na składowe tensora naprężenia Q (oraz T) - na składowe naprężeń ścinających. Ze wzrostem gradientu naprężenia normalnego R maleją składowe naprężeń stykowych.

Obliczenia numeryczne dla przypadku 2 dokonane dwoma sposobami :

- 1^o Rozwiązane całość problemu metodą różnic skończonych,
- 2^o Równania problemu na frontach fal silnych nieciągłości oraz równanie dla naprężeń S na charakterystykach $\xi = \text{const.}$ jak też równania /9.12/ rozwiązane w oparciu o metodę Treanora, natomiast metodą różnic skończonych znalezione pozostałe parametry rozwiązań w obszarach odkształceń lepkoplastycznych.

Stwierdzone, że aby strzymać rozwiązania oboma sposobami :

jednakową dokładnością [przyjęto, że różnica między rozwiązaniem metodą Treanora i różnic skończonych jest mniejsza od 10^{-4}], mniej czasu pracy maszyny cyfrowej zużywa się przy zastosowaniu metody Treanora. Np. czas liczenia na maszynie UNIVAC 1108, metodą różnic skończonych dla przypadku 2 wyniósł 27 " 848 [rozwiązanie układu równań problemu w 5100 punktach płaszczyzny fazowej], to przy zastosowaniu metody Treanora czas obliczeń wyniósł tylko 20 " 543. Fakt że czas liczenia przy zastosowaniu algorytmu Treanora jest znacznie krótszy tłumaczy się tym, że metoda Treanora daje na frontach fal silnych nieciągłości rozwiązanie szybko zbieżne do rozwiązania ścisłego [por. punkt 6]. Ma to ogromny wpływ na następne określenie rozwiązania w obszarze. Można ponadto przyjmować znacznie większy krok całkowania.

10. Uwagi o polu temperatury w zagadnieniach dynamicznych termoplastyczności

Wpływ pola temperatury na pole odkształcenia w zagadnieniach dynamicznych teorii naprężeń cieplnych w plastyczności był badany w pracach [96-100, 110, 111, 93], w lepkoplastyczności w pracach [78 - 80]. Stwierdzono w tych pracach, że uderzenie termiczne na brzegu ośrodka niesprężystego, z pominięciem lub z uwzględnieniem efektów lepkościowych, w zakresie deformacji plastycznych, powoduje odkształcenia trwałe dla przyrostu temperatury rzędu stukilkudziesięciu stopni. Wykażemy, że w przypadkach, gdy nie ma doprowadzenia ciepła z zewnątrz do ośrodka [w zakresie małych odkształceń] nie jest celowe uwzględnienie temperatury w równaniach dynamiki ośrodka niesprężystego.

Na przykładzie szczególnym, pręta sprężysto/lepkoplastycznego, poddanego obciążeniu dynamicznemu, zostanie pokazany wpływ pewnych przyjętych hipotez w równaniu termodynamiki na pole temperatury i pole odkształcenia [80].

Rozważmy przypadek uderzenia pręta z materiału sprężysto/lepkoplastycznego w nieodkształcalną przegrodę. Prędo-

kość początkowa pręta niech wynosi v_0 , długość pręta L .
Ograniczymy się do przypadku małych odkształceń.

Mamy do rozwiązania następujący układ równań :

1^o. Równania konstytutywne.

Przyjmijmy nieco odmienne równania konstytutywne ośrodka sprężysto/lepkoplastycznego niż równania podane w punkcie 2 pracy. Przyjmijmy równania konstytutywne dla polikryształu metalu w przypadku jednowymiarowego stanu naprężenia, zaproponowane przez J.ZARKA [124 - 126]. Zakłada się, że :

- jeden parametr X , związany ze średnim rozkładem dyslokacji w polikryształe wystarczy do scharakteryzowania jego stanu wewnętrznego / X jest wielkością bezwymiarową/,
- granica plastyczności jest proporcjonalna do X /por. [78] /,
- prędkość odkształcenia lepkoplastycznego $\dot{\epsilon}^p$ jest funkcją stanu aktualnego σ , T i X , gdzie T jest temperaturą bezwzględną,
- zmiana parametru stanu X jest również funkcją σ , T i X /por. [78] /,
- energia zgmagazynowana jest proporcjonalna do X^2 .

Przyjmuje się ponadto, że

$$/10.1/ \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p,$$

gdzie

$$\dot{\epsilon}^e = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$/10.2/ \quad \dot{\epsilon}^p = f(\sigma, T, X),$$

$$\dot{X} = g(\sigma, T, X),$$

$$U_2 = AX^2$$

gdzie $A = \text{const.}$

Przyjmijemy postać szczególną powyższych równań, mianowicie przyjmując :

$$/10.3/ \quad S = \frac{\sigma}{E} ,$$

gdzie E jest modułem Younga, założymy [126] :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial S}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{|S|}{S} C_1(T) \langle |S| - X \rangle X ,$$

$$/10.4/ \quad \dot{X} = C_2(T) \langle |S| - X \rangle X^{1-\nu_0} ,$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{u_2}{E} = \tilde{A} X^2 .$$

przy czym funkcje $C_1/T/$ i $C_2/T/$ są zdefiniowane następująco :

$$C_1(T) \approx \frac{A_1}{kT} \exp\left(-\frac{u_0}{kT}\right) ,$$

/10.5/

$$C_2(T) \approx \frac{A_2}{kT} \exp\left(-\frac{u_0}{kT}\right) .$$

Symbol $\langle \rangle$ występujący w /10.4/ jest zdefiniowany identycznie jak we wzorze /2.4/, mianowicie :

$$/10.6/ \quad \langle |S| - X \rangle = \begin{cases} 0 & \text{gdy } |S| - X \leq 0 , \\ |S| - X & \text{gdy } |S| - X > 0 . \end{cases}$$

Stałe ν_0 , \tilde{A} , A_1 , A_2 , u_0 , k są stałymi fizycznymi charakterystycznymi dla rozważanego polikryształu. Ich wartości są podane w pracach [126,14] .

2° Równanie termodynamiki.

Dla elementu objętości monokryształu, w przypadku trans-

formacji adiabatycznej, równanie termodynamiki, jak to pokazano w pracy [125] można napisać w postaci :

$$/10.7/ \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \rho \frac{\partial U_2}{\partial y} \dot{y} + \alpha_{ij} \theta \dot{\sigma}_{ij} + \rho c \dot{\theta},$$

przy czym $U_2(\theta, \{y\})$ jest energią wewnętrzną właściwą [lub energią zmagazynowaną] spowodowaną defektami monokryształu [głównie dyslokacjami], przedstawionymi parametrami $\{y\}$, θ jest temperaturą absolutną monokryształu, α_{ij} - macierzą współczynników rozszerzalności cieplnej, c - ciepłem właściwym.

W pracy [80] pokazano, że równanie lokalne termodynamiki dla elementu polikryształicznego jest następującej postaci :

$$/10.8/ \quad \sum \dot{\mathbb{E}}^p \approx \rho \frac{\partial U_2}{\partial Y} \dot{Y} + \alpha T \underline{\delta} \dot{\Sigma} + \rho c \dot{T},$$

gdzie Σ i \mathbb{E}^p jest odpowiednio tensorem naprężenia makroskopowego i tensorem prędkości deformacji makroskopowych, zdefiniowane w następujący sposób :

$$/10.9/ \quad \underline{\Sigma} \approx \frac{1}{V} \int_V \underline{\sigma} dV, \quad \dot{\mathbb{E}}^p = \frac{1}{V} \int_V \dot{\mathbb{A}}^T \dot{\epsilon}^p dV,$$

gdzie \mathbb{A}^T jest macierzą transponowaną macierzy $\underline{\mathbb{A}}$. Parametr $\{Y\}$ w równaniu /10.8/ reprezentuje zbiór parametrów $\{y\}$, naprężenia rezydualne, niejednorodności temperatury.

W rozważanym przypadku jednoosiowego stanu naprężenia, równanie /10.8/ redukuje się do postaci :

$$/10.10/ \quad \sigma \cdot f(\sigma, T, X) = 2 \tilde{A} X \dot{X} + \alpha T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho c \dot{T}.$$

Po uwzględnieniu /10.2/ i /10.3/ będzie ono postaci :

$$/10.11/ \quad |S|C_1(T) < |S| - X > X = \alpha T \dot{S} + \frac{2\hat{A}X}{E} \dot{X} + \frac{\rho c}{E} \dot{T} .$$

3° Równanie ruchu

Równania ruchu /3.3/ przy pominięciu sił masowych, redukują się w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia do równania [uwzględniająco /10.3/]:

$$/10.12/ \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{gdzie } a^2 = \frac{E}{\rho} .$$

4° Równanie ciągłości

$$/10.13/ \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Otrzymaliśmy ostatecznie układ pięciu równań problemu - równania /10.4/_{1,2} oraz /10.11/ - /10.13/, względem zmiennych : S , v , ε , X , T .

Powyższy układ równań rozwiążemy przy następujących warunkach początkowych dla $t = 0^-$:

$$S(x, 0) = 0, \quad \varepsilon(x, 0) = 0,$$

$$/10.14/ \quad X(x, 0) = X_0, \quad T(x, 0) = T_0,$$

$$v(x, 0) = v_0 .$$

oraz przy warunkach brzegowych :

$$\text{dla } x = 0$$

$$/10.15/ \quad \begin{aligned} v(0, t) &= 0 && \text{gd } S(0, t) < 0 \\ \text{lub} & && \\ S(0, t) &= 0 && \text{dla } t > t^*, \text{ gdzie } t^* \text{ oznacza} \\ & && \text{czas w którym ustanie kontakt} \\ & && \text{pręta z przegrodą ,} \end{aligned}$$

dla $x = L$
 /10.16/ $S(L, t) = 0$.

W celu dokonania całkowania równań problemu drogą numeryczną celowe jest wprowadzenie wielkości bezwymiarowych:

/10.17/ $\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{t} = \frac{at}{L}$, $\tilde{S} = \frac{S}{X_0}$, $\tilde{X} = \frac{X}{X_0}$, $\tilde{T} = \alpha T$, $V = \frac{\rho a v}{EX_0}$.

Wprowadzimy następnie parametry bezwymiarowe:

/10.18/ $\eta_1(T) = C_1(T) X_0^2 \frac{L}{a}$,
 $\eta_2(T) = C_2(T) X_0^{(1-\nu_0)} \frac{L}{a}$,
 $\eta_3 = 2 \frac{A}{E} X_0^2$,
 $B = \frac{\alpha E X_0}{\rho c}$.

Układ równań problemu /10.14/_{1,2} i /10.11/-/10.13/ jest typu hiperbolicznego. Na podstawie /7.4/ charakterystykami tego układu są linie:

/10.19/ $\tilde{x} = \pm \tilde{t} + \text{const}$
 $\tilde{x} = \text{const}$.

Związki wzdłuż charakterystyk na podstawie /6.6/ są postaci

dla $\tilde{x} = \pm \tilde{t} + \text{const}$
 /10.20/ $d\tilde{S} \mp d\tilde{V} + \eta_1(T) \frac{|\tilde{S}|}{\tilde{S}} \langle |\tilde{S}| - \tilde{x} \rangle \tilde{X} d\tilde{t} = 0$,
 dla $\tilde{x} = \text{const}$.
 $d\tilde{X} = \eta_2(T) \langle |\tilde{S}| - \tilde{x} \rangle \tilde{X}^{(1-\nu_0)} d\tilde{t}$

$$\begin{aligned} /10.20/_{od} \quad \tilde{T} d\tilde{S} + \frac{d\tilde{T}}{B} + \eta_3 \tilde{X} d\tilde{X} &= |\tilde{S}| \eta_1(T) \langle |\tilde{S}| - \tilde{X} \rangle \tilde{X} d\tilde{t}, \\ d\varepsilon &= \tilde{X}_0 d\tilde{S} + d\tilde{T} + \eta_1(T) \frac{|\tilde{S}|}{\tilde{S}} \langle |\tilde{S}| - \tilde{X} \rangle \tilde{X} d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Układ równań /10.20/ całkujemy numerycznie przy przyjęciu następujących danych liczbowych /dla aluminium/ :

$$\begin{aligned} E &= 7.2 \cdot 10^5 \text{ KG/cm}^2, \quad X_0 = 5 \cdot 10^{-4}, \quad v_0 = 4, \\ /10.21/ \quad C_1/T_0 &= 4.13 \cdot 10^9 \text{ sek}, \quad C_3/T_0 = 3.44 \cdot 10^{-6} \text{ sek}, \\ \rho &= 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3, \quad \alpha = 9 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 \text{ sek}^{-2} \text{ K}^{-1}, \\ U &\approx 8 \text{ k T}_0 \approx 0.2, \quad \frac{A}{E} \approx 36. \end{aligned}$$

Przyjmując długość pręta $L = 10 \text{ cm}$, prędkość początkową z jaką uderza on w przegrodę $v_0 = 52 \text{ m/sek}$, wielkości bezwymiarowe /10.18/ będą równe :

$$\begin{aligned} /10.22/ \quad \eta_1/T_0 &= 0.02, \quad \eta_2/T_0 = 0.5335, \\ \eta_3 &= 0.03, \quad B = 3.704 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Wykonano szereg obliczeń numerycznych w celu zbadania wpływu na rozwiązania przyjęcia różnych hipotez w równaniu termodynamiki.

Mianowicie :

- 1^o Założono, że cała moc plastyczna jest dysypowana termicznie, tzn. że $\tilde{A} = 0$ w równaniu /10.11/ ,
- 2^o Założono istnienie energii zmagazynowanej w ośrodku, przyjmując wartość dla stosunku $\frac{A}{E} = 36$,
- 3^o Założono, że istnieje energia zmagazynowana, lecz równanie termodynamiki jest zmodyfikowane i posiada postać :

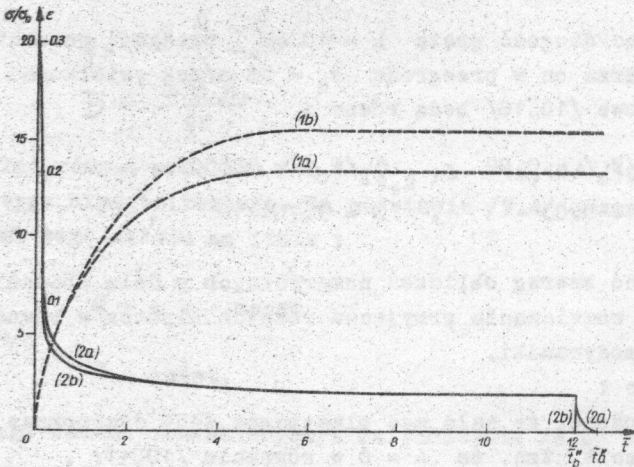
$$/10.23/ \quad 0.9 |\tilde{S}| C_1(\tilde{T}) \langle |\tilde{S}| - \tilde{X} \rangle \tilde{X} = \alpha \tilde{T} \dot{\tilde{S}} + \rho c \dot{\tilde{T}}/E,$$

ten, przyjmując, że stosunek mocy plastycznej do energii zmagazynowanej

$$/10.24/ \quad R = \frac{|\tilde{S}| C_1(\tilde{T}) \tilde{X}^{\nu_0-1}}{2 \frac{A}{E} C_2(\tilde{T})} = 10,$$

jak przyjmuje to wielu autorów, por. np. [36].

Na rysunku 31 przedstawiono wykresy naprężenia i odkształcenia w przekroju $x = 0$. Krzywe 1a i 2a przedstawiają odpowiednio wykresy odkształcenia i naprężenia w przypadku gdy nie uwzględnia się energii zmagazynowanej oraz gdy współczynniki C_1 i C_2 są niezależne od zmiany temperatury.

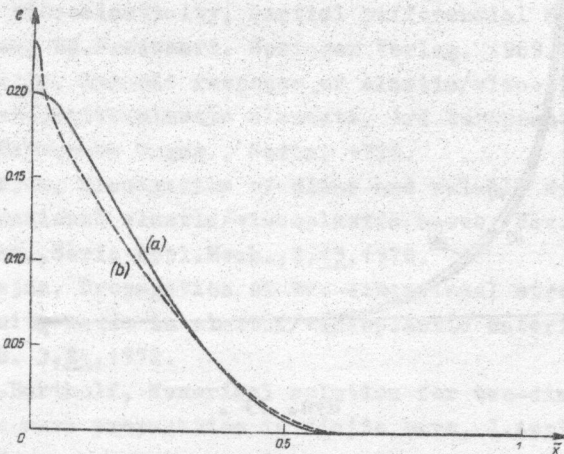


Rys. 31 .

Krzywe (1b) i (2b) przedstawiają również odpowiednio wykresy odkształcenia i naprężenia w przypadku nieuwzględnienia energii zmagazynowanej, lecz dla C_1 i C_2 zmiennych z temperaturą. Z wykresów tych można stwierdzić nieznacone

różnice między obu rozwiązaniami. Dla materiałów wstępnie napromieniowanych, w których granica plastyczności zmienia się znacznie wyraźniej w funkcji prędkości odkształcenia oraz w funkcji temperatury niż w materiałach nienapromieniowanych [91], różnice w rozwiązaniach przy uwzględnieniu zmiany C_1 i C_2 z temperaturą, oraz dla C_1 i C_2 niezależnych od temperatury, będą znacznie wyraźniejsze.

Na rysunku 32 przedstawiono rozkład odkształceń trwałych wzdłuż długości pręta. Krzywa (a) obrazuje przypadek gdy C_1 i C_2 są niezależne od zmiany temperatury, a krzywa (b) gdy C_1 i C_2 są zmienne z temperaturą. Widać, że różnice w rozwiązaniach zanikają w funkcji odległości od brzegu pręta, który zderza się z przegrodą.



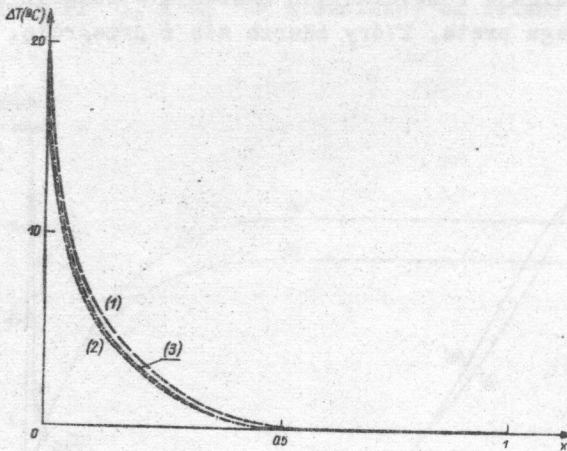
Rys. 32 .

Rysunek 33 obrazuje zmianę temperatury pręta wzdłuż jego długości w chwili $t = t^*$ tzn. w chwili gdy pręt odbija się od przegrody. Kolejne krzywe odpowiadają trzem różnym hipo-

teżem przyjętym dla równania termodynamiki:

- 1 - nie uwzględnia się energii zmagazynowanej,
- 2 - uwzględnia się energię zmagazynowaną, ale równanie termodynamiki jest postaci /10.23/ ,
- 3 - jak w poprzednim przypadku lecz dla równania termodynamiki /10.11/.

Można stwierdzić, że w przypadku deformacji rzędu 20 % rozkład temperatury w pręcie jest taki sam w przypadku przyjęcia powyższych trzech hipotez dla równania termodynamiki. Ponadto dla tych odkształceń średni przyrost temperatury w pręcie jest rzędu 4 % .



Rys. 33 .

Wszystkie powyższe rezultaty pozwalają ponadto stwierdzić że można nie uwzględniać temperatury w problemach dynamicznych teorii plastyczności w przypadkach, gdy do ośrodka nie jest doprowadzane ciepło z zewnątrz. Również widać, że wpływ zmienności stałych fizycznych z temperaturą na rozwiązania jest mały. Oczywiście stwierdzenia te są słuszne dla zakresu małych deformacji ośrodka.

B I B L I O G R A F I A

1. A.Bałtów, The plane problem for elastic/viscoplastic bodies, *Arch.Mech.Stos.*, 2,18,1967.
2. A.Bałtów, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa, 1967.
3. A.Bałtów, Tuong Vinh, *C.R.Acad.Sci., Paris*, 275, série A, 291, 1972.
4. J.Bejda, Propagation of two-dimensional stress waves in elastic/viscoplastic material, *Proc. 12th International Congress of Applied Mechanics*, Ed. M.Hetenyi, Springer Verlag 1969.
5. J.Bejda, Przestrzenne zagadnienia falowe ośrodków niesprężystych, *Prace IPPT PAN, Warszawa*, 27, 1972.
6. J.Bejda, A difference method for plane problems in dynamic viscoelasticity, *Partial Differential Equations and Waves*, Ed. Froissart, Springer Verlag, 1969.
7. J.Bejda, Dynamic response of elastic/viscoplastic and viscoelastic-plastic elements, *3rd European Symposium on Earthquake Engng.*, Sofia, 1970.
8. J.Bejda, Propagation of plane and axially symmetric two-dimensional elastic/viscoplastic waves, *Rev.Roum.Sci. Techn., Série Appl.Mech.*, 2, 15, 1970.
9. J.Bejda, Propagation of two-dimensional strong discontinuity waves in elastic/viscoplastic material, *Arch.of Mech.* 3, 24, 1972.
10. L.D.Bertholf, Numerical solution for two-dimensional elastic wave propagation in finite bars, *J.Appl.Mech.*, 34, 1967.
11. H.H.Bleich, A.T.Mathews, J.P.Wright, Moving step load on the surface of a half-space of granular material, *Int. Journ.of Solids and Struct.* 2, 4, 1968.
12. H.H.Bleich, I.Nelson, Plane waves in an elastic-plastic half-space due to combined surface pressure and shear, *Journ.Appl.Mech.*, March, 1966.

13. H.E.Bleich, A.T.Mathews, Step load moving with super-seismic velocity on the surface of an elastic-plastic half-space, *Int.Journ.of Solids and Struct.*, 5,2,1967.
14. H.D.Bui, Dissipation d'énergie dans une déformation plastique, *Cahiers de Rhéologie*, 1,1,1965.
15. J.J.Burke, V.Weiss, Eds, Shock waves and the Mechanical Properties of Solids, Syracuse University Press, 1971.
16. M.Burnat, A.Kielbasiński, A.Wakulicz, The method of characteristics for a multidimensional gas flow, *Arch.Mech. Stos.*, 3,16,1964.
17. D.S.Butler, The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables, *Proc.Roy.Soc.*, London,1962.
18. J.D.Campbell, R.H.Cooper, Yield and flow low carbon steel at medium strain rates, *Proc.Phys.Conf.Basil Yield Fracture*,1967.
19. J.D.Campbell, W.G.Ferguson, The temperature and strain rate dependence of shear strength of mild steel, *Phil. Mag.*, 169,21,1970.
20. J.L.Chiddister, L.E.Malvern, Compression impact testing of aluminium at elevated temperature, *Experimental Mech.* 3,1963.
21. D.S.Clarc, P.E.Duwez, The influence of strain rate on some testile properties of steel, *Proc. Amer.Soc.Testing Materials*, 50,1950.
22. P.C.Chou, R.R.Karp, Two-dimensional dynamic elasticity problems by the numerical method of characteristics, *Proc. Army Symp.on Solid Mechanics*, Septembre 1968.
23. R.J.Clifton, An analysis of combined longitudinal and torsional waves in a thin-walled tube, Report No 5, Brown University, Providence, May,1960.
24. R.J.Clifton, Unloading waves for combined longitudinal and torsional plastic waves, *Journ.Appl.Mech.*, 4,32,1968.
25. R.J.Clifton, J.Lipkin, Plastic waves of combined stresses due to longitudinal impact of a pretorqued tube,

- Part I and II, *Quart. Appl. Math.*, 1, 25, 1967.
26. R.J. Clifton, A difference method for plane problems in dynamic elasticity, *Quart. Appl. Math.*, 1, 25, 1967.
 27. R.J. Clifton, Analysis of dynamic deformation of elasto-plastic solids under condition of plane strain, Phil.D. Thesis, Institute of Technology, Pittsburg, 1963.
 28. H. Cristescu, On the propagation of elasto-plastic waves for combined stresses, *P.M.M.*, 23, 1959.
 29. F. Ceschino, J. Kuntzmann, *Problèmes Différentiels de Conditions Initiales*, Dunod, Paris, 1963.
 30. M.I. Estrin, Ob urawnienijach dinamiki szimajemoj plasti-czeskoj sredy, *DAN SSSR*, 1, 125, 1960.
 31. W.G. Ferguson, A. Kumar, J.E. Dorn, Dislocation damping in aluminium at high strain rate, *Jour. Appl. Phys.*, 38, 1967.
 32. J.T. Pong, Elastic-plastic waves in a half-space of linearly work-hardening material for coupled loadings, Rep. No 161, Stanford University, May, 1966.
 33. A.M. Freudenthal, *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*, *Handbuch der Physik*, Tom VI, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
 34. J. Frelat, Q.S. Nguyen, J. Zarka, Some remarks about classical problems in plasticity and viscoplasticity. Application to their numerical resolution. Lecture presented at the University of Wales Swansea, May, 1974.
 35. P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, T. 1, *Théorie Générale*, Masson, Paris, 1973.
 36. P. Germain, E.H. Lee, *International Symposium, Foundations of Plasticity*, Ed. A. Sawczuk, Warszawa, 1972.
 37. R.P. Geel, L.E. Malvern, Biaxial plastic simple waves with combined kinematic and isotropic hardening, *Transactions of the ASME*, Dec. 1971.
 38. J. Hadamard, *Cours d'Analyse*, Paris, 1927.
 39. F.E. Hauser, J.A. Simmons, J.E. Dorn, Strain rate effects in plastic wave propagation. Response of metals to high velocity deformation. Interscience, New York, 1961.

40. K.Hohensemser, W.Prager, ^UÜber die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua, ZAMM, 12, 1932.
41. J.C.C.Hsu, R.J.Clifton, Plastic waves in a rate sensitive material, II, Waves of combined stress, J.Mech.Phys.Solids, 22, 1974.
42. G.B.Jeffery, Plane stress and plane strain in bipolar co-ordinates, Phil.Trans.Royal.Soc., Série A, 1921.
43. S.Kaliski, W.K.Nowacki, E.Włodarczyk, On certain closed solution for the shock-wave with rigid unloading, Bull.Acad.Polon.Sci., Série Sci.Techn., 5, 12, 1967, oraz Biuletyn WAT, 3, 16, 1967.
44. S.Kaliski, W.K.Nowacki, E.Włodarczyk, Plane biwaves in an elastic/viscoplastic semi-space, Proc.Vibr.Probl., 2, 8, 1967.
45. S.Kaliski, W.K.Nowacki, E.Włodarczyk, Propagation of plane loading and unloading biwaves in an elastic/viscoplastic semi-space, Part I, Theory, Proc.Vibr.Probl., 3, 8, 1967.
46. S.Kaliski, W.K.Nowacki, E.Włodarczyk, Propagation of plane loading and unloading biwaves in an elastic/viscoplastic semi-infinite body, Part II, Numerical Analysis, Proc.Vibr.Probl., 3, 8, 1967.
47. S.Kaliski, W.K.Nowacki, E.Włodarczyk, The influence of strain hardening in the problem of propagation of plane loading and unloading biwaves in an elastic/viscoplastic semi-infinite body, Proc.Vibr.Probl., 4, 8, 1967.
48. S.Kaliski, J.Osiecki, Unloading wave for a body with rigid unloading characteristic, Proc.Vibr.Probl., 1, 1, 1959.
49. S.Kaliski, J.Osiecki, The problem of reflection by a rigid or elastic wall of an unloading wave in a body with rigid unloading characteristic, Proc.Vibr.Probl., 1, 1959.
50. J.Klepaczko, Doświadczenia badania sprężysto-plastycznych procesów falowych w metalach, Prace IPPT PAN, 61, 1970.
51. D.Kolarow, A.Bałtów, Dinamiczeskije problemy wiazke-plastiozeskich sred w temperaturnom pole, Konferencja Mecha-

- niki, Bukareszt, 1969.
52. W.N.Kukadzanow, O egzistencijnom reszenii zadacz rasprostranienija uprugoplastičeskich voln, Sympozjum, Alma-Ata, 1971.
 53. A.Kumar, F.E.Hauser, J.E.Dorn, Viscous drag on dislocations in aluminium at high strain rates, Act.Metallurgics, 16, 1968.
 54. U.S.Lindholm, L.N.Yeakley, Dynamic deformation of simple and polycrystalline aluminium, J.Mech.Phys.Solids, 13, 1965.
 55. U.S.Lindholm, Dynamic deformation of metals, in Behavior of Materials Under Dynamic Loading, New York, 1965.
 56. U.S.Lindholm, Some experiments in dynamic plasticity under combined stress, Symp.on the Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, San Antonio, Texas, 1967.
 57. J.L.Lions, Cours d'analyse numerique, Ecole Polytechnique, Paris, 1973.
 58. J.Lipkin, R.J.Clifton, An experimental study of combined longitudinal and torsional plane waves in a thin-walled tube, Twelfth Intern.Congress of Appl.Mech., Stanford University, August, 1968.
 59. L.E.Malvern, The propagation of longitudinal waves of plastic deformations in a bar of material exhibiting a strain-rate effect, J.Appl.Mech., 18, 1951.
 60. M.Manjoine, Influence of rate of strain and temperature on yield stresses of mild steel, J.Appl. Mech., 11, 1944.
 61. J.Mandel, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Paris, Gauthier-Villars, 1966.
 62. J.Mandel i wsp., Etude des cavités souterraines, Rapport CEA, Saclay, 1973.
 63. J.Mandel, Introduction à la mécanique des milieux continus déformables, PWN, Warszawa, 1974.

64. K.J.Marek, J.D.Campbell, The effect of strain rate on the post-yield flow of mild steel, *J.Mech.Phys.Solids*, 1,11,1963.
65. D.Mindlin, Stress distribution around a tunnel, American Society of Civil Engineers, Avril,1939.
66. S.Murakami, J.Bejda, Two-dimensional cylindrical problem of elastic/viscoplastic wave propagation, *Arch.of Mech.*, 2,23,1971.
67. Nan Ning, Elastic-plastic waves for combined stresses, *Praca doktorska,Stanford University*, 1968.
68. W.K.Nowacki, Thermal shock on the boundary of an elastic/viscoplastic semi-infinite body, Part I, *Bull.Acad.Polon.Sci.,Série Sci.Techn.*,2,13,1965.
69. W.K.Nowacki, Thermal shock on the boundary of an elastic/viscoplastic semi-infinite body, Part II, *Bull.Acad.Polon.Sci.,Série Sci.Techn.*,7,13,1965.
70. W.K.Nowacki, The problem of a thermal shock on the boundary of a spherical cavity in a elastic/viscoplastic space, *Proc.Vibr.Probl.*,3,6,1965.
71. W.K.Nowacki, The unloading wave in an elastic-plastic semi-space with a rigid unloading in the case of two-parameter loads, *Arch.Mech.Stos.*,4,21,1969.
72. W.K.Nowacki, On certain closed form solution for the plane shear-pressure wave in elastic-plastic half-space, *Arch.Mech.Stos.*,5,20,1968.
73. W.K.Nowacki, Elastic/viscoplastic plane waves with combined compressive and two shear stresses in a half-space, *Bull.Acad.Polon.Sci.,Série Sci.Techn.*,3,22,1974.
74. W.K.Nowacki, B.Raniecki, Note on the propagation of thermoelastic /non coupled/ waves, *Proc.Vibr.Probl.*,2,8,1967.
75. W.K.Nowacki, B.Raniecki, Remarks on the solution for some dynamic problems of thermoviscoelasticity, *Arch.Mech.Stos.*,3,20,1968.
76. W.K.Nowacki, B.Raniecki, Note on the propagation of the-

- rmoelastic and thermoviscoelastic /non coupled/ waves, Progress in Thermoelasticity, Warszawa, PWN, 1967.
77. W.K.Nowacki, J.Zarka, Etude de la frontière élastique des monocristaux d'aluminium, Int.J.Solids and Structures, 7, 1971, pp.1277-1287.
78. W.K.Nowacki, Fale naprężenia w ciałach plastycznych, Wydawnictwa Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1974.
79. W.K.Nowacki, Zagadnienia falowe w teorii plastyczności, PWN, Warszawa, 1974.
80. W.K.Nowacki, J.Zarka, Sur le champ des températures obtenue en thermoviscoplasticité, AMS, 4, 21, 1974.
81. W.K.Nowacki, Comportement dynamique d'une cavité dans le semi-espace, Bull.Acad.Polon.Sci., Série Sci.Tech., 1974 /w druku/.
82. W.K.Nowacki, Sur le comportement dynamique d'une cavité dans un massif semi-infini élasto/viscoplastique, Symp. Francusko-Polskie w Nicei, Nicea, 1974.
83. J.Osiecki, Propagation of plane stress waves in a non-homogeneous solid medium, Proc.Vibr.Probl., 2, 2, 1961.
84. J.Osiecki, Reflection of plane stress wave in a non-homogeneous solid medium, Proc.Vibr.Probl., 2, 2, 1961.
85. W.Olszak, P.Perzyna, The constitutive equations of the flow theory for a non-stationary yield condition, Int. Congress of Appl.Mech., München, Springer-Verlag, 1966.
86. P.Perzyna, Teoria lepkoplastyczności, PWN, Warszawa, 1966.
87. P.Perzyna, The constitutive equations for ratesensitive plastic materials, Quart.Appl.Math., 20, 1963.
88. P.Perzyna, The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials, Proc.Vibr.Probl., 4, 4, 1963.
89. P.Perzyna, Théorie physique de la viscoplasticité, Conférences, fasc.104, Acad.Polon.Sci., Paris, 1974.
90. P.Perzyna, J.Klepaczko, J.Bejda, W.K.Nowacki, T.Wiersbiński, Zastosowania lepkoplastyczności, Ossolineum, 1971.
91. P.Perzyna, Description of thermo-mechanical behavior of

- irradiated materials, Sympozjum Francusko-Polskie w Nicei, Nicea, 1974.
92. A.Pielorz, O metodach przybliżonego rozwiązywania problemów brzegowych w ośrodkach niesprężystych, Rozpr. Inżyn., 3, 17, 1969.
 93. K.Podolak, Propagation of one-dimensional stress waves in an elastic-plastic medium subject to moving heat sources, Proc.Vibr.Probl., 3, 10, 1968.
 94. Ch.A.Rachmatulin, Ju.A.Diemjanow, Procznost pri intensywnych kratkowremiennych nagruzkach, Moskwa, 1961.
 95. J.Rafa, E.Włodarczyk, Przenikanie poruszającego się frontu ciśnienia w półprzestrzeń wypełnioną sprężysto/lepkoplastycznym ośrodkiem, Biuletyn WAT, 10, 18, 1969.
 96. B.Raniecki, On the coupled equations for isotropic rate-sensitive elastic-plastic materials, Problèmes de la Rhéologie, PWN, Warszawa, 1973.
 97. B.Raniecki, A quasi-static spherically symmetric problem of thermo-plasticity, Bull.Acad.Polon.Sci.Série Sci. Techn., 2, 13, 1965.
 98. B.Raniecki, Thermal shock on the boundary of an elastic-plastic semi-infinite body, Proc.Vibr.Probl., 4, 5, 1964.
 99. B.Raniecki, Spherical thermoplastic stress waves, Proc. Vibr.Probl., 4, 6, 1965.
 100. B.Raniecki, O zderzeniu zimnej płyty z gorącą płytą sprężysto-plastyczną, Proc.Vibr.Probl., 2, 13, 1972.
 101. R.D.Rychmyer, K.W.Morton, Difference Method for Initial-Value Problems, Wiley, New York, 1967.
 102. W.W.Recker, A numerical solution of three-dimensional problems in dynamic elasticity, J.Appl.Mech., 1, 37, 1970.
 103. D.J.Richardson, The solution of two-dimensional hydrodynamic equations by the method of characteristics, Methods in Computational Physics, Academic Press, 1964.
 104. W.W.Rusanow, Difference method of constant direction, Arch.Mech.Stos., 6, 20, 1968.
 105. P.F.Sabodasz, R.A.Czereďniczenko, Czislennoje reszenije

- zadaczi difrakcji i rasprostranienija wołn metodom prostranstwiennych charakteristik, V-tyj Wsiechsojuznyj Sympozjum po difrakcji wołn, Izd.LGU, 1970.
106. H.Sauerwein, Anisotropic waves in elastoplastic soils, *Int.Journ.Engin.*, 5, 5, 1967.
 107. A.M.Skobiejew, O niekotorych zadaczach dynamiki grunta, *Inżiniernyj Żurnał*, 1, 1966.
 108. A.M.Skobiejew, Podwiżnaja nagruzka na nieuprugoj płoskosti, *PMM*, 1, 34, 1970.
 109. W.W.Sokołowski, Rasprostranienie uprugo-wjazkoplastycznych wołn w stierżnjach, *Dokł.AN SSSR*, 60, 1948.
 110. Ju.P.Suworow, Rasprostranienije temperaturnych nagrużenii w uprugo-płasticeskom stierżnie, *PMM*, 2, 27, 1963.
 111. Ju.P.Suworow, O rasprostranienii uprugo-płasticeskich wołn pri nagriewie połubieskoniecznowo stierżnia, *PMM*, 1, 28, 1964.
 112. T.Y.Thomas, *Plastic Flow and Fracture in Solids*, Academic Press, New York, 1961.
 113. T.C.T.Ting, On the initial slope of elastic-plastic boundaries in combined longitudinal and torsional wave propagation, *J.Appl.Mech.*, June, 1969.
 114. T.C.T.Thing, Interaction of shock waves due to combined loadnig, *Int.J.Solids and Structures*, 5, 5, 1969.
 115. T.C.T.Ting, Elastic-plastic boundaries in the propagation of plane and cylindrical waves of combined stress, *Quart.Appl.Math.*, 4, 27, 1970.
 116. T.C.T.Ting, Nan Ning, Plane waves due to combined compressive and shear stresses in a half space, *J.Appl. Mech.*, June 1969.
 117. T.C.T.Ting, Nan Ning, Plane waves due to combined compressive and shear stresses in half space, *Paper Amer. Soc.Mech.Eng.*, No APM, 12, 1969.
 118. Ch.E.Treanor, A method for the numerical integration of coupled first-order differential equations with greatly different time constants, *Math.Comp.*, 20, 1966.

119. E.A.Verner, E.B.Becker, Finite element stress formation for wave propagation, *Int.J.for Numerical Meth.in Eng.*, 7, 1973.
120. M.L.Wilkins, Calculation of elastic-plastic flow, *Methods in Computational Physics*, Academic Press, 1964.
121. E.Włodarczyk, Propagation of longitudinal-transverse loading and unloading waves in a nonhomogeneous elastic/viscoplastic medium, *Proc.Vibr.Probl.*, 2, 2, 1968.
122. E.Włodarczyk, Propagation of longitudinal-transverse radial cylindrical wave in a nonhomogeneous elastic/viscoplastic medium, *Proc.Vibr.Probl.*, 3, 2, 1968.
123. E.Włodarczyk, Rozprzestrzenianie się i odbicie jedno i dwuwymiarowych fal naprężenia w ośrodkach plastycznych, Praca habilitacyjna, WAT, Warszawa, 1969.
124. J.Zarka, Sur la viscoplasticité des métaux, *Art.Fr.2ème fascicule*, 223, 1970.
125. J.Zarka, Etude du comportement des monocristaux métalliques, Application à la traction du monocristal CPC, *Cahier Spécial Rhéologie*, 1, 1973.
126. J.Zarka, Modèle phénoménologique unidimensionnel pour l'étude du comportement viscoplastique du polycristal en grandes déformations, *J.Méc.*, 2, 12, 1973.
127. J.Zarka, J.Frelat, Applications de l'algorithme de Treanor pour les problèmes en viscoplasticité, *Colloque: Methodes Numériques en Calcul Scientifique et Technique*, Paris, Novembre 1974.
128. M.Ziv, Two-spatial dimensional wave propagation by the theory of characteristics, *Int.J.Solids and Structures*, 5, 1969.
129. M.Ziv, Generalised characteristics method for elastic wave propagation problems, *Israel.J.Techn.*, 1-2, 8, 1970.
130. M.Ziv, The decay of loading elastic waves by the theory of characteristics, *Int.J.Engng.Sci.*, 8, 1970.

Spis treści

WSTĘP	...	3
I. RÓWNANIA DYNAMIKI OŚRODKÓW NIESPRĘŻYSTYCH	...	7
1. Dynamiczne własności metali	...	7
2. Ośrodki plastyczne wrażliwe na prędkość odkształcenia	...	9
3. Równania ruchu, równanie i warunki ciągłości	...	14
II. DYNAMIKA PUSTKI CYLINDRYCZNEJ W OŚRODKU SPRĘŻYSTO/ LEPKOPLASTYCZNYM	...	19
4. Sformułowanie problemu	...	19
4.1. Problem dynamiczny pustki cylindrycznej w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej..	19	
4.1.1. Półprzestrzeń zawierająca pustkę cylin- dryczną, obciążona na brzegu zmiennym ciśnie- niem normalnym		
4.1.2. Półprzestrzeń obciążona na brzegu ob- ciążeniami zmiennymi		
4.1.3. Eksplozja wewnątrz pustki cylindrycz- nej znajdującej się w półprzestrzeni		
4.1.4. Dyfrakcja fal cylindrycznych na konturze cylindrycznym w przestrzeni nieograniczonej		
4.1.5. Cylinder z niewspółkoncentrycznym otworem poddany radialnym lub stycznemu obciążeniem dynamicznym		
4.2. Problem dynamiczny pustki kulistej w półprze- strzeni sprężysto/lepkoplastycznej	...	29
5. Równania problemu w przypadku pustki cylindrycz- nej w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej..	31	
6. Wybór metody rozwiązania	...	39
7. Rozwiązanie numeryczne problemu rozprzestrze- niania się fal plastycznych z pustką cylindry- czną	...	49

7.1. Dyskretyzacja problemu	...	49
7.1.1. Dyskretyzacja obszaru		
7.1.2. Dyskretyzacja funkcji i pochodnych		
7.2. Całkowanie względem czasu	...	56
8. Rezultaty numeryczne i ich dyskusja	...	61
III. UWAGI O PEWNYCH ROZWIĄZANIACH ZAGADNIENI PROPAGACJI JEDNOWYMIAROWYCH FAL NAPRĘŻENIA	...	89
9. Fale podłużno-poprzeczne w półprzestrzeni sprężysto/lepkoplastycznej	...	89
10. Uwagi o polu temperatury w zagadnieniach dynamicznych termoplastyczności	...	99
BIBLIOGRAFIA	...	109

