

5. XI-71
PRACE IPPT • IBTP REPORTS

Tomasz Wierzbicki

LINIOWA TEORIA
LEPKOPLASTYCZNYCH
KONSTRUKCJI

29/1971

p. 269



~~p. 268~~

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Tomasz Wierzbicki

**LINIOWA TEORIA
LEPKOPLASTYCZNYCH
KONSTRUKCJI**

29/1971



WARSZAWA

Praca habilitacyjna



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark. wyd. 5,2. Ark. druk. 7,25

Oddano do drukarni w sierpniu 1971 r.

Zamówienie nr 750/0/1971. U-95.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Tomasz Wierzbicki
Pracownia Teorii Lepkoplastyczności
Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

LINIOWA TEORIA
LEPKOPLASTYCZNYCH KONSTRUKCJI

1. Wstęp

Cel pracy. Ostatnie lata przyniosły szybki rozwój technik obliczeniowych w zagadnieniach dynamicznych dla ośrodków nie sprężystych. Opracowano metody numerycznego całkowania równań różniczkowych cząstkowych o więcej niż dwu zmiennych niezależnych [5, 113], rozwiązano szereg płaskich i osiowo symetrycznych problemów brzegowych dla ośrodków sprężysto-plastycznych [9, 3] sprężysto-lepkoplastycznych [2, 59]. Podobne efektywne metody różnicowe zaproponowane zostały dla konstrukcji cienkościennych o dowolnym kształcie [55, 115]

Badaniom tym w mniejszym stopniu towarzyszyły studia nad opracowaniem odpowiednich metod analitycznych, które pozwoliłyby stosunkowo prosto wyznaczać podstawowe parametry procesu dynamicznego. Analizując dotychczasowe osiągnięcia w tej dziedzinie należy stwierdzić, że brak jest w literaturze efektywnej a jednocześnie prostej teorii opisującej zachowanie się lepkoplastycznych konstrukcji pod działaniem obciążeń dynamicznych.

Celem obecnej pracy jest zbudowanie takiej ogólnej teorii, przedyskutowanie jej dokładności, rozwiązanie kilku reprezentatywnych problemów brzegowych oraz konfrontacja wyników z danymi doświadczalnymi. Konieczność podjęcia badań w tym kierunku wynika z faktu, że szereg ważnych materiałów konstrukcyjnych wykazuje efekty lepkie przy nagłych intensywnych obciążeniach. We współczesnej technice występuje nie-

jednokrotnie potrzeba dynamicznej analizy całej konstrukcji lub jej elementów. Za przykład posłużyć mogą problemy kształtowania elementów metodą wybuchową, elektro-iskrową czy indukcyjną, zagadnienia zbadania, przewidywania i zapobiegania skutkom katastrofalnym obciążeń występujących przy uderzeniach pocisków, zderzeniach pojazdów, niszczącym działaniu wybuchów. Ostatnio zwrócono uwagę na rolę efektów dynamicznych w okrętownictwie w związku z występowaniem zjawiska uderzenia kadłuba statku o wodę /tzw. „slamming“/ powodującego lokalne zniszczenie poszycia dna [28, 87].

W następnym punkcie pracy omówione będą istniejące metody rozwiązywania zagadnień dynamicznych w konstrukcjach lepkoplastycznych. Przedstawione będą trudności jakie napotyka się przy rozpatrywaniu stanu giętno-membranowego w powłokach oraz płytach przy dużych ugięciach. Obecna praca stanowi próbę pokonania tych trudności. Podana jest mianowicie analityczna metoda wyznaczania ugięć i prędkości ugięć w każdej chwili rozpatrywanego procesu dynamicznego. W szczególności znalezione będą wielkości maksymalnych ugięć oraz końcowy kształt zdeformowanej konstrukcji. Proponowana metoda pozwala również na określenie wzajemnego współdziałania stref sztywnych i lepkoplastycznych i zmiennych w czasie granic między tymi strefami.

W rozdziale 2 przedyskutowane będą równania konstytutywne dla materiałów sprężysto-plastycznych wrażliwych na prędkość odkształcenia oraz zaproponowane dalsze uproszczenia tych równań dla cienkościennych ustrojów.

W następnym rozdziale przeprowadzona jest linearyzacja równań konstytutywnych w trójwymiarowym i płaskim stanie naprężenia. Zasadnicze uproszczenia równań uzyskuje się aproksymując stan naprężenia na statycznej powierzchni plastyczności. Aproksymacja ta interpretowana jest następnie jako zastąpienie prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa przez odpowiednie niestowarzyszone prawo płynięcia. W rozdziale 4 przedstawiona jest transformacja

zlinearyzowanego prawa płynięcia do przestrzeni uogólnionych naprężeń i prędkości odkształceń. Transformacja ta zachowuje liniowość równań co umożliwiło sformułowanie problemu dynamicznego dla dowolnej konstrukcji całkowicie w prędkościach oraz wskazanie na analogię z podobnymi zagadnieniami sprężystymi. W kolejnych dwóch rozdziałach omówione są zastosowania obecnej teorii w zagadnieniach małych ugięć i przeanalizowane są kompletne rozwiązania dla płyt kołowych i powłok cylindrycznych. Dokładność uzyskanych rozwiązań badana jest przez porównanie z obliczeniami numerycznymi oraz danymi doświadczalnymi. W rozdziale 7 podana jest przybliżona metoda traktowania umiarkowanie dużych ugięć konstrukcji lepkoplastycznych.

Ostatnie dwa rozdziały pracy poświęcone są zagadnieniom oszacowań maksymalnych trwałych deformacji ciał lepkoplastycznych oraz czasu trwania procesu dynamicznego. Zaletą tej metody jest możliwość natychmiastowej oceny wspomnianych wielkości bez konieczności odwoływania się do szczegółów rozwiązania analitycznego lub numerycznego.

Zakres pracy. Rozpatrywane będą takie typy cienkościennych konstrukcji, w których stan naprężenia realizowany pod wpływem obciążeń dynamicznych, może być aproksymowany przez płaski stan naprężenia. W klasie tej znajdują się więc ustroje uplastyczniające się w dwuosiowym stanie naprężenia tzn. powłoki, płyty i membrany.

W powyższym rozumieniu nie wchodzi w zakres tego opracowania zagadnienia prowadzące do jednoosiowego stanu naprężenia a więc pręty ściskane, rozciągane i skręcane, struny, pierścienie, kule, belki i inne tzw. „simple structures”. Problemy te posiadają swoją specyfikę i prowadzą niekiedy do ciekawych zagadnień matematycznych np. [91, 93]. Większość z nich została dokładnie zbadana i istnieje już na ten temat bogata literatura. Przegląd najważniejszych wyników w zakresie dynamicznych problemów dla lepkoplastycznych ciał w je-

dnoosiowym stanie naprężenia znaleźć można w pracach Symon-
dasa [89] monografii [11]. Niektóre nowsze wyniki poda-
ne są w [116].

Dalsze rozważania prowadzone będą w ramach określonych
założeń odnośnie kinematyki procesu odkształceń. Przyjmuje
się mianowicie stosowalność hipotezy Love-Kirchhoffa. Sze-
reg ostatnich badań dotyczących teorii dużych odkształceń
sztywno-plastycznych powłok w opisie przestrzennym i Lagran-
ge'owskim [17, 81, 82] wskazało, że w ramach tej hipotezy
opisywać można deformacji konstrukcji w zakresie małych i
umiarkowanie dużych ugięć (tj. ugięć rzędu grubości ścianki
powłoki).

Obecna teoria nie pozwala na uwzględnienie zagadnień dy-
namicznej niestateczności konstrukcji powstających przy ob-
ciążeniach typu horyzontalnego (w płaszczyźnie konstrukcji),
ponieważ zlinearyzowane prawo płynięcia nie jest w stanie
dokładnie opisać lokalnych deformacji związanych z utratą
stateczności.

Niektóre ciekawe wyniki dla lepkoplastycznych powłok cylin-
drycznych podali Florence [21] i Wojewódzki [117].

Wreszcie wykluczone będą z obecnych rozważań zagadnienia
propagacji fal w konstrukcjach sprężysto-lepkoplastycznych.
Wiąże się to z pominięciem w obecnej teorii odkształceń ści-
nających i członów bezwładności obrotu. W wypadku uwzględnie-
nia tych efektów zmieniłyby się zarówno typ równania rządzą-
cego procesem jak i charakter przenoszenia zaburzeń. Naprę-
żenia propagowałyby się wówczas jako podłużna fala ścinania
i poprzeczna fala giętna. Rozwiązywanie problemów brzegowych
dla równań typu hiperbolicznego wymaga stosowania innych met-
od matematycznych np. metoda całkowania wzdłuż charaktery-
styk, metoda kolejnych przybliżeń itd. Występowanie zjawisk
wielokrotnych odbić fal sprężysto-plastycznych od brzegów i
nakładania się fal z góry skazuje poszukiwanie rozwiązań a-
nalitycznych na niepowodzenie; pozostaje zatem jedynie po-
dejście numeryczne.

Rozprzestrzenianie się sprężysto-lepkoplastycznych fal w belce Timoszenki badał Bejda [4]; sformułowanie odpowiednich równań dla płyt podał, Nikitin [61]. Problem falowy w konstrukcjach uplastyczniających się w złożonym stanie na prężenia jest jeszcze mało zbadany.

Natomiast w obecnej teorii uwzględniającej inercję ruchu poprzecznego występuje konieczność rozpatrzenia zagadnień drgań sprężystych. Wiadomo, że proces drgań sprężystych nakładający się na następujące odkształcenia plastyczne konstrukcji jest bardzo istotny i zagadnieniu temu poświęcone będzie dużo uwagi w następnym rozdziale tej pracy.

Najważniejsze dotychczasowe osiągnięcia. Przegląd literatury ograniczony będzie do zagadnień bezpośrednio dotyczących konstrukcji lepkoplastycznych zgodnie z definicją podaną w poprzednim punkcie pracy. Omówione będą krytycznie podstawowe metody rozwiązywania problemów brzegowych a nie same szczegółowe rozwiązania.

Pełne zestawienie tych ostatnich znaleźć można w ostatniej pracy Jonesa [34].

a/ Podejście numeryczne w dynamice powłok plastycznych rozwija systematycznie w ciągu ostatnich 10 lat grupa badaczy w Massachusetts Institute of Technology. Witmer, Balmer, Leech i Pian [115] opracowali algorytm pod nazwą DEPROSS pozwalający wyznaczyć deformacje konstrukcji obrotowo-symetrycznych w zakresie dużych ugięć przy jednoczesnym uwzględnieniu efektów sprężystych plastycznych i lepkich. Metoda ta uogólniona została na przypadek powłok o dowolnej geometrii w pracy [43]. Cechą charakterystyczną tej metody jest stosowanie jawnych schematów różnicowych oraz całkowanie numeryczne równań konstytutywnych w płaskim stanie naprężenia po grubości ścianki. W ten sposób nie trzeba rozwiązywać wszystkich równań jednocześnie na danym kroku po czasie k , ale można posługiwać się poszczególnymi grupami związków (równania równowagi, związki geometryczne, prawo płynięcia), aby

wyliczyć z nich kolejne niewiadome wielkości.

Schemat ideowy obliczeń dla znalezienia rozwiązania w warstwie $k + 1$, znając rozwiązanie w warstwie k , przedstawia się następująco:

1. z równań równowagi wyznacza się przyspieszenie, które przyjmuje się za stałe między chwilą $k + 1$ a k ,
2. znając prędkości i położenie punktów powierzchni neutralnej w chwili k , znajduje się prędkość i położenie w chwili $k + 1$ (jawny schemat różnicowy),
3. ze związków geometrycznych oblicza się prędkości krzywizn i rozciągnięć powierzchni środkowej a następnie stosując hipotezę Love-Kirchhoffa znajduje się prędkości odkształcenia zmienne po grubości konstrukcji,
4. z odpowiedniego związku konstytutywnego zawierającego czony odkształceń sprężystych określa się przyrosty naprężeń i same naprężenia,
5. zastępując całki sumami wylicza się wartości momentów i sił membranowych w nowej chwili $k + 1$ i procedura rozpoczyna się od nowa.

Opisana metoda pozwala na uwzględnienie dowolnych warunków brzegowych i początkowych. Witmer, Clark i Balmer [116] oraz niezależnie Duffy i Key [117] przeprowadzili weryfikacje doświadczalną przydatności programu DEPROSS. Stwierdzono bardzo dobrą zgodność teorii i eksperymentu w zakresie odkształceń nieodwracalnych i następujących po tym drgań sprężystych. Świadczy to o zbliżności i dokładności opisanego podejścia numerycznego. Dokładność ta okupiona została znaczną pracochłonnością obliczeń nawet na wysokiej klasy maszynach elektronicznych. Wiąże się to z wysokimi kosztami realizacji każdego programu obliczeń, o czym mówią sami autorzy [116]. Dlatego opisana metoda nie może mieć w obecnej chwili szerszego zastosowania w praktycznych obliczeniach dla dynamicznie obciążonych konstrukcji. Jeśli chodzi natomiast o znaczenie pozwane, to program DEPROSS i jego najnowsze odmiany (np. PETROS [55]) oddają nieocenione usługi przy analizie

różnorodnych efektów w procesie dynamicznym oraz przy wybo-
rze odpowiednich założeń upraszczających [14]. W następnym
rozdziale tej pracy korzystać będziemy z niektórych otrzyma-
nych tą drogą wyników.

b/ Inną możliwością w numerycznej analizie konstrukcji lep-
koplastycznych jest sformułowanie całego zagadnienia w uo-
gólnionych naprężeniach i prędkościach odkształceń. Wymaga
to uprzedniej transformacji równań konstytutywnych ośrodka
trójwymiarowego do odpowiedniego prawa płynięcia dla powłó-
ki. Transformacja ta nie prowadzi do efektywnych związków
jeśli prawo fizyczne zawiera człony odkształceń sprężystych.
Dlatego ograniczono się dalej do sztywno-plastycznego i szty-
wno-lepkoplastycznego modelu materiału.

Wzorując się na podejściu Hodge'a dla powłok sztywno -
idealnie plastycznych [25], Pabianek przeprowadziła tran-
sformacje związków konstytutywnych Perzyny dla liniowej i po-
tęgowej funkcji opisującej wpływ prędkości odkształcenia [64].
W szczególnym przypadku powłok cylindrycznych odpowiednie
prawo płynięcia pokrywało się z równaniami wprowadzonymi
wcześniej przez Jow-An Hsi [35]. W teorii momentowej dla
płyt kołowych prawa płynięcia uśrednione po grubości ścianki
mają tę samą postać co odpowiednie związki konstytutywne
w punkcie [98].

W problemie quasi-statycznym zagadnienie sprowadza się
do numerycznego całkowania układu nieliniowych równań różni-
czkowych zwyczajnych przy tzw. „dwupunktowych warunkach brze-
gowych”. Rozwiązanie uzyskuje się przy niewielkiej ilości
iteracji, [65, 98]. W problemie dynamicznym, dla niejawnego
schematu różnicowego, poszukiwanie rozwiązania polega na n-
krotnym całkowaniu podobnego układu równań gdzie n jest ilo-
ścią kroków po czasie. W pracy [99] pokazano efektywność tej
metody na przykładzie dynamicznego obciążenia płyty kołowej
prostokątnym impulsem ciśnienia.

W stosunku do programu DEPROSS omawiana metoda charakte-
ryzuje się większą prostotą ponieważ nie wymaga numerycznego

całkowania naprężeń wzdłuż grubości ścianki oraz wykorzystuje dokładne procedury Runge-Kutta całkowania nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Nie pozwala natomiast na uwzględnienie nieliniowości geometrycznej oraz sprężystych własności materiału. Uzyskane za pomocą tej metody rozwiązania posiadają jednak duże znaczenie porównawcze ponieważ służą jako sprawdzian dokładności różnych przybliżonych teorii dla materiału sztywno-lepkoplastycznego.

W dalszym ciągu pracy jako ścisłą (nieliniową) teorię lepkoplastycznych konstrukcji rozumiemy teorię opartą o równania konstytutywne dla materiału plastycznego wrażliwego na prędkość odkształcenia, [70].

W zastosowaniu do metali równania te zawierają nieliniowy statyczny warunek plastyczności Hubera-Misesa.

Zagadnienie ścisłego całkowania wynikających równań różniczkowych cząstkowych pozostaje nadal sprawą otwartą nawet w przypadku infimityczalnych deformacji. Wszystkie uzyskane do tej pory rozwiązania analityczne są rozwiązaniami przybliżonymi.

c/ Historycznie najstarszą i najbardziej rozpowszechnioną jest koncepcja linearyzacji równań konstytutywnych Perzyny [70] (lub w szczególnym przypadku Hohenemsera i Pragera [26]) przy pomocy odcinkowo-liniowego warunku plastyczności i stowarzyszonego prawa płynięcia. Różne odmiany tej linearyzacji rozpatrywane były przez Pragera [78], Bykowcewa [7], Haddow'a [23] i Lepika [44]; każda z nich zawierała dodatkową hipotezę odnośnie zmiany aktualnej powierzchni płynięcia w funkcji prędkości odkształcenia. Mimo osiągniętej liniowości równań w płaskim stanie naprężenia, odpowiednie związki dla powłok w stanie giętno-błonowym okazały się, podobnie jak dla idealnej plastyczności; nieliniowe. Nawet w przypadku zgięciowej teorii płyt, gdzie związki te są liniowe, występują dalsze trudności ponieważ w różnych strefach w płycie obowiązują inne równania; granice tych stref nie znane są a priori i ulegają zmianie w procesie dynamicznym.

W ramach tego podejścia uzyskano zaledwie kilka rozwiązań ilustracyjnych przy zaniedbaniu [1, 7] i zachowaniu sił inercji [31, 44]. Na przykład Jones [31] i Lepik [44] zupełnie nieprzypadkowo rozważali płyty pierścieniowe. W problemie tym całkowity profil naprężenia znajduje się w obrębie tylko jednej strefy co znacznie ułatwia analizę problemu. Zaletą tego rozwiązania jest możliwość prześledzenia całego procesu ruchu płyty łącznie ze zjawiskiem zmiany postaci pola prędkości (tzw. „mode transition”). Brak jest natomiast perspektyw uzyskania rozwiązań innych problemów brzegowych dla płyt i powłok. Nie została również zbadana w tej teorii sprawa propagacji stref sztywnych w procesie dynamicznym dla konstrukcji lepkoplastycznych. Zjawisko to występuje np. w problemie uderzenia pręta lub belki [93, 94]. Przy okazji obecnej dyskusji warto jeszcze raz zwrócić uwagę na konsekwencję wynikającą z linearyzacji warunku plastyczności. W statycznej analizie sztywno-idealnie plastycznych konstrukcji uzyskana tą drogą aproksymacja rzeczywistego mnożnika obciążenia jest z reguły wystarczająca.

W problemach dynamicznych interesuje nas głównie kinematyka procesu. Zastąpienie warunku plastyczności Hubera-Misesa sześciobokiem Treski i konsekwentne stosowanie stowarzyszonego prawa płynięcia prowadzi do znacznych błędów w kierunku wektora prędkości odkształcenia. Wskazuje to na potrzebę poszukiwania innych metod przybliżonych, które zachowując może podobny stopień aproksymacji nie posiadały by wad, omawianego sposobu linearyzacji równań konstytutywnych i wynikających stąd trudności rozwiązywania problemów brzegowych. Szereg takich metod został ostatnio zaproponowany w literaturze. Wszystkie te metody, łącznie z proponowaną w obecnej pracy teorią, wykorzystują pewne pomocnicze rozwiązanie statyczne lub dynamiczne w celu rozwiązania danego problemu dynamicznego dla ciała lepkoplastycznego.

d/ Wpływ prędkości odkształcenia na deformacje płyt i powłok badany był przez Perrone [68, 69]. W pracach tych zakła-

dano, że kinematyka procesu dynamicznego w konstrukcjach plastycznych i lepkoplastycznych jest podobna i jedynie bezwzględna wartość końcowych ugięć zmniejsza się na skutek lepkich własności materiału. Współczynnik zmiany określa się znając rozkład maksymalnych prędkości odkształcenia i wyliczając podwyższoną wielkość granicy plastyczności $\sigma(x)$. Ponieważ wielkość ta zmienia się od punktu do punktu w konstrukcji wprowadza się następnie uśrednioną dynamiczną granicę plastyczności σ_{br}^* , która zastępuje w rozwiązaniu wartość statyczny granicy plastyczności σ .

Pewien sukces tej metody w literaturze spowodowany był jej niewątpliwą prostotą oraz niemożnością uzyskania rozwiązania dla materiału lepkoplastycznego na jakiegokolwiek innej drodze. Chociaż dla najprostrzych konstrukcji (pierścienie [68], płyty [69]) metoda ta dawała zadawalające rezultaty, poważne zastrzeżenia budzi sposób uśredniania granicy plastyczności w przestrzeni i czasie. Jeszcze większym uproszczeniem jest przyjęcie tej samej kinematyki dla konstrukcji plastycznych i lepkoplastycznych podczas gdy w rzeczywistości występować tam mogą istotne różnice. Po pierwsze pole deformacji dla ciał lepkoplastycznych jest polem ciągłym ponieważ każda nieciągłość w polu prędkości spowodowała by nieskończone duże naprężenia [42, 102]. W ciałach idealnie plastycznych nieciągłości są dopuszczalne (przeguby plastyczne) i mogą powstać w przypadku warunku plastyczności Treski i Hubera-Misesa. Po drugie proces dynamiczny w konstrukcji lepkoplastycznej charakteryzuje się, jak już wspomniano, występowanie stref sztywnych i lepkoplastycznych przy czym granica między tymi obszarami zmienia się w czasie. Natomiast dla ciał idealnie plastycznych udowadnia się zbieżność rozwiązania do konfiguracji ze stałym profilem prędkości, („mode solution”) [53], co świadczy o tym, że konstrukcja zatrzymuje się we wszystkich punktach jednocześnie.

e/ Zagadnieniu propagacji stref sztywnych w ciałach lepkoplastycznych poświęcono wiele uwagi w pracach Lee [41] oraz Lee

i Martina [42]. Na przykładzie problemu uderzenia w belkę pokazano, że obszar lepkoplastycznych deformacji tylko nieznacznie zmieniał się w procesie i strefy sztywne pojawiały się dopiero w końcowym etapie ruchu belki. Jeśli okres ten jest pomijalny w stosunku do całkowitego czasu trwania deformacji, to podać można przybliżone rozwiązanie ze stacjonarnym polem prędkości. Jest to uogólnienie koncepcji „mode shape” Martina i Symondsa [53] na przypadek konstrukcji lepkoplastycznych. W pracach [42] i [112] zaproponowano niezależnie, aby optymalny kształt pola prędkości określany był na podstawie rozwiązania odpowiedniego zagadnienia wariacyjnego

Powyższa metoda rozwiązania z rozdzielonymi zmiennymi prowadzić może do prawidłowej oceny trwałych ugięć w określonym punkcie konstrukcji, daje jednak skąpe informacje odnośnie pola trwałych deformacji. Dalsze badania w tym kierunku wyjaśnią w przyszłości wiele niejasnych do tej pory spraw a w szczególności w jakim sensie dwa rozwiązania w ciele lepkoplastycznym, różniące się rozkładem początkowego pola prędkości są zbliżone do siebie.

f/ Praktyczna wartość rozwiązań przybliżonych opisanych w punktach c/ d/ i c/ obniżona jest brakiem znajomości dokładności uzyskanych wyników. W różnych obszarach zmienności parametrów zadania można otrzymać wartości powyżej lub poniżej ścisłego rozwiązania. W związku z tym dużego znaczenia nabierają energetyczne metody oszacowań dające ocenę pewnych skalarnych parametrów procesu dynamicznego. Rozwój tych metod zapoczątkowała praca Martina [47] dotycząca ciał sztywno-idealnie plastycznych. Wykorzystując postulat stateczności Druckera oraz statycznie i kinematycznie dopuszczalne rozwiązanie porównawczego problemu quasi-statycznego podano górne (bezpieczne) oszacowanie na maksymalne trwałe przemieszczenie w określonym punkcie ciała oraz dolne oszacowanie na czas pracy konstrukcji. Wyniki te zostały uogólnione na przypadek ciał sprężysto-plastycznych [48], plastycznych ze wzmocnieniem [49] oraz ogólnych materiałów zależnych od dro-

gi obciążenia [51]. Martin, [50], opracował również odpowiednie twierdzenia dla ciał sztywno-lepkoplastycznych ale pojawiły się tam nowe trudności. Wprawdzie uzyskano dokładniejszą ocenę czasu pracy konstrukcji, nie otrzymano oddzielnego oszacowania na trwałe ugięcie; wielkość ta zmieniać się mogła od zera do odpowiedniego oszacowania dla ciała idealnie plastycznego w zależności od czasu trwania procesu. Pewne dalsze uogólnienia powyższych twierdzeń na przypadek materiałów zależnych od czasu i drogi obciążania podali Ponter [77] oraz Martin i Ponter [51]. Uzyskano tą drogą ulepszone i efektywne oszacowania dla belek w jednoosiowym stanie naprężenia. Wykorzystanie tych samych twierdzeń do zagadnień dynamiki powłok wymaga znajomości praw płynięcia w wielkościach uogólnionych. Ze względu na bardzo złożoną postać tych praw dla lepkoplastycznych powłok korzyści z prostoty metod oszacowań są w tych przypadkach mniej widoczne. Reasumując można stwierdzić z przekonaniem, że nie opracowano do tej pory zadowalającej metody analitycznej badania dynamicznego zachowania się konstrukcji lepkoplastycznych. W szczególności zaznacza się potrzeba dokładnej analizy zmiany profilu prędkości i ugięć w konstrukcjach, określenia zasięgu i zmiany stref sztywnych i lepkoplastycznych oraz wyznaczenia końcowego kształtu zdeformowanej konstrukcji. Jednocześnie pożądane są dalsze badania w celu znalezienia dokładniejszych górnych i dolnych oszacowań na podstawowe parametry procesu dynamicznego przy uwzględnieniu własności lepkości materiału i zmian geometrii konstrukcji.

W świetle powyższego przeglądu dotychczasowych osiągnięć wyraźniej zarysowuje się cel obecnej pracy, nakreślony w rozdziale wstępnym.

2. Równania konstytutywne i ich uproszczenia

W rozdziale tym przeprowadzona będzie dyskusja racjonalnego wyboru związków fizycznych w dynamicznej analizie konstrukcji. W większości dotychczasowych teorii odpowiednie

prawo fizyczne przyjmowane było dość dowolnie. W obecnej pracy podana będzie możliwie najpełniejsza argumentacja wyboru odpowiedniej postaci równań konstytutywnych. Trzy różne kryteria decydować będą o tym wyborze. Ponieważ rozważane będą konstrukcje uplastyczniające się w złożonym płaskim stanie naprężenia, w pierwszym rzędzie zwrócona zostanie uwaga na związki fizyczne, które zostały skonstruowane w oparciu o dane doświadczalne dotyczące złożonego stanu naprężenia. Następnie pokazane będzie, że w problemach dynamicznych dla cienkościennych konstrukcji nie wszystkie efekty mechaniczne są tego samego rzędu. Szczegółowa analiza tych efektów upoważnia do dalszych zasadniczych uproszczeń równań konstytutywnych. Wreszcie ostatnim kryterium, ważnym pod kątem rozwijanych w dalszych rozdziałach metod analitycznych, jest wzgląd prostoty matematycznej. Ponieważ źródłem nieliniowości całego problemu początkowo-brzegowego dla konstrukcji lepkoplastycznych jest nieliniowość praw fizycznych, zagadnieniu temu poświęcone zostanie dużo uwagi i każdy krok w kierunku linearyzacji tych równań będzie szczegółowo dyskutowany i interpretowany.

Analiza równań w złożonym stanie naprężenia. Studia nad poznaniem i formułowaniem równań konstytutywnych dla materiałów wykazujących efekty lepkie, głównie metali, prowadzone są w kilku kierunkach jednocześnie. Z jednej strony budowane są związki płynięcia w oparciu o ogólną strukturę równań konstytutywnych dla materiałów niesprężystych zgodnie z postulatami mechaniki i termodynamiki ośrodków ciągłych, [10,95]. Z drugiej strony liczne eksperymenty dostarczają coraz nowych informacji o zachowaniu się materiałów w jednoosiowym stanie naprężenia. W obu dziedzinach odnotować należy szereg ważnych osiągnięć. Pokazane zostało, że jednolitą teorię materiałów lepkoplastycznych wyprowadzić można w ramach koncepcji zanikającej pamięci [75,76]. Ostatnie badania poszły w kierunku wykorzystania parametrów wewnętrznych do opisu efektów

plastycznych i lepkich, [73, 74]. Podejście to charakteryzuje się stosunkowo najpełniejszą motywacją fizyczną [72]. Inne propozycje równań dla ośrodków lepkoplastycznych w zakresie dużych odkształceń podane są w pracach [38, 39]. Dla procesów izotermicznych i przy pominięciu sprzężenia termo-mechanicznego uzyskuje się z ogólnej teorii następujące równania konstytutywne dla materiału sprężysto-plastycznego wrażliwego na prędkość odkształcenia, wyprowadzone wcześniej na gruncie fenomenologicznym, [70, 71]

$$(2.1) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad F = \frac{\sqrt{J_2}}{K} - 1,$$

$$\dot{\epsilon}_{kk} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk}, \quad \langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} \phi(F) & \text{dla } F > 0 \\ 0 & \text{dla } F \leq 0, \end{cases}$$

gdzie $\dot{\epsilon}_{ij}$ i s_{ij} oznaczają odpowiednio dewiatory tensora prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$ i naprężenia σ_{ij} , J_2 oznacza drugi niezmiennik dewiatora naprężenia, K jest parametrem wzmocnienia a γ jest stałą materiałową.

Równania powyższe opisują liniowe efekty sprężyste, statyczne uplastycznienie według warunku Hubera-Misesa, izotropowe wzmocnienie materiału oraz nieliniowy wpływ prędkości odkształcenia. Własności te są charakterystyczne dla wielu materiałów konstrukcyjnych, głównie metali w warunkach obciążeń dynamicznych.

Równania konstytutywne (2.1) zawierają szereg stałych i funkcji, które określić należy na podstawie eksperymentu. Olbrzymia większość dostępnych danych doświadczalnych odnosi się do jednoosiowego stanu naprężenia i odpowiednie równania zostały wszechstronnie zbadane i opisane w literaturze. Tak jak w każdej teorii mechanicznej czy termodynamicznej, również w przypadku ciał lepkoplastycznych, przeniesienie odpowiednich wniosków na złożony stan naprężenia wymaga przyjęcia szeregu dodatkowych hipotez. Do najważniejszych z nich należą:

1. Postulat izotropowego rozszerzenia się warunku plastyczności z prędkością odkształcenia.
2. Postulat normalności wektora prędkości odkształcenia plastycznego do chwilowej powierzchni płynięcia.
3. Postulat wypukłości aktualnej powierzchni płynięcia.
4. Postulat izotropowości wzmocnienia materiału.
5. Warunek obciążania i odciążania.

Stosunkowo najlepiej poznany w złożonym stanie naprężenia jest efekt wzmocnienia materiału.

Wszystkie znane fakty doświadczalne dotyczą jednak obciążeń statycznych. Matematyczny opis zjawiska wzmocnienia w metalach dla dowolnych dróg obciążania jest dość złożony i wiele kwestii wymaga dalszych badań [54, 58]. Zagadnienie wzmocnienia omawiane będzie w nieco innym aspekcie w dalszej części tego rozdziału.

Postulat izotropowego rozszerzania się powierzchni płynięcia ze wzrostem prędkości odkształcenia poddany został doświadczalnej weryfikacji w pracach Lindholma [45] i Lindholma i Yeakley [46]. Stwierdzono słuszność tej hipotezy w pewnym zakresie prędkości odkształcenia. Inne badania, [34] wskazują na pewną anizotropowość tego efektu ponieważ wpływ prędkości odkształcenia przy ścinaniu jest nieco mniejszy niż przy rozciąganiu.

Postulat wypukłości aktualnej powierzchni płynięcia i normalności wektora prędkości odkształcenia do tej powierzchni nie został jeszcze sprawdzony doświadczalnie dla ciał lepkoplastycznych. W klasycznej teorii dla ciał sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem postulaty te wynikały zarówno z obserwacji doświadczalnych jak również były konsekwencją ograniczeń jakie narzuca na równania konstytutywne warunek stateczności Druckera [13]

$$(2.2) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\sigma_{ij}^a - \sigma_{ij}^b) (\dot{\epsilon}_{ij}^a - \dot{\epsilon}_{ij}^b) dV \geq 0.$$

Dla materiałów sprężysto-lepkoplastycznych można jedynie udowodnić na podstawie (2.2) wypukłość ciwilowej powierzchni płynięcia, [41], natomiast nie otrzymuje się jednoznaczności co do kierunku wektora $\dot{\xi}_j$. Odwrotnie, zakładając normalność wykazać można wypukłość powierzchni płynięcia.

Wreszcie warunki obciążania i odciążania zbadane są eksperymentalnie jedynie w jednoosiowym stanie naprężenia. Hipoteza uogólniająca te warunki na złożony stan naprężenia pozostaje na razie jedynie hipotezą.

Powyższa dyskusja miała na celu wskazanie, że praktyczna tzn. sprawdzona doświadczalnie wiedza o zachowaniu się materiałów lepkoplastycznych w złożonym stanie naprężenia jest jeszcze niedostateczna. Równania konstytutywne (2.1) należą chyba do najbardziej złożonych związków posiadających jednocześnie zadawalające przesłanki teoretyczne i doświadczalne. Według opinii autora uwzględnianie dodatkowych efektów mechanicznych w równaniach konstytutywnych w zastosowaniu do dynamiki konstrukcji wkraczałoby już w dziedzinę czysto spekulatywnych rozważań. Odwrotnie wydaje się celowym rozwijanie dla konstrukcji takich metod przybliżonych, w których stopień aproksymacji odpowiadałby niepewności jaką zawierają w sobie niektóre stałe i funkcje w równaniach konstytutywnych. Na przykład z punktu widzenia definicji materiału statecznego istnieje pewna dowolność w konstruowaniu równań konstytutywnych i dowolność tą wykorzystamy przy koncepcji linearyzacji tych równań.

Nie oznacza to jednak, że do równań (2.1) nie można mieć zaufania. Przeciwnie, w stanie jednoosiowym redukują się one do znanych i sprawdzonych równań stanu. Podobnie, w przejściu granicznym otrzymuje się z (2.1) odpowiednie równania teorii plastyczności. Ponadto związki te stosowane były z powodzeniem w wielu zagadnieniach falowych dla ośrodków trójwymiarowych i dynamicznych dla dwuwymiarowych ustrojów prowadząc do dobrej zgodności z doświadczeniem. Równania (2.1)

będą przyjęte za podstawę dalszych rozważań tej pracy.

Analiza podstawowych parametrów i efektów w procesie dynamicznym. W poprzednim punkcie tego rozdziału przedyskutowane zostały niektóre aspekty wyboru równań konstytutywnych opisujących rzeczywisty materiał. Obecnie przeprowadzona będzie analiza zachowania się konstrukcji jako całości w procesie dynamicznym i na tej podstawie zaproponowane będą dalsze założenia upraszczające w teorii konstrukcji lepkoplastycznych. W szczególności omówiony będzie wpływ czterech czynników decydujących o przebiegu procesu dynamicznego. Czynnikiem teorii są:

1. Właściwości sprężyste materiału
2. Wzmocnienie materiału
3. Własności lepkie materiału
4. Zmiana geometrii konstrukcji

Analiza przeprowadzona będzie głównie na podstawie dostępnych danych doświadczalnych jak również niektórych dokładnych rozwiązań numerycznych. Większość doświadczeń przeprowadzona była na płytach kołowych, które deformowały się w zakresie dużych ugięć. Płytę taką traktować należy jako powłokę osiowo-symetryczną a zatem cytowane eksperymenty, jako reprezentatywne dla całej teorii powłok, upoważniają do wyciągnięcia pewnych ogólnych wniosków.

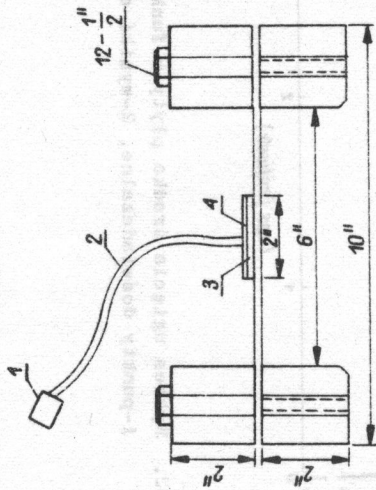
Efekty sprężyste w konstrukcjach cienkościennych studiowane były dotychczas głównie na przykładzie belek w jednoosiowym stanie naprężenia. Jeśli chodzi o złożony stan naprężenia to wpływ efektu odkształceń sprężystych ująć można w sposób całkowity definiując parametr R jako stosunek całkowitej energii dostarczonej do układu E_{spr} do maksymalnej energii sprężystej jaka może być zmagazynowana w ciele E_K . Seiler, Cotter i Symonds [68] oraz Florence [19] pokazali, że parametr ten wiąże się z błędem jaki powstaje w obliczeniach przy zaniedbaniu sprężystych składowych tensora odkształcenia. Może on być zatem przyjęty za pewną miarę dokładności teorii sztyw-

no-plastycznych i sztywno-lepkoplastycznych konstrukcji. Pokazano, że w przypadku płyt teoria ta jest słuszna jeżeli $R > 5$, [19] (dla belek nawet jeśli $R > 3$, [36]). Maksymalną energię sprężystą łatwo jest oszacować z góry ponieważ naprężenia nie mogą przekroczyć granicy plastyczności, [34]

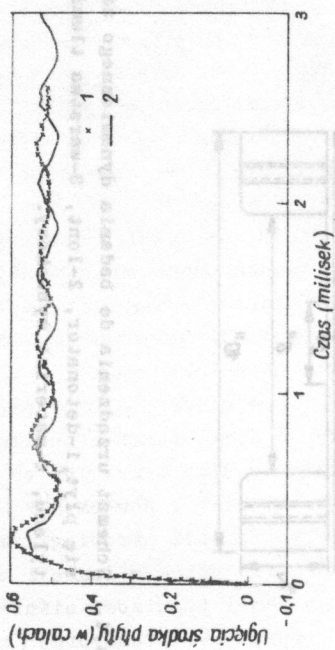
$$(2.3) \quad E_{\text{spr}} = \int_V dV \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \leq \frac{V \sigma_0^2}{2E},$$

gdzie V jest objętością ciała a σ_0 granicą plastyczności przy rozciąganiu. Znając energię kinetyczną przekazaną ciału E_k obliczyć można wartość parametru $R = E_k/E_{\text{spr}}$ bez konieczności rozwiązywania odpowiedniego problemu dynamicznego dla konstrukcji sprężystej. Dla wielu konstrukcji cienkościennych parametr R osiąga znaczne wartości przy ugięciach rzędu grubości ścianki. Np. w przypadku impulsowego obciążenia otwartej powłoki cylindrycznej parametr ten wahał się w granicach 70 + 100, [34].

Kryterium energetyczne jest wygodne w zastosowaniach, nie daje jednak żadnych informacji odnośnie wpływu własności sprężystych materiału na zmianę wielkości i profilu ugięć konstrukcji w czasie. Aby zbadać w jakim stopniu model materiału nie uwzględniający efektów sprężystych aproksymuje rzeczywisty przebieg procesu odkształceń dynamicznych należałoby wyniki dokładnych obliczeń analitycznych dla tego modelu porównać z danymi doświadczalnymi. Dzięki rozwojowi dokładnych optycznych i elektronicznych technik pomiarowych można obecnie prześledzić procesy dynamiczne, których czas trwania nie przekracza 1 milisekundy (10^{-6} sek). Ostatnio Dufry i Key [14] opublikowali wyniki dokładnych pomiarów deformacji zamocowanej płyty kołowej poddanej eksplozji materiału wybuchowego, rozmieszczonego na części powierzchni Rys.1. W szczególności zbadano zmianę w czasie ugięcia środka płyty dla różnych wartości impulsu i różnych materiałów oraz zmierzono końcowy kształt zdeformowanej płyty. Na rys.2 podany jest (linią grubą) wykres ugięcia środka płyty w funkcji cza



Rys.1. Schemat urządzenia do badania dynamicznego zachowania się płyt, 1-detonator, 2-lont, 3-warstwa tłumiąca z polietylenu, 4-materiał wybuchowy.



Rys.2. Wykres ugięcia środka płyty w funkcji czasu (Duffy i Key)
1-punkty doświadczalne, 2-wyniki obliczeń numerycznych.

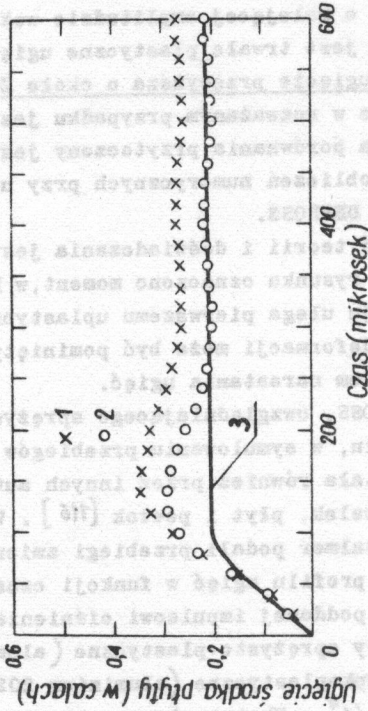
su dla płyty z aluminium 6061-T6 o wymiarach (promień R x grubość $2h$) = $6'' \times \frac{1}{16}$ poddanej impulsowi $I = 1.67 \cdot 10^5$ dyn/sek co odpowiada prędkości początkowej powierzchni środkowej 7430 in/sek. Zastosowany w doświadczeniach stop aluminium jest niewrażliwy na prędkość odkształcenia i charakteryzuje się małym modułem wzmocnienia, co pozwoliło skupić w doświadczeniach uwagę na efektach sprężystych i plastycznych.

Z rys.2 widać, że przemieszczenie pionowe W narasta od zera aż do osiągnięcia maksimum dla czasu $t = 0,24$ milsek, po czym następują drgania o malejącej amplitudzie wokół położenia równowagi, którym jest trwałe plastyczne ugięcie płyty. Maksymalne, chwilowe ugięcie przewyższa o około 20% wartość trwałych ugięć, które w rozważanym przypadku jest rzędu 8 grubości powłoki. Dla porównania przytoczony jest na Rys.2 (linia cienka) wynik obliczeń numerycznych przy użyciu wspomnianego już programu DEPROSS.

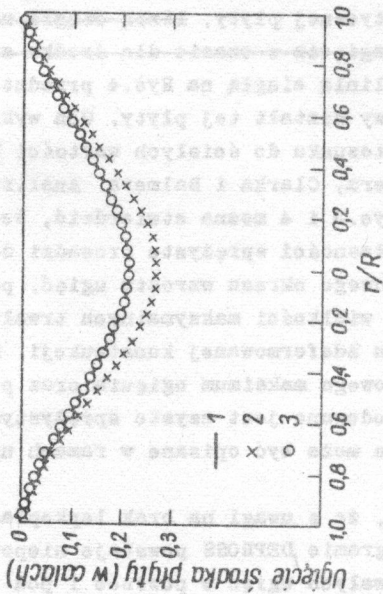
Dobra zgodność przewidywań teorii i doświadczenia jest godna podkreślenia. Strzałką na rysunku oznaczono moment, w którym zewnętrzne włókno przekroju ulega pierwszemu uplastycznieniu. Okres czysto sprężystych deformacji może być pominięty w porównaniu z całkowitym czasem narastania ugięć.

Przydatność programu DEPROSS, uwzględniającego sprężysto-plastyczne własności materiału, w symulowaniu przebiegów doświadczeń stwierdzona została również przez innych autorów na przykładzie problemów belek, płyt i powłok [116]. W szczególności Witmer, Clark i Balmer podali przebiegi zmienności ugięcia środka płyty oraz profilu ugięć w funkcji czasu dla zamocowanej płyty kołowej poddanej impulsowi ciśnienia Rys. 3 i 4. Rozważane były płyty sprężysto-plastyczne (aluminium 6061-T6) oraz sprężysto-lepkoplastyczne (aluminium 2024-0) o wymiarach $2R \times 2h = 5'' \times 1/4''$. Ekstrapolowana granica plastyczności wynosiła $\sigma_0 = 40.000$ lb/in². Wyniki przedstawione na Rys.3 i 4 dotyczą impulsu o wartości $I = 9356$ dyn sek/cm² = 0.144 lb/sek in².

Jakościowo wykresy te pokrywają się podobnymi przebiegami



Rys. 3. Wykres ugięcia środka płyty w funkcji czasu (Witmer, Clark, Balmer) 1-wyniki obliczeń numerycznych dla materiału sprężysto-plastycznego, 2-wyniki obliczeń numerycznych dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego, 3-rozwiązanie analityczne dla materiału sztywno-lepkoplastycznego.



Hys. 4. Profil trwałych ugięć płyty, 1-krzywa doświadczalna, 2-wyniki obliczeń numerycznych dla materiału sprężysto-plastycznego, 3-wyniki obliczeń numerycznych dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego.

pokazanymi na Rys.2; widoczne jest maksymalne ugięcie dla $t = 0,140$ mil sek oraz drgania sprężyste. Deformacje plastyczne, jak wykazały obliczenia numeryczne, ustają dla czasu $0,32$ mil sek (strzałka na Rys.3) . W tym momencie 92% początkowej energii kinetycznej uległo zamianie na pracę plastyczną; pozostałe 8% odpowiadało energii drgań sprężystych. Ciekawe jest porównanie powyższych wyników z rozwiązaniem analitycznym nie uwzględniającym efektów sprężystych. Rozwiązanie to (jedynie znane w literaturze dla płyt zamocowanych) podane będzie w rozdziale 5. Wybiegając naprzód podane będą tutaj niektóre gotowe wyniki.

Linia ciągłą na Rys.3 zaznaczono zmianę ugięcia w czasie dla środka sztywno-lepkoplastycznej płyty, ~~linią ciągłą na na Rys.3 zaznaczono zmianę ugięcia w czasie dla środka sztywno-lepkoplastycznej płyty~~, linia ciągłą na Rys.4 przedstawiony jest odpowiadający końcowy kształt tej płyty. Oba wykresy zostały znormalizowane w stosunku do ścisłych wartości końcowych podanych przez Witmera, Clarka i Balmera. Analizując odpowiednio przebiegi na Rys.3 i 4 można stwierdzić, że model materiału zaniedbujący własności sprężyste prowadzi do zadawalającego opisu początkowego okresu wzrostu ugięć, pozwala na dokładne przewidzenie wielkości maksymalnych trwałych ugięć i końcowego kształtu zdeformowanej konstrukcji. Natomiast występowanie chwilowego maksimum ugięcia oraz późniejszych drgań powłoki spowodowane jest czysto sprężystymi własnościami materiału i nie może być opisane w ramach uproszczonego modelu.

Jest rzeczą interesującą, że z uwagi na brak lepkoplastycznego tłumienia drgań w programie DEPROSS powstaje niepewność co do wyboru wartości trwałych ugięć w powłoce i pod tym względem uproszczone obliczenia analityczne górują nad rozwiązaniem dokładnym.

Uogólniając powyższe wnioski na inne przypadki konstrukcji cienkościennych przyjąć można, że prawo fizyczne dla materiału w którym pominięto efekty sprężyste ^{prowadzi} do adekwatnego

opisu końcowych trwałych deformacji konstrukcji.

Wpływ wzmocnienia materiału na dynamiczne zachowanie się konstrukcji studiowanej był przez wielu badaczy z punktu widzenia teoretycznego i eksperymentalnego. Większość uzyskanych wyników dotyczy zagadnień belek przy różnych warunkach podparcia i obciążenia.

Bodner i Symonds [6] oraz Jones [30], doszli do wniosku, że wpływ wzmocnienia materiału może być pominięty w porównaniu z efektami lepkości materiału i zmian geometrii w konstrukcjach cienkościennych. Wniosek ten potwierdził ostatnio Jones [30] w odniesieniu do płyt pierścieniowych obciążonych liniowym impulsem ciśnienia.

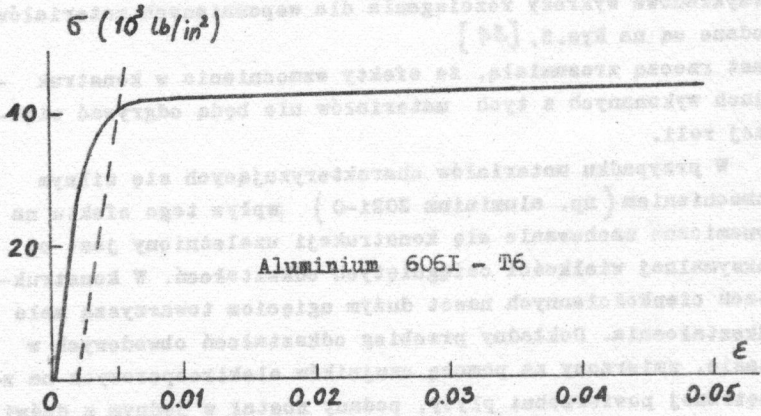
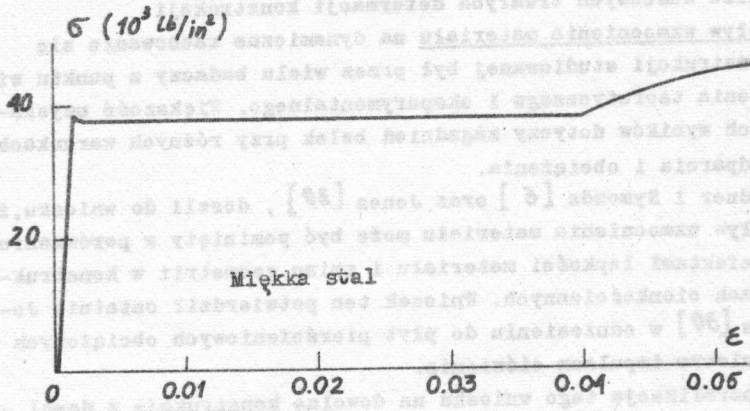
Generalizacja tego wniosku na dowolne konstrukcje z dowolnych materiałów byłaby chyba niesłuszna.

W obecnej chwili stoją do dyspozycji konstruktorów metale posiadające bardzo małe moduły wzmocnienia. Należy do nich przede wszystkim aluminium 6061-T6 oraz stal miękka.

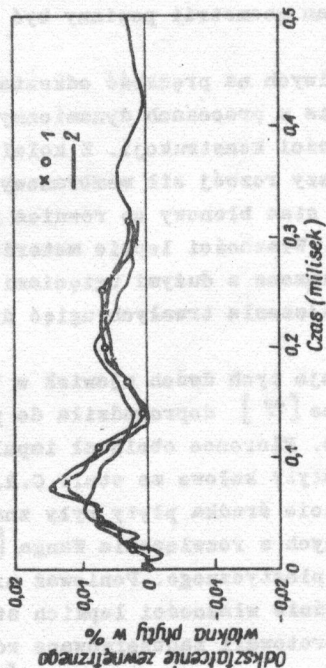
Przykładowe wykresy rozciągania dla wspomnianych materiałów podane są na Rys. 5, [34]

Jest rzeczą zrozumiałą, że efekty wzmocnienia w konstrukcjach wykonanych z tych materiałów nie będą odgrywać większej roli.

W przypadku materiałów charakteryzujących się silnym wzmocnieniem (np. aluminium 2021-0) wpływ tego efektu na dynamiczne zachowanie się konstrukcji uzależniony jest od maksymalnej wielkości osiągniętych odkształceń. W konstrukcjach cienkościennych nawet dużym ugięciom towarzyszą małe odkształcenia. Dokładny przebieg odkształceń obwodowych w czasie, zmierzony za pomocą czujników elektrooporowych na zewnętrznej powierzchni płyty, podany został w jednym z doświadczeń Duffy'ego i Key [14]. Rys. 6. Chociaż trwałe przemieszczenie środka wynosiło ok. 8 grubości powłoki, maksymalne odkształcenie nie przekraczało 1,5% natomiast trwałe odkształcenie wynosiło zaledwie około 0,4%.



Rys. 5 Wykresy rozciągania dla dwóch materiałów wykazujących mały moduł wzmocnienia.



Rys 6 Zmiana odkształceń obwodowych zewnętrznych włókna pily w czasie, 1 - punkty doświadczalne, 2 - obliczenia numeryczne

W tym zakresie wzmocnienie materiału jest jeszcze niewielkie. Pominięcie efektu wzmocnienia w dynamicznej analizie konstrukcji narzuca pewne ograniczenia na typ rozważanego materiału lub też na klasę rozważanych konstrukcji (cienkość).

Lepkość materiału i zmiany geometrii konstrukcji. Jedną z podstawowych trudności w doświadczalnej analizie dynamicznego zachowania się konstrukcji jest odpowiednie wydzielenie badanych efektów. Ponieważ znaczna część opublikowanych doświadczeń dla płyt i powłok przeprowadzona była w zakresie umiarkowanie dużych przemieszczeń, efekty wpływu prędkości odkształcenia i zmian geometrii powinny być traktowane łącznie.

W materiałach wrażliwych na prędkość odkształcenia granica plastyczności wzrasta w procesach dynamicznych powodując podwyższenie wytrzymałości konstrukcji. Z kolei wzrostowi ugięć w powłokach towarzyszy rozwój sił membranowych i przejście ze stanu giętnego w stan błonowy co również prowadzi do wzmocnienia konstrukcji. Własności lepkie materiału oraz efekty zmiany geometrii związane z dużymi ugięciami działają zgodnie w kierunku zmniejszenia trwałych ugięć dynamicznie obciążonych konstrukcji.

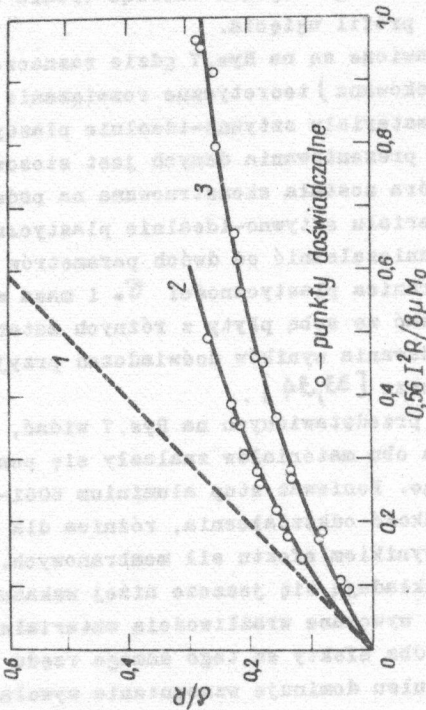
Odmierna interpretacja tych dwóch zjawisk w badaniach eksperymentalnych Florence [19] doprowadziła do pewnych kontrowersji w literaturze. Florence obciążał impulsem ciśnienia swobodnie podparte płyty kołowe ze stali C.R. 1018 i stwierdził, że trwałe ugięcie środka płyty były znacznie mniejsze od wartości wyliczonych z rozwiązania Wanga [96] dla materiału sztywno-idealnie plastycznego. Ponieważ nie było dokładnych informacji odnośnie własności lepkich stalowych próbek jedni autorzy interpretowali zaobserwowane różnice między teorią a doświadczeniem zmianami geometrii [31, 32], inni natomiast tłumaczyli rozbieżność wpływem prędkości odkształcenia, którego teoria Wanga nie uwzględniała [101, 105].

Zbadaniu oddzielnego wpływu obu efektów dla lepkoplasty

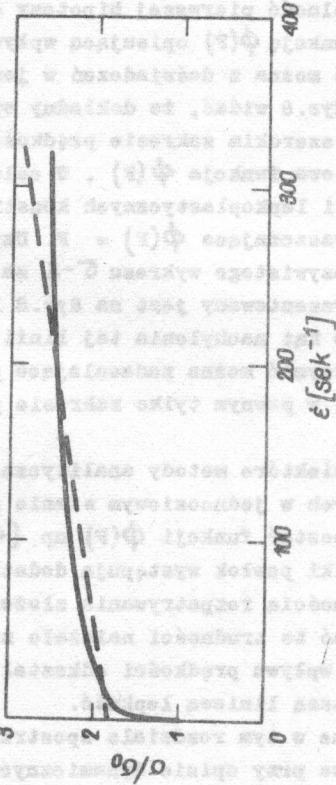
cznych konstrukcji poświęcona była praca Florence i autora [110]. Podobnie jak w [116], jako przykład reprezentatywny dla rozważanej teorii, wybrano zamocowaną płytę kołową obciążoną na całej powierzchni impulsem ciśnienia o dużej intensywności. Doświadczenia przeprowadzone były na płytach z dwóch różnych materiałów: aluminium 6061-T6 i stali HR-A285 ponieważ pierwszy z nich jest niewrażliwy a drugi wrażliwy na prędkość odkształcenia. Przebadano łącznie 31 płyt dla różnych wielkości zastosowanego impulsu mierząc trwałę ugięcie δ środka i końcowy profil ugięcia.

Wyniki pomiarów przedstawione są na Rys. 7 gdzie zaznaczone jest również (linia kreskowana) teoretyczne rozwiązanie Wang'a i Hopkinsa [97] dla materiału sztywno-idealnie plastycznego. Wygodnym sposobem prezentowania danych jest stosowanie bezwymiarowej skali, która została skonstruowana na podstawie rozwiązania dla materiału sztywno-idealnie plastycznego. W ten sposób można się uniezależnić od dwóch parametrów mechanicznych jakimi są granica plastyczności σ_0 i masa właściwa μ a zatem porównywać ze sobą płyty z różnych materiałów. Powyższa metoda podawania wyników doświadczeń przyjęła się następnie w literaturze [33,34].

Wracając do wyników przedstawionych na Rys. 7 widać, że punkty doświadczalne dla obu materiałów znalazły się poniżej rozwiązania teoretycznego. Ponieważ stop aluminium 6061-T6 jest niewrażliwy na prędkość odkształcenia, różnica dla górnej serii punktów jest wynikiem efektu sił membranowych. Ugięcia dla płyt stalowych układają się jeszcze niżej wskazując na dodatkowe wzmocnienie wywołane wrażliwością materiału na prędkość odkształcenia. Oba efekty są tego samego rzędu ale dla małych wielkości impulsu dominuje wzmocnienie wywołane lepkością materiału. Łatwo podać wytłumaczenie tego faktu analizując zależność granicy plastyczności materiału od prędkości odkształcenia. Na Rys. 8 przedstawiona jest zależność $\sigma - \dot{\epsilon}$ otrzymana drogą uśrednienia doświadczeń wielu autorów, [89]. Granica plastyczności rośnie gwałtownie w zakresie



Rys. 7 Trwałe ugięcia środka płyty w funkcji bezwymiarowego im-pulsu (Florence, Wierzbicki) 1-rozwiązanie według teorii momentowej dla materiału sztywno-plastycznego, 2-punkty doświadczalne dla aluminium, 3-punkty doświadczalne dla miedzkiej stali.



Rys. 8 Zależność dolnej granicy plastyczności miękkiej stali od prędkości odkształcenia (uśrednione wyniki wielu autorów).

Wzrost wartości σ_0/σ z prędkością odkształcenia jest charakterystyczny dla materiałów plastycznych. Wzrost ten jest spowodowany tym, że w czasie odkształcenia w materiale powstają defekty, które hamują dalsze odkształcenie. Wzrost ten jest szczególnie wyraźny w materiałach plastycznych, które charakteryzują się wysoką plastycznością. Wzrost ten jest spowodowany tym, że w czasie odkształcenia w materiale powstają defekty, które hamują dalsze odkształcenie. Wzrost ten jest szczególnie wyraźny w materiałach plastycznych, które charakteryzują się wysoką plastycznością.

$0 < \dot{\epsilon} < 10 \text{ sek}^{-1}$ ale tylko nieznacznie dla $\dot{\epsilon} > 10^2$. Dla małych wielkości impulsu ugięcia są na tyle małe, że wpływ sił membranowych jest niewielki. Jednocześnie gwałtowny wzrost granicy plastyczności z prędkością odkształcenia powoduje, że efekt lepkości jest w tym zakresie impulsów dominujący. Natomiast dla silniejszych impulsów wywołujących większe ugięcia, mimo dużych uzyskiwanych prędkości odkształcenia, granica plastyczności rośnie tylko nieznacznie i przeważa w zjawisku wpływ sił membranowych.

Przyjmując stosowalność pierwszej hipotezy omówionej na początku rozdziału, funkcję $\phi(F)$ opisującą wpływ prędkości odkształcenia określić można z doświadczeń w jednoosiowym stanie naprężenia. Z Rys.8 widać, że dokładny opis lepkich własności materiału w szerokim zakresie prędkości odkształcenia zapewnia nieliniowa funkcja $\phi(F)$. W celu otrzymania możliwie prostej teorii lepkoplastycznych konstrukcji przyjmuje się założenie upraszczające $\phi(F) = F$. Uzyskany stopień aproksymacji rzeczywistego wykresu $\sigma - \dot{\epsilon}$ za pomocą liniowej funkcji $\phi(F)$ reprezentowany jest na Rys.8 linią prostą. Dobierając odpowiednio kąt nachylenia tej linii i punkt przecięcia z osią σ/σ_0 otrzymać można zadawalające przybliżenie krzywej doświadczalnej w pewnym tylko zakresie prędkości odkształcenia.

Należy zaznaczyć, że niektóre metody analityczne rozwiązywania problemów brzegowych w jednoosiowym stanie naprężenia dopuszczają nieliniową postać funkcji $\phi(F)$ np. [41,94]. W zagadnieniach dynamiki powłok występują dodatkowe trudności związane z koniecznością rozpatrywania złożonego stanu naprężenia. Aby pokonać te trudności należało zrezygnować z dokładniejszego opisu wpływu prędkości odkształcenia zachowywać jedynie najprostszą liniową lepkość.

Uogólniając zebrane w tym rozdziale spostrzeżenia i wyniki można stwierdzić, że przy opisie dynamicznych deformacji cienkościennych konstrukcji niesprężystych podstawową rolę odgrywają własności sprężyste, plastyczne i lepkie materiału

Efekty sprężyste nie wpływają jednak na wielkość i kształt zdeformowanych konstrukcji. Wystarczającym modelem materiału do opisu trwałych deformacji jest model sztywno-lepkoplastyczny. Przy intensywnych obciążeniach prowadzących do dużych ugięć uwzględniać należy ponadto zmiany geometrii konstrukcji.

Zgodnie z powyższą dyskusją w dalszej części pracy zakłada się:

1. Pominięcie wzmocnienia materiału, $\lambda = k = \text{const}$
2. Pominięcie członów sprężystych $\mu = K \rightarrow \infty$
3. Przyjęcie liniowej funkcji $\Phi(F) = F$.

Wprowadzając założenia 1,2,3 do (2.1) otrzymujemy związki

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \gamma \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right) \frac{S_{ij}}{\sqrt{J_2}} && \text{dla } \sqrt{J_2} > k \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= 0 && \text{dla } \sqrt{J_2} \leq k \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= 0 \end{aligned}$$

które rozważał wcześniej Hohenemser i Prager [26] jako uogólnienie modelu nieściśliwej cieczy lepkiej.

W szczególnym przypadku kiedy $\gamma \rightarrow \infty$, równania (2.3) redukują się do prawa płynięcia Levy-Misesa dla materiału sztywno-idealnie plastycznego; [71]

$$(2.4) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda S_{ij}, \quad \sqrt{J_2} = k.$$

3. Linearyzacja Równań Konstytutywnych

W poprzednim rozdziale przeprowadzona została dyskusja istniejących równań konstytutywnych pod kątem ich przydatności w dynamice konstrukcji niesprężystych.

Obecnie zaproponowana zostanie nowa koncepcja całkowitej linearyzacji związków (2.3).

Ze względu na występowanie statycznego warunku plastyczności Hubera-Misesa, równania (2.3) są nieliniowe w naprężeniach.

niach.

Zdefiniujmy obecnie nowy dewiator naprężenia

$$(3.1) \quad \frac{S_{ij}}{\sqrt{J_2}} = \frac{S_{ij}^\circ}{\sqrt{J_2^\circ}}, \quad J_2^\circ = \frac{1}{2} S_{ij}^\circ S_{ij}^\circ = k^2.$$

Posługując się geometryczną interpretacją w przestrzeni dewiatorów zauważmy, że wektor S_{ij}° jest współliniowy z wektorem S_{ij} (te same tensory kierunków i podobieństwa) i leży na statycznej powierzchni płynięcia.

Wykorzystując definicję (3.1) równania (2.3) przepisać można w ekwiwalentnej postaci

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{\dot{\gamma}}{k} (S_{ij} - S_{ij}^\circ) && \text{dla } \sqrt{J_2} > k, \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= 0 && \text{dla } \sqrt{J_2} \leq k, \end{aligned}$$

natomiast warunek nieściśliwości $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ pozostaje bez zmian. Prawo płynięcia (3.2) jest w dalszym ciągu nieliniowe ponieważ tensor S_{ij}° wyznaczyć można z (3.1) jedynie jeśli znany jest tensor S_{ij} .

Niestowarzyszone prawo płynięcia. Rozważmy obecnie prawo konstytutywne podobne do (3.2), w którym dewiator S_{ij}° zastąpiony został przez inny dewiator S_{ij}^* , traktowany jako znana funkcja w każdym punkcie rozważanego materiału

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^* &= \frac{\dot{\gamma}}{k} (S_{ij} - S_{ij}^*) && \text{dla } \sqrt{J_2} > k \\ \dot{\epsilon}_{ij}^* &= 0 && \text{dla } \sqrt{J_2} \leq k, \end{aligned}$$

lub

gdzie składowe tensora S_{ij}^* , podobnie jak S_{ij}° spełniają statyczny warunek plastyczności. Powyższe równania stwierdzają, że kierunek wektora prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ jest współliniowy z wektorem $(S_{ij} - S_{ij}^*)$. Ponieważ na ogół $S_{ij}^* \neq S_{ij}^\circ$, wek-

tor $S_{ij} - S_{ij}^*$ nie jest skierowany wzdłuż normalnej do statycznej powierzchni płynięcia, Rys.9. Zatem równanie (3.3) należy do klasy niestowarzyszonych praw płynięcia.

Niestowarzyszone prawa płynięcia były również badane w teorii plastyczności, krytyczny przegląd uzyskanych wyników znaleźć można np. w pracy Mroza [57]. Choć większość przesłanek teoretycznych przemawia za normalnością wektora prędkości odkształcenia do powierzchni płynięcia, to jednak w niektórych doświadczeniach dla materiałów sprężysto-plastycznych zaobserwowano odchylenia od normalności.

W teorii ciał lepkoplastycznych postulat normalności nie został poddany doświadczalnemu sprawdzeniu. W tej sytuacji wyprowadzone niestowarzyszone prawo płynięcia należy traktować nie jako niezależne prawo fizyczne lecz jako pewną aproksymację stowarzyszonego prawa (2.3).

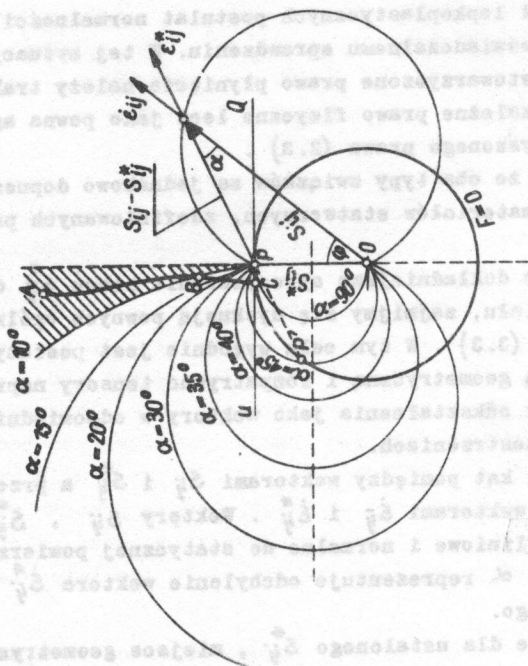
Warto nadmienić, że oba typy związków są jednakowo dopuszczalne w klasie materiałów statecznych, zdefiniowanych przez (2.2).

Pozostawiając dokładniejsze sprecyzowanie stanu S_{ij}^* do następnego rozdziału, zajmijmy się dyskusją pewnych ogólnych własności równań (3.3). W tym celu wygodnie jest posłużyć się interpretacją geometryczną i rozpatrywać tensory naprężenia i prędkości odkształcenia jako wektory w odpowiednich 6-wymiarowych przestrzeniach.

Oznaczmy przez φ kąt pomiędzy wektorami S_{ij} i S_{ij}^* a przez α kąt pomiędzy wektorami $\dot{\epsilon}_{ij}$ i $\dot{\epsilon}_{ij}^*$. Wektory S_{ij} , S_{ij}^* oraz $\dot{\epsilon}_{ij}$ są współliniowe i normalne do statycznej powierzchni płynięcia. Kąt α reprezentuje odchylenie wektora $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ od kierunku normalnego.

Łatwo zauważyć, że dla ustalonego S_{ij}^* , miejsce geometryczne stałego α tworzy rodzinę hiper kół, których środki leżą na symetralnej odcinka OP, Rys.9.

Porównanie stowarzyszonego i niestowarzyszonego prawa płynięcia przeprowadzone będzie dla dwóch oddzielnych przypadków: przy zadanej drodze obciążania w przestrzeni naprężeń i prze



Rys. 9 Interpretacja geometryczna niestowarzyszonego prawa płwnięcia.

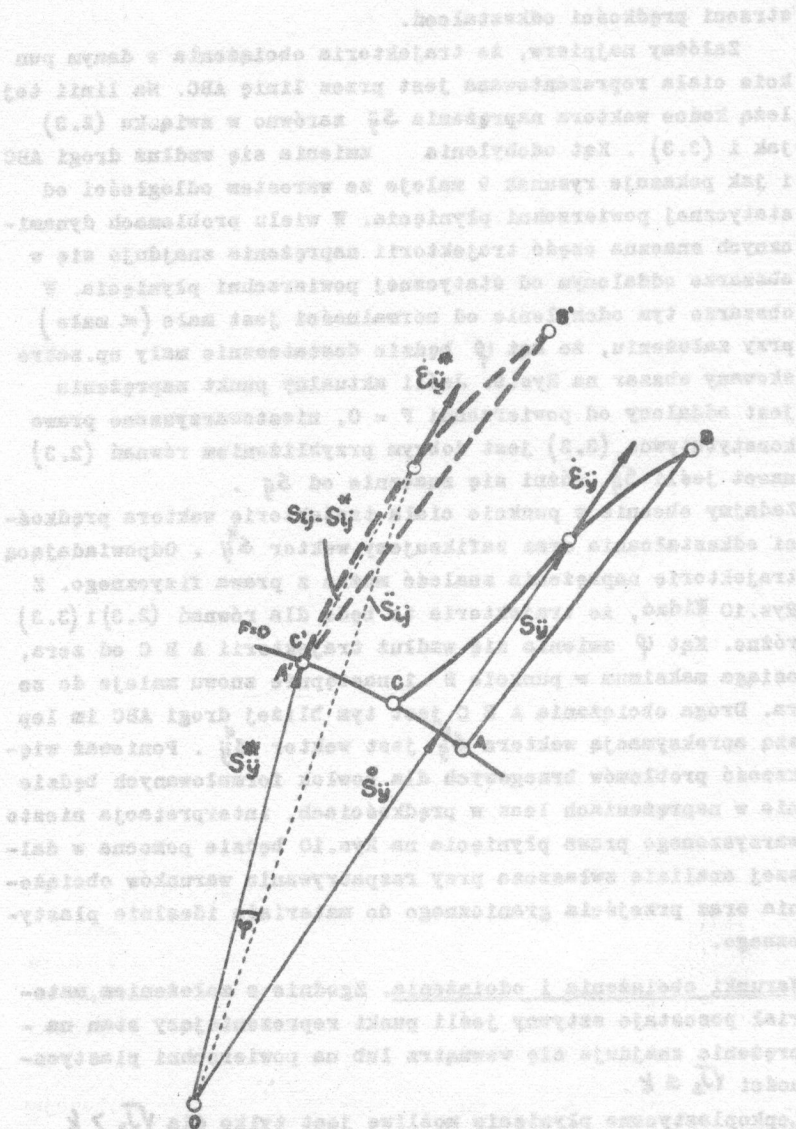
strzeni prędkości odkształceń.

Założmy najpierw, że trajektoria obciążenia w danym punkcie ciała reprezentowana jest przez linię ABC. Na linii tej leżą końce wektora naprężenia S_{ij} zarówno w związku (2.3) jak i (3.3). Kąt odchylenia zmienia się wzdłuż drogi ABC i jak pokazuje rysunek 9 maleje ze wzrostem odległości od statycznej powierzchni płynięcia. W wielu problemach dynamicznych znaczna część trajektorii naprężenia znajduje się w obszarze oddalonym od statycznej powierzchni płynięcia. W obszarze tym odchylenie od normalności jest małe (α małe) przy założeniu, że kąt φ będzie dostatecznie mały np. zakreślowany obszar na Rys.9. Jeśli aktualny punkt naprężenia jest oddalony od powierzchni $F = 0$, niestowarzyszone prawo konstytutywne (3.3) jest dobrym przybliżeniem równań (2.3) nawet jeśli S_{ij}^* różni się znacznie od S_{ij} .

Zadajmy obecnie w punkcie ciała trajektorię wektora prędkości odkształcania oraz zafiksujemy wektor S_{ij}^* . Odpowiadającą trajektorię naprężenia znaleźć można z prawa fizycznego. Z Rys.10 Widać, że trajektorie te będą dla równań (2.3) i (3.3) różne. Kąt φ zmienia się wzdłuż trajektorii A B C od zera, osiąga maksimum w punkcie B i następnie znowu maleje do zera. Droga obciążania A B C jest tym bliżej drogi ABC im lepszą aproksymacją wektora S_{ij}^* jest wektor S_{ij} . Ponieważ większość problemów brzegowych dla powłok formułowanych będzie nie w naprężeniach lecz w prędkościach, interpretacja niestowarzyszonego prawa płynięcia na Rys.10 będzie pomocna w dalszej analizie zwłaszcza przy rozpatrywaniu warunków obciążenia oraz przejścia granicznego do materiału idealnie plastycznego.

Warunki obciążenia i odciążenia. Zgodnie z założeniem, materiał pozostaje sztywny jeśli punkt reprezentujący stan naprężenia znajduje się wewnątrz lub na powierzchni plastyczności $\sqrt{J_2} \leq k$.

Lepkoplastyczne płynięcie możliwe jest tylko dla $\sqrt{J_2} > k$.



Rys. 10 Trajektorja naprężeń przy zadanej drodze obciążenia w przestrzeni prędkości odkształceń.

Naturalna norma wektora prędkości odkształcenia $\|\dot{\epsilon}_{ij}^*\|$, obliczona przez podniesienie do kwadratu obu stron równania (3.3), wynosi

$$(3.4) \quad \|\dot{\epsilon}_{ij}^*\| = \gamma \left[\frac{J_2}{k^2} + 1 - \frac{S_{ij} S_{ij}^*}{k^2} \cos \varphi \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Aby otrzymać ciągłe przejście z obszaru lepkoplastycznego gdzie $\|\dot{\epsilon}_{ij}^*\| > 0$ do obszaru sztywnego gdzie $\|\dot{\epsilon}_{ij}^*\| = 0$ należy jednocześnie położyć w (3.4) $\cos \varphi \rightarrow 1$ i $\sqrt{J_2} \rightarrow k$. Podstawiając do (3.4) $\cos \varphi = 1$ po przekształceniach otrzymuje się

$$(3.5) \quad \|\dot{\epsilon}_{ij}^*\| = \gamma \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right).$$

Widać teraz, że drugi niezmiennik tensora prędkości odkształcenia zeruje się jeśli $\sqrt{J_2} \rightarrow k$.

Warunek odciążania i obciążania w postaci (3.3) jest nieliniowy mimo, że same równania konstytutywne zostały zlinearyzowane. Stwarza to trudności przy rozwiązywaniu konkretnych problemów brzegowych. Warto nadmienić, że Prager, [78] w pierwszym rzędzie linearyzował warunek obciążania aproksymując go układem \mathcal{N} liniowych nierówności.

W zagadnieniach dynamicznych dla ciał lepkoplastycznych rozwiązywanych w prędkościach wygodniej jest stosować nieco odmienną interpretację warunku odciążania. Ponieważ rozważany model materiału jest całkowicie dysypatywny, ruch dowolnego punktu ciała ustanie jeśli tylko doprowadzona została do tego ciała skończona wartość energii. Zwykle interesuje nas moment końca ruchu, kiedy $\|\dot{\epsilon}_{ij}^*\| = 0$. Z przyrównania do zera prawej strony równości (3.4) znajdujemy, że usztywnienie w rozważanym modelu materiału następuje dla wartości naprężeń równych założonej wielkości $S_{ij} = S_{ij}^*$.

Przejście graniczne do ciała idealnie plastycznego. Zbadajmy obecnie warunki przy których równania (3.3) redukują się do związków Levy-Misesa opisujących materiał idealnie plastyczny -

czny. Wzorując się na metodzie wyłożonej w [71], przyjmijmy $\gamma \rightarrow \infty$ zakładając jednocześnie, że prędkości odkształceń nie zerają się $\|\dot{\epsilon}_{ij}^*\| \neq 0$.

Podobnie jak w poprzednio prawa strona równania (3.4) dąży do zera jeśli $S_{ij} \rightarrow S_{ij}^*$. Związek konstytutywny (3.3) redukuje się w granicznym przypadku do postaci

$$(3.6) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^* = \lambda p_{ij}, \quad J_2 = k^2,$$

gdzie λ jest nieoznaczonym parametrem, natomiast p_{ij} jest jednostkowym wektorem normalnym, skierowanym na zewnątrz powierzchni płynięcia o nieustalonym kierunku. Wektor p_{ij} staje się normalny do tej powierzchni w punkcie A' jeśli trajektoria naprężenia w otoczeniu punktu A' jest tzw. radialną drogą obciążania.

Można wypowiedzieć ogólny wniosek, że zlinearyzowane równanie konstytutywne redukuje się w granicznym przypadku $\gamma \rightarrow \infty$ do stowarzyszonego prawa płynięcia opisującego materiał idealnie plastyczny jedynie dla proporcjonalnych radialnych dróg obciążania. Zachodzi to np. w przypadku kiedy proporcjonalne obciążenie jest wynikiem symetrii problemu.

Wyznaczenie naprężeń S_{ij}^* . W poprzednim punkcie wskazano na korzyści jakie daje w analizie warunków odciążania sformułowanie całego problemu w prędkościach. Dla infinityzimalnych odkształceń jest to możliwe ponieważ poszczególne grupy związków łącznie z równaniami konstytutywnymi są liniowe. Wyrażenie wszystkich wielkości w prędkościach przemieszczeń wymaga uprzedniego odwrócenia związków konstytutywnych. Dla ciał sztywno-plastycznych i sztywno-lepkoplastycznych odwrócenie jest możliwe jedynie z dokładnością do członu ciśnienia hydrostatycznego ze względu na warunek nieściśliwości. Jednoznaczne odwrócenie równań konstytutywnych daje się natomiast przeprowadzić w płaskim stanie naprężenia. Dokładne przeanalizowanie tego szczególnego przypadku posiada podsta-

wowe znaczenie w dynamice konstrukcji cienkościennych i poświęcimy mu dużo uwagi w końcowej części tego rozdziału.

W płaskim stanie naprężenia drugi niezmiennik tensora naprężenia J_2 można wyrazić przez składowe $\sigma_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ jako

$$(3.7) \quad J_2 = \frac{1}{3} [3\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta}],$$

natomiast dewiator $S_{\alpha\beta}$ wynosi

$$(3.8) \quad S_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} [3\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}].$$

Wykorzystując powyższe związki wyspecyfikować można z (3.3) zlinearyzowane prawo płynięcia w płaskim stanie naprężenia

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^* &= \frac{\gamma}{3k} [(3\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}) - (3\sigma_{\alpha\beta}^* - \sigma_{\gamma\gamma}^*\delta_{\alpha\beta})] \\ \dot{\epsilon}_{33}^* &= -\dot{\epsilon}_{\gamma\gamma}^*. \end{aligned}$$

Po odwróceniu równań (3.9) otrzymuje się ostatecznie

$$(3.10) \quad \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^* = \frac{k}{\gamma} [\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^* + \dot{\epsilon}_{\gamma\gamma}^*\delta_{\alpha\beta}],$$

gdzie gwiazdki przy składowych tensora prędkości odkształcenia zostały opószczone. Człon $\sigma_{\alpha\beta}^*$ w równaniu (3.10) nie został do tej pory zdeterminowany. Zgodnie z definicją składowe tensora $\sigma_{\alpha\beta}^*$ spełniać muszą statyczny warunek plastyczności Hubera-Misesa w płaskim stanie naprężenia. Istnieje jednak w dalszym ciągu dowolność w wyborze $\sigma_{\alpha\beta}^*$, zatem związki konstytutywne (3.10) dla materiału są niejednoznaczne. Dopiero sformułowanie problemu początkowo-brzegowego dla całego ciała i wprowadzenie dodatkowej hipotezy pozwoli na określenie $\sigma_{\alpha\beta}^*$.
Rozważmy ciało o objętości V i powierzchni S . Przyjmijmy dla prostoty, że na części powierzchni prędkości przemieszczeń są równe zeru, pozostała część powierzchni wolna jest od

naprężeń.

Założmy, że w początkowej chwili dane jest pole prędkości przemieszczeń w każdym punkcie ciała \dot{u}_α .

Według przyjętej nomenklatury odpowiada to obciążeniu typu impulsowego. Rozwiązanie zadanego problemu początkowo-brzegowego dla ciała lepkoplastycznego scharakteryzowane jest zmiennym w czasie polem naprężeń $\sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha, t)$, prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}(x_\alpha, t)$ i prędkości przemieszczeń $\dot{u}_\alpha(x_\alpha, t)$. Naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$ spełniać muszą warunek równowagi dynamicznej

$$(3.11) \quad \sigma_{\alpha\beta, \beta} = \rho \ddot{u}_\alpha,$$

natomiast prędkości odkształceń spełniają warunki zgodności

$$(3.12) \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{\alpha, \beta} + \dot{u}_{\beta, \alpha}).$$

W celu wyznaczenia tensora $\sigma_{\alpha\beta}^*$ wprowadza się następującą hipotezę:

Hipoteza I. Stan naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}^*$ odpowiada rozwiązaniu dynamicznego problemu płynięcia konstrukcji sztywno-idealnie plastycznej przy tych samych warunkach początkowych i brzegowych.

Powyższa hipoteza posiada częściowe uzasadnienie w podobieństwie związków konstytutywnych Hohenemsera i Pragera (2.3) oraz Levy-Misesa (2.4) jeśli chodzi o kierunki wektora prędkości odkształceń, różnica występuje tylko w skalarnym mnożniku.

Tensor $\sigma_{\alpha\beta}^*$ jest aproksymacją tensora $\sigma_{\alpha\beta}^0$ będącego, zgodnie z definicją (3.1), rzutem aktualnego naprężenia na statyczną powierzchnię płynięcia.

Wprowadzona hipoteza jest pewnego rodzaju uogólnieniem, a właściwie osłabieniem hipotezy Perrone, szeroko dyskutowanej w rozdziale pierwszym. Metoda Perrone polegała na zastąpieniu zarówno wielkości statycznych jak i kinematycznych w problemie lepkoplastycznym przez rozwiązanie dla materiału plastycznego. W obecnej teorii aproksymacji podlega jedynie

aktualny stan naprężenia zredukowany na statyczną powierzchnię plastyczności natomiast nie czyni się żadnych ograniczeń odnośnie pola rzeczywistych naprężeń i prędkości. Niestowarzyszone prawo płynięcia (3.10) zostało wyprowadzone bez wprowadzania postulatu normalności wektora prędkości odkształcenia do aktualnej powierzchni płynięcia. Zatem hipoteza I zastępuje postulat normalności w stowarzyszonym prawie płynięcia ponieważ specyfikując tensor $\sigma_{\alpha\beta}^*$ określa zarazem nowy kierunek wektora. Aproksymacja ta jest właściwa nie dla materiału ale jednocześnie dla wszystkich punktów ciała w danym problemie brzegowym.

Dalsza motywacja i modyfikacja hipotezy I podana będzie w następnym rozdziale w zastosowaniu do konstrukcji cienkościennych.

Pokażemy obecnie, że zamiast wielkości tensorowej $\sigma_{\alpha\beta}^*$ wystarcza znajomość odpowiedniej wielkości wektorowej \ddot{u}_α^* . Zgodnie z hipotezą naprężenie $\sigma_{\alpha\beta}^*$ spełnia równanie ruchu

$$(3.13) \quad \sigma_{\alpha\rho,\rho}^* = \rho \ddot{u}_\alpha^*,$$

gdzie \ddot{u}_α^* jest przyspieszeniem w porównawczym problemie brzegowym dla materiału idealnie plastycznego. Odejmując stronami (3.11) i (3.13) mamy

$$(3.14) \quad (\sigma_{\alpha\rho} - \sigma_{\alpha\rho}^*),_{\rho} = \rho (\ddot{u}_\alpha - \ddot{u}_\alpha^*).$$

Podstawiając do (3.14) prawo płynięcia (3.10) i związki geometryczne (3.12) otrzymujemy następujące równanie opisujące ruch ciała lepkoplastycznego

$$(3.15) \quad \ddot{u}_{\alpha,\rho\rho} + 3\ddot{u}_{\rho,\alpha\rho} = \frac{\rho Y}{k} [\ddot{u}_\alpha - \ddot{u}_\alpha^*],$$

które w pewnym sensie jest odpowiednikiem przemieszczeniowego równania Naviera w teorii sprężystości. Człon $\ddot{u}_\alpha^*(x_\alpha, t)$ jest znaną funkcją i reprezentuje zmienne w czasie siły masowe.

Możliwe jest dalsze uproszczenie równania (3.15) wykonywując ostatnie wyniki Martina i Symondsa dotyczącą zbliżności rozwiązań w teorii ciał sztywno-idealnie plastycznych. W pracy [53] udowodniono, że rozwiązanie danego problemu brzegowego dąży do rozwiązania z jednym stopniem swobody

$$(3.16) \quad \dot{u}_\alpha^* = U_\alpha^*(x_\alpha) \dot{T}(t),$$

gdzie zależna od czasu amplituda jest w problemach typu impulsowego liniową funkcją malejącą.

Przyspieszenie \ddot{u}_α^* jest zatem stałe w czasie i jako aproksymacja (3.15) uzyskujemy

$$(3.17) \quad \ddot{u}_{\alpha,pp} + 3\dot{u}_{p,\alpha p} = \frac{\rho Y}{k} [\ddot{u}_\alpha - A U_\alpha^*(x_\alpha)].$$

Za pomocą wyrażenia (3.16) uzyskuje się dobre przybliżenie członu \ddot{u}_α^* w końcowej fazie ruchu ciała ze względu na wykazaną w [53] własność zbliżności dwóch rozwiązań różniących się rozkładem początkowej prędkości.

W początkowej fazie procesu deformacji aproksymacja ta nie jest tak dokładna ale wówczas punkt na trajektorii naprężenia jest oddalony od statycznej powierzchni płynięcia i jak wykazano poprzednio, równania (3.10) nie są czułe na błąd w określeniu wielkości $\sigma_{\alpha p}^*$ lub \dot{u}_α^* .

Przeprowadzona analiza równań opisujących ruch ciała lepkoplastycznego w płaskim stanie naprężenia miała na celu dokładną interpretację metody linearyzacji i związanych z nią założeń oraz hipotez. Pełne korzyści z zaproponowanego podejścia uwidocznia się przy rozpatrywaniu równań teorii powłok zapisanych w wielkościach uogólnionych.

4. Prawo Płynięcia dla Lepkoplastycznych Konstrukcji

Założenia upraszczające. Transformacja równań trójwymiarowego ośrodka do dwuwymiarowej przestrzeni opisującej konstrukcje powierzchniowe nie jest ścisła i wymaga przyjęcia szere-

gu dodatkowych założeń odnośnie wielkości statycznych i kinematycznych.

Sawczuk i Duszek [82] przeprowadzili ostatnio szczegółową dyskusję założeń upraszczających w teorii początkowego płynięcia powłok z materiału sztywno-plastycznego nieściśliwego. Analiza równań powłok cienkich dla skończonych deformacji w opisie Lagrange'a podana jest w [17]. Ważnym wnioskiem tych prac jest stwierdzenie, że dla „umiarkowania dużych przemieszczeń” tzn. przemieszczeń rzędu grubości powłoki, prawo płynięcia i definicja uogólnionych naprężeń może być przyjęte w tej samej postaci jak dla przemieszczeń nieskończenie małych. Natomiast równania równowagi i związki geometryczne wymagają pewnych modyfikacji.

W obecnym rozdziale wyprowadzone będzie prawo płynięcia dla lepkoplastycznych konstrukcji wzorując się częściowo na założeniach i podejściu infinitizemalnej teorii powłok plastycznych por. [92]. Należy pamiętać, że otrzymane równania ważne będą również w zakresie umiarkowania dużych ugięć,

Przyjmijmy ortogonalny układ współrzędnych z osiami X_α ($\alpha = 1, 2$) leżącymi na powierzchni środkowej konstrukcji i osią X_3 skierowaną wzdłuż normalnej do tej powierzchni. Jeśli stosunek grubości ścianki $2h$ do wymiaru liniowego konstrukcji R jest mały, $2h/R \ll 1$, to naprężenia normalne w kierunku grubości elementu mogą być pominięte, $\sigma_{33} = 0$ i pozostałe składowe tensora naprężenia σ_{ij} mogą być przedstawione przez tensor $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) oraz wektor $\sigma_{\alpha 3}$ ($\alpha = 1, 2$). Wypadkowe naprężenia w ustalonym punkcie powierzchni środkowej X_α a mianowicie tensor momentów zginających, $M_{\alpha\beta}$, tensor sił membranowych $N_{\alpha\beta}$ i wektor siły poprzecznej T_α zdefiniowane są przez

$$(4.1) \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3, \quad N_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad T_\alpha = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha 3} dx_3.$$

Dla konstrukcji cienkich, w których stosunek grubości do promienia krzywizny ρ_ρ ($\rho=1,2$) jest mały $2h/\rho_\rho \ll 1$, tensory $M_{\alpha\rho}$ i $N_{\alpha\rho}$ są symetryczne.

Zgodnie z założeniem płaskich przekrojów i prostych normalnych składowe tensora prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{\alpha\rho}$ w dowolnej warstwie X_3 wyrażają się przez tensor prędkości wydłużenia $\dot{\lambda}_{\alpha\rho}$ i tensor krzywizny powierzchni środkowej $\dot{\kappa}_{\alpha\rho}$

$$(4.2) \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\rho}(X_3) = \dot{\lambda}_{\alpha\rho} + X_3 \dot{\kappa}_{\alpha\rho}.$$

Szereg badań dla konstrukcji plastycznych [83] i lepkoplastycznych [102] wykazało, że wpływ efektów ścinających na uplastycznienie i dalsze odkształcenia konstrukcji jest niewielki jeśli $2h/R \ll 1$. Przyjmijemy zatem dalsze założenie upraszczające, że $\dot{\epsilon}_{3\alpha} = \dot{\gamma}_{\alpha} = 0$ oraz odpowiadające składowym wektora $\dot{\epsilon}_{3\alpha}$ naprężenia $\dot{\sigma}_{3\alpha}$ nie wchodzi do prawa fizycznego. Stan naprężenia w każdej warstwie powłoki traktować można jako płaski, a więc zastosowanie mają zlinearyzowane równania (3.10).

Prawo płynięcia dla powłok otrzymuje się przez odpowiednie scałkowanie związków (3.10) po grubości elementu wykorzystując definicję (4.1)

$$(4.3) \quad M_{\alpha\rho} - M_{\alpha\rho}^* = \frac{4h^3}{3} \frac{k}{\gamma} (\dot{\kappa}_{\alpha\rho} + \dot{\kappa}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\rho})$$

$$N_{\alpha\rho} - N_{\alpha\rho}^* = 4h \frac{k}{\gamma} (\dot{\lambda}_{\alpha\rho} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\rho}).$$

W szczególnym przypadku powłok osiowo-symetrycznych $M_{12} = M_{21} = N_{12} = N_{21} = 0$ i z (4.3) uzyskuje się następujące związki wprowadzone wcześniej [108],

$$M_1 - M_1^* = \frac{4h^3}{3} \frac{k}{\gamma} (2\dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2)$$

$$M_2 - M_2^* = \frac{4h^3}{3} \frac{k}{\gamma} (2\dot{\kappa}_2 + \dot{\kappa}_1)$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} N_1 - N_1^* &= 4h \frac{k}{\gamma} (2\lambda_1 + \lambda_2) \\ N_2 - N_2^* &= 4h \frac{k}{\gamma} (2\lambda_2 + \lambda_1), \end{aligned}$$

gdzie indeksy (1,2) oznaczają kierunki główne w powłoce. Porównując równania (4.3) lub (4.4) z odpowiednimi związkami dla lepkoplastycznych powłok wyprowadzonymi w oparciu o prawo płynięcia stowarzyszone z warunkiem plastyczności Treski [7] i Hubera-Misesa [64], zwraca uwagę prostota obecnych równań. Są one liniowe w naprężeniach i prędkościach uogólnionych odkształceń i posiadają tę samą postać dla całej konstrukcji tzn. nie wymagają rozpatrywania różnych obszarów ponieważ opierają się na gładkim warunku plastyczności. Efekty giętne i membranowe w równaniach (4.3) są ze sobą sprzężone ze względu na obecność członów $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$.

Sformułowanie problemu w prędkościach. Określenie niewiadomych sił i momentów $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$ z hipotezy I wymaga sprecyzowania problemu początkowo-brzegowego dla konstrukcji. Dla ustalenia uwagi zajmiemy się szczegółowo teorią płyt, wyprowadzenie analogicznych rezultatów dla powłok nie przedstawia żadnych trudności. W rozdziale poświęconym zastosowaniom omówiony będzie przykład powłoki cylindrycznej.

Równanie dynamicznej równowagi płyt przy uwzględnieniu inercji ruchu poprzecznego ma postać

$$(4.5) \quad T_{\alpha,\alpha} + P = \mu \ddot{w}, \quad M_{\alpha\beta,\alpha} = T_{\beta},$$

gdzie P jest wektorem obciążeń zewnętrznych a μ oznacza masę na jednostkę powierzchni środkowej płyty. Związki geometryczne w teorii zgięciowej płyt są

$$(4.6) \quad k_{\alpha\beta} = -\dot{w}_{,\alpha\beta}.$$

Rozważmy dalej obciążenie typu impulsowego w którym ciśnienie P jest równe zeru. Zgodnie z hipotezą I, stan $M_{\alpha\beta}^*$ jest w równowadze z $\mu \ddot{w}$ w identycznym problemie dla ciała idealnie

plastycznego

$$(4.7) \quad M_{\alpha\beta, \alpha\beta}^* = \mu \ddot{W}^*$$

Odejmując stronami (4.5) i (4.7) przy założeniu $P = 0$ mamy

$$(4.8) \quad (M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^*),_{\alpha\beta} = \mu [\ddot{W} - \ddot{W}^*]$$

Podstawiając do (4.8) prawo płynięcia (4.3) i związki geometryczne (4.6) otrzymujemy

$$(4.9) \quad -\frac{4h^3}{3} \frac{k}{\gamma} 2 \dot{W}_{,\alpha\beta\beta\alpha} = \mu [\ddot{W} - \ddot{W}^*]$$

Podobnie jak w płaskim stanie naprężenia, wprowadzimy obecnie aproksymację członu \ddot{W}^* rozwiązaniem z jednym stopniem swobody, [53]

$$(4.10) \quad \ddot{W}^* = A f(x_\alpha)$$

Zauważmy, że wyraz $P^* = \mu A f(x_\alpha)$ ma wymiar stałego w czasie obciążenia zewnętrznego i mógłby być otrzymany jeśli zamiast równania ruchu (4.7) wprowadzić równanie statycznej równowagi

$$(4.11) \quad M_{\alpha\beta, \alpha\beta}^* + P^* = 0$$

Spostrzeżenie to umożliwia wysunięcie nowej uproszczonej hipotezy pozwalającej wyznaczyć niewiadome wielkości $M_{\alpha\beta}^*$ lub P^* .

Hipoteza II. Stan uogólnionego naprężenia $M_{\alpha\beta}^*, N_{\alpha\beta}^*$ odpowiada rozwiązaniu problemu q_1 -statycznego płynięcia konstrukcji sztywno-idealnie plastycznej przy tych samych warunkach brzegowych, które zadajemy dla rzeczywistego procesu dynamicznego.

Dodatkowa motywacja powyższej hipotezy sprowadza się do następujących dwóch spostrzeżeń. Po pierwsze stan naprężenia w konstrukcjach scharakteryzowany jest przez tzw. profil naprężenia. Profil ten (jego koniec) jest jednoznacznie określony

przez prawidłowo sformułowane warunki brzegowe. Zatem warunki brzegowe umiejscawiają dość dokładnie profil naprężenia na powierzchni płynięcia $\phi = 0$, istnieje jednak w dalszym ciągu dowolność w wyborze $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$ bo różne rozkłady sił powierzchniowych mogą być w równowadze z wypadkowymi naprężeniami. Zauważmy dalej, że momenty i siły w konstrukcji są na podstawie prawa płynięcia jednoznacznie określone przez mechanizm płynięcia tzn. pole prędkości przemieszczeń. W wielu badaniach doświadczalnych np. [110] zwrócono uwagę, że pole prędkości w przeważającej części procesu dynamicznego nie zmienia się zbyt wiele i jest podobne do odpowiedniego pola dla procesu quasi-statycznego. Wynikający z tego ostatniego rozkład sił wewnętrznych $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$ będzie dobrą aproksymacją odpowiedniego pola $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$. Należy podkreślić, że obliczone z rozważania quasi-statycznego wielkości $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$ nie muszą być stałe. Na przykład w przypadku umiarkowanie dużych ugięć w płytach następuje redystrybucja sił i momentów tak, że $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$ stają się funkcjami parametru procesu.

Zagadnienie to omówione będzie dokładniej w rozdziale 6 przy okazji rozwiązywania konkretnych problemów brzegowych.

Zastąpienie niewiadomych wielkości w równaniu konstytutywnych pojedynczym członem skalarnym P^* równym nośności granicznej konstrukcji idealnie plastycznej posiada podstawowe znaczenie w dalszych zastosowaniach praktycznych obecnej metody linearyzacji. Konstrukcja może osiągnąć stan graniczny dla różnych rozkładów sił powierzchniowych. Przy wyborze najodpowiedniejszego rozkładu należy brać pod uwagę względy prostej dalszego rozwiązywania równań np. równomiernie rozłożone ciśnienie $P^*(x_\alpha) = \text{const}$. Jednocześnie rozkład ciśnień powinien być taki aby odpowiadający mu mechanizm quasi-statycznego płynięcia jaknajlepiej przybliżał spodziewane pole prędkości w procesie dynamicznym. W zastosowaniach późniejszych pokazane zostanie, że oba te żądania można ze sobą pogodzić.

Po wprowadzeniu do (4.9) hipotezy II otrzymujemy następujące

niejednorodne równanie różniczkowe cząstkowe typu parabolicznego

$$(4.12) \quad \nabla^4 \dot{W} + a \dot{W} + b p^4 = 0,$$

gdzie operator Laplace'a $\nabla^4 \dot{W} = \dot{W},_{\alpha\alpha\rho\rho}$, natomiast parametry a i b wynoszą $a = 3\gamma^4/8k^3k$, $b = 3\gamma/8k^3k$. Postać równania (4.12) jest formalnie taka sama jak w przypadku wymuszonych drgań cienkich płyt sprężystych z tą różnicą, że zamiast wyrazu $\nabla^4 W$ występuje tutaj $\nabla^4 \dot{W}$. Deformacja ciał lepkoplastycznych związana jest z nieodwracalną dysypacją energii wykluczającą występowanie drgań. Ma to swoje odbicie w równaniu (4.12), gdzie dodatkowa pochodna czasowa w pierwszym wyrazie powoduje, że przebiegi czasowe rozwiązania są typu aperiodycznego $e^{-\lambda t}$. Ujemne wartości prędkości ugięcia są w ramach rozważanego modelu niedopuszczalne, zmienną w czasie granicę między obszarami lepkoplastycznymi i sztywnymi określa się z warunku $\dot{W} = 0$.

Ze względu na czwarty rząd pochodnej względem zmiennych przestrzennych i drugi rząd pochodnej po czasie wymagane są po cztery warunki brzegowe dla każdej zmiennej przestrzennej i dwa warunki początkowe.

W rzeczywistości zachowania się rozwiązania jest podobne do zagadnień przepływu ciepła opisywanych równaniem Fouriera z członami źródeł cieplnych. Na analogię tą zwrócił uwagę Szapiro [91] w jednowymiarowym problemie uderzenia sztywno-lepkoplastycznego pręta.

5. Metoda Rozwiązywania Zagadnień Początkowo-Brzegowych

Jako przykład reprezentatywny w teorii lepkoplastycznych płyt wybieramy zamocowaną na obwodzie płytę kołową obciążoną jednorodnie rozłożonym impulsem ciśnienia I . Uzyskane w tym rozdziale rozwiązanie wyjaśni szereg kwestii, które sprawiały dotychczas największe trudności w dynamice konstrukcji lepkoplastycznych. W szczególności omówiona zos-

tanie zmienia postaci pola prędkości w czasie, propagacja stref sztywnych w płycie, przejście graniczne do materiału idealnie plastycznego oraz podane będzie proste rozwiązanie przybliżone.

Dla wygody rachunkowej wprowadźmy następujące wielkości bezwymiarowe

$$(5.1) \quad W = \frac{W}{R}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{t}{t_f}, \quad t_f = \frac{I}{\rho \sigma},$$

$$\beta = \frac{\rho R^2}{M_0}, \quad \alpha = \frac{\mu R^3}{M_0 t_f}, \quad \bar{I} = \frac{I R^2}{M_0 t_f}, \quad m = \frac{M}{M_0}$$

gdzie R jest zewnętrznym promieniem płyty, $M_0 = \sigma_0 h^2$.
 We współrzędnych walcowych (r, θ, z) równanie opisujące deformacje płyty przyjmuje postać

$$(5.2) \quad \nabla^4 W + \alpha \Delta \ddot{W} + \beta \rho^{\beta}(\rho) = 0,$$

gdzie $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ oznacza operator Laplace'a natomiast parametr α wynosi $\alpha = 3\sqrt{3} \gamma t_f 2R/8h$.

Jak już uprzednio wspomniano, nieciągłości w polu prędkości ugięć i występowanie przegubów plastycznych jest dla lepkoplastycznych płyt niedopuszczalne. Na zamocowanym brzegu przyjmując zatem trzeba $W = W' = 0$ i podobnie w ośrodku płyty $W = 0$. Ze względu na symetrię w środku płyty zachodzi $m_r = m_\theta$.

Również w pomocniczym problemie quasi-statycznym $m_r = m_\theta$ czy li podobna równość zachodzi dla różnic $m_r - m_r^* = m_\theta - m_\theta^*$. Wykorzystując prawo płynięcia warunek ten można wyrazić bezpośrednio przez prędkości ugięcia. Otrzymujemy ostatecznie

$$(5.3) \quad \dot{W}'' - \frac{\dot{W}'}{\rho} = 0, \quad \dot{W}' = 0 \quad \text{dla } \rho = 0$$

$$\dot{W}' = 0, \quad \dot{W} = 0 \quad \text{dla } \rho = 1.$$

Przyjmując obciążenie płyty idealnym impulsem i zakładając, że płyta w chwili początkowej jest płaska, warunki początkowe można napisać w postaci

$$(5.4) \quad W(\rho, 0) = 0, \quad \dot{W}(\rho, 0) = \begin{cases} \frac{\bar{I}}{\alpha} & \text{dla } 0 \leq \rho < 1 \\ 0 & \text{dla } \rho = 1. \end{cases}$$

Równanie (5.2) łącznie z warunkami (5.3) i (5.4) stanowią prawidłowo sformułowany problem początkowo-brzegowy.

Jako rozkład obciążeń zewnętrznych uplastyczniających płytę przyjmujemy równomiernie rozłożone ciśnienie. Z teorii nośności granicznej wiadomo, że w przypadku warunku plastyczności Hubera-Misesa obciążenie graniczne dla zamocowanej płyty wynosi $p^* = 12.5$.

Wygodną metodą rozwiązania równania (5.2) jest metoda funkcji i wartości własnych prowadząca do reprezentacji szeregowego rozwiązania. Metoda ta pozwala otrzymać proste rozwiązania przybliżone przez uwzględnienie kilku pierwszych wyrazów szeregu.

Omiijając szczegóły rachunkowe podane jest poniżej wyrażenie na $W(\rho, \tau)$ spełniające równanie (5.2), warunki brzegowe (5.3) i warunki początkowe (5.4)

$$(5.5) \quad W(\rho, \tau) = \frac{I^2 R}{p^* \mu M_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1}{\lambda_n^2 I_0 J_0^2} \Psi_n(\rho, \lambda_n) \left[(1 - e^{-\frac{\lambda_n \tau}{I}}) \left(1 + \frac{\tau}{\lambda_n^2} \right) - \tau \right] \eta,$$

gdzie funkcje własne $\Psi_n(\lambda_n, \rho)$ oznaczają

$$(5.6) \quad \Psi_n(\lambda_n, \rho) = I_0(\lambda_n) J_0(\lambda_n \rho) - J_0(\lambda_n) I_0(\lambda_n \rho).$$

Parametr η w rozwiązaniu (5.5) wynosi $\eta = \alpha \beta^* / \bar{I}$, nato - miast J_0 i I_0 są odpowiednio funkcjami Bessela i zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego rodzaju $\nu = 0, 1$. Wartości własne λ_n są pierwiastkami równania przestępnego

$$(5.7) \quad I_0(\lambda_n) J_1(\lambda_n) + J_0(\lambda_n) I_1(\lambda_n) = 0.$$

Wartości pierwszych paru λ_n wynoszą :

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
3.19619	6.30635	9.43955	12.5777	15.7165
λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	
18.8565	21.9972	25.1380	28.2790	

Dowód zbieżności szeregu (5.5) uzyskać można łatwo przez oszacowanie współczynników rozkładu, podobnie jak w pracy [66]. Szybkość zbieżności zależy jednak od wartości bezwymiarowego czasu τ oraz parametru η . Dla małych czasów lub też dużych współczynników η szereg ten jest wolno zbieżny. W przypadku granicznym $\eta \rightarrow \infty$ nie można udowodnić zbieżności rozwiązania (5.5). Odpowiada to przejściu ze stałą lepkości do nieskończoności $\gamma \rightarrow \infty$. Okazuje się zatem, że w ogólnym przypadku nie ma przejścia z rozwiązania dla płyty lepkoplastycznej do odpowiedniego rozwiązania dla płyty idealnie plastycznej. Wytlumaczenie tego faktu podane zostało w rozdziale 3. Trajektorie momentów wynikających z rozwiązania (5.5) nie pokrywa się z proporcjonalną drogą obciążenia i w przejściu granicznym $\gamma \rightarrow \infty$ otrzymuje się nieoznaczoność kierunku wektora prędkości odkształcenia na statycznej powierzchni plastyczności.

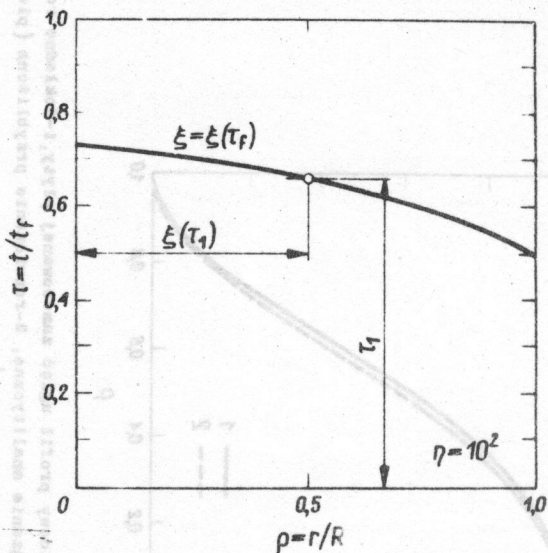
Dla skończonych wartości czasu oraz parametru η szybka zbieżność szeregu (5.5) jest widoczna ze względu na występowanie pod sumą w mianowniku wyrazu λ_n^5 . Dokonując sumowania szeregu dla różnych chwil czasu prześledzić można zmianę postaci pola prędkości (mode transition) od początkowego prostokątnego rozkładu prędkości poprzez wygładzanie się profilu prędkości aż do momentu zatrzymania płyty. Równanie (5.2) dopuszcza formalnie występowanie ujemnych wielkości W ale sytuacja taka jest fizycznie niemożliwa bo skoro sztywno-plastyczna konstrukcja zatrzyma się, w stanie tym będzie już pozostawać aż do wystąpienia następnych zaburzeń zewnętrznych

Ponieważ kolejne funkcje własne $\Psi_n(\lambda_n, \rho)$ osiągają maksima dla różnych czasów $\tau_f^{(n)}$, płyta nie zatrzyma się we wszystkich swoich punktach jednocześnie. Na płaszczyźnie fazowej (ρ, τ) rozróżnić można krzywą $\xi = \xi(\tau_f)$, która rozdziela obszar lepkoplastycznego płynięcia od obszaru sztywnego. Granicę tą określa następujące równanie

$$(5.8) \quad \frac{d}{dt} W(\rho, \tau) \Big|_{\tau = \tau_f} = 0.$$

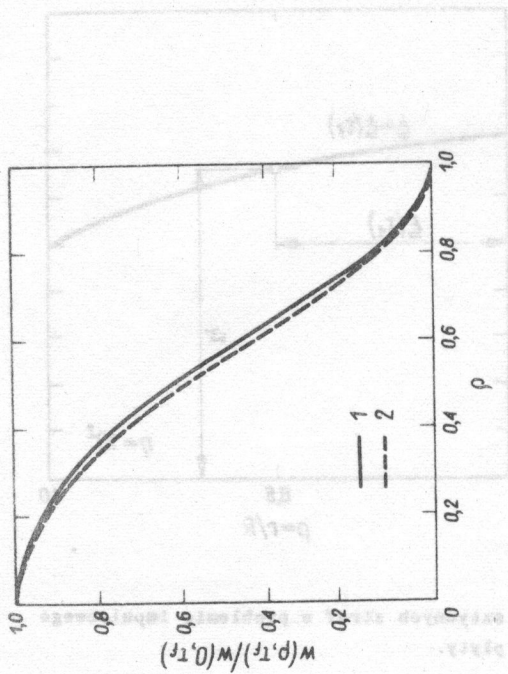
Krzywą $\xi = \xi(\tau_f)$, znaleziona na drodze numerycznej dla wartości parametru $\eta = 100$, pokazana jest na Rys. 11a. Strefa sztywna propaguje się począwszy od zamocowanego brzegu dla $\tau = 0.5$ i osiąga środek płyty w czasie $\tau = 0.73$. Dla czasów pośrednich $0.5 < \tau < 0.73$ deformuje się wewnętrzny obszar kołowy $0 < \rho < \xi$, podczas gdy zewnętrzny obszar pierścieniowy $\xi < \rho < 1$ jest sztywny. Podobne zjawisko propagacji stref sztywnych w lepkoplastycznym pręcie uderzającym w sztywną tarczę opisane zostało przez Symondsa i Tinga [93] oraz Martina i Lee [42].

Znając moment zatrzymania się każdego punktu płyty obliczyć można z (5.5) końcowe ugięcia. Profil trwałych ugięć dla $\eta = 100$, obliczony przy uwzględnieniu 10 wyrazów szeregu, przedstawiony jest na Rys. 11b (linia ciągła). Linia kreskową na tym samym rysunku zaznaczone jest rozwiązanie uwzględniające tylko jeden wyraz szeregu (5.5). Różnica obu rozwiązań jest bardzo mała, co świadczy z jednej strony o bardzo szybkiej zbieżności szeregu dla rozpatrywanej wartości parametru η , z drugiej strony natomiast wskazuje na pewną ogólną własność rozwiązania. Ugięcie płyty w każdym momencie jest superpozycją funkcji własnych $\Psi_n(\lambda_n, \rho)$ ze zmiennymi w czasie współczynnikami. Posługując się terminologią sprężystych drgań płyt, poszczególne funkcje własne odpowiadają kolejnym postaciom "drgań". Uzyskane dane liczbowe świadczą o tym, że pierwsza funkcja własna (pierwsza postać pola deformacji) jest dominująca w procesie i rozwiązanie dla dużych



Rys.II.a

Propagacja sztywnych stref w problemie impulsowego obciążenia płyty.



Rys II. b Końcowy profil ugięć zamocowanej płyty, 1-dokładne rozwiązanie analityczne, 2-rozwiazanie przybliżone (pierwszy wyraz szeregu).

czasów dąży do tej postaci. Powyższa własność jest odpowiednikiem tzw. "mode approximation" rozpatrywanym dla ciał idealnie plastycznych przez Martina i Symondsa [53]. Upoważnia to do podania prostego rozwiązania przybliżonego z jednym stopniem swobody.

Moment zerowania się pierwszej wartości własnej

$\dot{W}(\zeta, \tau_f^{(1)}) = 0$, obliczony z (5.8) wynosi

$$(5.9) \quad \tau_f^{(1)} = \frac{\eta}{\lambda_1} \ln \left(1 + \frac{\lambda_1^4}{\eta} \right).$$

Podstawiając $\tau_f^{(1)}$ do pierwszego wyrazu szeregu (5.5) i wykorzystując własności ortogonalności funkcji $\psi_n(\lambda_n, \rho)$ otrzymuje się

$$(5.10) \quad W(\rho, \tau_f) = \frac{I^2 R}{\rho^* \mu M_0} \frac{\lambda_1^4}{64} (1 - \rho^2)^2 \left[\zeta - \zeta^2 \ln \left(1 + \frac{\zeta}{3} \right) \right],$$

gdzie $\zeta = \eta/\lambda_1^4$. W szczególności ugięcie środka płyty δ uzyskuje się z (5.10) kładąc $\rho = 0$, $\lambda_1 = 3,196$ i $\rho^* = 12,5$.

$$(5.11) \quad \frac{\delta}{R} = 0,54 \frac{I^2 R}{8 \mu M_0} \left[2\zeta - 2\zeta^2 \ln \left(1 + \frac{\zeta}{3} \right) \right].$$

Rozwiązanie przybliżone (5.10) jest rozwiązaniem z rozdzielonymi zmiennymi. Dla ustalonego promienia ρ trajektoria momentów leży na proporcjonalnej drodze obciążenia. Rozwiązania (5.10) i (5.11) powinny posiadać przejścia graniczne do odpowiednich rozwiązań dla płyt idealnie plastycznych. Rzeczywiście, kładąc $\eta \rightarrow \infty$, co pociąga za sobą $\zeta \rightarrow \infty$, w granicy zarówno τ_f jak i wyrażenie w nawiasie klamrowym w (6.17) dążą do jedności i w wielkościach fizycznych ugięcie środka płyty i czas trwania procesu wynoszą

$$(5.12) \quad \delta = 0,54 \frac{I^2 R^2}{8 \mu M_0}, \quad \tau_f = \frac{I}{\rho^*}.$$

Rozwiązanie to pokrywa się z wcześniejszym wynikiem Wanga i Hopkinsa [97] dla płyty z materiału sztywno-idealnie plastycznego przy warunku plastyczności Treski z tą różnicą, że w tym ostatnim współczynnik liczbowy wynosił 0,56.

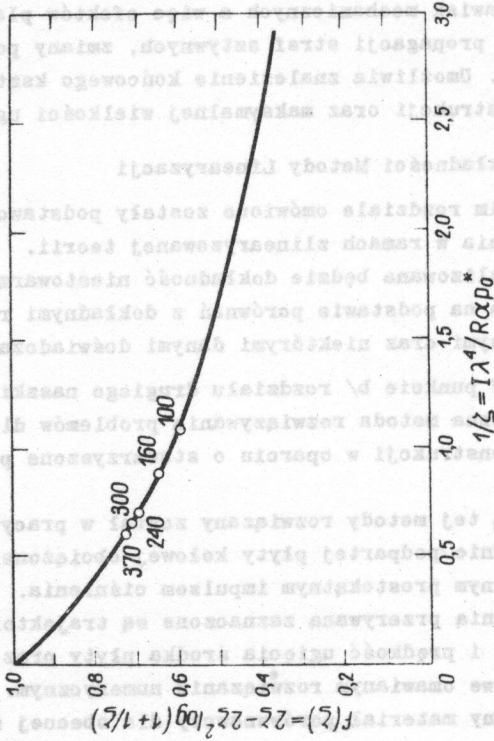
Odwrotnie, jeśli $\gamma \rightarrow 0$ (stąd $\zeta \rightarrow 0$), co odpowiada materiałowi idealnie sztywnemu, ugięcie wyliczone z (5.11), wynosi zero.

Zmiana współczynnika $[2\zeta - 2\zeta^2 \ln(1 + \frac{1}{\zeta})]$ w funkcji $\frac{1}{\zeta}$ przedstawiona jest na Rys.12 linią ciągłą. Wykres ten wskazuje na wzrost wytrzymałości płyty przy zmniejszaniu się stałej lepkości materiału.

Na Rys.3 podany został przebieg zmienności ugięcia środka płyty w czasie. Wynik ten otrzymano sumując pierwsze 10 wyrazów szeregu. Ponieważ w rozwiązaniu (5.5) występuje bezwymiarowy czas τ należało, zgodnie z definicją (5.1) zmodyfikować skalę czasu $t = t_f \tau$, gdzie parametr $t_f = IR_p^2 / M_0$ po podstawieniu danych doświadczalnych Witmera, Clarka i Balmera wynosi $t_f = 150$ milisek. Czas osiągnięcia przez płytę lepkoplastyczną maksymalnych ugięć jest 105 milisek. Aperiodyczny charakter obecnego rozwiązania jest widoczny. Jeśli chodzi o skalę rzędnych na Rys.3, to omawiane rozwiązanie zostało znormalizowane tak aby wielkość trwałych deformacji odpowiadała ściślemu rozwiązaniu Witmera.

Dla ustalonego impulsu zawsze można dobrać stałą lepkości materiału i uzyskać pełną korelację teorii i doświadczenia. Bardziej miarodajne porównania przeprowadzać należy dla różnych wartości impulsu, zagadnienie to przedyskutowane będzie w następnym rozdziale.

Analizując dokładnie rozwiązanie ściśle (5.5) lub przybliżone (5.11) wyciągnąć można szereg dalszych ważnych wniosków. Na przykład przed sumą w (5.5) wydzielone zostały parametry wpływające jedynie na wielkość ugięcia środka płyt, natomiast parametr η wpływa zarówno na bezwzględną wartość ugięć jak i kształt końcowych deformacji. Choć równanie (4.12) uwzględnia jedynie najprostrzą liniową lepkość, to



rys. 12 Zmniejszenie ugięć środka płyty spowodowane lepkością materiału.

rozwiązanie problemu przegięcia identyfikuje we własności sposobu podstawowe wyznaczenie i geometryczne parametry kon- strukcji oraz warunki początkowe. Łatwiej zrealizować jest taki przypadek i powłok jest tej prostej ponieważ problem przegięcia wyrażony jest do jedynego liniowego równania różniczkowego czwartego. Metody całkowania tego równania są dobrze zna- ne i opisywane w literaturze.

Mimo swych prostoty równania (4.12) pozwala na opis całej go podstawy (zwykłe wyrażenie) oraz zmienny początek płyty, lepkości, przegięcia i kształtu końcowego kształtu płyty przegięcia. Umocniła kształtowanie końcowego kształtu płyty (formowanie) i kształtu oraz maksymalnej wielkości ugięć.

W tym celu należy omówić kształt początkowy wyrażenia (4.12) w postaci różniczkowej. W tym celu należy omówić kształt początkowy wyrażenia (4.12) w postaci różniczkowej. W tym celu należy omówić kształt początkowy wyrażenia (4.12) w postaci różniczkowej.

W tym celu należy omówić kształt początkowy wyrażenia (4.12) w postaci różniczkowej. W tym celu należy omówić kształt początkowy wyrażenia (4.12) w postaci różniczkowej. W tym celu należy omówić kształt początkowy wyrażenia (4.12) w postaci różniczkowej.

W tym celu należy omówić kształt początkowy wyrażenia (4.12) w postaci różniczkowej. W tym celu należy omówić kształt początkowy wyrażenia (4.12) w postaci różniczkowej. W tym celu należy omówić kształt początkowy wyrażenia (4.12) w postaci różniczkowej.

$$f'' + \alpha f = 0 \quad (4.1)$$

$$f(0) = 0 \quad (4.2)$$

rozwiązanie problemu brzegowego identyfikuje we właściwy sposób podstawowe mechaniczne i geometryczne parametry konstrukcji oraz warunki początkowe. Zaletą zlinearyzowanej teorii płyt i powłok jest jej prostota ponieważ problem sprowadzony został do jednego liniowego równania różniczkowego cząstkowego. Metody całkowania tego równania są dobrze znane i opracowane w literaturze.

Mimo swej prostoty równanie (4.12) pozwala na opis całego bogactwa zjawisk mechanicznych a więc efektów plastycznych, lepkich, propagacji stref sztywnych, zmiany postaci pola prędkości. Umożliwia znalezienie końcowego kształtu zdeformowanej konstrukcji oraz maksymalnej wielkości ugięć.

6. Dyskusja Dokładności Metody Linearyzacji

W poprzednim rozdziale omówione zostały podstawowe własności rozwiązania w ramach zlinearyzowanej teorii.

Obecnie przeanalizowana będzie dokładność niestowarzyszonego prawa płynięcia na podstawie porównań z dokładnymi rozwiązaniami numerycznymi oraz niektórymi danymi doświadczalnymi.

Płyta kołowa. W punkcie b/ rozdziału drugiego naszkicowana została numeryczna metoda rozwiązywania problemów dla lepko plastycznych konstrukcji w oparciu o stowarzyszone prawo płynięcia.

Jako ilustracją tej metody rozwiązany został w pracy [99] przykład swobodnie podpartej płyty kołowej obciążonej równomiernie rozłożonym prostokątnym impulsem ciśnienia. Na Rys.13-16 linią przerywaną zaznaczone są trajektorie momentów, ugięcie i prędkość ugięcia środka płyty oraz końcowy profil ugięcia we omawianym rozwiązaniu numerycznym. Wyniki te stanowią cenny materiał porównawczy dla obecnej zlinearyzowanej teorii.

Równanie opisujące ruch płyty posiada postać podobną do (5.2)

$$(6.1) \quad \nabla^4 \dot{w} + \alpha \ddot{w} - a(p - p^*) = 0,$$

gdzie statyczna nośność graniczna dla swobodnie podpartej płyty przy warunku plastyczności Hubera-Misesa wynosi $p^* = 6.51$. Ciśnienie $p(t)$ działające prostopadle do powierzchni zadajemy w postaci prostokątnego impulsu o intensywności 10 i czasie trwania $\tau = 10^{-4}$ sek.

$$(6.2) \quad p(t) = \begin{cases} 10 & \text{dla } 0 \leq t \leq 10^{-4} \\ 0 & \text{dla } t > 10^{-4} \end{cases}$$

Warunki brzegowe w środku płyty, wynikające z kołowej symetrii, są takie same jak dla płyty zamocowanej. Natomiast warunek zerowania się momentu promieniowego na podpartym obwodzie płyty można łatwo przetransformować za pomocą prawa płynięcia na odpowiedni warunek w prędkościach. Pełny zestaw warunków brzegowych ma postać

$$(6.3) \quad \lim (\dot{w}'' - \frac{1}{\rho} \dot{w}') = 0, \quad \lim \dot{w}' = 0 \quad \text{dla } \rho = 0 \\ 2\dot{w}'' + \dot{w}' = 0 \quad \dot{w} = 0 \quad \text{dla } \rho = 1.$$

Jako warunki początkowe przyjmujemy, że płyta jest płaska i prędkości wszystkich punktów wynoszą zero

$$(6.4) \quad w(\rho, 0) = 0, \quad \dot{w}(\rho, 0) = 0.$$

Ruch płyty odbywać się będzie w dwóch fazach. W pierwszej każda cząstka jest przyspieszana na skutek działania ciśnienia. W drugiej fazie, po zdjęciu obciążenia płyta porusza się w dalszym ciągu ale prędkość maleje w miarę jak energia kinetyczna ulega zamianie na pracę plastyczną.

Podobnie jak w przypadku płyty zamocowanej wygodnie jest zastosować szeregową reprezentację rozwiązania problemu (6.1) (6.3) i (6.4). W pierwszej fazie ruchu otrzymuje się następujące wyrażenie na $w^I(\rho, t)$

$$(6.5) \quad w^I(\rho, t) = \frac{p-p^*}{256} \left\{ (6\rho^4 - 28\rho^2 + 22)t - \right. \\ \left. - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda_n) \Psi_n(\lambda_n, \rho) [1 - e^{-\frac{\lambda_n^2}{\alpha} t}] \right\},$$

gdzie współczynniki rozkładu $A_n(\lambda_n)$ wynoszą

$$(6.6) \quad A_n(\lambda_n) = \frac{256 (I_0 J_1 - J_0 I_0)}{\lambda_n^2 J_0 I_0 [(I_0 J_1 - J_0 I_0) \lambda_n] - J_0 I_0}$$

natomiast funkcje własne $\Psi_n(\lambda_n, \rho)$ dane są przez

$$(6.7) \quad \Psi_n(\lambda_n, \rho) = I_0(\lambda_n) J_0(\lambda_n, \rho) - J_0(\lambda_n) I_0(\lambda_n, \rho).$$

Wartości własne λ_n są pierwiastkami przestępnego równania algebraicznego

$$(6.8) \quad \Psi_n(\lambda_n, \rho) = I_0(\lambda_n) J_0(\lambda_n) + J_0(\lambda_n) I_1(\lambda_n) - 4\lambda_n J_0(\lambda_n) I_0(\lambda_n)$$

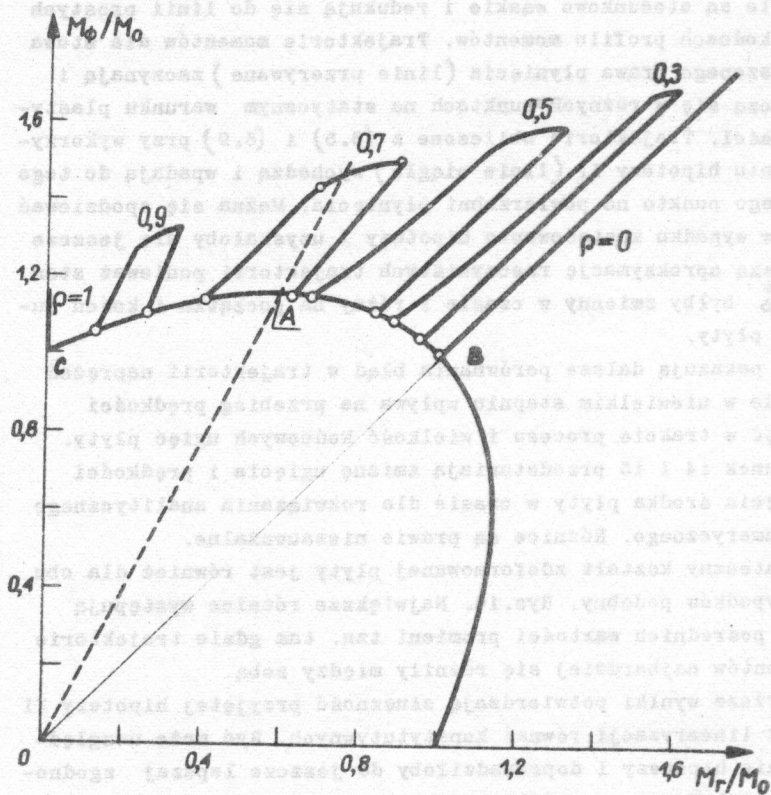
i wynoszą $\lambda_1 = 2.21$, $\lambda_2 = 5.51$, $\lambda_3 = 8.60 \dots$. Pierwszy wyraz w rozwinięciu (6.5) jest ustalonym rozwiązaniem quasi-statycznym, natomiast drugi wyraz szereg reprezentuje wpływ sił bezwładności. Ze względu na występowanie w mianowniku wyrażenia $A_n(\lambda_n)$ członu λ_n^2 , szereg (6.5) jest bardzo szybko zbieżny. Np dla $\alpha = 10$, pierwszy wyraz szeregu daje dokładność 1%, dodatkowo uwzględniając drugi człon dokładność rozwiązania wzrasta do 0.001%.

Rozwiązanie w drugiej fazie ruchu znaleźć można z (6.1), oraz warunku ciągłości prędkości i przemieszczenia dla $t = \tau$. Otrzymuje się

$$(6.9) \quad W^{\bar{z}}(\rho, t) = \frac{p\tau - p^*t}{256} (6\rho^4 - 28\rho^2 + 22) + -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda_n) \Psi_n(\lambda_n, \rho) \left[\frac{p}{256} e^{-\frac{\lambda_n^2}{\alpha}(t-\tau)} - \frac{p-p^*}{256} e^{-\frac{\lambda_n^2}{\alpha}t} - \frac{p}{256} \right].$$

Wzory (6.5) oraz (6.9) wykorzystane zostały w celu obliczenia trajektorii momentów, zmiany ugięcia i prędkości ugięcia środka płyty w czasie i profilu końcowych ugięć. Wyniki te przedstawione zostały na Rys.13-16 liniami ciągłymi.

Dla swobodnie podpartej płyty profil naprężenia zawiera się



Rys.13. Trajektorie momentów dla swobodnie podpartej lepkoelastycznej płyty pod działaniem prostokątnego impulsu ciśnienia. Wyniki obliczeń numerycznych dla modelu sztywno-lepkoelastycznego i stowarzyszonego prawa płynięcia.

zawsze między prostymi $m_r = 0$ oraz dwusieczną $m_r = m_0$. Przedstawione na Rys.13 "pętle" są trajektoriami uogólnionych naprężeń dla różnych wartości promienia ρ . Widać, że pętle są stosunkowo wąskie i redukują się do linii prostych na końcach profilu momentów. Trajektorie momentów dla stowarzyszonego prawa płynięcia (linie przerywane) zaczynają i kończą się w różnych punktach na statycznym warunku plastyczności. Trajektorie obliczone z (6.5) i (6.9) przy wykorzystaniu hipotezy II (linie ciągłe) wychodzą i wpadają do tego samego punktu na powierzchni płynięcia. Można się spodziewać że w wypadku zastosowania hipotezy I uzyskałoby się jeszcze lepszą aproksymację rzeczywistych trajektorii ponieważ stan $\sigma_{\text{pł}}^*$ byłby zmienny w czasie i różny na początku i końcu ruchu płyty.

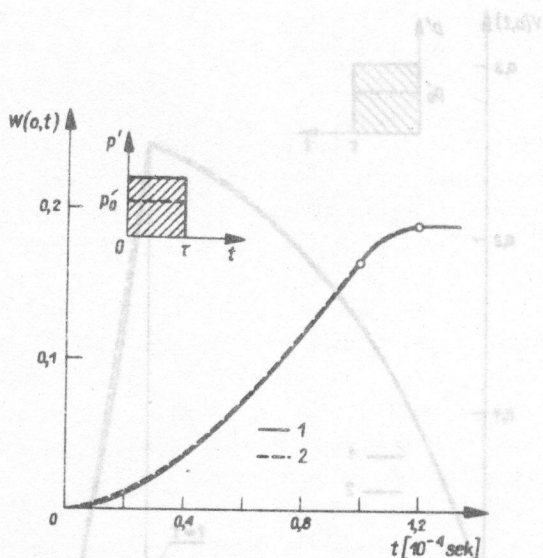
Jak pokazują dalsze porównania błęd w trajektorii naprężeń tylko w niewielkim stopniu wpływa na przebieg prędkości ugięć w trakcie procesu i wielkość końcowych ugięć płyty. Rysunek 14 i 15 przedstawiają zmianę ugięcia i prędkości ugięcia środka płyty w czasie dla rozwiązania analitycznego i numerycznego. Różnice są prawie niezauważalne.

Ostateczny kształt zdeformowanej płyty jest również dla obu przypadków podobny, Rys.16. Największe różnice występują dla pośrednich wartości promieni tzn. tam gdzie trajektorie momentów najbardziej się różniły między sobą.

Powyższe wyniki potwierdzają słuszność przyjętej hipotezy II przy linearyzacji równań konstytutywnych. Być może uwzględnienie hipotezy I doprowadziłoby do jeszcze lepszej zgodności, zwłaszcza w profilu końcowych ugięć.

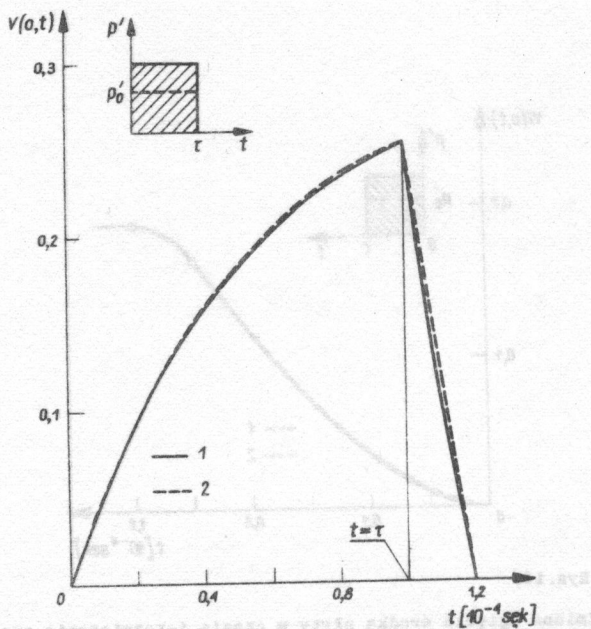
W prowadzenie zmiennego w czasie członu wymuszającego do równań (6.1) utrudniłoby poszukiwanie efektywnych rozwiązań. Wydaje się, że uzyskane korzyści nie rekompensują powstałych dodatkowych trudności, zagadnienie to nie zostało jednak bliżej zbadane.

Ze względu na brak innych rozwiązań numerycznych dla stowarzyszonego prawa płynięcia w dalszej dyskusji dokładności



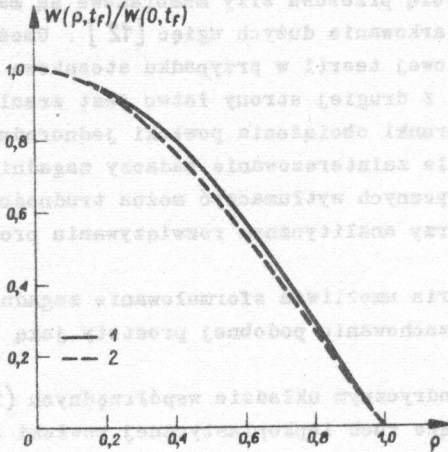
Rys. 14.

Zmiana ugięcia środka płyty w czasie, 1-rozwiązanie analityczne dla niestowarzyszonego prawa płynięcia, 2-rozwiązanie numeryczne dla stowarzyszonego prawa płynięcia.



Rys. 15.

Prędkość ugięcia środka płyty w funkcji czasu, 1-rozwiązanie analityczne dla niestowarzyszonego prawa płynięcia, 2-rozwiązanie numeryczne dla stowarzyszonego prawa płynięcia.



Rys. 16.

Profil trwałych ugięć płyty, 1-rozwiazanie analityczne dla niestowarzyszonego prawa płynięcia, 2-rozwiazanie numeryczne dla stowarzyszonego prawa płynięcia.

obecnej metody posłużono się rezultatami eksperymentów.

Powłoka cylindryczna. W stosunku do zagadnień płyt, dynamiczna analiza powłok cylindrycznych charakteryzuje się szeregami ułatwień zarówno jeśli chodzi o podejście teoretyczne jak i doświadczalne. W przypadku podparcia powłoki na obwód z możliwością przesuwu siły membranowe są małe nawet w zakresie umiarkowane dużych ugięć [12]. Umożliwia to stosowanie liniowej teorii w przypadku stosunkowo silnych impulsów ciśnienia. Z drugiej strony łatwo jest zrealizować doświadczalnie warunki obciążenia powłoki jednorodnym impulsem. Stosunkowo małe zainteresowanie badaczy zagadnieniami powłok lepkoplastycznych wytłumaczyć można trudnościami jakie napotyka się przy analitycznym rozwiązywaniu problemów brzegowych.

Obecna teoria umożliwia sformułowanie zagadnień dynamiki powłok przy zachowaniu podobnej prostoty jaką uzyskano w teorii płyt.

W cylindrycznym układzie współrzędnych (r, x, θ) równanie opisujące ruch lepkoplastycznej powłoki cylindrycznej ma postać

$$(6.10) \quad \frac{16c^4}{9} \dot{w}^{iv} + \dot{w} + ap'' + a\alpha \ddot{w} = 0,$$

gdzie bezwymiarowe wielkości i parametry zdefiniowane są jako

$$(6.11) \quad \dot{w} = \frac{W}{R}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad c^2 = \frac{2L^2}{Rh}$$

$$\alpha = \frac{\mu R^2}{N_0}, \quad \rho = \frac{\rho R}{N_0}, \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma.$$

Rozwiązanie równania (6.10), spełniające warunki brzegowe swobodnego podparcia oraz warunki początkowe dla obciążenia idealnym impulsem podane zostało pracy doktorskiej Pabianek [66].

$$(6.12) \quad W(x,t) = \frac{2I^2}{\pi p^* \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \beta_n \left[(1+\beta_n) \left(1 - e^{-\frac{t}{\beta_n}} \right) - \tau \right] \sin \frac{n\pi}{2} x,$$

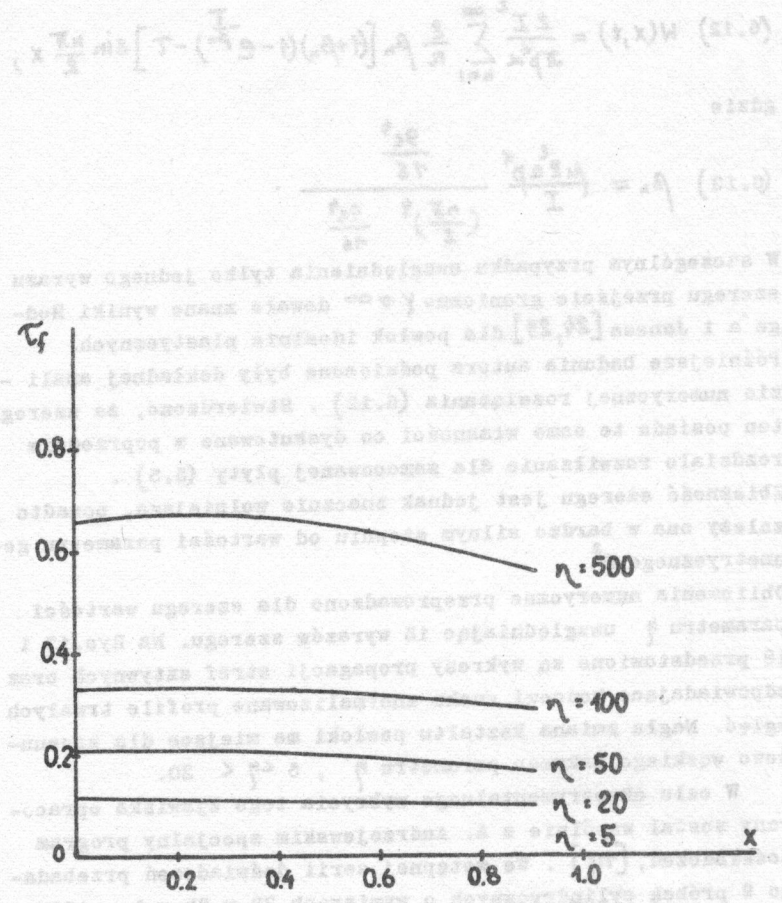
gdzie

$$(6.13) \quad \beta_n = \frac{\mu R^2 \alpha p^*}{I} \frac{\frac{9c^4}{16}}{\left(\frac{n\pi}{2} \right)^4 \frac{9c^4}{16}}.$$

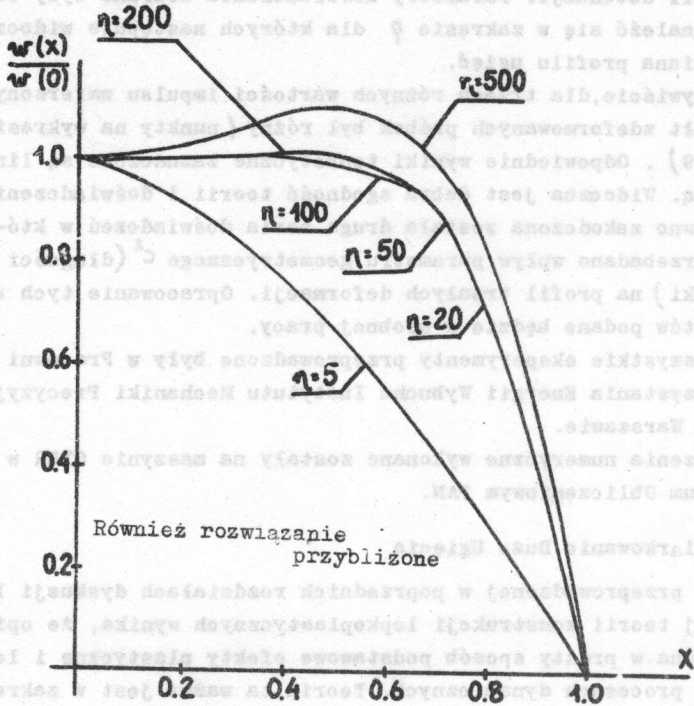
W szczególnym przypadku uwzględnienia tylko jednego wyrazu szeregu przejście graniczne $\gamma \rightarrow \infty$ dawało znane wyniki Hodge'a i Jonesa [24, 29] dla powłok idealnie plastycznych. Późniejsze badania autora poświęcone były dokładnej analizie numerycznej rozwiązania (6.12). Stwierdzono, że szereg ten posiada te same własności co dyskutowane w poprzednim rozdziale rozwiązanie dla zamocowanej płyty (5.5). Zbieżność szeregu jest jednak znacznie wolniejsza, ponadto zależy ona w bardzo silnym stopniu od wartości parametru geometrycznego C^2 .

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla szeregu wartości parametru η uwzględniając 15 wyrazów szeregu. Na Rys. 17 i 18 przedstawione są wykresy propagacji stref sztywnych oraz odpowiadające końcowi ruchu znormalizowane profile trwałych ugięć. Nagła zmiana kształtu powłoki ma miejsce dla stosunkowo wąskiego zakresu parametru η , $5 < \eta < 20$.

W celu eksperymentalnego wykrycia tego zjawiska opracowany został wspólnie z A. Andrzejewskim specjalny program doświadczeń, [111]. We wstępnej serii doświadczeń przebadano 9 próbek cylindrycznych o wymiarach $2R \times 2h \times L = 130 \times 3 \times 60$ mm. Deformacja plastyczna wywołana była przez eksplozję ładunku wybuchowego równomiernie rozłożonego wzdłuż osi cylindra. Fala obciążenia przenosiła się na powłokę za pośrednictwem wody. Zwiększanie energii dostarczanej do powłoki uzyskiwano przez zmianę grubości detonowanego lontu. W doświadczeniu dokonano dokładnych pomiarów trwałych deformacji powłok jednakże wartość impulsu przekazanego próbce



Rys. 17 Propagacja stref sztywnych w końcowej fazie ruchu powłoki.



Rys. 18. Teoretyczne profile ugięć obliczone dla różnych wartości parametrów.

była tylko oszacowana na podstawie znajomości całkowitej energii detonacji. Parametry doświadczenia dobrane były tak aby znaleźć się w zakresie η dla których następuje widoczna zmiana profilu ugięć.

Rzeczywiście, dla trzech różnych wartości impulsu zmierzony kształt zdeformowanych próbek był różny (punkty na wykresie Rys.19). Odpowiednie wyniki teoretyczne zaznaczone są linią ciągłą. Widoczna jest dobra zgodność teorii i doświadczenia. Niedawno zakończona została druga seria doświadczeń w której przebadano wpływ parametru geometrycznego c^2 (długości powłoki) na profil trwałych deformacji. Opracowanie tych rezultatów podane będzie w osobnej pracy.

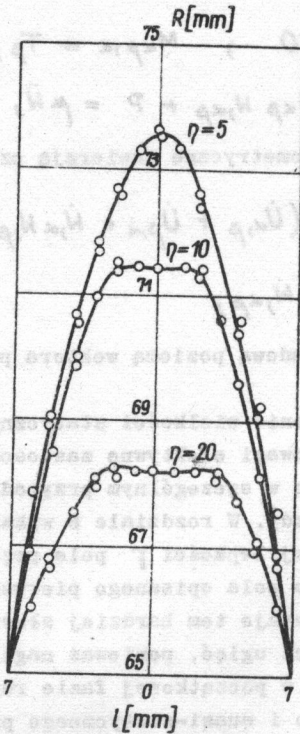
Wszystkie eksperymenty przeprowadzone były w Pracowni Wykorzystania Energii Wybuchu Instytutu Mechaniki Precyzyjnej w Warszawie.

Obliczenia numeryczne wykonane zostały na maszynie GIER w Centrum Obliczeniowym PAN.

7. Umiarkowanie Duże Ugięcia

Z przeprowadzonej w poprzednich rozdziałach dyskusji liniowej teorii konstrukcji lepkoplastycznych wynika, że opisuje ona w prosty sposób podstawowe efekty plastyczne i lepkie w procesach dynamicznych. Teoria ta ważna jest w zakresie małych ugięć co ogranicza w pewnym stopniu jej przydatność w zastosowaniach praktycznych. Znaczenie jej polega również na tym, że wyjaśniając rolę lepkości materiału w konstrukcjach lepkoplastycznych stwarza punkt wyjścia do badań nad efektami zmian geometrii w tych konstrukcjach.

Analiza skończonych ugięć powłok wymaga zasadniczej modyfikacji związków geometrycznych i równań równowagi a dla płyt stwarza konieczność rozpatrywania stanu giętno-membranowego. Zgodnie z dyskusją przeprowadzoną w rozdziałach 1 i 2 przyjmuje się słuszność definicji ogólnionych sił i momentów (4.1) oraz prawa płynięcia (4.3) również w zakresie umiarkowania dużych ugięć.



Rys. I9

Porównanie obecnej teorii i doświadczeń (Wierszbiński, Andrzejewski) w problemie impulsowego obciążenia powłoki cylindrycznej.

Zastosowanie obecnej teorii do rozwiązywania geometrycznie nieliniowych zagadnień pokazane będzie na przykładzie zagadnień dużych ugięć płyt. W tym przypadku równania równowagi, uwzględniające inercję ruchu poprzecznego przyjmują postać, [85]

$$(7.1) \quad N_{\alpha\beta,\beta} = 0 \quad , \quad M_{\alpha\beta,\alpha} = T_{\beta} ,$$

$$T_{\alpha,\alpha} + N_{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} + P = \mu \ddot{W} ,$$

natomiast związki geometryczne zawierają człony kwadratowe

$$(7.2) \quad \lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{U}_{\alpha,\beta} + \dot{U}_{\beta,\alpha} + \dot{W}_{,\alpha} W_{,\beta} + W_{,\alpha} \dot{W}_{,\beta})$$

$$K_{\alpha\beta} = - \dot{W}_{,\alpha\beta} ,$$

gdzie \dot{U}_{α} oznacza składową poziomą wektora prędkości przemieszczenia.

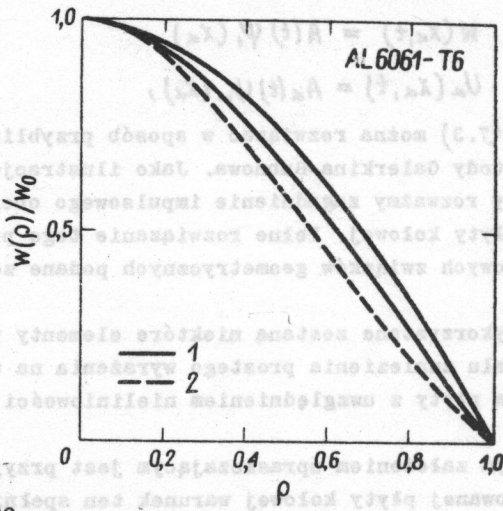
Ze względu na sprzężenie wielkości statycznych i kinematycznych w równaniu równowagi efektywne zastosowanie hipotezy II możliwe jest tylko w szczególnym przypadku rozwiązania z jednym stopniem swobody. W rozdziale 5 wykazano, że dla skończonej wartości stałej lepkości γ pole prędkości w płycie dąży do stacjonarnego pola opisanego pierwszą funkcją własną. Wniosek ten pozostaje tem bardziej słuszny w odniesieniu do umiarkowanie dużych ugięć, ponieważ nagła zmiana pola prędkości ma miejsce w początkowej fazie ruchu płyty. Podobieństwo dynamicznego i quasi-statycznego profilu ugięcia stwierdzone zostało w pracy [110], Rys.20. Linia przerywana jest rozwiązaniem numerycznym Easona [18], linie ciągłe są końcowymi profilami ugięć płyt aluminiowych dla różnych wartości impulsu, zmierzonymi doświadczalnie. Jako uzupełnienie hipotezy wprowadzamy założenie $W_{,\alpha\beta}^* = W_{,\alpha\beta}$, gdzie gwiazdka oznacza rozwiązanie porównawczego problemu quasi-statycznego dla materiału idealnie plastycznego.

Po wyeliminowaniu uogólnionych naprężeń i prędkości odkształ

... (1.3) ... (1.4) ... (1.5) ...

$$U_{11} + 3U_{12} + 3U_{13} + U_{14} + U_{15} + U_{16} + U_{17} + U_{18} + U_{19} + U_{20} = 0$$
$$U_{11} + \frac{1}{2}U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{15} + U_{16} + U_{17} + U_{18} + U_{19} + U_{20} = 0$$

... z wyznaczeniem ...



Rys. 20

Profile trwałych ugięć dla zamocowanej płyty

1-krzywe doświadczalne (Wierzbicki, Florence),

2-rozwiązanie Easona.

... w odniesieniu do ...

ceń ze związków (4.3), (7.1) i (7.2) otrzymujemy następujący układ trzech równań na trzy wielkości \dot{W} i \dot{U}_α

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \dot{U}_{\alpha, \rho \rho} + 3U_{\rho, \alpha \rho} + 3\dot{W}_{\alpha \rho} W_{\rho, \alpha} + 3\dot{W}_{\rho, \alpha} W_{\alpha, \rho} + \dot{W}_{\alpha \alpha} W_{\rho \rho} + W_{\alpha \alpha} \dot{W}_{\rho \rho} &= 0, \\ \dot{W}_{\alpha \alpha \rho \rho} + \frac{1}{2}(\dot{W}_{\alpha \alpha} W_{\rho \rho} + W_{\rho \rho} \dot{W}_{\alpha \alpha}) W_{\alpha \rho} + W_{\alpha \rho} \dot{W}_{\alpha \rho} W_{\rho \rho} + \rho &= \mu \dot{W}. \end{aligned}$$

Wprowadzając zgodnie z założeniem rozdzielnie zmiennych

$$(7.4) \quad \begin{aligned} W(x_\alpha, t) &= A(t) \Psi_\alpha(x_\alpha), \\ U_\alpha(x_\alpha, t) &= A_\alpha(t) \Psi_\alpha(x_\alpha), \end{aligned}$$

równania (7.3) można rozwiązać w sposób przybliżony np. za pomocą metody Galerkina-Bubnowa. Jako ilustrację proponowanej metody rozważmy zagadnienie impulsowego obciążenia zamocowanej płyty kołowej. Pełne rozwiązanie tego problemu w ramach liniowych związków geometrycznych podane zostało w rozdziale 5.

Obecnie wykorzystane zostaną niektóre elementy tego rozwiązania w celu znalezienia prostego wyrażenia na trwałe ugięcie środka płyty z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej.

Dalszym założeniem upraszczającym jest przyjęcie $\dot{U}_\alpha = 0$. Dla zamocowanej płyty kołowej warunek ten spełniony jest dokładnie w środku i na zewnętrznym obwodzie, natomiast dość - wiadcząca wskazują, że również dla pośrednich wartości promienia składowa pozioma wektora przemieszczenia jest bliska zeru [31]. Założenie $\dot{U}_\alpha = 0$ jest dobrym przybliżeniem tylko dla wąskiej klasy zagadnień obejmującej rozważany przypadek. W ogólności \dot{U}_α może być rzędu \dot{W} i wówczas należałoby rozwiązywać pełny układ równań (7.3).

Pomijając człony zawierające \dot{U}_α w równaniu równowagi w kierunku pionowym dochodzimy do ostatecznej postaci równania opisującego w przybliżony sposób ruch płyty w zakresie umiarkowanego dużych ugięć

$$(7.5) \quad L(W) \equiv \nabla^4 \dot{W} + a \alpha \ddot{W} + a P^*(W_0) + \frac{3\beta}{8} \dot{W}' W' W'' = 0.$$

Równanie (7.5) w porównaniu z (5.2) zawiera dodatkowy nieliniowy człon. Warunki brzegowe i początkowe, identyczne jak w przypadku małych ugięć, dane są przez (5.3) i (5.4).

Wyraz $P^*(W_0)$ w równaniu (7.5) reprezentuje ciśnienie uplastyczniające płytę w teorii momentowo-membranowej.

Z teorii nośności granicznej płyt przy umiarkowanie dużych ugięciach wiadomo, że obciążenie graniczne jest dla statecznych konfiguracji rosnącą funkcją parametru procesu. Jako parametr procesu wygodnie jest przyjąć ugięcie środka płyty W_0 , [16].

Zależność $p^* = p^*(W_0)$ dla płyty zamocowanej przy warunku płastyczności Hubera-Misesa nie jest znane w literaturze.

Posłużyć się musimy rozwiązaniem przybliżonym Calledine [8] Rys. 21. Część tego rozwiązania reprezentowana jest w postaci analitycznej przez parabolę

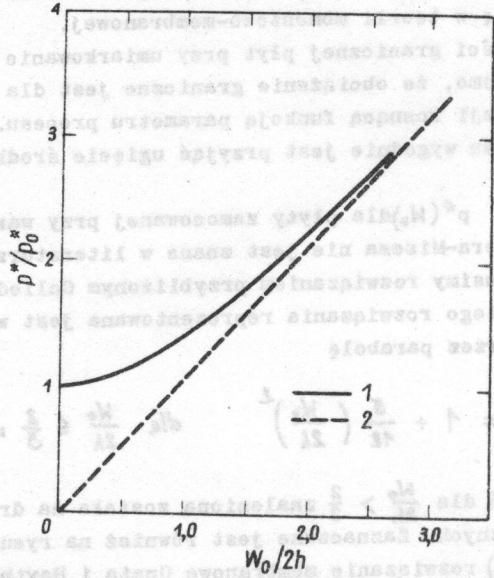
$$(7.6) \quad \frac{p^*}{p_0} = 1 + \frac{5}{12} \left(\frac{W_0}{2h} \right)^2 \quad \text{dla} \quad \frac{W_0}{2h} \leq \frac{2}{3},$$

pozostała część dla $\frac{W_0}{2h} > \frac{2}{3}$ znaleziona została na drodze obliczeń numerycznych. Zaznaczone jest również na rysunku (linia przerywana) rozwiązanie membranowe Onata i Haythornthwaite, [63] otrzymane przy użyciu warunku plastyczności Traski opisanym na elipsie Hubera-Misesa. Rozwiązanie to reprezentowane jest linią prostą

$$(7.7) \quad \frac{p^*}{p_0} = 1.11 \frac{W_0}{2h}.$$

Z rysunku 21 widać, że przy wzroście ugięcia rozwiązanie momentowo-membranowe dąży do rozwiązania membranowego.

We wzorach (7.6) - (7.8) wielkość p_0 oznacza nośność graniczną w teorii momentowej czyli $p_0 = 12.5$.



Rys. 21

Zależność obciążenia od ugięcia dla zamocowanej płyty kołowej, 1-rozwiązanie momentowo-membranowe, 2-rozwiązanie membranowe.

Rozwiązanie z rozdzielonymi zmiennymi nie może spełnić równania (7.5) w każdym punkcie płyty.

Zgodnie z metodą Galerkina można żądać spełnienia tego równania w sensie całkowym

$$(7.8) \quad \int_0^1 L(w) \Psi_1(\varrho) \varrho d\varrho = 0.$$

Przyjmując w (7.8) jako funkcję $\Psi_1(\varrho)$ pierwszą funkcję własną w teorii małych ugięć $\Psi_1(\varrho) = (1-\varrho^2)^2$ i dokonując całkowania (7.8), otrzymuje się następujące nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne opisujące ruch środka płyty

$$(7.9) \quad \ddot{w}_0 + \left(\frac{\lambda}{a\alpha}\right)^4 (1 + S_1 \beta^2 w_0^2) \dot{w}_0 + \frac{10}{6\alpha} p^*(w_0) = 0,$$

gdzie $\lambda = 3.2$ a $S_1 = 1/37,5$. W granicznym przypadku małych ugięć $p^*(w_0)$ jest stałe, wyraz $S_1 \beta^2 w_0^2$ może być pominięty i rozwiązaniem równania (7.9) jest wyrażenie (5.10). Jedyna różnica występuje w wartości własnej, która w dokładnym rozwiązaniu wynosi $\lambda_1 = 3.196$. Powyższe przejście graniczne świadczy z jednej strony o dokładności przybliżonej metody Galerkina (7.8), z drugiej strony pozwala na dokładne sprecyzowanie warunków początkowych. Wyznaczenie stałych całkowania w równaniu (7.9) wymaga znajomości prędkości początkowej środka płyty $\dot{w}_0(0)$; samo ugięcie dla $t = 0$ wynosi zero, $w_0(0) = 0$.

Rozwiązanie przybliżone z jednym stopniem swobody nie spełnia warunków początkowych (5.4) zakładających równomierny rozkład prędkości $\dot{w}(\varrho, 0) = \bar{I}/\alpha$. Energia prostokątnego rozkładu prędkości przekazywana jest do poszczególnych wyrazów szeregu (5.5) w pierwszym stadium ruchu odpowiadającym małym ugięciom. Ponieważ pierwszy wyraz szeregu (5.5) i funkcja Ψ_1 są identyczne, racjonalnym wyborem brakującego warunku początkowego dla równania (7.9) jest przyjęcie rozkładu prędkości $\dot{w}(0,0)$ dla pierwszego wyru(5.5).

Różniczkując po czasie (5.5) i podstawiając $t = 0$ i $\varphi = 0$ otrzymujemy

$$(7.10) \quad \dot{w}_0(0) = \frac{\lambda^4}{64} \frac{\tilde{I}}{\alpha}$$

Wyraz $p^*(w_0)$, zgodnie z rozwiązaniem Cattedina (7.6), wyraża się przez w_0 w formie

$$(7.11) \quad p^*(w_0) = p_0(1 + S_2 \beta^2 w_0^2),$$

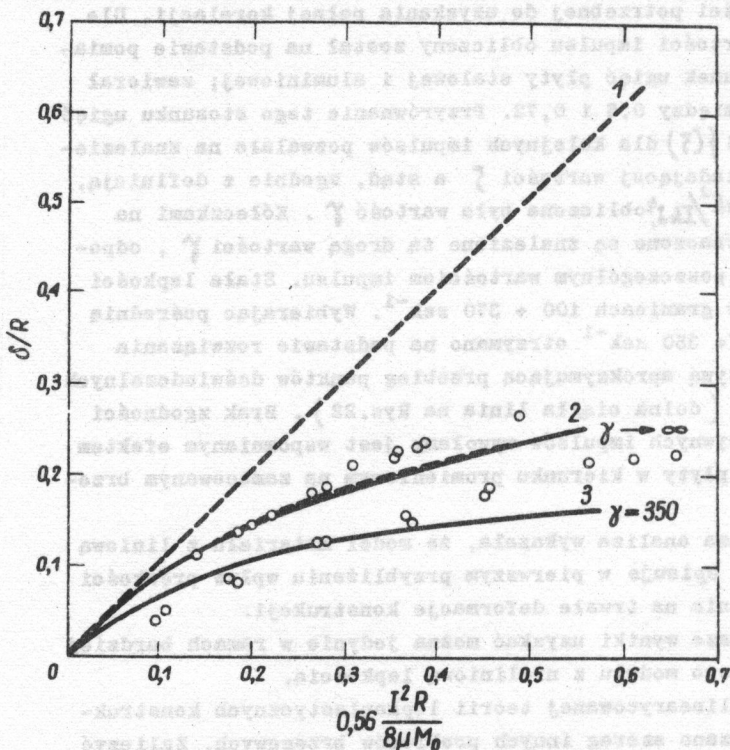
gdzie $S_2 = \frac{1}{38.4}$. Przyjmując $S_1 = S_2 = S$ i dokonując zamiany zmiennych $\dot{w}_0 = \dot{w}_0 \frac{dw_0}{dM_0}$ podać można rozwiązanie równania (7.9) w kwadraturach.

W szczególności podstawiając dla $t = t_f$, $\dot{w}_0 = 0$, $w_0 = \delta$ otrzymujemy

$$(7.12) \quad \frac{\delta}{R} + \frac{S\beta^2}{3} \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 = 0.54 \frac{I^2 R}{g \mu M_0} [2\gamma - 2\gamma^2 \ln(1 + \frac{1}{\gamma})]$$

Zaniedbując wpływ zmian geometrii $S = 0$ otrzymuje się z (7.12) rozwiązanie dla małych ugięć (5.11). Porównując oba rozwiązania widać, że wyraz opisujący wpływ prędkości odkształcenia jest w teorii momentowej i momentowo-membranowej identyczny. Podobnie proste wyrażenia analityczne na trwałe ugięcia płyty otrzymać można w przypadku granicznym $\gamma \rightarrow \infty$ dla funkcji $p^*(w_0)$ danej wzorem (7.7), [110].

Porównanie przewidywań obecnej teorii z wynikami doświadczeń omawianych w rozdziale 2, [110], przedstawione jest na Rys.22. Górna ciągła linia otrzymana została z (7.12) przez przyjęcie $\gamma \rightarrow \infty$. Przebiega ona dość blisko punktów doświadczalnych dla aluminium, ale dla dużych wartości impulsu teoria daje wartości zaniżone. Winę za to ponoszą częściowo realizowane eksperymentalnie warunki brzegowe. Zamocowanie nie pozwalało na obrót umożliwiając jednak płynięcie w kierunku promieniowym podczas gdy w teorii przyjęto upraszczające za-



Rys. 22 Porównanie teorii i doświadczenia w problemie impulsowego obciążenia płyty, 1-teoria momentowa, materiał sztywno-idealnie plastyczny, 2-teoria momentowo-membranowa, materiał sztywno-idealnie plastyczny, 3-teoria momentowo-membranowa, materiał sztywno-lepkoplastyczny.

łożenie $U = 0$.

Wpływ lepkości materiału opisany jest przez funkcję $f(\xi)$

Rys.12. Porównanie rozwiązania (7.12) z punktami doświadczalnymi dla miękkiej stali polegało na znalezieniu wartości stałej lepkości potrzebnej do uzyskania pełnej korelacji. Dla każdej wartości impulsu obliczony został na podstawie pomiarów, stosunek ugięć płyty stalowej i aluminiowej; zawierał się on pomiędzy 0,6 i 0,72. Przyrównanie tego stosunku ugięć do funkcji $f(\xi)$ dla kolejnych impulsów pozwalało na znalezienie odpowiadającej wartości ξ a stąd, zgodnie z definicją, $\xi = 3\sqrt{3} \rho^* \gamma \mu R^2 / I_h^4$, obliczona była wartość γ . Kółeczkami na Rys.12 zaznaczone są znalezione tą drogą wartości γ , odpowiadające poszczególnym wartościom impulsu. Stała lepkości waha się w granicach $100 + 370 \text{ sek}^{-1}$. Wybierając pośrednią wartość $\gamma = 350 \text{ sek}^{-1}$ otrzymano na podstawie rozwiązania (7.12) krzywą aproksymującą przebieg punktów doświadczalnych dla stali, (dolna ciągła linia na Rys.22). Brak zgodności dla intensywnych impulsów wywołany jest wspomnianym efektem płynięcia płyty w kierunku promieniowym na zamocowanym brzegu.

Powyższa analiza wykazała, że model materiału z liniową lepkością opisuje w pierwszym przybliżeniu wpływ prędkości odkształcenia na trwałe deformacje konstrukcji. Dokładniejsze wyniki uzyskać można jedynie w ramach bardziej realitycznego modelu z nieliniową lepkością.

W ramach zlinearyzowanej teorii lepkoplastycznych konstrukcji rozwiązano szereg innych problemów brzegowych. Zaliczyć do nich można impulsowe obciążenie swobodnie podpartej płyty kołowej [101] oraz uderzenie pocisku w płytę [36]. W obydwu przypadkach otrzymano rozwiązanie ścisłe dla małych ugięć i przybliżone rozwiązanie dla umiarkowanie dużych ugięć. Przeprowadzono również porównania z danymi doświadczalnymi. Ponieważ wyniki tych prac nie wnoszą istotnych nowych elementów do obecnej teorii nie zostały w tej pracy szerzej potraktowane.

Wnioski końcowe. Na podstawie analizy uzyskanych rozwiązań i przeprowadzonych porównań można sformułować następujące ogólne wnioski:

1. Liniowe prawo pływnięcia dla lepkoplastycznych konstrukcji stanowi dobre przybliżenie odpowiedniego nieliniowego związku konstytutywnego dla materiału sztywno-lepkoplastycznego.

2. Rozwiązania problemów brzegowych a zwłaszcza obliczony końcowy kształt zdeformowanej konstrukcji i maksymalne trwałe ugięcie dają wyniki zgodne z doświadczeniem.

3. Przedstawiona metoda pozwala na łatwą analizę zmiany postaci pola prędkości tzw. "mode transition" przy obciążeniu impulsowym oraz umożliwia zbadanie propagacji stref sztywnych.

4. W granicznym przypadku obecna teoria pozwala na uzyskanie rozwiązań dla materiału sztywno-idealnie plastycznego

5. Zaproponowane prawo konstytutywne umożliwia łączny opis liniowych własności lepkich materiałów i nieliniowych efektów zmian geometrii konstrukcji.

Zaproponowana teoria podaje zatem praktyczny i prosty sposób wyznaczania deformacji konstrukcji plastycznych i lepkoplastycznych poddanych obciążeniom dynamicznym.

8. Oszacowania Deformacji dla Ciał Lepkoplastycznych

W przedstawionej metodzie linearyzacji równań lepkoplastycznych powłok istotną rolę odgrywa definicja stanu porównawczego $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$. Pokazane zostało, że w teorii małych ugięć stan ten zdefiniowany jest przez obciążenie graniczne

$p^*(x_i)$ ale istnieje pewna dowolność w doborze rozkładu sił powierzchniowych. W teorii umiarkowanie dużych ugięć wprowadzało się dodatkowe założenie o stacjonarności pola prędkości przy czym wartość końcowych ugięć zależała od sposobu określenia warunków początkowych. Chociaż słuszność obecnej teorii potwierdzona została w wielu doświadczeniach to jednak

w przypadku braku danych eksperymentalnych trudno jest określić dokładność rozwiązań przybliżonych.

W związku z tym dużego znaczenia praktycznego nabierają metody, które przy znacznie słabszych założeniach pozwalają oszacować pewne podstawowe parametry procesu dynamicznego. Górne, bezpieczne oszacowania na maksymalne trwałe ugięcia i dolne oszacowania na czas pracy konstrukcji sztywno-idealnie plastycznych podał Martin, [47]. Wyprowadzenie podobnych twierdzeń dla materiałów sprężysto-plastycznych i plastycznych ze wzmocnieniem zawierają prace [48,49].

Opierając się na warunku stateczności Druckera dla materiałów niesprężystych (2.2) oraz wykorzystując zasadę prac wirtualnych można uogólnić teorię oszacowań na przypadek ciał lepkoplastycznych. W obecnym rozdziale przedstawione będą odpowiednie wyniki w zakresie liniowych związków geometrycznych. Dla dużych ugięć twierdzenia o pracach wirtualnych w opisie Lagrange'owskim posiada bardziej złożoną postać i nie można uzyskać z (2.2) prostych oszacowań ujmujących łączny wpływ lepkości i zmian geometrii.

Oszacowania w przypadku problemów geometrycznych nieliniowych otrzymać można jedynie w granicznym przypadku materiałów idealnie plastycznych dla których postulat stateczności (2.2) sprowadza się do prostej nierówności. Zagadnieniu temu poświęcony będzie następny rozdział.

Ogólna nierówność. Postulat stateczności Druckera głosi, że całkowita praca potrzebna do przeprowadzenia ciała z jednego stanu $\sigma_{ij}^{(1)}, \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}$ w drugi $\sigma_{ij}^{(2)}, \dot{\epsilon}_{ij}^{(2)}$ w skończonym czasie $0 < t < t_f$ musi być nieujemna [13]

$$(8.1) \quad \int_0^{t_f} \int_V (\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}) (\dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(2)}) dV \geq 0.$$

Założmy obecnie, że ciało o objętości V i regularnej powierzchni A poddane zostało pewnemu procesowi deformacji w którym siły powierzchniowe nie wykonują żadnej pracy. Ciało porusza

się wyłącznie na skutek dostarczonej w chwili $t = 0$ energii kinetycznej; początkowe pole prędkości wynosi $\dot{u}_i^0(x_i)$. Skorzystajmy z dowolności wyboru stanu (1) i (2) w nierówności (8.1) i przyjmijmy za stan pierwszy kompletnie rozwiązanie postawionego problemu dynamicznego $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}(t)$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} = \dot{\epsilon}_{ij}(t)$, $\dot{u}_i^{(1)} = \dot{u}_i(t)$. Niech stan drugi oznacza rozwiązanie problemu quasi-statycznego dla identycznego ciała obciążonego siłami powierzchniowymi T_i^* . Zakładamy dalej stałość naprężeń i prędkości odkształceń w problemie porównawczym $\sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^* = \text{const}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} = \dot{\epsilon}_{ij}^* = \text{const}$, oraz $\dot{u}_i^{(2)} = \dot{u}_i^* = \text{const}$ dla $0 \leq t \leq t_f$.

Podobna definicja stanu porównawczego wprowadzona była w związku z linearyzacją równań Hohenemsera-Pragera. Różnica obu definicji polega na tym, że tutaj problem quasi-statyczny rozwiązywany jest w oparciu o to samo prawo fizyczne co rozważany problem dynamiczny.

Rozwiązanie pomocniczego problemu statycznego zawiera zawsze jeden swobodny parametr. Dla materiału idealnie plastycznego jest nim skalarny mnożnik w polu prędkości przy stałych i danych siłach zewnętrznych. W materiale lepkoplastycznym istnieje jednoznaczna zależność pomiędzy T_i^* i \dot{u}_i^* , ale sama wartość sił zewnętrznych może być dowolna, byleby przekraczała wartość nośności granicznej. Nierówność (8.1) można przekształcić za pomocą zasady prac wirtualnych, przyjmując zerowanie się sił masowych F_i .

Zgodnie z zasadą d'Alamberta naprężenia $\sigma_{ij}(t)$ są w równowadze z $-\rho \ddot{u}_i$. Podobnie σ_{ij}^* jest w równowadze z T_i^* . Z drugiej strony pola prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}$ i $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ są zgodne odpowiednio z \dot{u}_i i \dot{u}_i^* .

Stosując zasadę prac wirtualnych do zdefiniowanych czterech par wielkości statycznych i kinematycznych można napisać

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V -(\rho \ddot{u}_i) \dot{u}_i dV = \frac{d}{dt} \int_V -\frac{\rho}{2} \dot{u}_i \dot{u}_i dV,$$

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV = \int_V -(\rho \ddot{u}_i) \dot{u}_i^* dV = \frac{d}{dt} \int_V -\rho \dot{u}_i \dot{u}_i^* dV,$$

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV = \int_A T_i^* \dot{u}_i^* dA = \frac{d}{dt} \int_A T_i^* u_i^* dA,$$

$$(8.2) \quad \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV = \int_A T_i^* \dot{u}_i^* dA = \frac{d}{dt} \int_A T_i^* u_i^* dA.$$

Podstawiając (8.2) do (8.1) i całkując po czasie przy warunkach $t=0, u_i = 0, \dot{u}_i = \dot{u}_i^0$; $t = t_f, u_i = u_i^f, \dot{u}_i = 0$ otrzymujemy

$$(8.3) \quad \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^0 dV + t_f \int_A T_i^* \dot{u}_i^* dA - \int_V \rho \dot{u}_i^f \dot{u}_i^f dV - \int_A T_i^* u_i^f dA \geq 0.$$

Pierwszy człon w (8.3) oznacza energię kinetyczną E_K wprowadzoną do układu. Wzór (8.3) przedstawia globalną nierówność energetyczną; można z niej wyciągnąć następujące wnioski praktyczne:

1. Oszacowanie ugięć podać można jedynie dla punktów na zewnętrznej powierzchni ciała A.

2. Z wyrażenia energetycznego wyznaczyć można tylko jedną skalarną wielkość, np. bezwzględną wartość ugięcia $\delta = \|\dot{u}_i^f\|$.

3. Aby obliczyć δ trzeba znać a priori kierunki wektora ugięcia n_i ; $u_i^f = \delta n_i$ w danym procesie dynamicznym. Dla problemów kołowo-symetrycznych warunek ten jest spełniony.

4. Siła statyczna T_i^* musi być siłą punktową działającą wzdłuż wektora n_i .

5. Dla ciała trójwymiarowego siła punktowa prowadzi do osobliwości, natomiast konstrukcje cienkościennie dwu i jednowymiarowe mogą przenosić siły punktowe.

6. Nierówność (8.3) słuszna jest jeżeli w czasie t_f ruch wszystkich punktów ciała ustaje jednocześnie lub jeśli strefy sztywne zaczynają się propagować począwszy od punktu \bar{x}_i .

Uwzględniając wnioski 1-4 nierówności (8.3) przepisać

można w prostszej postaci

$$(8.4) \quad E_K + t_1 T_i^* \dot{u}_i^* - \int_V \rho \dot{u}_i^* \dot{u}_i^* dV - T_i^* n_i \delta \geq 0,$$

gdzie T^* i \dot{u}^* oznaczają bezwzględne wartości siły i prędkości działające w kierunku wektora n_i .

Zastosowanie do płyt idealnie plastycznych. Nierówność (8.4) słuszna jest dla szerokiej klasy materiałów statecznych, w szczególności dla materiałów idealnie plastycznych. Przedstawimy najpierw implikacje jakie daje ta nierówność w tym ostatnim przypadku ponieważ ułatwi to interpretację (8.4) w zastosowaniu do materiałów lepkoplastycznych oraz wyjaśni niektóre punkty dotychczasowego podejścia Martina.

Rozważmy swobodnie podpartą płytę kołową i załóżmy, że w chwili $t = 0$ dana jest jednorodna prędkość V_0 . Początkowa energia kinetyczna płyty wynosi

$$(8.5) \quad E_K = \frac{1}{2} \pi \mu R^2 V_0^2.$$

Jako siłę powierzchniową T^* przyjmijmy siłę punktową działającą w środku płyty w kierunku jej osi. Z rozwiązania statycznego problemu nośności granicznej przy warunku plastyczności Hubera-Misesa wiadomo, że

$$(8.6) \quad T^* = 2\pi M_0 \quad \text{ i } \quad \dot{u}^* = \dot{u}_0^* (1 - \sqrt{\rho}).$$

Podstawiając (8.5) i (8.6) do (8.4) i wprowadzając bezwymiarowe ugięcie δ czas t i parametr α ,

$$(8.7) \quad \delta = \frac{4M_0 \alpha t}{\mu R^2 V_0^2}, \quad t = \frac{10M_0 t_1}{\mu R^2 V_0}, \quad \alpha = \frac{4}{10} \frac{\dot{u}_0^*}{V_0},$$

otrzymujemy nierówność

$$(8.8) \quad 1 + \alpha t - \alpha - \delta \geq 0 \quad \text{ dla } 0 \leq \alpha < \infty.$$

Na płaszczyźnie (δ, t) aktualnie trwałe ugięcie i czas pracy musi leżeć w obszarze ograniczonym (8.8). Dla każdej wartości parametru α linia ograniczająca jest linią prostą przechodzącą przez punkt (1.1). Krzywa ograniczająca obszar do puszczalnych deformacji jest obwiednią rodziny linii prostych, Rys.23.

Eliminując parametr α łatwo wykazać, że równanie obwiedni dane jest przez

$$(8.9) \quad t \geq 1, \quad \delta \leq 1.$$

Oszacowanie identyczne do (8.9) otrzymał również Martin [47] na nieco innej drodze, zakładając kolejno statycznie dopuszczalne pole naprężeń i kinematycznie dopuszczalne pole prędkości odkształceń oraz stosując dwukrotnie warunek stateczności dla materiału idealnie plastycznego.

Zastosowanie do płyt lepkoplastycznych. Rozważmy przykłady płyty kołowej zamocowanej. Jako pomocniczy problem quasi - statyczny przyjmijmy również siłę punktową T^* działającą w ośrodku. Zależność między T^* i \dot{u}^* podana w pracy [36] dla prawa płynięcia (4.3) wynosi

$$(8.10) \quad \dot{u}^* = (T^* - T_0) \frac{3\sqrt{3}\gamma R^2}{32kM_0} [1 - \rho^2(1 - 2\ln\rho)],$$

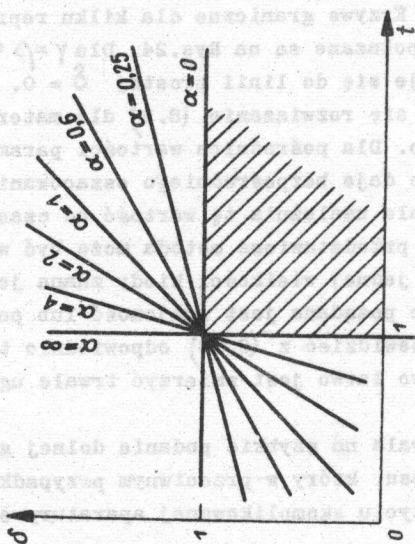
gdzie $T_0 = \frac{4\pi M_0}{\sqrt{3}}$ oznacza statyczną nośność graniczną płyt idealnie plastycznych.

Podstawiając do (8.4) wyrażenie na energię (8.5) oraz na otrzymujemy

$$(8.11) \quad \phi(\delta, t, p) \equiv 1 + t\rho(p-1) - \rho(p-1) - p\delta \geq 0 \quad \text{dla } 1 \leq p \leq \infty,$$

gdzie bezwymiarowe wielkości zdefiniowane są jako

$$(8.12) \quad \delta = \frac{8M_0 u^* t}{\sqrt{3}\mu R^2 V_0}, \quad t = \frac{16M_0 t_1}{\sqrt{3}\mu R^2 V_0}, \quad p = \frac{\sqrt{3} T^*}{4\pi M_0}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{16}{3} \frac{V_0 h}{\gamma R^2}.$$



Rys. 23 Obszar dopuszczalnych deformacji dla materiału idealnie plastycznego.

Dla każdej wartości parametru p krzywa graniczna jest na płaszczyźnie (δ, t) linią prostą. Równanie $\Phi(\delta, t, p) = 0$ przedstawi więc jednoparametrową rodzinę linii prostych. Eliminując parametr p w zwykły sposób przez przyjęcie $d\Phi/dp = 0$ otrzymuje granicę obszaru dopuszczalnych deformacji jako

$$(8.13) \quad \delta^2/\beta + 2\delta t + \beta t^2 + 2\delta - 2(2+\beta)t + \beta = 0 \quad \text{dla } 0 \leq t \leq 1 + \frac{1}{\beta}$$

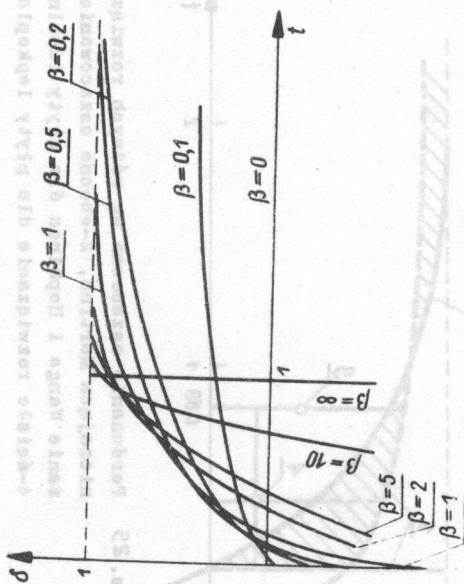
$$\delta = 1 \quad \text{dla } t > 1 + \frac{1}{\beta}$$

Równanie (8.13) przedstawia parabolę, która jest zawsze styczna do prostych $t = 0$ i $\delta = 1$. Punkty styczności oraz obrót osi symetrii paraboli i jej rozwarcie zależą od wartości parametru β , czyli zgodnie z definicją (8.12) od lepkości materiału. Krzywe graniczne dla kilku reprezentatywnych wartości β pokazane są na Rys.24. Dla $\gamma = \beta = 0$ równanie (8.13) degeneruje się do linii prostej $\delta = 0$. Dla $\gamma = \beta \rightarrow \infty$ otrzymuje się rozwiązanie (8.9) dla materiału idealnie plastycznego. Dla pośrednich wartości parametru nierówność (8.13) nie daje bezpośredniego oszacowania na wartość trwałych ugięć ale uzależnia tę wartość od czasu trwania procesu. Dlatego przedstawiona metoda może być wykorzystana do znajdowania jednej wielkości kiedy znana jest druga wielkość. Tak więc pożądana jest znajomość lub pomiar δ lub t , co pozwoli przewidzieć z (8.13) odpowiednio t lub δ . Na przykład stosunkowo łatwo jest zmierzyć trwałe ugięcie konstrukcji δ .

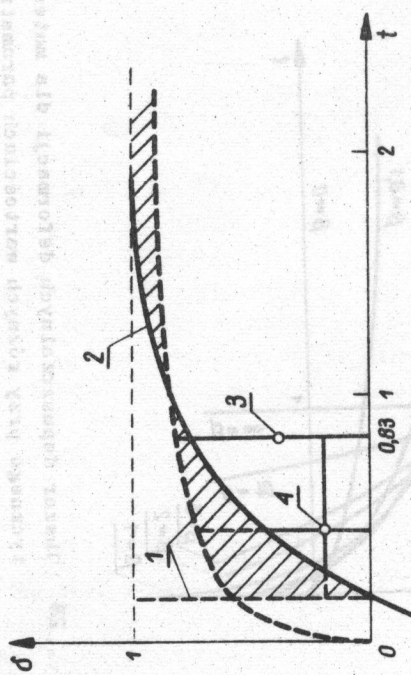
Metoda oszacowań pozwala na szybkie podanie dolnej granicy na czas trwania procesu, który w przeciwnym przypadku mógłby być zmierzony przy użyciu skomplikowanej aparatury elektromej.

Osobne oszacowanie na δ i t uzyskać można tylko dla materiałów idealnie plastycznych.

Porównanie dokładności obecnej metody z wcześniejszymi wynikami Martina [50] i dokładnymi rozwiązaniami (5.5) przedstawione jest na Rys.25 dla $\beta = 1$, co odpowiada średniej war-



rys. 24 Obszar dopuszczalnych deformacji dla materiału lepkoelastycznego przy różnych wartościach parametru β .



Rys. 25 Porównanie oszacowań wg różnych rozwiązań, 1-krzywa ograniczająca Martina, 2-obecne oszacowanie, 3-ściśle rozwiązanie Wanga i Hopkinsa dla płyty idealnie plastycznej, 4-ściśle rozwiązanie dla płyty lepkoplastycznej.

tości parametrów użytych w doświadczeniach Florence [19] . Widać, że znalezione z (8.13) oszacowania przewyższają prawie dwukrotnie dokładne wartości. Jest to wysoka cena jaką płacimy za uzyskaną pewność, że ściśle rozwiązanie znajdzie się zawsze poniżej znalezionej górnej oceny ugięcia. Wpływ lepkości materiału na zmniejszenie się ugięć środka płyty zbadać można łatwo ustalając w (8.13) wartość t . Dla $t = 1$ otrzymuje się

$$(8.14) \quad \delta = \frac{2}{1/\beta} \left[-1 + \sqrt{1 + 1/\beta} \right] .$$

Porównanie dokładnego rozwiązania (5.5) z oszacowaniem (8.14) przedstawione jest na Rys.26. Jakościowy charakter obu wykresów jest podobny.

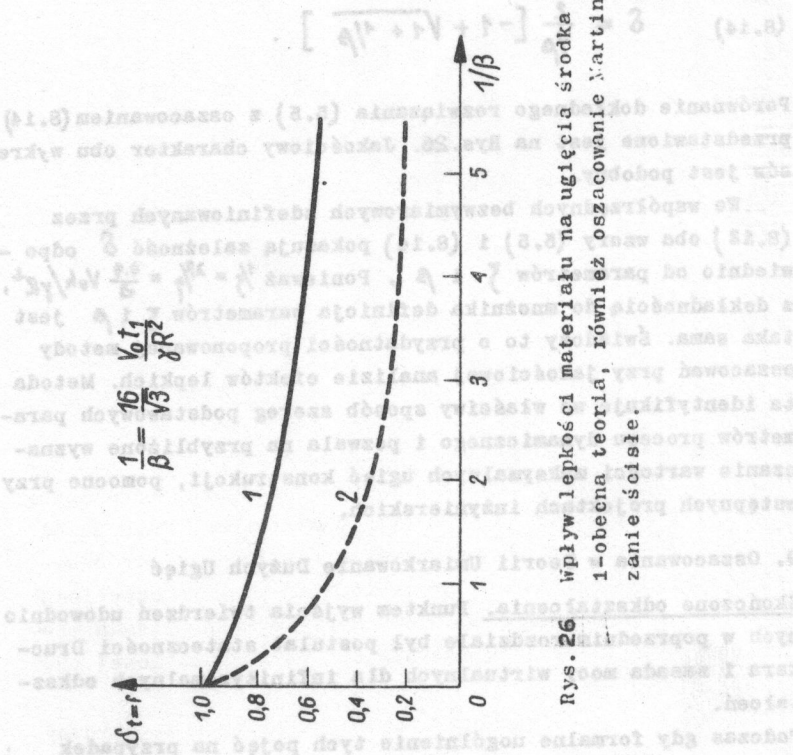
We współrzędnych bezwymiarowych zdefiniowanych przez (8.12) oba wzory (5.5) i (8.14) pokazują zależność δ odpowiednio od parametrów ζ i β . Ponieważ $\frac{1}{\zeta} = \frac{2}{\eta} = \frac{4}{3} \frac{V_0 h}{\gamma R^2}$, z dokładnością do mnożnika definicja parametrów ζ i β jest taka sama. Świadczy to o przydatności proponowanej metody oszacowań przy jakościowej analizie efektów lepkich. Metoda ta identyfikuje we właściwy sposób szereg podstawowych parametrów procesu dynamicznego i pozwala na przybliżone wyznaczanie wartości maksymalnych ugięć konstrukcji, pomocne przy wstępnych projektach inżynierskich.

9. Oszacowania w Teorii Umiarkowanie Dużych Ugięć

Skończone odkształcenia. Punktem wyjścia twierdzeń udowodnionych w poprzednim rozdziale był postulat stateczności Druckera i zasada mocy wirtualnych dla infinityzmalnych odkształceń.

Podczas gdy formalne uogólnienie tych pojęć na przypadek skończonych deformacji nie przedstawia trudności, powstają kłopoty przy właściwej interpretacji procesu dynamicznego i porównawczego procesu statycznego.

Wpływ lepkości materiału na ugięcie środka płyty, 1-obecna teoria, 2-różniczkowanie Martina, 2-rozwiązanie ścisłe.



Rys. 26 Wpływ lepkości materiału na ugięcie środka płyty, 1-obecna teoria, 2-różniczkowanie Martina, 2-rozwiązanie ścisłe.

Jeśli przez T , F i \mathcal{G} oznaczyć dowolny układ sił powierzchniowych, objętościowych i naprężeń znajdujący się w równowadze w chwili t a przez v i V układ prędkości i prędkości odkształceń spełniających warunki zgodności, to zasada mocy wirtualnych, odniesiona do odkształconej geometrii zapisze się w postaci

$$(9.1) \quad \int_{S(t)} T_i^{(1)} v_i^{(2)} dS + \int_{V(t)} F_i^{(1)} v_i^{(2)} dV = \int_{V(t)} \mathcal{G}_{ij}^{(1)} V_{ij}^{(2)} dV,$$

gdzie T_i są składowymi sił powierzchniowych na jednostkę aktualnej powierzchni \mathcal{S} , F_i są składowymi sił masowych na jednostkę aktualnej objętości V .

Gradient deformacji V_{ij} zdefiniowany jest przez

$$(9.2) \quad V_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial x_i} \right),$$

gdzie x_i oznacza aktualne (przestrzenne) współrzędne.

W równości (9.1) układy statyczny i kinematyczny mogą być wybrane zupełnie niezależnie od siebie. Z dowolności tej korzystało się w istotny sposób przy wyprowadzaniu nierówności szacującej dla nieskończenie małych odkształceń. Jako układ T_i , F_i , \mathcal{G}_{ij} przyjmowano na przykład rozwiązanie porównawczego problemu statycznego natomiast stan v_i , V_{ij} odpowiadał rzeczywistemu rozwiązaniu problemu dynamicznego. Zasada mocy wirtualnych (9.1) zapisana została dla pewnej ustalonej chwili t .

Twierdzenia dotyczące oszacowań mają charakter energetyczny i występuje konieczność całkowania (9.1) po czasie w granicach $(0, t_f)$. W badanym procesie dynamicznym i niezależnym porównywanym quasi-statycznym występują w przypadku skończonych odkształceń dwie różne od siebie funkcje ruchu

$x = \gamma^{(1)}(X, t)$ i $x = \gamma^{(2)}(X, t)$. Granice obszarów całkowania $V(t)$ i $S(t)$ zależą od czasu i zmieniają się w obu procesach inaczej. Podejście Eulerowskie jest zatem niewygodne przy poszukiwaniu oszacowań ponieważ nie wiadomo po jakich granicach przeprowadzać należy całkowanie.

Wady tej nie posiada podejście Lagrange'owskie gdzie całkowanie odbywa się po nieodkształconej powierzchni S° i objętości V° . Stan wyjściowy może być w procesie statycznym i dynamicznym taki sam. Istnieje jednak w dalszym ciągu niejednoznaczność przy transformacji (9.1) z opisu przestrzennego do materialnego. Aby wyjaśnić tę sprawę bliżej ustalmy najpierw, że całkowanie w (9.1) dotyczy powierzchni $S^{(1)}(t)$ i objętości $V^{(1)}(t)$ w procesie statycznym.

Ze względu na zależności

$$(9.3) \quad F_i^\circ = F_i \frac{dV}{dV^\circ}, \quad T_i^\circ = T_i \frac{dS}{dS^\circ}$$

lewa strona (9.1) transformuje się do układu materialnego nastychmiastowo

$$(9.4) \quad \int_{S^{(1)}(t)} T_i^{(1)} N_i^{(2)} dS + \int_{V^{(1)}(t)} F_i^{(1)} N_i^{(2)} dV = \int_{S^\circ} T_i^{\circ(1)} N_i^{\circ(2)} dS^\circ + \int_{V^\circ} F_i^{\circ(1)} N_i^{\circ(2)} dV^\circ$$

Pozostaje jeszcze przetransformować prawą stronę. Zależność pomiędzy aktualną współrzędną X_i , początkową współrzędną X_i° wektorem przemieszczenia u_i w problemie statycznym

$$(9.5) \quad X_i^{(1)} = X_i^{(1)} + u_i^{(1)}$$

Dla materiału nieściśliwego tensor naprężenia Pioli-Kirchoffa i tensor Cauchy σ_{rs} związane są

$$(9.6) \quad S_{ij} = \sigma_{rs} \frac{\partial X_i}{\partial x_r} \frac{\partial X_j}{\partial x_s}$$

Podstawiając (9.6) do prawej strony (9.1) otrzymujemy

$$(9.7) \quad \int_{V^{(t)}} \mathbb{S}_{ij}^{(t)} V_j^{(2)} dV = \int_{V^0} S_{ij}^{(t)} \dot{E}_{ij}^{(1,2)} dV^0;$$

gdzie

$$(9.8) \quad \dot{E}_{ij}^{(1,2)} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{ij}^{(2)} + \dot{u}_{ji}^{(2)} + \dot{u}_{k,i}^{(2)} u_{k,j}^{(1)} + \dot{u}_{k,j}^{(2)} u_{k,i}^{(1)}),$$

jest pewną miarą prędkości odkształcenia w której występują wielkości zarówno z procesu statycznego (1) jak i dynamicznego (2). Wyrażenie (9.8) nie da się otrzymać przez materialne różniczkowanie jakiejkolwiek dobrze zdefiniowanej miary odkształceń Greena. Ostatecznie (9.1) w opisie materialnym przyjmie postać

$$(9.9) \quad \int_{S^0} T_i^{(t)} n_i^{(2)} dS^0 + \int_{V^0} F_i^{(t)} n_i^{(2)} dV^0 = \int_{V^0} S_{ij}^{(t)} \dot{E}_{ij}^{(1,2)} dV^0.$$

Podobnie jak w opisie Eulerowskim układ $F_i^{(t)}$, $T_i^{(t)}$ oraz $S_{ij}^{(t)}$ jest w równowadze tzn.

$$(9.10) \quad \begin{aligned} (S_{ji}^{(t)} + S_{jk}^{(t)} u_{i,k}^{(1)})_{,j} &= F_i^{(t)}, \\ (S_{ji}^{(t)} + S_{jk}^{(t)} u_{i,k}^{(1)}) n_j &= T_i^{(t)}, \end{aligned}$$

gdzie n_j oznacza jednostkowy wektor normalny do niezdefiniowanej powierzchni S^0 . Układ kinematyczny $\dot{E}_{ij}^{(1,2)}$ i $v^{(2)}$ zależy od układu statycznego poprzez definicję (9.8).

Jedynie w przypadku kiedy oba układy (1) i (2) odpowiadają temu samemu procesowi, tensor \dot{E}_{ij} , staje się pochodną materialną tensora Greena

$$(9.11) \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji} + u_{i,k} u_{jk}) .$$

Wprowadzenie twierdzenia o mocach wirtualnych (9.9) w opisie Lagrange'owskim podali w tym szczególnym przypadku Habbitt, Marcal, Rice [22] oraz Lance i Soechting [40].

Przypuśćmy obecnie, że w granicach całek (9.1) stoi objętość i powierzchnia ciała deformowanego w procesie dynamicznym. Otrzymamy wówczas następujący odpowiednik (9.1) w opisie Lagrange'owskim

$$(9.12) \quad \int_{S^0} T_i^{(0b)} n_i^{(2)} dS^0 + \int_{V^0} F_i^{(0)} n_i^{(2)} dV^0 = \int_{V^0} S_{ij}^{(1)} \dot{E}_{ij}^{(2)} dV^0 .$$

W równaniach równowagi dla procesu (1) wystąpią gradienty przemieszczeń w procesie (2)

$$(9.13) \quad \begin{aligned} (S_{ji}^{(1)} + S_{jk}^{(1)} u_{i,k}^{(2)})_{,j} &= F_i^{(0)}, & \text{w } V^0 \\ (S_{ji}^{(1)} + S_{jk}^{(1)} u_{i,k}^{(2)}) n_j &= T_i^{(0)}, & \text{na } S^0 . \end{aligned}$$

Sprzęgnięcie procesu statycznego i kinematycznego następuje tutaj poprzez równania równowagi (9.13).

Ze względu na to sprzężenie nie wiadomo jakie wielkości mają wchodzić do postulatu stateczności materiału. Sama definicja stateczności materiału sztywno-plastycznego w zakresie dużych odkształceń jest jeszcze niedostatecznie zbadana i spotyka się w literaturze szereg nieporumień na ten temat np. [88].

Z wymienionych powodów wynika, że uogólnienie twierdzeń szacujących na przypadek skończonych deformacji nie wydaje się w obecnej chwili możliwe.

Umiarkowanie duże ugięcia. Zgodnie z założeniem rozdział 2

i 7 w każdym przekroju ścianki konstrukcji odkształcenia są małe, można zatem stosować szczególną postać postulatu stateczności Druckera dla infinityzematycznych deformacji ciała sztywno-idealnie plastycznego

$$(9.14) \quad (\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^*) \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \geq 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

gdzie stan porównawczy $\sigma_{\alpha\beta}^*$ znajduje się wewnątrz lub na powierzchni płynięcia.

Całkując (9.14) po grubości elementu przy zachowaniu hipotezy Love-Kirchhoffa (4.2) otrzymuje się

$$(9.15) \quad (M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^*) K_{\alpha\beta} + (N_{\alpha\beta} - N_{\alpha\beta}^*) \dot{\lambda}_{\alpha\beta} \geq 0.$$

Jest to warunek stateczności w dowolnym punkcie powierzchni środkowej uplastycznionej konstrukcji.

Rozważmy przypadek impulsowego obciążenia konstrukcji. Wartość energii kinetycznej wprowadzonej do układu oznaczmy E_K . Niech $M_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ i $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}$ oznaczają odpowiednie wielkości statyczne i kinematyczne w procesie dynamicznym natomiast $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$ odpowiadają rozwiązaniu porównawczego problemu quasi-statycznego. Całkując nierówności (9.15) po objętości konstrukcji i czasie trwania procesu otrzymuje się:

$$(9.16) \quad \int_A dA \int_0^{t_f} (M_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta}) dt \geq - \int_A dA \int_0^{t_f} (M_{\alpha\beta}^* K_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}^* \dot{\lambda}_{\alpha\beta}) dt$$

gdzie A jest powierzchnią środkową konstrukcji a t_f oznacza czas trwania deformacji plastycznych.

Lewa strona (9.16) reprezentuje całkowitą pracę plastyczną w procesie dynamicznym, równa jest ona dostarczonej energii kinetycznej E_K . Prawą stronę należy dalej przekształcić wykorzystując równanie równowagi i związki geometryczne dla

danego typu konstrukcji.

W celu uproszczenia zapisu dalsze rozważania dotyczyć będą umiarkowanie dużych ugięć płyt. W tym przypadku równania równowagi przyjmą postać

$$(9.17) \quad N_{\alpha\beta, \alpha} = 0 \quad , \quad M_{\alpha\beta, \alpha} = T_{\beta},$$

$$T_{\alpha, \alpha} + N_{\alpha\beta} W_{, \alpha\beta} + P = 0$$

natomiast związki geometryczne będą, [85]

$$(9.18) \quad \lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{U}_{\alpha, \beta} + \dot{U}_{\beta, \alpha} + \dot{W}_{, \alpha} W_{, \beta} + W_{, \alpha} \dot{W}_{, \beta})$$

$$K_{\alpha\beta} = - \dot{W}_{, \alpha\beta}.$$

Wyrażenie pod całką czasową po prawej stronie (9.16) przekształci się teraz

$$(9.19) \quad \int_A (M_{\alpha\beta}^* K_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}^* \lambda_{\alpha\beta}) dA = \int_A (M_{\alpha\beta}^* + W N_{\alpha\beta}^*) \dot{W}_{, \alpha\beta} dA =$$

$$= \int_A (M_{\alpha\beta}^* + W^* N_{\alpha\beta}^*) \dot{W}_{, \alpha\beta} dA + \int_A (W - W^*) N_{\alpha\beta}^* \dot{W}_{, \alpha\beta} dA =$$

$$= \int_A P(W_0^*) \dot{W} dA + \int_A (W - W^*) N_{\alpha\beta}^* \dot{W}_{, \alpha\beta} dA$$

Podstawiając (9.19) do (9.16) otrzymujemy

$$(9.20) \quad E_K \geq \int_0^{t_4} dt \int_A P(W_0^*) \dot{W} dA + \int_0^{t_4} dt \int_A (W - W^*) N_{\alpha\beta}^* \dot{W}_{, \alpha\beta} dA,$$

gdzie $P(W_0^*)$ jest obciążeniem granicznym w porównawczym problemie statycznym.

Dla danego rozkładu ciśnienia wartość mnożnika zależy od

wielkości ugięcia w danym punkcie płyty W_0^* . Wielkości ugięć w procesie statycznym W^* dynamicznym W są od siebie niezależne.

Należy teraz tak dobrać W^* , aby druga całka w (9.20) była nieujemna. Ogólnie rozwiązanie tego problemu jest niejednoznaczne i nie zawsze jest możliwe bez dodatkowych założeń ponieważ zarówno W jak i W^* zmienia się w trakcie procesu. W wielu ważnych problemach inżynierskich można tak znormalizować W^* aby druga całka w nierówności (9.20) była nieujemna. Mamy wówczas

$$(9.21) \quad E_k \geq \int_0^{t_1} dt \int_A P(W_0^*) \dot{W} dA, \quad W_0^* = f(W_0).$$

Zmieniając porządek całkowania i zauważając, że $\dot{W} dt = dW$ otrzymujemy

$$(9.22) \quad E_k \geq \int_A dA \int_0^{W_0^{\dagger}} P(W_0) dW_0,$$

gdzie $W_0^{\dagger} = W(t) |_{t=t_1}$. W przypadku działania siły punktowej wzór (9.22) redukuje się do

$$(9.23) \quad E_k \geq \int_0^{W_0^{\dagger}} P(W_0) dW_0.$$

W celu znalezienia oszacowań na trwałe ugięcia konstrukcji powstał w wyniku działania obciążenia impulsowego potrzebna jest zależność siły - od ugięcia w odpowiednim problemie statycznym.

Przykład. Rozważmy swobodnie podpartą płytę kołową której wszystkie cząstki z wyjątkiem brzegu posiadają w chwili $t = 0$ jednorodną prędkość V_0 . Całkowita dostarczona energia

kinetyczna wynosi

$$(9.24) \quad E_k = \frac{1}{2} \pi R^2 V_0^2.$$

Jako porównawczy problem quasi-statyczny przyjmijmy siłę punktową P działającą w środku płyty. Lance i Onat [39] i ostatnio Calledina [8] podali następującą zależność nośności granicznej od ugięcia

$$(9.25) \quad P(W_0) = 2\pi M_0 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{W_0}{2h} \right)^2 \right],$$

zakładając pole prędkości płyty w formie stożka $\dot{w}(r)/\dot{w}(0) = 1 - r/R$.
Odpowiednikiem drugiej całki w (9.20) jest

$$(9.26) \quad \int_0^R [(W - W^*)' r N_r^*] \dot{w} dr.$$

Można łatwo wykazać, że całka ta jest w przypadku swobodnie podpartej płyty nieujemna jeśli wprowadzić następującą normalizację ugięcia

$$(9.27) \quad \frac{W^*(r,t)}{W(r,t)} \Big|_{r=0} = 1.$$

Podstawiając (9.25) i (9.24) do (9.23) i całkując otrzymuje się oszacowanie na ugięcie środka płyty

$$(9.28) \quad \frac{W_0^{\dagger}}{2h} + \frac{1}{9} \left(\frac{W_0^{\dagger}}{2h} \right)^3 \leq \frac{\mu R^2 V_0^2}{8 M_0 h}$$

Przyjmując, tak jak w doświadczeniach Florence [19], $R/2h = 16$ i oznaczając $K = \mu V_0^2 R^2 / 8 M_0$, $\delta = W_0^{\dagger} / 2h$, nierówności (9.28) przyjmuje prostą postać

$$(9.29) \quad \delta + \frac{1}{9} \delta^3 \leq 32 K .$$

Porównanie obecnych oszacowań dla umiarkowanie dużych ugięć z poprzednimi rozwiązaniami tego samego problemu i rezultatami doświadczeń przedstawione jest na Rys.27. Widać, że krzywa ograniczająca (9.29) przebiega blisko punktów doświadczalnych w całym badanym zakresie ugięć $0 < \delta < 6$. Ponadto dokładność oszacowań rośnie ze wzrostem deformacji.

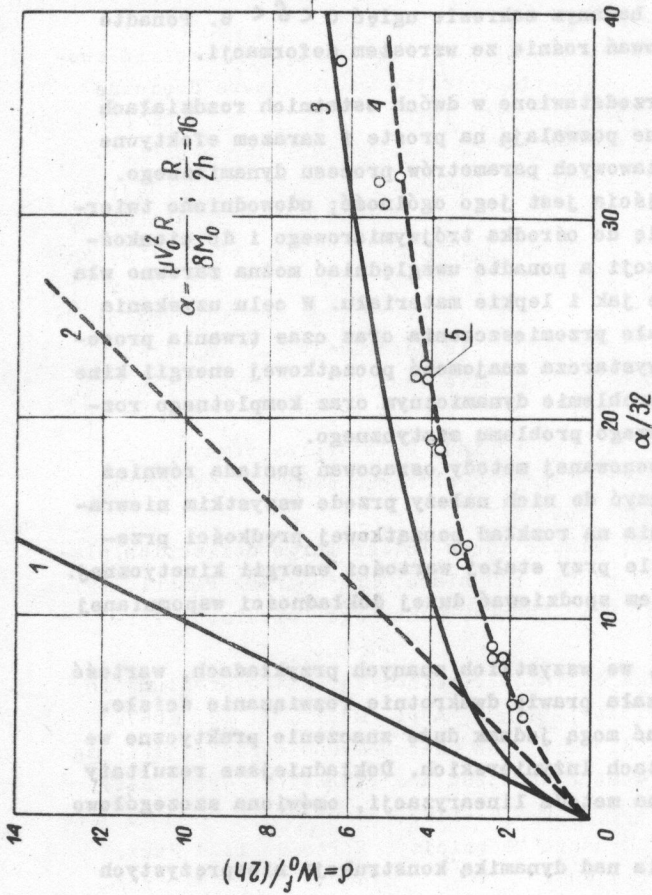
Uwagi końcowe. Przedstawione w dwóch ostatnich rozdziałach metody przybliżone pozwalają na proste i zarazem efektywne oszacowanie podstawowych parametrów procesu dynamicznego. Zaletą tego podejścia jest jego ogólność; udowodnione twierdzenia stosują się do ośrodka trójwymiarowego i do cienkościennych konstrukcji a ponadto uwzględniać można zarówno własności plastyczne jak i lepkie materiału. W celu uzyskania oszacowań na trwałe przemieszczenia oraz czas trwania procesu dynamicznego wystarcza znajomość początkowej energii kinetycznej w danym problemie dynamicznym oraz kompletnego rozwiązania pomocniczego problemu statycznego.

Ogólność proponowanej metody oszacowań posiada również pewne wady. Zaliczyć do nich należy przede wszystkim niewrażliwość rozwiązania na rozkład początkowej prędkości przemieszczenia w ciele przy stałej wartości energii kinetycznej. Nie można się zatem spodziewać dużej dokładności wspomnianej metody.

W rzeczywistości, we wszystkich znanych przykładach, wartość oszacowań przekazała prawie dwukrotnie rozwiązanie ścisłe. Wyniki te posiadać mogą jednak duże znaczenie praktyczne we wstępnych projektach inżynierskich. Dokładniejsze rezultaty daje zaproponowana metoda linearyzacji, omówiona szczegółowo w I cz. pracy.

Dalsze badania nad dynamiką konstrukcji niesprężystych

są konieczne w celu uwzględnienia bardziej realistycznego modelu materiału i podania dokładnego opisu rzeczywistego ruchu ciał.



Rys.27 Ugięcie środka płyty w funkcji bezwymiarowego impulsu, 1-oszacowanie Martino, teoria momentowa, 2-rozwiązanie Wanga, teoria momentowa, 3-obecne oszacowanie, teoria momentowo-membranowa, 4-rozwiązanie Jonesa, teoria momentowo-membranowa, 5-punkty doświadczalne dla aluminium (Florence)

Literatura

1. E.A. Appleby, W. Pösgel, A problem in viscoplasticity, J. Appl. Mech., 2, 29, 1962, 381-384.
2. J. Bejda, Propagation of two-dimensional stress waves in elastic viscoplastic material, Proc. 12-th International Congress of Applied Mechanics, Ed. M. Hetenyi, Berlin, Springer 1969.
3. J. Bejda, Propagation of plane and axially symmetric two-dimensional elastic-viscoplastic waves, Revue Roumaine des Sciences Tech., 2, 15, 1970.
4. J. Bejda, A solution of the wave problem for elastic /visco-plastic beams, J. Mechanique, 2, 6, 1967, 263-282.
5. L.D. Bertholf, C.H. Karnes, Axisymmetric elastic-plastic wave propagation in 6061-T6 aluminium bars of finite length, J. Appl. Mech., 3, 36, 1969.
6. S.R. Bodner, P.S. Symonds, Experimental and theoretical investigation of the plastic deformation of cantilever beams subjected to impulsive loading, J. Appl. Mech., 4, 29, 1962, 719-728.
7. G.I. Bykovec, T.D. Semykina, O lepkoplastychnym plynieniu płyt kołowych i powłok obrotowo symetrycznych, Izv. AN SSSR, 4, 1964, 68-76.
8. C.R. Calladine, Simple ideas in the large-deflection plastic theory of plates and slabs, Engineering Plasticity, Ed. J. Heyman, F.A. Leckie, Cambridge University Press 1968.
9. R.J. Clifton, A difference method for plane problems in dynamic elasticity, Quart. Appl. Math., 1, 25, 1967.
10. B.D. Coleman, W. Noll, The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, Arch. Rat. Mech. Anal., 13, 1963, 167-178.
11. N. Cristescu, Dynamic Plasticity, North Holland Publ. Comp., Amsterdam 1967.

12. H.H. Demir, D.C. Drucker, An experimental study of cylindrical shells under ring loading, Progress in Applied Mechanics, Prager Anniversary Volume 1963, 205-220.
13. D.C. Drucker, A definition of stable inelastic materials J. Appl. Mech., 1, 26, 1959, 101.
14. T.A. Duffy, S.W. Key, Experimental-theoretical correlation of impulsively loaded clamped circular plate, Exp. Mech., 6, 9, 1969, 241-249.
15. M.K. Duszek, Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections, Arch. Mech., 5, 18, 1966, 599-614.
16. M.K. Duszek, Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections, Proc. IUTAM Symposium, Copenhagen 1967, Ed. F. Niordson, Springer 1969.
17. M.K. Duszek, Równania teorii dużych ugięć powłok plastycznych, Prace IPPT 13/1971.
18. G. Eason, Velocity fields for circular plates with the von Mises yield condition, J. Mech. Phys. Solids, 6, 1958 231-235.
19. A.L. Florence, Circular plate under a uniformly distributed impulse, Int. J. Solids Structures, 1, 2, 1966, 37-47.
20. A.L. Florence, Annular plate under a transverse line impulse, AIAA Journal 9, 3, 1965, 1726-1732.
21. A.L. Florence, Buckling of visco-plastic cylindrical shells due to impulsive loading, AIAA Journal, 6, 1968, 532-537.
22. H.D. Habbit, P.V. Marc, J.R. Rice, A finite element formulation for problems of large strain and large displacement, Int. J. Solids Structures, 8, 6, 1970, 1069-1086.
23. J.B. Haddow, A linearized theory of visco-plasticity, Int. J. Solids Structures, 4, 3, 1967, 533-542.

24. P.G. Hodge, The influence of blast characteristics on the final deformation of circular cylindrical shells, J. Appl. Mech., 23, 1956, 617-624.
25. P.G. Hodge, The Mises yield condition for rotationally symmetric shells, Quart, Appl. Math., 18, 1961, 305-311.
26. K. Hohenemser, W. Prager, Uber die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua, ZAMM, 12, 1932, 216.
27. H.G. Hopkins, On the plastic theory of plates, Proc. Roy. Soc. London, A 241, 1957, 153-179.
28. Impact and Slamming, Report of Commites 8, 4-th Int. Ship Structures Congress, Tokyo 1970.
29. N. Jones, The influence of large deflections on the behaviour of rigid-plastic cylindrical shells loaded impulsively, J. Appl. Mech., 2, 37, 1970, 416-425.
30. N. Jones, Finite deflections of a rigid viscoplastic strain-hardening annular plate loaded impulsively, J. Appl. Mech., 2, 35, 1968, 349-356.
31. N. Jones, Finite deflections of a simply supported rigid-plastic annular plate loaded dynamically, Int. J. Solids Structures, 6, 4, 1968, 593-603.
32. N. Jones, Impulsive loading of a simply supported circular rigid-plastic plate, J. Appl. Mech., 1, 35, 1968, 59-65.
33. N. Jones, T.O. Uran, S.A. Tekin, The dynamic plastic behaviour of fully clamped rectangular plates, Int. J. Solids Structures, 6, 1970, 1499-1512.
34. N. Jones, J.W. Dumas, J.G. Giannotti, K.E. Grassit, The dynamic plastic behavior of shell, Report No. 71-6, April 1971
J. Klepaczko - prywatny komunikat.
35. Jow-An Hsi, Some studies in the dynamic plastic deformation of plates and shells, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, September 1967.
36. J.M. Kelly, T. Wierzbicki, Motion of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact, ZAMP, 2, 18, 1967, 236-246.

37. J.M. Kelly, T.R. Wilshaw, A theoretical and experimental study of projectile impact on clamped circular plates, Proc. Roy. Soc. London, A 306, 1968, 435-447.
38. J.M. Kelly, Non-linear constitutive relations for plane shock propagation in viscoplastic solids, Arch. Mech., 1, 22, 1970, 93-110.
39. R.H. Lance, E.T. Onat, A comparison of experiments and theory in the plastic bending of circular plates, J. Mech Phys. Solids, 10, 1962, 301.
40. R.H. Lance, J.F. Soechting, A displacement bounding principle in finite plasticity, Int. J. Solids Structures, 8, 6, 1970, 1103-1118.
41. L.S.S. Lee, A technique for approximate solution of impulsively loaded structures of a rate-sensitive material Ph.D. Thesis, Brown University, June 1969.
42. L.S.S. Lee, J.B. Martin, Approximate solutions of impulsively loaded structures of a rate sensitive material, ZAMP, 21, 1970, 1011-1032.
43. J.W. Leech, E.A. Witmer, T.H.H. Pian, Numerical calculation technique for large elastic-plastic transient deformations of thin shells, AIAA Journal, 12, 6, 1968, 2352-2359.
44. Ju, R. Lepik, Dynamika kołowych i pierścieniowych płyt z materiału sztywno-plastycznego wrażliwego na prędkość odkształcenia, Prikladna Miechanika, 1, 5, 1969, 60-66.
45. U.S. Lindholm, Dynamic deformation of metals, Colloquium on Behaviour of Metals under Dynamic Loading, Chicago 1965.
46. U.S. Lindholm, L.M. Yeakly, Dynamic Biaxial Testing Machine, Exp.Mech.1, 7, 1967, 1.
47. J.B. Martin, Impulsive loading theorems for rigid-plastic continua, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, 90, 1964, 107-132.

EM5

48. J.B. Martin, A displacement bound technique for elastic continua subjected to a certain class of dynamic loading *J. Mech. Phys. Solids*, 12, 1964, 165-176.
49. J.B. Martin, A displacement bound principle for inelastic continua, subjected to certain class of dynamic loading, *J. Appl. Mech.* 32, 1965, 1-6.
50. J.B. Martin, Time and displacement bound theorems for viscous and rigid-visco-plastic continua subjected to impulsive loading, *Proc. 3rd Southeastern Conf.*, Columbia, 1966.
51. J.B. Martin, A.R.S. Ponter, Some extremal properties and energy theorems and their relationship to the deformation theory of plasticity, University of Leicester, Report No.70-19, July 1970.
52. J.B. Martin, A.R.S. Ponter, Bounds on large deformation of impulsively loaded elastic-plastic structures, University of Leicester, Report No.70-22, August 1970.
53. J.B. Martin, P.S. Symonds, Mode approximation for impulsively loaded rigid-plastic structures, *J. Eng. Mech. Div Proc. ASCE* 92, No.EM5, 1966, 43-66.
54. J. Miastkowski, Wpływ historii obciążania na powierzchnie plastyczności, *Mech. Teoret. Stos.* 1, 6, 1968, 3-31.
55. L. Morino, J.W. Leech, E.A. Witmer, An improved numerical calculation technique for elastic-plastic transient deformations of thin shells, Part 1: Background and Theoretical Formulation, *J. Appl. Mech.*, 2, 38, 1971, 423-428. Part 2: Evaluation and Applications 2, 38, 1971, 429-436.
56. L. Morino, J.W. Leech, E.A. Witmer, PETROS 2, A new finite-difference method and program for the calculation of large elastic-plastic dynamically induced deformations of general thin shells, *Aeroelastic and Structures Research Lab. MIT, SSRL TR 152-1 and BRL CRK*, Dec. 1969.
57. Z. Mróz, On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids, *Arch. Mech.*, 18, 1966, 3-35.

58. Z. Mróz, On the description of anisotropic workhardening, *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 1967, 163-175.
59. S. Murakami, J. Bejda, Two-dimensional cylindrical problems of elastic / viscoplastic wave propagation, *Arch. Mech.*, 2, 23, 1971, 199-211.
60. P.M. Naghdi, S.A. Murch, On the mechanical behaviour of viscoelastic / plastic Solids, *J. Appl. Mech.*, 30, 1963, 321-328.
61. L.V. Nikitin, Transverse elastic/visco-plastic wave propagation in beams and plates, *Inż. Sbornik*, 30, 1960, 32-46.
62. J.L. Nowiński, Large amplitude oscillation of triangular plates, *J. Franklin Inst.*, 273, 1965.
63. E.T. Onat, R.M. Haythornthwaite, The load carrying capacity of circular plates at large deflection, *J. Appl. Mech.*, 23, 1956, 49-55.
64. A. Pabianek, Constitutive equations for viscoplastic rotationally symmetric shells with Huber-Mises yield condition, *Arch. Mech.*, 6, 21, 1969, 827-836.
65. A. Pabianek, Lepkoplastyczne pływienie powłoki walcowej przy warunku plastyczności Hubera-Misesa, *Rozpr. Inż.*, 2, 18, 1971.
66. A. Pabianek, Dynamic loading of rigid-viscoplastic cylindrical shell, *Arch. Mech.*, 2, 21, 1969, 199-211.
67. E.W. Parkes, The permanent deformation of a cantilever struck transversely at its tip, *Proc. Roy. Soc. London*, A 288, 1955, 462-476.
68. N. Perrone, A mathematically tractable model of strain-hardening rate sensitive plastic flow, *J. Appl. Mech.*, 1, 33, 1960, 210-211.
69. N. Perrone, Impulsively loaded strain-rate sensitive plates, *J. Appl. Mech.*, 2, 34, 1967, 380-384.
70. P. Perzyna, The constitutive equations for rate sensitive plastic materials, *Quart. Appl. Math.*, 20, 1963, 321-332.

71. P. Perzyna, The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials, Proc. Vibr. Probl., 4, 1963, 281-290.
72. P. Perzyna, On physical foundations of viscoplasticity, 12-th Int. Congr. Appl. Mech., Stanford 1968.
73. P. Perzyna, Thermodynamic theory of viscoplasticity, Advances in Applied Mechanics, 12, 1971.
74. P. Perzyna, Thermodynamics of rheological materials with internal changes, J. Mécanique, 10, 1971.
75. P. Perzyna, W. Wojno, Thermodynamics of a rate sensitive plastic material, Arch. Mech., 20, 1968, 499-511.
76. P. Perzyna, Teoria Lepkoplastyczności, PWN, Warszawa 1966.
77. A.R.S. Ponter, An energy theorem for time dependent materials, J. Mech. Phys. Solids, 17, 1969, 63-71.
78. W. Prager, Linearization in viscoplasticity, Öster. Ing. Arch., 1-4, 15, 1961, 152-157.
79. J.R. Rice, On the structure of stress-strain relations for time-dependent plastic-deformation in metals, J. Appl. Mech., 3, 37, 1970.
80. R.D. Richtmyer, Difference methods for initial value problems, Interscience Publ., London 1957.
81. A. Sawczuk, On formulation of large deflection theory for perfectly plastic shells, Proc. Natl. Bulgarian Conf. Appl. Mech., Varna 1969.
82. A. Sawczuk, M.K. Duszek, O związkach podstawowych teorii powłok plastycznych, Rozp. Inż., 4, 18, 1970.
83. A. Sawczuk, M.K. Duszek, A note on the interaction of shear and bending in plastic plates, Arch. Mech., 15, 1963, 411.
84. A. Sawczuk, P.G. Hodge, Comparison of yield conditions for circular cylindrical shells, J. Franklin Inst., 5, 269, 1960, 362-374.
85. A. Sawczuk, Large deflections of rigid-plastic plates, Proc. 11-th Congress of Appl. Mech., Munich 1964.

86. J.A. Seiler, B.A. Cotter, P.S. Symonds, Impulsive loading of elastic-plastic beams, *J. Appl. Mech.*, 4, 23, 1956, 515-521.
87. Slaming of Ships, a Critical Revcoew of the Current State of Knowledge, Ship Structure Committee, 1970.
88. B. Storakers, On finite deformation and failure of non-linear viscoplastic structures, Ph.D. Thesis, Royal Technical University Stockholm, 1969.
89. P.S. Symonds, Survey of methods of analysis for plastic deformations of structures under dynamic loading, Brown University Report 1-67, June 1967.
90. G.S. Szapiro, Uderzenie w sztywno-plastyczną płytę pierścieniową, *PMM*, 1, 23, 1959, 234-241.
91. G.S. Szapiro, On conditions of yielding and fracture for viscoelastic-plastic bodies, Proc. IUTAM Symposium, Wien, 1966.
92. Teoria Plastyczności, praca zbiorowa pod redakcją W. Olszaka, P. Perzyny i A. Sawczuka, PWN, Warszawa 1965.
93. T.C.T. Ting, P.S. Symonds, Longitudinal impact on viscoplastic rods-linear stress-strain rate law, *J. Appl. Mech.*, 31, 1964, 199-207.
94. T.C.T. Ting, The plastic deformation of a cantilever beam with strain rate sensitivity under impulsive loading, *J. Appl. Mech.*, 31, 1964, 38.
95. C. Truesdell, W. Noll, The non-linear field theories of mechanics, *Encyclopedia of Physics III/3*, Berlin 1965, Springer.
96. A.J. Wang, The permanent deflection of a plastic plate under blast loading, *J. Appl. Mech.*, 22, 1955, 375-376.
97. A.J. Wang, H.G. Hopkins, On the plastic deformation of built-in circular plate under impulsive loading, *J. Mech. Phys. Solids*, 3, 1954, 22-37.
98. T. Wierzbicki, Bending of rigid-viscoplastic circular plates, *Arch. Mech.*, 5, 16, 1964.

99. T. Wierzbicki, Dynamics of rigid-viscoplastic circular plates, Arch. Mech., 17, 1965, 851.
100. T. Wierzbicki, Response of rigid-viscoplastic circular and square plates to dynamic loading, Techn. Report No 162, Stanford University 1966.
101. T. Wierzbicki, Impulsive loading of rigid viscoplastic plates, Int. J. Solids Structures, 3, 1967, 635-647.
102. T. Wierzbicki, On the bending-shear interaction in viscoplastic flow of circular plates, Biul. PAN, 3, 17, 1969, 153-159.
103. T. Wierzbicki, A method of approximate solution of boundary value problems for rigid viscoplastic structures, Acta Mechanica, 1, 3, 1967, 56-66.
104. T. Wierzbicki, Non-associated constitutive law in viscoplasticity with application to dynamics of plates and shells, Acta Mechanica, 1, 11, 1971.
105. T. Wierzbicki, Large deflections of strain rate sensitive plate loaded impulsively, Arch. Mech., 1, 21, 1969 67-79.
106. T. Wierzbicki, On the region of admissible deformations in impulsive loading problems, J. Mech. Phys. Solids, 6, 19, 1970.
107. T. Wierzbicki, Bounds on large dynamic deformations of structures, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, 96, 1970, 267-276.
108. T. Wierzbicki, Viscoplastic flow of rotationally symmetric shells with particular application to dynamic loading, Prace IPPT-1/1968.
109. T. Wierzbicki, J.M. Kelly, Finite deflection of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact, Int. J. Solids Structures, 4, 1968, 1081-1092.
110. T. Wierzbicki, A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates, Int. J. Solids Structures, 6, 1970, 553-568. /wspólnie z A.L.Florence/

111. T. Wierzbicki, H. Andrzejewski, An experimental and theoretical study of impulsively loaded viscoplastic cylindrical shells , Prace IPPT 11/1969.
112. T. Wierzbicki, Wariacyjna metoda oszacowania ugięć dynamicznie obciążonych konstrukcji, Prace IPPT 2/1971.
113. M.L. Wilkins, Finite difference scheme for calculating problems in two space dimensions and time, J. Comp. Physics, 5, 1970.
114. M.L. Wilkins, Calculations of elastic-plastic flow, Methods in Computational Physics, vol.3, Academic Press 1964.
115. E.A. Witmer, H.A. Balmer, J.W. Leech, T.H.H. Pian, Large dynamic deformations of beams, circular rings, circular plates and shells, AIAA Journal, 8, 1, 1963, 1848-1857.
116. E.A. Witmer, E.N. Clark, H.A. Balmer, Experimental and theoretical studies of explosive induced large dynamic and permanent deformations of simple structures, Exp. Mech., 2, 7, 1967, 56-66.
117. W. Wojewódzki, Dynamic buckling of a visco-plastic cylindrical shell subjected to axial impact, Arch. Mech., 1, 23, 1971, 73-92.

