

PRACE IPPT • IBTP REPORTS

Janusz Klepaczko

DOŚWIADCZALNE BADANIA  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH  
PROCESÓW FALOWYCH W METALACH

CZĘŚĆ I

61/1970



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

P.269



**Janusz Klepaczko**

**DOŚWIADCZALNE BADANIA  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH  
PROCESÓW FALOWYCH W METALACH**

**CZĘŚĆ I**

**61/1970**



**WARSZAWA**



Praca habilitacyjna



Na prawach rękopisu

-----  
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 200 egz. Ark. wyd. 9. Ark. druk. 12,6.

Oddano do drukarni w grudniu 1970 r.

Nr zamówienia 71/71. U-87.

-----  
Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

Janusz Klepaczko

Pracownia Doświadczalnych

Badań Reologii

Zakładu Mechaniki

Ośrodków Ciągłych

## BADANIE WŁASNOŚCI METALI I FAL PRZYSPIESZENIA W METALACH PRZY OBCIĄŻENIACH DYNAMICZNYCH <sup>\*/</sup>

### 1. Sformułowanie problemu

#### 1.1. Cel podjętych badań

Dokładne poznanie własności plastycznych metali w warunkach obciążeń dynamicznych stanowi poważny problem techniczny. Z jednej strony zainteresowanie tymi zagadnieniami jest spowodowane potrzebami technologii, na przykład tłoczeniem wybuchowym i innymi procesami, z drugiej natomiast strony badania tego rodzaju rozszerzają znaczne horyzonty poznawcze przyczyniając się do głębszego zrozumienia zjawiska plastyczności metali.

Spośród wielu możliwych schematów doświadczalnych w badaniu własności plastycznych metali pod obciążeniami dynamicznymi wybrano schemat z wykorzystaniem zjawiska propagacji sprężysto-plastycznych fal w prętach. Należy tu dodać, że obrany kierunek badań może być uzupełnieniem innych technik eksperymentalnych, na przykład zmodyfikowanego pręta Hopkinsona, gdzie bada się bardzo krótkie próbki. Wiele

---

<sup>\*/</sup> praca stanowi pierwszą część rozprawy pt. "Doświadczalne badania sprężysto-plastycznych procesów falowych w metalach".

problemów natury podstawowej dotyczących propagacji fal sprężysto-plastycznych pozostaje dotychczas nierozwiązanych, z tego też powodu praca niniejsza posiada ogólny charakter poznawczy. Szczególny nacisk położono na opracowanie eksperymentalnych schematów dla wyznaczania dynamicznych charakterystyk naprężenie-odkształcenie w oparciu o zjawiska falowe oraz na elektroniczne techniki pomiarowe fal sprężysto-plastycznych.

## 1.2. Metody realizacji zadania

Ponieważ, jak wspomniano poprzednio, wiele problemów z zakresu propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach pozostaje dotychczas niewyjaśnionych, należało w pierwszym rzędzie zweryfikować istniejące poglądy w publikowanej literaturze. Następnie na podstawie istniejących danych należało wykonać opracowania własne przydatne w dalszej części pracy. Zagadnienia te przedstawiono w rozdziałach od 2 do 4 niniejszego opracowania. Na podstawie wniosków uzyskanych w tych rozdziałach opracowano w rozdziale 5 metody wyznaczania dynamicznych charakterystyk naprężenie-odkształcenie na podstawie zjawisk falowych. Podano tu również przegląd metod spotykanych w literaturze. Wreszcie w ostatnich dwóch rozdziałach, tj w rozdziale 6 i 7, podano opis stanowiska badawczego, które zostało zaprojektowane i wykonane w IPPT, oraz zastosowane metody pomiarowe i wyniki doświadczeń.

Należy dodać, że podjęta praca jest rezultatem współpracy z Instytutem Mechaniki Precyzyjnej w Warszawie. Autor opracowania pragnie tą drogą podziękować prof. J. Rychlewskiemu za opiekę nad pracą w trakcie jej wykonywania. Autor pragnie również podziękować mgr inż. A. Zinserlingowi za uczestnictwo w pracach projektowych nad częścią mechaniczną urządzenia oraz mgr inż. A. Kunickiemu za konsultowanie zagadnień elektronicznych w części dotyczącej budowy czujników z fotopowielaczami.



## 2. Podstawy teoretyczne opisu sprężysto-plastycznych fal w prętach

### 2.1. Założenia podstawowe

Pierwsze studia nad matematycznym opisem podłużnych fal w sprężystych prętach datują się jeszcze z końca XIX wieku. Podstawowe sformułowanie problemu dla nieskończonego pręta zostało podane w pracach Pochhammera /1876/ i Chree /1889/. Sformułowanie to należy uważać za dokładne, gdyż uwzględnia ono również bezwładność poprzeczną pręta. Obecnie, w oparciu o ścisłe teorie można z dużą dokładnością opisywać procesy propagacji fal sprężystych w prętach. Bardziej szczegółowe rozważania na ten temat można znaleźć w pracach [2], [4], [5], [8] i wielu innych.

Sformułowanie teoretycznego opisu propagacji fal sprężysto-plastycznych w pręcie jest znacznie bardziej skomplikowane, a to ze względu na wiele czynników mogących wpływać na ten proces.

Jako pierwszą próbę opisu można uznać pracę Donnela [3], gdzie rozważono propagację skokowego czoła fali z biliniowym modelem materiału, posiadającym jedynie dwa moduły: moduł Younga i stały moduł umocnienia.

Klasyczne sformułowanie problemu należy do Taylora, Kármána i Rachmatulina, prace [6], [12], [15]. Przy tym podejściu wprowadza się następujące założenia:

- a/ podczas przejścia fali przekroje pręta, które są prostopadłe do kierunku propagacji  $x$  pozostają prostopadłe i płaskie,
- b/ pole powierzchni przekroju poprzecznego pozostaje stałe, to jest przyjmuje się inżynierski wykres naprężenie-odkształcenie,  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\epsilon)$ , gdzie  $\bar{\sigma} = \frac{F}{A_0}$ ,  $F$  oznacza siłę działającą, a  $A_0$  pole początkowego przekroju pręta,
- c/ efekty bezwładności poprzecznej są zaniedbywane,

d/ zakłada się istnienie jednej i jednoznacznej krzywej umocnienia. Zwykle jest to krzywa statyczna  $\bar{\sigma}_{stat} = \bar{\sigma}(\varepsilon)$  chociaż z matematycznego punktu widzenia może to być dowolna krzywa, jednak z ograniczeniem na monotonicznie malejącą pochodną,  $0 \leq \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} \leq E$ . Ponieważ proces propagacji zachodzi zwykle dla małych odkształceń, rzędu  $\varepsilon \approx 0,02$ , przeto można również używać z niewielką różnicą rzeczywistej krzywej umocnienia  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\varepsilon)$ ; jest to tzw. równanie konstytutywne.

Jeżeli rozważyć równanie ruchu elementu o długości  $dx$  i o współrzędnej Lagrange'a  $x$  z aktualnie działającą siłą  $F/x, t$ , to otrzymuje się

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}, \quad /2.1/$$

gdzie  $U$  oznacza przemieszczenie w danej chwili  $t$ , a  $\rho$  gęstość materiału w rozważanym elemencie.

Ponadto z warunków kinematycznych otrzymuje się

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad /2.2/$$

Zależnie od rodzaju przyjętego równania konstytutywnego, które wraz z równaniami /2.1/ oraz /2.2/ stanowią kompletny opis problemu, otrzymuje się tę lub inną teorię propagacji fal sprężysto-plastycznych. I tak w teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina<sup>x/</sup> używa się równanie konstytutywne /założenie d/

$$\bar{\sigma} = f(\varepsilon) \quad \text{lub} \quad \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{1}{h(\varepsilon)}. \quad /2.3/$$

Funkcja  $h/\varepsilon$  / jest odwrotnością modułu stycznego  $E_t$  krzywej umocnienia  $\bar{\sigma} = f(\varepsilon)$ .

Otrzymany komplet równań rozwiązuje się metodą charakterystyk - patrz dodatek na końcu opracowania. Dla teorii TKR otrzymuje się rozwiązania w zamkniętej postaci, przekształca-

-----  
x/ dalej zwana teorią TKR.

jąc równania /2.1/, /2.2/ i /2.3/ w równanie falowe /2.4/

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2(\varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad /2.4/$$

z równaniem dwóch rodzin charakterystyk na płaszczyźnie fazowej /x, t/  $dx \pm C(\varepsilon) dt = 0$

$$\text{oraz } C(\varepsilon) = \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)^{1/2} \quad \text{lub } C(\varepsilon) = [\rho h(\varepsilon)]^{-1/2} \quad /2.5/$$

Zależność na charakterystyce dla problemu w prędkościach można zapisać

$$d \left[ \int_0^{\varepsilon_0} C(\varepsilon) d\varepsilon \pm v \right] = 0. \quad /2.6/$$

Badania doświadczalne wykazały, że wiele metali i stopów jest wrażliwych na prędkość odkształcenia, innymi słowy naprężenie plastycznego płynięcia zależy od aktualnej prędkości odkształcenia. To spostrzeżenie doprowadziło do wniosku, że teoria propagacji fal w prętach powinna ten fakt uwzględnić.

Problem ten rozwiązał najpierw Sokołowski [14] wprowadzając w r. 1948 zlinearyzowany względem lepkości typ równania konstytutywnego.

Następnie Malvern [10], [11] zastosował w roku 1951 bardziej ogólny typ równania, mianowicie

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad \text{lub } \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \left[ \dot{\sigma} + g(\sigma, \varepsilon) \right]. \quad /2.6/$$

Stąd teoria propagacji Sokołowskiego-Malverna, zwana w skrócie SM. W tej teorii przyłożone naprężenie w stanie sprężystym nie zależy od prędkości odkształcenia, również pomija się efekty bezwładności poprzecznej w stanie plastycznym posługując się równaniami /2.1/ i /2.2/. Przy stosowaniu tej teorii rozważane zagadnienia brzegowe mogą być rozwiązywane metodą charakterystyk wyłącznie na drodze numerycznej.



Wreszcie niedawno, bo w roku 1963 Cristescu [1], a w rok później Lubliner [9] zaproponowali teorię propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach z następującym równaniem konstytutywnym

$$\dot{\epsilon} = h(\delta, \epsilon) \delta + g(\delta, \epsilon). \quad /2.7/$$

O możliwości zastosowania równania konstytutywnego typu /2.7/ wspomniano również w pracy [13].

Teoria ta jest o tyle bardziej ścisła, że uwzględnia eksperymentalnie stwierdzony fakt, iż naprężenie plastycznego płynięcia  $\delta$  jest niejednoznaczna funkcją prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$ . Istnieje więc możliwość uwzględniania efektów historii prędkości odkształcenia [7]. Także i w tej teorii, która może być nazwana w skrócie teorią CL, pomija się efekty bezwładności poprzecznej.

Równanie /2.7/ obejmuje wszystkie poprzednio omówione przypadki, można je schematycznie ująć następująco:

Elementarna teoria fal sprężystych  $g(\delta, \epsilon) = 0$ ,  $h(\delta, \epsilon) \equiv \frac{1}{E}$ .

Teoria TKR  $g(\delta, \epsilon) = 0$ ,  $h(\delta, \epsilon) \equiv \frac{1}{E_t(\epsilon)}$ ,

gdzie:  $E_t(\epsilon) = \frac{d\delta}{d\epsilon}$ .

Teoria SM  $g(\delta, \epsilon) \neq 0$ ,  $h(\delta, \epsilon) \equiv \frac{1}{E}$ .

Teoria CL  $g(\delta, \epsilon) \neq 0$ ,  $h(\delta, \epsilon) \neq 0 \neq \frac{1}{E}$ .

Na uwagę zasługuje sugestia z pracy [13], aby z punktu widzenia mechanizmów dyslokacyjnych w metalach uwzględniać również człony w równaniu konstytutywnym wynikające z przyspieszenia dyslokacji do dużych prędkości na samym początku plastycznej części czoła fali. Równanie takie musiałyby mieć formę:

$$d\dot{\epsilon} = f(\delta, \epsilon, \dot{\epsilon}) d\delta + g(\delta, \epsilon, \dot{\epsilon}) d\epsilon + h(\delta, \epsilon, \dot{\epsilon}) dt. \quad /2.8/$$

Wydaje się, że człony przyspieszeniowe można jednak zaniedbywać.

We wszystkich przedstawionych tu teoriach propagacji sprężysto-plastycznych fal w prętach pomija się efekty bezwładności poprzecznej sprowadzając zagadnienie do jednoosiowego stanu naprężenia. Uwzględnienie bezwładności poprzecznej prowadzi do zagadnienia z istnieniem złożonego stanu naprężenia. Jednak eksperymenty przeprowadzone ostatnio z plastycznymi falami ścinania na długich próbkach rurkowych, gdzie bezwładność poprzeczna jest wyeliminowana, wykazały, że dla spotykanych technicznych warunków doświadczeń efekty bezwładności poprzecznej można w pierwszym przybliżeniu zaniedbywać.

W analizie i dyskusji przeprowadzonej w dalszych rozdziałach niniejszego opracowania ograniczono się do teorii TKR, odpowiednio uwzględniając wpływ prędkości odkształcenia na naprężenie plastycznego płynięcia. Jest to możliwe poprzez przyjęcie w rozważaniach prędkości odkształcenia jako parametru.

#### Literatura cytowana w tekście rozdziału 2

- [1] Cristescu N. - Some Problems of the Mechanics of Extensible Strings, Proc. Int. Symp. on Stress Waves in Anel. Solids, Brown University, /1963/.
- [2] Davies R.M. - Stress Waves in Solids, Surveys in Mechanics, The G.I. Taylor 70-th anniversary volume, Cambridge Univ. Press.
- [3] Donnel L.H. - Longitudinal Wave Transmission and Impact, Trans. ASME, 52 /1930/, 153.
- [4] Hopkins H.G. - Mechanical Waves and Strain-Rate Effects in Metals,
- [5] Kaliski S., /red./ - Drgania i fale, WNT, Warszawa /1968 /.

- [6] Kármán Th., Bohnenblust H.F., Hyers D.H. - The Propagation of Plastic Waves in Tension Specimens of Finite Length, Mat. Def. Res. Comm., OSRD No 946, Rep. No A-103, /1942/.
- [7] Klepaczko J. - Effects of Strain Rate History on the Strain Hardening Curve of Aluminium, Arch. Mech. Stos., 2, 19 /1967/, 211.
- [8] Kolsky K. - Stress Waves in Solids, Dover Publ. /1962 /.
- [9] Lubliner J. - A Generalized Theory of Strain-Rate Dependent Plastic Wave Propagation in Bars, J. Mech. Phys. Solids, 2, 12 /1964/, 59.
- [10] Malvern L.E. - Plastic Wave Propagation in a Bar of Material Exhibiting a Strain Effect, Quart. Appl. Math., 4, 8 /1951/, 405.
- [11] Malvern L.E. - The Propagation of Longitudinal Waves of Plastic Deformation in a Bar of Material Exhibiting a Strain-rate Effect, Journ. Appl. Mech., 2, 18 /1951/, 203.
- [12] X.А.Рахматулин, О распространении волны разгрузки, ПММ, I, 2 /1945/.
- [13] Simmons J.A., Hauser F., Dorn J.E. - Mathematical Theories of Plastic Deformation Under Impulsive Loading, Univ. of Calif. Publications in Engineering, 7, 5 /1962/.
- [14] В.В.Соколовский, Распространение упруго- пластических волн в стержнях, ПММ, 3, 12 /1948/.
- [15] Taylor G.I. - The Plastic Wave in a Wire Extended by on Impact Load, G.I. Taylor Scientific Papers, Cambridge /1942/.



### 3. Analiza czoła sprężysto-plastycznej fali w przecie

#### 3.1. Wstęp

Zależność plastycznych własności metali od prędkości odkształcenia i temperatury jest dotychczas dosyć dobrze poznane, a w szczególności dla stali niskowęglowych, aluminium i miedzi. Jednak sposób w jaki usiłuje się wykazać na drodze doświadczalnej wpływ prędkości odkształcenia na własności plastyczne danego metalu określa czy wpływ ten będzie się przejawiał w sposób wyraźny, czy też będzie stanowić czynnik drugorzędny.

Na przykład w metodzie badania dynamicznych krzywych umocnienia metali zwanej zmodyfikowanym prętem Hopkinsona, a zaproponowanej przez Kolskiego [18] i wykorzystywanej przez wielu badaczy [6], [8], [14], wpływ prędkości odkształcenia jest zawsze wyraźny. Badania te wykazały, że prawidłowe równanie konstytutywne powinno w pierwszym przybliżeniu uwzględniać wpływ prędkości odkształcenia i temperatury na krzywą umocnienia.

$$\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}, T), \quad /3.1/$$

gdzie  $\sigma$  oznacza rzeczywiste naprężenie plastycznego płynięcia,  $\epsilon$  odkształcenie, a  $\dot{\epsilon}$  prędkość odkształcenia;  
 $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$ , przez T oznaczono temperaturę w skali absolutnej.

Pogląd ten znajduje potwierdzenie w dyslokacyjnych teoriach termicznie aktywowanych procesów deformacji plastycznej w metalach [7], [11], [12].

Z drugiej strony istnieje liczna grupa prac eksperymentalnych w których przedstawia się wyniki uzyskane podczas badania kształtu czoła pierwszej fali przyspieszenia na próbkach w postaci długich prętów. Okazuje się, że wpływ prędkości odkształcenia obserwowany w badaniach tego rodzaju

jest stosunkowo mały, a niektórzy badacze, jak na przykład Bell [2], [3], [4] twierdzą, że wpływ taki nie istnieje. Wyniki eksperymentalnych prac Bella zostały opublikowane w monografii [2].

Celem niniejszej pracy jest dyskusja i wyjaśnienie dlaczego z jednej strony w innego typu badaniach stwierdza się wyraźny wpływ prędkości odkształcenia na własności plastyczne metali, z drugiej zaś strony, w badaniach przeprowadzanych na długich próbkach efekt ten jest nieznaczny, szczególnie w odniesieniu do kinematyki procesu.

Cała analiza zostanie przeprowadzona w oparciu o hipotezę, że jak stwierdzono w większości prac eksperymentalnych, metale wykazują wrażliwość na prędkość odkształcenia.

### 3.2. Rola teorii propagacji fal przyspieszenia w prętach

Obecnie uznaje się dwie teorie propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach. Pierwsza z nich, zwana teorią Taylora-Kármána-Rachmatulina, uwzględnia jedynie istnienie jednej krzywej umocnienia. Natomiast teoria opracowana przez Sokołowskiego oraz Malverna bierze również pod uwagę prędkość odkształcenia jako jedną ze zmiennych niezależnych, jednak uzyskanie rozwiązania danego problemu brzegowego jest możliwe jedynie na drodze numerycznej. Przegląd obu teorii, jak i dane literaturowe, można znaleźć na przykład w pracy [15].

Chociaż obecnie istnieje łatwość wykorzystywania maszyn liczących dla uzyskania rozwiązań numerycznych, to jednak przedyskutowanie wielu czynników, a w szczególności wpływu prędkości odkształcenia i temperatury, następczo wiele trudności. Ponieważ w teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina uzyskuje się rozwiązania zamknięte, toteż ta teoria została wybrana do obecnej analizy.

Wybór teorii TKR umożliwia stosunkowo prostą interpretację wyników badań doświadczalnych, które są celem obecnej pracy. Odpowiednie opracowanie wyników doświadczeń w oparciu o teorię TKR może w następstwie spowodować ulepszenie teorii SM lub CL.

Ze względu na wagę zagadnienia należy jeszcze raz podkreślić, że w teorii TKR zakłada się prostopadłość i stałość przekroju poprzecznego w stosunku do osi pręta, przyjmując tym samym inżynierską krzywą umocnienia  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\varepsilon)$  jako równanie konstytutywne, gdzie  $\bar{\sigma} = \frac{P}{A_0}$ , gdzie P jest aktualną siłą, a  $A_0$  oznacza początkowe pole przekroju pręta.

Rozwiązanie uprzednio podanego równania falowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad /3.2/$$

metodą charakterystyk wraz z równaniem

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\varepsilon) \quad /3.3/$$

prowadzi do zależności dla stanu plastycznego

$$dx \pm C dt = 0 \quad \text{oraz} \quad d \left[ \int_0^{\varepsilon} C(\varepsilon) d\varepsilon \pm v \right] = 0, \quad /3.4/$$

gdzie U oznacza przemieszczenie, v natomiast prędkość masową. Przez C oznaczono prędkość rozchodzenia się zaburzenia, tj. prędkość fali

$$C_0 = \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \quad /3.5/$$

dla obszaru sprężystego oraz

$$C = \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} \right)^{1/2} \quad /3.6/$$

dla obszaru odkształceń plastycznych.

Tak więc według tej teorii prędkość propagacji fal plastycz-



nych jest funkcją pierwszej pochodnej inżynierskiego wykresu umocnienia tj. modułu stycznego i ponieważ z założenia krzywa ta jest jednoznacznie określona, przeto fali o danej intensywności odkształcenia jest przyporządkowana tylko jedna prędkość jej propagacji.

Wynika stąd paradoks związany z tak zwaną falą dociążenia, a zaobserwowany po raz pierwszy przez Bella [5] oraz przez Sterngläsa i Stuarta [22]. Otóż prędkość fali dociążenia dla pewnej wartości odkształcenia  $\varepsilon$  powinna, zgodnie z teorią pomijającą efekt prędkości odkształcenia, być taka jak to określa zależność /3.6/. Eksperyment wykazuje, że tak nie jest i prędkość ta jest zbliżona do  $C_0$ , co jest zgodne z założeniami teorii propagacji fal Malverna-Sokolowskiego uwzględniającej efekt prędkości odkształcenia.

Dalszym wnioskiem wynikającym z zależności /3.4/ jest stwierdzenie, że stosunkowo najłatwiejszym do zrealizowania eksperymentalnego jest problem brzegowy dla półnieskończonego pręta, którego koniec,  $x = 0$ , został uderzony ze stałą prędkością  $v_0 = \text{const.}$  Jedynie ten przypadek będzie dyskutowany w dalszej części pracy.

Następny wniosek nasuwający się z równania /3.6/ jest taki, że zachowanie się metalu w stanie plastycznym, lub inaczej mówiąc równanie konstytutywne przybliżające to zachowanie, określa jednoznacznie prędkość fal plastycznych w rozważanym pręcie. Wniosek ten stanowi podstawę wielu prac eksperymentalnych. Główną trudnością w ich przeprowadzaniu jest zapewnienie odpowiednio dokładnych pomiarów kształtu czoła fali przemieszczającej się w pręcie stanowiącym próbkę.

### 3.3. Równanie konstytutywne

Metoda, która posłuży do dalszej analizy została z powodzeniem zastosowana do wykazania małego wpływu prędkości odkształcenia na wartość prędkości krytycznej w próbie roz-

ciągania [17]. Otóż założenie 3 pozwala na wykorzystanie równania konstytutywnego /3.1/ zamiast /3.3/ z tym, że prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  jest traktowana wówczas jako parametr,  $\dot{\epsilon} = \text{const}$ . W ten sposób można otrzymać zamknięte rozwiązanie postawionego problemu brzegowego z prędkością odkształcenia i temperaturą jako parametrami. Równocześnie pomija się tu różnicę pomiędzy wartością naprężenia inżynierskiego  $\bar{\sigma}$ , a naprężeniem rzeczywistym  $\sigma$ , to jest możliwe z tego względu, że zakres odkształceń w dyskutowanym typie eksperymentu nie przekracza 5%,  $0 \leq \epsilon \leq 0,05$ . Z warunku stałości objętości

$$\sigma = \bar{\sigma} (1 + \epsilon) \quad \text{stad} \quad \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)_{\text{max}} = 1,05$$

wartość ta mieści się w granicach dokładności metod pomiarowych w tego rodzaju eksperymentach.

Z kolei należy przedyskutować podstawowe założenie w opisie procesu propagacji fali plastycznej w pręcie, a mianowicie o traktowaniu prędkości odkształcenia jako parametru. W tym celu zostaną wykorzystane wyniki eksperymentalne uzyskane w pracach [1], [2], [3], [4] dla aluminium oraz miedzi. Wyniki dla aluminium uzyskano w szeregu wymienionych pracach Bella, a ich uśrednienie zamieszczono w pracy [2]. Wyniki Bakera i Yew zostały uzyskane przy skręcaniu długich próbek rurkowych i z tego powodu w niniejszej pracy zostaną odpowiednio zmienione podziałki rysunków tak, aby

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\gamma}}{2(1 + \nu)} \quad \text{oraz} \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\gamma}}{2(1 + \nu)}$$

Oryginalne wyniki tych autorów przedstawiające profile czoła fali sprężysto-plastycznej dla różnych odległości od końca próbki przedstawiono na rys. 3.1 oraz 3.2.

Dla znalezienia prędkości odkształcenia na czole fali podczas procesu propagacji krzywe te zróżniczkowano. Następnie rugując czas otrzymano historie prędkości odkształcenia

$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\epsilon)$ , wyniki przedstawiono na rys. 3.3 oraz rys. 3.4. Ponieważ wpływ prędkości odkształcenia na naprężenie plastycznego płynięcia jest zawsze proporcjonalny do logarytmu prędkości, przeto otrzymane historie prędkości odkształcenia przedstawiono na wykresach  $\log \dot{\epsilon} = \log \dot{\epsilon}(\epsilon)$ , jako statyczną prędkość odkształcenia przyjęto wartość  $\dot{\epsilon}_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$  w wyniku otrzymano rysunki 3.5 oraz 3.6.

Z kształtu otrzymanych krzywych wynika, że zarówno prędkość odkształcenia jak i jej zmiany na czole fali nie są duże. Oczywiście z pominięciem odległości rzędu pierwszej średnicy w przypadku próbki w postaci pręta, licząc od końca tj. od  $x = 0$ . W takim przypadku, gdy zmiany prędkości odkształcenia są rzędu dziesięciokrotnych lub mniejsze, przyrost naprężenia wywołany takimi zmianami wynosi zaledwie kilka procent w stosunku do naprężenia plastycznego płynięcia, uzyskanego przy stałej średniej prędkości odkształcenia, charakterystycznej dla procesu propagacji fal sprężysto-plastycznych. Przedstawiony pogląd jest szczególnie widoczny na rys. 3.5 oraz rys. 3.6, gdyż korzystając z definicji czułości na prędkość odkształcenia  $n$ , przedyskutowanej bardziej szczegółowo w pracach [16] oraz [20]

$$n = \left( \frac{\partial \log \delta}{\partial \log \dot{\epsilon}} \right)_{T, \epsilon} \quad / 3.7/$$

otrzymuje się  $\Delta \log \delta = n \Delta \log \dot{\epsilon}$ , a dla  $\Delta \log \dot{\epsilon} \approx 1$   
 $\Delta \log \delta = n$ . Ponieważ, jak wykazały badania, wartości  $n$  wynoszą dla temperatury pokojowej  $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$   $n_{Al} = 0,076$ ,  $n_{Cu} = 0,012$ , to  $\Delta \delta_{Al} = 4 \%$ , a  $\Delta \delta_{Cu} = 3 \%$ . Z kolei przyrosty naprężenia tego rzędu nie mogą zmienić zasadniczo obrazu kinematyki procesu propagacji fali w porównaniu z założeniem stałej średniej prędkości odkształcenia.

Równocześnie zmiany maksymalnych prędkości odkształcenia na czole fali nie są duże ze wzrostem  $x$ , przy czym  $x$  dla technicznych warunków przy tego rodzaju doświadczeniach

wynosi  $d \leq x \leq 10d$ ,  $d$  oznacza średnicę pręta. Wykres przedstawiający zmiany logarytmu maksimum prędkości odkształcenia na czole fali wzdłuż długości próbki stanowi rys.3.7.

Reasumując można stwierdzić, że w procesie propagacji fal przyspieszenia w metalach maksymalne prędkości odkształcenia, zależnie od  $v_0$ , wynoszą  $10^2 \text{ sek}^{-1} \leq \dot{\epsilon}_{\text{max}} \leq 10^3 \text{ sek}^{-1}$ . Równocześnie zmiany prędkości odkształcenia zarówno na czole fali jak i po długości próbki są stosunkowo niewielkie. Z tego względu traktowanie prędkości odkształcenia jako parametru wydaje się w pełni uzasadnione.

Jako podstawę dalszej analizy przyjęto równanie konstytutywne wykorzystując wprowadzoną uprzednio definicję czułości na prędkość odkształcenia /3.7/ oraz definicję wykładnika umocnienia /3.8/

$$m = \left( \frac{\partial \log \sigma}{\partial \log \dot{\epsilon}} \right)_{T, \dot{\epsilon}} \quad /3.8/$$

O ile  $m$  oraz  $n$  wykazują stałe wartości przy wzroście odkształcenia dla  $T = \text{const}$ , to fakt ten prowadzi w konsekwencji do równania konstytutywnego przedyskutowanego bardziej szczegółowo w pracach [9], [16] oraz [20]. Przy uwzględnieniu temperatury zgodnie z pracą [16] równanie to ma postać

$$\sigma = C_* (\epsilon_0 + \epsilon)^{m(T)} \left( \dot{\epsilon} \exp \frac{\Delta H(T)}{kT} \right)^{n(T)}, \quad \epsilon \geq \epsilon_y \quad /3.9/$$

1 równanie Hooke'a

$$\sigma = E(T)\epsilon, \quad \epsilon \leq \epsilon_y \quad /3.10/$$

w dodatku

$$m(T) = m_0 \left( 1 - \frac{T}{T_m} \right); \quad n(T) = \alpha T, \quad T \leq \frac{1}{2} T_m$$

$$n(T) = \alpha_1 \frac{T}{T_m}, \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{T_m} \quad /3.11/$$



$\sigma$ ,  $\varepsilon$  oraz  $\dot{\varepsilon}$  oznaczają naprężenie rzeczywiste, odkształcenie i prędkość odkształcenia,  $C_x$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $m_0$ ,  $\alpha$ ,  $T_m$ ,  $k$  stanowią stałe materiałowe. Funkcje  $m/T$ ,  $n/T$ ,  $E/T$  oznaczają odpowiednio wykładnik umocnienia, czułość na prędkość odkształcenia oraz moduł Younga jako funkcje temperatury  $T$ . Przy czym  $m_0$  oznacza atermiczny wykładnik umocnienia dla  $0^\circ\text{K}$ ,  $k$  stałą Boltzmanna. Funkcja  $\Delta H(T)$  oznacza z punktu widzenia termicznie aktywowanych procesów dyslokacyjnych w metalach część energii aktywacji dostarczanej przez naprężenie przy pokonywaniu barier energetycznych przez dyslokacje.

Wyrażenie

$$Z = \dot{\varepsilon} \exp \frac{\Delta H(T)}{kT}$$

jest parametrem Zenera-Hollomona [23].

Granicę plastyczności  $\sigma_y$  w funkcji  $\dot{\varepsilon}$  oraz  $T$  wyznacza rozwiązanie równania prawa Hooke'a [10] wraz z równaniem konstytutywnym /3.9/. Równanie /3.9/ można zapisać w bardziej ogólnej odwróconej formie

$$\dot{\varepsilon} = \nu(\varepsilon, T) \sigma(T) \exp \left[ - \frac{\Delta H(T)}{kT} \right], \quad /3.12/$$

gdzie  $\nu(\varepsilon, T)$  oznacza funkcję częstotliwości sieci krystalicznej. Jak wykazała analiza danych doświadczalnych [16], równanie konstytutywne /3.9/ opisuje z dobrym przybliżeniem krzywe umocnienia polikrystalicznych metali o sieci regularnej płaskocentrowanej w zakresie temperatur  $0^\circ\text{K} \leq T \leq \frac{1}{2} T_m$ . Otrzymany typ równania /3.12/ jest również spotykany w opisie zjawiska pełzania [13]. Dla przypadku  $T = \text{const}$  równania /3.9/ i /3.10/ upraszczają się odpowiednio do

$$\begin{aligned} \sigma &= B(\varepsilon_0 + \varepsilon)^m \dot{\varepsilon}^n & T = \text{const} & /3.13/ \\ & & \varepsilon > \varepsilon_y & \\ \sigma &= E\varepsilon & \varepsilon < \varepsilon_y & \end{aligned}$$

Ponieważ w szeregu pracach Bella zastosowano równanie konstytutywne o podobnej budowie, jednak z pominięciem wpływu prędkości odkształcenia, które zdaniem tego autora dobrze opisuje proces propagacji fal przyspieszenia w prętach, przeto równanie Bella zostanie porównane ilościowo z układem równań konstytutywnych /3.9/ oraz /3.10/. Wspomniane równanie zaproponowane przez Bella w najogólniejszej postaci przedstawia się następująco

$$\sigma = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} E(0) B_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right) (\varepsilon - \varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}, \quad r=0,1,2,3,\dots, /3.14/$$

gdzie  $E(0)$  oznacza izotropowy moduł Younga w 0 °K,  $B_0$  uniwersalną stałą materiałową,  $\varepsilon_0$  przesunięcie początku układu na osi odciętych. Równanie /3.14/ w prostszej postaci przyjmuje formę

$$\sigma = B_0^* \left(1 - \frac{T}{T_m}\right) \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad /3.15/$$

W przypadku stałej temperatury równanie /3.14/ sprowadza się do jeszcze prostszej formy

$$\sigma = \beta \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \beta \equiv B_0^* \left(1 - \frac{T}{T_m}\right).$$

Na przykład w temperaturze pokojowej dla polikrystalicznego aluminium w stanie wyżarzonym przy wartości  $\beta = 39,4 \text{ kg/mm}^2$  można dobrze opisać, jak to stwierdzono w pracach [2], [3], proces propagacji fal przyspieszenia w oparciu o teorię Taylora-Kármána-Rachmatulina.

Celem porównania zakłada się równanie /3.14/ w nieco ogólniejszej formie dla przypadku stałej temperatury  $\sigma = \beta \varepsilon^{m^*}$  i rozwiązując wraz z równaniem /3.13/ wyznacza się  $m^*$

$$m^* = m \frac{c \log(\varepsilon_0 + \varepsilon)}{c \log \varepsilon} + \frac{n \log \dot{\varepsilon} + \log \beta/B}{c \log \varepsilon}. \quad /3.16/$$

Zgodnie z danymi rys. 3.7 proces propagacji fal przyspieszenia odbywa się z niewiele zmieniającymi się prędkościami odkształcenia, przy czym średnia prędkość odkształcenia jest rzędu  $\dot{\epsilon} \approx 10^3 \text{ sek}^{-1}$ . Pozostałe wartości we wzorze /3.16/ dla aluminium w temperaturze  $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$  według pracy [16] wynoszą:  $B = 20 \text{ kg/mm}^2$ ,  $m = 0,3$ ,  $n = 0,02$ . Równocześnie dla stanu wyżarzzonego  $\epsilon_0 \approx 0$ . Jako uzupełnienie dokonano również obliczeń dla temperatur  $T = 200 \text{ }^\circ\text{K}$  oraz  $T = 400 \text{ }^\circ\text{K}$  przyjmując odpowiednie stałe podane w dalszej części pracy. Wyniki obliczeń dla  $\dot{\epsilon} = 10^3 \text{ sek}^{-1}$  przedstawiono na rys. 3.8.

Otrzymano więc zaskakujący wynik, że dynamiczne krzywe umocnienia w warunkach izotermicznych dla wszystkich trzech temperatur, przy  $\dot{\epsilon} = 10^3 \text{ sek}^{-1}$  można dobrze przybliżyć równaniem /3.15/ z wykładnikiem  $m_* = \frac{1}{2}$ .

Jednak proces propagacji fal sprężysto-plastycznych jest procesem adiabatycznym i traktując zagadnienie ściśle, każdorazowo należałoby rozpatrywać taki właśnie proces. Proces rozciągania próbek w warunkach adiabatycznych z wykorzystaniem równania typu /3.9/ został rozpatrzony w pracy [17]. Przez porównanie przyrostu pracy plastycznej z wywołanym przyrostem temperatury otrzymuje się

$$\frac{dT}{d\epsilon} = \frac{(1-H)}{\rho C_V(T)} \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}, T), \quad /3.17/$$

gdzie przez  $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}, T)$  oznaczono równanie konstytutywne /3.9/,  $C_V(T)$  oznacza funkcję ciepła właściwego,  $H$  część energii dysypowanej w sieci krystalicznej podczas deformacji plastycznej, zwykle  $H \approx 0,1$ . Gdy temperatura na czole fali wzrasta, maleje równocześnie moduł styczny, który w przypadku założenia stałej prędkości odkształcenia, powoduje zmniejszenie prędkości propagacji fali. Zmianę modułu stycznego można zapisać w formie

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{T, \dot{\epsilon}} + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{\epsilon, \dot{\epsilon}} \frac{dT}{d\epsilon}, \quad /3.18/$$

wywołana zmiana prędkości propagacji fali według teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina wyniesie zgodnie z /3.6/

$$C_{A,\dot{\varepsilon}} = \left\{ \frac{1}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon} \right)_{T,\dot{\varepsilon}} + \left( \frac{\partial \delta}{\partial T} \right)_{\varepsilon,\dot{\varepsilon}} \frac{dT}{d\varepsilon} \right] \right\}^{1/2} \quad /3.19/$$

lub

$$C_{A,\dot{\varepsilon}}^2 = C_{T,\dot{\varepsilon}}^2 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \delta}{\partial T} \right)_{\varepsilon,\dot{\varepsilon}} \frac{dT}{d\varepsilon}, \quad /3.20/$$

gdzie przez  $C_{T,\dot{\varepsilon}}$  oznaczono izotermiczną prędkość propagacji fali przyspieszenia. Należy pamiętać, że wyrażenie  $\left( \frac{\partial \delta}{\partial T} \right)_{\varepsilon,\dot{\varepsilon}}$  posiada wartość ujemną. Względne zmniejszenie prędkości propagacji ozoła fali w warunkach adiabatycznych wyniesie

$$\left( \frac{C_A}{C_T} \right)_{\dot{\varepsilon}} = \left[ 1 + \frac{1}{\rho C_{T,\dot{\varepsilon}}^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial T} \right)_{\varepsilon,\dot{\varepsilon}} \frac{dT}{d\varepsilon} \right]^{1/2}. \quad /3.21/$$

W celu obliczenia wartości stosunku /3.21/ zakłada się ciągle widmo energii aktywacji w funkcji temperatury w równaniu konstytutywnym /3.9/, wówczas

$$\Delta H(T) = H_{sd} - H(T) \quad /3.22/$$

z założenia  $H(T) = 0$  dla  $T = 0$  °K oraz  $H(T) = H_{sd}$  dla  $T = \frac{1}{2} T_m$ , stąd

$$H(T) = 2 H_{sd} \frac{T}{T_m}, \quad T \leq \frac{1}{2} T_m,$$

gdzie  $H_{sd}$  oznacza wartość energii aktywacji samodyfuzji.

Po wykorzystaniu równania konstytutywnego /3.9/ można wyznaczyć

$$\left( \frac{\partial \delta}{\partial T} \right)_{\varepsilon,\dot{\varepsilon}} = -5(\varepsilon,\dot{\varepsilon},T) \ln \left( \varepsilon \frac{m_c}{T_m} \dot{\varepsilon}^{-\alpha} e^{2 \frac{\alpha}{K} \frac{H_{sd}}{T_m}} \right). \quad /3.23/$$



Uwzględniając /3.17/ i /3.23/ szukane względne zmniejszenie prędkości propagacji fali w warunkach adiabatycznych posiada postać

$$\left(\frac{C_A}{C_T}\right) \dot{\epsilon} = \left[ 1 - \frac{\epsilon}{m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right)} \frac{(1-H)}{\rho C_V(T)} \delta(\epsilon, \dot{\epsilon}, T) \ln \left( \epsilon \frac{m_0}{T_m} \dot{\epsilon}^{-\alpha} e^{2 \frac{\alpha}{k} \frac{H_{sd}}{T_m}} \right) \right] \quad /3.24/$$

Zależność /3.24/ w przypadku aluminium dla temperatury pokojowej  $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$  oraz dla  $\dot{\epsilon} = 10^3 \text{ sek}^{-1}$  została przeanalizowana numerycznie. Stałe wchodzące do równania /3.24/ zostały przyjęte z innych prac:  $m_0 = 0,5$ ,  $\alpha = 6 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$  według [16];  $H = 0,1$ ,  $C_V 300 = 5,8 \text{ cal/mol }^\circ\text{K}$ ,  $T_m = 933 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/}^\circ\text{K}$  według [17], ponadto  $\epsilon_0 = 0$ ,  $C_* = 13,65 \text{ kg/mm}^2$ ,  $H_{sd} = 35500 \text{ cal/mol}$ .

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabelicy I. Z tabelicy I wynika, że dla małych wartości odkształceń, adiabatyczność procesu nie wpływa w zasadniczy sposób na prędkość propagacji fal plastycznych, jednak w otoczeniu  $0 \text{ }^\circ\text{K}$  wpływ ten może być znacznie większy. Z równania /3.24/ wynika również, że wpływ prędkości odkształcenia na stosunek  $\left(\frac{C_A}{C_T}\right) \dot{\epsilon}$  jest znikomy.

Równocześnie z analizy procesu wynika, że naprężenie plastycznego płynięcia w warunkach adiabatycznych systematycznie zmniejsza się wraz ze wzrostem odkształcenia w porównaniu z izotermiczną krzywą umocnienia. Nawiązując do rys. 3.8 należy się spodziewać, że wykładnik umocnienia  $m$  dla procesu adiabatycznego będzie się jeszcze mniej różnić od  $m_* = \frac{1}{2}$  przy waroście deformacji w porównaniu do wartości izotermicznej. W ten sposób należy uznać, że równanie

$$\sigma = B_0^* \left(1 - \frac{T}{T_m}\right) \epsilon^{\frac{1}{2}}$$

dobrze przybliża adiabatyczne krzywe umocnienia dla  $\dot{\epsilon} \approx 10^3 \text{ sek}^{-1}$ . Fakt ten poiąga za sobą dobry opis zjawiska propagacji fal przyspieszenia w prętach przy użyciu tego równania.

### 3.4. Analiza kształtu czoła fali

Zgodnie z równaniem /3.6/ każda fala plastyczna o danej intensywności propagauje się wzdłuż pręta ze stałą prędkością  $\frac{dx}{dt}$ , zależną od aktualnej wartości  $\frac{d\delta}{d\varepsilon}(\varepsilon)$  dla danej wartości odkształcenia. Ponieważ z założenia  $\frac{d\delta}{d\varepsilon}(\varepsilon)$  jest malejącą funkcją odkształcenia, to czoło fali plastycznej ulega silnej dyspersji /rozmyciu/. Zjawisko dyspersji przejawia się między innymi w zmniejszaniu się prędkości odkształcenia wraz ze wzrostem  $x$ , jak to pokazano w oparciu o wyniki doświadczalne przedstawione na rys. 3.3, rys. 3.4 oraz rys. 3.7. Celem otrzymania takiej zależności zostanie wykorzystane równanie charakterystyki /3.4/. Ponieważ dla  $\dot{\varepsilon} = \text{const}$ , również  $\frac{dx}{dt} = \text{const}$ , to

$$\frac{x}{t} = C(\varepsilon) \quad \text{lub po odwróceniu} \quad \varepsilon = C^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) \quad /3.25/$$

stąd

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ C^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) \right] \quad x = \text{const} \quad /3.26/$$

$x$  odgrywa rolę parametru, a  $\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon}$  opisuje zmiany prędkości odkształcenia na czołe fali w poszczególnych przekrojach pręta. Uwzględniając równanie konstytutywne /3.9/ dla  $\dot{\varepsilon}_0 = 0$  otrzymuje się

$$C_T = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{C_* m(\tau)}{\varepsilon^{1-m(\tau)}} \right]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{n(\tau)}{2}, \quad /3.27/$$

$$\varepsilon = \left( \frac{C_* m(\tau)}{\rho} \right)^{\frac{1}{1-m(\tau)}} \left( \frac{t}{x} \right)^{\frac{2}{1-m(\tau)}} \geq \frac{n(\tau)}{1-m(\tau)}$$

/3.28/

oraz po zróżniczkowaniu /3.28/ i wyrugowaniu czasu

$$\dot{\epsilon} = \frac{2[m(\tau)]^{\frac{1}{2}}}{1-m(\tau)} \left( \frac{C^*}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\epsilon^{\frac{1+m(\tau)}{2}}}{x} Z^{\frac{n(\tau)}{2}} ; \quad x = \text{const. /3.29/}$$

Parametr Zenera-Hollomona wraz z odpowiednim wykładnikiem w równaniach /3.27/, /3.28/ i /3.29/ obrazuje wpływ prędkości odkształcenia jako parametru w równaniu konstytutywnym na wyprowadzone zależności na czole fali w danym przekroju pręta. Wpływ ten jest znacznie mniejszy w porównaniu z wpływem prędkości odkształcenia na naprężenie plastycznego płynięcia krzywej umocnienia, gdzie odpowiadającym wykładnikiem jest  $n(T)$ . Ponieważ dla większości metali wartości czułości na prędkość odkształcenia  $n$  zmieniają się w granicach  $0 \leq n \leq 0,03$  dla odpowiednich granic temperatur w skali homologicznej  $0 \leq \frac{T}{T_1} \leq \frac{1}{2}$ , to uzyskane wykładniki przy  $Z$  są stosunkowo małe i  $m$ cały współczynnik  $Z$  nawet dla stosunkowo dużych  $Z$  niewiele różni się od jedności.

Drugim wnioskiem, wynikającym z zależności /3.29/ jest fakt, że prędkości odkształcenia dla  $\epsilon = \text{const}$  i  $Z = \text{const}$  są odwrotnie proporcjonalne do drogi czoła fali  $x$ . Dla sprawdzenia tego wniosku wykorzystano wyniki eksperymentalne przedstawione na rys. 3.3 i rys. 3.4 sporządzając wykres maksymalnych prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_{\text{max}}$  jako funkcję odwrotności drogi  $\frac{1}{x}$ . Otrzymane wykresy dla aluminium i miedzi przedstawiono na rys. 3.9. Zarówno dla aluminium jak i miedzi otrzymano dobrą zgodność z przewidywaniami.

Z kolei, wykorzystując zależność /3.4/ na charakterystyce, zostanie przedyskutowany związek pomiędzy prędkością uderzenia  $v_0$  na końcu pręta,  $x = 0$ ,  $t = 0$ , a wywołanym maksymalnym odkształceniem  $\epsilon_{\text{max}}$  na czole fali. Po podstawieniu /3.27/ do /3.4/ i scałkowaniu otrzymuje się dla warunków izotermicznych

$$(\varepsilon_{\max})_T = \left[ \frac{\rho(m(T)+1)}{\Delta C_* m(T)} v_0^2 \right]^{\frac{1}{m(T)+1}} Z^{-\frac{n(T)}{m(T)+1}}, \quad /3.30/$$

Otrzymany wykładnik przy Z jest największy oprócz uzyskanego w równaniu /3.28/ w porównaniu do wykładników równań /3.27/ oraz /3.29/, szczególnie dla dużych wartości  $\frac{T}{T_m}$ . Stąd wydaje się, że w procesie propagacji fal przyspieszenia wpływ prędkości odkształcenia może być zauważalny przy śledzeniu zmian maksymalnego odkształcenia  $\varepsilon_{\max}$  wraz ze wzrostem prędkości udeżenia  $v_0$  oraz rozkładu odkształcenia na czole fali  $\varepsilon(t)$  w funkcji czasu.

Porównanie wszystkich znormalizowanych wykładników, oznaczonych przez  $\eta$  z odpowiednimi indeksami, w funkcji temperatury homologicznej  $\theta = \frac{T}{T_m}$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , przedstawiono na rys. 3.10. Zgodnie z /3.9/  $n(T) = \alpha_1 \theta$ ,  $m(T) = m_0(1 - \theta)$  oraz  $\alpha_1 = \alpha T_m$  i  $m_0 = \frac{1}{2}$ , na przykład  $(\alpha_1)_{Al} = 0,056$  i  $(\alpha_1)_{Cu} = 0,060$ . Wykładniki w nowej postaci przedstawiono poniżej

$$\eta_c = \eta_\varepsilon = \frac{1}{2} \alpha_1 \theta,$$

$$\eta_\varepsilon = \frac{\alpha_1 \theta}{1 - m_0(1 - \theta)},$$

$$-\eta_{\max} = \frac{\alpha_1 \theta}{m_0(1 - \theta) + 1}.$$

Wartość  $\frac{\eta}{\alpha_1} = 1$  jest znormalizowaną czułością na prędkość odkształcenia opisującą wpływ prędkości odkształcenia na naprężenie plastycznego płynięcia w próbach jednoosiowego rozciągania, ściskania lub skręcania. W zakresie temperatur homologicznych  $0,2 \leq \theta \leq 0,3$ , który dla większości metali odpowiada temperaturze pokojowej, odpowiednie znormalizowane wykładniki  $\frac{\eta}{\alpha_1}$ , charakterystyczne dla uwzględnienia wpływu prędkości odkształcenia w mechanizmie propagacji



fali plastycznej, są mniejsze niż  $\frac{\eta}{\alpha_1} = 1$ . W omawianym zakresie temperatur znormalizowane wartości  $\eta$  zawierają się w granicach  $0,10 \leq \frac{\eta}{\alpha_1} \leq 0,45$ .

Ponieważ w badaniach doświadczalnych bardzo często mierzy się bezpośrednio maksymalne odkształcenia na czole fali  $\epsilon_{\max}$  dla różnych  $v_0$ , przeto będzie interesujące podanie odpowiednika wzoru /3.30/, lecz dla warunków adiabatycznych. Wykorzystując zależności /3.17/, /3.19/ oraz /3.23/ otrzymuje się

$$v_0(\epsilon)_A = C_* z^{n(\tau)} \int_0^{\epsilon_{\max}} \epsilon^{m(\tau)} \left\{ P(z, \tau) \epsilon^{-(1+m(\tau))} - Q(\tau) \ln \epsilon - R(\tau, \epsilon) \right\}^{\frac{1}{2}} d\epsilon \quad /3.31/$$

zgodnie z prawem Hooke'a  $v_0 > C \epsilon$ , przez P, Q i R oznaczono funkcje

$$P(z, \tau) = \frac{m(\tau)}{\beta C_* z^{n(\tau)}}$$

$$Q(\tau) = \frac{(1-H)m_0}{\beta^2 C_v(\tau) T_m}$$

$$R(\tau, \epsilon) = \frac{1-H}{\beta^2 C_v(\tau)} \left[ 2 \frac{\alpha}{k} \frac{H_{sd}}{T_m} - \alpha \ln \epsilon \right].$$

W celu scałkowania równania /3.31/ w postaci zamkniętej można przyjąć z popełnieniem małego błędu, że  $\epsilon \frac{m_0}{T_m} \epsilon^{-\alpha} \approx 1$  na przykład dla aluminium  $m_0 = \frac{1}{2}$ ,  $T_m = 933 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $\dot{\epsilon} = 10^3 \text{ sek}^{-1}$ ,  $\alpha = 6 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$ , wówczas dla  $\epsilon = 0,05$   $\epsilon \frac{m_0}{T_m} \epsilon^{-\alpha} = 0,9988$ . Dla takiego przypadku

$$Q(\tau) \ln \epsilon - R(\tau, \epsilon) \approx 2 \frac{\alpha}{k} \frac{H_{sd}}{T_m} \frac{(1-H)}{\beta^2 C_v(\tau)} \equiv S(\tau),$$

a po scałkowaniu

$$V_0(\varepsilon_{\max})_A = \frac{C_* Z^{n(\tau)} P(Z, T)}{[1+m(\tau)] [S(\tau)]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left[ \frac{F(\varepsilon_{\max})-1}{F^2(\varepsilon_{\max})} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{1}}{2} - \arctg \left[ F(\varepsilon_{\max})-1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} / 3.32/$$

lub po uwzględnieniu postaci funkcji  $P(Z, T)$  oraz  $S(T)$

$$V_0(\varepsilon_{\max})_A = \frac{m(\tau)}{1+m(\tau)} \left[ \frac{k T m C_v(\tau)}{2 \alpha H_{sd} (1-H)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \left[ \frac{F(S_{\max})-1}{F^2(\varepsilon_{\max})} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{1}}{2} - \arctg \left[ F(\varepsilon_{\max})-1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad /3.33/$$

przy  $F(\varepsilon_{\max}) - 1 \geq 0$  oraz  $v_0 > C_0 \varepsilon_y$ , gdzie

$$F(\varepsilon_{\max}) = \frac{P(Z, T)}{S(\tau) \varepsilon_{\max}^{1+m(\tau)}}$$

Po odwróceniu równania /3.32/ można uzyskać wartość  $\varepsilon_{\max}$  w procesie adiabatycznym dla danej prędkości uderzenia  $v_0$ .

Celem zorientowania się w różnicach maksymalnego odkształcenia  $\varepsilon_{\max}$  dla procesów izotermicznego i adiabatycznego przy jednakowej wartości  $v_0$ , równania /3.30/ oraz /3.33/ zostały przeliczone numerycznie. Wartości stałych przyjętych do obliczeń dla aluminium w temperaturze pokojowej,  $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$ , są w obecnym przypadku takie same jak przy obliczeniach dla równania /3.24/, równocześnie  $\dot{\varepsilon} = 10^3 \text{ sek}^{-1}$ . Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3.11. Górna krzywa jest obliczoną funkcją  $v_0(\varepsilon_{\max})_T$  dla warunków izotermicznych, równanie /3.30/, dolna natomiast odnosi się do warunków adiabatycznych, równanie /3.33/. Wraz z uzyskanymi krzywymi naniesiono wyniki doświadczalne dla wyżarzonego alumi-

nium uzyskane przez Kolskiego [19]. Należy tu podkreślić bardzo dobrą zgodność wyników doświadczalnych z przewidywaniami teoretycznymi, jak również małą różnicę w teoretycznie uzyskanych wartościach  $\varepsilon_{\max}$  dla procesów izotermicznego i adiabatycznego. Dla bliższego zorientowania się o wartości tej różnicy sporządzono tablicę II, gdzie dla różnych wartości odkształceń maksymalnych  $\varepsilon_{\max}$  obliczono odpowiadający stosunek  $\left(\frac{v_0}{v_0}\right)_T / \left(\frac{v_0}{v_0}\right)_A$ .

Ogólnie można stwierdzić, że wpływ procesu adiabatycznego dla temperatury pokojowej nie jest duży i zwiększenie początkowej prędkości uderzenia  $v_0$  o 2 % powoduje uzyskanie jednakowych odkształceń maksymalnych na czole fali. Należy się jednak spodziewać, że różnice te byłyby znacznie większe w niskich temperaturach, a więc dla zakresu  $0^\circ\text{K} \leq T \leq 100^\circ\text{K}$ .

### 3.5. Dyskusja i wnioski

Zastosowanie teorii Taylora-Kármána-Bachmatulina z prędkością odkształcenia i temperaturą jako parametrami w równaniu konstytutywnym pozwala na pierwsze przybliżenie w oszacowaniu wpływu tych dwóch czynników na kształt czoła sprężysto-plastycznej fali przyspieszenia w prętach metalowych. Oszacowanie to jest możliwe dzięki uzyskaniu zamkniętych zależności zarówno dla charakterystyk, jak i na charakterystykach.

Analiza danych doświadczalnych wykazała z jednej strony, że zmiany prędkości odkształcenia na czole fali nie są duże, a spotykane wartości prędkości odkształcenia dla technicznych warunków doświadczeń zawierają się dla większości przypadków w zakresie  $10^2 \text{ sek}^{-1} \leq \dot{\varepsilon} \leq 10^3 \text{ sek}^{-1}$ . Z drugiej strony, na podstawie przytoczonej analizy można stwierdzić, że wpływ prędkości odkształcenia na wszystkie charakterystyczne funkcje opisujące proces propagacji sprężysto-plastycznych fal przyspieszenia w prętach z metali polikrystalicznych o sieci regularnej płaskocentrowanej jest niewielki.

Wniosek ten znajduje potwierdzenie w wynikach pracy [21], gdzie zaobserwowano, że zależności odkształcenie-czas dla propagującej się fali plastycznej mogą być znalezione zarówno w oparciu o równanie konstytutywne z wpływem prędkości odkształcenia typu  $\sigma = \sigma_0 + \delta \ln \dot{\epsilon}$ , jak i w oparciu o równanie, które wpływ ten pomija, o ile badany metal jest umiarkowanie wrażliwy na prędkość odkształcenia.

Wydaje się również, że zastosowane w obecnej analizie równanie konstytutywne dla metali o sieci regularnej płaskocentrowanej, uwzględniające prędkość odkształcenia i temperaturę, stanowi dobry opis własności plastycznych dyskutowanych metali i dobrze odzwierciadla wpływ poszczególnych czynników. Należy dodać, że równanie /3.13/ zostało wykorzystane do analizy numerycznej czoła fali oraz odkształceń trwałych w pracy [10] z wykorzystaniem dokładnej teorii propagacji fal przyspieszenia przy różnych kombinacjach wartości wykładnika umocnienia  $m$  i czułości na prędkość odkształcenia  $n$ . Jednak w analizie tej nie uwzględniono wpływu temperatury.

Przytoczone wyniki uzyskane podczas analizy równania

Bella

$$\sigma = \beta \left( 1 - \frac{T}{T_m} \right) \dot{\epsilon}^{\frac{1}{2}}$$

wskazywałyby, że równanie to stanowi dobry opis adiabatycznych krzywych umocnienia w zakresie prędkości odkształcenia  $10^2 \text{ sek}^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 10^3 \text{ sek}^{-1}$ . Użycie tego równania konstytutywnego pociąga za sobą wynik w postaci dobrego opisu zjawiska propagacji fal przyspieszenia dla polikrystalicznych metali o sieci regularnej płaskocentrowanej. a w szczególności dla polikrystalicznego aluminium.

Dalszym wnioskiem, który może być przydatny w pracach eksperymentalnych jest obserwacja, że odpowiednie prędkości odkształcenia maleją odwrotnie proporcjonalnie do dystansu od końca pręta. Również z punktu widzenia eksperymentu duże



znaczenie posiada fakt, że największe możliwości w wykryciu efektów prędkości odkształcenia istnieją przy pomiarze rozkładu odkształceń na czołe fali. We wszystkich innych charakterystycznych dla procesu propagacji wielkościach efekt prędkości odkształcenia jest odpowiednio mniejszy.

Ogólna reguła jest taka, że wpływ prędkości odkształcenia na poszczególne wielkości na czołe fali jest większy w obszarze temperatur podwyższonych  $0,2 \leq \vartheta \leq 0,5$ . Natomiast w obszarze temperatur niskich  $0 \leq \vartheta < 0,2$  niewątpliwie większą rolę odgrywa sam fakt adiabatyczności procesu.

Na zakończenie należy podkreślić, że teoria Taylora-Kármána-Rachmatulina jest szczególnym przypadkiem teorii uwzględniającej w sposób ścisły wpływ prędkości odkształcenia w równaniu konstytutywnym. Ogólnie wiadomo, jak to wspomniano poprzednio, że teoria pomijająca efekt prędkości odkształcenia nie jest w stanie opisać efektu fali dociążania, która propaguje się z inną prędkością niż to wynika z aktualnej wartości modułu stycznego. Zagadnienie to jest jednak złożone i wymagałoby odrębnego opracowania.

Udowodniono jednak ogólnie, że teoria Taylora-Kármána-Rachmatulina stanowi bardzo dobre pierwsze przybliżenie w opisie procesu propagacji fal przyspieszenia w prętach wykonanych z metali o umiarkowanej wrażliwości na prędkość odkształcenia.

#### Literatura cytowana w tekście rozdziału 3

- [1] Baker W.E. and Yew C.H. - Strain-Rate Effects in the Propagation of Torsional Plastic Waves, Journ. Appl. Mech., vol. 33, No 4 /1966/, 917.
- [2] Bell J.F. - The Physics of Large Deformation of Crystalline Solids, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 14, Springer /1968/.

- [3] Bell J.F. - Propagation of Large Amplitude Waves in Annealed Aluminium, Journ. Appl. Phys. vol. 31, No 2 /1960/, 277.
- [4] Bell J.F. - Study of Initial Conditions in Constant Velocity Impact, Journ. Appl. Phys., vol. 31, No 12 /1960/, 2188.
- [5] Bell J.F. - Propagation of Plastic Waves in Pre-stressed Bars, U.S. Navy Technical Report No 5, Baltimore, The Johns Hopkins University, /1951/.
- [6] Chiddister J.L. and Malvern L.E. - Compression Impact Testing of Aluminium at Elevated Temperatures, Expl. Mech. vol. 3, No 4 /1963/, 81.
- [7] Conrad H. - Thermally Activated Deformation of Metals, Journ. of Metals, vol. 16, No 7 /1964/, 582.
- [8] Davies E.D.H. and Hunter S.C. - The Dynamic Compression Testing of Solids by the Method of the Split Hopkinson Pressure Bar, Journ. Mech. Phys. of Solids, vol. 11, No 2 /1963/, 155.
- [9] Davis E.A. - Creep and Relaxation of Oxygen - Free Copper, Journ. Appl. Mech., vol. 10, No 3 /1943/, A101.
- [10] Davis E.A. - Effect of Physical Properties on the Strain Distribution During Impact of Long Rods, Proc. Fifth U.S. Natl. Congress of Appl. Mech., Ed. ASME /1966/, 114.
- [11] Dorn J.E., Mitchell J. and Hauser F. - Dislocation Dynamics, Expl. Mech., vol. 5, No 1 /1965/, 1.
- [12] Dorn J.E. - Low Temperature Dislocation Mechanisms, Proc. Conf. Seattle, /1967/, 27.
- [13] Garofalo F. - Fundamentals of Creep and Creep - Rupture in Metals, Macmillan, /1965/.
- [14] Hauser F.E., Simmons J.A. and Dorn J.E. - Strain-Rate Effects in Plastic Wave Propagation, Response of Metals to High Velocity Deformation, Inter-science /1961/, 93.

- [15] Hopkins H.G. - Mechanical Waves and Strain-Rate Effects in Metals, Stress Waves in Anelastic Solids, Springer /1964/, 133.
- [16] Klepaczko J. - O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury, Rozpr. Inż., vol. 13, No 3 /1965/, 561.
- [17] Klepaczko J. - Generalized Conditions for Stability in Tension Tests, Int. Journ. Mech. Sciences, vol. 10, No 5 /1968/, 297.
- [18] Kolsky H. - An Investigation of the Mechanical Properties of Materials at very High Rates Loading, Proc. Phys. Soc., vol. B62 /1949/, 676.
- [19] Kolsky H. - The Propagation of Mechanical Pulses in Anelastic Solids, Behavior of Materials Under Dynamic Loading, ed. J. Huffington, ASME /1965/, 1.
- [20] Lubahn J.D., Felgar R.P. - Plasticity and Creep of Metals, J. Wiley, /1961/.
- [21] Malvern L.E. and Efron L. - Stress Propagation and Dynamic Testing; Longitudinal Plastic Wave Propagation in Annealed Aluminium Bars, Techn. Rep. No 1, Grant G-24898, National Science Foundation, Michigan State University, East Lansing, Mich., /1964/.
- [22] Sternglass E.J. and Stuart D.A. - An Experimental Study of the Propagation of Transient Longitudinal Deformations in Elastoplastic Media, Journ. Appl. Mech., vol. 20, No 3 /1953/, 427.
- [23] Zener C. and Hollomon J.H. - Effect of Strain-Rate Upon Plastic Flow in Steel, Journ. Appl. Phys., vol. No 1 /1944/, 22.

Spis tablic

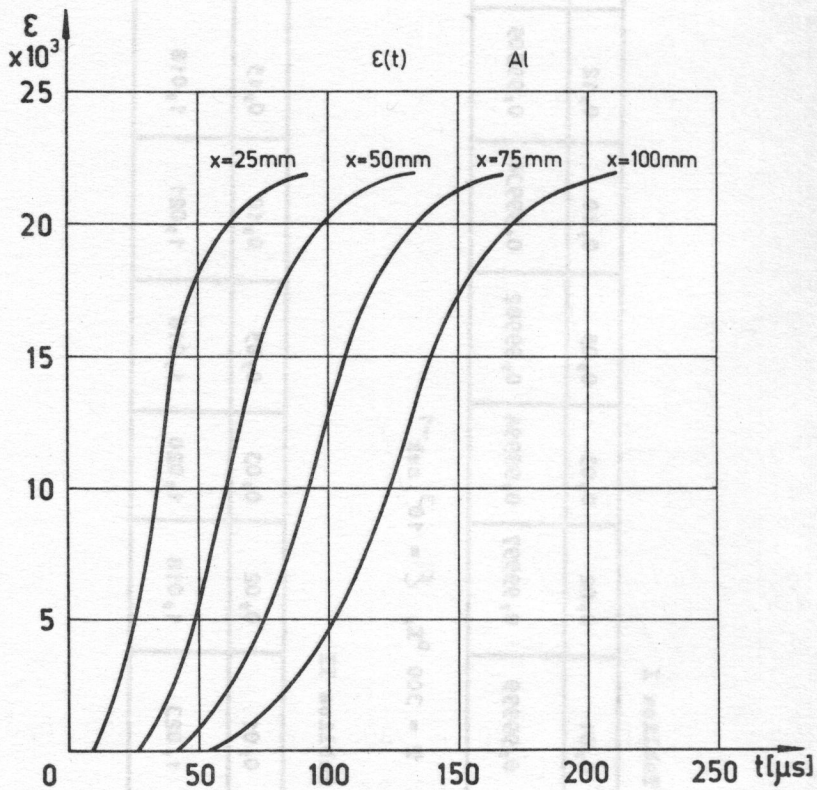
Tablica I

$\varepsilon$	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,12	0,15
* $\frac{C_A}{C_T} \varepsilon$	0,99999	0,99997	0,99994	0,99982	0,99934	0,99909	0,99805

$T = 300 \text{ } ^\circ\text{K}, \quad \xi = 10^3 \text{ sek}^{-1}$

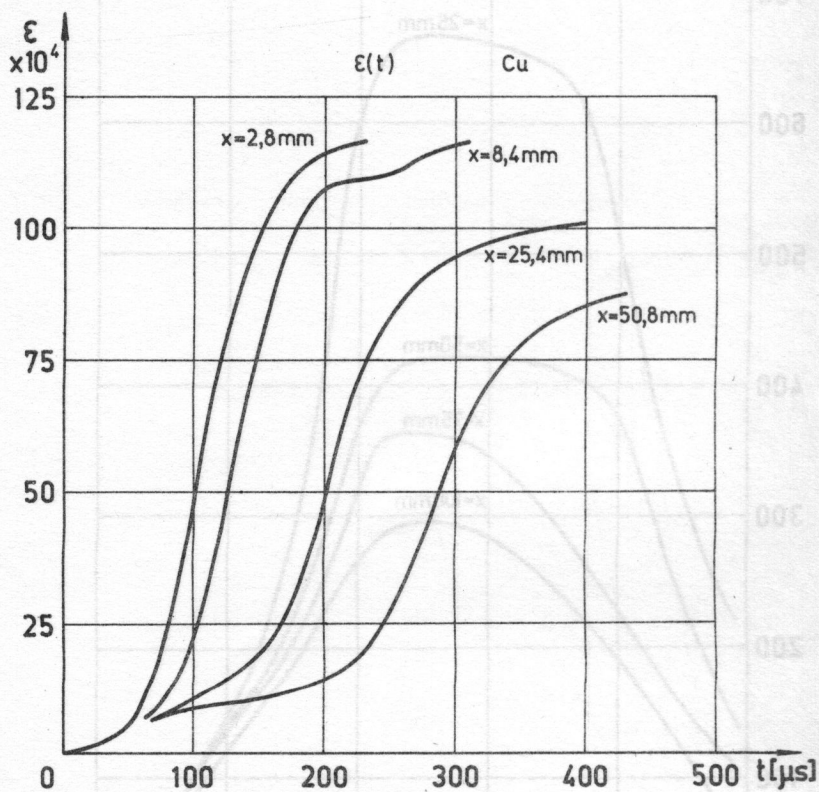
Tablica II

$\varepsilon_{max}$	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,15
$\frac{v_0 T}{v_0 A}$	1,023	1,018	1,020	1,016	1,021	1,018

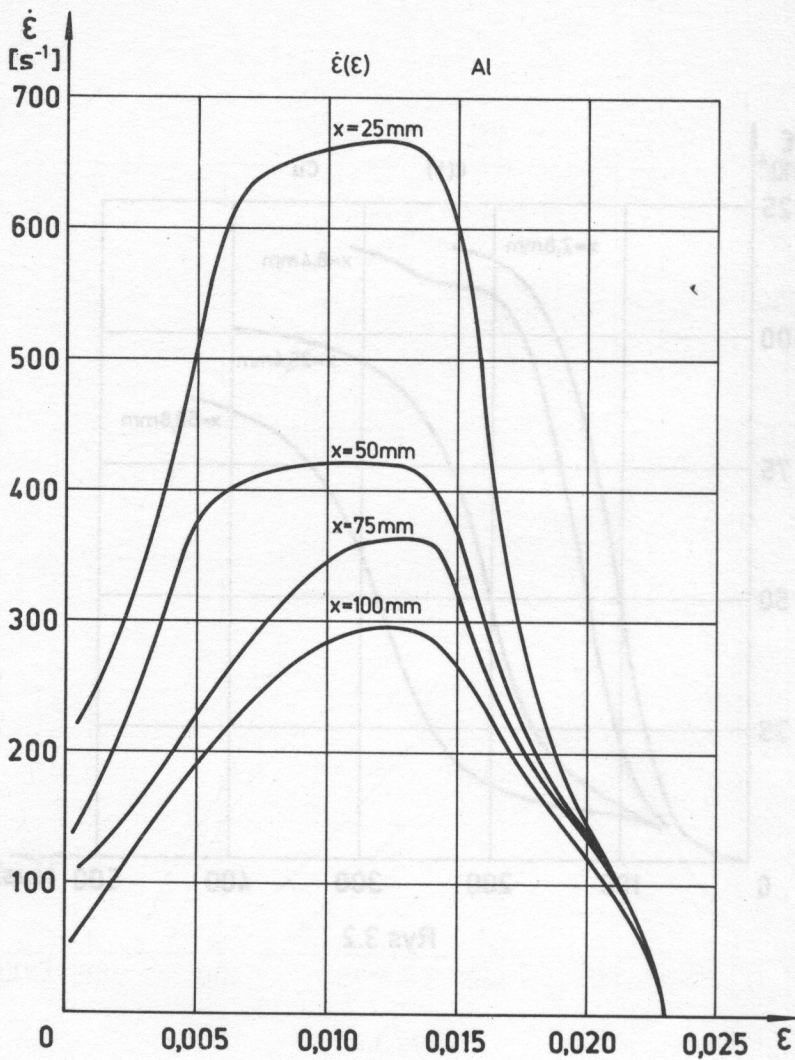


Rys.3.1

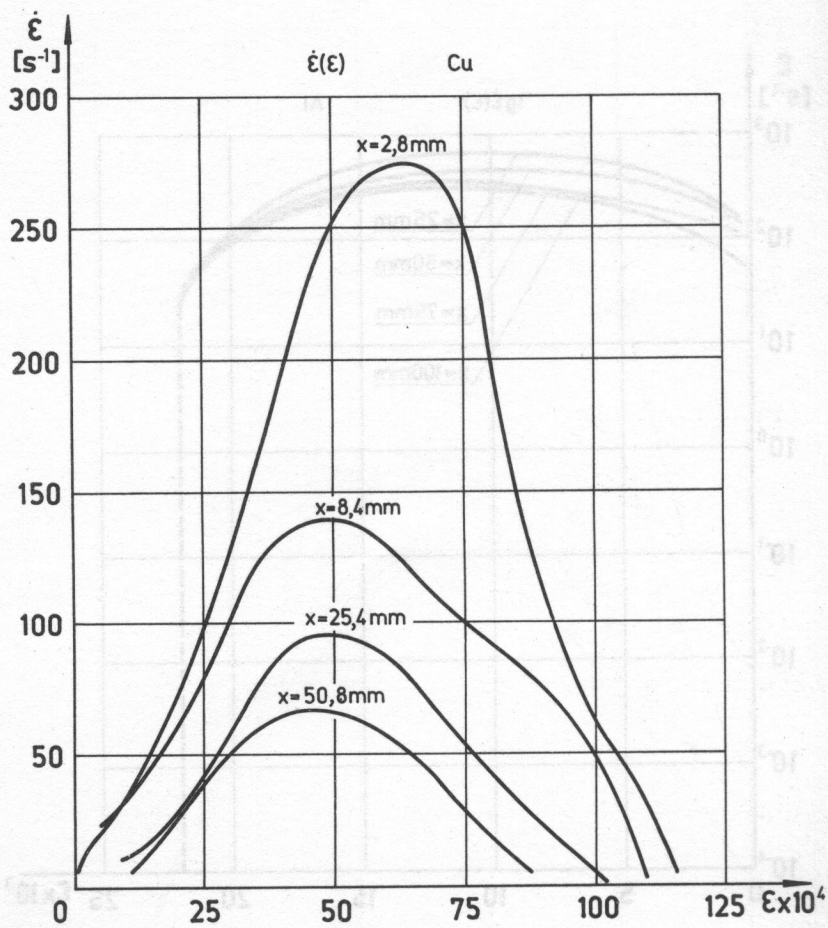




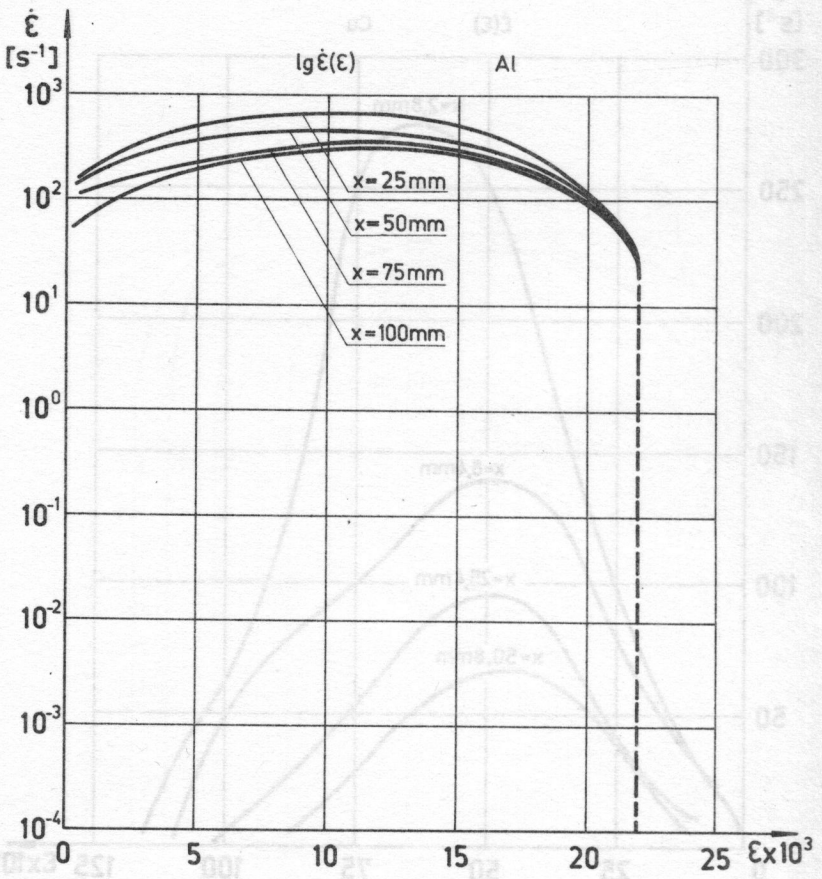
Rys.3.2



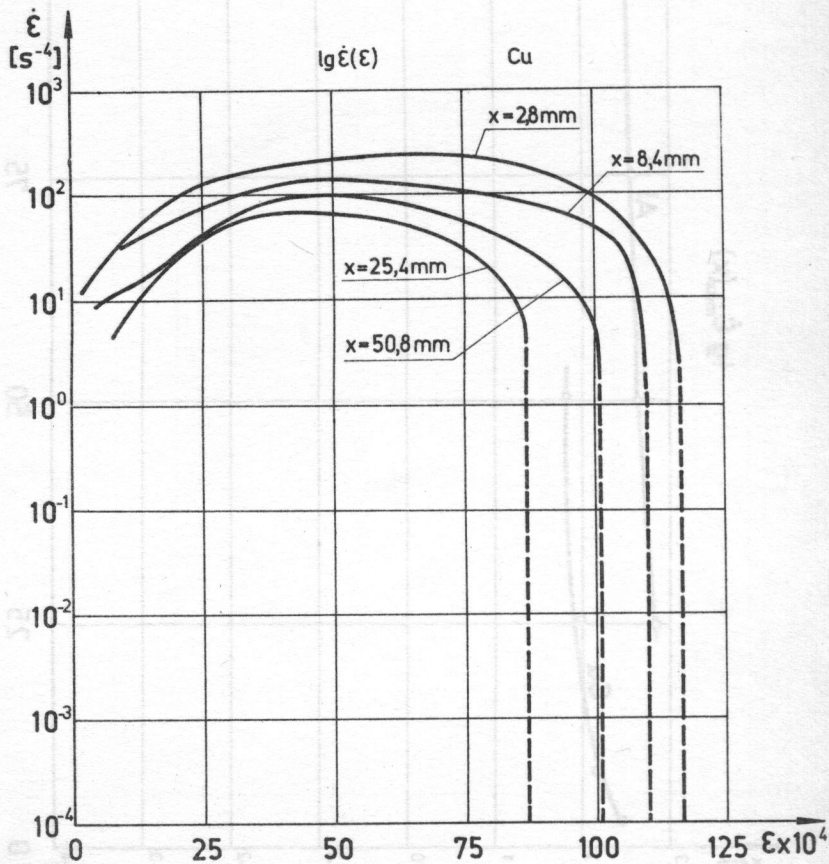
Rys.3.3



Rys.3.4

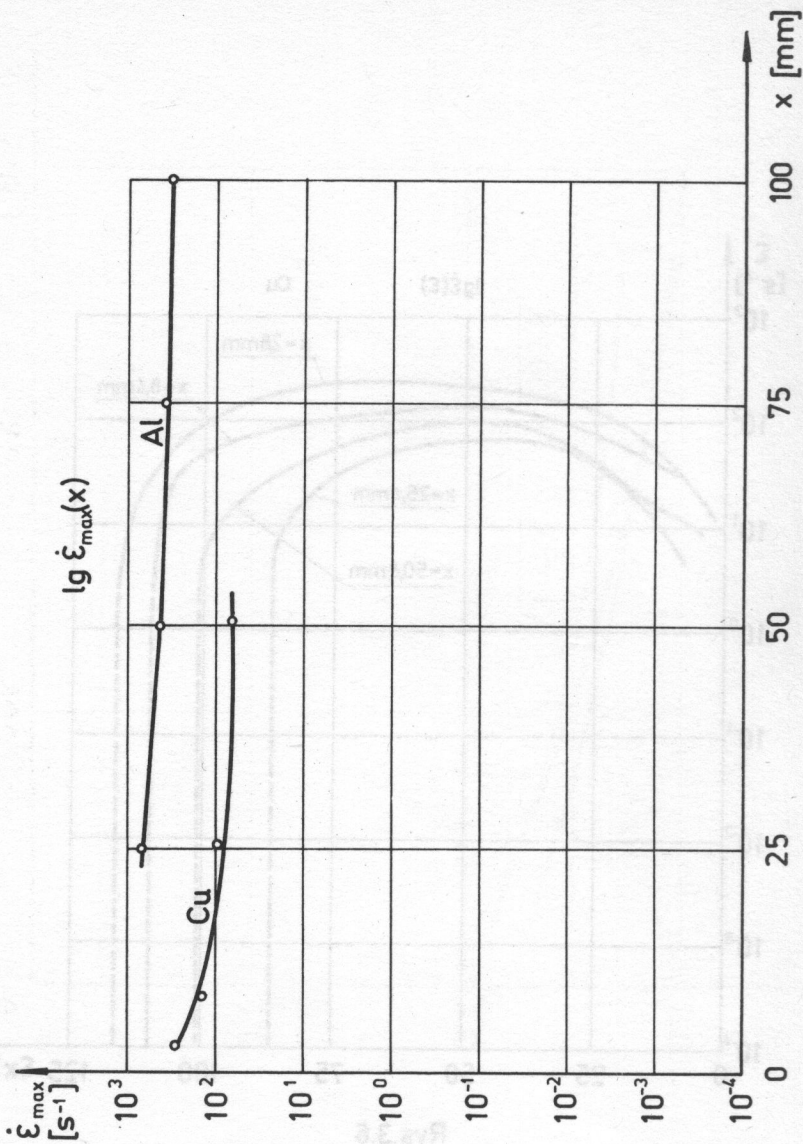


Rys.3.5

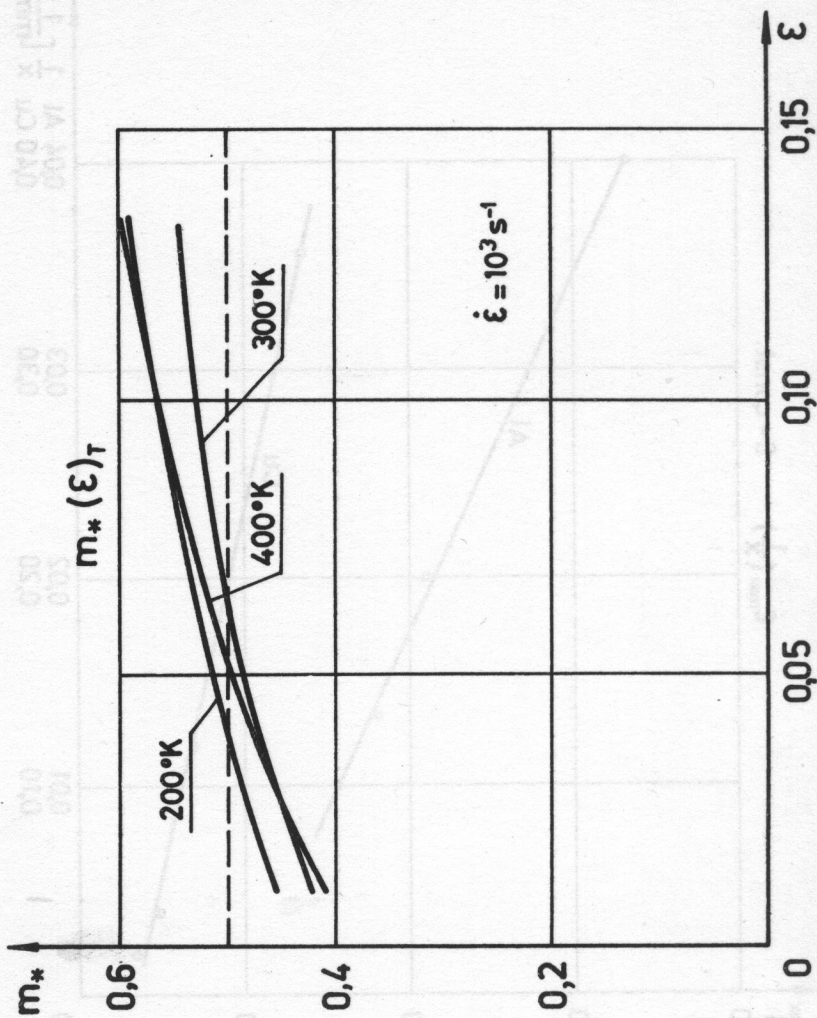


Rys.3.6

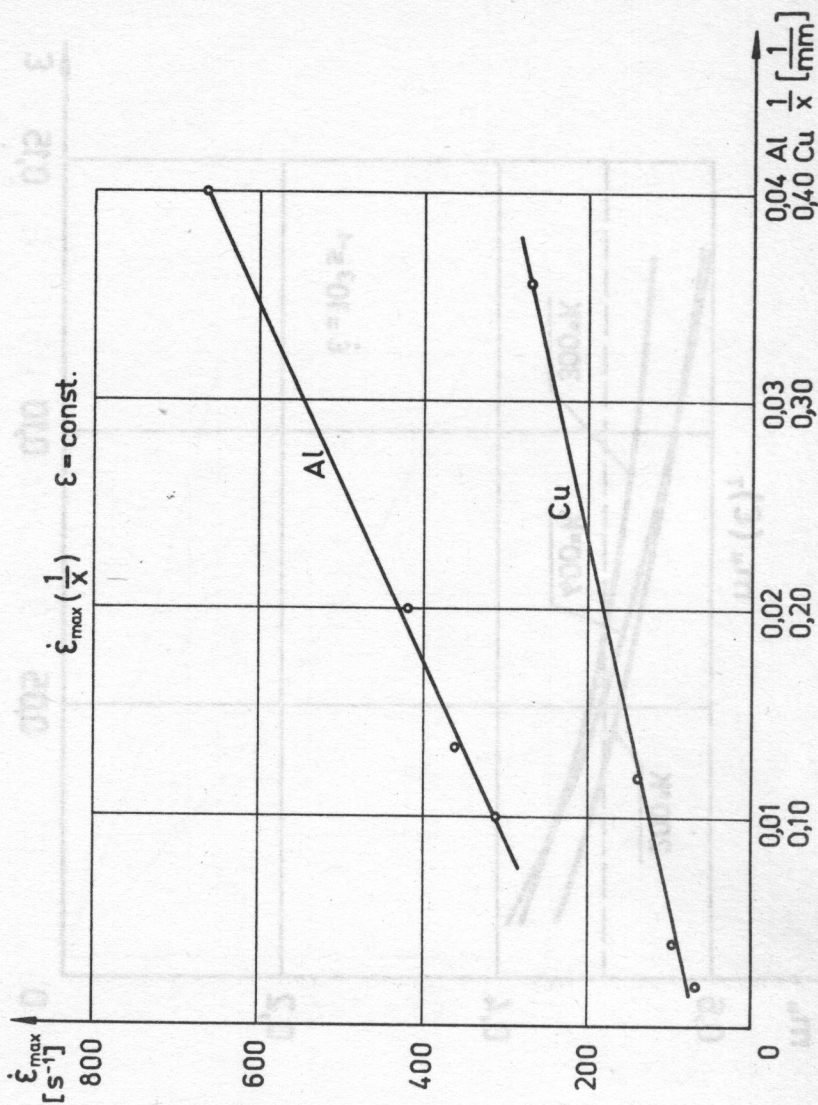




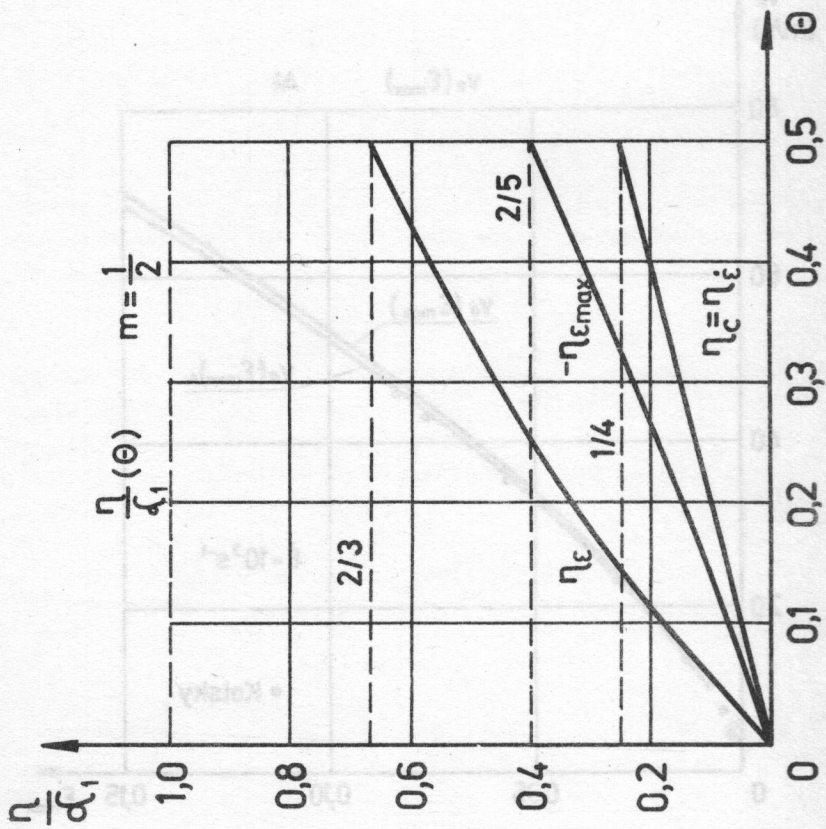
Rys.3.7



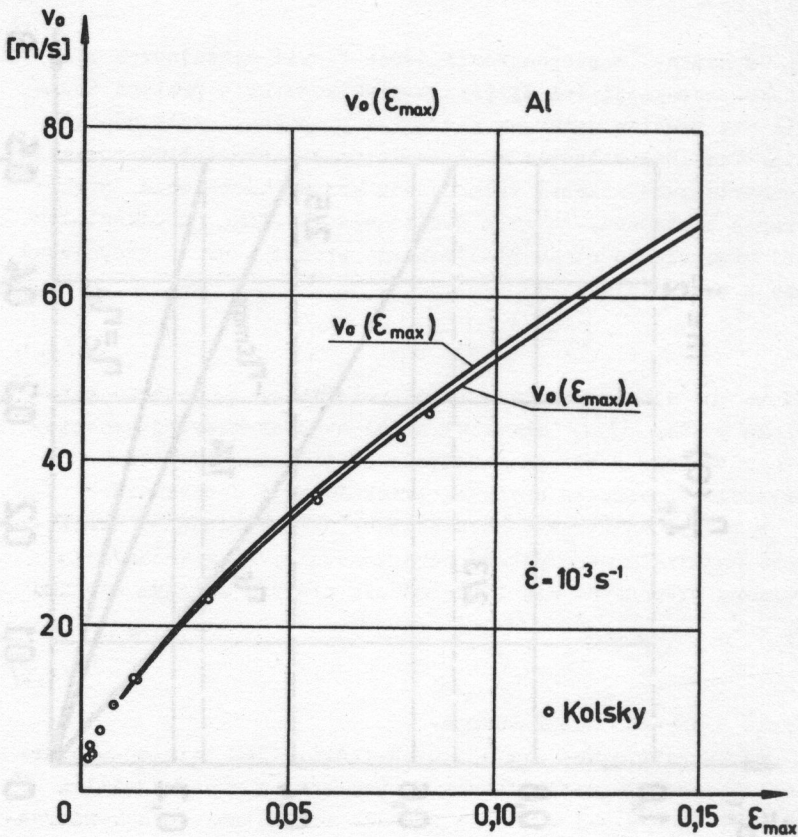
Rys.3.8



Rys. 3.9



Rys.3.10



Rys. 3.11



#### 4. Dyskusja efektów wywołanych falą dociążania w pręcie

##### 4.1. Wstęp

Od momentu zaproponowania dwóch teorii opisujących zjawisko propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach pojawił się problem związany z efektem propagacji fali dociążania. Ponieważ w teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina równanie konstytutywne stanowi tylko jedna krzywa umocnienia, zwykle krzywa statyczna, to fala dociążania wywołana na odkształconej wstępnie do stanu plastycznego próbie powinna propagować się z prędkością

$$C_d = \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} \right)_d \right]^{\frac{1}{2}}, \quad /4.1/$$

gdzie  $\bar{\sigma}$  oznacza naprężenie inżynierskie,  $\rho$  gęstość materiału pręta,  $\left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} \right)_d$  aktualny moduł styczny krzywej umocnienia w punkcie w którym nastąpiło dociążenie, tj. dla  $\varepsilon = \varepsilon_w$  wreszcie  $C_d$  oznacza uzyskaną prędkość fali dociążania.

W teorii Malverna-Sokołowskiego, uwzględniającej właściwość materiału na prędkość odkształcenia, fala dociążania powinna propagować się z prędkością dźwięku w danym ośrodku

$$C_d = C_0 \quad C_0 = \left( \frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad /4.2/$$

gdzie  $E$  oznacza moduł Younga.

Porównanie dwóch wymienionych teorii, jak również obserwowanych dyskusje zamieszczone na przykład w pracach [11] i [18]. Opisana wyżej sytuacja została przedstawiona schematycznie na rys. 4.1. Przy czym przyjęto tu koncepcję mechanicznego równania stanu oraz założono stałą prędkość odkształcenia  $\dot{\varepsilon}_2$  na ośrodku fali dociążania. Bieżący stosunek  $C_0/C_d$  można napisać w postaci

$$\frac{C_0}{C_d} = \left[ E \left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} \right)_d^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

14.3

Aby określić rząd efektu, na przykład dla aluminium w stanie wyżarzonym, przyjęto  $E = 0,7 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$ , dla  $\varepsilon = 0,05$ ,  $\left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} \right)_d = 46,9 \text{ kg/mm}^2$ , stąd  $E \left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} \right)_d^{-1} = 1,492 \cdot 10^2$  i ostatecznie

$$\frac{C_0}{C_d} = 12,21.$$

Tak więc spodziewana różnica jest stosunkowo duża i może być łatwo wykryta na drodze eksperymentalnej przez pomiar prędkości propagacji fali dociążania. Doświadczenia takie zostały pierwotnie przeprowadzone przez Bella [4], Sternglasa i Stuarta [25], Riparbelli [22], później powtórzone w nieco inny sposób przez Altera i Curtisa [1]. Podobne eksperymenty zostały przeprowadzone ostatnio przez Bella i Steina [3], Bianchi [6] oraz przez Yew i Richardsona [26]. We wszystkich wymienionych pracach stwierdzono, że prędkość propagacji czoła fali dociążania jest większa od  $C_d$ , jednak jedynie mała część czoła fali propaguje się z prędkością zbliżoną do  $C_0$ . Równocześnie okazuje się, że zwiększenie prędkości propagacji w stosunku do  $C_d$  może zachodzić na skutek oddziaływania innych efektów niż wrażliwość materiału na prędkość odkształcenia. W ten sposób omawiane zagadnienie komplikuje się i wymaga odrębnej dyskusji, jest to cel niniejszej pracy.

Aby zagadnienie mogło zostać przedyskutowane, należy bardziej szczegółowo omówić wymienione uprzednio prace eksperymentalne.

Otóż wszystkie prace w których przeprowadzono analizę fali dociążania można podzielić na dwie grupy.

Do pierwszej grupy prac eksperymentalnych można zaliczyć prace Altera i Curtisa [1] oraz Bella i Steina [3]. W pracach tych wstępne wymuszenie jak i dociążenie realizowano w warunkach jednoosiowego ściskania za pomocą dwustopniowej

fali schodkowej. W przypadku pracy Altera i Curtisa [1] stwierdzono, badając prędkości propagacji charakterystycznych wartości odkształceń na czole fali, że czoło fali podwójnej  $\mathcal{E}(t)$  ulega silnej dyspersji w czasie przemieszczania się w ołowianym pręcie. Autorzy wyjaśniają takie zachowanie się w oparciu o teoretyczne rozważania Rubina [23] uwzględniające teorię propagacji fal z wpływem prędkości odkształcenia. W rozważaniach tych przyjęto sprężysto-plastyczny model ciała z liniowym umocnieniem oraz liniową lepkością.

W pracy Altera i Curtisa [1] stwierdzono również, że mała początkowa część fali dociążania propaguje się z prędkością  $C_0$ , natomiast pozostała część z prędkościami mniejszymi.

Dane eksperymentalne uzyskane w podobny sposób przez Bella i Steina [3] dla wyżarzonego aluminium wykazały, że jedynie najmniejsze wartości odkształceń na czole fali dociążania propagują się z prędkością  $C_0$ . Powyżej wartości odkształcenia  $\mathcal{E} \approx 1 \cdot 10^{-4}$ , która stanowi granicę plastyczności, prędkości propagacji czoła fali dociążania były znacznie mniejsze niż  $C_0$  i raczej zbliżone do wartości  $C_d$ .

Do drugiej grupy, bardziej licznej, można zakwalifikować prace eksperymentalne, gdzie na poddanej wstępnemu rozciąganiu stosunkowo długiej próbce wywołuje się falę dociążania. W grupie tej można wymienić prace Bella [4], Sternglasa i Stuarta [25], z nowszych Papirno i Gérarda [21], Bianchi [6] oraz Małyszewa [19], [20]. Wreszcie najnowsze prace stanowią wyniki uzyskane w podobny sposób, jednak w warunkach czystego ścinania, przez Yew i Richardsona [26] oraz przez Convery i Pugh [7].

W pracy Bella [4] stwierdzono, że przy dociążaniu dynamicznym próbek wykonanych z miękkiej stali początek czoła fali dociążania zawsze przemieszczał się z prędkością  $C_0$ .

Z kolei należy wymienić wspomnianą pracę Sternglasa i Stuarta [25], gdzie badano walcowaną na zimno miedź, stal oraz mosiądz. We wszystkich przypadkach początek czoła fali

dociątania przy rozciąganiu propagował się z prędkością  $C_0 / \pm 10 \%$ , niezależnie czy dociątanie próbki odbywało się podczas równoczesnego odkształcania statycznego, czy też pod stałym obciążeniem statycznym. W ten sposób obserwowanego zjawiska nie można tłumaczyć wystąpieniem pełzania lub relaksacji. Jednak ściśle rzecz biorąc, jak to udowodniono w pracy Yew i Richardsona [26], dynamiczne dociątanie winno być przeprowadzane wyłącznie ze stanu aktywnego odkształcania statycznego. We wspomnianej pracy [25] stwierdzono dalej, że w przypadku krótkich impulsów fali dociątania, amplituda impulsu podczas procesu propagacji nie zmienia się, nawet gdy materiał został odkształcony wstępnie daleko w obszar odkształceń plastycznych. Natomiast w przypadku odpowiednio długich impulsów występują odkształcenia plastyczne i zachodzi silna dyspersja.

Również w pracy Papirno i Gérarda [21] zaobserwowano w przypadku aluminium, że jedynie początek czoła fali dociątania propaguje się z prędkością zbliżoną do  $C_0$ . Większe wartości odkształceń na czołe fali dociątania propagowały się z prędkościami mniejszymi od  $C_0$ . Otrzymany przez tych autorów wynik przedstawiono na rys. 4.2. Eksperymenty te przeprowadzono jednak ze stanu pełzania.

Podobne rezultaty eksperymentów z dociątaniem przeprowadzonych ze stanu relaksacji dla miedzi i aluminium otrzymano w pracach Małyszewa [19], [20].

Wreszcie wyniki uzyskane na długich taśmach miedzianych w pracy Bianchi [6] wskazują, że prędkości propagacji fal dociątania o małej intensywności są zbliżone do  $C_0$  i wykazują tendencję do zmniejszania się z   wzrostem  $x$ . Natomiast prędkości propagacji fali dociątania o dużych intensywnościach są mniejsze od  $C_0$  i wykazują tendencj   zwi  kszenia si   ze wzrostem  $x$ . Należy jednak podkreślić, że wszystkie eksperymenty z fal  dociątania w tej pracy zostały przeprowadzone ze stanu pełzania.

W sumie w omawianej pracy stwierdzono, po przeprowadze-

niu analiz porównawczych teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina i teorii Malverna-Sokołowskiego, że zgodność z pierwszą teorią jest dobra o ile nie stosuje się wstępnego obciążenia statycznego, lub obciążenie to jest mniejsze od granicy proporcjonalności badanego materiału. Przy powiększaniu naprężenia wstępnego obciążenia obserwuje się znaczne pogorszenie opisu ilościowego teorią Taylora-Kármána-Rachmatulina. Zastosowanie zlinearyzowanego równania konstytutywnego uwzględniającego prędkość odkształcenia polepsza w tym przypadku ilościowy opis zjawiska. Równocześnie mierzone naprężenia  $\sigma(t)$  dla  $x = 0$  były zawsze większe niż to wynikałoby z teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina.

Jako najnowsze prace z omawianej grupy należy wymienić wspomniane poprzednio badania Yew i Richardsona [26] oraz Convery i Pugh [7], przeprowadzone w obydwu przypadkach dla miedzi, a w pracy [7] również dla miękkiej stali. W obydwu przypadkach zastosowano inny stan naprężenia, a mianowicie ścinanie, przez co wyeliminowano ewentualne efekty bezwładności poprzecznej, które mogły występować we wszystkich pracach omówionych poprzednio. Stan ścinania zrealizowano używając cienkie próbki rurkowe o odpowiedniej długości. Poza tym schemat przeprowadzanych doświadczeń nie różnił się od omówionych poprzednio. W dyskutowanej pracy Yew i Richardsona [26] wykazano, że fala dynamicznego dociążania powinna być generowana wyłącznie ze stanu statycznego aktywnego obciążania oraz, że efekty bezwładności poprzecznej w przypadku rozciągania lub ściskania dla tego rodzaju doświadczeń mogą stanowić istotny czynnik jedynie przy dużych gradientach prędkości odkształcania, tj. jedynie dla krótkich czasów narastania impulsu.

Zaobserwowano również, że większe odkształcenia plastyczne propagują się z prędkościami zgodnymi z teorią Taylora-Kármána-Rachmatulina, natomiast odkształcenia rzędu sprężystych / ~ 0,2 % / propagowały się z prędkościami znacznie



większymi od  $C_d$ , jednak z mniejszymi niż  $C_0$ . Jeden z uzyskanych w tej pracy wyników przytoczono na rys. 4.3. W zasadzie wszystkie wymienione prace eksperymentalne potwierdzają fakt, że małe odkształcenia na czole fali dociążania propagują się z prędkościami większymi od  $C_d = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Jednak wyjaśnienie tego faktu w oparciu o istnienie wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia jest jednym z możliwych.

Dotychczas zaproponowano trzy równorzędne wytłumaczenia:

- 1 - istnienie efektu bezwładności poprzecznej, np. prace [8], [12];
- 2 - fizykalna niestabilność towarzysząca odkształceniu plastycznemu metali /efekt Portevin-Le Chatelier/, np. prace [3], [9], [10];
- 3 - wrażliwość na prędkość odkształcania, prace te omówiono poprzednio.

Z analizy numerycznej przeprowadzonej przez De Vault [8] oraz przez Huntera i Johnsona [12] wynika, że efekty bezwładności poprzecznej mogą wywoływać podobne efekty w propagacji fal przyspieszenia jak wrażliwość na prędkość odkształcenia. Pomimo, że prędkość grupowa  $C_g$  wzrasta według analizy [12] wraz ze wzrostem częstotliwości aż do wartości  $0,6 C_0$ , to jednak wartości  $C_0$  nie osiąga.

Podobną analizę jak w pracy Huntera i Johnsona [12] przeprowadzono w pracy Bejdy i Wierzbickiego [2], gdzie uwzględniono dyspersję geometryczną oraz wrażliwość na prędkość odkształcenia w procesie propagacji fal harmonicznych w uprzednio obciążonym pręcie. Zagadnienie rozwiązano numerycznie z liniową lepkością w równaniu konstytutywnym i przy założeniu idealnej plastyczności. W wyniku analizy stwierdzono, że kształt wykresu prędkości grupowej  $C_g$  w funkcji częstotliwości jest podobny do ścisłego rozwiązania Pochhammera-Chree dla problemu sprężystego, tj.  $\lim_{\omega \rightarrow 0} C_g = C_0$ , gdzie  $\omega$  oznacza częstotliwość. Wartość prędkości fazowej osiąga natomiast maksimum zbliżone do  $C_0$ . Należy jednak podkreślić,

że wyniki te uzyskano dla modelu ciała idealnie plastycznego, wydają się one potwierdzać fakt, że małe zaburzenia nałożone na stan plastyczny w pręcie powinny propagować się z prędkościami zbliżonymi do  $C_0$ ,  $C_0 \gg C \gg 0,6 C_0$ , o ile materiał wykazuje wrażliwość na prędkość odkształcenia.

Wniosek ten znajduje potwierdzenie w omówionej uprzednio pracy Yew i Richardsona [26], gdzie wyeliminowano efekty bezwładności poprzecznej, a także we wspomnianej pracy Convery i Pugh [7].

Do grupy prac omawiających efekty fizykalnej niestabilności i towarzyszące efekty związane z propagacją fal sprężysto-plastycznych należy zaliczyć prace Dillona [9],[10], Keniga i Dillona [13], Bella [3],[5] oraz Sharpe [24]. Efekt ten przejawia się w postaci "schodkowego" kształtu krzywej umocnienia i jest znany pod nazwą efektu Portevin-Le Châtelier. W przypadku propagacji fali sprężysto-plastycznej w pręcie efekt ten jest w stanie wywołać powstanie fali uderzeniowej o małej intensywności [13]. Porównanie prędkości propagacji przyrostów wywołanych efektem Portevin-Le Châtelier z klasyczną teorią Taylora-Kármána-Rachmatulina przedstawiono na rys. 4.4, wynik ten uzyskano w pracy Keniga i Dillona [13] gdzie rurkowe próbki poddawano statycznemu złożonemu stanowi naprężenia. Z rys. 4.4 wynika, że prędkości propagacji obliczone dla odpowiednich przyrostów w przypadku diskutowanego efektu są większe od  $C_d$ , jednak znacznie mniejsze od  $C_0$ .

## 4.2. Dyskusja

Przedstawione wyżej obszernie omówienie istniejących prac doświadczalnych dowodzi, że dla metali początkowa reakcja na wzbudzoną falę dociążania jest zbliżona do sprężystej. Wobec wykrycia takiego zachowania się dla próbek skręcanych [7],[26], gdzie wyeliminowano efekty bezwładności poprzecz-

nej, należy sądzić, że dla spotykanych w doświadczeniach gradientów prędkości odkształcenia /czas narastania  $20 \div 50$  /usek/ bezwładność poprzeczna nie odgrywa istotnej roli w zwiększeniu prędkości propagacji czoła fali dociążania. W próbkach ściskanych lub rozciąganych efekty bezwładności poprzecznej mogą prawdopodobnie nakładać się na efekty związane z wpływem prędkości odkształcenia, co może powodować pozorne zwiększenie wrażliwości na prędkość odkształcenia. Jak się wydaje zjawisko to może zachodzić bardziej intensywnie w obszarze pierwszej średnicy od uderzonego końca próbki [5]. Na przykład analiza przeprowadzona w pracy [14] wykazała, że efekt bezwładności poprzecznej może wpływać w istotny sposób na rozkład naprężeń w procesie ściskania powyżej prędkości odkształcenia  $\sim 10^3 \text{ sek}^{-1}$ . Prędkości odkształcenia tego rzędu spotyka się podczas propagacji fal plastycznych jedynie w obszarze pierwszej średnicy, w przypadku większych odległości są one znacznie mniejsze,  $10 \text{ sek}^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 10^3 \text{ sek}^{-1}$ , zależnie od prędkości uderzenia [15].

Omówiony efekt schodkowego kształtu krzywej umocnienia i związane z tym ewentualne pojawienie się fali uderzeniowej o małej intensywności [13] jest wywołany, jak się wydaje, pewnymi procesami dyfuzyjnymi. Występowanie tego rodzaju zjawisk jest charakterystyczne dla stosunkowo długotrwałych procesów deformacji, w przybliżeniu jeden do dwóch tygodni w przypadku temperatury pokojowej [9], [10], a więc niezwykle małych średnich prędkości odkształcenia rzędu  $\sim 10^6 \text{ sek}^{-1}$  i mniejszych. Prawdopodobnie efekt ten przesuwają się do obszaru większych prędkości odkształcenia w przypadku podwyższenia temperatury. Tak więc występowanie tego zjawiska nie można wykluczyć gdy dociążanie dynamiczne następuje z aktywnego stanu obciążania przy bardzo małych prędkościach deformacji. Jednak występowanie tego rodzaju zjawiska w przypadku fali dociążania związanego z efektem Portevin-Le Chatelier ogranicza się jedynie do pewnych obszarów prędkości odkształce-

nia i temperatury.

Jednak wykazano na drodze doświadczalnej w pracy [26], że podobny kształt krzywej umocnienia można otrzymać wykonując próbę przemennego aktywnego odkształcania i pełzania. Wówczas, gdy dynamiczne dociążanie wykonuje się ze stanu pełzania próbki, początek fali dociążania zawsze będzie się propagować z prędkością  $C_0$ .

Wydaje się, że przedstawiona dyskusja, a w szczególności prace [7] i [26] skłaniałyby do wniosku o istnieniu reakcji zbliżonej do sprężystej w przypadku wymuszenia fali dociążania, co z kolei świadczy o istnieniu wrażliwości na prędkość odkształcania i o niemożności ścisłego opisanie tego zjawiska przez teorię niezależną od prędkości odkształcania. Z drugiej jednak strony bardzo mała część fali dociążania propaguje się z prędkością zbliżoną do  $C_0$ , pozostała część o większej intensywności propaguje się z prędkościami bliższymi  $C_d$ . Wytlumaczenie tego zjawiska może być również podane w oparciu o efekty historii prędkości odkształcania.

#### 4.3. Efekty historii prędkości odkształcania w propagacji fali dociążania

Na wstępie należy podkreślić, że efekty historii prędkości odkształcania dla metali są dotychczas mało zbadane. Większość dostępnych wyników prac eksperymentalnych odnosi się do polikrystalicznego aluminium, tj. metalu o sieci regularnej płaskocentrowanej. Brak natomiast jakichkolwiek obserwacji dla metali o sieci regularnej przestrzennie centrowanej, np. dla żelaza.

Wyniki badań eksperymentalnych dla polikrystalicznego technicznie czystego aluminium oraz ich dyskusja zostały przedstawione w pracach [16] i [17].

W pracy [16] stwierdzono, że w przypadku zwiększenia prędkości odkształcania przy pewnej wartości odkształcania

uzyskanego z małą prędkością deformacji rzędu  $10^{-5}$  sek<sup>-1</sup>, otrzymana krzywa umocnienia aluminium nie pokrywa się z krzywą otrzymaną dla tej samej dużej prędkości odkształcenia, jednak bez odkształcenia wstępnego. Seria wyników tego rodzaju została zamieszczona w pracy [17], wyniki te dla przypadku zwiększenia prędkości odkształcenia pokazano na rys. 4.5. Charakterystyczne wielkości niezbędne dla ilościowego opisu pokazanych na rys. 4.5 efektów historii prędkości odkształcenia podano na rys. 4.6. Wielkości te są zgodne z proponowanym w pracy [16] opisem zjawiska. Według tego opisu, aktualne naprężenie plastycznego płynięcia  $\tau$  w przypadku czystego ścinania po zmianie prędkości odkształcenia składa się z dwóch części. Zgodnie z równaniami zaproponowanymi w pracy [16] dla przypadku czystego ścinania otrzymuje się

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}_w, \dot{\gamma}_d) \pm \Delta\tau_0, \quad \dot{\gamma}_d = 0 \quad /4.3/$$

oraz

$$\tau = \tau[(\dot{\gamma}_w + \dot{\gamma}_d), \dot{\gamma}_d] \pm \Delta\tau(\dot{\gamma}_d), \quad \dot{\gamma}_d \geq 0, \quad /4.4/$$

przy czym wartość  $\Delta\tau$  jest ujemna w przypadku zwiększenia prędkości odkształcenia, a dodatnią przy zmianie prędkości odkształcenia z dużej na małą. Dalej, zgodnie z pracą [16] wartość  $\Delta\tau_0$  odnosząca się do momentu zmiany prędkości odkształcenia  $\dot{\gamma}_d = 0$ , wynosi

$$\Delta\tau_0 = \gamma [\tau(\dot{\gamma}_w, \dot{\gamma}_d) - \tau(\dot{\gamma}_w, \dot{\gamma}_w)], \quad /4.5/$$

wartość w nawiasie stanowi różnicę naprężeń plastycznego płynięcia dla dwóch stałych od początku procesu deformacji prędkości odkształcenia o takich samych wartościach jak  $\dot{\gamma}_w$  i  $\dot{\gamma}_d$ . Jak stwierdzono doświadczalnie we wspomnianej pracy,  $\Delta\tau(\dot{\gamma}_d)$  zmniejsza się wraz ze wzrostem odkształcenia dodatkowego  $\dot{\gamma}_d$  po zmianie prędkości odkształcenia. Zjawis-



ko to, zwane efektem zapomnienia, można dobrze opisać równaniem o postaci

$$\Delta \tau = \Delta \tau_0 \exp(-\alpha \sqrt{\gamma_d}) , \quad /4.6/$$

gdzie  $\alpha$  jest stałą materiałową i dla diskutowanego przypadku aluminium  $\alpha = -\frac{18}{5}$ . Porównanie proponowanego opisu z eksperymentem przeprowadzono w pracy [16] otrzymując dobrą zgodność. Dyskusja zaobserwowanych efektów w świetle teorii dyslokacji została zamieszczona w pracy [17].

Celem obecnej analizy jest wyjaśnienie w jaki sposób efekty historii prędkości odkształcenia wpływają na prędkość propagacji i intensywność fali dociążania. Wydaje się, że zaobserwowane zachowanie się aluminium może wyjaśnić dysktowane uprzednio efekty związane z falą dociążania. Ponieważ w dalszej części pracy dysktuje się eksperymenty przeprowadzane przy rozciąganiu, to równania od /4.3/ do /4.6/ należy transformować z użyciem warunku plastyczności Hubera-Misesa

$$\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}} , \quad \gamma = \sqrt{3} \epsilon , \quad \dot{\gamma} = \sqrt{3} \dot{\epsilon} , \quad /4.7/$$

gdzie  $\tau$  oraz  $\sigma$  są naprężeniami rzeczywistymi.

W ten sposób można napisać

$$\sigma = \sigma_0 [(\epsilon_w + \epsilon_d), \dot{\epsilon}_d] - \Delta \sigma_0 (\epsilon_w, \epsilon_d, \dot{\epsilon}_d) \exp(-\alpha \sqrt{3} \sqrt{\epsilon_d + a}) \quad /4.8/$$

oraz

$$\Delta \sigma_0 = \gamma [\sigma(\epsilon_w, \dot{\epsilon}_d) - \sigma(\epsilon_w, \dot{\epsilon}_w)] , \quad \dot{\epsilon}_d > \dot{\epsilon}_w \quad /4.9/$$

przy czym dla bardziej ścisłego opisu modułu stycznego po zmianie prędkości odkształcenia w otoczeniu  $\epsilon_d = \Delta \epsilon_{AB}$  /oznaczenie na rys. 4.6/ wprowadzono małe uzupełnienie w postaci dodatkowej stałej materiałowej  $a$ . Wyznaczona wartość  $a$  na podstawie wyników z rys. 4.5 jest jednak praktycznie pomijalna, szczególnie dla większych wartości  $\epsilon_d$  i stąd w

dalszej części pracy przyjęto  $a = 0$ . W myśl poprzednio przeprowadzonej analizy propagacji fal sprężysto-plastycznych, która wykazała, że zmiany prędkości odkształcenia podczas procesu propagacji można pominąć uzyskując dobry opis mechaniki procesu, do dalszej analizy przyjmuje się teorię Taylora-Kármána-Rachmatulina oraz zakłada się średnią prędkość odkształcenia i wynikającą stąd dynamiczną krzywą umocnienia. Ponieważ dyskutowany zakres odkształceń nie przekracza 0,1 to w dalszej części pracy  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}$ .

Różniczkując równanie /4.8/ otrzymuje się zależność opisującą moduł styczny po zmianie prędkości odkształcenia z  $\dot{\epsilon}_w$  na  $\dot{\epsilon}_d$ ,  $\dot{\epsilon}_d > \dot{\epsilon}_w$  stąd

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon_d} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{\dot{\epsilon}_d} + \frac{\alpha \sqrt[4]{3} \Delta \sigma_0}{2 \sqrt{\epsilon_d + a}} \exp(-\alpha \sqrt[4]{3} \sqrt{\epsilon_d + a}), \quad /4.10/$$

gdzie

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{\dot{\epsilon}_d} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \sigma \left[ \left( \epsilon_w + \epsilon_d \right), \dot{\epsilon}_d \right] \right\}, \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_d &= \text{const}, \\ \epsilon &= \epsilon_w + \epsilon_d, \end{aligned}$$

oznacza wartość modułu stycznego dla stałej prędkości odkształcenia, takiej samej jak  $\dot{\epsilon}_d$ .

Największa wartość modułu stycznego zachodzi dla  $\epsilon_d = \Delta \epsilon_{AB}$ , wówczas

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon_d} \right)_{\text{sup}} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{\dot{\epsilon}_d}^* + \frac{\alpha \sqrt[4]{3} \Delta \sigma_0}{2 \sqrt{\Delta \epsilon_{AB} + a}} \exp(-\alpha \sqrt[4]{3} \sqrt{\Delta \epsilon_{AB} + a}), \quad /4.11/$$

gdzie

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{\dot{\epsilon}_d}^* = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \sigma \left[ \left( \epsilon_w + \Delta \epsilon_{AB} \right), \dot{\epsilon}_d \right] \right\}, \quad \epsilon = \epsilon_w + \Delta \epsilon_{AB}.$$

Jako prostą konsekwencję zastosowania równania charakterystyki z teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina mamy

dla  $0 \leq \varepsilon_d \leq \varepsilon_{AB}$ ,  $C_0 = \left(\frac{E}{P}\right)^{\frac{1}{2}}$ , /4.12/

dla  $\varepsilon_d \geq \Delta \varepsilon_{AB}$ ,  $C = \left(\frac{1}{P} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_d}\right)^{\frac{1}{2}}$ . /4.13/

Tak więc, uwzględnienie efektów historii prędkości odkształcenia prowadzi do wniosku, że jedynie bardzo mała część fali dociążania odpowiadająca wartości  $\Delta \varepsilon_{AB}$  będzie się propagować z prędkością  $C_0$ . Pozostała część o większej intensywności propagować się będzie z prędkościami mniejszymi od  $C_0$  ale większymi od prędkości propagacji, która wynikałaby z przyjęcia dynamicznej krzywej umocnienia dla stałej prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}_d$  i bieżącej wartości odkształcenia  $\varepsilon_d + \varepsilon_n$ , wartość ta została oznaczona przez  $C_{\dot{\varepsilon}_d}$ ,

$$C_{\dot{\varepsilon}_d} = \left[ \frac{1}{P} \left( \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right)_{\dot{\varepsilon}_d} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad /4.14/$$

Można więc napisać

$$C_{\dot{\varepsilon}_d} \leq C < C_0.$$

Podstawiając równanie /4.10/ do równania charakterystyki /4.13/ otrzymuje się wartości prędkości propagacji fali dociążania z uwzględnieniem efektów historii prędkości odkształcenia

$$C = \left\{ \frac{1}{P} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right)_{\dot{\varepsilon}_d} + \frac{\alpha \sqrt[4]{3} \Delta G_0}{2 \sqrt{\varepsilon_d + a}} \exp \left( -\alpha \sqrt[4]{3} \sqrt{\varepsilon_d + a} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \varepsilon_d \geq \Delta \varepsilon_{AB}. \quad /4.15/$$

Otrzymany wynik jest zgodny z zaobserwowanymi faktami doświadczalnymi w zasadzie we wszystkich uprzednio cytowanych pracach.

Należy tu dodać, że zmiana prędkości odkształcenia następuje dla  $\varepsilon_d = 0$  zgodnie z rys. 4.6. Jednak  $\Delta \varepsilon_{AB}$  może wykazywać inną wartość gdy dociążanie nastąpiło ze stanu peł-

zania, a jeszcze inną gdy dopuszczono do relaksacji naprężeń w próbce. W ten sposób intensywność sprężystej części czoła fali dociążania może się znacznie różnić dla trzech wymienionych procesów. Można się spodziewać, że najmniejsze odkształcenia na czole sprężystej części fali dociążania wystąpią w przypadku natychmiastowej zmiany prędkości odkształcenia, tj. dla procesu aktywnego obciążania.

W celu ilościowego porównania dyskutowanego zjawiska założono równanie konstytutywne o postaci /4.16/, które dobrze opisuje zachowanie się polikrystalicznego technicznie czystego aluminium

$$\sigma = B_* (\epsilon_w + \epsilon_d)^m \dot{\epsilon}_d^n \quad /4.16/$$

Równanie to zostało szerzej omówione w pracy [16], a także zastosowane w pracy [15]. Dla przypadku obecnie dyskutowanego aluminium  $B_* = 3^{\frac{1+m+n}{2}} B$ , gdzie B jest modułem plastyczności w przypadku czystego ścinania z pracy [16],  $B = 7,32 \text{ kG/mm}^2$ . Wykładnik umocnienia m oraz czułość na prędkość odkształcenia n pozostają niezmiennione zarówno w przypadku rozciągania jak i czystego ścinania,  $m = 0,296$ ;  $n = 0,0125$ .

W przypadku równania /4.16/

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right) \dot{\epsilon}_d = \frac{B_* m}{(\epsilon_w + \epsilon_d)^{1-m}} \dot{\epsilon}_d^n \quad /4.17/$$

oraz

$$C_{\dot{\epsilon}_d} = \left[ \frac{1}{\rho} \dot{\epsilon}_d^n \frac{B_* m}{(\epsilon_w + \epsilon_d)^{1-m}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad /4.18/$$

Dysponując równaniami /4.15/, /4.17/ i /4.18/ obliczono wartości  $C_{\dot{\epsilon}_d}$  w funkcji  $\epsilon = \epsilon_w + \epsilon_d$  oraz wartości C w funkcji  $\epsilon_d$  przyjmując  $\dot{\epsilon}_d = 10^2 \text{ sek}^{-1}$ ,  $a = 0$ ,  $\alpha = -\frac{18}{5}$ . Obliczenia przeprowadzono dla kilku wartości odkształcenia wstępnego  $\epsilon_w$

$\varepsilon_w$ , mianowicie 0,01; 0,02; 0,03 oraz 0,05. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4.7. Przez  $C(\varepsilon)_{\varepsilon_d}$  oznaczono prędkości propagacji w funkcji odkształcenia na czole fali bez żadnych odkształceń wstępnych przy założonej stałej prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon} = 10^2 \text{ sek}^{-1}$ . Następne krzywe stanowią wyniki obliczeń prędkości propagacji na czole fali dociążania dla kolejnych, wymienionych uprzednio, wartości odkształceń wstępnych  $\varepsilon_w$ . Bardzo małe wartości odkształceń propagują się z prędkością  $C_0$ , wartości te nie mogą być jednak uwidocznione na rys. 4.7 ze względu na ich małą wartość. Na rys. 4.7 pokazano jedynie maksymalne wartości prędkości fali plastycznej na czole fali dociążania oznaczając je punktami, prędkości te osiągają w obecnym przypadku nieco więcej niż połowę prędkości fal sprężystych, a w żadnym przypadku nie są równe aktualnej wartości  $C(\varepsilon)_{\varepsilon_d}$ . Bardziej dokładne uwidocznienie dużych prędkości propagacji na czole fali dociążania dla  $\varepsilon_w = 0,03$  przedstawiono na rys. 4.8. Rysunek wykonano dla dwóch podziałek wartości odkształcenia, uwidoczniając część sprężystą na czole fali dociążania.

Należy jeszcze raz podkreślić, że otrzymane wyniki są zgodne w zasadzie ze wszystkimi omawianymi pracami doświadczalnymi, a szczególnie z wynikiem Yew i Richardsona [26] dla miedzi, przytoczonymi uprzednio na rys.4.3.

#### 4.4. Wnioski

Przeprowadzona analiza wskazuje, że pomijane dotychczas efekty historii prędkości odkształcenia dla metali mogą odgrywać istotną rolę w mechanizmie propagacji czoła fali dociążania. Jednak zagadnienie to należy ograniczyć do technicznie czystych polikrystalicznych metali o sieci regularnej płaskocentrowanej, gdyż jedynie dla niektórych metali z tej grupy przeprowadzono badania wspomnianych efektów. Najobszerniejsze wyniki są dostępne jedynie dla polikrystalicznego aluminium [16],[17].



Uwzględnienie tych efektów wraz z przyjęciem średniej prędkości odkształcenia i tym samym uwzględnienie również wrażliwości metalu na prędkość odkształcenia jako parametru w równaniu konstytutywnym przy równoczesnym wykorzystaniu teorii propagacji Taylora-Kármána-Rachmatulina umożliwia pełne ilościowe opisanie zaobserwowanych doświadczalnie faktów. Oczywiście taka propozycja opisu jest przybliżeniem w stosunku do teorii Malverna-Sokołowskiego, którą należy uważać za ścisłą. Jednak w teorii ścisłej nie uwzględniono dotychczas efektów historii prędkości odkształcenia. Wydaje się, że po uwzględnieniu diskutowanych efektów w teorii ścisłej i porównaniu wyników z proponowanym przybliżeniem różnice w kształcie czoła fali i prędkościach propagacji byłyby niewielkie. Wynika to z faktu wykazanego uprzednio [15], że zmiany logarytmu prędkości odkształcenia na czole fali podczas jej propagacji wzdłuż długości pręta są stosunkowo niewielkie. Podobny pogląd o możliwości wykorzystania teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina wraz z dynamiczną krzywą umocnienia charakterystyczną dla danego procesu jest również reprezentowany w pracy Convery i Pugh [7].

W sumie przedstawiony przegląd i uzyskane w niniejszej pracy wyniki prowadzą do następujących wniosków:

1. Uwzględnienie efektów historii prędkości odkształcenia w teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina z równoczesnym pominięciem zmian prędkości odkształcenia na czole fali umożliwia bardzo dobre ilościowe przybliżenie prędkości propagacji na czole fali dociążania. Dotychczas efekty historii prędkości odkształcenia w analizie falowej pomijano.
2. Równocześnie nie można wykluczyć wpływu niestabilności metalurgicznej metalu /efekt Portevin-Le Chatelier/ na prędkość propagacji czoła fali dociążania, szczególnie gdy dociążanie następuje przy bardzo małych prędkościach odkształcenia podczas odkształcenia wstępnego.
3. Wpływ bezwładności poprzecznej na kształt czoła fali do-

ciążania poza pierwszą średnicą od uderzanego końca pręta, gdzie prędkości odkształcenia są zwykle mniejsze niż  $10^3 \text{ sek}^{-1}$ , nie odgrywa zasadniczej roli.

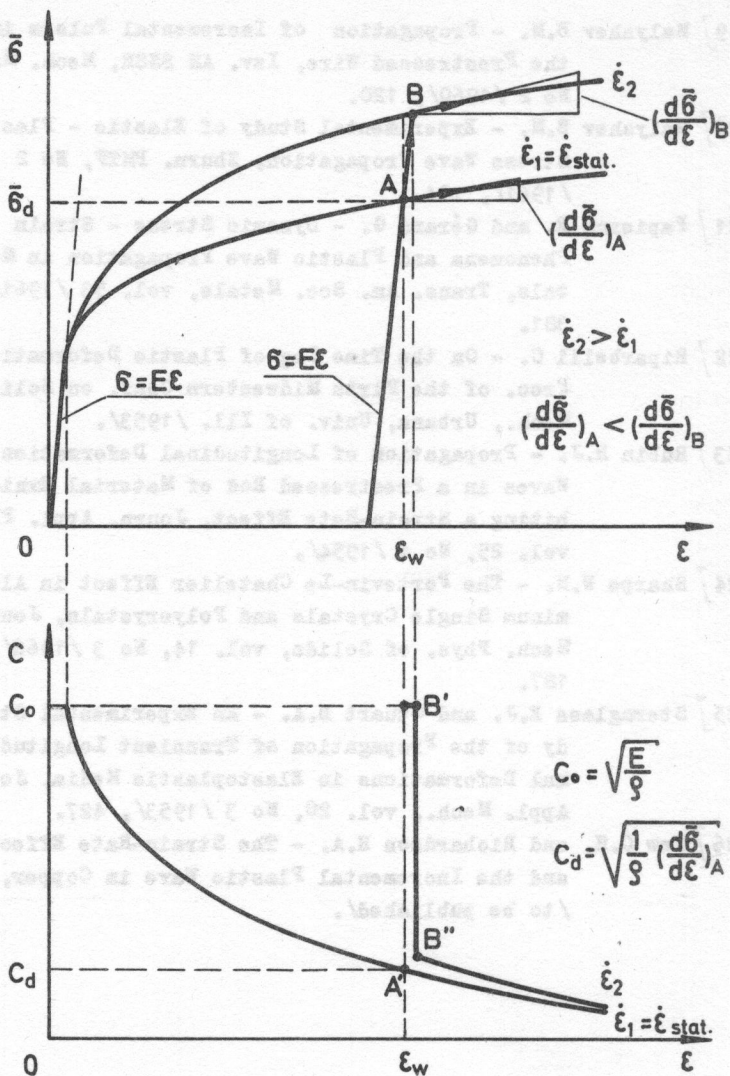
4. Eksperymenty dynamicznego dociążania powinny być przeprowadzane wyłącznie ze stanu aktywnego obciążania próbki, a nie ze stanu pełzania lub relaksacji.

Literatura cytowana w tekście  
rozdziału 4

- [1] Alter B.E.K. and Curtis C.W. - Effect of Strain-Rate on the Propagation of a Plastic Strain Pulse Along a Lead Bar, Journ. Appl. Phys., vol. 27, No 9 /1956/, 1079.
- [2] Bejda J. and Wierzbicki T. - Dispersion of Small Amplitude Stress Waves in Prestressed Elastic, Visco-Plastic Cylindrical Bars, Quart. Appl. Math., vol. 24, No 1 /1966/, 63.
- [3] Bell J.F. and Stein A. - The Incremental Loading Wave in the Prestressed Plastic Field, Journ. de Mécanique, vol. 1, No 4 /1962/, 395.
- [4] Bell J.F. - Propagation of Plastic Waves in Prestressed Bars, U. S. Navy Technical Report No 5, Baltimore, The Johns Hopkins University /1951/.
- [5] Bell J. F. - The Physics of Large Deformation of Crystalline Solids, Springer /1968/.
- [6] Bianchi G. - Some Experimental and Theoretical Studies on the Propagation of Longitudinal Plastic Waves in a Strain-Rate Dependent Material, Stress Waves in Anelastic Solids, IUTAM Symposium /1963/, Springer.
- [7] Convery E. and Pugh H.L.D. - Velocity of Torsional Waves in Metals Stressed Staticly into Plastic Range, Journ. Mech. Engng. Science, vol. 10, No 2, /1968/, 153.

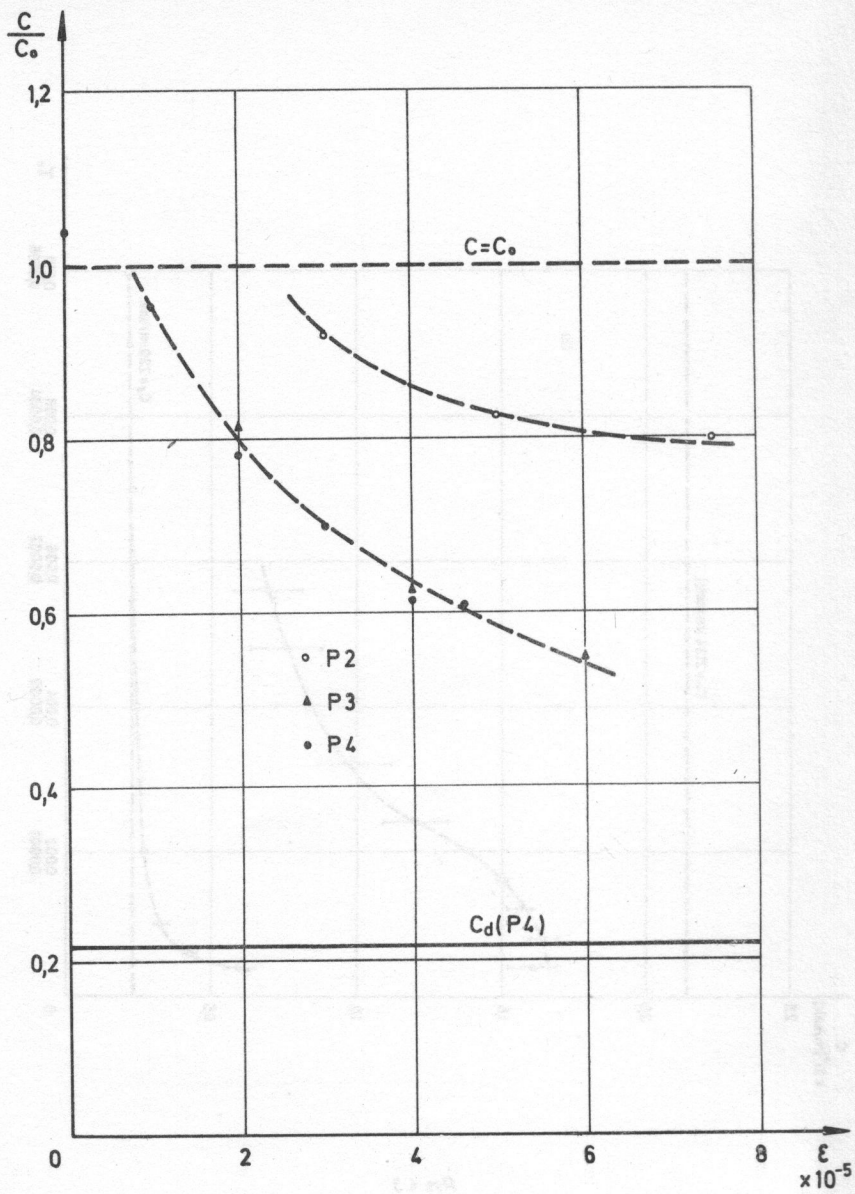
- [ 8 ] De Vault G.P. - The Effect of Lateral Inertia on the Propagation of Plastic Strain in Cylindrical Rod, Journ. Mech. Phys. of Solids, vol. 13, No 2 /1965/, 55.
- [ 9 ] Dillon O.W. - Experimental Data on Aluminium as a Mechanically Unstable Solid, Journ. Mech. Phys. of Solids, vol. 11, No 5 /1963/, 289.
- [10] Dillon O.W. - Waves in Bars of Mechanically Unstable Materials, Journ. Appl. Mech., vol. 33, No 2 /1966/, 267.
- [11] Hopkins H.G. - Mechanical Waves and Strain-Rate Effects in Metals, Stress Waves in Anelastic Solids, IUTAM Symposium /1963/, Springer.
- [12] Hunter S.C. and Johnson I.A. - The Propagation of Small Amplitude Elastic - Plastic Waves in Prestressed Cylindrical Bars, Stress Waves in Anelastic Solids, IUTAM Symposium /1963/, Springer.
- [13] Kenig M.J. and Dillon O.W. - Shock Waves Produced by Small Stress Increments in Annealed Aluminium, Journ. Appl. Mech., vol. 33, No 4 /1966/, 907.
- [14] Klepaczko J. and Hauser F.E. - Lateral Inertia Corrections in Impact Experiments, /to be published/.
- [15] Klepaczko J. - Analiza oszoła sprężysto-plastycznej fali w przecie, /rozdział 3/.
- [16] Klepaczko J. - Effects of Strain-Rate History on the Strain Hardening Curve of Aluminium, Arch. Mech. Stos., vol. 19, No 2 /1967/, 211.
- [17] Klepaczko J. - Strain-Rate History Effects for Polycrystalline Aluminium and Theory of Intersections, Journ. Mech. Phys. of Solids, vol. 16, No 3 /1968/, 255.
- [18] Kolsky H. - Experimental Studies in Stress Wave Propagation, Proc. 5th U.S. Natl. Congr. Appl. Mech. Ed. ASME /1966/, 21.

- [19] Malyshev B.M. - Propagation of Incremental Pulses in the Prestressed Wire, Izv. AN SSSR, Mech. Mash. No 2 /1960/, 120.
- [20] Malyshev B.M. - Experimental Study of Elastic - Plastic Stress Wave Propagation, Zhurn. PMTF, No 2 /1961/, 104.
- [21] Papierno R. and Gérard G. - Dynamic Stress - Strain Phenomena and Plastic Wave Propagation in Metals, Trans. Am. Soc. Metals, vol. 53 /1961/, 381.
- [22] Riparbelli C. - On the Time Lag of Plastic Deformation, Proc. of the First Midwestern Conf. on Solid Mech., Urbana, Univ. of Ill. /1953/.
- [23] Rubin R.J. - Propagation of Longitudinal Deformation Waves in a Prestressed Rod of Material Exhibiting a Strain-Rate Effect, Journ. Appl. Phys. vol. 25, No 4 /1954/.
- [24] Sharpe W.N. - The Portevin-Le Chatelier Effect in Aluminum Single Crystals and Polycrystals, Journ. Mech. Phys. of Solids, vol. 14, No 3 /1966/, 187.
- [25] Sternglass E.J. and Stuart D.A. - An Experimental Study of the Propagation of Transient Longitudinal Deformations in Elastoplastic Media, Journ. Appl. Mech., vol. 20, No 3 /1953/, 427.
- [26] Yew C.H. and Richardson H.A. - The Strain-Rate Effect and the Incremental Plastic Wave in Copper, /to be published/.

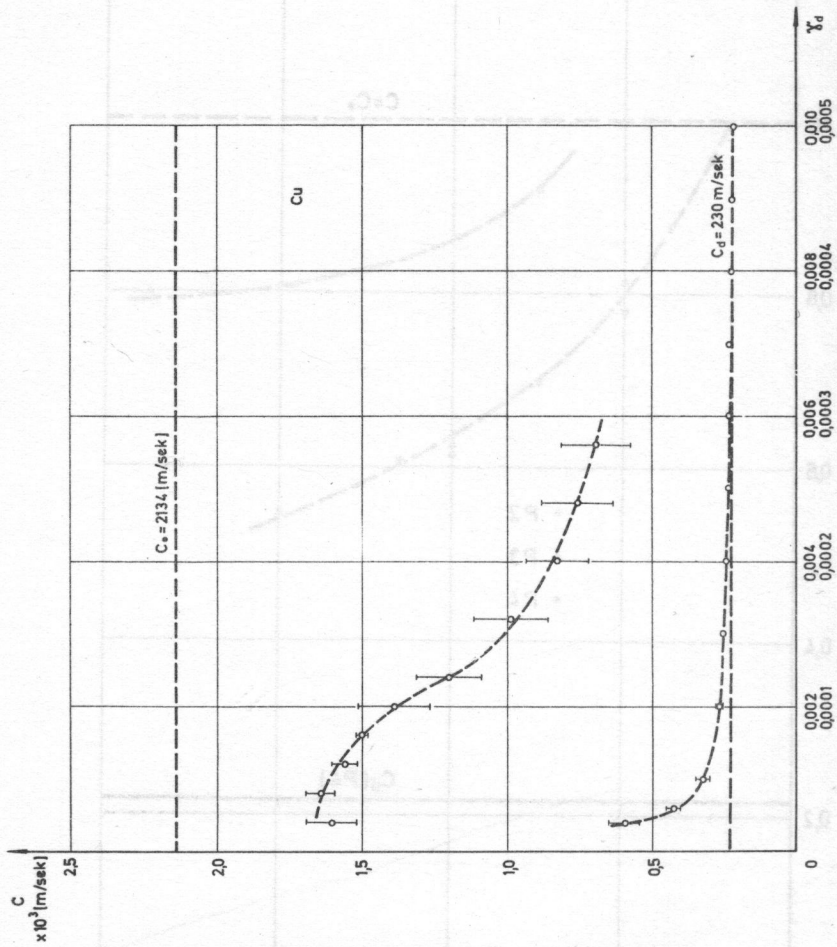


Rys. 4.1

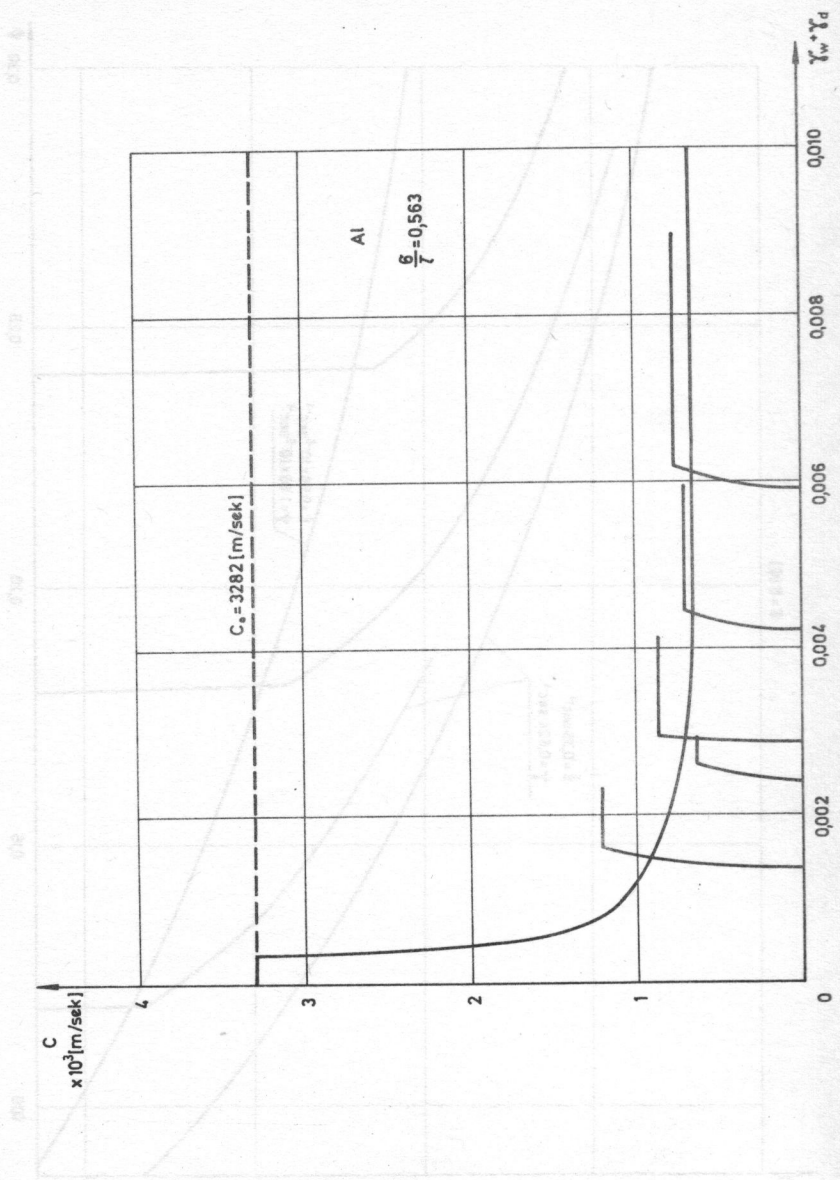




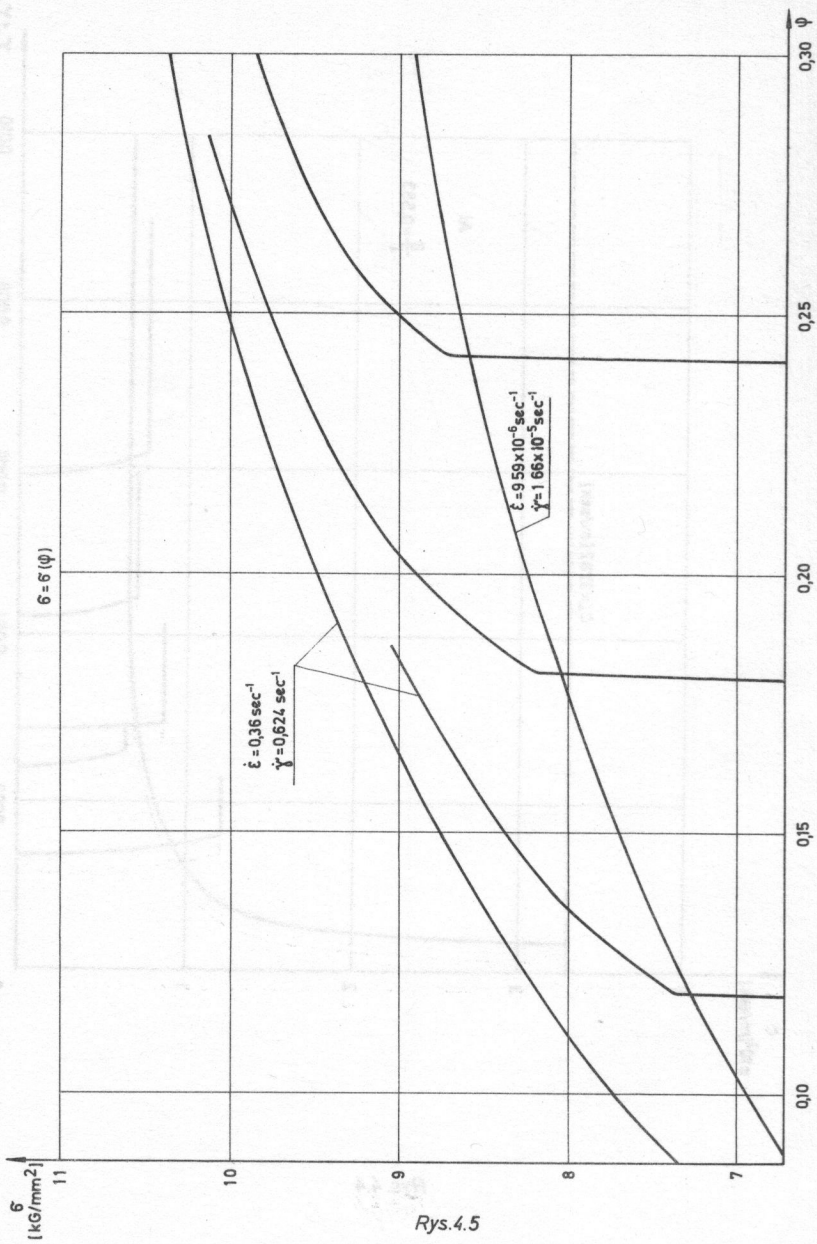
Rys.4.2



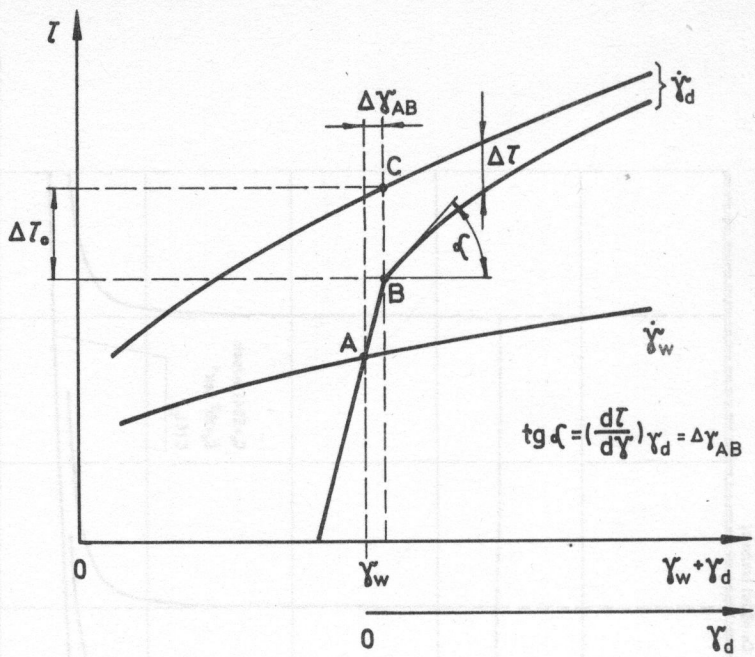
Rys. 4.3



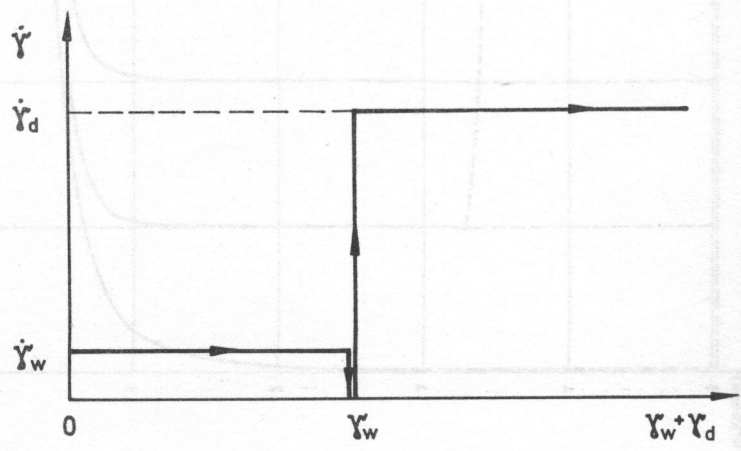
Rys. 4.4



Rys.4.5

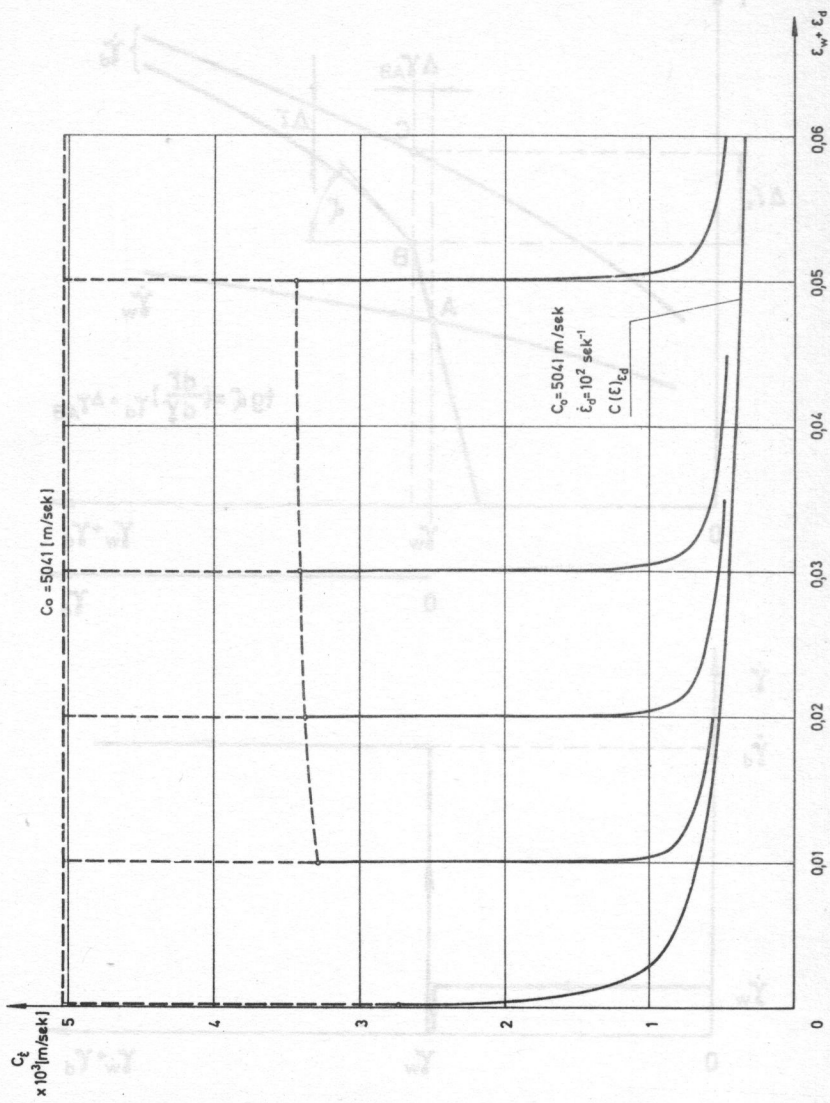


$$\operatorname{tg} \varphi = \left( \frac{d\tau}{d\gamma} \right) \gamma_d = \Delta \gamma_{AB}$$



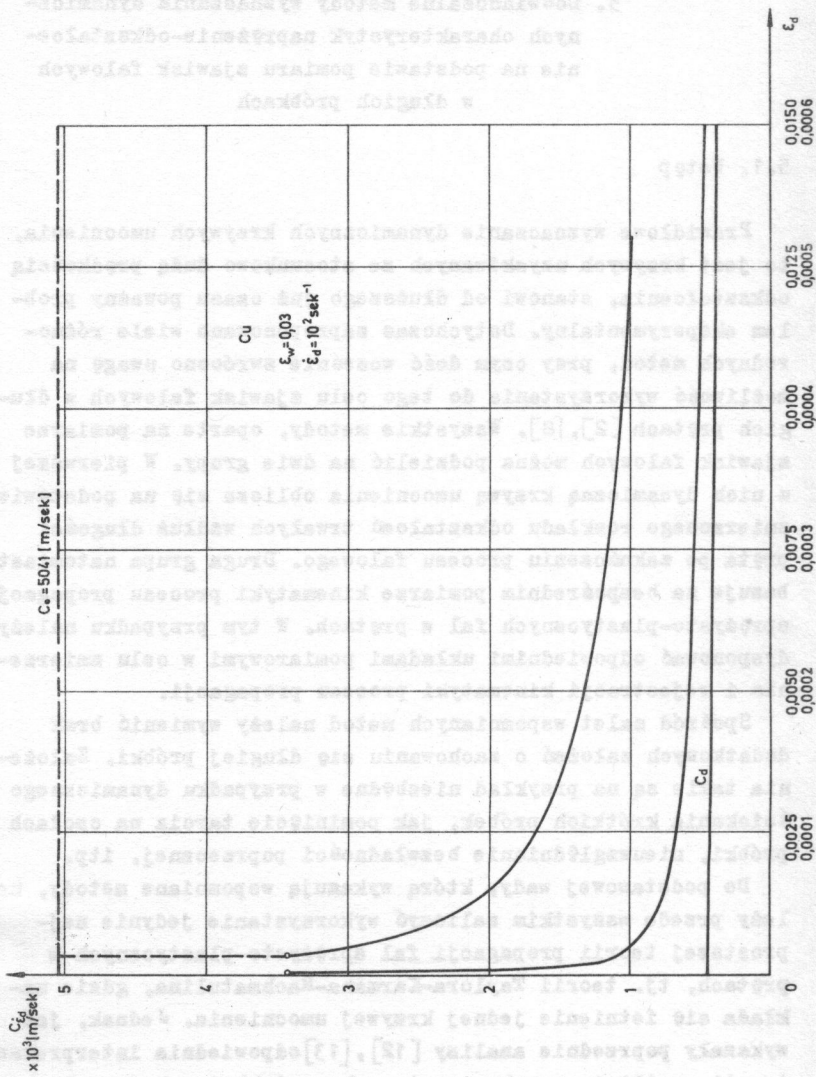
Rys. 4.6





Rys.4.7

3. Podstawowe metody wyznaczania dynamicznych charakterystyk naprężenia-odkształcenia dla niepodatnego pomiaru stawian falowych w diafragmach



Rys. 4.8

5. Doświadczalne metody wyznaczania dynamicznych charakterystyk naprężenie-odkształcenie na podstawie pomiaru zjawisk falowych w długich próbkach

5.1. Wstęp

Prawidłowe wyznaczanie dynamicznych krzywych umocnienia, to jest krzywych uzyskiwanych ze stosunkowo dużą prędkością odkształcenia, stanowi od dłuższego już czasu poważny problem eksperymentalny. Dotychczas zaproponowano wiele różnorodnych metod, przy czym dość wcześnie zwrócono uwagę na możliwość wykorzystania do tego celu zjawisk falowych w długich prętach [2], [8]. Wszystkie metody, oparte na pomiarze zjawisk falowych można podzielić na dwie grupy. W pierwszej z nich dynamiczną krzywą umocnienia oblicza się na podstawie zmierzonego rozkładu odkształceń trwałych wzdłuż długości pręta po zakończeniu procesu falowego. Druga grupa natomiast bazuje na bezpośrednim pomiarze kinematyki procesu propagacji sprężysto-plastycznych fal w prętach. W tym przypadku należy dysponować odpowiednimi układami pomiarowymi w celu zmierzenia i rejestracji kinematyki procesu propagacji.

Spośród zalet wspomnianych metod należy wymienić brak dodatkowych założeń o zachowaniu się długiej próbki. Założenia takie są na przykład niezbędne w przypadku dynamicznego ściskania krótkich próbek, jak pominięcie tarcia na czołach próbki, nieuwzględnianie bezwładności poprzecznej, itp.

Do podstawowej wady, którą wykazują wspomniane metody, należy przede wszystkim zaliczyć wykorzystanie jedynie najprostszej teorii propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach, tj. teorii Taylora-Kármána-Rachmatulina, gdzie zakłada się istnienie jednej krzywej umocnienia. Jednak, jak wykazały poprzednie analizy [12], [13] odpowiednia interpretacja teorii umożliwia uzyskanie stosunkowo dokładnych danych.

Rozważania teoretyczne jak i praktyka doświadczalna wskazują jakie wielkości, charakterystyczne dla procesu propagacji fali, mogą być mierzone lub znajduwane na drodze analitycznej. Wielkości te opisują w sposób kompletny kinematykę procesu, przy czym zakłada się, że fala porusza się wzdłuż półnieskończonego pręta od  $x = 0$  do  $x \rightarrow \infty$ , a cały proces jest obserwowany w funkcji czasu. Do wspomnianych wielkości na czole fali można zaliczyć:

a/ przemieszczenie  $U$ ,

$$U(x, t) \quad \text{dla } x = \text{const} \quad U(x, t)_x \quad /5.1/$$

b/ prędkość masowa  $v$ ,

$$v(x, t) \quad \text{dla } x = \text{const} \quad v(x, t)_x \quad /5.2/$$

gdzie

$$v(x, t)_x = \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_x$$

c/ przyspieszenie  $a$

$$\text{dla } x = \text{const} \quad a(x, t)_x \quad /5.3/$$

gdzie

$$a(x, t)_x = \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_x = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_x$$

d/ odkształcenie  $\epsilon$  ;

$$\text{dla } x = \text{const} \quad \epsilon(x, t)_x \quad /5.4/$$

gdzie

$$\epsilon(x, t)_x = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\bar{x}}$$

$\bar{x}$  oznacza średnią współrzędną przy pomiarze odkształcenia,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \frac{\Delta x}{2}$$

$\Delta x$  oznacza bazę tensometru na której mierzone jest odkształcenie,  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,

e/ prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}(x, t)$

$$\text{dla } x = \text{const} \quad \dot{\epsilon}(x, t)_x \quad /5.5/$$

gdzie

$$\dot{\epsilon}(x, t)_x = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)_x.$$

Ponadto w przypadkach od a/ do e/ podstawową mierzalną wielkością jest prędkość fali

$$C = \frac{dx}{dt}, \quad /5.6/$$

przy czym prędkość C można z punktu widzenia pomiarów definiować w zależności od wielkości mierzonej, i tak  $C_u$ ,  $C_v$ ,  $C_a$ ,  $C_z$ ,  $C_\xi$ . Zarówno w grupie zależności od /5.1/ do /5.5/ jak i w przypadku zależności /5.6/ podano na dole aktualne parametry w danym typie eksperymentu. Wartość ta pozostaje stała i jest zwykle zakładana z góry dla danego schematu doświadczalnego, na przykład założenie poziomej odkształceń przy pomiarze prędkości fali  $C_z$ .

Z przedstawionych zależności wynika, że podstawową wielkością pomiarową jest przemieszczenie  $U(x, t)$  mierzone zwykle dla stałych  $x$  w funkcji czasu  $U(x, t)_x$ . Jednak w wielu przypadkach, na przykład przy weryfikacji pewnych rozważań teoretycznych, wygodniej jest mierzyć prędkość masową  $v(x, t)$  również przy stałych wartościach  $x$ , a więc  $v(x, t)_x$ . Bardzo częstym przedmiotem pomiarów jest odkształcenie  $\xi(x, t)$  przy  $x = \text{const}$ , to jest  $\xi(x, t)_x$ , oraz równocześnie prędkość propagacji  $C_\xi$ .

Tak więc, w zależności od potrzeb można mierzyć te lub inne podane wielkości. W niniejszej pracy zostaną omówione metody posługiwania się odpowiednimi wielkościami mierzalnymi, aby na podstawie procesu falowego wyznaczać dynamiczne krzywe umocnienia.

## 5.2. Metody oparte o pomiar odkształceń trwałych

Chronologicznie rzecz biorąc, metody te zostały zaproponowane stosunkowo najwcześniej, gdyż nie wymagane są żadne



pomiary w funkcji czasu w trakcie procesu propagacji sprężysto-plastycznej fali w próbce w postaci pręta. We wszystkich omówionych niżej odmianach wykorzystuje się teorię Taylora-Kármána-Rachmatulina, a więc teorię, która zakłada istnienie jednej krzywej umocnienia.

Jako pierwszą należy wymienić metodę zaproponowaną przez Rachmatulina i opartą o pomiar odkształceń trwałych początkowego przekroju pręta, a więc wyłącznie dla  $x = 0$ , w funkcji prędkości uderzenia [8], [9].

Jeżeli założymy sprężysto-plastyczny model materiału z liniowym umocnieniem, tj. model Prandtla, to dla stanu sprężystego mamy

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_y \quad /5.7/$$

oraz dla stanu plastycznego

$$\sigma = E\varepsilon_y + E_t(\varepsilon - \varepsilon_y), \quad \varepsilon \geq \varepsilon_y, \quad /5.8/$$

gdzie  $E_t$  jest modułem umocnienia.

Zgodnie z rozwiązaniem problemu propagacji sprężysto-plastycznej fali dla półnieskończonego pręta z warunkami początkowymi w prędkości dla  $x = 0$  i  $t = 0$ ,  $v = v_0$ , a więc dla pręta uderzonego ze stałą prędkością  $v_0$ , maksymalne odkształcenie  $\varepsilon_{\max}$  na czole fali w funkcji prędkości uderzenia  $v_0$  przedstawia się w formie

$$v_0 = \int_0^{\varepsilon_{\max}} C(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \text{gdzie} \quad C = \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad /5.9/$$

Po podstawieniu zróżniczkowanej względem  $\varepsilon$  zależności /5.8/ do zależności na  $C$ , a następnie scałkowaniu otrzymuje się

$$v_0 = C_0 \varepsilon_y + C_t (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_y), \quad /5.10/$$

gdzie odkształcenie trwałe wynosi  $\varepsilon_p = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_y$ . Z zależności /5.10/ wynika, że w tym przypadku prędkość uderzenia zależy liniowo od wartości maksymalnego odkształcenia na końcu pręta. Wstępne wyniki eksperymentów opisane

w pracy [9], które zostały przeprowadzone na prętach aluminiowych o długości  $l = 500$  mm i średnicy  $d = 20$  mm w zasadzie potwierdziły poprawność przybliżenia /5.10/.

Rozumując w sposób odwrotny, można na podstawie doświadczalnie wyznaczonej zależności  $v_0 = v_0(\epsilon_{\max})$  otrzymać dokładną dynamiczną krzywą umocnienia. W tym celu należy zróżniczkować zależność /5.9/ uwzględniając, że  $\epsilon_p = \epsilon_{\max} \frac{\sigma(\epsilon_{\max})}{E}$  wówczas

$$\frac{dv_0}{d\epsilon_p} = \left[ 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right]; \quad \frac{dv_0}{d\epsilon_p} = \left( \frac{1}{\beta_0} \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right)^{1/2}. \quad /5.11/$$

Równanie /5.11/ stanowi równanie różniczkowe względem dynamicznej krzywej umocnienia  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ , gdyż  $\frac{dv_0}{d\epsilon_p}$  jest wyznaczoną doświadczalnie zależnością w funkcji  $\epsilon_p$ . Stałą całkowania w równaniu /5.11/ znajduje się z warunku równości modułu stycznego dynamicznej krzywej umocnienia z modułem Younga  $E$  w punkcie osiągnięcia dynamicznej granicy plastyczności  $(\sigma_y, \epsilon_y)$ .

Opisana metoda wykazuje tę niedogodność, że wymaga przeprowadzenia serii eksperymentów na różnych próbkach ze zwiększonymi stopniowo prędkościami uderzenia. Fakt ten pociąga za sobą znaczny rozrzut wyników doświadczeń, a tym samym zmniejszenie dokładności metody.

Drugą metodą z tej grupy jest metoda zaproponowana przez Leśkiewskiego w pracy [6]. W tym przypadku wykorzystuje się tylko jedną próbkę o skończonej długości, której jeden z końców deformuje się podczas uderzenia o sztywną przegrodę.

Możliwość otrzymania dynamicznej krzywej umocnienia opiera się na teoretycznym wniosku, że fala odciążenia odbita od swobodnego końca pręta jest falą silnej nieciągłości i propaguje się z prędkością  $C_0$  niezależnie od kształtu dynamicznej krzywej umocnienia. Zgodnie z rozwiązaniem z pracy [6], dla udowodnienia tego stwierdzenia zakłada się prędkość fali odciążenia równą  $C$ , a z równania ilości ruchu mamy

$$\int_0^L C(v_2 - v_1) = \sigma_1 - \sigma_2, \quad /5.12/$$

indeksy 1 i 2 oznaczają wielkości po dwóch stronach fali odciążenia. Ponieważ odciążenie zachodzi zgodnie z prawem Hooke'a to równanie /5.12/ można zapisać w następującej postaci

$$C (v_2 - v_1) = C_0^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad /5.13/$$

Z drugiej strony z warunku nierozdzielności przemieszczeń na czole fali odciążenia

$$\varepsilon_1 dx + v_1 dt = \varepsilon_2 dx + v_2 dt$$

lub

$$C (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = v_2 - v_1. \quad /5.14/$$

Z równań /5.13/ i /5.14/ wynika  $C = C_0$ .

W ten sposób, może zostać wyznaczona dowolna dynamiczna krzywa umocnienia  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  z rozkładu odkształceń trwałych wzdłuż długości skończonej próbki o ile fala odciążenia odbita od swobodnego końca próbki nie wywoła odkształceń trwałych. Schemat taki realizuje się jedynie dla określonego przedziału prędkości uderzenia.

Zakłada się, że odkształcenia trwałe  $\varepsilon_p(x)$  są rozłożone monotonicznie wzdłuż długości pręta w przedziale  $0 \leq x \leq x_1$ . Współrzędna czoła fali odciążenia w danej chwili  $t$  wynosi

$$x = - C_0 t + 2 l, \quad /5.15/$$

gdzie  $l$  oznacza długość próbki.

Ponadto

$$\frac{x}{C_0} = C (\varepsilon_{\max}). \quad /5.16/$$

Po podstawieniu /5.16/ do /5.15/ otrzymuje się

$$x = - \frac{C_0}{C} x + 2 l$$

lub

$$\frac{C}{C_0} = \frac{x}{2l - x}. \quad /5.17/$$

Po zróżniczkowaniu względem  $x$  zależności na odkształcenie trwałe  $\epsilon_p$

$$\epsilon_x = \epsilon_{max} - \frac{1}{E} \delta(\epsilon_{max})$$

i uwzględnienie /5.17/ otrzymuje się

$$\frac{d\epsilon_p}{dx} = \left(1 - \frac{c^2}{c_0^2}\right) \frac{d\epsilon_{max}}{dx} = \left[1 - \left(\frac{x}{2l-x}\right)^2\right] \frac{d\epsilon_{max}}{dx} \quad /5.18/$$

Stąd po scałkowaniu

$$\epsilon_{max}(x) = \epsilon_y - \int_x^l \frac{\frac{d\epsilon_p}{dx}}{1 - \left(\frac{x}{2l-x}\right)^2} dx$$

lub

$$\epsilon_{max}(x) = \epsilon_y + \frac{\epsilon_p(x)}{1 - \left(\frac{x}{2l-x}\right)^2} + \int_x^l \frac{x(2l-x)\epsilon_p(x)}{4l(x-l)^2} dx \quad /5.19/$$

krzyż, czym wykorzystano warunek  $\frac{d\epsilon_p}{dx} \Big|_{x=l} = 0$ .

Rozkład maksymalnych naprężeń po  $x$  znajduje się z równania /5.19/ oraz zależności  $\sigma_{max} = E(\epsilon_{max} - \epsilon_p)$ , stąd

$$\sigma_{max}(x) = \sigma_y + \frac{E x^2 \epsilon_p}{4l(1-x)} + E \int_x^l \frac{x(2l-x)\epsilon_p(x)}{4l(l-x)^2} dx \quad /5.20/$$

Równania /5.19/ i /5.20/ stanowią parametryczny opis dynamicznej krzywej umocnienia  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$  z  $x$  jako parametrem. Wartość dynamicznej granicy plastyczności otrzymuje się z wyrażenia

$$v_y = c_0 \epsilon_y,$$

gdzie  $v_y$  oznacza prędkość uderzenia charakterystyczną dla osiągnięcia granicy plastyczności.

W przypadku czołowego zderzenia dwóch prętów o znaczenie różniących się granicach plastyczności, co stanowi przypadek bardziej realistyczny z punktu widzenia eksperymentu niż uderzenie pręta o sztywną przegrodę, metoda przedstawio-

na wyżej została zmodyfikowana w pracy [7]. Dla takiego schematu fala odciążenia propaguje się od uderzonego końca, tj. od  $x = 0$  z prędkością  $C_0$ , przy czym propagacja rozpoczyna się z opóźnieniem  $\tau$  od momentu uderzenia. Czas  $\tau$  zależy od długości pręta o dużej wytrzymałości i wynosi  $\tau = \frac{2L}{C_0^*}$  gdzie  $L$  oznacza długość pręta o wyższej granicy plastyczności, a  $C_0^*$  prędkość fali sprężystej w tym pręcie. Zależności analogiczne do /5.18/, /5.19/ i /5.20/ można napisać w formie

$$C = \frac{C_0 x}{x + C_0 \tau}$$

$$\frac{dE_{max}}{dx} = \frac{\frac{dE_p}{dx}}{1 - \left(\frac{x}{x_0 + C_0 \tau}\right)^2} \quad /5.21/$$

oraz

$$E_{max} = E_y + \frac{E_p(x)}{1 - \left(\frac{x}{x_0 + C_0 \tau}\right)^2} - \frac{E_p(x_y)}{1 - \left(\frac{x_y}{x_0 + C_0 \tau}\right)^2} + \int_x^{x_y} \frac{2x(x + C_0 \tau) E_p(x)}{C_0 \tau (2x + C_0 \tau)^2} dx, \quad /5.22/$$

$$G_{max} = E(E_{max} - E_p). \quad /5.23/$$

Współrzędną  $x_y$  wyznacza się z warunku osiągnięcia granicy plastyczności w tym przekroju próbki. Innymi słowy  $x_y$  oznacza największą wartość  $x$  dla której obserwuje się jeszcze bardzo małe odkształcenie plastyczne, na przykład 0,1%. Równania /5.22/ i /5.23/ stanowią parametryczną postać dynamicznej krzywej umocnienia.

Pewną dalszą modyfikacją tej metody dla dwóch krótkich prętów podano również w pracy [7]. Otóż na podstawie poprzednich rozważań można określić taki zakres prędkości uderzenia  $v$  dla którego fale odbite wyłącznie od swobodnego końca pręta o długości  $l$  będą falami odciążenia. Jeżeli długość pręta o dużej granicy plastyczności wynosi  $L$  to wówczas

$$C(E_{max}) = \frac{x C_0}{2l - x} \quad \text{dla } 0 < x < l, \quad /5.24/$$



$$C(\varepsilon_{max}) = \frac{x c_0}{2L-x} \quad \text{dla } -L < x < 0. \quad 15.25/$$

Z wzoru

$$\frac{d\varepsilon_{max}}{dx} = \frac{\frac{d\varepsilon_p}{dx}}{1 - \frac{c^2}{c_0^2}} \quad 15.26/$$

otrzymuje się po podstawieniu /5.24/ i /5.25/

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_y + \int_l^{x_0} \frac{\frac{d\varepsilon_p}{dx}}{1 - \left(\frac{x}{2L-x}\right)^2} dx + \int_{x_0}^x \frac{\frac{d\varepsilon_p}{dx}}{1 - \left(\frac{x}{2L-x}\right)^2} dx. \quad 15.27/$$

Wartość  $\varepsilon_y$  wyznacza się z zależności  $v_0 = 2c_0\varepsilon_y$ , gdzie  $v_0$  oznacza prędkość uderzenia przy której pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne.

Tak jak i poprzednio, wyrugowanie parametru  $x$  w równaniach /5.23/ i /5.27/ prowadzi do wyznaczenia dynamicznej krzywej umocnienia.

Ostatni wariant metody został zastosowany w pracy [7] w celu doświadczalnego wyznaczenia dynamicznej krzywej umocnienia dla próbki wykonanej z miękkiej stali. Wyniki eksperymentu przedstawiono na rys. 5.1, gdzie krzywa 1 oznacza krzywą statyczną, a krzywa 2 - dynamiczną. Pomiaru odkształceń trwałych dokonywano na próbce o średnicy 21 mm z dokładnością  $\pm 0,001$  mm; prędkości uderzenia osiągnęto w granicach  $44 \div 48 \text{ ms}^{-1}$ .

Przedstawione metody oparte o zasadę pomiaru odkształceń trwałych nie rozpowszechniły się dotychczas, pomimo stosunkowo wczesnego pojawienia się w literaturze. Niewątpliwie, fakt ten jest spowodowany dużą ilością założeń w podanych zależnościach z jednej strony i pracochłonnością metody z drugiej. Ponadto nie określono wartości prędkości odkształcenia dla jakich wyznacza się krzywe umocnienia, należy przypuszczać, że zakres ten wynosi od  $10^2 \text{ s}^{-1}$  do  $5 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$ .

### 5.3. Metody oparte na pomiarze kształtu czoła fali

Szybki rozwój metod pomiarowych oraz techniki rejestracji szybkozmiennych procesów umożliwił pomiar kształtu sprężysto-plastycznej fali w płęcie podczas przemieszczania się jej wzdłuż długości. Opublikowano stosunkowo dużo prac, których przedmiotem była weryfikacja w jaki sposób kształt krzywej umocnienia wpływa na proces propagacji czoła fali. Natomiast bardzo mało prac dotyczy zagadnienia odwrotnego, a więc wyznaczania dynamicznych krzywych umocnienia z pomiaru kształtu czoła fali.

W tej grupie należy wymienić Campbella [2] - 1952 r., Szestopałowa [11] - 1958 r., Cliftona i Bodnera [1] i [3] - 1966 r., oraz Efrona i Malverna [4] - 1969 r.

Ze względu na pewne podobieństwo do metod opisanych uprzednio, zostanie najpierw omówiona metoda Cliftona i Bodnera. Otóż odpowiednio długą próbkę podwieszoną swobodnie obciąża się impulsem ciśnienia  $p(t)$ . Wzdłuż próbki propaguje się fala sprężysto-plastyczna wraz z falą odciążenia, po pewnym czasie również od swobodnego końca próbki zaczyna się propagować fala odciążenia. Teoretyczna analiza tego procesu zamieszczona w pracy [3] wskazuje, że na podstawie pomiaru prędkości swobodnego końca próbki w funkcji czasu można wyznaczyć dynamiczną krzywą umocnienia w zakresie małych odkształceń plastycznych rzędu sprężystych. Pomiar prędkości swobodnego końca próbki dokonywano za pomocą pojemnościowego czujnika przemieszczeń, opisanego także w pracy [5], a następnie różniczkowania oscylogramów.

Wynik analizy teoretycznej dla całego procesu przedstawiono na płaszczyźnie fazowej, rys. 5.2.

Aby wyznaczyć dynamiczną krzywą umocnienia należy uzależnić wartości naprężenia i odkształcenia w obszarze plastycznym wzdłuż AB z kształtem przebiegu zmian prędkości w funkcji czasu  $v(t)$  wzdłuż AG a więc dla  $x = 1$ . Krzez Q oznaczono do-

wolny punkt w obszarze plastycznym, natomiast punkt  $Q'$  jest wyznaczony dla  $x = 1$  przez charakterystykę  $x - C_0 t = \text{const}$  przechodzącą przez punkt  $Q$ .

Korzystając z zależności na charakterystykach dla stanu sprężystego

$$\left. \begin{aligned} \sigma \pm \rho_0 C_0 v &= \text{const.} & \text{dla } \frac{dx}{dt} = \pm C_0 \\ \text{oraz } [\sigma] &= \pm \rho_0 C_0 [v] & \text{dla } \frac{dx}{dt} = \pm C_0 \end{aligned} \right\} / 5.28/$$

gdzie nawias  $[ ]$  oznacza skok danej wartości przed i za frontem fali sprężystej, można otrzymać równanie

$$\sigma(Q) + \rho_0 C_0 v(Q) = \rho_0 C_0 v(Q') \quad / 5.29/$$

Ponieważ punkt  $Q$  znajduje się w obszarze plastycznym  $OAB$ , przeto z rozwiązania ogólnego dla tego stanu [5] por. /5.9/, mamy

$$v(Q) = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\sigma(Q)} \frac{d\sigma}{c(\sigma)} \quad / 5.30/$$

Podstawiając równanie /5.30/ do /5.29/, a następnie różniczkując otrzymuje się

$$d\sigma(Q) = \frac{\rho_0 C_0}{1 + \frac{C_0}{c[\sigma(Q)]}} dv(Q') \quad / 5.31/$$

Celem scałkowania równania /5.31/ rozważmy przedział czasu  $AG = \tau$ , podzielmy go na  $n$  różnych części o jednostkowym czasie  $h$ , wówczas  $\tau = nh$ . Oznaczmy punkt  $Q'$ , który odpowiada punktowi na płaszczyźnie fazowej  $(l, \frac{l}{c_0} + \tau_n)$ , przez  $Q_n$ , a odpowiadający mu punkt  $Q$  przez  $Q_n$ . Punktowi temu odpowiadają wartości  $\sigma_n$ ,  $C_n$  oraz  $v_n$ . Całkując w tym przypadku równanie /5.31/ od  $\tau_{n-1}$  do  $\tau_n$  otrzymuje się

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \frac{\rho_0 C_0 (\nu_n - \nu_{n-1})}{1 + \frac{C_0}{2} \left( \frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_{n-1}} \right)} + O(\delta \sigma^3) \quad /5.32/$$

gdzie  $\delta \sigma = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ , natomiast wyrażenie  $O(\delta \sigma^3)$  spełnia warunki

$$\lim_{\delta \sigma \rightarrow 0} \frac{O(\delta \sigma^3)}{\delta \sigma^3} = M, \text{ gdzie } |M| < \infty.$$

Oczywiście zakłada się, że  $\nu_n$  jest znaną wartością wyznaczoną eksperymentalnie. Wartość prędkości  $C_n$  można wyznaczyć z pochylenia charakterystyki przechodzącej przez punkty  $Q_n$  i  $Q'_n$  na podstawie rys. 5.2, stąd

$$C_n = \frac{\frac{l}{c_0} - \frac{\tau_n}{2}}{\frac{l}{c_0} + \frac{\tau_n}{2}} \cdot C_0. \quad /5.33/$$

Równania /5.32/ i /5.33/ mogą zostać wykorzystane do obliczenia wartości naprężeń wzdłuż linii AB, przy czym obliczenia rozpoczyna się od granicy plastyczności  $\sigma_y$  wyznaczonej ze wzoru

$$\sigma_y = \frac{\nu_0}{2 \rho_0 c_0}.$$

Ponieważ zostało wyznaczone naprężenie  $\sigma$  w dowolnym punkcie  $Q$  na AB, to w ten sposób można znaleźć wartość prędkości  $\nu(Q)$  na AB z równania /5.29/. Zależność  $\nu(Q)$  w funkcji  $\sigma(Q)$  na odcinku AB określa pewną funkcję  $\phi$ , która wiąże naprężenie  $\sigma$  z prędkością masową  $\nu$ .

W celu obliczenia odkształcenia w punkcie  $Q$  należy wykorzystać równanie /5.9/ zapisane w nieco innej formie

$$\nu(Q) = \phi = \int_0^{E(Q)} c(E) dE. \quad /5.34/$$

Różniczkując to równanie, a następnie całkując od  $\tau_{n-1}$  do  $\tau_n$  otrzymuje się

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + \frac{2(\phi_n - \phi_{n-1})}{C_n + C_{n-1}} + O(\delta G^3), \quad /5.35/$$

gdzie  $\varepsilon_n = \varepsilon(Q_n)$ ,  $\phi_n = \phi(\delta_n)$ ,  $\delta\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$ , natomiast  $C_n$  jest wyznaczone z równania /5.33/.

Wykres  $\phi(Q)$  w funkcji  $\varepsilon(Q)$  stanowi szukaną dynamiczną krzywą umocnienia  $\phi = \phi(\varepsilon)$  wyznaczoną na podstawie eksperymentalnie zarejestrowanego przebiegu  $v(t)$  dla  $x = 1$ .

W pracy [1] zamieszczone wyniki badań tego rodzaju w postaci wyznaczonych dynamicznych krzywych umocnienia dla technicznie czystego aluminium w stanie wyżarzonym. Wspomniane wyniki przytoczono również na rys. 5.3. Wyniki te nie są jednak przejrzyste ze względu na duży rozrzut statycznych krzywych umocnienia w zakresie małych odkształceń. Wydaje się, że średnia dynamiczna krzywa powinna leżeć nieco wyżej od średniej krzywej statycznej.

Bezpośredni pomiar wartości odkształcenia na czole fali o funkcji czasu dla różnych  $x$ , a więc przypadek d, prowadzi do stosunkowo prostej metody wyznaczania dynamicznych krzywych umocnienia. Sposób ten został zaproponowany w pracach [5] i [6] i polega na doświadczalnym wyznaczeniu bieżącego modułu stycznego krzywej umocnienia z pomiarów  $\varepsilon(x, t)_x$  oraz  $C_\varepsilon$ , a następnie scałkowaniu wyrażenia /5.9/, stąd

$$\phi = \phi_0 \int_0^{\varepsilon_{max}} C^2(\varepsilon) d\varepsilon \quad /5.34/$$

oraz

$$\varepsilon = C^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), \quad /5.35/$$

gdzie  $C^{-1}$  oznacza odwrotną funkcję od  $C(\varepsilon)$ . Jeżeli dwa sąsiednie czujniki mierzące odkształcenia są rozmieszczone na odległości  $\delta x = x_2 - x_1$ , a czas propagacji danego poziomu odkształcenia pomiędzy  $x_1$  i  $x_2$  wynosi  $\delta t = t_2 - t_1$  to wówczas dla danego  $\varepsilon$



$$C_{\varepsilon} = \left( \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right)_{\varepsilon} ; \quad \delta x = x_2 - x_1 = \text{const.} \quad /5.36/$$

Tak więc pomiar wartości  $\delta t$  dla różnych  $\varepsilon$  i stałego  $x$  wyznacza funkcję  $C(\varepsilon)$ .

Chociaż przedstawiona metoda została zaproponowana stosunkowo wcześniej, to pomimo swej prostoty nie została dotychczas wykorzystana na szerszą skalę. Jest to prawdopodobnie spowodowane tym, że wymaga ona precyzyjnych pomiarów odkształceń w funkcji czasu na czole fali. Wyniki uzyskane na miedzi dla małych odkształceń rzędu  $\varepsilon_{\max} = 3 \cdot 10^{-3}$  w pracy [2] wskazują na niedostateczną dokładność pomiarów, gdyż niektóre dynamiczne krzywe umocnienia leżą nawet nieco poniżej statycznych. Ta sama metoda zastosowana w pracy [11] dla większych odkształceń rzędu  $\varepsilon_{\max} = 3 \cdot 10^{-2}$ , dała dla miedzi jak się wydaje rezultat bardziej prawidłowy, gdyż dynamiczne krzywe leżą znacznie powyżej statycznych. Wynik ten przedstawiono na rys. 5.4.

Wreszcie ostatnio Efron i Malvern [4] podali metodę opartą na pomiarze  $v(x, t)_x$  oraz  $C_v$ . Przeprowadzone w taki sposób doświadczenia przy użyciu odpowiedniego czujnika pomiaru prędkości masowej dla różnych  $x$  pozwalają na wyznaczenie funkcji  $C(v)$ . Ponieważ zgodnie z teorią propagacji

$$v = \int_0^{\varepsilon} C(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{lub} \quad \frac{dv}{d\varepsilon} = C(\varepsilon)$$

to

$$\varepsilon = \int_0^v \frac{v dv}{c(v)}. \quad /5.37/$$

Równanie /5.37/ oraz równanie /5.34/ stanowią w tym przypadku komplet niezbędnych równań do wyznaczenia dynamicznej krzywej umocnienia. Obliczenia takie zostały przeprowadzone w oparciu o wyniki doświadczeń dla wyżarzzonego aluminium [3]. Wynik obliczeń w postaci dynamicznej krzywej umocnienia, uzys-

kanej w zakresie odkształceń  $0 \leq \varepsilon \leq 9 \cdot 10^{-3}$  wykazał, że krzywa ta leży zaledwie kilka procent wyżej od krzywej statycznej, a nawet w pewnym obszarze odkształceń plastycznych z nią się pokrywa. Metoda ta zasługuje również na uwagę ze względu na prostotę i stosunkową łatwość pomiaru prędkości masowych.

#### 5.4. Dyskusja

Charakterystyczną cechą wszystkich omówionych dotychczas metod jest stosunkowo skomplikowany tok postępowania w wyniku którego otrzymuje się dynamiczną krzywą umocnienia. I tak, jeżeli ograniczyć się do metod wykorzystując bezpośredni pomiar kształtu czoła fali dla różnych  $x$  oraz odpowiednio oznaczyć kolejne operacje, to uzyskuje się pewne schematy algorytmów. Na przykład metodę wyznaczania odkształceń na czole fali, prace [2] oraz [11], można przedstawić tak

$$\varepsilon(x,t)/x \Big|_e \xrightarrow{\text{P}} \textcircled{1} C(\varepsilon) = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \xrightarrow{\textcircled{2}} C^2(\varepsilon) \xrightarrow{\textcircled{4}} \sigma = \int_0^{\varepsilon_0} C^2(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3}} \varepsilon = C^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), \quad /5.38/$$

gdzie  $|_e$  oznacza zależność otrzymaną na drodze doświadczalnej, p oznacza operację pomiarową, n operację numeryczną, cyfra u dołu oznacza kolejny numer operacji.

Równie podobnie można przedstawić metodę podaną w pracy [4], a opartą na pomiarze prędkości masowych

$$v(x,t)/x \Big|_e \xrightarrow{\text{P}} \textcircled{1} C(v) = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \xrightarrow{\textcircled{2}} \varepsilon(v) = \int_0^v \frac{dv}{c(v)} \xrightarrow{\textcircled{3}} C(\varepsilon) \xrightarrow{\textcircled{5}} C^2(\varepsilon) \xrightarrow{\textcircled{6}} \sigma = \int_0^{\varepsilon_0} C^2(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\xrightarrow{\textcircled{4}} \varepsilon = C^{-1}\left(\frac{x}{t}\right). \quad /5.39/$$

Ponadto, ze względu na większą liczbę możliwych mierzalnych wielkości na czole fali można zaproponować inne metody. Stosunkowo łatwo mierzalną wielkością na czole fali jest

przesunięcie  $U(x, t)$ . W tym celu rozpatrzmy za pracą [5] rozwiązanie dla półnieskończonego pręta rozciąganego stałą prędkością  $v_0 = \text{const}$ . Jak wspomiano poprzednio, warunki brzegowe dla równania falowego można napisać w postaci  $U = v_0 t$  dla  $x = 0$  oraz  $U = 0$  dla  $x = \infty$ . W tym przypadku istnieją dwa rozwiązania równania falowego przy założeniu jednej krzywej umocnienia, mianowicie

$$-U = -v_0 t + \varepsilon_{max} x \quad /5.40/$$

oraz

$$\frac{E_t}{\rho_0} = \left(\frac{x}{t}\right)^2 \quad \text{lub} \quad c^2 = \frac{E_t(\varepsilon)}{\rho_0}; \quad /5.41/$$

stąd

$$v_0 = - \int_0^{\varepsilon_{max}} c(\varepsilon) d\varepsilon,$$

gdzie  $E_t$  oznacza moduł styczny  $E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ .

Przesunięcie w danej chwili dla współrzędnej  $x$  wynosi

$$U = \int_x^{\infty} \frac{\partial U}{\partial x} dx \quad \text{lub} \quad U = \int_x^{\infty} \varepsilon(x) dx. \quad /5.42/$$

Jako najprostsze rozwiązanie dla znalezienia  $\sigma(\varepsilon)$  przy zmierzonym  $U(x, t)_x$  nasuwa się wykorzystanie algorytmu /5.39/, należy jedynie dodać jeszcze jedną operację początkową, w ten sposób

$$U(x, t)_x \Big|_e \xrightarrow{\text{a)}} v(x, t)_x = \frac{\partial U(x, t)_x}{\partial t} \quad \text{dalej jak w /5.39/. /5.43/}$$

Wprowadzono więc dodatkowo numeryczną operację różniczkowania.

Następną ewentualnością jest wykorzystanie rozwiązania /5.40/, wówczas

$$-u(x,t)_x = -t \left[ -v(x,t)_x + \varepsilon \frac{x}{t} \right], \quad /5.44/$$

następnie po wyznaczeniu  $\varepsilon$  i uwzględnieniu  $C = \frac{x}{t}$  oraz  $v(x,t)_x = \frac{\partial u(x,t)_x}{\partial t}$  otrzymuje się

$$\varepsilon = \frac{1}{C} \left[ \frac{\partial u(x,t)_x}{\partial t} - \frac{u(x,t)_x}{t} \right]. \quad /5.45/$$

Ponadto na podstawie /5.45/

$$\delta = \beta_0 \int_0^\varepsilon \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial u(x,t)_x}{\partial t} - \frac{u(x,t)_x}{t} \right] \right\}^2 d\varepsilon. \quad /5.46/$$

W ten sposób algorytm dla tej metody byłby następujący

$$u(x,t)_x \Big|_e \xrightarrow[n]{(1)} v(x,t)_x \xrightarrow[p]{(2)} C = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \begin{cases} \xrightarrow[n]{(4)} \delta(\varepsilon) \text{ wg (46)} \\ \xrightarrow[n]{(3)} \varepsilon(C) \text{ wg (45)}. \end{cases} \quad /5.47/$$

Kolejna metoda jest oparta na wykorzystaniu równania /5.42/. W tym przypadku można równanie to zapisać nieco inaczej, mianowicie zastąpić  $\infty$  przez aktualną granicę obszaru zaburzonego i niezaburzonego  $x_0 = C_0 t$ , wówczas

$$u = \int_x^{x_0} \varepsilon(x) dx; \quad x \leq x_0. \quad /5.48/$$

Ponieważ  $x = C t$  oraz  $dx = t dC$ , to równanie /5.48/ przekształci się do postaci

$$\frac{u}{t} = \int_c^{c_0} \beta(c) dc. \quad /5.49/$$

Oznaczając  $\frac{U}{T} = \alpha$  otrzymuje się  $\frac{d\alpha}{dc} = \varepsilon$ ,

$$\frac{d\alpha}{dc} = \beta(c) \quad \text{lub} \quad c = \beta^{-1}\left(\frac{d\alpha}{dc}\right). \quad /5.50/$$

Dalej

$$\sigma = \rho_0 \int_0^{\varepsilon} [\beta^{-1}(\varepsilon)]^2 d\varepsilon. \quad /5.51/$$

Algorytm dla tej metody można przedstawić następująco

$$U(x,t) \xrightarrow{\text{p}} \alpha(c) \xrightarrow{\text{②}} \frac{d\alpha}{dc} = \beta(c) \xrightarrow{\text{③}} [\beta^{-1}(\varepsilon)]^2 \xrightarrow{\text{④}} \sigma, \text{ wg (51)} \quad /5.52/$$

$$\xrightarrow{\text{②}} \varepsilon = \beta(c).$$

Charakterystyczną cechą algorytmów /5.43/, /5.47/ i /5.52/ jest jednokrotna operacja różniczkowania, która nie jest operacją dokładną. Suma operacji zamyka się liczbą od 4 do 6.

Z jednej strony, z powodu stosunkowo małej dokładności pomiarów procesów falowych, a z drugiej, z uwagi na wymienioną liczbę operacji pomiarowych i numerycznych w przedstawionych metodach, wynik w postaci dynamicznej krzywej umocnienia może być obarozony pewnym błędem.

Ze względu na skomplikowany charakter, analiza błędu zostanie przeprowadzona tylko dla jednego przypadku, a mianowicie dla algorytmu /5.38/.

Błąd bezwzględny funkcji  $\eta$  dla  $n$  zmiennych  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$\eta = \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$$

przedstawi się jako wyrażenie

$$\Delta \eta \leq \pm \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_i} \right| |\Delta \xi_i|. \quad /5.53/$$



Ponadto błąd bezwzględny całki oznaczonej można napisać oddzielnie jeżeli zachodzi  $\Theta(\xi) = \int v(\xi) d\xi$ ,

$$\Delta \Theta(\xi)_{ab} = [v(a) + v(b)] |\Delta \xi| + \int_a^b \Delta v(\xi) d\xi, \quad /5.54/$$

a i b oznaczają granice całkowania po zmiennej  $\xi$ ,  $\Delta \xi$  oznacza bezwzględny błąd tej zmiennej, a  $\Delta v(\xi)$  jest bezwzględnym błędem zależności całkowanej w funkcji  $\xi$ . Błędy względne W można odpowiednio przedstawić w postaci

$$W_\eta = \frac{\Delta \eta}{\eta} \quad \text{oraz} \quad W_\Theta = \frac{\Theta(\xi)_{ab}}{\Delta \Theta(\xi)_{ab}}. \quad /5.55/$$

Struktura algorytmu /5.38/ wskazuje, że rachunek błędów należy przeprowadzić najpierw dla  $W_\varepsilon$ , a następnie dla  $W_\delta$ . Przy czym zakłada się, że doświadczalne zależności  $\varepsilon(x, t)$  otrzymuje się przy użyciu tensometrii elektrooporowej. W przypadku tej metody pomiaru kształtu czoła fali można wyróżnić dwa źródła błędów, a mianowicie pozorne rozmycie czoła fali na skutek skończonej długości tensometru elektrooporowego oraz sam fakt wykorzystania tensometrii elektrooporowej, tj. układu zasilania, wzmacniania i rejestracji sygnału. Zagadnienie rozmycia czoła fali przez tensometr elektrooporowy zostało ostatnio przedyskutowane w pracy [10]. Ponieważ obecnie można już stosować tensometry elektrooporowe o bazie od 1 do 3 mm przeto zagadnienie to nie będzie obecnie dyskutowane.

W pomiarach przebiegów szybkodziennych przy użyciu tensometrów stosuje się zwykle układ złożony z tensometru, mostka prądu stałego oraz oscyloskopu z jednorazowo wyzwaną podstawą czasu. W przypadku zastosowania zasady stałego prądu należy zamiast mostka stosować odpowiedni zasilacz. Sygnałowi z tensometru o pewnej wartości odkształcenia

odpowiada dane wychylenie plamki na ekranie oscyloskopu w milimetrach, tak odczytane odkształtowanie można zapisać

$$\varepsilon_0 = \frac{H_l \cdot \eta^*}{k} \frac{\delta R}{R_0}, \quad /5.56/$$

gdzie odpowiednie symbole oznaczają:

$R_0$  - początkowa oporność tensometru,

$\delta R$  - przyrost oporności spowodowany odkształceniem powierzchni próbki,

$k$  - stała tensometru,

$\eta^*$  - stopień wzmocnienia wzmacniacza oscyloskopu w stosunku do sygnału na wyjściu mostka,

$H_l$  - liniowa podziałka odwzorowania sygnału.

Zgodnie z zależnością /5.53/ błąd bezwzględny pomiaru odkształcenia  $\Delta \varepsilon_0$  wyniesie

$$\Delta \varepsilon_0 = \left( \frac{\Delta H_l}{H_l} + \frac{\Delta \eta^*}{\eta^*} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta \delta R}{\delta R} + \frac{\Delta R}{R} \right) \frac{H_l \eta^*}{k} \frac{\delta R}{R_0}. \quad /5.57/$$

Błąd względny jest równy wyrażeniu w nawiasie równania /5.57/. Aby znaleźć wartość błędności względnej  $W_\varepsilon$  w dynamicznej metodzie pomiaru odkształceń należy oszacować poszczególne błędy względne.

Staża tensometru  $k$  zależy jedynie od konstrukcji tensometru i dla danego typu i danej serii tensometrów można uznać ją jako stałą, stąd

$$\frac{\Delta k}{k} = 0.$$

Wartość  $\delta R$  stanowi najmniejszą możliwą do wykrycia na wyjściu mostka zmianę oporu czujnika i zależy od takich czynników jak napięcie zasilania mostka, konstrukcji itp. Można przyjąć, że średnio dokładność mostka wynosi

$$\frac{\Delta \delta R}{\delta R} \approx 1 \cdot 10^{-6}.$$

Początkowa wartość oporu tensometru  $R_0$  jest podawana przez producentów zwykle z dokładnością  $\pm 0,1$ , co przy wartości  $R_0 = 120 \Omega$  stanowi

$$\frac{\Delta R_0}{R_0} \approx 1 \cdot 10^{-3}.$$

Jak wspomniano poprzednio, sygnał na wyjściu mostka musi ulec wzmocnieniu w układzie wzmacniacza oscyloskopu, aby odpowiednio odchylić strumień elektronów padający na ekran lampy. Wartość  $\eta^*$  oznacza stopień wzmocnienia. Dokładność oscyloskopu zależy od wielu czynników, jednak zawsze zachodzi pewne zniekształcenie sygnału proporcjonalnego do  $\frac{\Delta R_0}{R_0}$ . Zwykle zniekształcenie sygnału, a więc nieliniowość wzmacniacza oscyloskopu podawana jest przez producentów dla dobrych konstrukcji

$$\frac{\Delta \eta^*}{\eta^*} \approx 5 \cdot 10^{-3}.$$

Wreszcie podziałka odwzorowania sygnału  $H_i$  zależy od wielkości ekranu lampy oscyloskopu, od wielkości zdjętego oscylogramu, od średnicy plamki na ekranie itp. Zakładając średnicę plamki na ekranie  $\sim 0,5$  mm oraz maksymalne możliwe wychylenie plamki równe  $\sim 40$  mm dla  $\mathcal{E}_{\max}$  otrzymuje się

$$\frac{\Delta H_i}{H_i} \approx \frac{0,25}{40} = 6,25 \cdot 10^{-3}.$$

Przyjęto więc sytuację najkorzystniejszą dla maksymalnych odkształceń na czole fali. W przypadku rejestracji odkształceń sprężystych na czole fali z zachowaniem tego samego stopnia wzmocnienia, a więc w przypadku wykorzystania tylko jednego kanału pomiarowego, błąd  $W_{\mathcal{E}}$  może być kilkakrotnie większy.

Po zsumowaniu wszystkich błędów względnych otrzymuje się  $W_{\mathcal{E}}$ , stąd

$$W_{\varepsilon}(\varepsilon_0) = 0,01225 \quad \text{lub} \quad h'_{\varepsilon}(\varepsilon_0) = 1,225 \%.$$

Aby obliczyć  $\Delta \delta(\varepsilon_0)$ , a następnie  $W_{\delta}(\varepsilon)$  należy wykorzystać zależności /5.54/ oraz /5.34/, na ich podstawie można napisać

$$\Delta \delta(\varepsilon_0) = \left[ E + E_t(\varepsilon_0) \right] \Delta \varepsilon_0 + \int_0^{\varepsilon_0} E_t(\varepsilon) \left[ \frac{\Delta \beta_0}{\beta_0} + 2 \left( \frac{\Delta x_0}{x_0} + \frac{\Delta t}{t(\varepsilon)} \right) \right] d\varepsilon \quad /5.58/$$

gdzie  $E_t(\varepsilon)$  oznacza moduł styczny krzywej umocnienia,  $E$  jest modulem Younga, natomiast  $x_0$  jest odległością między sąsiednimi tensometrami.

Ponadto

$$\Delta E_t(\varepsilon) = \left[ \frac{\Delta \beta_0}{\beta_0} + 2 \left( \frac{\Delta x_0}{x_0} + \frac{\Delta t}{t(\varepsilon)} \right) \right] E_t(\varepsilon), \quad /5.59/$$

ponieważ

$$E_t(\varepsilon) = \beta_0 C^2(\varepsilon) \quad /5.60/$$

oraz

$$\Delta \varepsilon_0 = W_{\varepsilon}(\varepsilon_0) \cdot \varepsilon_0. \quad /5.61/$$

Na podstawie /5.59/, /5.60/ i /5.61/ równanie /5.58/ można przepisać w nieco innej postaci

$$\Delta \delta(\varepsilon_0) = E \left( 1 + \frac{E_t(\varepsilon_0)}{E} \right) W_{\varepsilon}(\varepsilon_0) \varepsilon_0 + \beta_0 \int_0^{\varepsilon_0} C^2(\varepsilon) W_{E_t}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad /5.62/$$

Obszar całkowania  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  zawiera w sobie zakres sprężysty i zakres plastyczny;  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y$ ;  $\varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , stąd

$$\rho_0 \int_0^{\epsilon_0} C^2(\epsilon) W_{Et}(\epsilon) d\epsilon = \sigma_y \left[ \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} + \frac{2}{x_0} (\Delta x + \Delta t C_0) \right] +$$

$$+ \int_0^{\epsilon_0} E_t(\epsilon) \left[ \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} + \frac{2}{x_0} (\Delta x_0 + \Delta t C(\epsilon)) \right] d\epsilon ; x_0 = t C_0 ; \sigma_y = E E_y,$$

Po częściowym scałkowaniu i uporządkowaniu otrzymuje się

$$\Delta \sigma(\epsilon_0) = E \left[ 1 + \frac{E_t(\epsilon_0)}{E} \right] W_{E}(\epsilon_0) \epsilon_0 + \left( \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} + 2 \frac{\Delta x_0}{x_0} \right) \sigma(\epsilon_0) +$$

$$+ \frac{2 \Delta t C_0}{x_0} \sigma_y + \frac{2 \Delta t}{x_0 \rho_0^{1/2}} \int_{\epsilon_y}^{\epsilon_0} [E_t(\epsilon)]^{3/2} d\epsilon \quad /5.63/$$

Równanie /5.63/ nie może zostać scałkowane w obecnej formie, gdyż nieznaną jest zależność modułu stycznego  $E_t(\epsilon)$  od odkształcenia. Dla oszacowania  $\Delta \sigma(\epsilon_0)$  zakłada się dynamiczną krzywą umocnienia przedstawioną schematycznie na rys. 5.5, stąd

$$\sigma = E \epsilon \quad \text{dla} \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_y,$$

$$\sigma = B \epsilon^m \quad \text{dla} \quad \epsilon_y \leq \epsilon \leq \epsilon_0,$$

gdzie

$$\epsilon_y = \left( \frac{B}{E} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

lub

$$\sigma_y = (E^{-m} B)^{\frac{1}{1-m}}$$

oraz

$$E_t(\epsilon) = m B \epsilon^{-(1-m)}$$

/5.64/

Po podstawieniu /5.64/ do /5.63/ i scałkowaniu otrzymuje się dla  $\epsilon \geq \epsilon_y$



$$\Delta \sigma(\varepsilon_0) = E \left[ 1 + \frac{mB}{E\varepsilon_0^{1-m}} \right] W_\varepsilon(\varepsilon_0) \varepsilon_0 + \left( \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} + 2 \frac{\Delta X_0}{X_0} \right) B \varepsilon_0^m +$$

$$+ \frac{2\Delta t C_0}{X_0} B \frac{1}{1-m} E^{-\frac{m}{1-m}} + \frac{4(mB)^{\frac{3}{2}} \Delta t}{(3m-1)X_0 \rho_0^{\frac{1}{2}}} \left[ \varepsilon_0^{\frac{3m-1}{2}} - \left( \frac{B}{E} \right)^{\frac{3m-1}{2(1-m)}} \right]. \quad /5.65/$$

Równocześnie błąd względny  $W_\sigma$  przedstawi się w postaci

$$W_\sigma(\varepsilon_0) = \frac{\Delta \sigma(\varepsilon_0)}{B \varepsilon_0^m} \quad /5.66/$$

Ponieważ wiadomo, że równanie Bella /3.15/, które jest szczególnym przypadkiem równania  $\sigma = B\varepsilon^m$  dla  $m = \frac{1}{2}$ , dobrze przybliża dynamiczne krzywe umocnienia dla polikrystalicznego aluminium, zostanie ono przyjęte do dalszej analizy. Przyjęcie wykładnika umocnienia  $m = \frac{1}{2}$  analizę upraszcza i równanie /5.65/ przyjmuje postać

$$\Delta \sigma(\varepsilon_0) = E \left[ 1 + \frac{B}{2E\varepsilon_0^{1/2}} \right] W_\varepsilon(\varepsilon_0) \varepsilon_0 + \left( \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} + 2 \frac{\Delta X_0}{X_0} \right) B \varepsilon_0^{1/2} +$$

$$+ \frac{2\Delta t C_0}{X_0} \left( \frac{B}{E^{1/2}} \right)^2 + \frac{(2B)^{\frac{3}{2}} \Delta t}{X_0 \rho_0^{1/2}} \left[ \varepsilon_0^{1/4} - \left( \frac{B}{E} \right)^{1/2} \right]. \quad /5.67/$$

Po podstawieniu /5.67/ do /5.66/ otrzymuje się ostatecznie wyrażenie na błąd względny

$$W_\sigma(\varepsilon_0) = \left( \frac{E}{B} \right) \left[ 1 + \left( \frac{B}{E} \right) \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2}} \right] W_\varepsilon(\varepsilon_0) \varepsilon_0^{1/2} + \left( \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} + 2 \frac{\Delta X_0}{X_0} \right) +$$

$$+ \left( \frac{B}{E} \right) \frac{2\Delta t C_0}{\varepsilon_0^{1/2} X_0} + \frac{\Delta t}{X_0} \left( \frac{8B}{\varepsilon_0 \rho_0} \right)^{1/2} \left[ \varepsilon_0^{1/4} - \left( \frac{B}{E} \right)^{1/2} \right]. \quad /5.68/$$

Celem obliczenia  $W_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_0)$  przyjęto następujące wartości liczbowe. Odległość dwóch sąsiednich tensometrów  $x_0 = 100$  mm, dokładność pomiaru  $x_0$  założono  $\Delta x_0 = 0,5$  mm, stąd  $\frac{\Delta x_0}{x_0} = 5 \cdot 10^{-3}$ . Dokładność pomiaru gęstości materiału próbki przyjęto na podstawie danych własnych  $\frac{\Delta \rho}{\rho} = 1,15 \cdot 10^{-2}$ . Ponadto moduł Younga dla aluminium jest w przybliżeniu równy  $E = 6,87 \cdot 10^{-3}$  kG/mm<sup>2</sup> oraz moduł plastyczności  $B = 39,4$  kG/mm<sup>2</sup>, prędkość fali sprężystej dla aluminium wynosi  $C_0 = 4,991 \cdot 10^5$  cm/sek. Dla oszacowania  $\Delta t$  przyjęto zwykle używaną w tego rodzaju eksperymentach prędkość podstawy czasu oscyloskopu 50 /usek/cm oraz możliwą dokładność pomiaru plamki na ekranie oscyloskopu  $\Delta t^* = \pm 0,25$  mm, co daje  $\Delta t_1 = 1,25$  /usek. Oprócz niedokładności  $\Delta t_1$  spowodowanej pomiarem oscylogramu, zachodzi niedokładność podstawy czasu rzędu  $(W_t)_2 \approx 5 \cdot 10^{-3}$ , w sumie więc przy założeniu czoła fali o czasokresie  $t = 100$  /usek otrzymuje się

$$\Delta t = [(W_t)_1 + (W_t)_2] \cdot t \quad ; \quad \Delta t = /0,0125 + 0,005/ \cdot 100$$

$$\Delta t = 1,75 \text{ } \mu\text{s}$$

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla kilku wartości  $\mathcal{E}_0$ , a mianowicie dla  $\mathcal{E}_0 = 3,289 \cdot 10^{-5}$ ; 0,001; 0,005; 0,010; 0,015 oraz 0,020. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 5.6, przy czym błąd całkowity rozdzielono na dwa, pierwszy oznaczony przez  $W'_G(\mathcal{E}_0)$  stanowi błąd wynikający z operacji całkowania wyrażenia  $C^2(\mathcal{E})$ , drugi oznaczony przez  $W_G(\mathcal{E}_0)$  jest błędem całkowitym. Z analizy wynika, że błąd całkowania jest szczególnie duży, a to ze względu na niedostateczną dokładność pomiaru  $\mathcal{E}$  dla określenia początku całkowania funkcji  $C^2(\mathcal{E})$  i charakterystycznego przebiegu samej funkcji, która gwałtownie maleje ze wzrostem  $\mathcal{E}$ .

Fakt ten powoduje, że obliczona dokładność pomiaru odkształcenia  $W_{\mathcal{E}}$  rzędu  $W_{\mathcal{E}} = 0,01225$  jest niewystarczająca w przypadku omawianej metody dla znalezienia dokładnej dy-

namicznej krzywej umocnienia. Wartość  $W_{\epsilon} = 0,01225$  została zaznaczona na rys. 5.6 linią przerywaną.

Błąd tego samego rzędu, mianowicie około 25 % został również stwierdzony w pracy [2] przy stosowaniu omawianej metody.

## 5.5. Wnioski

Przedstawiony przegląd metod wyznaczania dynamicznych krzywych umocnienia na podstawie analizy procesu propagacji sprężysto-plastycznej fali w pręcie oraz rachunek błędów dla wybranej metody prowadzą do następujących wniosków:

1. Dyskutowane metody pomiarowe rozumiane jako uzupełnienie lub skonfrontowanie techniki zmodyfikowanego pręta Hopkinsona mają rację bytu o ile zostanie poprawiona technika rejestracji procesu w celu zwiększenia dokładności pomiaru. Na niedostateczną dokładność pomiaru w tych metodach zwraca uwagę fakt, że przytoczone w pracy wyniki różnych autorów odbiegają od siebie znacznie nawet dla jednakowych materiałów.
2. Obliczony względny błąd całkowity pomiaru naprężenia  $w_5(\epsilon_0)$  wynoszący od 20 % do 38 %, odnosi się jedynie do pomiaru jednorazowego. Błąd wyznaczenia dynamicznej krzywej umocnienia można znacznie zmniejszyć poprzez kilkukrotne powtarzanie doświadczenia dla tych samych warunków początkowych, a następnie uśrednienie wyników. Należy dodać, że tak duży błąd pomiaru naprężenia jest przede wszystkim wynikiem niedokładnego rozpoczęcia całkowania wyrażenia  $C^2(\epsilon)$  w przedstawionym algorytmie /5.38/.
3. Na przykład w analizowanej metodzie z pomiarem  $\epsilon(x, t)$  błąd  $w_5(\epsilon_0)$  wynikający z całkowania wyrażenia  $C^2(\epsilon)$  można znacznie zmniejszyć przez zastosowanie podwójnej rejestracji sygnału z jednego tensometru. Przy czym jeden z kanałów rejestruje przy dużej czułości wzmacnia-

cza jedynie początek czoła fali, drugi natomiast rejestruje na mniejszej czułości czoło fali.

4. Proponowane usprawnienie pomiarów we wniosku 3 może prowadzić do znacznego zmniejszenia błędu całkowania  $W_G^f(\varepsilon_0)$ . Natomiast w ten sposób nie jest możliwe zmniejszenie błędu wynikającego z metody pomiaru  $W_G(\varepsilon_0) - W_G^f(\varepsilon_0)$ , ze względu na stosowaną powszechnie technikę pomiaru przemieszczeń i odkształceń w warunkach dynamicznych. Różnica  $W_G^f(\varepsilon_0) - W_G^j(\varepsilon_0)$  według przeprowadzonej analizy wynosi około 10 % dla całego badanego zakresu odkształceń.
5. Radykalne zmniejszenie błędu całkowitego  $W_G^f(\varepsilon_0)$  wydaje się możliwe poprzez eliminację oscyloskopu jako narzędzia rejestracji procesu i zastąpienie go pewnego typu szybką pamięcią.

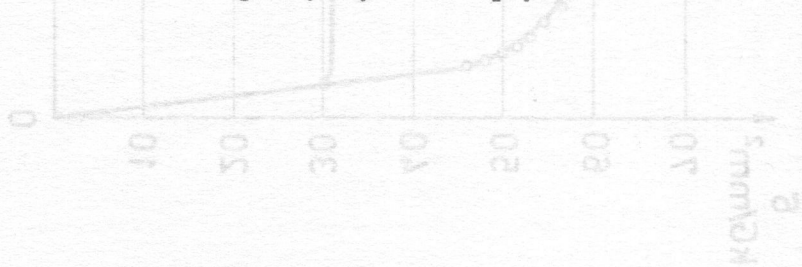
Wymienione wnioski nie wyczerpują zagadnienia, wydaje się, że jest niezbędna dalsza analiza błędów celem wyjaśnienia wielu nieporozumień w badaniu zjawiska propagacji sprężysto-plastycznych fal w prętach.

Literatura cytowana w tekście  
rozdziału 5

- [1] Bodner S.R., Clifton R.J. - An Experimental Investigation of Elastic - Plastic Pulse Propagation in Aluminum Rods, J. Appl. Mech., 2, 34 /1967/, 91.
- [2] Campbell W.R. - Determination of Dynamic Stress - Strain Curves from Strain Waves in Long Bars, Proc. SESA, 10 /1952/, 113.
- [3] Clifton R.J., Bodner S.R. - An Analysis of Longitudinal Elastic - Plastic Pulse Propagation, J. Appl. Mech., 2, 33 /1966/, 248.
- [4] Efron L., Malvern L.E. - Electromagnetic Velocity Transducer Studies of Plastic Waves in Aluminum

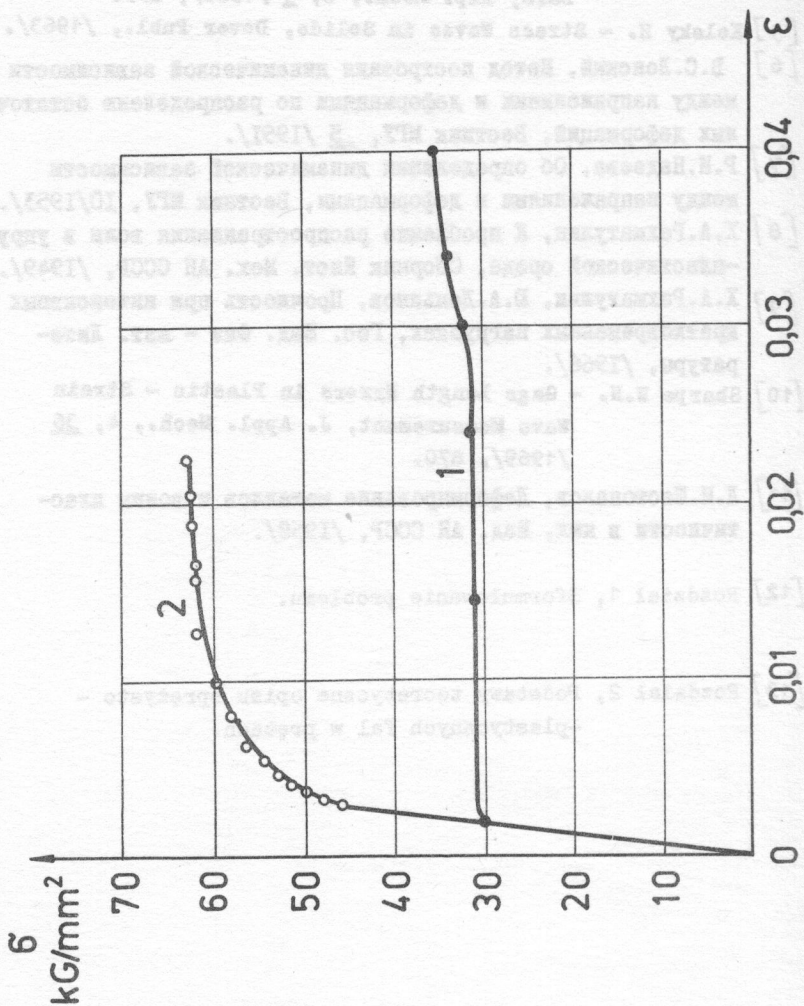
Bars, Exp. Mech., 6, 2 /1969/, 255.

- [5] Kolsky H. - Stress Waves in Solids, Dover Publ., /1963/.
- [6] В.С.Ленский, Метод построения динамической зависимости между напряжениями и деформациями по распределению остаточных деформаций, Вестник МГУ, 5 /1951/.
- [7] Р.И.Надеева, Об определении динамической зависимости между напряжениями и деформациями, Вестник МГУ, 10/1953/.
- [8] Х.А.Рахматулин, К проблеме распространения волн в упруго-пластической среде, Сборник Инст. Мех. АН СССР, /1949/.
- [9] Х.А.Рахматулин, Ю.А.Демьянов, Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках, Гос. Изд. Физ - мат. Литературы, /1966/.
- [10] Sharpe W.N. - Gage Length Errors in Plastic - Strain Wave Measurement, J. Appl. Mech., 4, 36 /1969/, 870.
- [11] Л.М.Шестопапов, Деформирование металлов и волны пластичности в них, Изд. АН СССР, /1958/.
- [12] Rozdział 1, Sformułowanie problemu.
- [13] Rozdział 2, Podstawy teoretyczne opisu sprężysto - plastycznych fal w prętach.

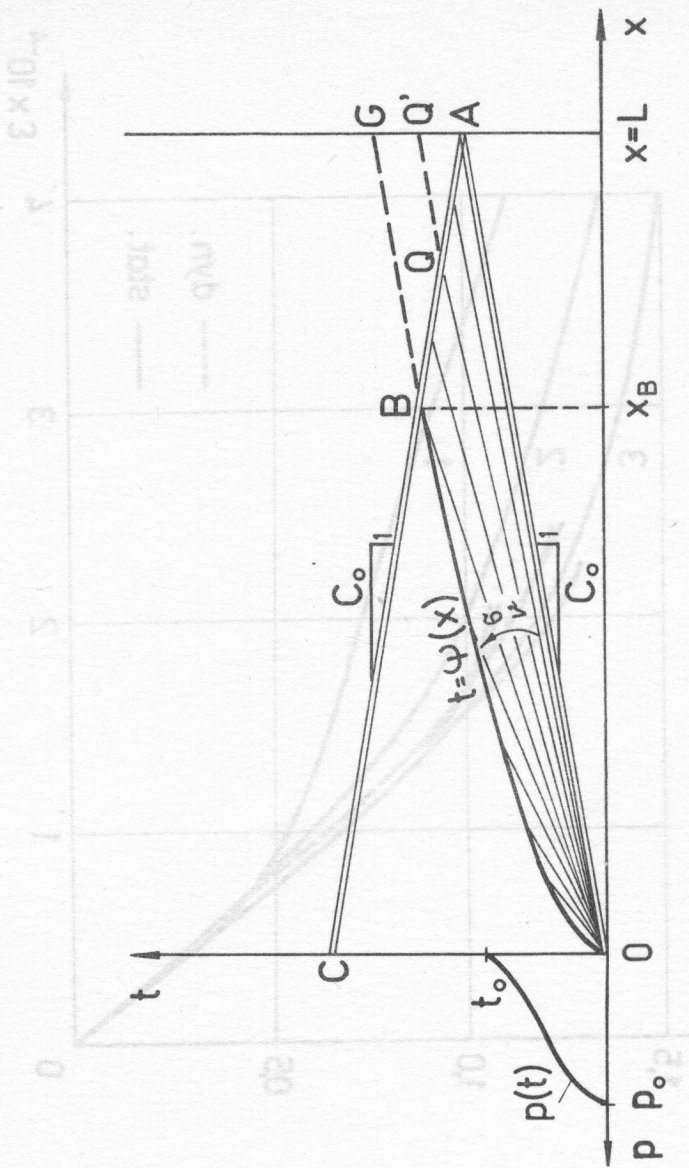


Ян. 81

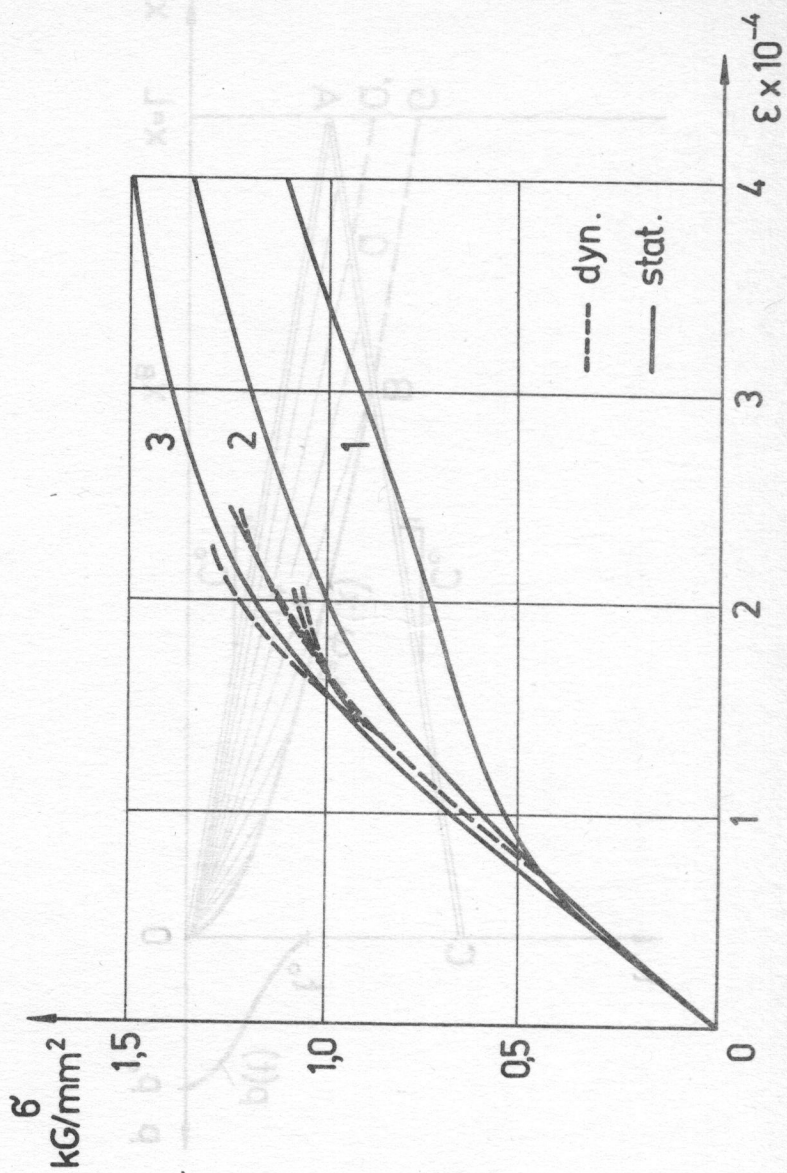




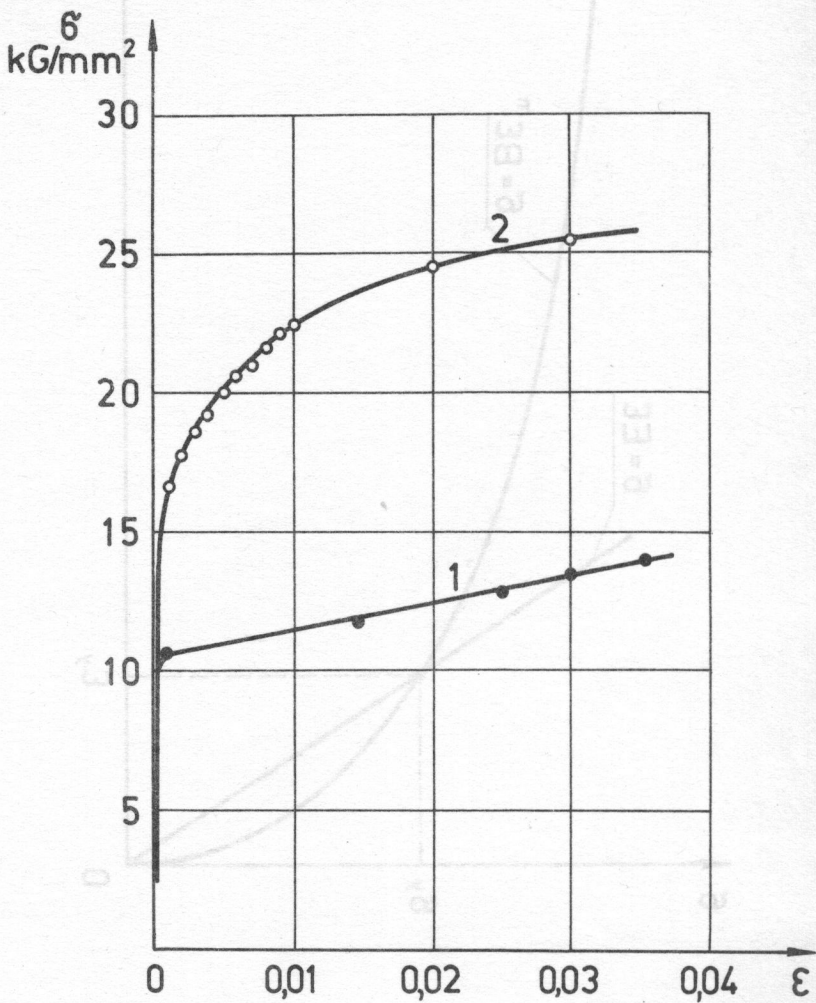
Rys. 5.1



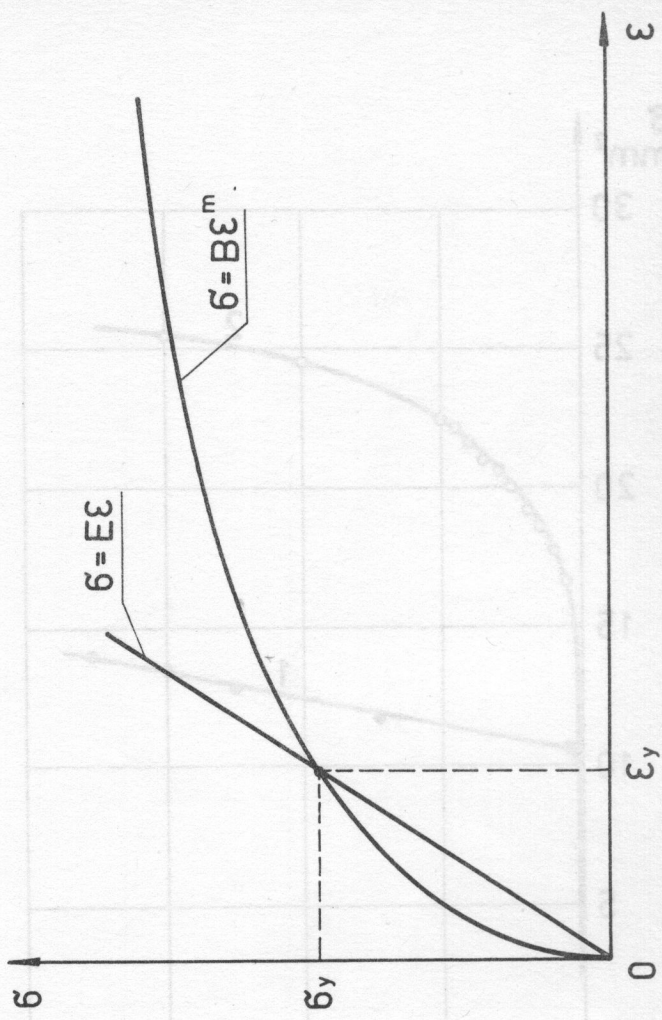
Rys. 5.2



Rys. 5.3

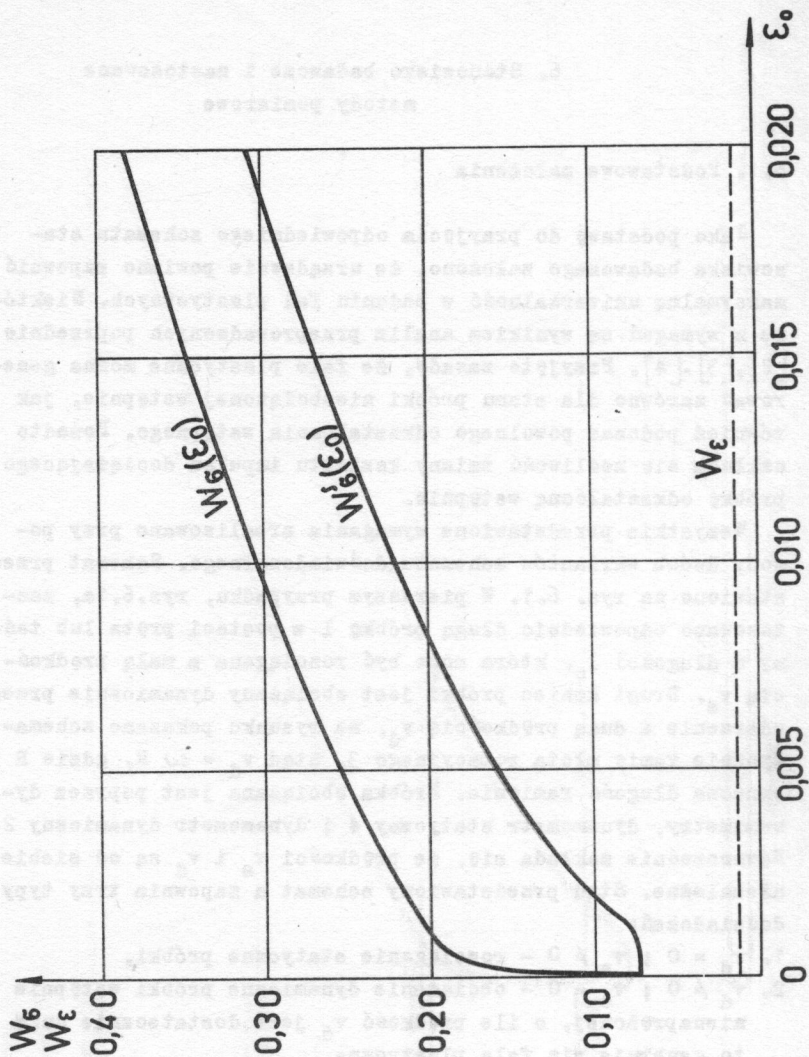


Rys. 5.4



Rys. 5.5





Rys. 5.6

## 6. Stanowisko badawcze i zastosowane metody pomiarowe

### 6.1. Podstawowe założenia

Jako podstawę do przyjęcia odpowiedniego schematu stanowiska badawczego założono, że urządzenie powinno zapewnić maksymalną uniwersalność w badaniu fal plastycznych. Niektóre z wymagań są wynikiem analiz przeprowadzonych poprzednio [2],[3],[4]. Przyjęto zasadę, że fale plastyczne można generować zarówno dla stanu próbki nieobciążonej wstępnie, jak również podczas powolnego odkształcania wstępnego. Ponadto zakłada się możliwość zmiany kształtu impulsu dociążającego próbkę odkształconą wstępnie.

Wszystkie przedstawione wymagania zrealizowano przy pomocy dwóch wariantów schematu doświadczalnego. Schemat przedstawiono na rys. 6.1. W pierwszym przypadku, rys.6.1a, zastosowano odpowiednio długą próbkę 1 w postaci pręta lub taśmy o długości  $l_0$ , która może być rozciągana z małą prędkością  $v_s$ . Drugi koniec próbki jest obciążany dynamicznie przez uderzenie z dużą prędkością  $v_d$ , na rysunku pokazano schematycznie ramię młota rotacyjnego 3, stąd  $v_d = \omega R$ , gdzie R oznacza długość ramienia. Próbka obciążana jest poprzez dynamometry, dynamometr statyczny 4 i dynamometr dynamiczny 2. Równocześnie zakłada się, że prędkości  $v_s$  i  $v_d$  są od siebie niezależne. Stąd przedstawiony schemat a zapewnia trzy typy doświadczeń:

1.  $v_d = 0$  ;  $v_s \neq 0$  - rozciąganie statyczne próbki,
2.  $v_d \neq 0$  ;  $v_s = 0$  - obciążenie dynamiczne próbki wstępnie nienaprężonej, o ile prędkość  $v_d$  jest dostatecznie duża to generuje się fala plastyczna,
3.  $v_d \neq 0$  ;  $v_s \neq 0$  - nałożenie fali dociążania na wstępny stan sprężysty lub plastyczny próbki.

Schemat, rys. 6.1b, jest bardziej skomplikowany i umożli-

wia z kolei obciążanie próbki 1 o długości  $l_0$  impulsami zbliżonymi do prostokątnych o określonym czasie trwania. Generacja takich impulsów jest możliwa poprzez zastosowanie drążka falowego 6 wraz ze ścinaną podkładką 5 przez ramię młota rotacyjnego 3. Na drążku sprężystym falowym o długości  $L$  mocuje się ścinaną podkładkę na odległości  $x = \frac{1}{2}L$  od czoła z dynamometrem dynamicznym 2. Uderzenie ramienia młota rotacyjnego 3 powoduje ścięcie podkładki 5 w czasie  $\tau$ , proces ścinania generuje odpowiednie impulsy w drążku falowym. Dwa możliwe przypadki, zależnie od czasu ścinania  $\tau$ , przedstawiono schematycznie na płaszczyznach fazowych  $/x, t/$ . Przy odpowiednio długim czasie  $\tau_1$  można generować falę dociążania o kształcie schodkowym. Natomiast w drugim przypadku, gdy czas ścięcia  $\tau_2$  jest krótki, próbkę można obciążać dwoma oddzielnymi impulsami o czasie trwania  $t_1$  i  $t_2$ .

W sumie schemat b zapewnia cztery typy doświadczeń:

1.  $v_s = 0$ ; obciążenie typu  $b_1$  - impuls typu schodkowego,
2.  $v_s = 0$ ; obciążenie typu  $b_2$  - dwa impulsy,
3.  $v_s \neq 0$ ; dociążenie typu  $b_1$  - jest to dociążenie falą schodkową,
4.  $v_s \neq 0$ ; dociążenie typu  $b_2$  - jest to dociążenie impulsem podwójnym.

Oczywiście następne odbicia fal we wszystkich przypadkach zaniebduje się, badając jedynie pierwsze przejście fali po długości próbki.

Przedstawione schematy umożliwiają szeroki program badawczy z zakresu propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach.

Odrębnym trudnym zagadnieniem przy tego rodzaju badaniach są problemy pomiaru i rejestracji kształtów czoła fali. Wybór metody pomiarowej zależy w dużej mierze od stosowanego algorytmu [4] i od rodzaju poszukiwanych danych z tego rodzaju doświadczeń. Opracowane uprzednio algorytmy [4] zmierzające do znajdowania dynamicznych krzywych umocnienia wskazują na

dwie możliwe metody pomiaru. Pierwsza z nich to zastosowanie tensometrii elektrooporowej. W ten sposób dla różnych współrzędnych  $x$  na próbce można mierzyć zmianę kształtu czoła fali mierząc  $\epsilon/x, t/x$ . Druga natomiast, to pomiar przemieszczeń w funkcji czasu dla różnych  $x, U/x, t/x$ . A więc obydwie metody umożliwiają pomiar kinematyki procesu propagacji fali.

Ze względu na konfrontację z teorią pożądanym jest pomiar naprężeń na końcach próbki. Problem ten jest możliwy do rozwiązania bądź przy użyciu dynamometrów kwarcowych tj. czujników piezoelektrycznych, bądź też za pomocą dynamometrów sprężystych z naklejonymi czujnikami elektrooporowymi o małej bazie. Ze względu na obraną technikę pomiaru odkształceń na czole fali z użyciem tensometrii elektrooporowej, zastosowanie dynamometrów sprężystych również z wykorzystaniem tensometrów elektrooporowych wydaje się bardziej celowe.

Metoda pomiaru przemieszczeń na czole fali powinna wykazywać brak błędów spowodowanych inercją układu pomiarowego i odpowiednią dokładnością. Wydaje się, że jednym z możliwych rozwiązań jest zastosowanie metod optyczno-elektronicznych z wykorzystaniem światła.

Przedstawione założenia wskazują na skomplikowany charakter zarówno części mechanicznej stanowiska badawczego jak i części pomiarowej. Na podstawie proponowanych schematów stanowisko badawcze powinno zawierać następujące zespoły:

1. zespół mechaniczny:

a/ układ powolnego rozciągania próbki,

b/ układ dynamicznego dociążania,

2. zespół pomiarów statycznych siły i odkształcenia próbki,

3. zespół pomiaru odkształceń na czole fali,

4. zespół pomiaru przemieszczeń na czole fali.

## 6.2. Część mechaniczna stanowiska badawczego

Schemat konstrukcyjny stanowiska badawczego, które spełnia postawione założenia przedstawiono na rys. 6.2 wraz z oznaczeniem ważniejszych detali. Stanowisko zapewnia wszystkie warianty schematów doświadczalnych dla próbek w kształcie drutów lub taśm o długości 1000 mm i szerokości do 10 mm.

Wolne rozciąganie próbki zrealizowano przy użyciu motoreduktora 11 /0,6 kW, 11 min<sup>-1</sup>/ umieszczonego w dolnej części stanowiska. Transmisja ruchu obrotowego z motoreduktora odbywa się przez dwa wałki 12 i 14 zależnie od wybranej prędkości rozciągania 0,1 mm s<sup>-1</sup> lub 1 mm s<sup>-1</sup>. Ruch obrotowy zamieniany jest poprzez układ przekładni łańcuchowych na ruch posuwisto-zwrotny śruby pociągowej 18. Do śruby 18 zamocowana jest próbka 24 poprzez dynamometr statyczny wraz ze specjalnym uchwytem 21. Skok śruby pociągowej 18 wynosi 400 mm, co pozwala na rozciąganie próbek do odkształcenia maksymalnego  $\varepsilon_{\max} \approx 40\%$ .

Dynamiczne rozciąganie zrealizowano przy użyciu młota rotacyjnego, skonstruowanego na bazie sprzęgła samochodu ciężarowego typu Star 20, oznaczonego na rys. 6.2 numerem 06. Sprzęgło wraz z kołem zamachowym napędzane jest silnikiem elektrycznym 02 /1,7 kW, 2850 o min<sup>-1</sup>/ poprzez pasek klinowy 03 i sprzęgło cierne rozruchu 04 zapobiegające przeciążeniu silnika elektrycznego. Podczas rozruchu sprzęgło 06 jest rozłączone z jego drugą częścią, na której umieszczono ramię 07 tak skonstruowanego młota rotacyjnego. Po uzyskaniu przez koło zamachowe sprzęgła odpowiednich obrotów, sprzęgło zostaje włączone odpowiednią dźwignią uruchamianą ręcznie i ramię obracając się wraz z kołem zamachowym obciąża dynamicznie próbkę poprzez dynamometr dynamiczny. Po uderzeniu, zawlecza 08 łącząca dotąd ramię młota z wałem sprzęgła ulega ścięciu pozwalając na dalszy swobodny obrót włączonego sprzęgła. Długość ramienia młota wynosi 165 mm co przy obrotach



sprzęgła  $\sim 3000 \text{ min}^{-1}$  pozwala na osiągnięcie prędkości uderzenia  $v_d \approx 50 \text{ ms}^{-1}$ . Skok dynamicznego obciążenia przed ścięciem zawleczki 08 wynosi 20 mm. Regulacji prędkości rozciągania dynamicznego dokonuje się poprzez pomiar obrotów wału sprzęgła, które po rozpędzeniu powoli się zatrzymuje.

Urządzenie zamontowane jest na szkieletcie wykonanym z ceowników. Oddzielne wyłączniki pozwalają na niezależne włączanie i wyłączanie silników elektrycznych motoreduktora oraz napędu dynamicznego obciążania.

Wysokość stanowiska badawczego wynosi  $\sim 2500 \text{ mm}$ , a długość i szerokość około 1000 mm. Stanowisko ustawiono na 40 mm płycie gumowej w celu tłumienia drgań. Ogólny widok stanowiska od strony sprzęgła rozruchu 04 i silnika 02 przedstawiono na rys. 6.3.

### 6.3. Pomiar prędkości uderzenia $v_d$

Dokładny pomiar uderzenia  $v_d$  stanowi istotny problem, gdyż prędkość  $v_d$  wchodzi jako podstawowa wielkość do warunków początkowych dla zagadnienia brzegowego propagacji sprężysto-plastycznej fali w półnieskończonym pręcie.

Przyjęto zasadę dwustopniowego pomiaru prędkości. Pierwszy stopień pomiaru stanowi przesłona kątowna, o kącie rozwarcia  $30^\circ \pm 15'$  zamocowana na wale sprzęgła 05. Przesłona obracając się wraz z wałem sprzęgła przysłania przez 1/12 obrotu fotodiodej germanową typu FG-2 oświetloną przez 1,5 V żarówkę. Fotodioda wraz z żarówką są zamocowane nieruchomo do korpusu stanowiska. Amplituda prostokątnego impulsu generowanego przez fotodiodej wynosi  $\sim 50 \text{ mV}$ . Sygnał ten jest podawany na wejście małego oscyloskopu typu OK-12 z wewnątrz wyzwalaną podstawą czasu o szybkości przebiegu  $1 \text{ ms/dz}$ . W ten sposób można zmierzyć czas przesłony  $t_p$  dla 1/12 obrotu i ze wzoru

$$n = \frac{1}{12 t_p} \quad \text{lub} \quad \omega = \frac{2\pi}{12 t_p}$$

obliczyć ilość obrotów  $n$  lub prędkość kątową  $\omega$ . Jest to ilość obrotów koła zamachowego przed włączeniem sprzęgła wraz z dźwignią młota rotacyjnego.

Ze względu na to, że na płytkach sprzęgła może wystąpić pewien poślizg, prędkość  $v_d$  należy mierzyć ponownie na ramieniu uderzającym w próbkę, jest to drugi stopień pomiaru prędkości. Pomiar prędkości ramienia, a tym samym prędkości  $v_d$  zrealizowano w ten sposób, że na ramieniu zamocowano czernioną płytkę z dwoma otworkami leżącymi na osi prostopadłej do osi ramienia. Otworki o średnicy  $\phi = 2,15$  mm i wzajemnej odległości  $d = 27,00$  mm odsłaniają i przysłaniają świecąca żarówkę 1,5 V, której światło rejestrowane jest przez fotodiody krzemową prod. ITE o wysokiej częstotliwości przenoszenia od 0 do 1 MHz. Oś żarówki i fotodiody umieszczona jest prostopadle do płaszczyzny obrotowej ramienia młota. Dwa napięciowe impulsy szpilkowe z fotodiody odpowiadają kolejnym odsłonięciom żarówki przez pierwszy i drugi otworek podczas przejścia ramienia przez oś fotodiody-żarówka. Pomiar czasu  $t_d$  pomiędzy tymi dwoma impulsami stanowi podstawę do obliczenia prędkości uderzenia  $v_d$  ze wzoru

$$v_d = \frac{R}{r} \cdot \frac{d}{t_d}$$

/6.2/

W wyrażeniu /6.2/ wartość  $\frac{R}{r}$  .  $d$  stanowi stałą zależną od geometrii układu. Schemat układu przedstawiono na rys. 6.4. Stosunek  $\frac{R}{r}$  dla omawianej konstrukcji wynosi 1,298.

Tak więc podstawowym zadaniem w pomiarze  $v_d$  jest dokładność pomiaru czasu  $t_d$  pomiędzy impulsami napięciowymi z fotodiody. Czas ten może się znacznie zmieniać i tak dla prędkości  $v_d = 1 \text{ ms}^{-1}$  wynosi  $t_d = 35,05$  ms, natomiast dla prędkości  $v_d = 50 \text{ ms}^{-1}$   $t_d = 701,0$   $\mu\text{s}$ . W celu pomiaru czasu pomiędzy impulsami o tak szerokim przedziale zmian czasowych zastosowano układ, którego schemat blokowy przedstawiono na rys. 6.5.

Impulsy napięciowe z fotodiody podawane są na wejście wzmacniacza typu VIM-698 prod. ZRK o paśmie przenoszenia od 1 Hz do 200 kHz. Następnie po odpowiednim wzmocnieniu, impulsy podawane są na wejście "Start" i "Stop" czasomierza liczącego typ C552 prod. Elpo. Niektóre dane dla tego typu czasomierza są następujące: minimalny czas pomiaru  $t_{\min} = 40 \mu\text{s}$ , minimalna prędkość narastania impulsu  $0,1 \text{ V}/\mu\text{s}$ , minimalna wartość napięcia wyzwalającego  $\sim 1 \text{ V}$ . Dla kontroli kształtu impulsów, które są podawane na wejścia czasomierza C552, zastosowano również oscyloskop typ OS-601 prod. BUTJ. Wejście oscyloskopu jest połączone równolegle z wejściami czasomierza a jednorazowa podstawa czasu jest wyzwalana wewnątrz impulesem z fotodiody powstającym w momencie przesłania jej ramieniem młota. Przebieg jest fotografowany. Fotografia przebiegu dla prędkości podstawy czasu  $5 \text{ ms/cm}$  została przedstawiona na rys. 6.6.

Zastosowanie wzmacniacza w układzie z fotodiodą jest spowodowane zbyt małym nachyleniem zbocza impulsu, nawet gdy fotodiody jest zasilana źródłem stałego napięcia  $\sim 30 \text{ V}$ . Zbyt małą prędkość narastania impulsu obserwuje się dla mniejszych prędkości  $v_d$  i wówczas uruchomienie czasomierza może następować wyłącznie przy użyciu wzmacniacza.

Zastosowany układ wykazał prawidłowe i niezawodne działanie podczas przeprowadzania doświadczeń przy różnych prędkościach uderzenia.

#### 6.4. Pomiar odkształceń na czole fali

Dokładny i precyzyjny pomiar odkształceń na czole fali, a w szczególności na czole fali sprężysto-plastycznej jest uważany za trudny i nastroczający wiele problemów. Z jednej strony czasy narastania czoła fali są stosunkowo krótkie, rzędu kilku do kilkudziesięciu mikrosekund  $/1 \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}$ , z drugiej strony prędkości propagacji fal są odpowiednio

wysokie. W rezultacie czasy rejestracji przebiegów muszą być bardzo krótkie, jak na badania typu mechanicznego, a prędkość rejestracji wynosi zwykle od 20 / $\mu$ s/cm do 100/ $\mu$ s/cm. Układ pomiarowy i rejestrujący odkształcenia na czole fali powinien posiadać liniowe pasmo przenoszenia od 0 do  $\sim 10$  MHz.

Postępy w tensometrii elektrooporowej sprawiły, że obecnie zaczęto stosować do tych celów specjalne tensometry elektrooporowe o krótkich bazach pomiarowych. Przy czym pomiary tensometryczne oparte są na jednej z dwóch zasad; mianowicie stosuje się zasadę zasilania tensometru stałym prądem, lub zasadę zasilania tensometrów w układzie mostkowym stałym napięciem. Obydwie zasady pomiaru wykazują pewne wady i zalety, jednak ich omówienie wykracza poza ramy niniejszego opracowania. Stosowanie tensometru elektrooporowego pociąga za sobą pewne ograniczenia wynikające z jego konstrukcji. Po pierwsze, ponieważ tensometr jest klejony do odkształcającego się podłoża /próbki/, a jego rozciągnięcie wymaga pewnej siły, klej musi wykazywać odpowiednią wytrzymałość na ścinanie. Zagadnienie to jest szczególnie istotne, gdy tensometr ma być stosowany w obszarze plastycznym materiału podłoża. Wynika stąd ograniczenie na maksymalne odkształcenie, które może przetransmitować tensometr. Zależy ono od wielu czynników takich jak budowa tensometru, własność reologiczna kleju, stan powierzchni na której jest przyklejony, a nawet technologii klejenia. W tej sytuacji sprawdzenie zachowania liniowości tensometru jak i oszacowanie maksymalnie dopuszczalnych odkształceń winno być sprawdzane indywidualnie dla stosowanych warunków. Po drugie, skończona baza pomiarowa tensometru pociąga za sobą efekt pozornego rozmycia czoła rejestrowanej fali lub efekt pozornej dyspersji. Tensometr działa jak pewnego rodzaju filtr obcinający wyższe harmoniczne impulsu. Na przykład rzeczywisty impuls o kształcie idealnie prostokątnym zostanie zarejestrowany jako impuls trapezowy o czasie narastania zależnym od długości bazy

tensometru  $l_0$ . Jeżeli oznaczyć odkształcenie rzeczywiste elementu przez  $\varepsilon$ , a odkształcenie mierzone tensometru przez  $\varepsilon^*$ , to w każdym momencie  $t$  będzie spełnione równanie

$$\varepsilon^* = \frac{1}{l_0} \int_0^l \varepsilon(x) dx, \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{(t)}^* = \frac{1}{l_0} \int_0^t \varepsilon(t) dt^* \quad /6.3/$$

$$0 \leq l \leq l_0, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Przy czym  $t_0$  oznacza czas przejścia impulsu przez tensometr i jeżeli  $C$  jest prędkością propagacji impulsu to  $l_0 = Ct_0$ . Zgodnie z równaniem /6.3/ rejestrowany impuls prostokątny o odkształceniu maksymalnym  $\varepsilon_{\max}$  będzie posiadać dwa odcinki

$$\text{dla } 0 \leq t < t_0 \quad \varepsilon_{(t)}^* = \varepsilon_m \left( \frac{t}{t_0} \right),$$

$$\text{dla } t \geq t_0 \quad \varepsilon_{(t)}^* = \varepsilon_m.$$

Korzystając z równania tensometrii określającego względną zmianę oporu  $\frac{\Delta R_0}{R_0}$ , gdzie  $R_0$  oznacza początkową oporność tensometru, a  $k$  jest współczynnikiem czułości tensometru

$$\frac{\Delta R_0}{R_0} = k \frac{\Delta l}{l_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad /6.4/$$

oraz z równania /6.3/ można napisać

$$\frac{\Delta R_0}{R_0} = \frac{k}{l_0} \int_0^l \varepsilon(x) dx. \quad /6.5/$$

Równocześnie z rozwiązaniem równania falowego metodą charakterystyk

$$\varepsilon = f(x - Ct), \quad /6.6/$$

stąd

$$\frac{\Delta R_0}{R_0} = \frac{k}{l_0} \int_0^l f(x - Ct) dx. \quad /6.7/$$



Dla różnych funkcji  $f$  można otrzymać odpowiednie rozwiązania. Na przykład Davies [1] przeprowadził analizę dla postaci funkcji  $f$  opisującej ciąg fal sinusoidalnych o długości  $\lambda$ , wówczas

$$E = E_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - C_0 t), \quad /6.8/$$

gdzie  $E_m$  oznacza maksymalne odkształcenie, a  $C_0$  jest prędkością dźwięku w płynie. Po podstawieniu /6.8/ do /6.7/ i scałkowaniu otrzymuje się

$$\frac{\delta R_0}{R_0} = k E_m \frac{\sin \frac{\pi l_0}{\lambda}}{\frac{\pi l_0}{\lambda}} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi l_0}{\lambda} \right). \quad /6.9/$$

Z wyrażenia /6.9/ można wywnioskować, że czujnik będzie wykazywał prawidłowe wskazania dla  $\frac{l_0}{\lambda} \rightarrow 0$ , wówczas

$$\lim_{\frac{l_0}{\lambda} \rightarrow 0} \frac{\sin \left( \frac{\pi l_0}{\lambda} \right)}{\frac{\pi l_0}{\lambda}} = 1$$

co odpowiada długości impulsu znacznie większego od bazy pomiarowej czujnika  $\lambda \gg l_0$ .

Wpływa stąd fundamentalny warunek przy stosowaniu czujników o skończonej bazie do zagadnień falowych, mianowicie długość  $x$  mierzonego impulsu musi być wielokrotnie większa od bazy stosowanego czujnika  $l_0$ .

Na przykład jeżeli długość fali harmonicznej będzie zaledwie dwukrotnie większa od bazy czujnika,  $\lambda = 2l_0$ , to względne wskazanie czujnika będzie zaniżone do liczby 0,615;  $E_m^* = 0,615 E_m$ . Tak więc błąd pomiaru wyniesie około 40%. Dla większych wartości długości fali  $\lambda$  błąd gwałtownie zmniejsza się.

Drugi wniosek, który wypływa z przedstawionej analizy jest taki, że wyższe harmoniczne można rejestrować czujnikami o odpowiednio małej bazie. Stąd tak istotne znaczenie długości bazy czujnika w badaniach dynamicznych. Czym baza mniejsza tym czujnik lepszy z przedstawionego punktu widzenia.

Jako drugi pouczający przykład zostanie rozważony za Daviesem impuls, gdy maksymalna wartość deformacji w momencie  $t = 0$  wzrasta natychmiast do maksymalnej wartości  $\varepsilon_m$ , a następnie zmniejsza się zgodnie z prawem eksponencjalnym. Stąd funkcję  $\varepsilon/x - Ct$  można przedstawić następująco

$$\varepsilon = 0 \quad \text{dla} \quad \frac{x}{c} \geq t,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m \exp\left(\frac{x}{c} - t\right) \frac{1}{\theta} \quad \text{dla} \quad \frac{x}{c} \leq t, \quad /6.10/$$

gdzie  $\theta$  oznacza stałą. Należy zastosować dwa przedziały całkowania po podstawieniu /6.10/ do /6.7/, pierwszy zawiera się w przedziale czasu od 0 do  $l_0 = Ct$ , to jest gdy czoło fali przemieszcza się po długości bazy czujnika  $l_0$ , wówczas

$$\frac{\delta R_0}{R_0} = k \varepsilon_m \frac{c\theta}{l_0} \left(1 - e^{-t/\theta}\right) \quad /6.11/$$

Następnie przedział całkowania będzie równy od 0 do  $l_0$ , stąd

$$\frac{\delta R_0}{R_0} = k \varepsilon_m \frac{c\theta}{l_0} \left(e^{\frac{l_0}{c\theta}} - 1\right) e^{-\frac{t}{\theta}}. \quad /6.12/$$

Z zależności /6.11/ można stwierdzić, że wynik pomiaru wykaże skończony czas narastania czoła impulsu. Ponadto istotną obserwacją jest fakt, że przy zwiększaniu  $l_0$  maksymalne wskazania czujnika maleją przy równoczesnym zachowaniu stałej wartości maksymalnej amplitudy  $\varepsilon_m$  mierzonego impulsu.

Bardziej ogólny wniosek, który wypływa z przeprowadzonej analizy jest taki, że wskazania czujnika przy pomiarze krótkich impulsów o dużej amplitudzie będą znacznie zaniżone. Jeżeli impuls jest bardzo krótki posiada jednak dużą ampli-

tudę, w granicznym przypadku jest to impuls typu Dirac'a, to czujnik praktycznie rzecz biorąc może takiego impulsu w ogóle nie ujawnić. Jednak w pomiarze zjawisk związanych z falami przyspieszenia w prętach takiego typu impulsy nie występują.

Przedstawiona analiza dotyczy jedynie fal sprężystych. Oszacowanie tego rodzaju błędów dla fal plastycznych jest bardziej skomplikowane ze względu na nieliniowość zjawiska. Pewne rozważania na ten temat zostały podane w pracy [5]. Jednak w przypadku fal plastycznych popełniane błędy pomiarowe są mniejsze, a to ze względu na znacznie mniejsze prędkości propagacji oraz na brak zmian odkształceń i naprężeń typu skokowego na czole fali.

W sumie należy stwierdzić, że wykorzystanie tensometrii elektrooporowej do pomiaru sprężysto-plastycznych fal naprężeń jest celowe. Trzeba jednak zdawać sobie sprawę z ograniczeń wpływających z tej techniki pomiaru i przede wszystkim stosować tensometry o możliwie krótkich bazach.

Zastosowanie długich próbek wraz z przygotowaniem algorytmu /5.38/ sprawia, że możliwy i korzystny jest jednoczesny pomiar odkształceń  $\epsilon/x, t/x$  dla największej ilości punktów na danej próbce. Oczywiście ilość punktów pomiarowych jest ograniczona możliwościami technicznymi. W obecnym przypadku zastosowano cztery kanały równoczesnego pomiaru odkształceń z użyciem tensometrów elektrooporowych. Schematyczne przedstawienie zastosowanego układu podano na rys. 6.7.

Na próbce 1 w postaci taśmy o szerokości 10 mm naklejono cztery tensometry elektrooporowe oznaczone od 1 do 4, są one naklejone w odległościach od  $x_1$  do  $x_4$  licząc od uchwytu z dynamometrem 2. Tensometry 1 i 2 pracują w układzie mostkowym z jednym tensometrem czynnym i jednym kompensacyjnym, są zasilane napięciem 6 V z dwukanałowego mostka napięcia stałego DISA typ 51C 14/15/16. Sygnał na-

napięciowy z mostka DISA jest podawany na wejście dwustrumieniowego oscyloskopu prod. Radiotechniki typu OKD-505A. Tensometry 3 i 4 są zasilane przez dwukanałowy zasilacz-wzmocniacz produkcji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT, jego praca oparta jest o zasadę zasilania stałym prądem. Sygnał napięciowy ze wzmacniacza oznaczonego przez WZM na rys. 6.7 podawany jest na wejścia wkładki dwukanałowej oscyloskopu Orion typ TR-4401.

Obydwa układy pomiaru odkształceń posiadają pasmo przenoszenia w przybliżeniu od 20 Hz do nieco powyżej 1 MHz, wystarcza ono całkowicie do pomiaru badanych zjawisk falowych.

Wszystkie cztery sygnały z tensometrów są rejestrowane przy pomocy oscyloskopowych przystawek fotograficznych K1 i K2, a wyzwalanie jednorazowej podstawy czasu jest zsynchronizowane z uderzeniem ramienia młota rotacyjnego. Synchronizacja jest równoczesna dla obydwu oscyloskopów poprzez zwarcie na masę napięcia stałego 1,5 V przez styk 3. W ten sposób tuż przed uderzeniem ramię młota wchodzi w kontakt ze stykiem 3 wyzwalając podstawy czasu impulsem 1,5 V podanym na odpowiednie wejścia oscyloskopowe T1 i T2.

Wartość odkształceń dla tensometrów 1 i 2 można wyznaczyć z oscylogramów z wykorzystaniem zależności

$$\varepsilon(t) = \frac{V_0(t)}{V_2} \cdot \frac{4}{k} \frac{R_0 + 1 \cdot 10^4}{1 \cdot 10^4}, \quad /6.13/$$

gdzie  $V_0(t)$  oznacza zarejestrowany w czasie przebieg sygnału napięciowego z mostka 51C 14/15/16,  $V_2$  napięcie zasilania mostka, dla obecnych badań  $V_2 = 6$  V,  $k$  oznacza stałą tensometru, a  $R_0$  początkowy jego opór. Wzmacniacz-zasilacz posiada wbudowany mikroprzełącznik pozwalający na dynamiczne cechowanie układu pomiarowego znaną wartością odkształcenia, symulowaną włączeniem bocznika. W ten sposób, zakładając liniowość układu, można z oscylogramów dla tensomet-

rów 3 i 4 określać zarejestrowane wartości odkształceń.

Należy dodać, że w badaniach używano tensometry foliowe prod. ITWL typu FK-3 o bazie pomiarowej  $l_0 = 3$  mm. Bardziej dokładne omówienie zachowania się tych tensometrów zamieszczono w dalszej części opracowania.

Na rys. 6.8 przedstawiono zestaw aparatury do pomiaru odkształceń zgodnie ze schematem blokowym podanym na rys. 6.7. Poza przyrządami ze schematu blokowego widoczny jest również znacznik czasu INCO typu PZC-2A z okrągłą tarczą strojenia, służący do cechowania czasowego podstaw oscyloskopów.

Z kolei na rys. 6.9 pokazano próbkę z tensometrami elektrooporowymi zamontowaną na stanowisku badawczym. Widoczne są również uchwyty wraz z dynamometrem dynamicznym oraz ramię młota rotacyjnego w pionowym położeniu, a także żarówka i fotodioda z układu mierzącego  $v_d$ .

Na rys. 6.10 przedstawiono oscylogram czoła fali uzyskany dla kanałów 1 i 2 z mostka DISA oraz oscyloskopu OKD-505A. Podstawa czasu wynosi  $50 \mu\text{scm}^{-1}$ . Natomiast na rys. 6.11 przedstawiono oscylogram dla tej samej próbki aluminiowej i tego samego pomiaru, jednak dla kanałów 3 i 4. Oscylogram uzyskano przy wykorzystaniu wzmacniacza IPPT oraz oscyloskopu TR-4401. Jest to więc kompletny zapis procesu falowego dla czterech kanałów.

W pomiarach fal plastycznych bardzo istotnym zagadnieniem jest rozmieszczenie tensometrów elektrooporowych wzdłuż długości próbki. Ponieważ w rozważaniach teoretycznych korzysta się z rozwiązania zagadnienia brzegowego dla późnieskończonego pręta, to gdy używa się podczas eksperymentu z próbki o skończonej długości należy wprowadzić pewne ograniczenia pomiarowe. Pierwszym ograniczeniem jest skończony czas trwania pomiaru procesu falowego. Jeżeli ostatni z tensometrów naklejonny jest na odległości  $x_4$  od uchwytu, a prędkość propagacji fali sprężystej wynosi  $C_0$ , to dopuszczalny czas rejestracji procesu  $t_{\text{max}}$  wyniesie



$$t_{max} = \frac{1}{c_0} (2l_0 - x_4), \quad /6.14/$$

gdzie  $l_0$  oznacza całkowitą długość próbki. Drugim ograniczeniem ze względu na możliwość pojawienia się fali odciążenia propagującej się od strony uchwytu dolnego jest warunek, że minimalne przemieszczenie końca próbki  $U_0$  winno być równe

$$(U_0)_{min} = v_d \cdot t_{max} \quad \text{lub} \quad (U_0)_{min} = \frac{v_d}{c_0} (2l_0 - x_4), \quad /6.15/$$

Omówioną sytuację przedstawiono na płaszczyźnie fazowej z rys. 6.12. Obliczenia przeprowadzono dla aluminium w stanie dostawy /Z1/. Z rysunku widać, że musi być spełnione równocześnie trzecie ograniczenie, a mianowicie

$$t_{max} > \frac{x_4}{c_{min}}, \quad /6.16/$$

gdzie  $c_{min}$  oznacza minimalną mierzoną prędkość fali plastycznej. Tak więc rys. 6.12 przedstawia wykreślne rozwiązanie układu równań /6.14/ i /6.15/ wraz ze spełnieniem nierówności /6.16/. Podobne wykresy na płaszczyźnie fazowej należy sporządzić dla próbek wykonanych z innych materiałów.

W sumie należy stwierdzić, że zastosowanie tensometrii elektrooporowej oraz zaproponowanego układu pomiarowego w pełni zdało egzamin w badaniu sprężysto-plastycznych fal w długich próbkach. Oczywiście zastosowanie tej metody pomiaru jest możliwe przy przestrzeganiu przedyskutowanych ograniczeń.

#### 6.5. Pomiar przemieszczeń na czole fali

Przedstawiona uprzednio dyskusja [4] oraz opracowane algorytmy dla znajdowania dynamicznych charakterystyk naprężenie-odkształcenie na podstawie pomiaru przemieszczeń w funkcji czasu na czole fali prowadzą do wniosku, że na

tej drodze można uzyskać istotne informacje o procesach faliowych w prętach.

Wybór metody pomiaru przemieszczeń na czole fali ograniczony jest pewnymi warunkami, które muszą być spełnione. Metoda musi być praktycznie bezinercyjna i odpowiednio dokładna. Schemat pomiarowy, który został specjalnie zaprojektowany w tym celu przedstawiono na rys. 6.13. W układzie pomiaru przemieszczeń zastosowano fotopowielacz wraz z oświetlaczem. Źródło światła 1 oświetla poprzez układ oświetlacza 2 czarno-białe pole 3 na płaskiej próbce 7. Suma światła odbitego od czarno-białego pola jest rejestrowana przez układ fotopowielacza 4 i zamieniana na odpowiedni sygnał napięciowy. A więc o ile pole czarno-białe przemieszcza się w czasie, to sygnał z fotopowielacza jest w danej chwili proporcjonalny do aktualnego przemieszczenia granicy czarno-białego pola. Pole to jest przysłonięte częściowo czernionym nieruchomym oknem o odpowiednich wymiarach. Sygnał napięciowy z fotopowielacza, proporcjonalny do przemieszczenia na czole fali, jest rejestrowany przez oscyloskop 5. Innymi słowy, suma odbitego strumienia świetlnego zależy od wzajemnej proporcji pola ciemnego i jasnego. Podczas przejścia fali proporcja ta zmienia się zależnie od kształtu jej czoła. Fakt ten pozwala na rejestrację kształtu fali na oscyloskopie przy jednorazowo wyzwalanej podstawie czasu.

Układ oświetlacza został zbudowany z typowych elementów produkcji PZO, gdzie użyto odpowiedniej żarówki 15 W. W układzie fotopowielacza zastosowano fotopowielacz C. Zeiss typ M10 FS-25 wraz z zasilaczem wysokiego napięcia BUTJ typ ZWN-2,5 kV.

Fotopowielacz pracuje wykorzystując emisję elektronów z katody pod wpływem kwantów światła. O ile jednak w fotokómkach elektrony wybite przez kwanty światła są odprowadzane bezpośrednio do anody to w fotopowielaczu elektrony

są kierowane przez pole elektrostatyczne na kolejne elektrody zwane dynodami. Dynody charakteryzują się tym, że przy dostatecznie dużej energii elektronu padającego na dynodę, może on wybić z dynody 2 lub więcej elektronów wtórne. W ten sposób na dynodach prąd ulega wzmocnieniu. Fotopowielacz posiadając  $n$  dynod wzmacnia prąd katody według wzoru

$$k_i = n^m,$$

gdzie współczynnik powielania  $n$  zależy od rodzaju materiału z jakiego są wykonane dynody i od różnicy napięć między nimi. Dla zapewnienia emisji elektronów wtórnych napięcie między dynodami powinno być rzędu od 100 V do 150 V. Współczynnik  $n$  ma wówczas wartość od 2 do 3 co zapewnia wzmocnienie większe niż 1000 razy.

Użyty powielacz typ M10 FS-25 posiada 10 dynod i napięcie zasilania od 1000 V do 1400 V oraz czas narastania impulsu mniejszy niż  $10^{-7}$  s.

Na bazie fotopowielacza tego typu zbudowano trzy niezależne czujniki pomiaru przemieszczeń usytuowane jeden nad drugim i zasilane wspólnym źródłem wysokiego napięcia. Opracowany układ pomiarowy, który jest praktycznie układem bezinercyjnym, przedstawiono na rys. 6.14 i rys. 6.15. Przy czym na rys. 6.14 pokazano czujnik, zasilacz oraz urządzenie ze śrubą mikrometryczną do cechowania przemieszczeń. Natomiast na rys. 6.15 pokazano wyłącznie zestaw trzech czujników z widocznymi oświetlaczami, osłonami fotopowielaczy i oknami dla pól czarno-białych. Przedstawiony układ pomiarowy pozwala na pomiar przemieszczeń  $U/x, t/x$  dla trzech wartości współrzędnych  $x$ . Odpowiednio duża czułość fotopowielaczy pozwala na pomiar odpowiednio małych przemieszczeń na czole fali, zaledwie rzędu 0,01 mm. Na rys. 6.16 przedstawiono układ czujników z fotopowielaczami zamocowany w położeniu roboczym na stanowisku badawczym, widoczne jest rów-

nież jedno czarno-białe pole w postaci paska papieru fotograficznego naklejonego na próbkę w postaci taśmy.

Dokładne cechowanie czujników wykazało, że dla użytej konstrukcji z oknem 10 mm, osiąganе wzmocnienie sygnału przemieszczenia czarno-białego pola wynosi około 40 razy. Zakładając dokładność odczytu sygnału na ekranie oscyloskopu wynoszącą  $\sim \pm 0,1$  mm, możliwe do zmierzenia przyrosty przemieszczenia czarno-białego pola wynoszą

$$\Delta U = \pm \frac{0,1}{40} = \pm 0,0025 \text{ mm} \quad \Delta U = \pm 2,5 / u.$$

Ponieważ jednak oscylogram jest mierzony za pomocą mikroskopu pomiarowego z dokładnością  $\pm 0,001$  mm, przeto można uzyskać dalsze zwiększenie dokładności pomiaru przemieszczenia. Na rys. 6.17 i rys. 6.18 przedstawiono przykładowo wyniki cechowania jednego z czujników przeprowadzone z użyciem oscyloskopu TR-4401 oraz kamery DISA-Cossor typu 51C09. Na rys. 6.17 przedstawiono dwa kolejne cechowania przy małej czułości i napięciu zasilania fotopowielaczy  $V_F = 1020$  V, na osi odciętych podane przyrosty przemieszczenia  $\Delta U$  w mm, natomiast na osi rzędnych zaznaczono pomierzone wychylenia plamki na ekranie lampy oscyloskopu w mm. Na rys. 6.18 przedstawiono wyniki trzech kolejnych cechowań przy większej czułości wejścia oscyloskopowego i takim samym napięciu zasilania fotopowielaczy  $V_F = 1020$  V. Wyniki dwóch serii cechowań wskazują na stosunkowo dobrą liniowość wskazań czujnika oraz powtarzalność. Jednak w przypadku zwiększonej czułości, zastosowanie akumulatora o zbyt małej pojemności do zasilania oświetlaczy prowadzi do widocznej zmiany czułości w czasie, różnica pomiędzy poszczególnymi cechowaniami wynosi około 20 minut. W sumie jednak charakterystyka czujnika jest zgodna z założeniami.

Jednym ze źródeł błędów we wskazaniach czujnika jest brak dokładnej prostopadłości pomiędzy pionową osią okna

czujnika, a poziomy podziałem czarno-białego pola. Taka sytuacja została schematycznie przedstawiona na rys. 6.19. Okno posiada wymiar  $axb$ , a czarno-białe pole jest pochylone o kąt  $\alpha$  to wówczas

$$\Delta h = b \operatorname{tg} \alpha$$

stąd 
$$\Delta F = \frac{1}{2} \Delta h b,$$

Względny błąd odczytu czujnika jest proporcjonalny do względnej zmiany pola  $\Delta F$  spowodowanej odchyleniem od prostokątności o kąt  $90^\circ - \alpha$ , wówczas

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{1}{2} \frac{\Delta h \cdot b}{a \cdot b} \quad ; \quad \frac{\Delta F}{F} = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha.$$

Na przykład dla minimalnej wysokości okna  $a = 1$  mm i szerokości  $b = 10$  mm można obliczyć dopuszczalny kąt  $\alpha$ , aby błąd sygnału nie przekroczył 1%, wówczas  $\frac{\Delta F}{F} = 0,01$  i stąd  $\alpha \approx 7'$ . Dla większych wysokości okna dopuszczalny kąt  $\alpha$  jest znacznie większy.

W sumie zbudowany czujnik wykazuje szereg zalet w przypadku pomiaru przemieszczeń na czole fali. Należy również podkreślić, że proponowana zasada pomiaru przemieszczeń może znaleźć szersze zastosowanie w innego typu pomiarach szybkozmiennych przemieszczeń. Przez odpowiednie przekonstruowanie układu optycznego fotopowielacza można przeprowadzać pomiary przemieszczeń na odległość, itp.

## 6.6. Stanowisko do badań statycznych

Użycie cienkich i długich taśm jako próbek spowodowało potrzebę badania wycinków tych taśm w warunkach statycznych. Zagadnienie to jest o tyle skomplikowane, że otrzymywane krzywe umocnienia, uzyskiwane przy rozciąganiu, muszą być



odpowiednio dokładne. Należy również zachować stałą prędkość odkształcenia. Do wykonywania tego rodzaju dokładnych prób zastosowano specjalny układ pomiarowy z ciągłą rejestracją przebiegu rozciągania próbki. W tym celu wykorzystano lekką kinematyczną zrywarkę konstrukcji IPPT PAN oraz układ pomiarowy złożony ze specjalnie zaprojektowanych i wykonanych dynamometrów, ekstensometru Amslera typu DM-40 z wymienianym czujnikiem zegarowym na czujnik indukcyjny prod. IL typ OT-5, miernika wielkości mechanicznych Elpo typ N101 oraz mostków WAMEL typ TT-4 i TT3b i rejestratora X-Y, YEW typ PRO-12. Na rys. 6.20 pokazano tak otrzymane stanowisko pomiarowe wraz ze zrywarką. Natomiast na rys. 6.21 przedstawiono zrywarkę wraz z założoną próbką, dynamometrami i ekstensometrem, wreszcie na rys. 6.22 pokazano uchwyty wraz z próbką i dynamometrami oraz przystosowany ekstensometr Amslera. Rys. 6.23 przedstawia schemat blokowy układu pomiarowego.

W układzie zastosowano dwa dynamometry, te same które używa się w badaniach dynamicznych, mianowicie dynamometr działania dynamicznego oznaczony na rys. 6.23 przez DD oraz dynamometr statyczny oznaczony przez DT. Przy czym dynamometr DD nie jest używany w badaniach statycznych, a jedynie na omawianym stanowisku dokonuje się jego cechowania wraz z mostkiem TT-4. Siłę P cechuje się wstępnie przez zastosowanie dynamometru zegarowego i serii odważników wieszanych na ramieniu zrywarki. Niezależnie od serii cechowań siły P przy użyciu odważników mostka TT-3b oraz rejestratora X-Y z czynnym kanałem Y, przeprowadzono serię cechowań czujnika przemieszczeń OT-5 z użyciem śruby mikrometrycznej, miernika N101 i rejestratora PRO-12 z czynnym kanałem X. Obydwie serie cechowań służyły za podstawę do badania statycznych krzywych umocnienia.

## 6.7. Wstępne badania liniowości tensometrów elektrooporowych w stanie plastycznym

Zastosowanie tensometrii elektrooporowej zarówno w badaniach statycznych jak i w śledzeniu czoła fali na długich próbkach, zmusiło do przeprowadzenia serii badań liniowości wskazań używanych tensometrów elektrooporowych. Wiadomo, że zarówno reologiczne własności kleju, którym jest przyklejony tensometr do podłoża, jak również sama konstrukcja tensometru i wynikające stąd zmiany oporności drutu podczas odkształceń plastycznych, powodują pojawienie się nielinowości wskazań. Przy czym wskazania tensometru są zawsze mniejsze od rzeczywistego odkształcenia się podłoża. Zachodzi pytanie do jakiego granicznego odkształcenia można dany tensometr używać przy założonym maksymalnym procencie błędu wskazań. W celu zbadania nielinowości zestawiono układ pomiarowy na schemacie przedstawionym uprzednio na rys. 6.23, z tą jednak różnicą, że mostkiem TT-3b mierzono wskazania tensometru elektrooporowego naklejonego bezpośrednio na deformowaną plastycznie próbkę. W ten sposób te same odkształcenia próbki można było mierzyć równocześnie dwoma niezależnymi metodami. Odkształcenia mierzone ekstensometrem mechanicznym Amslera z czujnikiem OT-5 i miernikiem M-101 rejestrowano na wejściu X rejestratora X-Y, PRO-12. Natomiast wskazania badanego tensometru elektrooporowego rejestrowano równocześnie na wejściu Y. Badania przeprowadzono w warunkach kompensacji temperaturowej z jednym tensometrem czynnym - tensometr badany. Do badań wybrano trzy typy tensometrów, a mianowicie dwa typy tensometrów kratowych na podłożu papierowym typu RL 10/120  $\Omega$  i RL 15/120  $\Omega$  o bazach pomiarowych 10 mm i 15 mm oraz tensometr foliowy prod. ITWL typu FK-3 o bazie pomiarowej 3 mm. Ten ostatni typ jest przewidziany do pomiarów falowych. Czujniki naklejano na próbki z technicznie czystego aluminium w stanie wyżarzonym. Wiadomo, że próbka taka odkształca się bardzo równomiernie przy ma-

łych odkształceniach plastycznych rzędu 1 %.

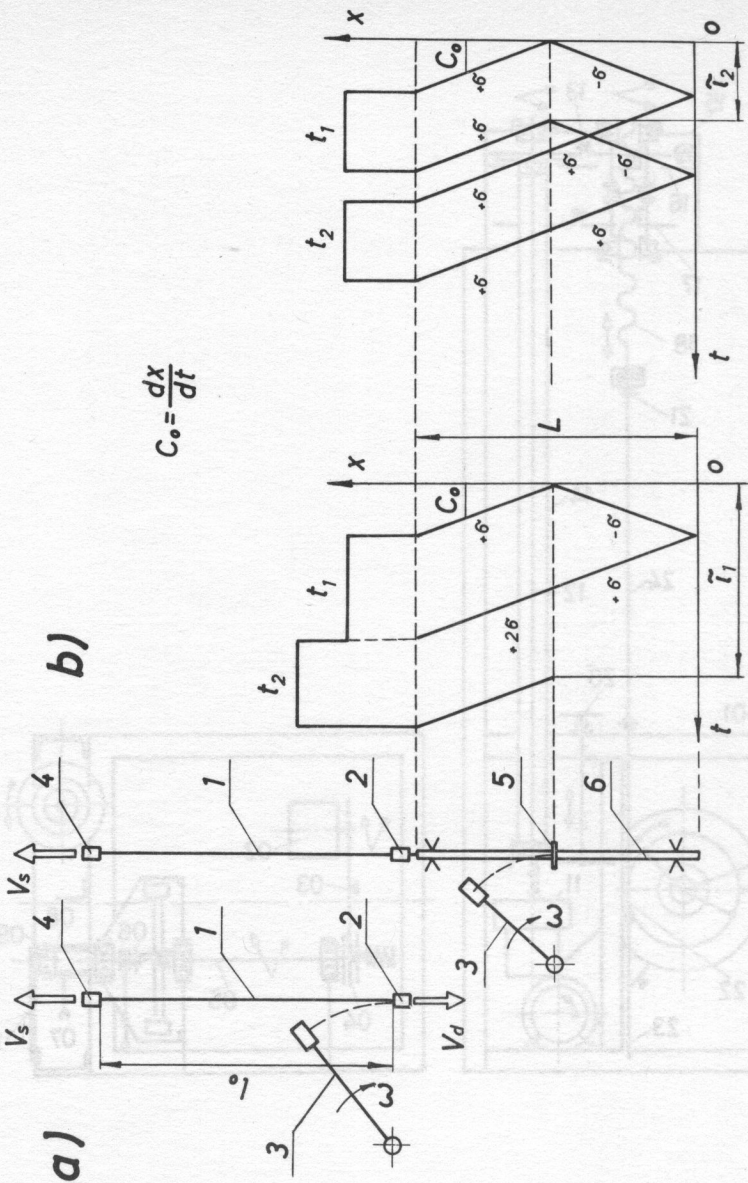
Wyniki badania liniowości w postaci średnich krzywych z trzech pomiarów dla tensometrów RL 10/120  $\Omega$  i RL 15/120  $\Omega$  przedstawiono na rys. 6.24 i rys. 6.25. Czujniki klejono klejem dostarczonym przez producenta, czas schnięcia wynosił jedną dobę w temperaturze pokojowej. Krzyżykiem oznaczono moment oderwania się tensometru od podłoża. Na uwagę zasługuje zaobserwowana duża histereza czujnika. Na rys. 6.26 przedstawiono analogiczny wykres uzyskany dla jednego z trzech czujników foliowych FK-3, klejonych klejem bakielitowym BWF-21 i odpowiednio wygrzewanych. Na podstawie wszystkich uzyskanych wykresów można stwierdzić, że odkształcenie mierzone tensometrem elektrooporowym jest zawsze mniejsze od rzeczywistego. Procentowe błędy pomiaru odkształcenia dla badanych typów czujników przedstawiono w funkcji rzeczywistego odkształcenia na rys. 6.27 i rys. 6.28. Procentowy błąd pomiaru odkształcenia dla wszystkich badanych czujników jest praktycznie równy zero do odkształcenia równego  $\varepsilon \approx 1 \text{ } ^\circ/\omega$ , następnie gwałtownie rośnie wraz z odkształceniem, aby dla odkształcenia  $\varepsilon \approx 5 \text{ } \%$  osiągnąć około 10 %. Przy czym jak należało się spodziewać, jest on większy dla czujników typu RL-10 niż dla czujników RL-15. Należy równocześnie podkreślić stosunkowo dobrą pracę czujników FK-3, za wyjątkiem krzywej 1, gdzie czujnik klejono inną metodą niż dwa pozostałe. We wszystkich przypadkach praca czujników została przerywana przez ścięcie warstwy kleju, a nie przez zniszczenie konstrukcji czujnika.

Jako wniosek można stwierdzić, że pomiary ilościowe odkształceń dokonywane czujnikami elektrooporowymi, gdy podłoże mierzone znajduje się w stanie plastycznym tj. dla  $\varepsilon > 2 \text{ } \text{ } ^\circ/\omega$ , należy traktować z dużą ostrożnością, w szczególności gdy wymagana jest odpowiednia dokładność pomiaru odkształcenia. W przypadku pomiarów falowych dla prób dociążania nie jest wymagana tak duża dokładność i błąd

$-W_{\epsilon} \approx 10\%$  jest dopuszczalny, co określa maksymalną granicę odkształceń mierzonych jako  $\epsilon_{\max} \approx 5\%$ . W przypadku zwiększenia  $-W_{\epsilon}$  do  $20\%$  granica maksymalnych odkształceń mierzonych przesuwą się do  $\epsilon_{\max} \approx 8\%$ . A więc ujemną cechą zastosowania tensometrii elektrooporowej w obecnych badaniach jest ograniczenie maksymalnych odkształceń plastycznych od  $\epsilon_{\max} \approx 5\%$  do  $8\%$ .

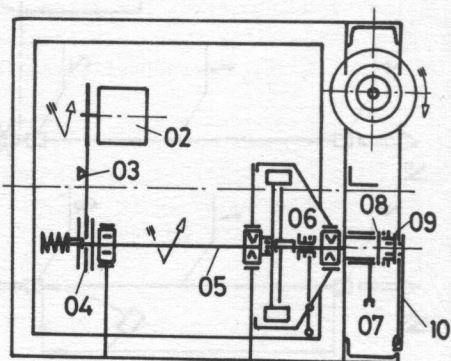
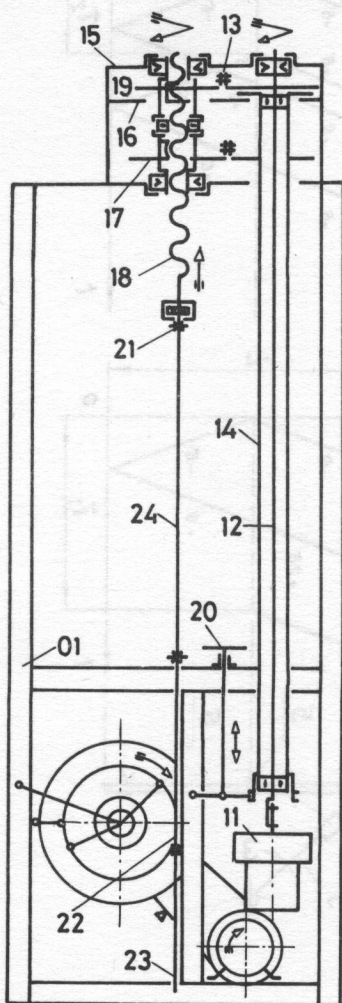
Literatura cytowana w tekście  
rozdziału 6

- [1] Davies R.M. - Stress Waves in Solids, Surveys in Mechanics, G.I. Taylor 70th Aniv. vol., Cambridge /1956/.
- [2] Rozdział 3 - Analiza czoła sprężysto-plastycznej fali w pręcie.
- [3] Rozdział 4 - Dyskusja efektów wywołanych falą dociążania w pręcie.
- [4] Rozdział 5 - Eksperymentalne metody wyznaczania dynamicznych charakterystyk naprężenie-odkształcenie na podstawie pomiaru zjawisk falowych w długich próbkach.
- [5] Sharpe W.N. - Gage Length Errors in Plastic - Strain Wave Measurement, J. Appl. Mech., 4, 36 /1969/, 870.



Rys. 6.1





Rys. 6.2a

**SCHEMAT KONSTRUKCYJNY STANOWISKA BADAWCZEGO "SIR 1 "**  
**DO PEŁZAJĄCEGO I IMPULSOWEGO ROZCIĄGANIA PROBEK**

- 01 - rama stanowiska
- 02 - silnik napędu zrywającego 1,7kW, 2.850 1/min
- 03 - przekładnia z paskiem klinowym
- 04 - sprzęgło przeciążeniowe napędu
- 05 - wał napędowy
- 06 - obudowa, koło zamachowe, mechanizm wyłączania, sprzęgło cierne jednotarczowe /Star 20/
- 07 - ramię zrywające próbkę
- 08 - sawleczka przeciążeniowa ramienia zrywającego
- 09 - sawleczka rozruchowa sprzęgła
- 10 - drążek reakcyjny rozruchu
- 11 - mot. reduktor napędu pełzania 0,6 kW, 11 1/min
- 12 - wał napędu pełzania z kołem łańcuchowym z=63
- 13 - łańcuchy " 1/2" różnicowej przekładni napędu pełzania
- 14 - wał z kołem z=66 ustalający prędkość pełzania
- 15 - górna płyta napędu pełzania
- 16 - płyta hamulca nakrętki
- 17 - nakrętka z kołem z=63
- 18 - śruba pociągowa z rowkiem na wpust
- 19 - obejmę napędu śruby z wpustem i kołem z=66
- 20 - sterowanie prędkości pełzania 1 mm/min lub 0,1 mm/min
- 21 - tensometryczne uchwyty samozaciśkowe próbek rozciąganych
- 22 - szderzak ramienia zrywającego
- 23 - drążek falowy 1.000 mm
- 24 - próbka 1.000 mm /do 10<sup>2</sup>mm<sup>2</sup>/

symbole schematu wg normy PN-64/M-01089

Rys.6.2b

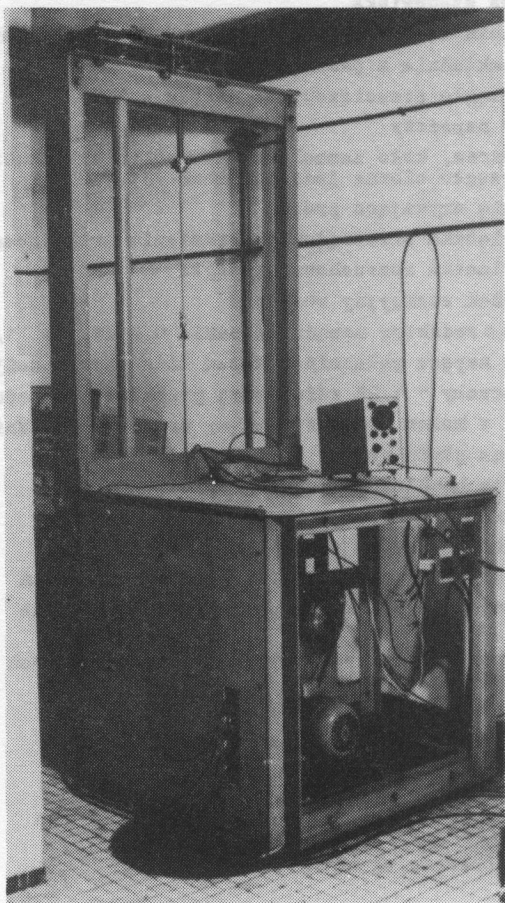
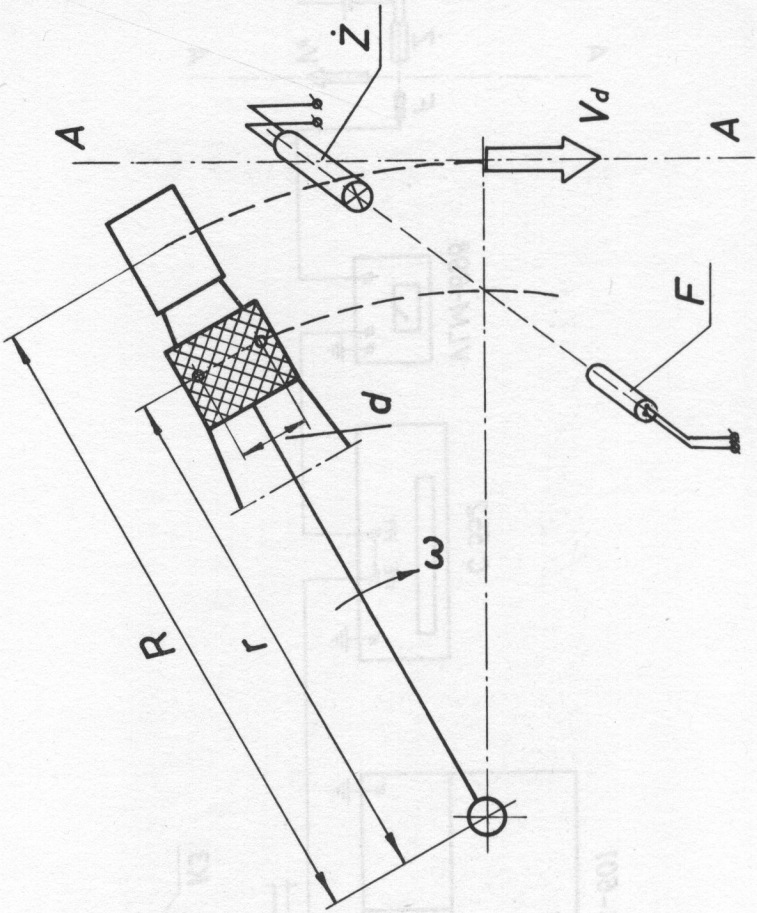
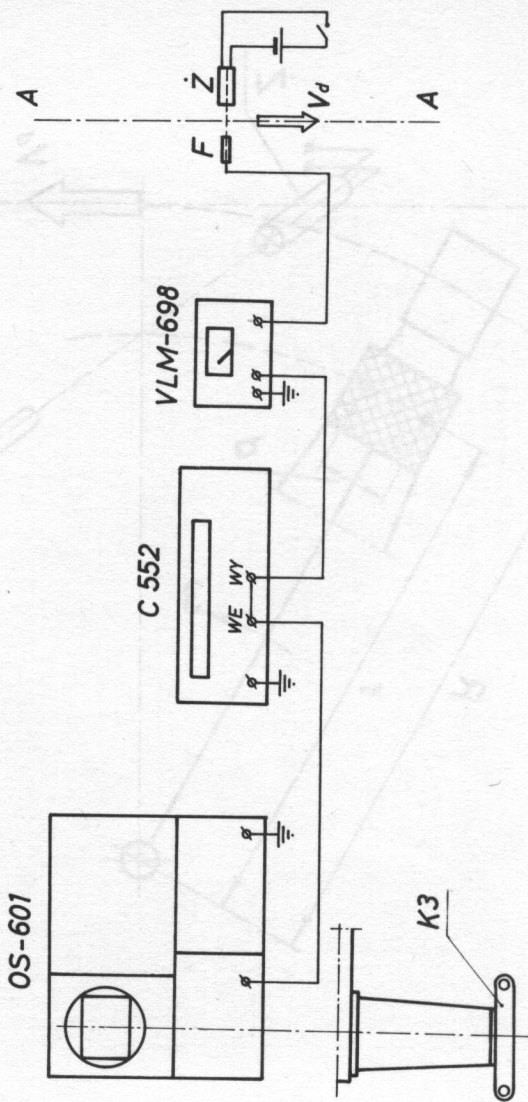


Рис. 6.3

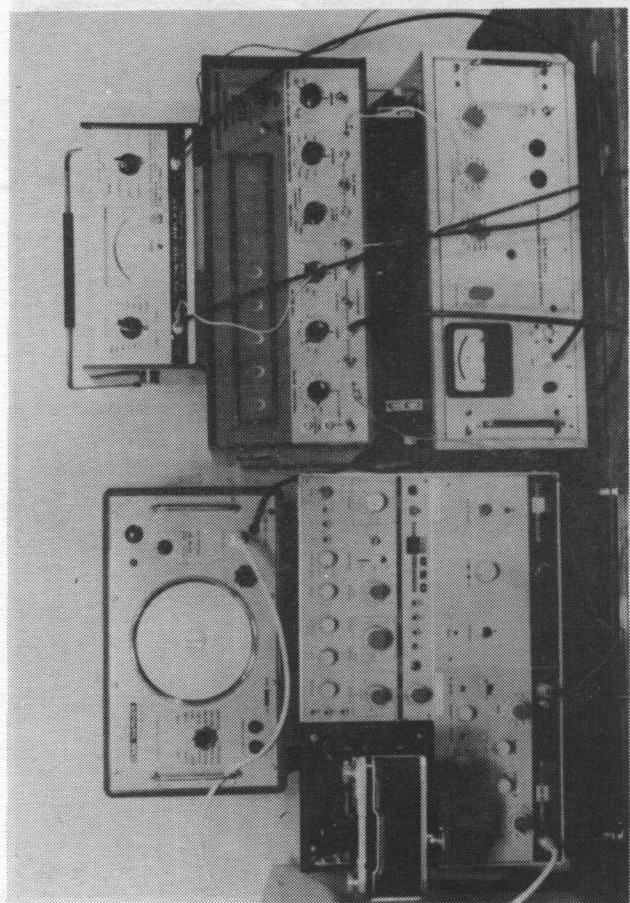


Rys. 6.4



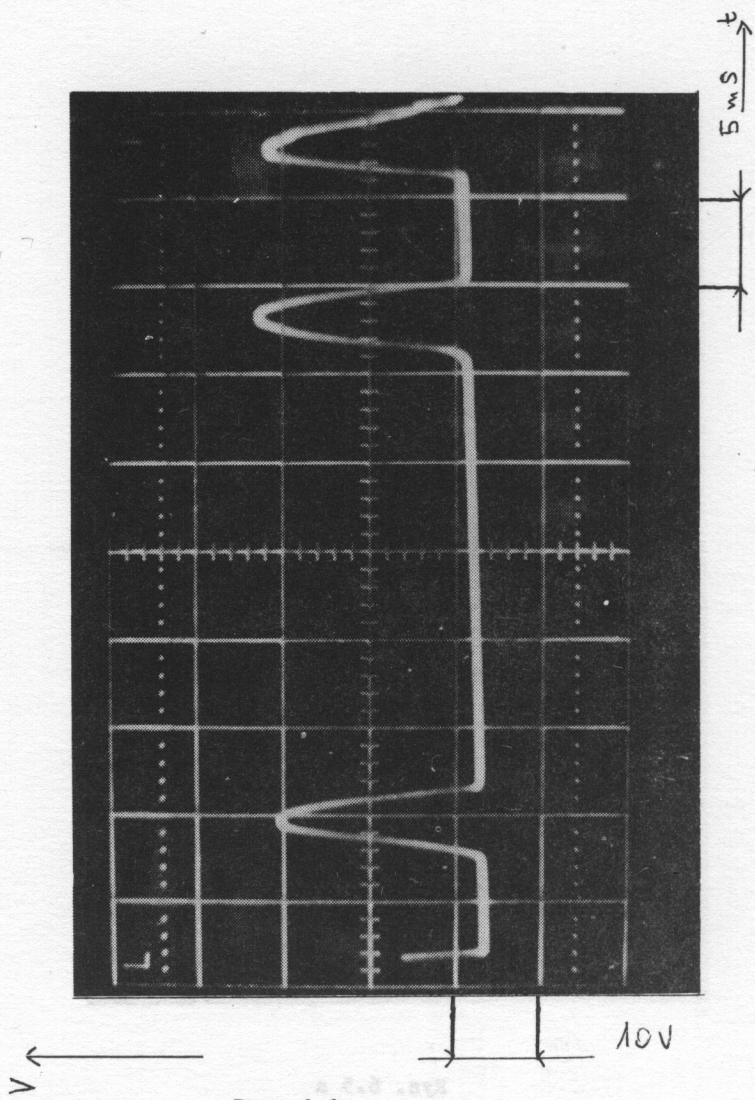
Rys. 6.5



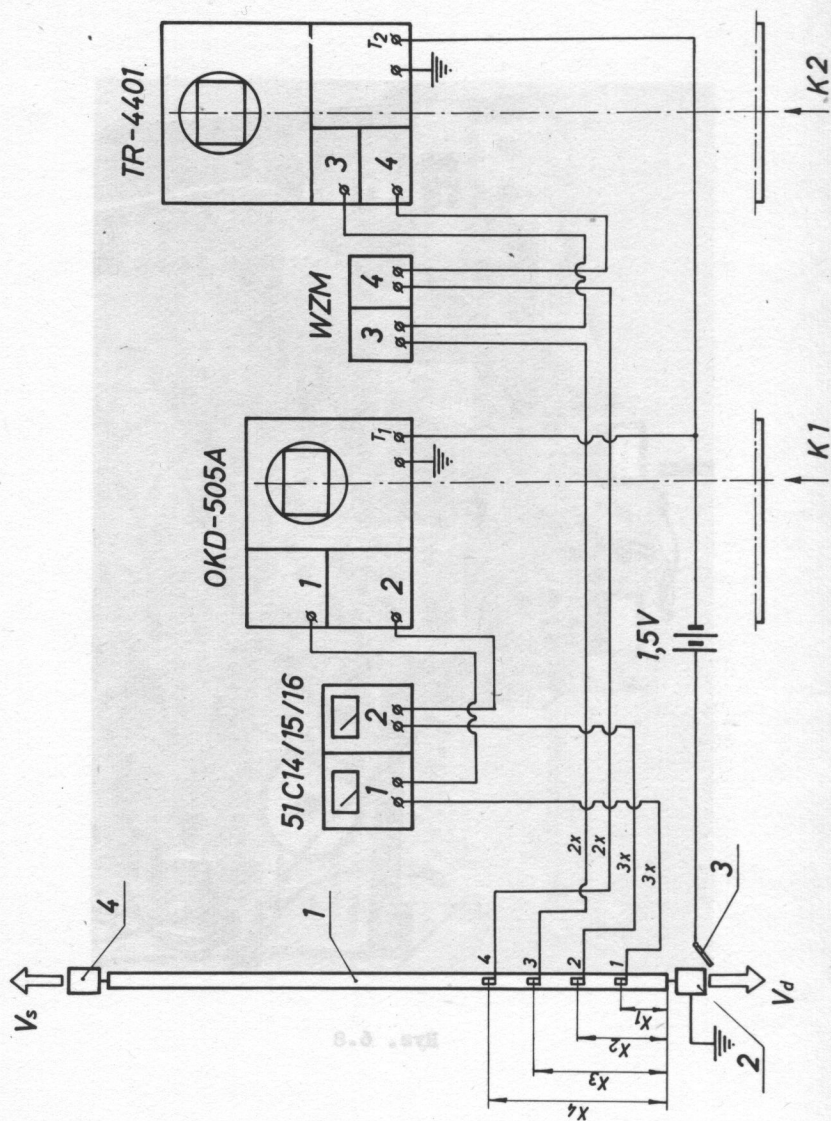


Rys. 6.5 a

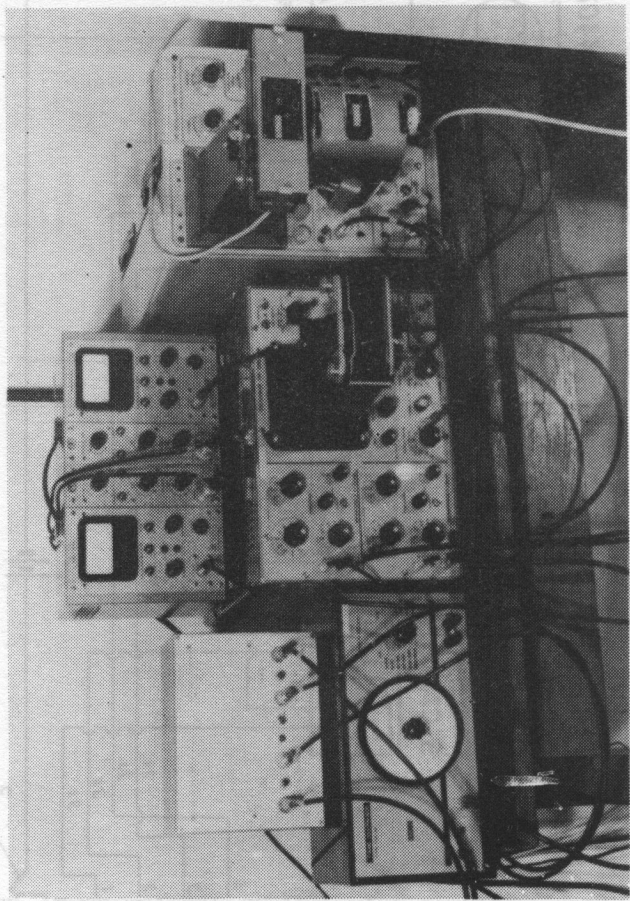
Rys. 6.7



Rys. 6.6

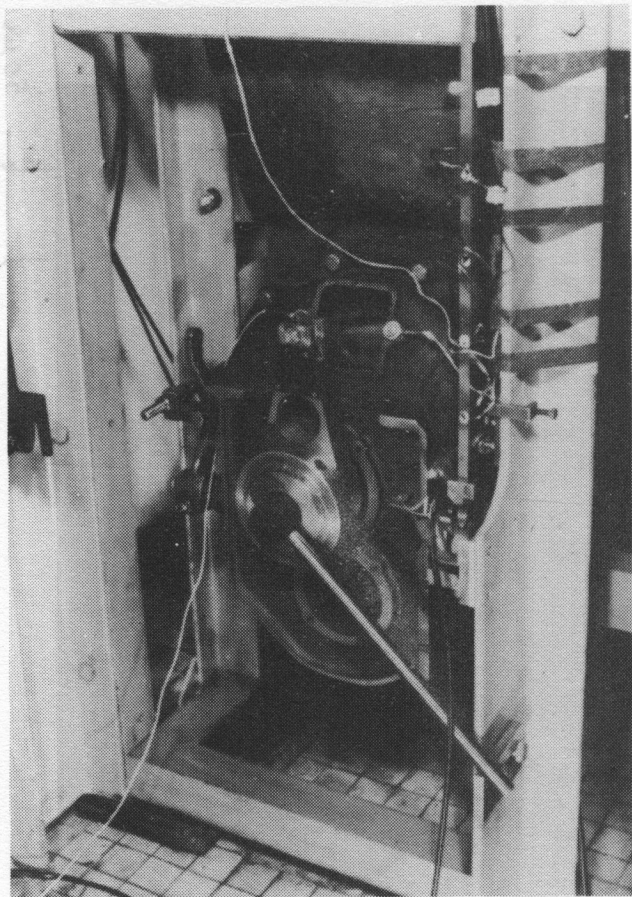


Rys. 6.7



Rys. 6.8

Rys. 6.7

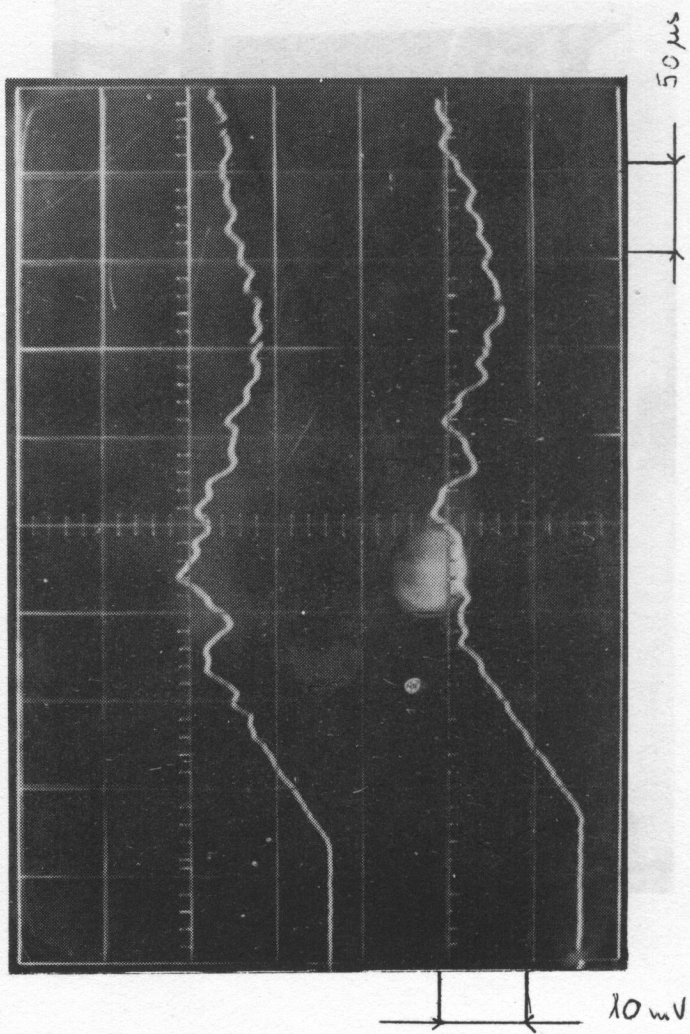


Rys. 6.9

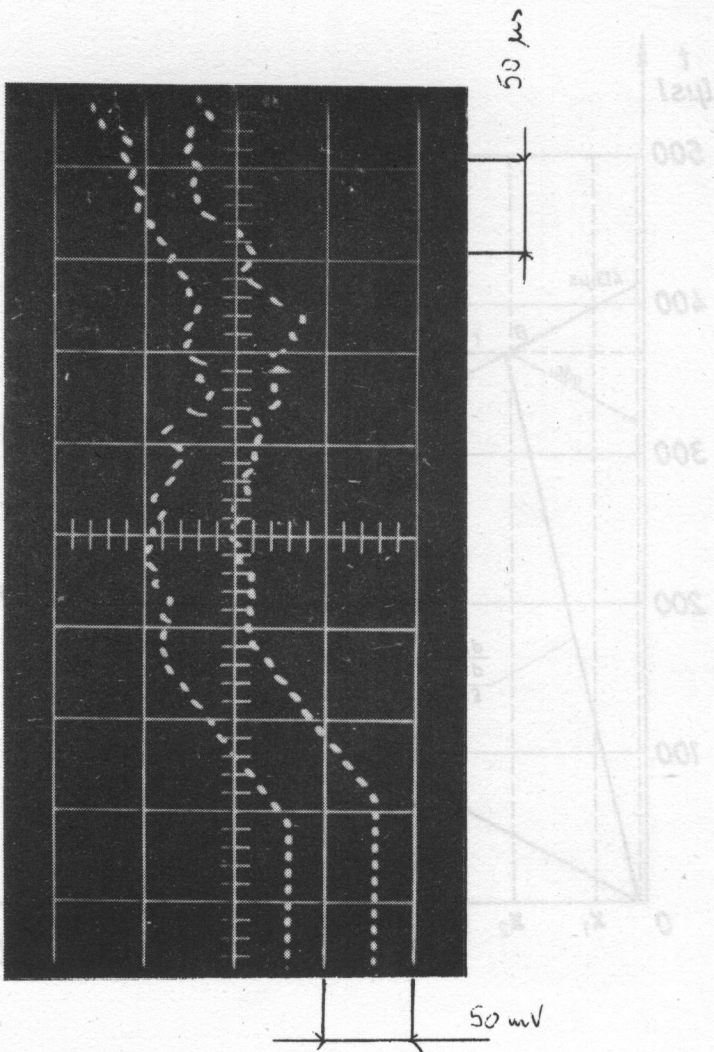
1027

01.0.478



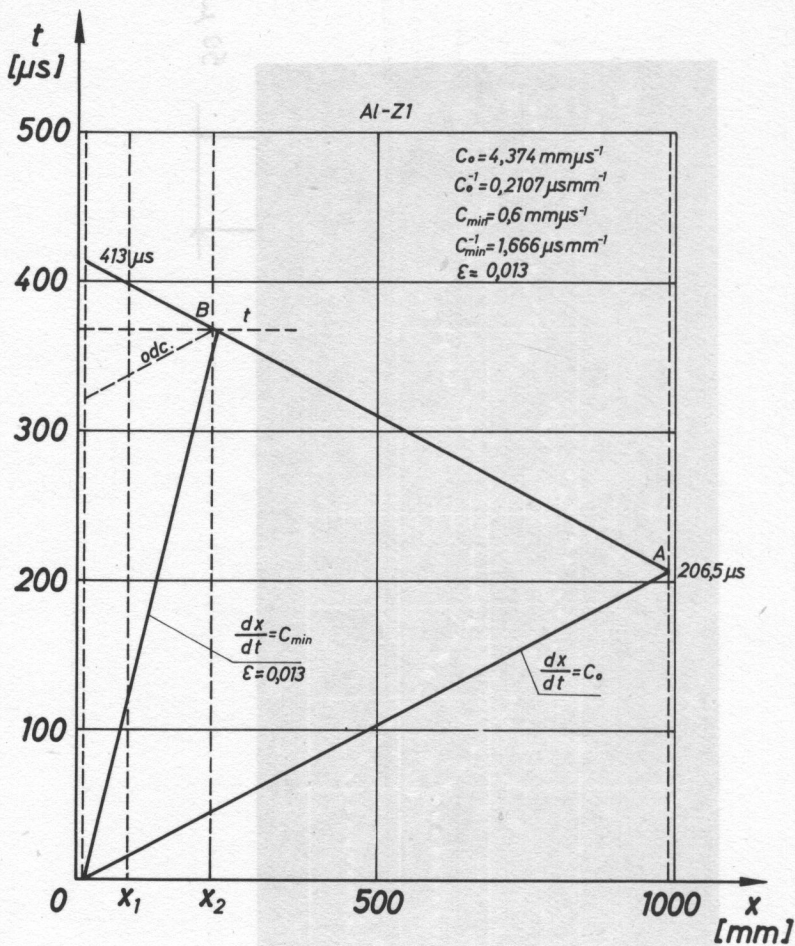


Rys. 6.10

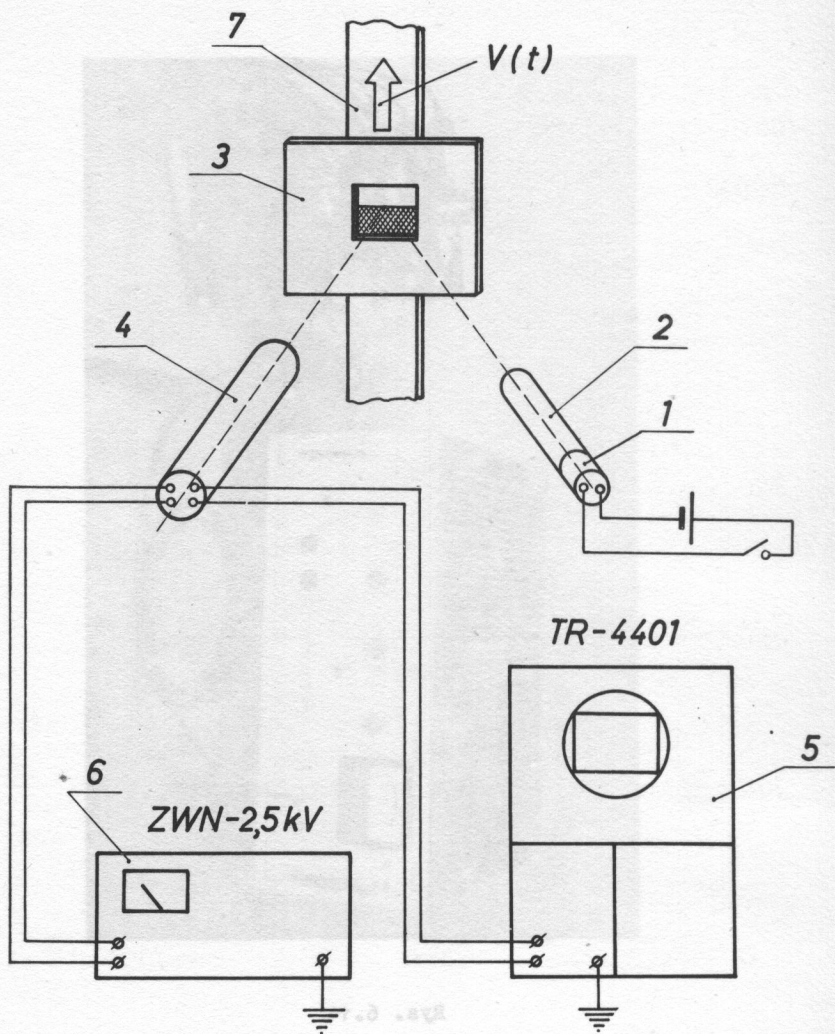


Rys. 6.11

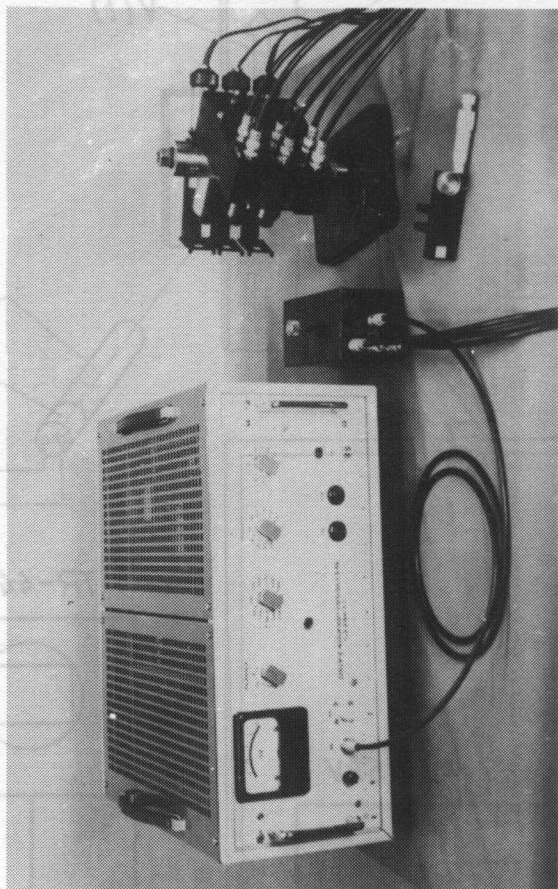
Rys. 6.12



Rys.6.12



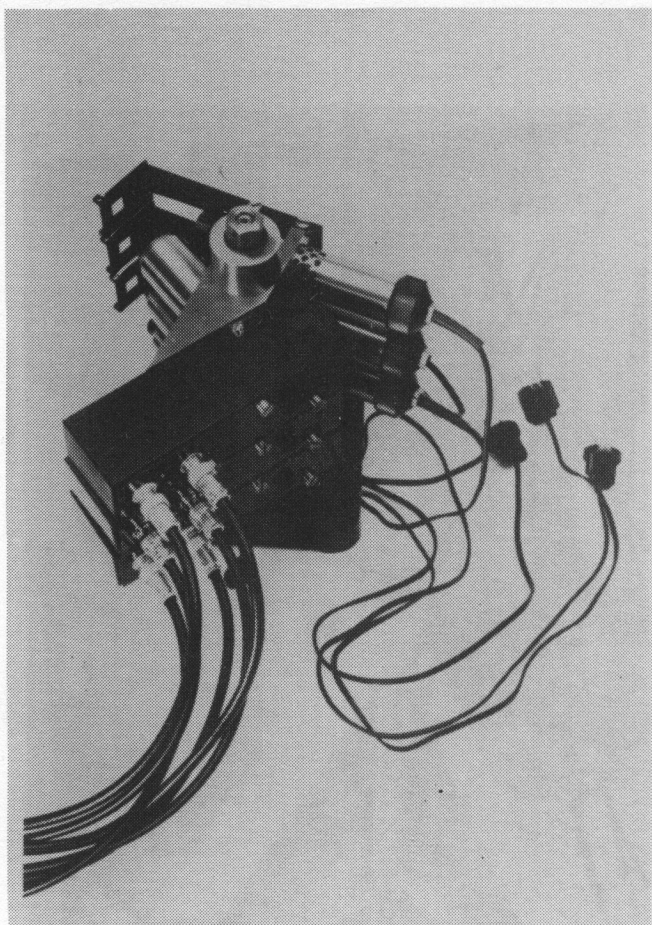
Rys.6.13



Rys. 6.14

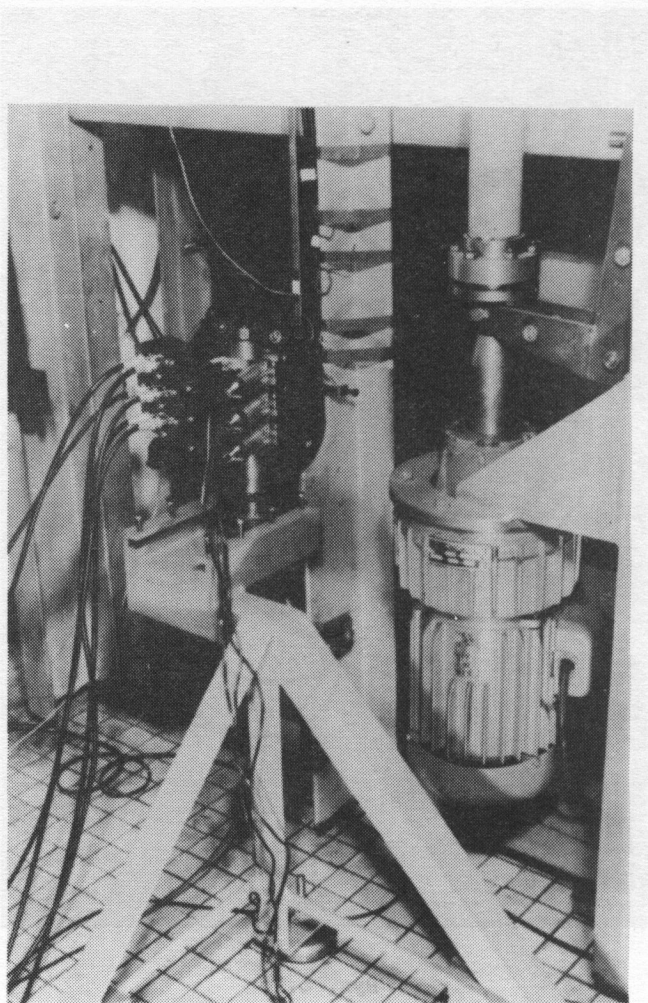
Rys. 6.13



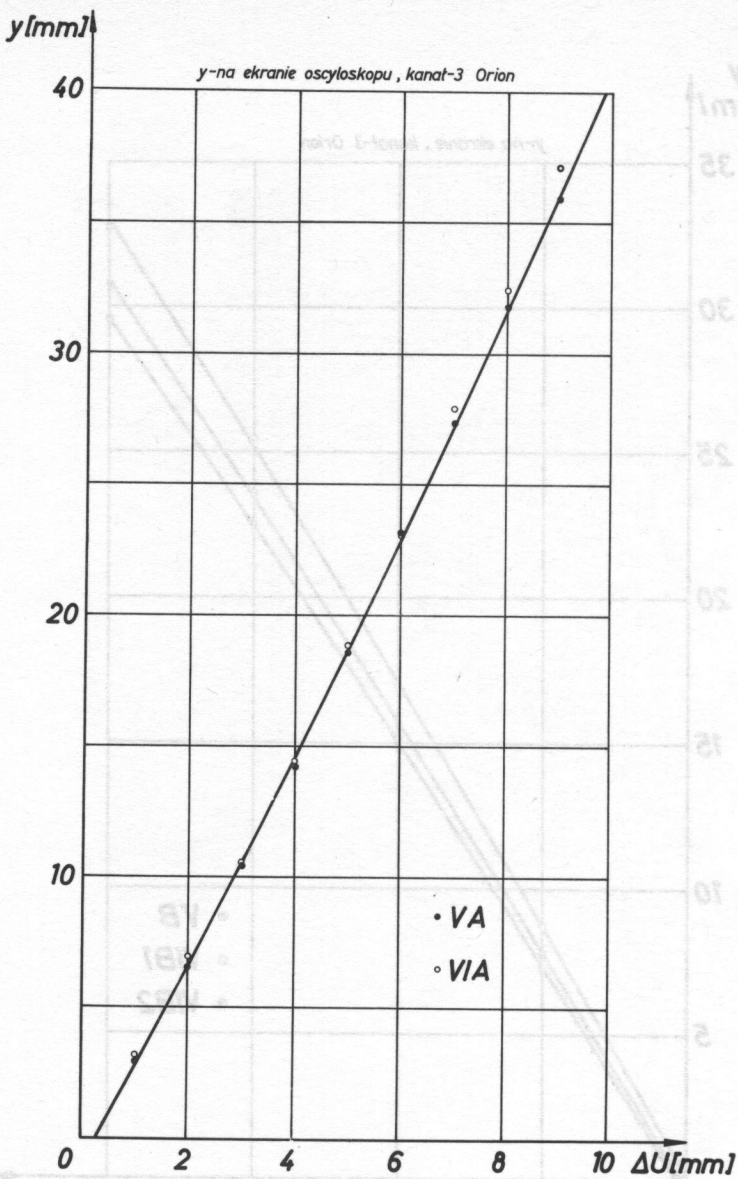


Rys. 6.15

21.3 .871



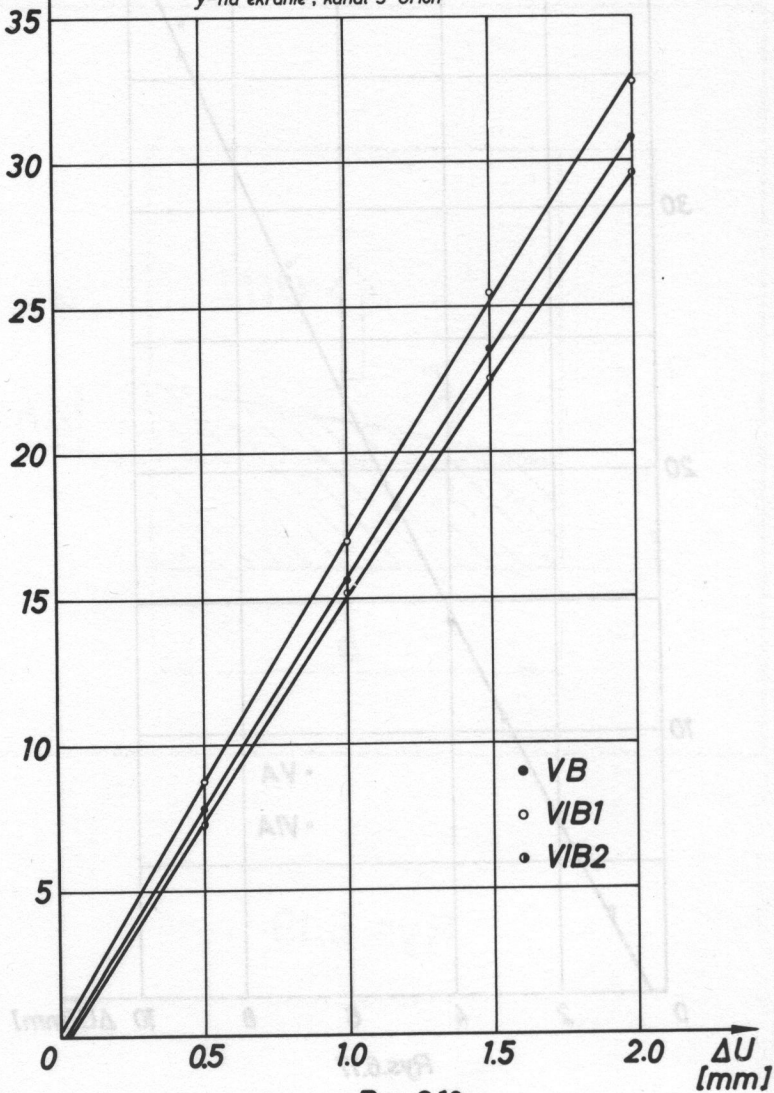
Rys. 6.16



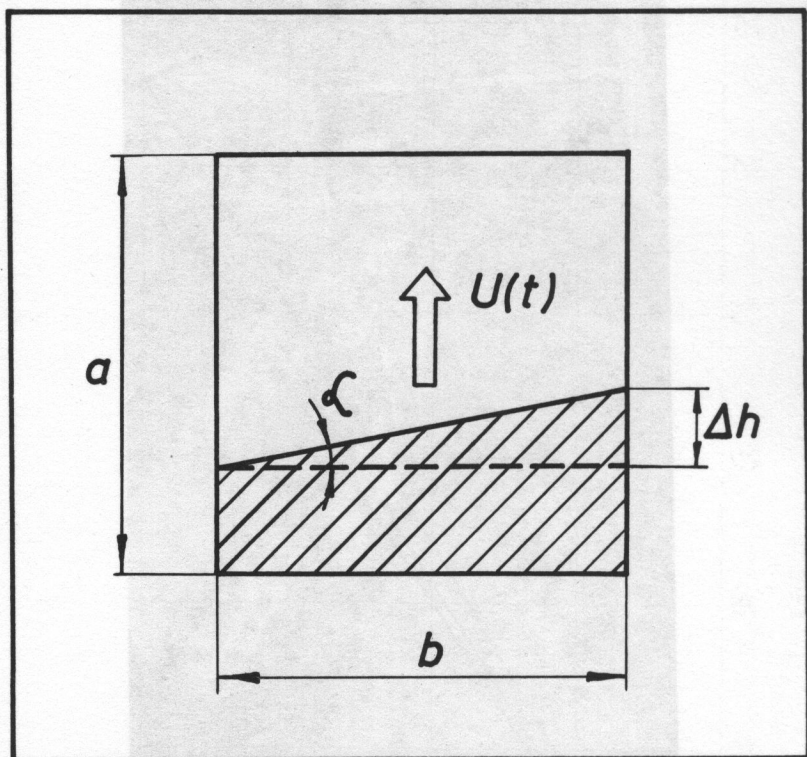
Rys.6.17

y  
[mm]

y-na ekranie , kanat-3 Orion

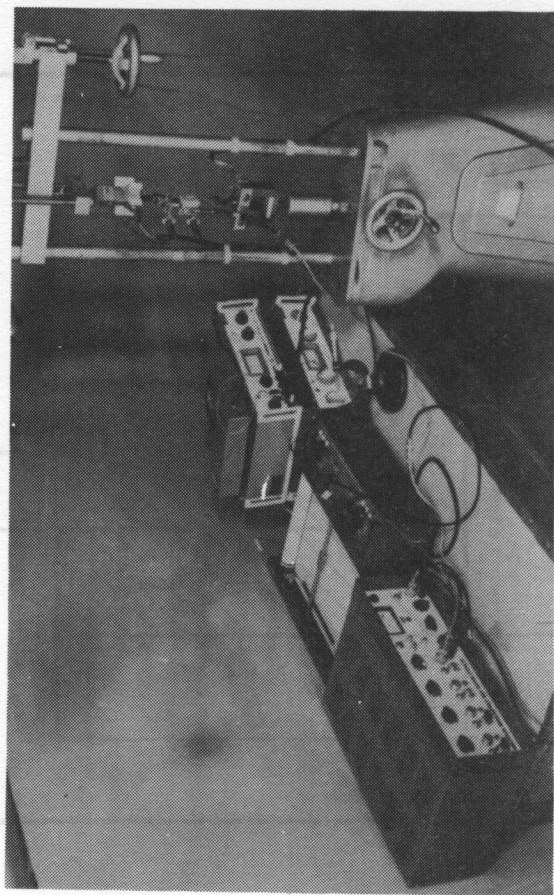


Rys.6.18



Rys. 6.19

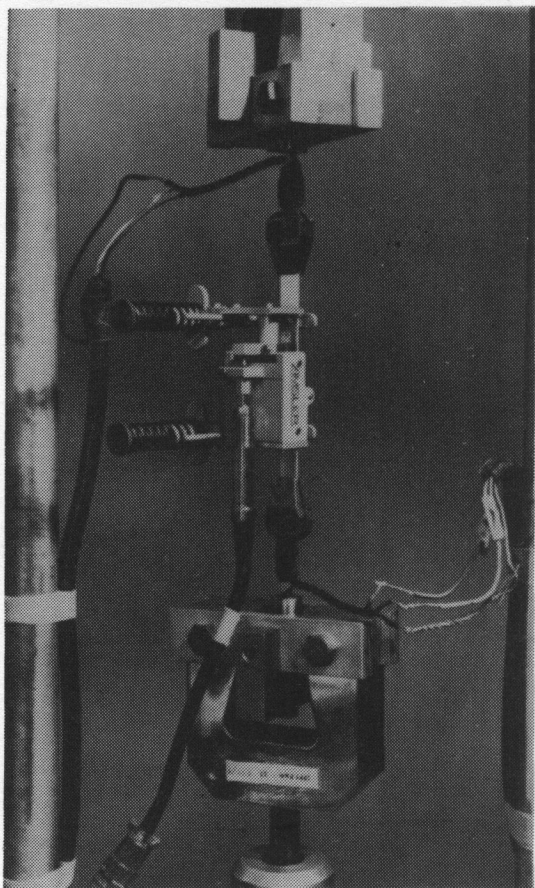




Rys. 6.20

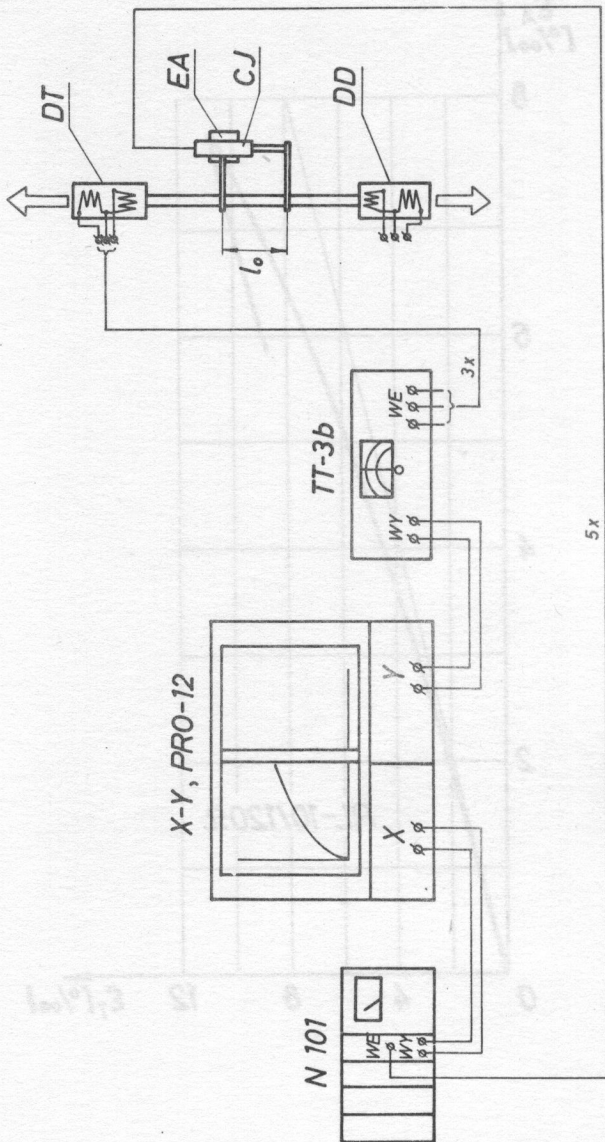


Rys. 6.21

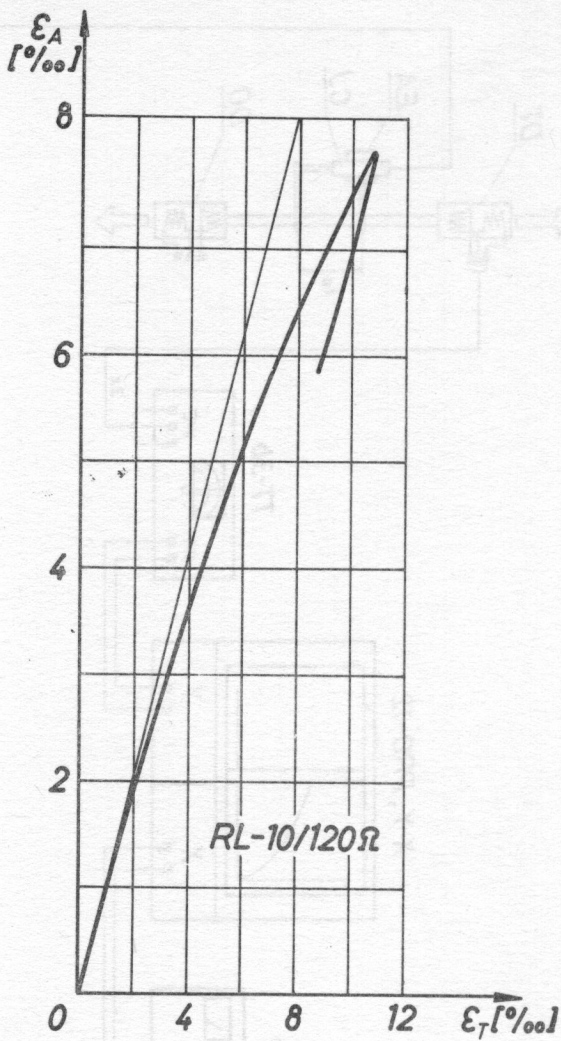


Rys. 6.22

Рис. 6.22

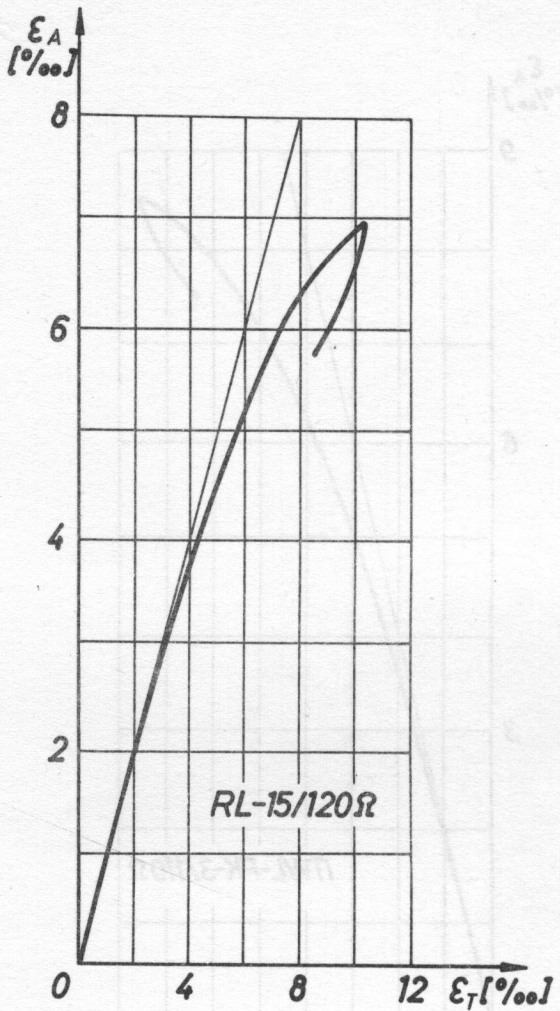


Rys.6.23

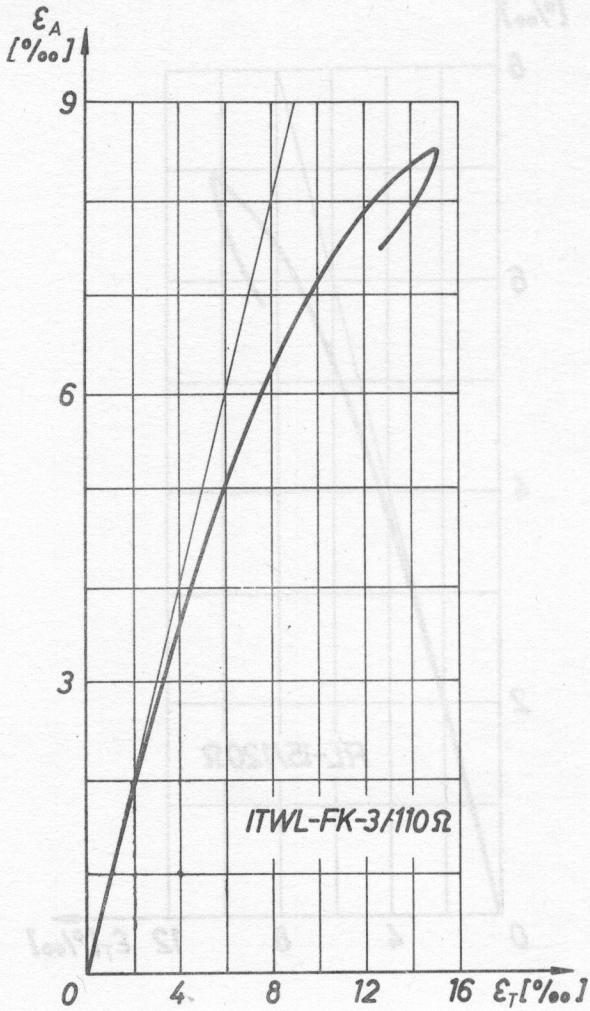


Rys.6.24

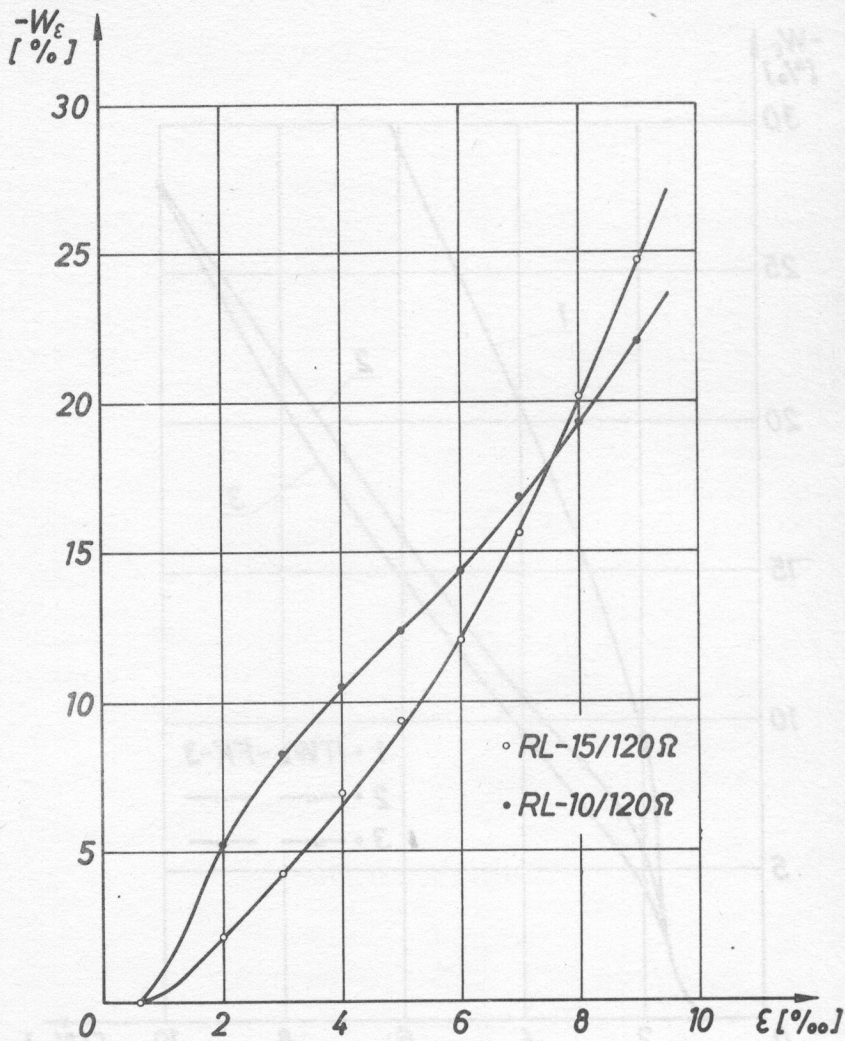




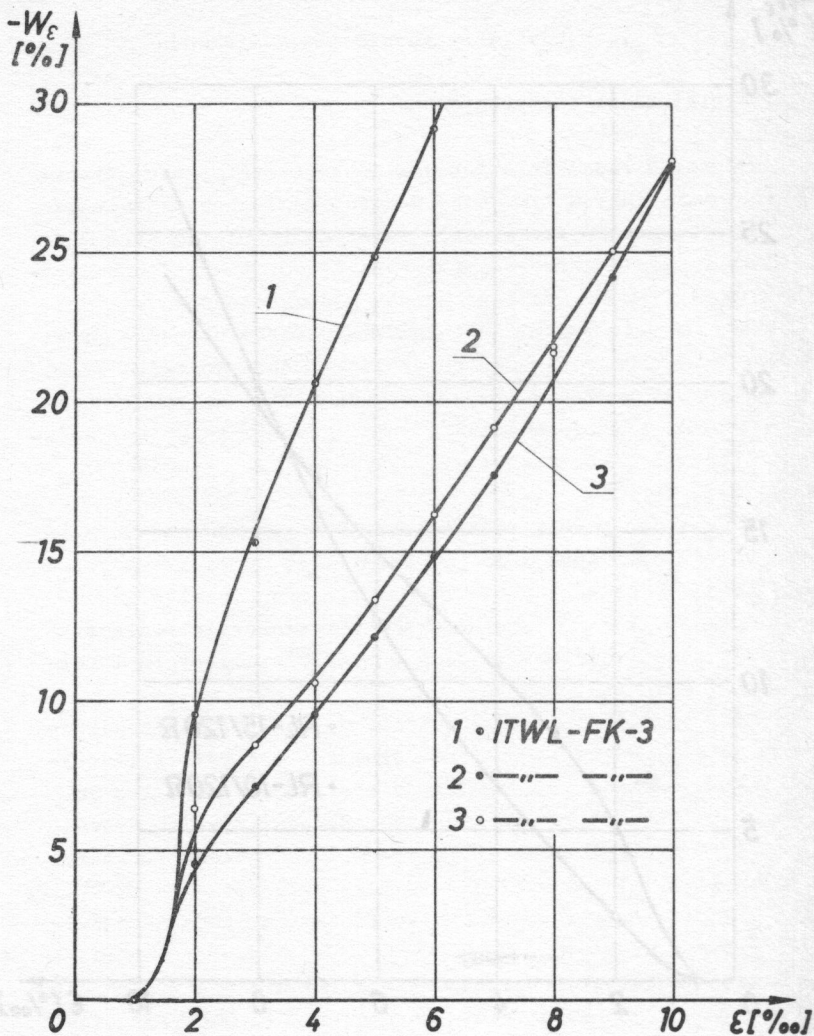
Rys.6.25



Rys.6.26



Rys.6.27



Rys.6.28

## 7. Wyniki doświadczeń i ich dyskusja

### 7.1. Wyniki badań statycznych

Zarówno do badań falowych jak i badań statycznych wybrano trzy materiały w tym jeden w dwóch odmianach. Mianowicie próbki wykonano z technicznie czystego aluminium 99,6 % Al, zarówno w stanie twardym jak i wyżarzonym, technicznie czystej miedzi oraz ze stalowej blachy głębokotłocznej w stanie dostawy. Krótkie próbki do badań statycznych uzyskano przez pocięcie uprzednio wykonanych długich próbek do badań falowych. Całkowita długość próbek do badań statycznych wynosiła  $\sim 150$  mm, a szerokość  $10^{\pm 0,01}$  mm, grubość natomiast zależała od użytego materiału:  $\varepsilon_{Al} = 1,40$  mm;  $\varepsilon_{Cu} = 0,45$  mm;  $\varepsilon_{st} = 0,52$  mm.

Tak uzyskane próbki poddawano próbie rozciągania na stanowisku opisanym uprzednio [5] otrzymując dokładne krzywe umocnienia. Baza ekstensometru Amslera z czujnikiem indukcyjnym wynosiła  $\sim 50$  mm. Prędkość odkształcenia podczas całego procesu rozciągania była w przybliżeniu stała i równa  $\dot{\varepsilon} \approx 1 \cdot 10^3$  s<sup>-1</sup>.

Krzywe umocnienia, które zostały w ten sposób wyznaczone dla aluminium w stanie twardym /oznaczenie Al-Z1/ przedstawiono na rysunkach od rys. 7.1 do rys. 7.3. Maksymalne odkształcenie całkowite dla badanych sześciu krzywych umocnienia nie były większe niż  $\varepsilon_{max} \approx 0,006$ . Wydłużenie równomierne dla aluminium w stanie twardym było rzędu  $\varepsilon_r \approx 0,012$ . Ze względu na mały rozrzut krzywe te zamieszczono na oddzielnych wykresach.

Krzywe umocnienia, wyznaczone z serii siedmiu próbek dla aluminium w stanie wyżarzonym /oznaczenie Al-Z0/ przedstawiono na rysunkach od rys. 7.4 do rys. 7.6. Również i w tym przypadku, ze względu na mały rozrzut uzyskane trzy krzywe z tej serii zamieszczono oddzielnie. Maksymalne odkształcenia



nie przekraczały wartości  $\epsilon_{\max} \approx 0,028$ . Na uwagę zasługuje bardzo niska granica uplastycznienia badanego aluminium w stanie miękkim, pierwsze pojawienie się odkształceń plastycznych obserwowane już przy naprężeniu  $\epsilon \approx 0,7 \text{ kg/mm}^2$ . Należy dodać, że próbki aluminiowe zostały wyżarzone w temperaturze  $450^\circ\text{C}$  w czasie 1 godz. i były studzone wraz z piecem.

Na rys. 7.7 przedstawiono uzyskane trzy krzywe umocnienia dla miedzi w stanie wyżarzonej /oznaczenie Cu-ZO/. Próbki zostały wyżarzone w temperaturze  $550^\circ\text{C}$  w czasie 1 godz. i studzone wraz z piecem. Rozrzut uzyskanych krzywych jest większy niż dla próbek aluminiowych, jest to prawdopodobnie spowodowane małą grubością próbek,  $g_{\text{Cu}} = 0,45 \text{ mm}$ , i możliwością łatwego uszkodzenia próbki w momencie zakładania do uchwytów na stanowisku badawczym. Rozrzut znacznie się zmniejsza dla odkształceń większych niż  $\epsilon > 0,005$ . Maksymalne odkształcenie dla tej serii wynosiło  $\epsilon_{\max} \approx 0,028$ .

W ostatniej serii prób statycznych wyznaczono krzywe umocnienia dla blachy głębokotłoczonej w stanie dostawy, oznaczonej umownie na rysunkach przez st. Trzy krzywe umocnienia z serii sześciu prób przedstawiono na rysunkach od rys. 7.8 do rys. 7.10. Na uwagę zasługuje bardzo mała zdolność do umacniania się badanego materiału w stanie plastycznym. pomimo małego umocnienia, próbki odkształcały się bez utraty stateczności, nawet do odkształcenia rzędu 30 %. Nie zaobserwowano także zjawiska dolnej i górnej granicy plastyczności pomimo, że badania przeprowadzono na maszynie typu kinematycznego.

Tak małe umocnienie badanej stali implikuje bardzo małe prędkości propagacji fal plastycznych w porównaniu z pozostałymi badanymi materiałami.

Zgodnie z teorią TKR i wynikającą z niej zależnością /3.6/ na prędkość propagacji fali plastycznej C, uzyskane statyczne krzywe umocnienia zostały zróżniczkowane i nas-

teżnie obliczono teoretyczne prędkości propagacji  $C$  w funkcji odkształcenia  $\varepsilon$  tj. zależności  $C/\varepsilon$ . Uzyskane tak zależności  $C/\varepsilon$  dla pięciu próbek aluminiowych w stanie twardej /Al-Z1/ przedstawiono na rys. 7.11. Na rys. 7.12 przedstawiono zależność  $C/\varepsilon$  dla aluminium w stanie wyżarzonym /Al-Z0/ uzyskaną dla trzech próbek. Analogiczną zależność dla miedzi w stanie wyżarzonym /Cu-Z0/ przedstawiono na rys. 7.13. Wreszcie zależności  $C/\varepsilon$  dla trzech próbek stalowych z blachy głębokotłocznej podano na rys. 7.14. Przedstawione zależności dla wszystkich badanych materiałów stanowią bazę dla porównań z wynikami uzyskanymi na drodze pomiaru propagacji fal sprężysto-plastycznych. Na wszystkich wykresach przedstawiających zależność  $C/\varepsilon$  daje się zauważyć trzy obszary prędkości propagacji. Pierwszy, który jest obszarem sprężystej reakcji materiału, fale propagują się z prędkością dźwięku  $C_0$ . Dla materiałów wyżarzonych obszar ten jest niewielki i ogranicza się do bardzo małych odkształceń  $\varepsilon < 0,001$ . Drugi obszar charakteryzuje się gwałtownym zmniejszeniem się prędkości propagacji. W trzecim przedziale, charakterystycznym dla zaawansowanych odkształceń plastycznych, zmniejszanie się prędkości propagacji przy wzroście odkształceń jest stosunkowo nieznaczne.

## 7.2. Pomiary prędkości fali sprężystej $C_0$

W pierwszym etapie badań zmierzono dokładnie gęstości  $\rho$  badanych materiałów. Pomiary dokonywane w ten sposób, że dla grupy próbek do badań statycznych o długości około 120 mm przeprowadzono pomiar ich masy poprzez dokładne zważenie. Następnie mierzone możliwie dokładnie objętość zważonych próbek poprzez równoczesne zanurzenie ich w menzurce z mieszaniną wody i filponu /dla zlikwidowania zbyt wklęsłego menisku/. Tak wyznaczone gęstości badanych materiałów wynoszą:

$$\rho_{Al} = 2,682 \pm 0,0155 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$$

$$\rho_{Cu} = 8,8836 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$$

$$\rho_{st} = 7,700 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}.$$

Ponadto podczas badań statycznych wyznaczano moduł Younga  $E$  poprzez kilkakrotne obciążanie próbek poniżej granicy plastyczności i rejestrowanie pochylenia wykresów na rejestratorze X - Y. Otrzymane wartości dla danego materiału uśredniano otrzymując następujące wartości modułów  $E$

$$E_{Al} = /0,61602 \pm 0,00338/ \cdot 10^4 \text{ [kG mm}^{-2}\text{]}$$

$$E_{Cu} = 1,0994 \cdot 10^4 \text{ [kG mm}^{-2}\text{]}$$

$$E_{st}^0 = 2,0171 \cdot 10^4 \text{ [kG mm}^{-2}\text{]}$$

Na uwagę zasługuje stwierdzona różnica modułów  $E$  wyznaczonych dla stali w dwóch przypadkach. W pierwszym moduł wyznaczony przed deformacją plastyczną próbki i ta wartość średnia  $E_{st}$  została podana wyżej. W przypadku drugim moduł  $E$  wyznaczano również dla próbek poddanych odkształceniu plastycznemu rzędu  $\xi \approx 2\%$ . Zaobserwowane zmniejszenie się modułu do wartości średniej  $E_{st}^*$ .

$$E_{st}^* = 1,7252 \cdot 10^4 \text{ [kG mm}^{-2}\text{]}.$$

Względne zmniejszenie  $\frac{E^0}{E^*}$  wynosi około 17%. Fakt ten jest zgodny z obserwacjami poczynionymi w pracy [2] i prowadzi do wniosku, że sam fakt deformacji plastycznej w stali może prowadzić do widocznego zmniejszenia prędkości propagacji fal sprężystych.

Tak wyznaczone wartości  $\rho$  i  $E$  dla wszystkich badanych materiałów służyły następnie do wyznaczenia teoretycznej wartości prędkości propagacji fal sprężystych  $C_0$  ze wsoru /3.5/, stąd

$$/C_o/A1 = 4746,0 \pm 26,7 \quad [ms^{-1}]$$

$$/C_o/Cu = 3483,6 \quad [ms^{-1}]$$

$$/C_o^{st} = 5068,6 \quad [ms^{-1}]$$

Następnie prędkości  $C_o$  wyznaczano z pomiarów dynamicznych na długich próbkach i porównywano je z wartościami teoretycznymi podanymi wyżej. Na długich próbkach do tego rodzaju pomiarów klejono jedynie po dwa tensometry umieszczając je w taki sposób, aby podczas pomiaru pierwszej fali nie zachodziły odbicia. Dla wyznaczenia odpowiednich pozycji czujników posługiwano się charakterystykami na płaszczyźnie fazowej zgodnie z rys. 6.12. Prędkości  $v_d$  dobierano w ten sposób, aby nie przekroczyć granicy plastyczności danego materiału  $\sigma_e$

$$(v_d)_{max} = \frac{\sigma_e}{\rho C_o}$$

stąd próbki przeznaczone do pomiaru  $C_o$  można było używać wielokrotnie. Uzyskane escylogramy mierzone na mikroskopie pomiarowym z dokładnością  $\pm 0,001$  mm i dla trzech poziomów naprężeń na czole fali sprężystej obliczono  $C_o$ , następnie wyniki uśredniano. Stwierdzono, że tak zmierzone średnie prędkości  $C_o$  są z reguły od 1 do 2 procent wyższe od obliczeniowych i tak dla stali /blacha głębokotłoczona/ nieodkształconej wstępnie plastycznie otrzymano  $C_o = 5147,1 \text{ ms}^{-1}$  co daje procentowy wzrost prędkości propagacji o 1,6%. Nie zauważono istotnych zmian prędkości propagacji dla różnych poziomów naprężeń.

### 7.3. Pomiary czoła fali plastycznej

Zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 6.7 dysponowane czterema kanałami tensometrycznymi zapewniającymi pomiar i rejestrację czoła przemieszczającej się fali sprężys-

to-plastycznej dla czterech wartości współrzędnej Lagrange'a X. Zastosowanie tensometrii elektrooporowej narzuciło pewne ograniczenia na program prac doświadczalnych. I tak, analiza błędów przeprowadzona uprzednio [4] doprowadziła do wniosku, że dokładne wyznaczenie dynamicznej krzywej umocnienia ze stanu próbki wstępnie nieobciążonej, tj. ze stanu  $\sigma = 0$ , jest w zastosowanej metodzie niemożliwe. Wpływa stąd kolejny wniosek, że jedyną możliwą metodą wyznaczania w obecnych warunkach dynamicznych krzywych umocnienia jest posłużenie się pomiarem fali deciążania nałożonej na stan aktywnego statycznego obciążania. Jednak zakres odkształceń w jakim mogą być prowadzone doświadczenia jest ograniczony ze względu na zachowanie się zastosowanych tensometrów elektrooporowych w stanie plastycznym, do odkształceń  $0 \leq \epsilon \leq 0,8\%$ .

W tej sytuacji ograniczone się do pomiarów fali deciążania dla aluminium w stanie wyżarzonym /Al-ZO/, miedzi w takim samym stanie /Cu-ZO/ oraz blachy głębokotłoczonej /oznaczonej przez st/. Nie badane natomiast próbek aluminiowych wykonanych z materiału w stanie dostawy, a to ze względu na pękanie uchwytów w badaniach dynamicznych. Również ze względu na skomplikowany charakter badań ograniczono się do kilku wartości odkształcenia wstępnego  $\epsilon_w$ , przy którym generowane fale deciążania. Na czole fali deciążania mierzono natomiast odkształcenia dodatkowe  $\epsilon_d$ .

Do tego rodzaju pomiarów zastosowano schemat przedstawiony na rys. 6.7. Ponadto na długiej próbce w pobliżu dynamometru do pomiarów statycznych 4 naklejano osujnik elektrooporowy RL-15/120  $\Omega$ . Podczas wstępnego powolnego rozciągania długiej próbki osujnikiem RL-15 wraz z mostkiem prod. Wamel typu TT-4 mierzono odkształcenie, natomiast dynamometrem 4 wraz z mostkiem TT-3b mierzono bieżącą wartość siły rozciągającej próbkę. Sygnały napięciowe z mostków, proporcjonalne do odkształcenia i naprężenia podawane odpowiednie na wejścia X i Y rejestratora PRO-12. W ten sposób rejestro-



wane statyczną krzywą umocnienia danej próbki bezpośrednio przed generacją fali dociążania. W pewnym wybranym momencie następowało uderzenie młota rotacyjnego z prędkością  $v_d$ , która była mierzona układem omówionym uprzednio. Ramię młota wyzwalające podstawę czasu zgodnie ze schematem z rys. 6.7 i rejestrowano przebieg fali dociążania dla czterech wartości współrzędnej X uzyskując  $\mathcal{E}_d/x, t/x$ .

Na przykład kształt fali dociążania dla badanej stali przedstawione na rys. 7.15 i rys. 7.16,  $\mathcal{E}_w \approx 0,0035$ ;  $\dot{\mathcal{E}} \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Na podstawie kształtu zamieszczonych esylogramów można stwierdzić, że w tym przypadku reakcja materiału jest prawie wyłącznie sprężysta.

Jako następny krok, oscylogramy uzyskane w ten sposób mierzone na mikroskopie pomiarowym uwzględniając następnie indywidualne wzmocnienie każdego kanału pomiarowego poprzez pewien mnożnik otrzymany z cechowania. Obrobione w taki sposób dane nanieszone na płaszczyznę o współrzędnych  $|\mathcal{E}_d, t/$  otrzymując czoła fal dociążania po korekcy, równocześnie pomijane zarejestrowaną część fali nie będącą przedmiotem pomiarów. Czoło fali dociążania dla Al-ZO i  $\mathcal{E}_w = 0,0069$  po przeprowadzonej korekcy przedstawione na rys. 7.17. Profile fali dociążania przedstawione na rys. 7.17 stanowiły podstawę do otrzymania szukanych zależności prędkości propagacji C w funkcji odkształcenia dodatkowego  $\mathcal{E}_d$ ; tj.  $C/\mathcal{E}_d$ . W tym celu dla obranego poziomu odkształcenia i dla czterech zarejestrowanych przebiegów otrzymywane trzy wartości prędkości propagacji, które następnie uśredniano otrzymując C dla danej wartości  $\mathcal{E}_d$ . Korzystano przy tym ze wzorów:

$$C_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}$$

gdzie:  $n = 1, 2, 3,$   
 $\mathcal{E}_d = \text{const} \quad / 7.17$

i następnie

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\chi_{i+1} - \chi_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad \text{gdzie: } n = 1, 2, 3, \\ \varepsilon_d = \text{const}, \quad /7.2/$$

$n + 1$  jest liczbą kanałów pomiarowych, a tym samym liczbą równocześnie rejestrowanych przebiegów. Dla obecnego przypadku  $n + 1 = 4$ .

Otrzymane w ten sposób wyniki dla trzech próbek aluminiowych Al-ZO przy trzech różnych wartościach odkształceń wstępnych  $\varepsilon_w$  przedstawiono na rysunkach od rys. 7.18 do rys. 7.20. Przerzywaną linią poziomą zaznaczono obliczeniową wartość  $C_0$ . Zaznaczone także prędkości propagacji, które wynikają z teorii TKR przy odkształceniu wstępnym  $\varepsilon_w = 0$ . Wykorzystane tu dane uzyskane uprzednio i przedstawione na rys. 7.12. Na podstawie wszystkich trzech wyników można stwierdzić, że w przypadku fali dociążania propaguje się najpierw mała część z prędkością zbliżoną do prędkości  $C_0$ , tzw. prekursor, a następnie część o znacznie mniejszych prędkościach propagacji, jednak są one znacznie większe niżby to wynikało z teorii TKR dla  $\varepsilon_w = 0$ . Należy dodać, że prędkości propagacji na czole fali deciążania gwałtownie maleją wraz ze wzrostem  $\varepsilon_d$  i prawdopodobnie dla większych odkształceń  $\varepsilon_d$  zmiierają asymptotycznie do wartości wyznaczonych z teorii TKR dla  $\varepsilon_w = 0$ .

Analogiczne eksperymenty przeprowadzono dla miedzi Cu-ZO, a otrzymane wyniki dla dwóch wstępnych wartości odkształceń przedstawiono na rys. 7.21 i rys. 7.22. Przebiegi zależności  $C/\varepsilon_d$  są zupełnie podobne jak dla aluminium Al-ZO. Również i w tym przypadku podane na rysunkach prędkości propagacji, które wynikają z teorii TKR dla danego poziomu odkształceń. Wykorzystano przy tym dane z rys. 7.13. Podobne zachowanie się aluminium i miedzi wynika prawdopodobnie z faktu, że obydwa metale należą do grupy A1, a więc metali o sieci regularnej płaskocentrowanej.

Wyniki pomiarów prędkości propagacji fali dociążania dla blachy głębokotłocznej przy dwóch wartościach odkształceń

wstępnych  $\mathcal{E}_w$  przedstawione na rys. 7.23 i rys. 7.24. Uzyskane wyniki wskazują na odmienny charakter kształtu zależności  $C/\mathcal{E}_d'$  dla badanej stali w porównaniu z wynikami dla aluminium i miedzi. Reakcja materiału na falę dociążania jest w dużej mierze sprężysta, a więc prekursor tj. sprężysta część fali, wykazuje bardzo dużą wartość. Jednak prekursor przemieszcza się z nieco mniejszą prędkością niż obliczeniowa wartość prędkości propagacji fal sprężystych  $C_0$ , która została zaznaczona poziomą linią przerywaną. Fakt ten jest najprawdopodobniej spowodowany wspomnianym uprzednio zmniejszeniem się modułu Younga  $E$  dla stali po wstępnym odkształceniu plastycznym. Na rys. 7.23 i rys. 7.24 obserwuje się także gwałtowne zmniejszanie się prędkości propagacji dla większych odkształceń dodatkowych  $\mathcal{E}_d$ . Tak jak i poprzednie, na rysunkach zaznaczone prędkości propagacji wynikające z teorii TKR dla danego poziomu odkształceń przy  $\mathcal{E}_w = 0$ . W tym przypadku wykorzystane dane z rys. 7.14.

Wniosek ze wszystkich przeprowadzonych eksperymentów pomiaru prędkości propagacji fal dociążania jest stwierdzenie, że zmierzane prędkości propagacji zawierają się pomiędzy obliczeniową prędkością propagacji fal sprężystych  $C_0$ , a prędkościami wynikającymi z teorii TKR dla  $\mathcal{E}_w = 0$ .

#### 7.4. Dynamiczne krzywe umocnienia

Otrzymane zależności  $C/\mathcal{E}_d'$  stanowiły podstawę do wyznaczenia dynamicznych krzywych umocnienia przy dociążaniu dla badanych metali. Do tego celu wykorzystano zależność /5.34/ oraz algorytm /5.38/. Właśnie operacja omówiona uprzednio tj. wyznaczenie  $C/\mathcal{E}_d'$  stanowi pierwszą operację algorytmu /5.38/. Dalej, zgodnie z drugą operacją algorytmu /5.38/ otrzymane rzędne zależności  $C/\mathcal{E}_d'$  dla kolejnych próbek podnoszone do kwadratu otrzymując zależności  $C^2/\mathcal{E}_d'$  i następnie według operacji 4 wykonywano numeryczne całkowanie

otrzymując bieżące wartości  $\sigma_d$ . Należy jednak pamiętać, że otrzymana w ten sposób krzywa umocnienia jest krzywą przyrostową i całkowite odkształcenie wynosi

$$\varepsilon = \varepsilon_w + \varepsilon_d \quad \text{lub} \quad \varepsilon = \varepsilon_w + C^{-1} \left( \frac{x}{z} \right), \quad 17.3$$

Również stwierdzenie to odnosi się do naprężeń, stąd

$$\sigma = \sigma_w + \sigma_d \quad \text{lub} \quad \sigma = \sigma_w + \rho \int_0^{\varepsilon_d} C^2(\varepsilon_d) d\varepsilon_d, \quad 17.4$$

gdzie  $\varepsilon_w$ ,  $\varepsilon_w / \dot{\varepsilon}_w$  wyznacza punkt statycznej krzywej umocnienia, w którym nastąpiło dynamiczne dociążenie. Statyczne krzywe umocnienia wyznaczane w przybliżeniu ze stałą prędkością odkształcenia wstępnego  $\dot{\varepsilon}_w \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . W tym świetle krzywe przyrostowe należy traktować jako reakcje materiału na dociążenie dynamiczne i tym samym przejście na inną krzywą umocnienia odpowiadającą innej znacznie większej prędkości odkształcenia. Świadczy to o istnieniu wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia.

Wyznaczone trzy krzywe przyrostowe dla aluminium Al-ZO wraz ze średnią krzywą statyczną przedstawione na rys. 7.25. Z profilu fali dociążania wyznaczone dla krzywych przyrostowych średnie prędkości odkształcenia, patrz rys. 7.17. Można uważać, że obwiednia krzywych przyrostowych wyznacza z pewnym przybliżeniem część dynamicznej krzywej umocnienia dla większego obszaru odkształceń. Krzywa ta została przedstawiona linią przerywaną. Należy usnać, że jest to krzywa umocnienia uzyskana przy średniej prędkości odkształcenia wyznaczonej z krzywych przyrostowych, na przykład dla Al-ZO  $\dot{\varepsilon} = 1,31 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$ . Stąd stosunek prędkości odkształcenia dla dwóch wyznaczonych na rys. 7.25 krzywych umocnienia wynosi

$$\chi = 1,31 \cdot 10^5,$$

a więc pięć rzędów dziesiętnych. Kolejne wartości  $\varepsilon_w$  zaznaczono na rys. 7.25 pionowymi liniami przerywanymi. W taki sposób wyznaczono przyrostowe krzywe umocnienia dla miedzi Cu-20 przy dwóch wartościach odkształcenia wstępnego. Podstawą do wyznaczenia tych krzywych były zależności  $C/\varepsilon_d$  podane na rys. 7.21 i rys. 7.22. Otrzymany wynik na tle statycznej krzywej umocnienia uzyskanej dla  $\dot{\varepsilon} \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , przedstawiono na rys. 7.26. Kształt krzywych przyrostowych jest podobny jak w przypadku aluminium. Jako krzywą asymptotyczną wyznaczono część dynamicznej krzywej umocnienia dla większego zakresu odkształceń,  $1 \cdot 10^{-3} < \dot{\varepsilon} < 7 \cdot 10^{-3}$ . Krzywą tą zaznaczono linią przerywaną. Pionowymi liniami przerywanymi zaznaczono wartości odkształceń wstępnych  $\varepsilon_w$ . Stosunek prędkości odkształcenia pomiędzy wyznaczonymi dwiema krzywymi wynosi  $\chi = 1,96 \cdot 10^5$ .

Również zgodnie z algorytmem /5.38/ i wyznaczonymi zależnościami  $C/\varepsilon_d$  na rys. 7.23 i rys. 7.24 otrzymane przyrostowe krzywe umocnienia dla badanej stali /blacha głębokotłoczna/. Dwie krzywe przyrostowe wraz z krzywą statyczną przedstawiono na rys. 7.27. Inny kształt zależności  $C/\varepsilon_d$  dla badanej stali implikuje inny kształt wyznaczonych krzywych przyrostowych w porównaniu do aluminium lub miedzi. Zgodnie z przewidywaniami, obserwuje się prawie wyłącznie reakcję sprężystą, ostatnia część krzywej przyrostowej stanowi gwałtowne przejście w obszar plastyczny. Należy na tej podstawie sądzić o niedużej zdolności do dalszego umacniania się badanej stali. Stąd wyznaczona asymptotyczna krzywa umocnienia, którą zaznaczono na rys. 7.27 linią przerywaną, nie wykazuje aby materiał umacniał się intensywnie w warunkach dynamicznych. Natomiast przyrost naprężenia dla stosunku prędkości odkształceń  $\chi = 1,38 \cdot 10^5$  jest znaczny i wynosi około 44,8 % naprężenia plastycznego płynięcia statycznej krzywej umocnienia. Fakt ten wskazuje na dużą wrażliwość na prędkość odkształcenia badanej blachy głębokotłocznej.



W sumie zachowanie się badanej stali znacznie różni się od zachowania aluminium lub miedzi.

## 7.5. Dyskusja i wnioski

Wydaje się, że przedstawione wyniki potwierdzają użyteczność zaproponowanej w algorytmie /5.38/ metody wyznaczania dynamicznych krzywych umocnienia z pomiaru fal przyspieszenia na długich próbkach. Metoda ta może być zastosowana dla całego obszaru odkształceń statycznych próbki o ile tensometry elektrooporowe byłyby w stanie mierzyć tak zaawansowane odkształcenia plastyczne. W obecnych badaniach ograniczono się do zakresu odkształceń  $0 < \xi < 0,008$ .

Skonstruowane czujniki z fotopowielaczami pozwalają na uniknięcie ograniczenia się do zakresu małych odkształceń plastycznych w wyznaczaniu przyrostowych krzywych umocnienia. Wówczas należałoby wykorzystać algorytm /5.39/. Ze względu na skomplikowany charakter pomiarów i dużą pracochłonność w opracowaniu wyników, w niniejszej pracy ograniczono się do wykorzystania tensometrii elektrooporowej.

Uzyskane wyniki, a w szczególności otrzymane prędkości propagacji fal dociążania  $C/\varepsilon_d$  są zgodne z przewidywaniami o wpływie efektów historii prędkości odkształcenia przedyskutowanych uprzednio [3]. Rysunki od rys. 7.18 do rys. 7.24 wskazują, że prędkości propagacji zawierają się pomiędzy wartościami  $C_0$  a prędkościami wyznaczonymi z teorii TER dla  $\Sigma_w = 0$ , co przy niewielkich zmianach prędkości odkształcenia na osi fali i małych wartościach współrzędnej  $x$ , wskazuje na istnienie efektów wywołanych historią prędkości odkształcenia. Fakt ten świadczy o innym stopniu umocnienia materiału poddanego odkształceniu z małą i dużą prędkością do jednakowej wartości odkształcenia. Jednak początek przejścia na nową krzywą umocnienia po dynamicznym dociążeniu odbywa się zawsze zgodnie z prawem Hooke'a, gdyż zmie-

rsone prędkości prekursorów są zawsze bliskie prędkości fali sprężystej  $C_0$ . Ta obserwacja została ostatnio potwierdzona w pracy [1], gdzie mierzono prędkości prekursorów przy ścinaniu z użyciem długich próbek rurkowych. Badania przeprowadzono na aluminium, miedzi i miękkiej stali, jednak wartości odkształceń wstępnych były znacznie większe w porównaniu z pracą obecną.

W pracy [6], która również została ostatnio opublikowana wyznaczono cztery przyrostowe krzywe umocnienia dla miedzi, jednak eksperymenty przeprowadzono ze stanu pełzania próbki. Pomimo, że jako stan początkowy przed dynamicznym dociążeniem obrano stan pełzania, otrzymane wyniki we wspomnianej pracy zgadzają się jakościowo z wynikami zamieszczonymi na rys. 7.26.

Droga obciążania materiału zastosowana w obecnie omówionych doświadczeniach, tj. wstępne statyczne odkształcenie plastyczne, a następnie dynamiczne dociążenie, jest spotykana w procesach tłoczenia wybuchowego. Przy czym może to być zarówno proces gdy dociążenie jest nałożone na wstępny aktywny stan plastyczny, to znaczy dociążenie następuje w punkcie  $15$  w  $\epsilon_w \epsilon_w$ , jak również gdy po wstępnym odkształceniu plastycznym materiału następuje całkowite odciążenie, a następnie zachodzi ponowne dynamiczne dociążenie. Przedstawione na rys. 7.25 i rys. 7.26 wyniki prowadzą do wniosku, że podczas ponownego dynamicznego dociążenia zachodzi łagodne przejście na krzywą umocnienia charakterystyczną dla dynamicznego procesu deformacji. Jest to szczególnie widoczne dla aluminium i miedzi, a więc metali o sieci regularnej płaskocentrowanej. W tym przypadku granica ponownego uplastycznienia jest niższa niż to wynikałoby z punktu przecięcia prostej  $\sigma = E \epsilon_d$  z dynamiczną krzywą umocnienia na płaszczyźnie  $15$ ,  $\epsilon_d$ . Jednocześnie podczas dalszej deformacji zachodzi bardziej intensywne umocnienie, a więc moduł styczny jest duży, co może z kolei prowadzić do znacznego ustaczenia procesu deformacji.

Zachowanie się badanej stali przedstawione na rys. 7.27 nieco różni się od podanego wyżej opisu. Reakcja badanej blachy głębokotłocznej na ponowne dociążenie dynamiczne jest prawie wyłącznie sprężysta, a następnie zachodzi gwałtowne przejście na dynamiczną krzywą umocnienia. Dynamiczna krzywa umocnienia nie wykazuje z kolei zdolności materiału do intensywnego umacniania się. Fakt ten wskazuje na niewielki uształcający wpływ dynamicznego procesu deformacji przy dociążaniu dla badanej blachy.

Ponieważ wyznaczone dynamiczne krzywe umocnienia leżą wyżej od statycznych, przeto całkowita praca  $W$  dysypowana w procesie deformacji plastycznej w warunkach dynamicznych i potrzebna do osiągnięcia danego odkształcenia  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_w + \mathcal{E}_d$  może być znacznie większa niż dla warunków statycznych. Całkowitą pracę można obliczyć z zależności

$$W = \int_V \int_0^{\mathcal{E}_w + \mathcal{E}_d} \sigma[\mathcal{E}, \dot{\mathcal{E}}(\mathcal{E})] d\mathcal{E} dV, \quad 17.5/$$

gdzie  $V$  oznacza objętość materiału odkształcanego,  $\dot{\mathcal{E}}/\mathcal{E}$  jest historią prędkości odkształcenia o ile prędkość  $\dot{\mathcal{E}}$  nie jest stała podczas procesu deformacji. Zależność /7.5/ można przekształcić dla przypadku stałych prędkości odkształcenia zarówno podczas odkształcenia wstępnego jak i dynamicznego, wówczas

$$W = \int_V \left[ \int_0^{\mathcal{E}_w} \sigma(\mathcal{E}, \dot{\mathcal{E}}_w) d\mathcal{E} + \int_{\mathcal{E}_w}^{\mathcal{E}_d} \sigma(\mathcal{E}, \dot{\mathcal{E}}_d) d\mathcal{E} \right] dV. \quad 17.6/$$

Największa różnica w przyroście dysypowanej pracy podczas odkształcenia dynamicznego będzie zachodzić dla badanej stali. Na podstawie wzoru /7.6/ można obliczać niezbędną pracę, a tym samym i energię potrzebną do odkształcenia danego detalu w warunkach dynamicznych.

Zarówno dane literaturowe, jak i otrzymane wyniki wskazują, że zachowanie się różnych metali a w tym różnych gatunków stali, podczas dociążania dynamicznego może bardzo

się różnić. Wynika stąd wnioszek, iż należałoby bardziej wszechstronnie badać pod obciążeniami dynamicznymi materiały poddawane zabiegom technologicznym w warunkach dynamicznych. W niniejszej pracy ograniczono się do trzech materiałów, a to ze względu na pracochłonność zarówno metod pomiarowych jak i wymaganych obliczeń w obranej metodzie.

Literatura cytowana w tekście

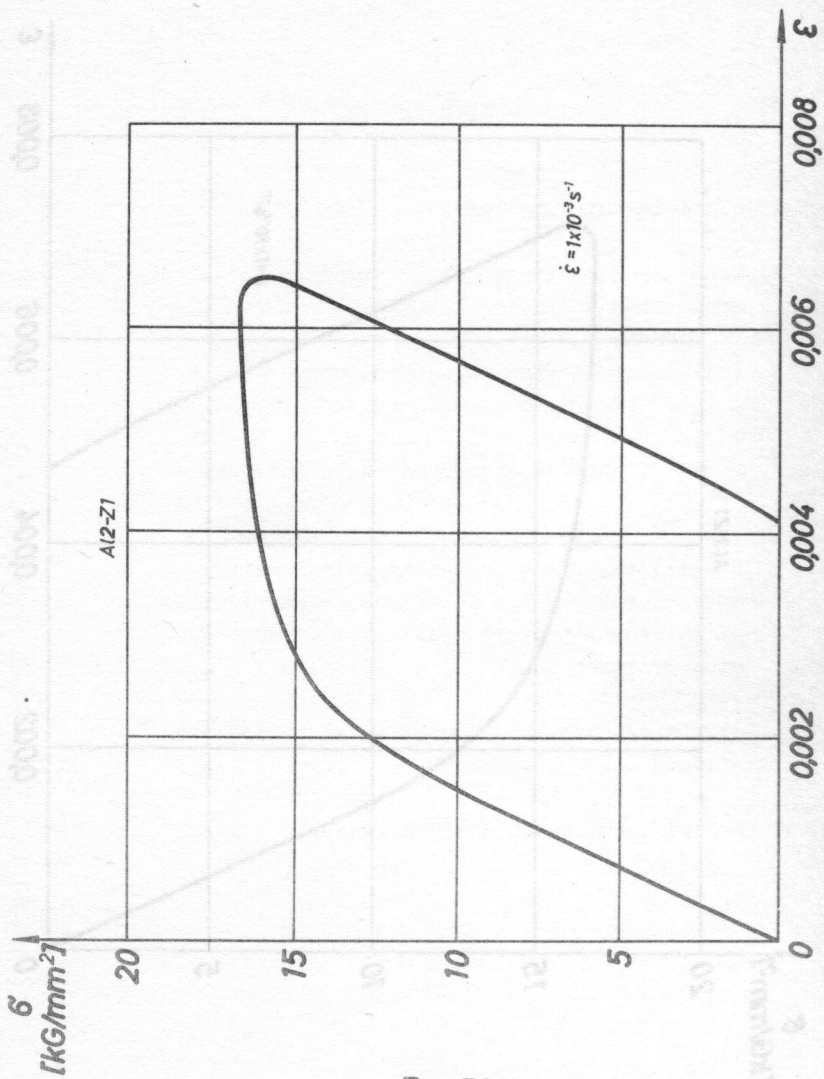
rozdziału 7

- [1] Campbell J.D., Dowling A.R. - The Dynamic Behaviour of Materials Subjected to Dynamic Incremental Shear Loading, J. Mech. Phys. Solids, 1, 18 /1970/, 43.
- [2] Litoński J., Klepaczko J. - Wpływ wstępnego plastycznego rozciągania na moduł Younga mosiądsu i nisko-węglowej stali, Rozpr. Inż., 2, 12 /1964/, 251.
- [3] Rozdział 4 - Dyskusja efektów wywołanych falą dociążania w próbie.
- [4] Rozdział 5 - Eksperymentalne metody wyznaczania dynamicznych charakterystyk naprężenie-odkształcenie na podstawie pomiaru zjawisk falowych w długich próbkach.
- [5] Rozdział 6 - Stanowisko badawcze i zastosowane metody pomiarowe.
- [6] Santosham T.V., Ramsey H. - Small Plastic Strain Wave Propagation in Prestressed Soft Copper Rods, Int. J. Mech. Sci., 6, 12 /1970/, 447.

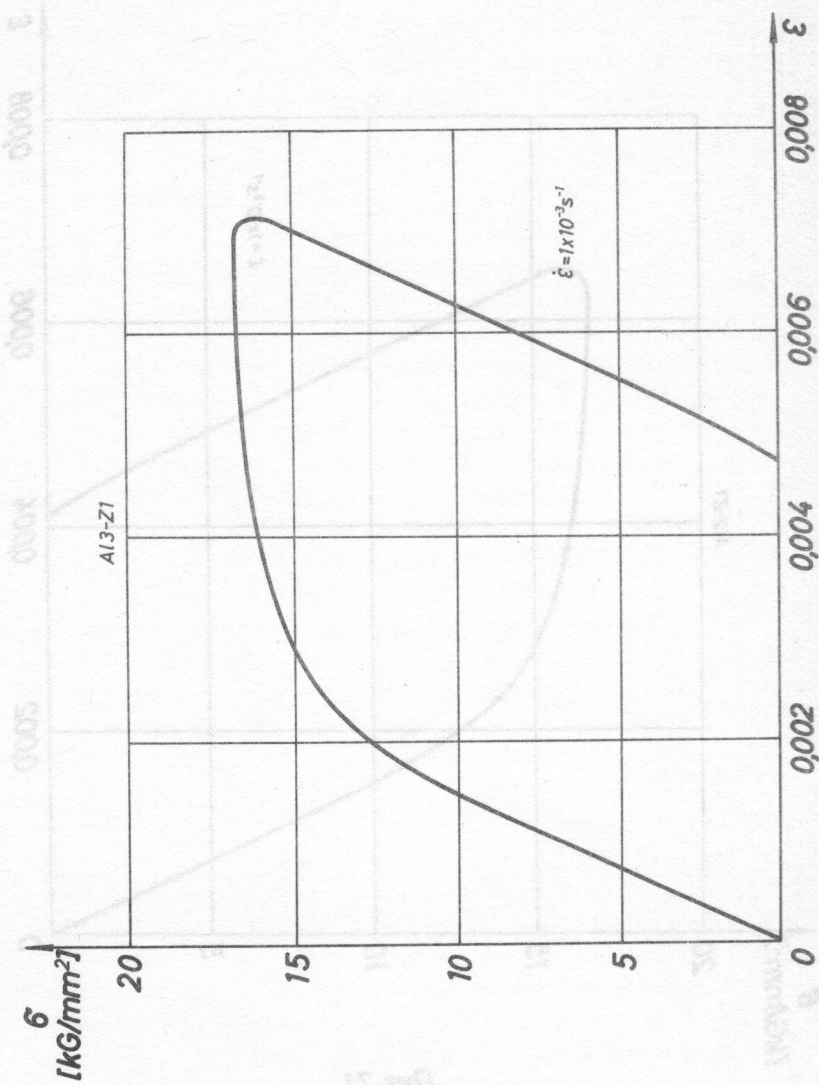
Spis treści

1. Sformułowanie problemu. . . . .	str. 3
2. Podstawy teoretyczne opisu sprężysto-plastycznych fal w prętach. . . . .	" 5
3. Analiza oszoła sprężysto-plastycznej fali w pręcie. . . . .	" 11
4. Dyskusja efektów wywołanych falą dociążania w pręcie . . . . .	" 45
5. Doświadczalne metody wyznaczenia dynamicznych charakterystyk naprężenie-odkształcenie na podstawie pomiaru zjawisk falowych w długich próbkach . . . . .	" 72
6. Stanowisko badawcze i zastosowane metody pomiarowe . . . . .	" 106
7. Wyniki doświadczeń i ich dyskusja . . . . .	" 157

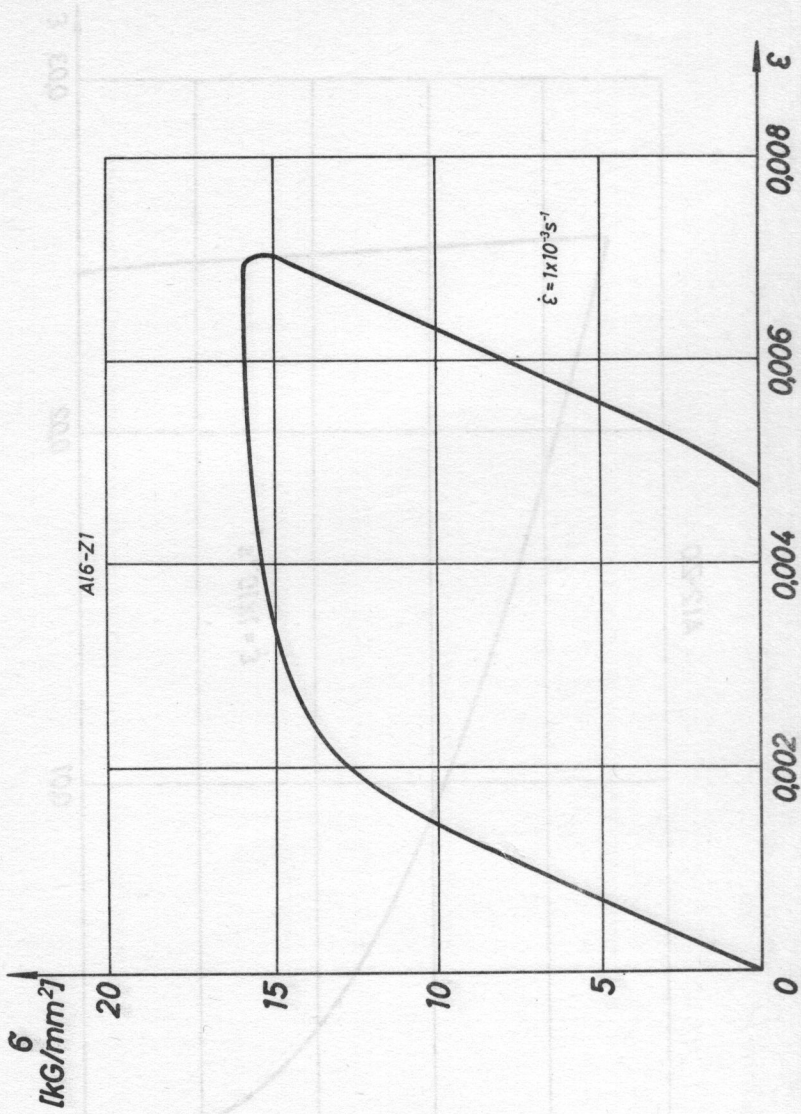




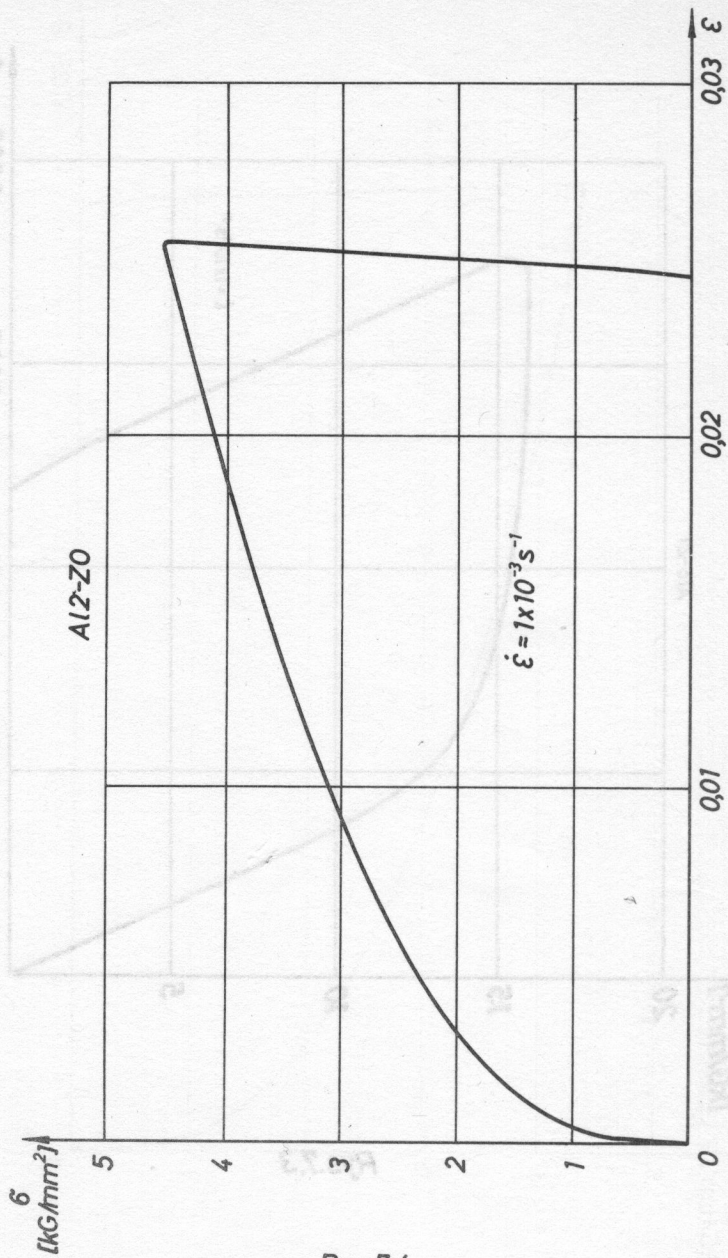
Rys.71



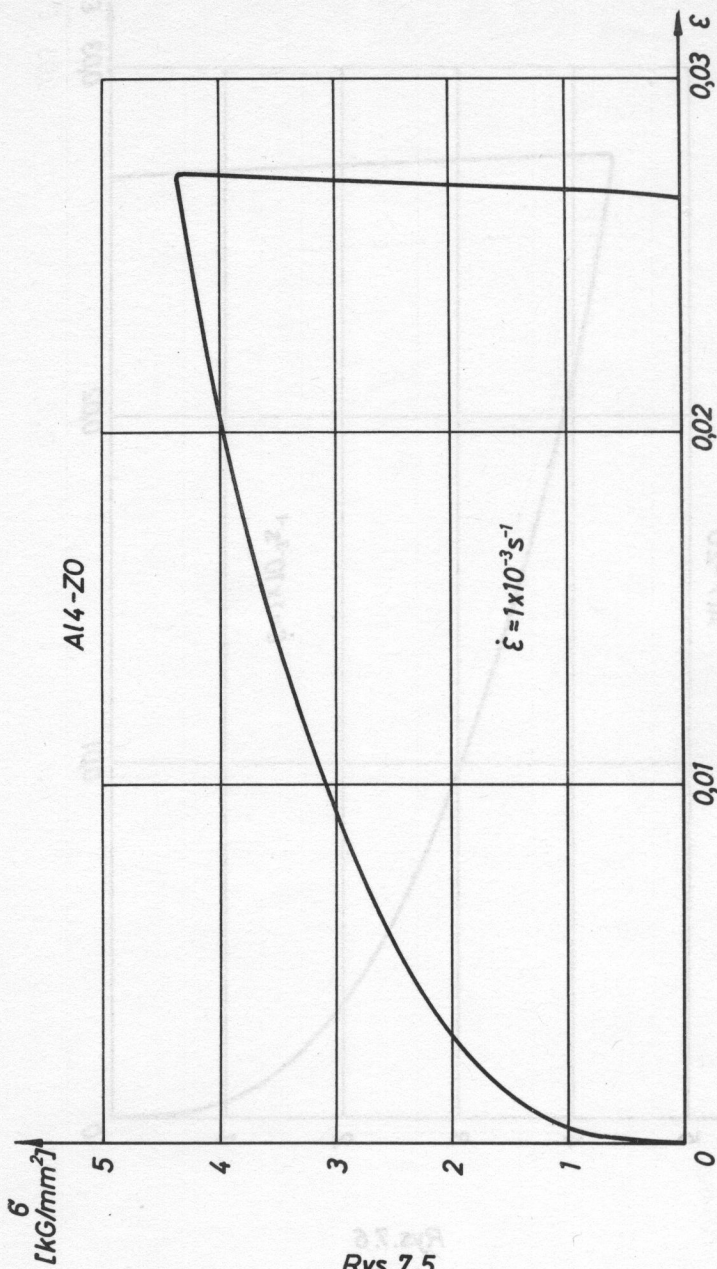
Rys.7.2



Rys.7.3

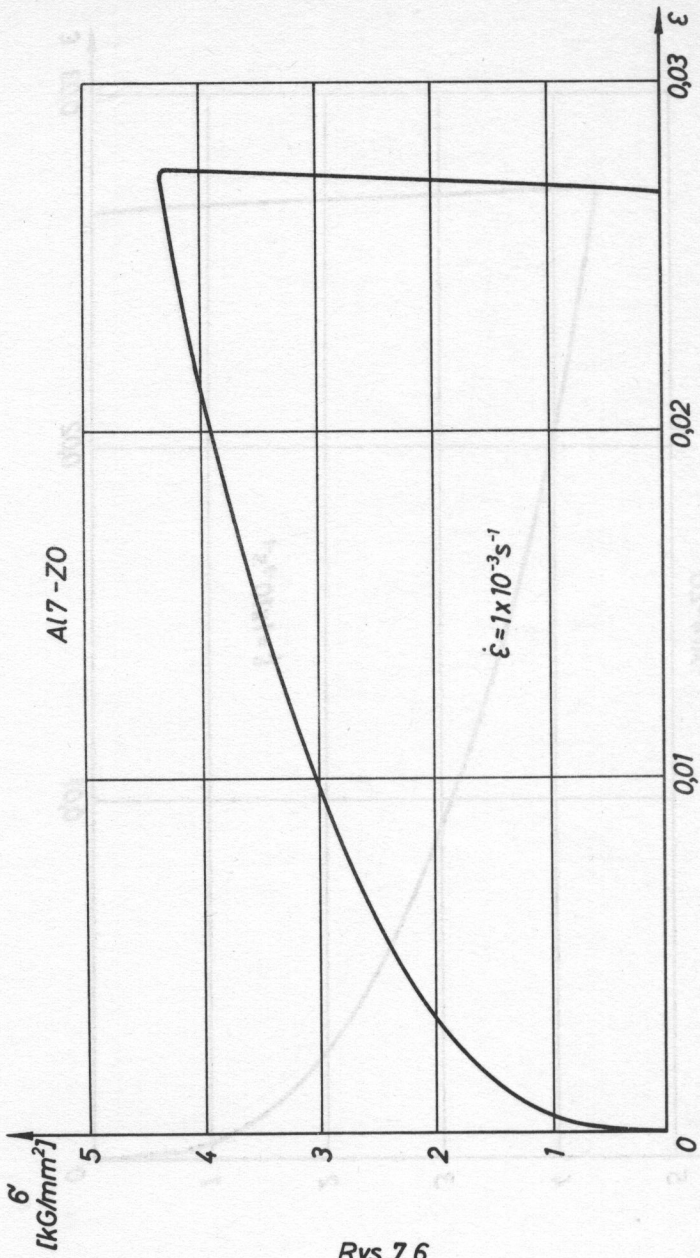


Rys.7.4

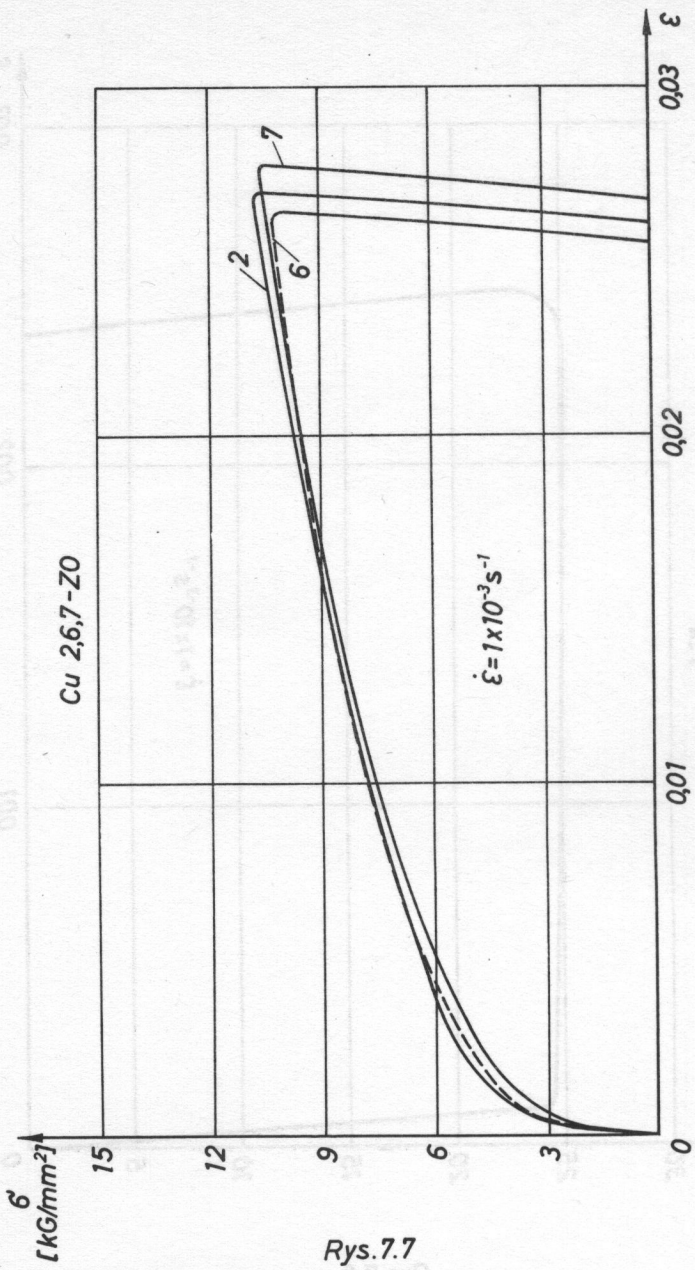


Rys.7.5

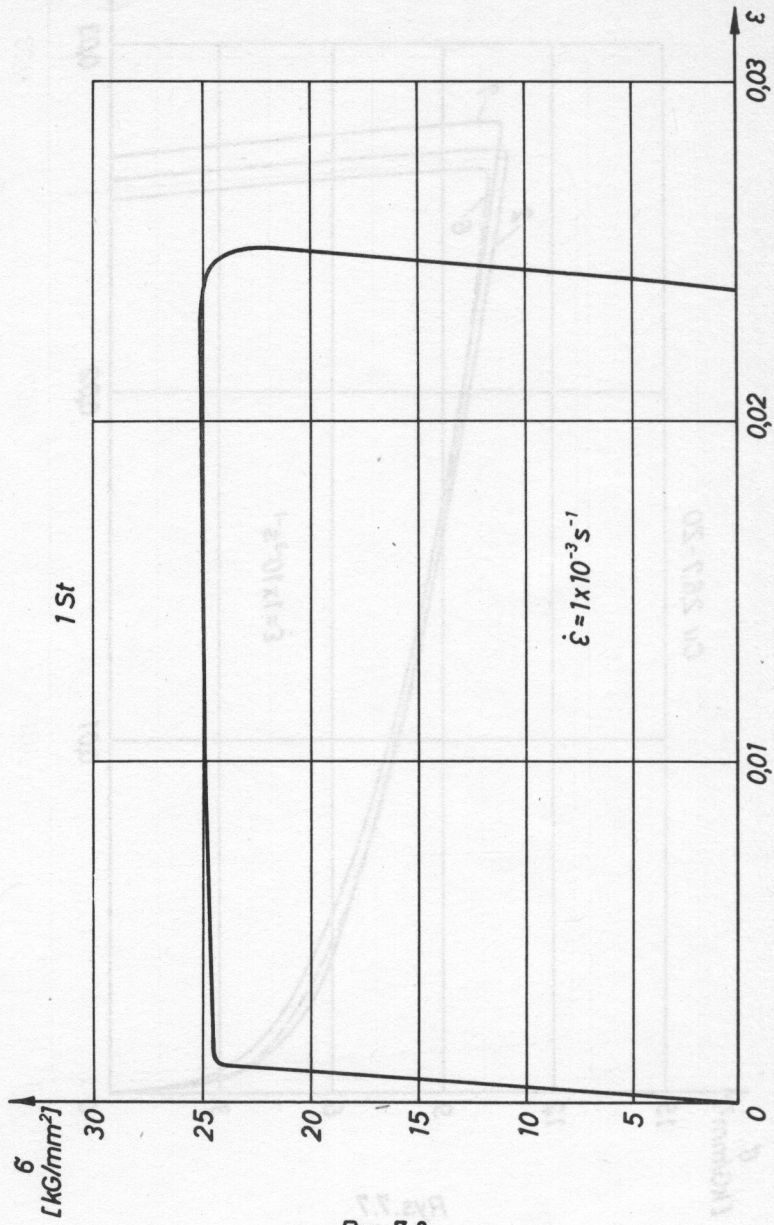




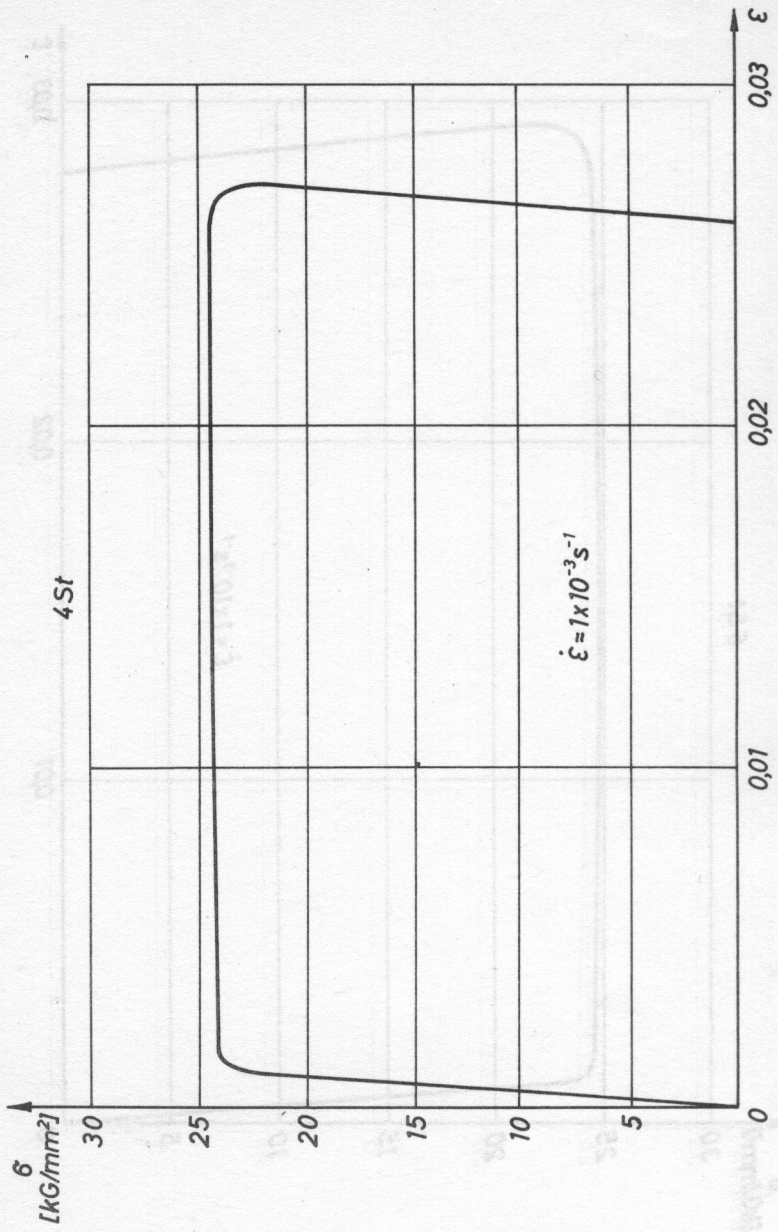
Rys. 7.6



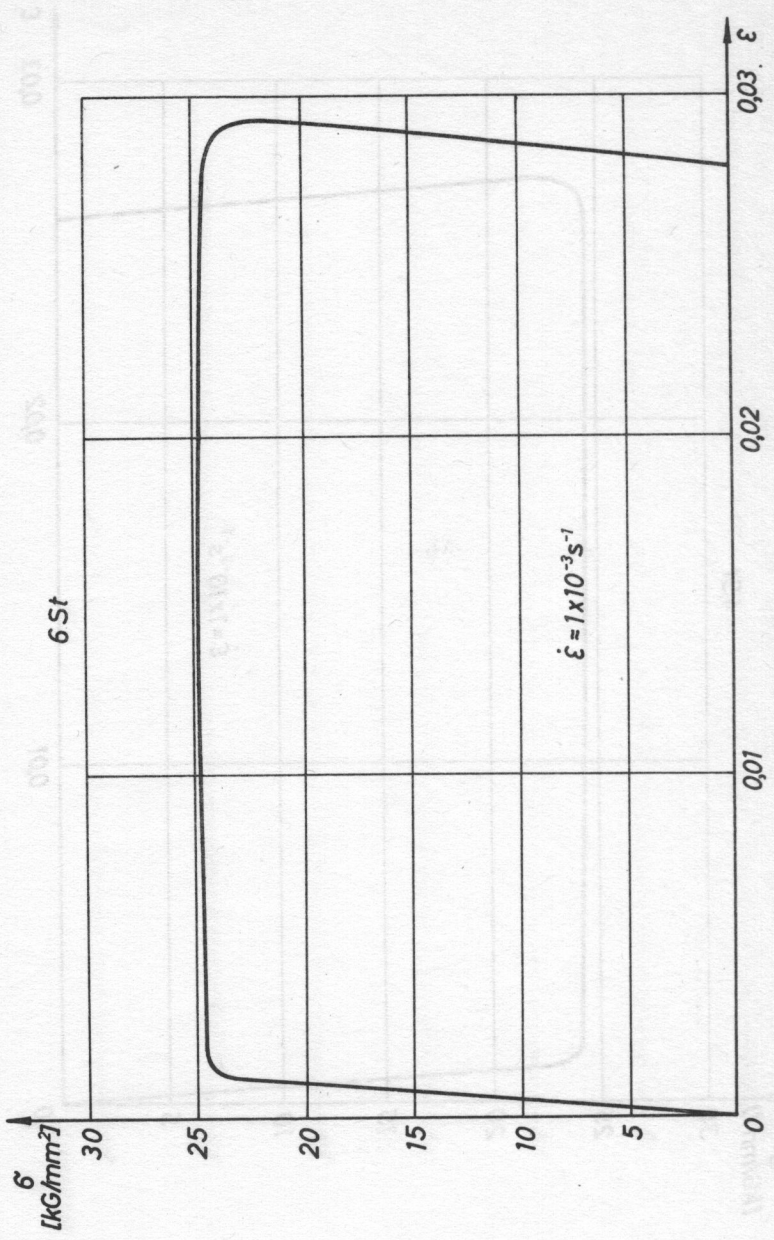
Rys.7.7



Rys.7.8

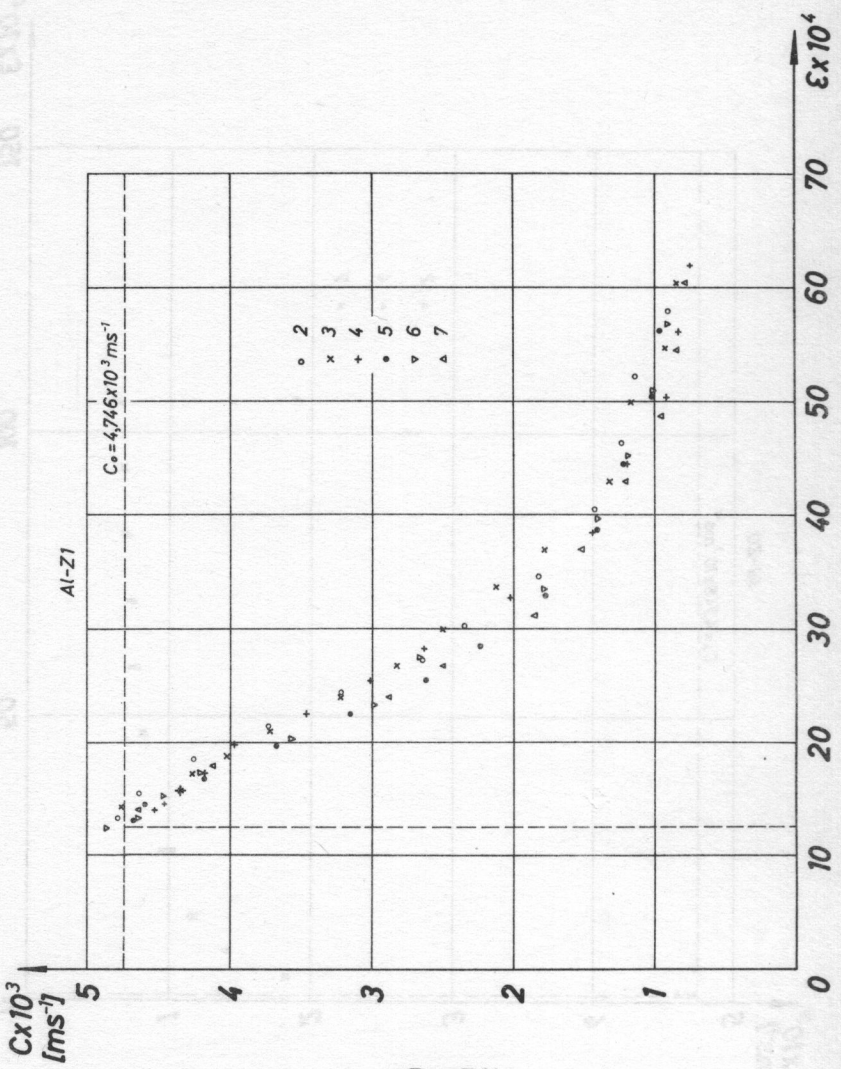


Rys.7.9

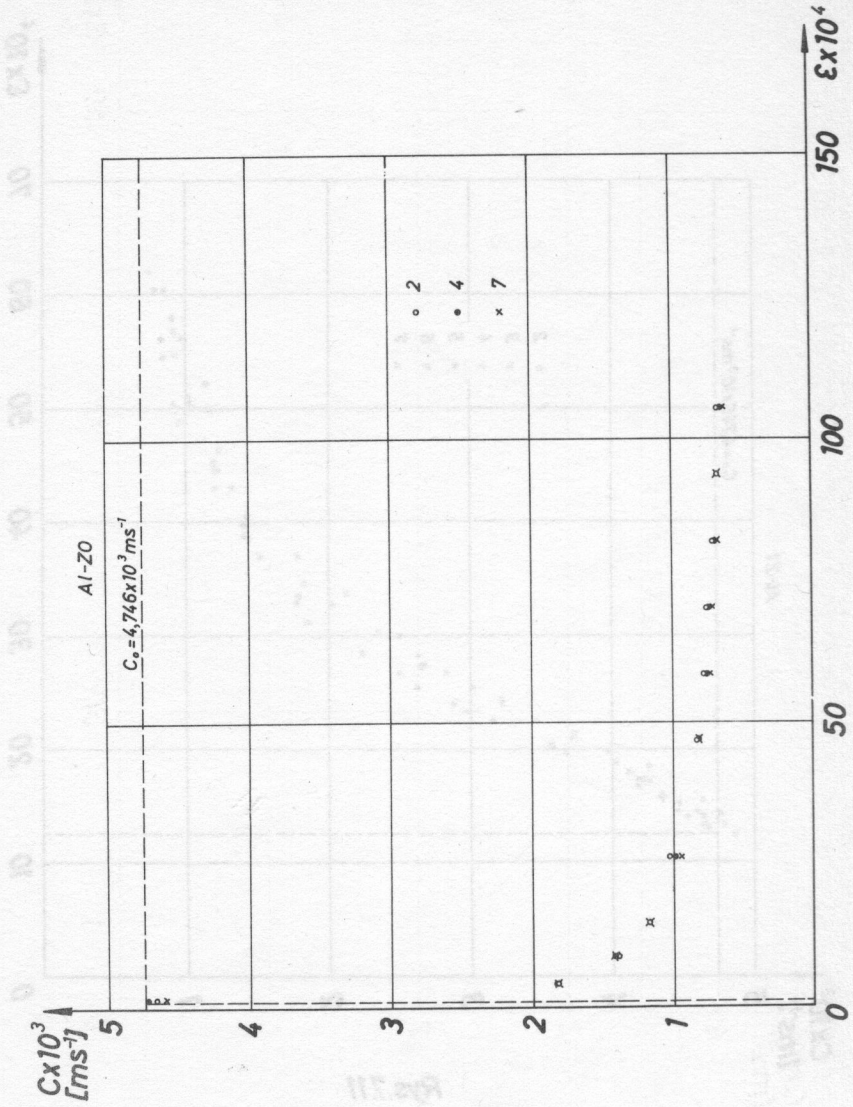


Rys. 7.10

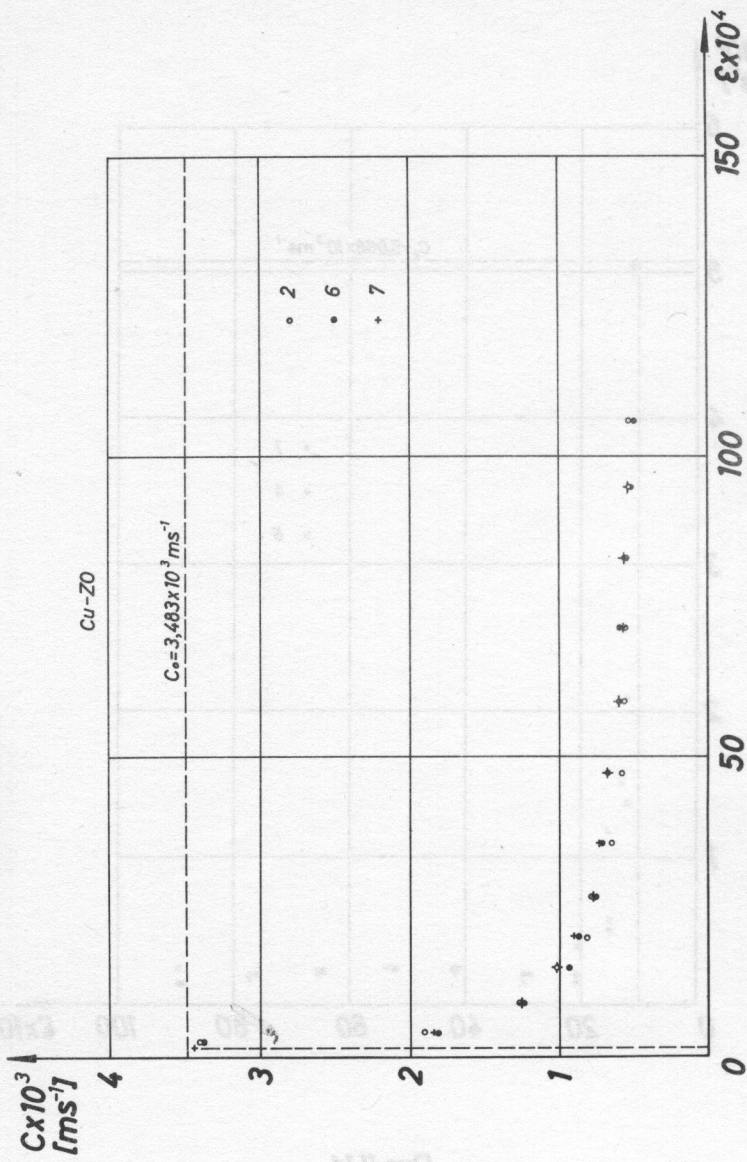




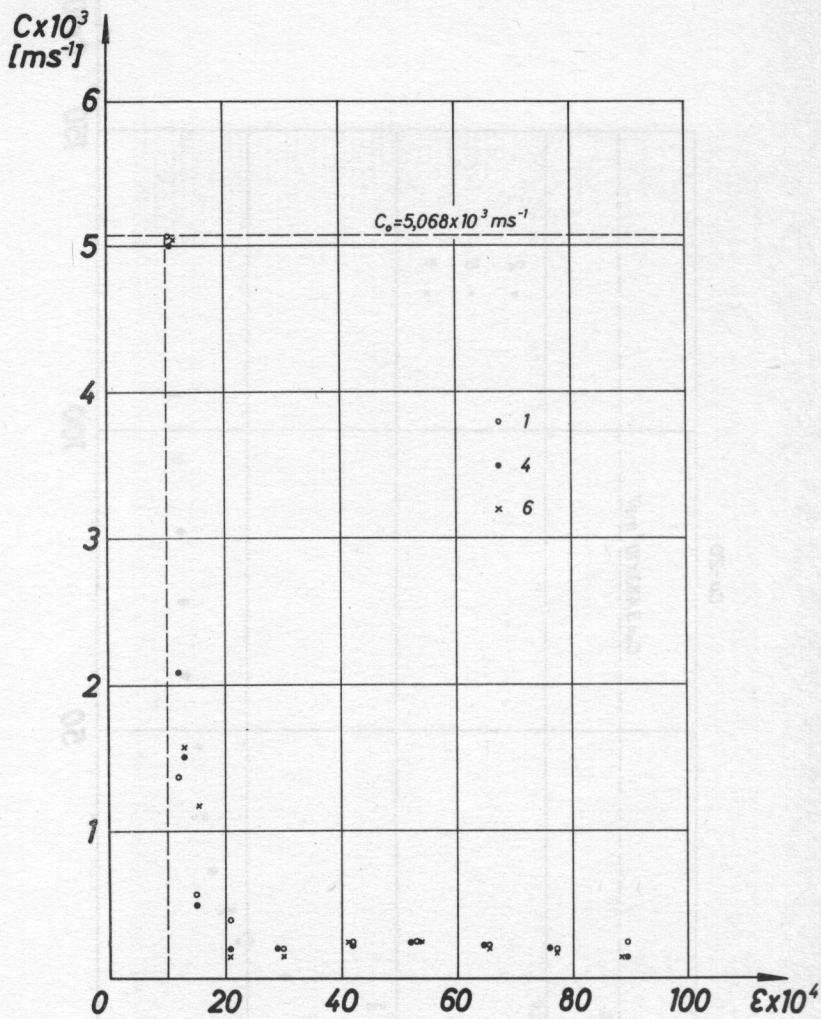
Rys.7.11



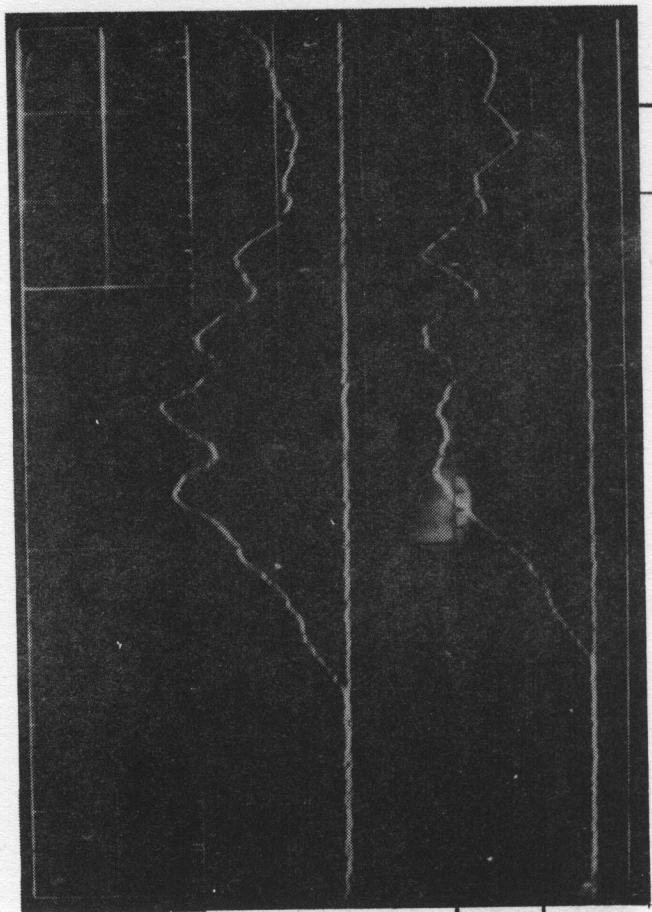
Rys.7.12



Rys.7.13



Rys.7.14



20mV

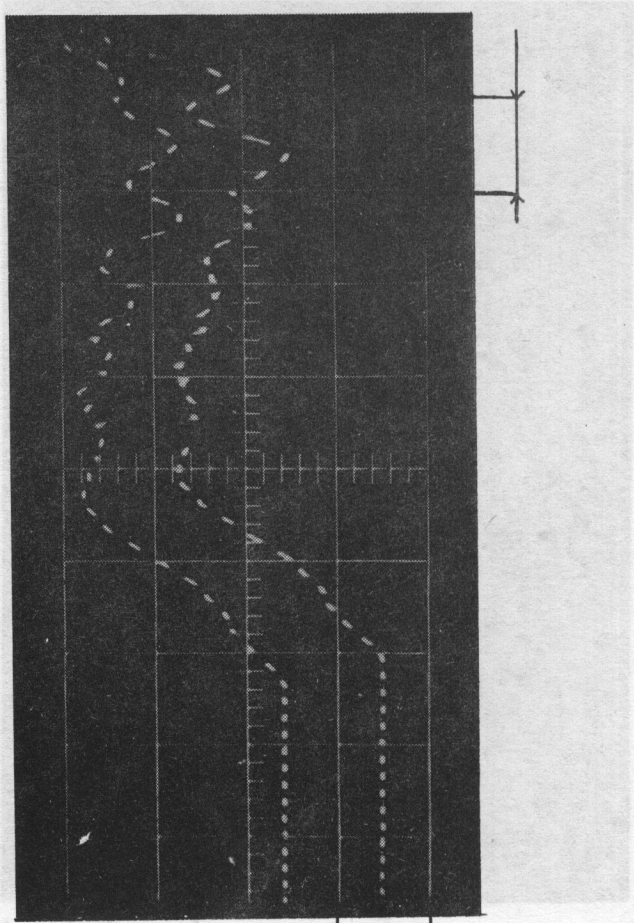
50μs



10mV

Rys. 7.15

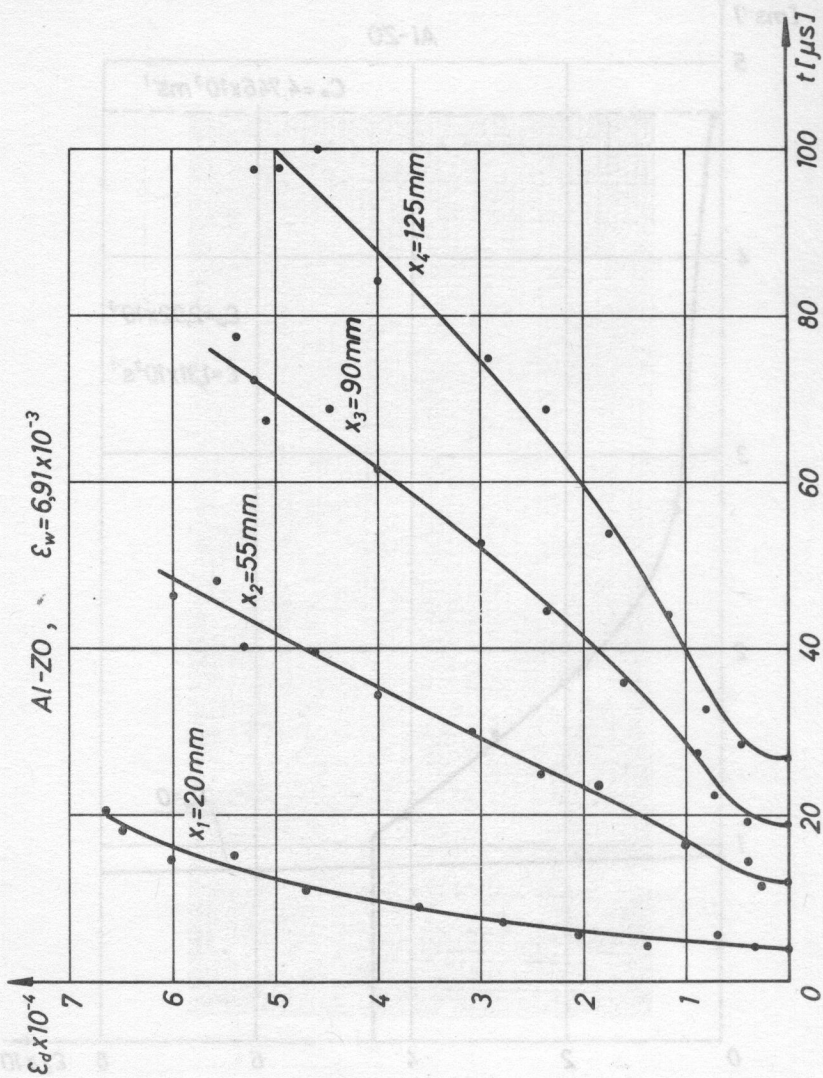




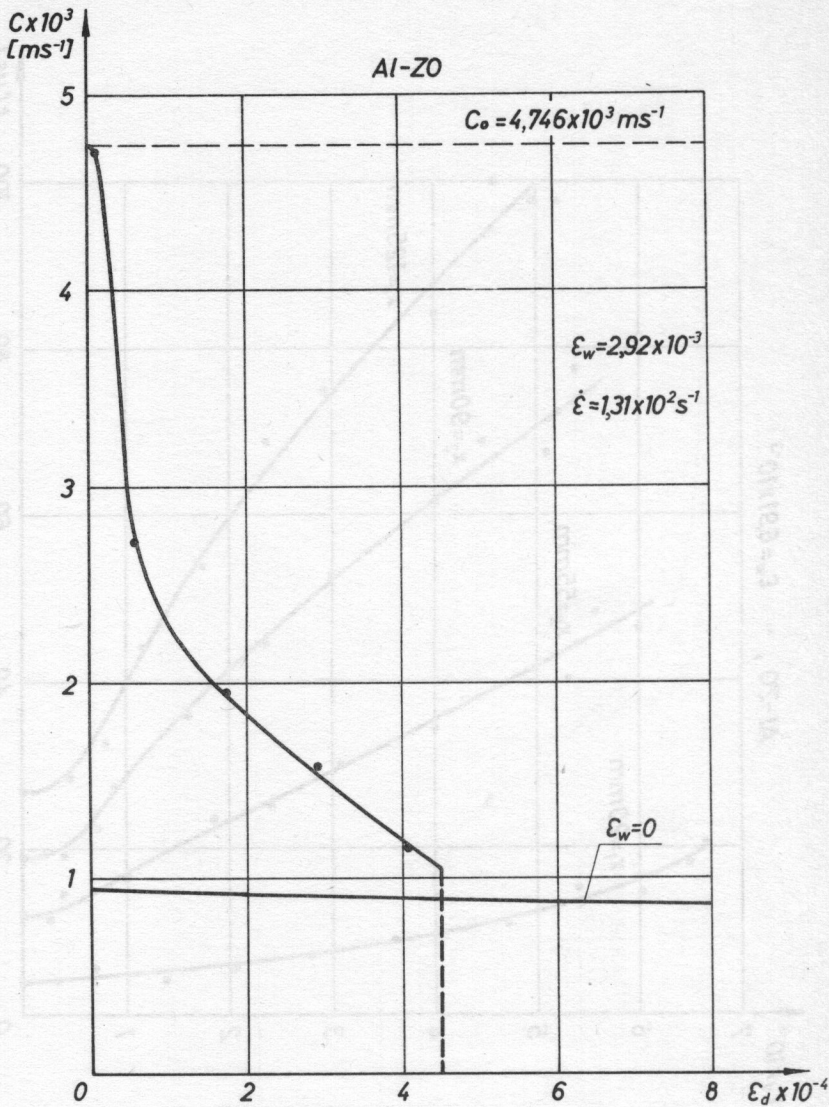
50  $\mu$ s

50 mV

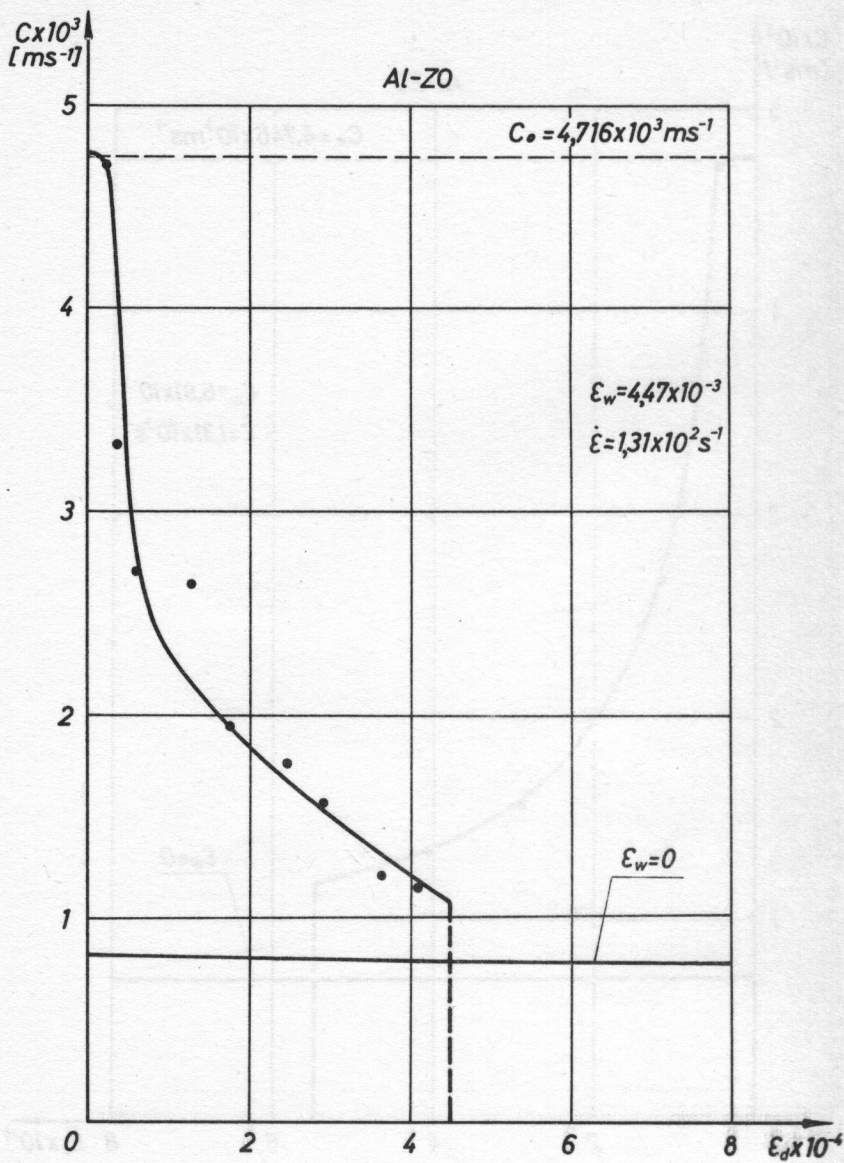
Rys. 7.16



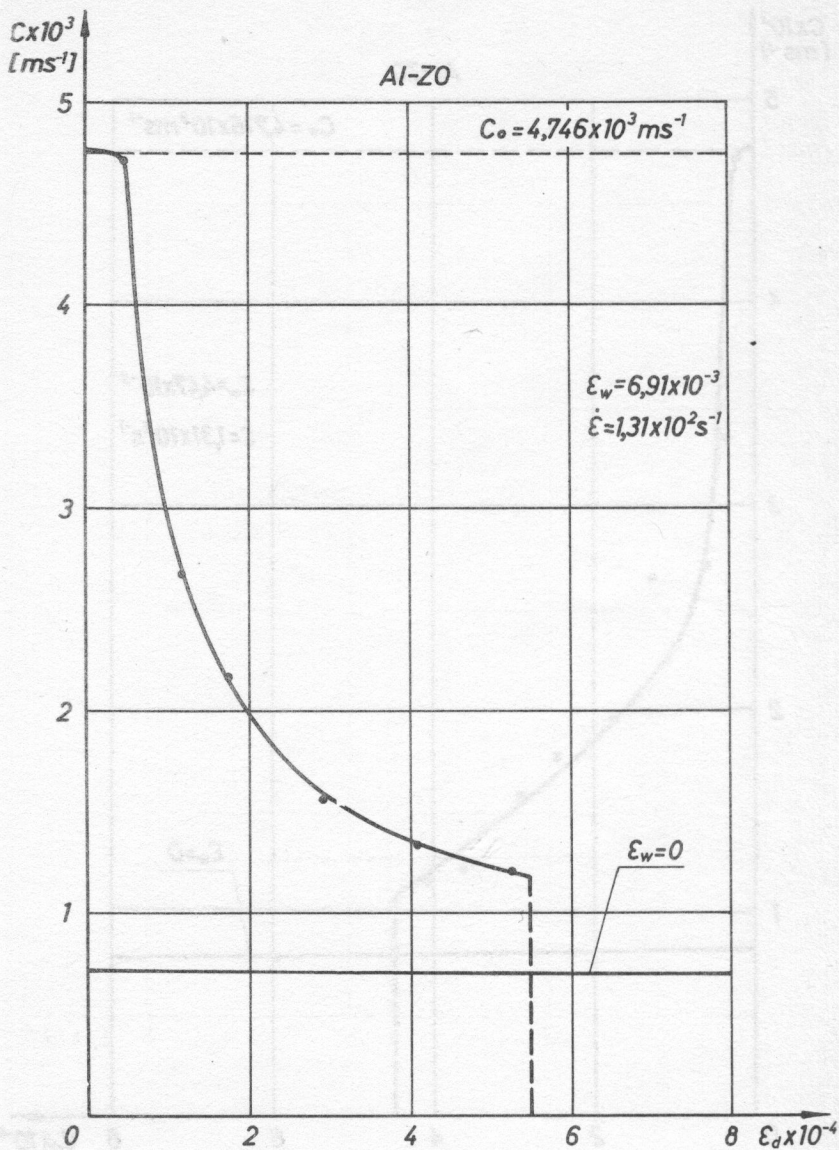
Rys.7.17



Rys. 7.18

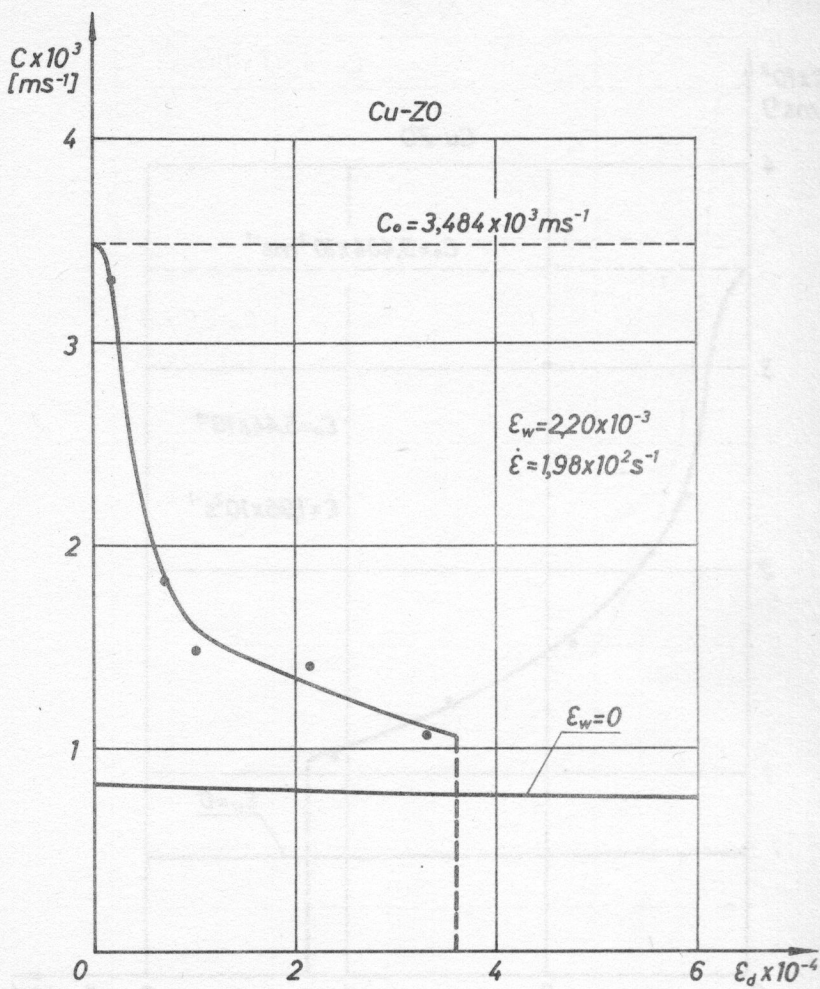


Rys. 7.19

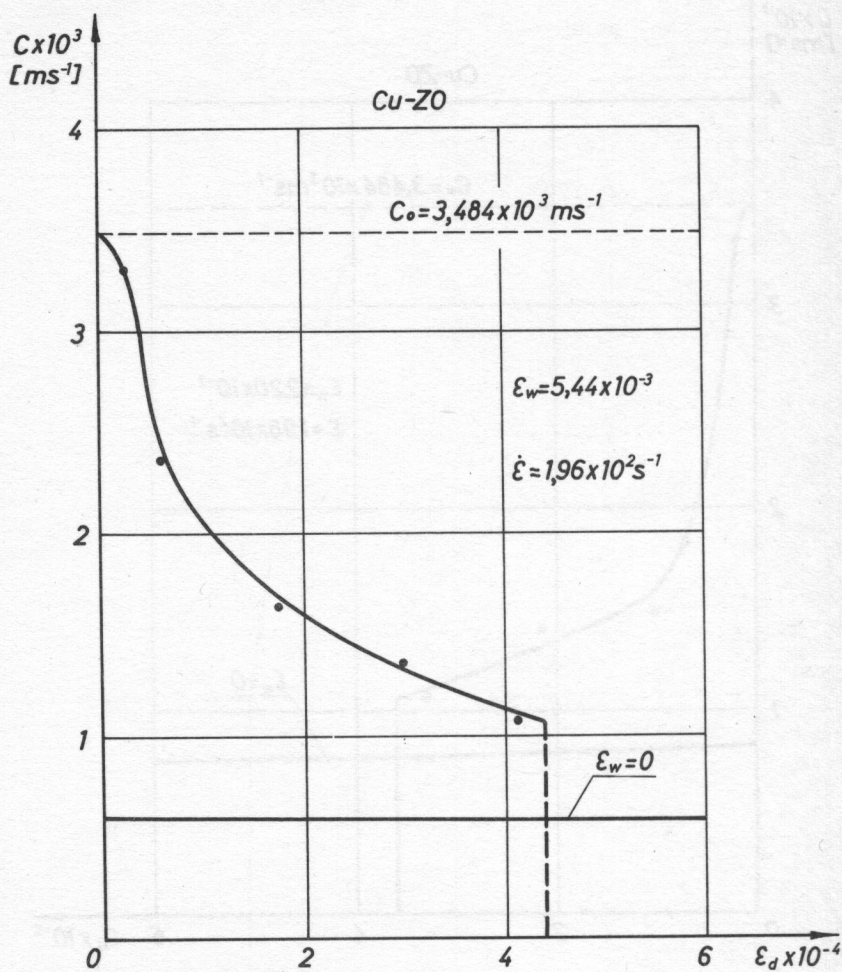


Rys.7.20

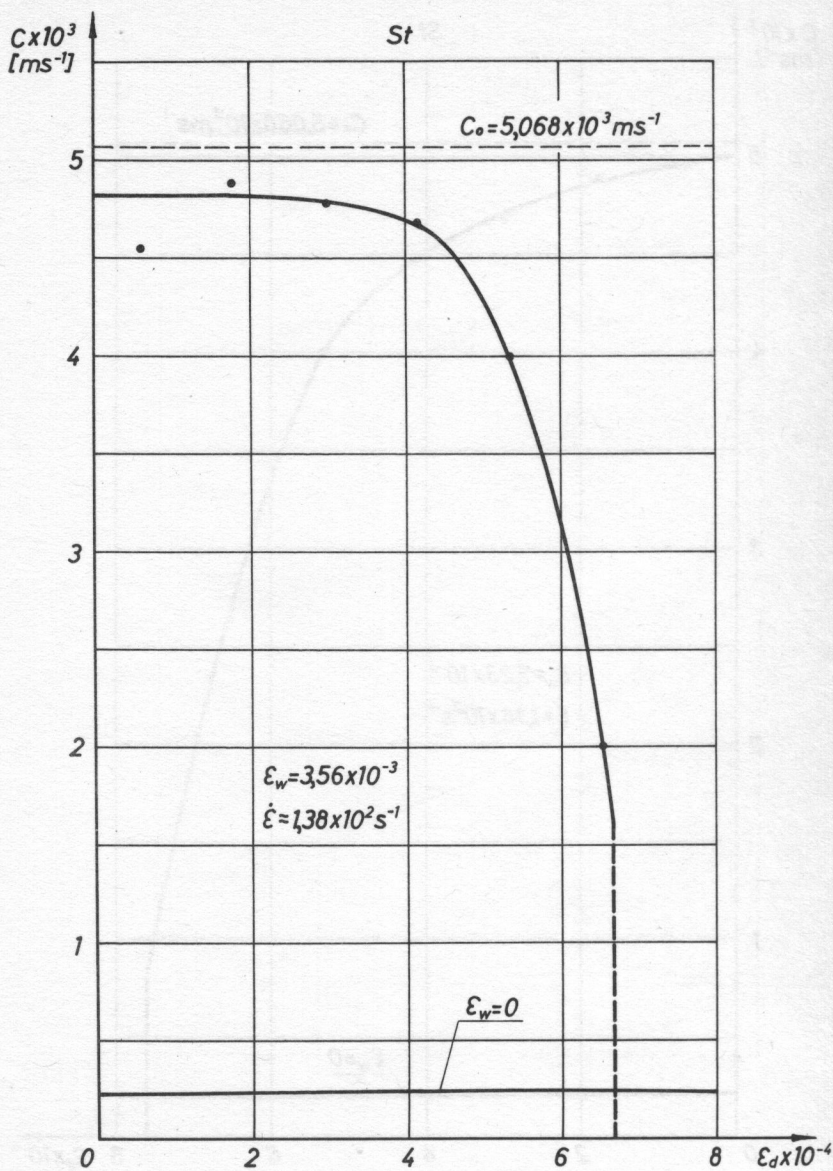




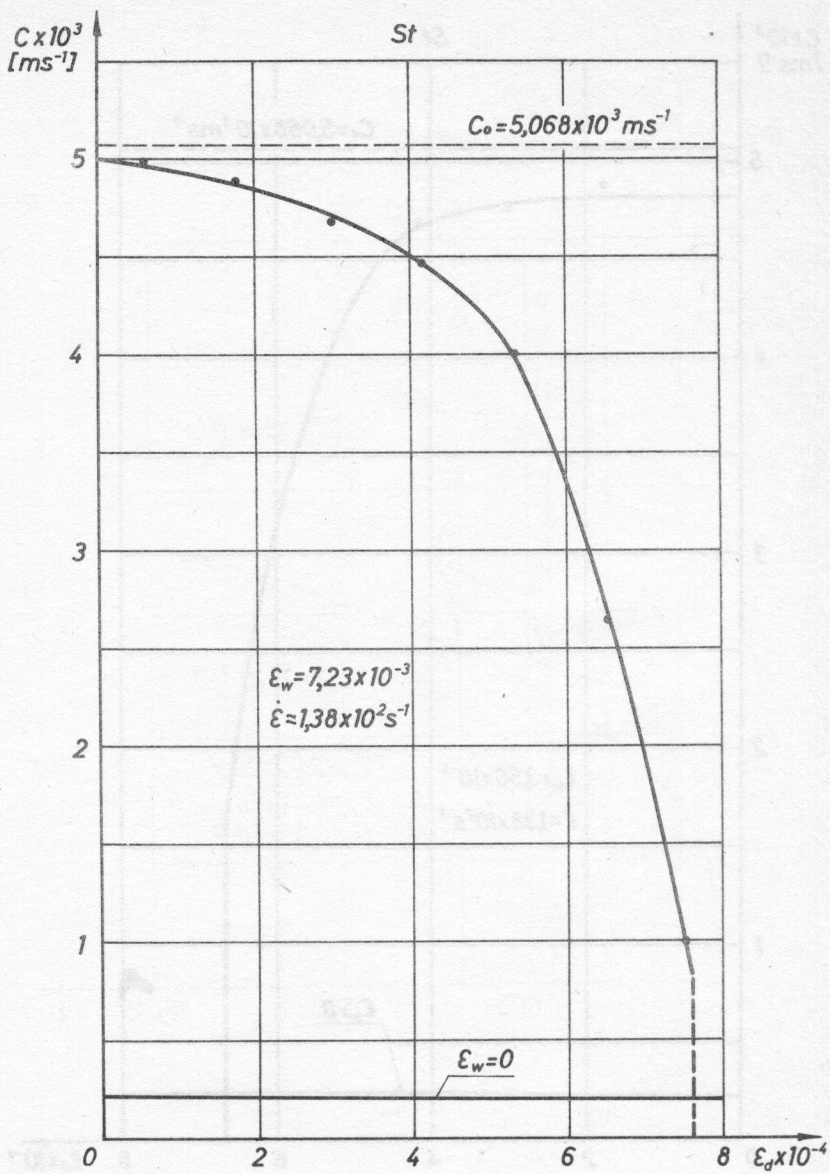
Rys. 7.21



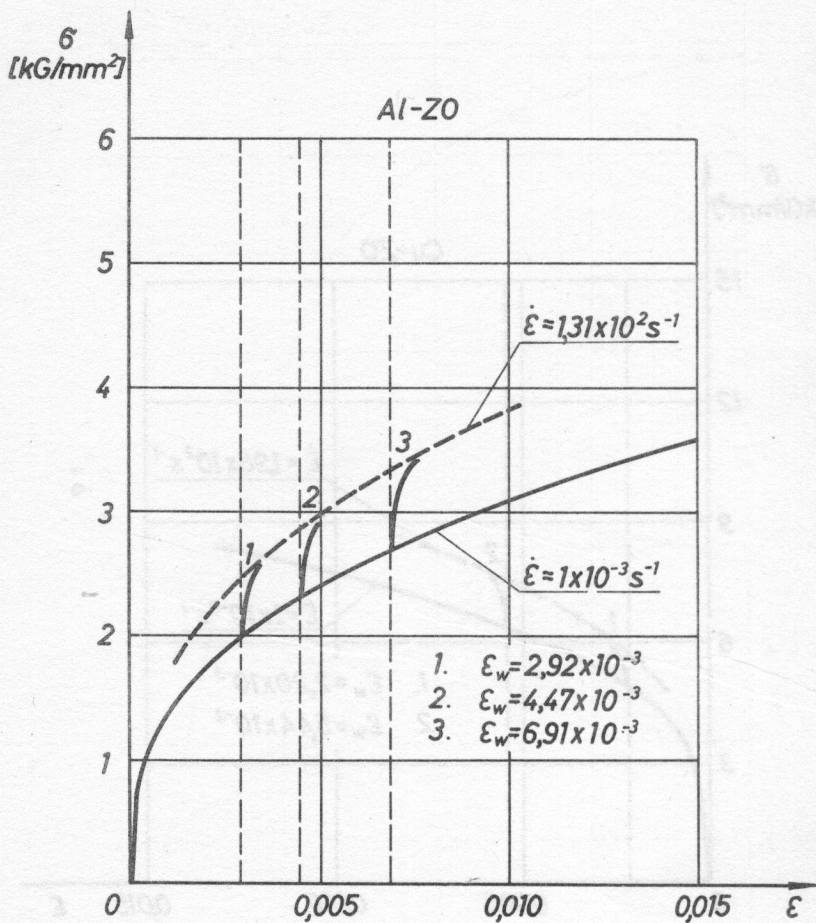
Rys. 7.22



Rys. 7.23

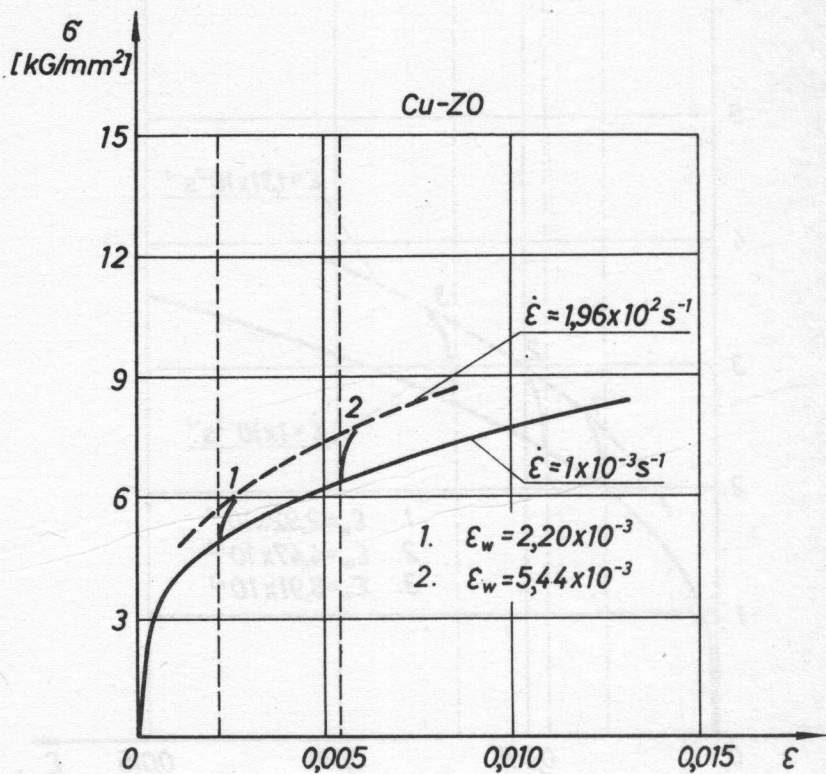


Rys. 7.24

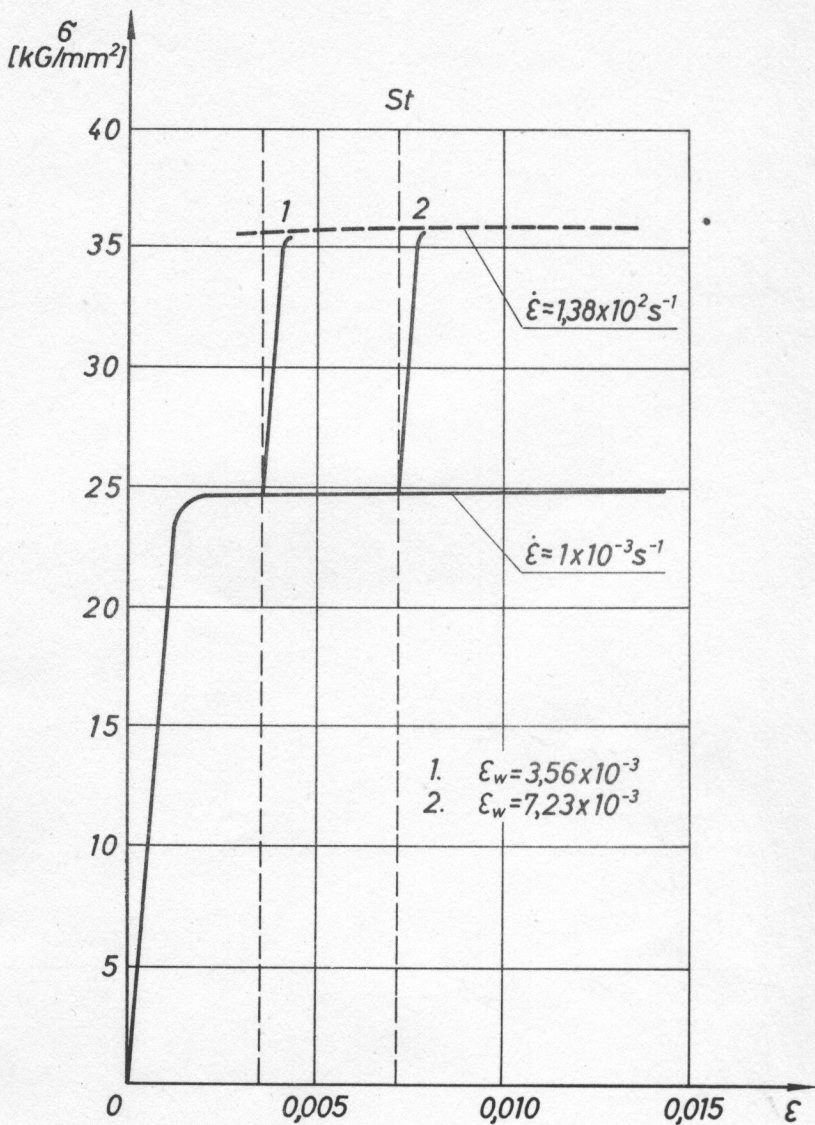


Rys.7.25



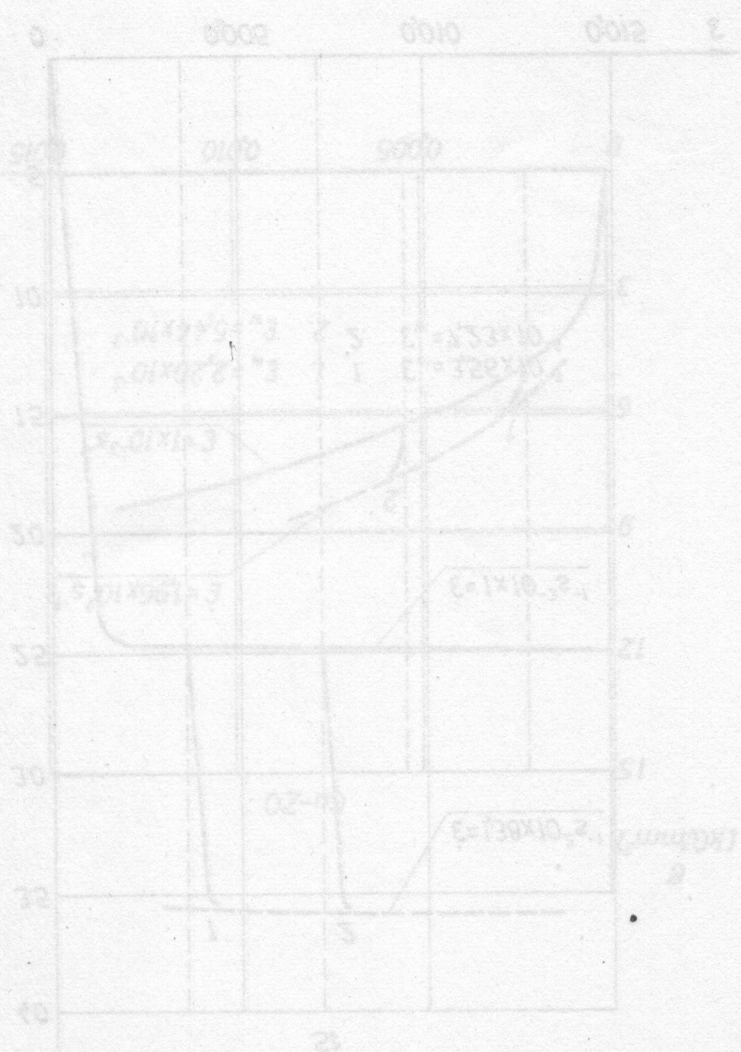


Rys.7.26

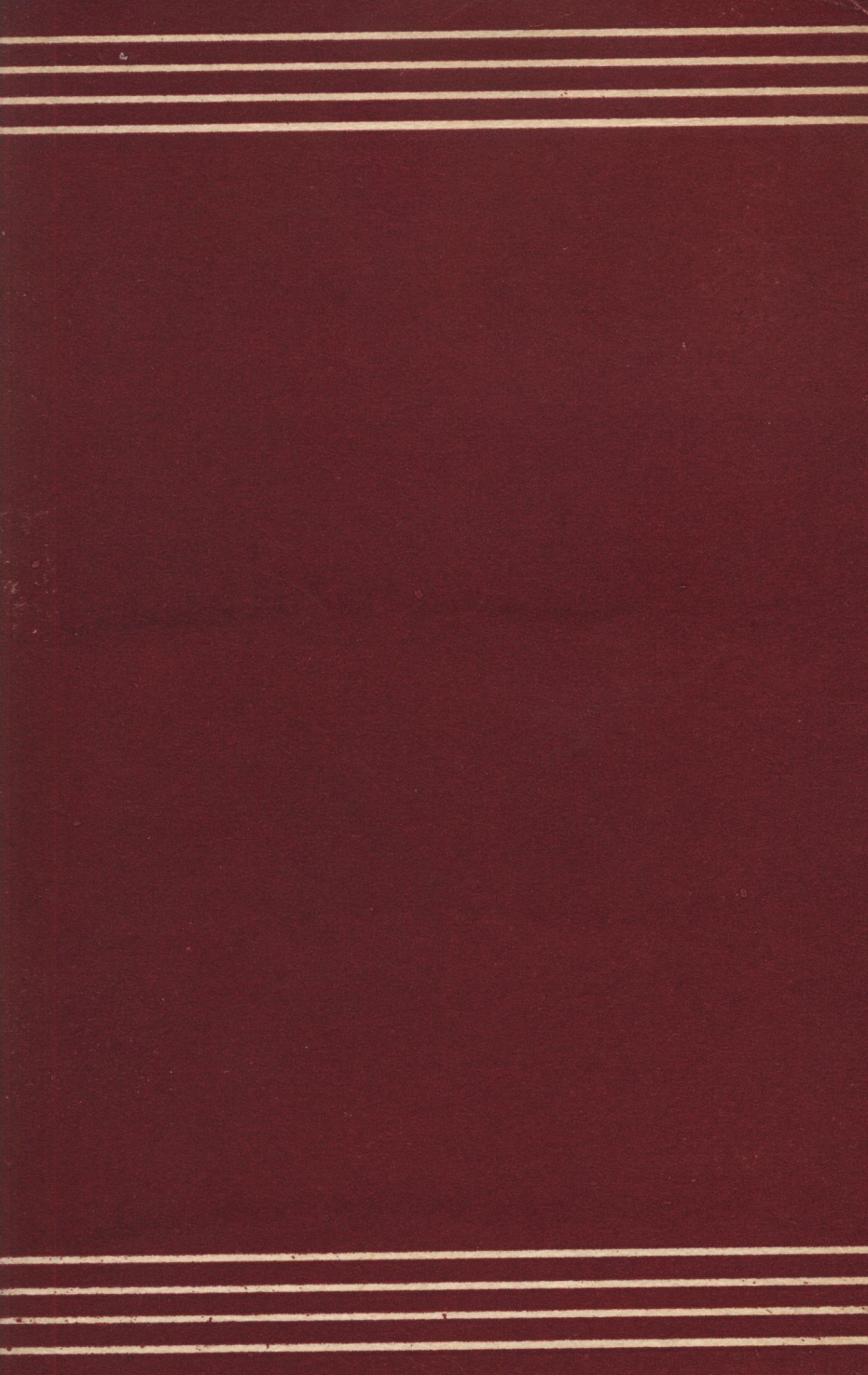


Rys.7.27

15.1.2018  
 Page 2.26



Page 2





27.12.71

PRACE IPPT • IBTP REPORTS

Janusz Klepaczko

DOŚWIADCZALNE BADANIA  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH  
PROCESÓW FALOWYCH W METALACH

CZĘŚĆ II

19/1971



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK



~~P.268~~



P.269



Janusz Klepaczko

DOŚWIADCZALNE BADANIA  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH  
PROCESÓW FAŁOWYCH W METALACH

CZĘŚĆ II

19/1971




Instytut Problemów Techniki i Mechaniki  
ul. Armii Krajowej 17, 01-644 Warszawa  
Odział do druku i składu 1971 r.  
Cena 2000 zł (z VAT 22%)

Wydawnictwo Prace i Badania Techniczne  
ul. Rakowiecka 17, 01-644 Warszawa

WARSZAWA

2329



Praca habilitacyjna



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Makład 200 egz. Ark. wyd. 2. Ark. druk. 3.

Oddano do drukarni w czerwcu 1971 r.

Nr zamówienia 524/0/1971. U-87.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

WARSZAWA

Janusz Klepaczko  
Zakład Mechaniki  
Ośrodków Ciągłych

**ANALIZA RÓWNIANIA KONSTITUTYWNEGO CL  
W TEORII PROPAGACJI FAL SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH \***

1. Równanie Cristescu-Lublinera

Obserwacje doświadczalne poczynione przy badaniu fal dociążania w metalach, a w szczególności prace [4] i [7], wydają się wskazywać, że istotną rolę odgrywają tu efekty historii prędkości odkształcenia [8], [9]. Okazuje się, że badania propagacji i zachowania się fal dociążania stanowią skuteczną metodę weryfikacji danej teorii propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach. Na fakt ten zwrócono uwagę w pracach [1], [2] oraz [3]. Należy uznać, że dotychczas brak analizy umożliwiającej w miarę ściśle uwzględnienie wpływu wspomnianych efektów historii prędkości odkształcenia na kształt czoła fali dociążania.

Celem niniejszej pracy jest przeprowadzenie możliwie szerokiej analizy równania konstytutywnego Cristescu-Lublinera /zwanego dalej CL/ i odpowiadającej temu równaniu teorii propagacji sprężysto-plastycznych fal w prętach. Dyskusja ta zostanie przeprowadzona w oparciu o uprzednio uzyskane wyniki doświadczalne propagacji fali dociążania dla kilku metali [7]. Należy równocześnie podkreślić, że równanie konstytutywne CL nie było dotychczas analizowane od strony wyników doświadczalnych i brak jest jakichkolwiek danych w tym zakresie.

x/ praca stanowi drugą część rozprawy autora pt. "Doświadczalne badania sprężysto-plastycznych procesów falowych w metalach", Prace IPPT nr 61/1970, Warszawa 1970.

Równanie to zostało niezależnie zaproponowane przez Cristescu [6] oraz przez Lublinera [14], [15] i może być przedstawione w postaci

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = f(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon) \quad , \quad 1/1$$

lub w odniesieniu do opisu zagadnień quasi-statycznych

$$\dot{\varepsilon} = f(\sigma, \varepsilon) \dot{\sigma} + g(\sigma, \varepsilon) \quad , \quad 1/2$$

gdzie  $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ ;  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ , ponadto  $\sigma$  oznacza naprężenie,  $\varepsilon$  odkształcenie, i  $t$  oznacza czas.

Równanie konstytutywne w formie 1/1 zaproponowane również w pracy [19], jednak z pominięciem dokładnego rozważenia problemu falowego.

Innym możliwym zapisem równania CL jest następująca postać

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} = f_1(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon) \quad , \quad 1/3$$

gdzie  $\varepsilon_p$  oznacza składową odkształcenia plastycznego.

O ile spełnione jest prawo Hooke'a i odkształcenie całkowite jest sumą dwóch składowych  $\varepsilon_p$  oraz  $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ , wówczas

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} + \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad , \quad 1/4$$

Równanie 1/4 uwzględnione w równaniu 1/1 prowadzi do zależności

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left[ \frac{1}{E} + f_1(\sigma, \varepsilon) \right] \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon) \quad , \quad 1/5$$

gdzie

$$f(\sigma, \varepsilon) \equiv \frac{1}{E} + f_1(\sigma, \varepsilon) \quad \text{lub} \quad f(\sigma, \varepsilon) \equiv \frac{1}{E} \left[ 1 + E f_1(\sigma, \varepsilon) \right] .$$

Jeżeli funkcja  $f_0(\sigma, \varepsilon) \equiv 0$ , wówczas równanie /1/ sprowadza się do równania konstytutywnego zaproponowanego uprzednio przez Sokołowskiego i Malverna, swanego równaniem SM [16] oraz [17] i [20]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon). \quad /6/$$

Równanie konstytutywne CI można także zapisać w nieco innej postaci

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \varphi(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \xi(\sigma, \varepsilon) \quad /7/$$

gdzie

$$\varphi(\sigma, \varepsilon) \equiv \frac{1}{f(\sigma, \varepsilon)}$$

$$\text{lub } \varphi(\sigma, \varepsilon) \equiv \frac{E}{1 + E f_0(\sigma, \varepsilon)} \quad /8/$$

oraz

$$\xi(\sigma, \varepsilon) \equiv - \frac{g(\sigma, \varepsilon)}{f(\sigma, \varepsilon)}$$

$$\text{lub } \xi(\sigma, \varepsilon) \equiv - \frac{E g(\sigma, \varepsilon)}{1 + E f_0(\sigma, \varepsilon)} \quad /9/$$

W przypadku opisu wrażliwości na prędkość odkształcenia danego materiału w warunkach quasi-statycznych, równanie /7/ zapisuje się w postaci:

$$\dot{\sigma} = \varphi(\sigma, \varepsilon) \dot{\varepsilon} + \xi(\sigma, \varepsilon) \quad /10/$$

W równaniach /1/ i /2/ oraz /7/ i /8/ wyrażenia  $f(\sigma, \varepsilon)$  oraz  $\varphi(\sigma, \varepsilon)$  opisują natychmiastową dynamiczną reakcję materiału, natomiast wyrażenia  $g(\sigma, \varepsilon)$  oraz  $\xi(\sigma, \varepsilon)$  opisują reakcję nienatychmiastową, związaną z własnościami reologicznymi materiału.



Głównym celem prac doświadczalnych, które mogą prowadzić do oceny równania konstytutywnego CL, jest określenie charakteru reakcji dla danej klasy materiałów, na przykład metali, na obciążenia dynamiczne. Jedną z praktycznych możliwości jest zastosowanie w tym celu metody badań epartej o generację i pomiar fal dociążania w prętach.

Należy również dodać, że równanie w postaci /1/ lub /7/ jest równaniem quasi-liniowym różniczkowym pierwszego rzędu o pochodnych cząstkowych, a jego współczynniki w ogólnym przypadku zależą także od temperatury. Równanie konstytutywne CL wykazuje szereg przypadków granicznych bądź szczególnych, dwa przypadki graniczne sprowadzają się do postaci omówionych poniżej.

Jeżeli w równaniu /1/ lub /7/

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = f(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \varphi(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0,$$

to wówczas

$$g(\sigma, \varepsilon) = 0 \quad \text{lub} \quad \xi(\sigma, \varepsilon) = 0 \quad /11/$$

Równanie /11/ stanowi opis statycznej krzywej umocnienia, którą można przedstawić w jawnej postaci

$$\sigma_s = h_s(\varepsilon) \quad \text{lub} \quad \sigma_s - h_s(\varepsilon) = 0 \quad /12/$$

dla  $\varepsilon=0$   $h_s(0)=0$ ;  $\sigma_s=0$ . Gdy uwzględnia się w następnym przybliżeniu część sprężystą statycznej krzywej umocnienia można napisać

$$\sigma_s = \sigma_0 + h_{sv}(\varepsilon_p), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_p, \quad \varepsilon_p \geq 0 \quad /13/$$

dla  $\varepsilon_p = 0$ ,  $h_{su}(0) = 0$  wówczas  $\sigma_s = \sigma_0$ , dla  $\sigma_s \leq \sigma_0$ ,  $\sigma_s = \varepsilon \varepsilon$ .

Jeżeli natomiast w równaniach /1/ i /7/  $g(\sigma, \varepsilon) = 0$  lub  $f(\sigma, \varepsilon) = 0$  to równania te przekształcają się do postaci /14/

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{f(\sigma, \varepsilon)} \quad \text{lub} \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi(\sigma, \varepsilon) \quad /14/$$

Różniczkowe związki /14/ stanowią opis rodziny dynamicznych krzywych umocnienia, które określają chwilową dynamiczną reakcję materiału. Ponieważ są to związki różniczkowe, to dynamiczna krzywa umocnienia jest określona z dokładnością do stałej, która definiuje stan początkowy w jakim znajduje się materiał w momencie nagłego obciążenia. Za taką stałą można na przykład uznać wartość odkształcenia wstępnego  $\varepsilon_w$  lub odpowiadającą jej wartość odkształcenia plastycznego  $\varepsilon_{pu}$  wówczas otrzymuje się

$$\sigma_d = h_d(\varepsilon, \varepsilon_w) \quad \text{lub} \quad \sigma_d = h_d(\varepsilon, \varepsilon_{pu}) \quad /15/$$

Wartość  $\varphi(\sigma, \varepsilon)$  określa w danym momencie moduł styczny reakcji dynamicznej materiału. Zależność /8/ dokładniej precyzuje możliwe reakcje dynamiczne materiału. Gdy  $f_s(\sigma, \varepsilon) = 0$ , to reakcja wykazuje charakter wyłącznie sprężysty i odpowiada opisowi zgodnemu z teorią SM. Z drugiej strony, jeżeli  $f_s(\sigma, \varepsilon)$  rośnie, to wówczas moduł styczny reakcji dynamicznej materiału zmniejsza się, w granicy można zapisać

$$\lim_{f_s(\sigma, \varepsilon) \rightarrow \infty} \varphi(\sigma, \varepsilon) = 0$$

Praktycznie taka ewentualność nie zachodzi i najmniejsze wartości  $\varphi(\sigma, \varepsilon)$  odpowiadają modułom stycznym statycznej krzywej umocnienia dla danych wartości  $\varepsilon_w$  oraz  $\sigma_{su} = h_s(\varepsilon_w)$ , to znaczy  $\varphi(\sigma, \varepsilon) = E_{ts}(\sigma_{su}, \varepsilon_w)$ , gdzie  $E_{ts}$  oznacza moduł styczny

statycznej krzywej umocnienia w punkcie  $(\sigma_{su}, \epsilon_u); E_{t_1} = \frac{d\sigma_s}{d\epsilon}$ . Ostatni przypadek jest odpowiednikiem opisu TKR w teorii propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach. Na podstawie przytoczonych rozważań otrzymuje się możliwe granice zmienności modułu stycznego reakcji dynamicznej materiału:

$$E \geq \varphi(\sigma, \epsilon) \geq E_{t_1}(\sigma_{su}, \epsilon_u) \quad /16/$$

Jeszcze raz należy stwierdzić, że badania doświadczalne zmierzające do określenia zakresu zmienności  $\varphi(\sigma, \epsilon)$ , a tym samym do określenia typu reakcji dynamicznej danego materiału, stanowią podstawę do dalszej dyskusji równania konstytutywnego CL. Ponadto, dla pełnej dyskusji równania CL, należałoby doświadczalnie wyznaczyć  $g(\sigma, \epsilon)$  lub  $f(\sigma, \epsilon)$

## 2. Opis własności reologicznych równaniem CL

Przez własności reologiczne materiałów rozumie się takie zjawiska jak pełzanie, relaksację naprężeń i wpływ prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia. Wszystkie te zjawiska są ze sobą ściśle powiązane, a ich wzajemny związek w przypadku metali znajduje potwierdzenie na gruncie rozważań fizykalnych na przykład prace [5], [10]. W tym przypadku warunki quasi-statyczne są rzeczywistymi warunkami doświadczalnymi i do opisu własności reologicznych można wykorzystywać równanie w postaci /2/ lub /10/.

Podczas procesu pełzania  $\frac{d\sigma}{dt} = 0$  i równanie /2/ redukuje się do postaci

$$\frac{d\epsilon}{dt} = g(\sigma, \epsilon), \quad \sigma^* = \text{const.} \quad /17/$$

Związek /17/ opisuje pierwsze stadium pełzania, gdy prędkości odkształcenia zmniejszają się z czasem. Po scałkowaniu równania /17/ otrzymuje się odwróconą względem czasu krzywą pełzania z dokładnością do stałej, przy czym  $\sigma^*$  jest stałą

wartością naprężenia w procesie pełzania

$$t = \int \frac{d\varepsilon}{g(\sigma^*, \varepsilon)} + A_1 \quad /18/$$

Rozumując w sposób odwrotny dochodzi się do wniosku, że funkcję  $g(\sigma, \varepsilon)$  można wyznaczać z prób na pełzanie. W tym celu rodzinę wyznaczonych doświadczalnie krzywych pełzania  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  dla stałych  $\sigma^*$  należy zróżniczkować względem czasu, następnie czas należy wyrugować, a krzywe prędkości pełzania w funkcji odkształcenia stanowią otrzymaną doświadczalnie zależność  $g(\sigma, \varepsilon)$ . Należy jednak pamiętać, że naprężenie jest traktowane w takiej procedurze jako parametr.

W procesie relaksacji naprężeń  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$  i równanie /10/ redukuje się do postaci

$$\frac{d\sigma}{dt} = f(\sigma, \varepsilon) \quad , \quad \varepsilon^* = \text{const} \quad /19/$$

lub po uwzględnieniu zależności /9/

$$\frac{d\sigma}{dt} = - \frac{E g(\sigma, \varepsilon)}{1 + E f_1(\sigma, \varepsilon)} \quad /20/$$

Równania /19/ i /20/ opisują prędkość relaksacji naprężenia i są różniczkowymi związkami wyznaczającymi w odwróconej postaci rodzinę krzywych relaksacji  $\sigma = \sigma(t)$  z dokładnością do stałej, stąd na podstawie /19/

$$t = \int \frac{d\sigma}{f(\sigma, \varepsilon^*)} + A_2 \quad /21/$$

lub na podstawie /20/

$$t = - E \int \frac{g(\sigma, \varepsilon^*)}{1 + E f_1(\sigma, \varepsilon^*)} d\sigma + A_3 \quad /22/$$

Należy także pamiętać, że  $f(\sigma, \dot{\epsilon}^*)$  posiada wartość ujemną oraz że odkształcenie całkowite  $\dot{\epsilon}^*$  jest traktowane w tym przypadku jako parametr. Podobnie jak dla przypadku pełzania, na podstawie doświadczalnie pomierzonych krzywych relaksacji naprężeń  $\sigma = \sigma(t)$ , które należy zróżniczkować względem czasu i następnie czas wyrugować, można otrzymać zależność  $f(\sigma, \dot{\epsilon})$ . O ile uprzednio z prób na pełzanie wyznaczono  $g(\sigma, \dot{\epsilon})$ , to na podstawie /9/ można wyznaczyć  $f(\sigma, \dot{\epsilon})$  lub  $f(\sigma, \dot{\epsilon})$ , na przykład

$$f_1(\sigma, \dot{\epsilon}) = - \left[ \frac{1}{\dot{\epsilon}} + \frac{g(\sigma, \dot{\epsilon})}{f(\sigma, \dot{\epsilon})} \right] \quad /23/$$

Procedura taka prowadząca do wyznaczenia  $g(\sigma, \dot{\epsilon})$  oraz  $f(\sigma, \dot{\epsilon})$  jest jednak skomplikowana, a tym samym stosunkowo pracochłonna i z punktu widzenia opracowania wyników doświadczeń obarczana błędami /zawiera różniczkowanie wykresne/.

Jednym z najbardziej rozpowszechnionych sposobów badania cech reologicznych materiałów są próby ze stałymi prędkościami odkształcenia, które zwiększa się dla kolejnych serii eksperymentów. W wyniku doświadczeń uzyskuje się szereg krzywych umocnienia dla różnych prędkości odkształcenia. W obecnie dyskutowanym przypadku prędkość odkształcenia odgrywa rolę parametru,  $\dot{\epsilon}_c = \text{const}$  oraz  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_c t$ . Pomimo zachowania stałej prędkości odkształcenia,  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_c$ , równanie w postaci /2/ lub /10/ nie daje się scałkować w zamkniętej postaci celem otrzymania odpowiedniej rodziny krzywych umocnienia dla danych  $\dot{\epsilon}_c$ . Można jedynie stwierdzić, na podstawie postaci równania /2/, że obydwie strony tego równania zachowują stałą wartość, mianowicie

$$f(\sigma, \dot{\epsilon}) \dot{\epsilon} + g(\sigma, \dot{\epsilon}) = \dot{\epsilon}_c, \quad \dot{\epsilon}_c = \text{const.} \quad /24/$$

Na podstawie /24/ oraz /8/ otrzymuje się



$$\dot{\sigma} = \varphi(\sigma, \varepsilon) [\dot{\varepsilon}_c - \gamma(\sigma, \varepsilon)] \quad /25/$$

Otóż prędkość naprężenia podczas deformacji ze stałą prędkością odkształcenia jest proporcjonalna do modułu stycznego granicznej dynamicznej krzywej umocnienia, z tym że prędkość naprężenia jest tym mniejsza im mniejsza prędkość odkształcenia  $\dot{\varepsilon}_c$ . O ile  $\sigma(t)$  wzrasta monotonicznie, to nie dopuszcza się w takim przypadku ujemnych wartości  $\dot{\sigma}$ , przeto musi zachodzić nierówność  $\dot{\varepsilon}_c > \gamma(\sigma, \varepsilon)$ . Jest to słuszne w zasadzie dla większości metali i stopów za wyjątkiem takich, które wykazują zjawisko dolnej i górnej granicy plastyczności.

Dyskusja równania konstytutywnego CL może zostać uzupełniona pewnymi spostrzeżeniami dotyczącymi modułów stycznych  $E_t$ . Na podstawie zależności /14/ można wprowadzić oznaczenie  $E_{td}(\sigma, \varepsilon) = \varphi(\sigma, \varepsilon)$ , natomiast na podstawie założenia o istnieniu statycznej krzywej umocnienia odpowiedni moduł styczny oznaczono przez  $\bar{E}_{ts}(\sigma, \varepsilon) = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon}$ . Stąd uwzględniając związek

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon},$$

otrzymuje się na podstawie /2/ dla warunków quasi-statycznych

$$\gamma(\sigma, \varepsilon) = \dot{\varepsilon} \left[ 1 - f(\sigma, \varepsilon) \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right] \quad , \quad /26/$$

uwzględniając równanie /8/

$$\gamma(\sigma, \varepsilon) = \dot{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{E_t}{E_{td}(\sigma, \varepsilon)} \right] \quad \text{lub} \quad \gamma(\sigma, \varepsilon) = \dot{\varepsilon} \left[ \frac{E_{td} - E_t}{E_{td}} \right] \quad /27/$$

Po odwróceniu względem  $E_t$  równania /27/ dochodzi się do związku określającego bieżący moduł styczny

$$E_t = E_{t0}(\sigma_s, \varepsilon) \left[ 1 - \frac{g(\sigma_s, \varepsilon)}{\varepsilon} \right] \quad /28/$$

Tak więc uzyskano inną niż poprzednio interpretację wyrażenia  $g(\sigma_s, \varepsilon)$ , jest to po prostu iloczyn prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}$  i względnego zmniejszenia bieżącego modułu stycz- nego odnoszonego do modułu granicznej dynamicznej krzywej umocnienia. Ogólnie można zatem stwierdzić, że na podstawie /28/, że bieżący moduł styczny jest modułem "zrelaksowanym" i jest zawsze mniejszy od  $E_{t0}$ , w granicznym przypadku

$$\lim_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} E_t = E_{t0}(\sigma_s, \varepsilon)$$

Wyniki dotychczasowych rozważań przedstawiono schematycznie na rys. 1a oraz rys. 1b. Rys. 1a przedstawia na płaszczyźnie  $\sigma_s, \varepsilon$  / dwie graniczne krzywe umocnienia, mianowicie krzywą statyczną  $\sigma_s = h_s(\varepsilon)$  oraz krzywą dynamiczną  $\sigma_s = h_d(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_0)$  przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Przedstawiono także krzywą dynamiczną  $\sigma_s = h_d(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_w)$ , scałkowaną dla wstępnego odkształcenia trwałego  $\varepsilon_w$ . Zakreskowane pole pomiędzy krzywymi zawiera wszystkie możliwe powierzchnie całkowe równania CL przy różnych wartościach  $\dot{\varepsilon}_w$ . Przez  $\sigma_{sc}$  i  $\sigma_{dc}$  oznaczono odpowiednio granice plastyczności statycznej i granicznej dynamicznej krzywej umocnienia,  $\varepsilon_{sc}$  oraz  $\varepsilon_{dc}$  oznaczają odpowiadające im odkształcenia. Na rys. 1a zaznaczono także moduły Younga i moduły styczne, przy czym przecięcie krzywych umocnienia  $\sigma_s = h_s(\varepsilon)$  oraz  $\sigma_s = h_d(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_w)$  wyznacza wartość odkształcenia wstępnego  $\varepsilon_w$  i punkt na krzywej  $\sigma_s = h_s(\varepsilon)$ , gdzie reakcja materiału na ewentualne dociążenie dynamiczne jest zgodna z modułem stycznym  $E_{t0}(\varepsilon_w)$ . Zagadnienie to jest niezmiernie istotne w problemach falowych. Z tego powodu podobny schemat przedstawiono na rys. 1b, odnosi się on jednak do modułów stycznych  $E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ . Zakreskowany obszar zawiera wszystkie możliwe reakcje dynamiczne

materiału. Od góry pole to jest ograniczone prostą  $E_r = \bar{E}$  od dołu natomiast granicę stanowi linia  $E_r = h_r(\varepsilon)$ , która odpowiada statycznej krzywej umocnienia  $\sigma_r = h_r(\varepsilon)$ . Granicznej dynamicznej krzywej umocnienia odpowiadają moduły stycznne  $E_{r,d}(\varepsilon, 0)$ . Gdy występuje odkształcenie wstępne  $\varepsilon_{w0}$ , krzywej umocnienia  $\sigma_r = h_r(\varepsilon, \varepsilon_{w0})$  na płaszczyźnie  $(E_r, \varepsilon)$  odpowiadają moduły stycznne  $E_{r,d}(\varepsilon, \varepsilon_{w0})$ .

3. Opis procesów falowych w prętach z wykorzystaniem równania CL i sprawdzenie teorii

Ze względu na specyfikę opisu zagadnień falowych w prętach, a w szczególności na potrzebę zdefiniowania procesu obciążania i odciążania równanie /1/ należy zapisać następująco

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \langle g(\sigma, \varepsilon) \rangle + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \begin{cases} f(\sigma, \varepsilon), & \frac{\partial \sigma}{\partial t} > 0, \\ E^{-1}, & \frac{\partial \sigma}{\partial t} \leq 0, \end{cases} \quad /29/$$

gdzie operator  $\langle \rangle$  spełnia następujące warunki

$$\langle g(\sigma, \varepsilon) \rangle = \begin{cases} g(\sigma, \varepsilon), & \sigma > \sigma_r \\ 0, & \sigma \leq \sigma_r \end{cases}$$

Gdy zachodzi proces dynamicznego obciążania wybranego elementu materiału, a naprężenie wywołane tym obciążeniem przekroczy wartość  $\sigma_r = h_r(\varepsilon)$ , wówczas element ten, zgodnie z równaniem /29/, podlega następującym fazom obciążania i odciążania

obciążenie w stanie sprężystym -

1. 1.  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} > 0, \quad \sigma \leq \sigma_{s0}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$

2. odciążanie w stanie plastycznym

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} > 0, \quad \sigma > \sigma_{so}, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = f(\sigma, \epsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \epsilon)$$

3. początek odciążania - punkt  $(\sigma_m, \epsilon_k)$  na płaszczyźnie  $(\sigma, \epsilon)$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0, \quad \sigma = \sigma_m, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = g(\sigma_m, \epsilon_k)$$

4. pierwsza faza odciążania

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} < 0, \quad \sigma > \sigma_s, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \epsilon)$$

w fazie tej w dalszym ciągu zachodzi przyrost odkształcenia całkowitego, tj.  $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} > 0$

5. koniec pierwszej fazy odciążania  $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0$ , punkt  $(\sigma_k, \epsilon_m)$  na płaszczyźnie  $(\sigma, \epsilon)$ ,  $\epsilon = \epsilon_m$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} < 0, \quad \sigma > \sigma_s, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -E g(\sigma_k, \epsilon_m)$$

od tego momentu całkowite odkształcenie maleje i

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} < 0, \quad \sigma > \sigma_s, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \epsilon)$$

6. moment całkowitej relaksacji materiału, punkt  $(\sigma_r, \epsilon_r)$  na płaszczyźnie  $(\sigma, \epsilon)$ ,  $g(\sigma, \epsilon) = 0$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} < 0, \quad \sigma_r = h_r(\epsilon_r), \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

7. odciążenie sprężyste

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} < 0, \quad \sigma < \sigma_s, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Podczas procesu propagacji fali sprężysto-plastycznej w każdym przekroju półnieskończonego pręta, dostatecznie bliskim  $x = 0$ , materiał przechodzi wszystkie wymienione fazy. Fazy te znajdują odbicie w równaniach charakterystyk oraz w zależnościach na charakterystykach /patrz dodatek/, przy czym oddzielny komplet równań musi być spełniony na płaszczyźnie fasowej ( $x^+$ ) w obszarze obciążania, a oddzielny w obszarze odciążania. Zgodnie z zależnościami wg dodatku /D.14/ oraz /D.15/ i /D.19/, /D.22/ oraz /D.23/ komplet otrzymanych równań przedstawi się następująco:  
dla przypadku obciążania  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} > 0$  otrzymano trzy rodziny charakterystyk /wg dodatku /D.19//

$$\frac{dx}{dt} = C(\sigma, \varepsilon) = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho f(\sigma, \varepsilon)}} \quad , \quad /30//D.19/$$

$$dx = 0$$

oraz dwie zależności na charakterystykach /wg dodatku /D.22/ i /D.23//

$$dx \neq 0 \quad d\sigma = \pm \frac{1}{\rho C(\sigma, \varepsilon)} d\sigma + g(\sigma, \varepsilon) dx, \quad /31//D.22/$$

$$dx = 0 \quad d\varepsilon = f(\sigma, \varepsilon) d\sigma + g(\sigma, \varepsilon) d\sigma \quad . \quad /32//D.23/$$

Zależności dla przypadku odciążania są identyczne z teorią SM, otrzymuje się wówczas dwie rodziny charakterystyk /wg dodatku /D.14//

$$\frac{dx}{dt} = C_0 = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad /33//D.14/$$

oraz zależność wzdłuż charakterystyk

$$d\sigma = \pm \frac{d\sigma}{\rho C_0} + g(\sigma, \varepsilon) dx \quad /34//D.15/$$



Rozwiązanie problemu propagacji fali jest całkowite, gdy zostaje wyznaczona siatka charakterystyk na płaszczyźnie fazowej  $(x, t)$  i gdy znane są wartości naprężenia  $\sigma$ , odkształcenia  $\varepsilon$  i prędkości masowej  $v$  wzdłuż charakterystyk. Takie sformułowanie problemu propagacji fali w teorii CL pociąga za sobą pojawienie się pewnej granicznej linii  $x = F(t)$  na płaszczyźnie fazowej, wzdłuż której zachodzi  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$ . Linia  $x = F(t)$ , jako miejsca geometryczne punktów gdzie zachodzi warunek  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$ , swana jest krzywą odciążenia i krzywa ta rozgranicza na płaszczyźnie  $(x, t)$  obszary odciążenia i obciążenia, lub inaczej, obszary stosowalności związków CL i SM. Ze względu na to, że w dalszej części pracy rozważa się jedynie przypadek pręta późnieskończonego, odkształcanego na końcu ze stałą prędkością uderzenia  $v_0 > \frac{c_{dc}}{\rho c_0}$ , dalsza dyskusja krzywej odciążenia zostanie pominięta.

Schematyczne przedstawienie kształtu charakterystyk wynikającego z teorii CL dla późnieskończonego pręta uderzanego na końcu ze stałą prędkością  $v_0(0, t) = \text{const}$  zawiera rys. 2. Można tu rozróżnić dwa przypadki.

Pierwszy przypadek zachodzi, gdy jest spełniony warunek

$$\frac{c_{dc}}{\rho c_0} < v_0(0, t) < \frac{c_{dc}}{\rho c_0},$$

wówczas zarówno dla obszaru obciążenia jak i odciążenia słuszna jest teoria SM.

Drugi przypadek ma miejsce, gdy

$$v_0(0, t) \geq \frac{c_{dc}}{\rho c_0},$$

wówczas rozkład charakterystyk odpowiada rys. 2. W obszarze I  $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $v = 0$ , w obszarze II spełnione są równania /30/, /31/ i /32/, co prowadzi do pojawienia się krzywoliniowych charakterystyk, wreszcie w obszarze III spełnione są zależności /33/ i /34/. Na uwagę zasługuje obserwacja, że na początku procesu propagacji, od uderzonego końca pręta propaguje się fala Riemanna zgodnie z rozwiązaniem KTR i uwzględnienie krzywej dynamicznej  $\sigma_d = h_d(\varepsilon)$  w tym rozwiązaniu.

W miarę upływu czasu naprężenie ulega relaksacji i charakterystyki zmieniają pochylenie dążąc stopniowo do wartości  $\frac{dx}{dt} = \pm C_0$ . Ponieważ zjawisko relaksacji naprężeń zachodzi natychmiast po pojawieniu się fali Riemanna, to początek odciążenia wykazuje takie samo pochylenie jak charakterystyka najwolniejszej fali w przekroju  $x = 0$ . Wraz z upływem czasu pochylenie krzywej odciążania dąży do pochylenia  $\frac{dx}{dt} = C_0$  i w punkcie  $(x_1, t_1)$  pochylenie to osiąga. Oznacza to, że w tym punkcie naprężenie zmniejszyło się do wartości  $\sigma_{c0}$ . Dalej relaksacja naprężenia na osi fali zachodzi zgodnie z teorią SM.

Na uwagę zasługuje wynik, że krzywoliniowe charakterystyki w obszarze II są opisane równaniem /30/, do którego wchodzi jedynie związek  $f(\sigma, \varepsilon)$  z równania konstytutywnego /1/. Wniosek, który otrzymuje się jest taki, że posiadając znajomość rozkładu charakterystyk w pobliżu  $x = 0$ , tj.  $\frac{dx}{dt} = C(\sigma, \varepsilon)_{x=0}$  można wyznaczyć nastychmiastową reakcję dynamiczną materiału w postaci funkcji  $f(\sigma, \varepsilon)$ , lub  $f_1(\sigma, \varepsilon)$ , a także zgodnie z /14/ w postaci  $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ . Natomiast związek /31/ wzdłuż charakterystyk pozwala na wyznaczenie wyrażenia  $g(\sigma, \varepsilon)$  opisującego nienatychmiastową reakcję materiału, lub inaczej jego własności reologiczne.

Uwzględniając związek /30/ można wyznaczyć  $f(\sigma, \varepsilon)$ , tak więc

$$f(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{\rho C^2(\sigma, \varepsilon)} \quad \text{lub} \quad \varphi(\sigma, \varepsilon) = \rho C^2(\sigma, \varepsilon). \quad /35/$$

Ponieważ jednak dla metali początek fali propaguje się z prędkością  $C_0$ , to na podstawie /5/ można znaleźć zależność  $f_1(\sigma, \varepsilon)$

$$f_1(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{E} \left[ \frac{E}{\rho} \frac{1}{C^2(\sigma, \varepsilon)} - 1 \right] \quad , \quad /36/$$

oznaczając

$$\alpha(\delta, \varepsilon) = \frac{C(\delta, \varepsilon)}{C_0}$$

otrzymuje się ostatecznie

$$f_+( \delta, \varepsilon ) = \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{\alpha^2(\delta, \varepsilon)} - 1 \right] \quad /37/$$

Dla większych wartości odkształceń zachodzi nierówność  $\alpha^2(\delta, \varepsilon) \gg 1$  ze względu na to, że  $C_0 \gg C(\delta, \varepsilon)$  i stąd

$$f_+( \delta, \varepsilon ) \approx \frac{1}{E \alpha^2(\delta, \varepsilon)} \quad /38/$$

Na podstawie pomiaru procesu falowego w pręcie i wyznaczeniu stąd  $C(\delta, \varepsilon)$  związki /35/, /36/ lub /37/ mogą stanowić podstawę do doświadczalnego wyznaczenia części równania konstytutywnego CL w postaci funkcji  $f(\delta, \varepsilon)$ ,  $q(\delta, \varepsilon)$  lub  $f_+( \delta, \varepsilon )$ . Stwierdzenie to dotyczy zarówno generacji fali na próbce wstępnie nieobciążonej jak również fali dociążania. O ile na przykład okazałoby się, że w pewnym obszarze wartości  $\delta$  lub  $\varepsilon$  zachodzi  $f_+( \delta, \varepsilon ) \approx 0$ , wówczas teoria SM byłaby bardziej siuszną, ma to miejsce dla  $\alpha(\delta, \varepsilon) \approx 1$ , a tym samym gdy  $C(\delta, \varepsilon) \approx C_0$ . Celem weryfikacji teorii na drodze pomiarów falowych, należy sporządzić wykresy  $f_+( \delta, \varepsilon, \varepsilon_w )$ , znalezione z równania /37/, przy czym  $\varepsilon_w$  stanowi odkształcenie wstępne w przypadku generacji fali dociążania i odgrywa rolę parametru. Hipotetyczny pozytywny wynik takiego sprawdzenia dla teorii CL przedstawiono na rys. 3. Z przedstawionej sytuacji wynika, że w momencie dociążania dla dwóch przedstawionych na rys. 3 przypadków zachodzi  $f_+( \delta, \varepsilon, \varepsilon_w ) \neq 0$  oraz  $f_+( \delta, \varepsilon, \varepsilon_w ) \neq 0$  i fala dociążania będzie propagować się z prędkością mniejszą od  $C_0$ , co oznacza z kolei, że punkt  $\delta_w$  wg rys. 1a znajduje się poniżej krzywej statycznej  $\delta_s = h_s(\varepsilon)$ .

Uzyskane na drodze doświadczalnej w pierwszej części pracy

[7] prędkości fali dociążania dla aluminium, miedzi i stali /blacha głębokotłoczna/ mogą służyć za podstawę do wyznaczenia zależności  $f_d(\varepsilon, \varepsilon_w)$ . Jest to możliwe, ponieważ na nastawianych odległościach pomiarowych nie stwierdzane dla wszystkich badanych materiałów wyraźnego zakrzywienia się charakterystyk oszoła fali dociążania. Na podstawie rysunków od rys. 7.18 do rys. 7.24 wg [7] sporządzone wykresy zależności  $\alpha(\varepsilon_w)$ , przedstawione je na rys. 4, rys. 5 i rys. 6. Z kolei w oparciu o te wyniki sporządzone szukane wykresy  $f_d(\varepsilon, \varepsilon_w)$  dla różnych wartości  $\varepsilon_w$ , rezultaty przedstawione na rys. 7, rys. 8 i rys. 9.

Można tu wyróżnić dwa rodzaje wyników. Pierwszy z nich odnoszący się do miedzi i aluminium reprezentują rys. 7 i rys. 8. Na ich podstawie można stwierdzić, że punkty  $C_w$  dla wszystkich przypadków leżą nieco powyżej krzywej statycznej  $C_s = h_s(\varepsilon)$ , ponadto wartości  $f_d$  są dla większych wartości odkształceń różne od zera i szybko rosną. Świadczy to o początkowo małej, a następnie szybko wzrastającej natychmiastowej reakcji plastycznej materiału. Wynik taki prowadzi do wniosku, że jedynie bardzo małe zaburzenia nałóżone na początkowy stan plastyczny można opisywać w przypadku badanych dwóch metali teorią SM, gdy intensywność dociążania równie pojawia się reakcja plastyczna i wówczas  $f_d \neq 0$ . Przy czym stwierdzona reakcja plastyczna jest znacznie większa dla aluminium niż dla miedzi.

Nieco odmienny wynik uzyskano dla stali. Należy równocześnie dodać, że przy obliczeniach zależności  $\alpha(\varepsilon_w)$  uwzględniono zaobserwowane uprzednio zmniejszenie modułu Younga po wstępnej deformacji plastycznej [7]. Przyjęto średnie względne zmniejszenia modułu o 15%, co w rezultacie zmniejsza prędkość fali sprężystej dociążania z  $(C_w)_{st}^0 = 5068,6 \text{ ms}^{-1}$  do  $(C_w)_{st}^n$

$$(C_w)_{st}^n = \sqrt{0,85} (C_w)_{st}^0$$

stąd  $(C_0)_{st}^* = 4673,0 \text{ ms}^{-1}$  i względne zmniejszenie prędkości  $C_0$  osiąga wartość 7,8 %.

Rezultaty dla stali przedstawione na rys. 9 dowodzą, że poszczególne punkty  $\sigma_w$  leżą znacznie powyżej krzywej statycznej  $\sigma_s = h_s(\varepsilon)$  i w zakreślowanym obszarze można z powodzeniem stosować teorię SM. Tak więc dla stali nie stwierdzono początkowej reakcji plastycznej materiału. Reakcja ta pojawia się jednak przy odpowiednio dużych odkształceniach na czole fali dociążania.

#### 4. Dyskusja oraz wnioski

Z matematycznego punktu widzenia zarówno wielkość natychmiastowej jak i nienatychmiastowej reakcji plastycznej materiału jest związana z kształtem pewnej powierzchni całkowej

$$h(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_w, t) = 0 \quad /39/$$

równania CL w postaci /1/ lub /7/. Równanie w postaci /1/ stanowi niekompletne równanie różniczkowe Pfaffa. Równanie Pfaffa w kompletnej postaci można zapisać następująco

$$P(\sigma, \varepsilon, t)d\varepsilon + Q(\sigma, \varepsilon, t)d\sigma + R(\sigma, \varepsilon, t)dt = 0 \quad /40/$$

W przypadku równania /4/

$$P(\sigma, \varepsilon, t) \equiv 1; \quad Q(\sigma, \varepsilon, t) \equiv -f(\sigma, \varepsilon); \quad R(\sigma, \varepsilon, t) \equiv -g(\sigma, \varepsilon),$$

współczynniki  $P, Q, R$  muszą posiadać ciągle pochodne w rozważanym obszarze zmiennych  $\sigma, \varepsilon, t$ . Jedną z metod całkowania równania Pfaffa polega na rozwiązaniu zwyczajnego równania różniczkowego

$$d\varepsilon - f(\sigma, \varepsilon)d\sigma = 0 \quad /41/$$

rozwiązanie tego równania jest równaniem /15/ i stąd



$$\zeta - h_d(\xi) - A = 0 \quad \text{lub} \quad \alpha(\zeta, \xi, \xi_w) - A = 0, \quad /42/$$

gdzie A oznacza stałą całkowania zależną od  $\xi_w$ . Następnie powierzchnia całkowa /39/ jest opisana równaniem

$$h(\zeta, \xi, \xi_w, t) \equiv \alpha(\zeta, \xi, \xi_w) - \beta(t) - B = 0, \quad /43/$$

B oznacza nową stałą całkowania, natomiast  $\beta(t)$  jest rozwiązaniem zwyczajnego równania różniczkowego otrzymanego z warunku

$$\frac{1}{P(\zeta, \xi, t)} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{1}{Q(\zeta, \xi, t)} \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} = \frac{1}{R(\zeta, \xi, t)} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial t} \right). \quad /44/$$

Równanie różniczkowe zgodnie z warunkiem /44/ ma postać

$$\frac{d\beta}{dt} = - \frac{g(\zeta, \xi)}{f(\zeta, \xi)} \quad \text{lub wg /9/} \quad \frac{d\beta}{dt} = \xi(\zeta, \xi), \quad /45/$$

stąd

$$\beta(t) = - \int \frac{g(\zeta, \xi)}{f(\zeta, \xi)} dt \quad \text{lub} \quad \beta(t) = \int \xi(\zeta, \xi) dt. \quad /46/$$

Podstawiając /46/ do /43/ otrzymuje się powierzchnię całkową w postaci

$$h(\zeta, \xi, \xi_w, t) \equiv \zeta - h_d(\xi, \xi_w) + \int \frac{g(\zeta, \xi)}{f(\zeta, \xi)} dt - B = 0 \quad /47/$$

lub

$$\zeta = h_d(\xi, \xi_w) - \int \frac{g(\zeta, \xi)}{f(\zeta, \xi)} dt + B \quad /48/$$

Gdy  $\dot{\epsilon}_0 = 0$  to również  $\dot{D} = 0$ , powierzchnia całkowita dla tego przypadku wraz z przekrojami  $\dot{\epsilon} = \text{const}$  została przedstawiona schematycznie na rys. 10. Na rysunku tym przedstawiono także krzywą pełzania jako przekrój powierzchni całkowitej  $h(\dot{\epsilon}, \epsilon, t) = 0$  płaszczyznę  $\dot{\epsilon} = \text{const}$ , a także krzywą relaksacji jako przekrój powierzchni całkowitej płaszczyznę  $\epsilon = \text{const}$ .

Zgodnie z dyskusją przeprowadzoną poprzednio, kompletne wyznaczenie powierzchni całkowitej wymaga posiadania znajomości "a priori" dynamicznej krzywej umocnienia  $\dot{\sigma} = h_d(\dot{\epsilon}, \epsilon_w)$ , uzyskanej z nieskończenie dużą prędkością odkształcenia. Założenie to należy uznać za kontrowersyjne i wymagające dalszej dyskusji.

Po pierwsze może być ono dyskutowane z punktu widzenia mechaniki rozprzestrzeniania się fal sprężysto-plastycznych. Otóż założenie o istnieniu krzywej dynamicznej prowadzi do pojawienia się w teoretycznym opisie procesu propagacji nieskończenie dużej prędkości odkształcenia na czole fali, a w szczególności w pobliżu uderzonego końca pręta. Wszystkie obserwacje doświadczalne przeczą temu założeniu, gdyż rzeczywiste prędkości odkształcenia w takich wypadkach nie przekraczają wartości  $1000 \text{ s}^{-1}$ . W rozumieniu teorii CL krzywe dociążenia wyznaczone we współrzędnych  $(\dot{\epsilon}, \epsilon)$  na wykresach od rys. 7.25 do rys. 7.27 w pracy [7] są dynamicznymi krzywymi umocnienia dla  $\dot{\epsilon} = \infty$ , w rzeczywistości prędkości odkształcenia zawierały się w przedziale  $130 \text{ s}^{-1} < \dot{\epsilon} < 200 \text{ s}^{-1}$ . Należy dodać, że teoria SM nie zawiera takiego paradoksu i na czole fali prędkości odkształcenia przyjmują skończone wartości.

Z drugiej strony założenie istnienia dynamicznej krzywej umocnienia  $\dot{\sigma}_d = h_d(\dot{\epsilon}, \epsilon_w)$  wymaga dyskusji od strony fizycznej. Teoria termicznie aktywowanych procesów dyslokacyjnych w metalach przewiduje, że przy odpowiednim obniżeniu temperatury do wartości bliskiej zera bezwzględnego,

lub przy odpowiednio dużych prędkościach odkształcenia, dyslokacje przechodzą przez bariery energetyczne /przeszkody/ bez udziału harmonicznych drgań sieci krystalicznej [10]. Wartość naprężenia, przy której drgania harmoniczne sieci krystalicznej nie uczestniczą w procesie deformacji plastycznej może zostać określona przez wyznaczenie atermicznej krzywej umocnienia, tj. krzywej umocnienia danego metalu  $\sigma_0 = h_0(\epsilon)$ , odniesionej do zera bezwzględnego, tj. dla  $T = 0^\circ \text{K}$ . Krzywe takie dla technicznie czystego aluminium i miedzi wyznaczone w pracy [11]. Celem wyznaczenia atermicznej krzywej umocnienia należy przeprowadzić obszerne badania w różnych temperaturach i przy różnych prędkościach odkształcenia. W wyniku takich doświadczeń uzyskuje się serię wykresów prowadzących do wyznaczenia kolejnych punktów  $(\sigma_0, \dot{\epsilon})$  na krzywej atermicznej. Schemat takiego wykresu dla jednego punktu przedstawiono na rys. 11.

W rzeczywistości jest oczywiście możliwe przekroczenie wartości naprężenia  $\sigma_0$  dla  $T > 0^\circ \text{K}$ , przy czym w miarę wzrostu temperatury dla przekroczenia  $\sigma_0$  niezbędna jest coraz większa prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}_0$ . Teoretycznie wyznaczone dla różnych metali prędkości odkształcenia wynoszą  $\dot{\epsilon}_0 \approx 10^3 \text{ s}^{-1}$  dla  $T \approx 290^\circ \text{K}$ . Przy bardzo dużych prędkościach odkształcenia, rzędu  $10^4 \sim 10^6 \text{ s}^{-1}$ , spotykanych podczas propagacji fal uderzeniowych, musi zachodzić jakościowa zmiana mechaniczna pokonywania przeszkód przez dyslokacje. Stwierdzono, że powyżej  $\dot{\epsilon}_0$  niektóre metale wykazują liniową lepkość, np. [12].

Przedstawiony obraz skłania do stwierdzenia, że z fizycznego punktu widzenia dynamiczna krzywa zakładana w teorii CL nie istnieje. Autor niniejszego opracowania postulowałby, aby teoretyczną dynamiczną krzywą umocnienia  $\sigma_d = h_d(\epsilon)$  utożsamiać z atermiczną krzywą umocnienia  $\sigma_0 = h_0(\epsilon)$ . Dla zagadnień falowych w prętach nigdy w zasadzie nie zachodzi przekroczenie atermicznej krzywej umocnienia, stąd też ogranicza ona od strony stosowalność teorii CL. Natomiast rów-

nanie konstytutywne /1/ nie jest odpowiednie do interpretacji eksperymentów przeprowadzanych w obszarze fal uderzeniowych, gdzie  $\dot{\epsilon} > 10^3 \text{ s}^{-1}$ .

Równie istotnym zagadnieniem, o którym wspomniano poprzednio, jest moment pojawienia się natychmiastowej reakcji plastycznej. Uzyskane rezultaty w obecnej pracy i przedstawione na rys. 7, rys. 8 wskazują, że natychmiastowa reakcja plastyczna pojawia się w przypadku Al i Cu z pewnym nieznacznym opóźnieniem, oznacza to z kolei, że punkt  $\sigma_{dc}$  z rys. 1a znajduje się nieco powyżej krzywej statycznej  $\sigma_s = h_s(\epsilon)$ . Nie stwierdzono natomiast faktu, że dla  $\dot{\epsilon}_d = 0$  zachodzi  $f_1(\sigma, \dot{\epsilon}) \neq 0$ , wówczas punkt  $\sigma_{dc}$  leżałby poniżej krzywej statycznej  $\sigma_s = h_s(\epsilon)$ , tak jak to przedstawiono na rys. 1a. Ta ostatnia sytuacja zachodzi wówczas, gdy prekursor fali dociążania przemieszcza się z prędkością  $C < C_c$ , może to jednak być także spowodowane zarówno zmniejszeniem modułu Younga na skutek wstępnej deformacji plastycznej jak i wzrostem gęstości materiału. Jednak przypadek zwiększenia gęstości materiału wydaje się mało prawdopodobny. Dotychczas brak jednak danych na ten temat, jedynie w pracy [4] zaobserwowano dla miedzi podczas propagacji fal ścinania nieznaczące zmniejszenie prędkości prekursora, wynik ten przedstawiono na rys. 12. Natomiast jako fakt stwierdzony doświadczalnie należy uznać, że dla żelaza i miękkiej stali zachodzi zmniejszanie się modułu Younga wskutek deformacji plastycznej [13], obserwacja ta została potwierdzona w części doświadczalnej pracy [7]. Zmiana modułu Younga wywołana odkształceniem plastycznym nie może jednak powodować większych zmian prędkości fali sprężystej  $C_c$  niż kilka procent.

Uzyskane wyniki prowadzą do wniosku, że stosowalność teorii CL jest również ograniczona z tym, że dla pewnej grupy metali /w obecnym przypadku Al oraz Cu/ stosowalność ta jest lepsza, natomiast dla stali istnieje znaczny obszar odkształceń, w którym teoria SM jest ściśle spełniona. Lep-

sza zgodność teorii CL w przypadku Al i Cu daje się tłumaczyć wspomnianymi na wstępie efektami historii prędkości odkształcenia, które stwierdzono doświadczalnie dla aluminium [8], [9]. Za dalszym badaniem teorii CL przemawia fakt doświadczalny, że pochylenie charakterystyk na czole fali dociążenia jest zgodne z rys. 2 /propaguje się fala Riemanna/, natomiast nie są one nachylone zgodnie z równaniem  $\frac{dx}{dt} = C_0$ , co przewiduje z kolei teoria SM. Obserwacja ta została potwierdzona również dla miedzi w pracy [18]. Niezbędne są zatem dalsze badania w tym kierunku.

Analiza wyników doświadczalnych jak i przeprowadzona dyskusja skłaniałyby do następujących wniosków:

- 1 - Równanie konstytutywne /1/ CL umożliwia opis własności reologicznych metali, takich jak pełzanie, relaksacja i wpływ prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia. Równanie konstytutywne CL można przedstawić w wielu różniących się postaciach.
- 2 - Rozważając równanie CL z punktu widzenia eksperymentów należy zawsze zbadać natychmiastową i opóźnioną reakcję plastyczną materiału.
- 3 - Rozwiązanie zagadnienia falowego w pręcie z użyciem równania konstytutywnego CL /teoria propagacji CL/ prowadzi do krzywoliniowych rodzin charakterystyk, przy czym ich pochylenie zawiera się pomiędzy pochyleniami wynikającymi z teorii TKR oraz teorii SM.
- 4 - Do równania charakterystyk wg teorii CL wprowadzono zależność  $f_A(\bar{\epsilon}, \dot{\epsilon})$ , która pozwala na doświadczalne badanie natychmiastowej reakcji plastycznej materiału drogą generacji i pomiaru fal sprężysto-plastycznych.
- 5 - Stwierdzone doświadczalnie dla aluminium i miedzi pochylenie charakterystyk fali dociążenia jest zgodne z przewidywaniami teorii CL. Pochylenie charakterystyk pokrywa się również z teorią TKR z przyjęciem dynamicznej krzywej umocnienia uzyskanej z odpowiednią średnią prędkością odkształcenia jako parametrem.

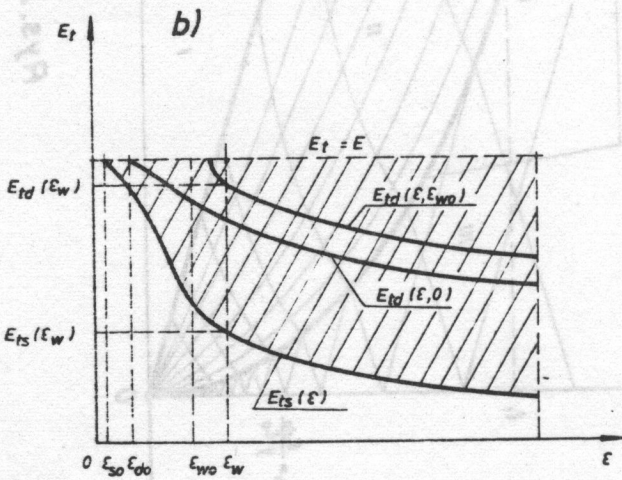
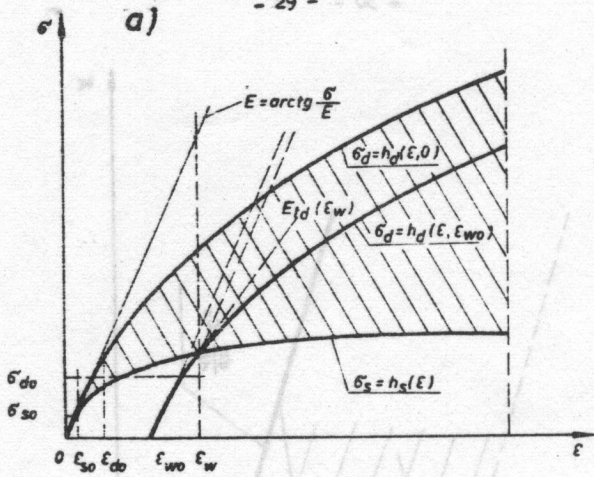


- 6 - Stwierdzono specyficzne zachowanie się stali głęboko-  
tłocznej, gdyż w stosunkowo dużym obszarze odkształceń  
na czole fali dociążania jest ściśle spełniona teoria  
SM. Ponadto zaobserwowano zmniejszanie się modułu Youn-  
ga badanej stali na skutek deformacji plastycznej, co z  
kolei pociąga za sobą zmniejszanie się o kilka procent  
prędkości prekursora na czole fali dociążania.
- 7 - Założenie istnienia dynamicznej krzywej umocnienia  
 $\sigma_d = h_d(\epsilon, \dot{\epsilon}, \omega)$  jest kontrowersyjne, gdyż z jednej strony  
teoretyczne rozwiązanie zagadnienia propagacji dla pręta  
uderzanego ze stałą prędkością prowadzi do pojawienia  
się nieskończenie dużej prędkości odkształcenia w pobli-  
żu końca pręta,  $x = 0$ , z drugiej natomiast strony zało-  
żenie takie nie jest poprawne z fizykalnego punktu wi-  
zdenia.
- 8 - Na drodze doświadczalnej stwierdzono, że dla pewnej gru-  
py metali /Al, Cu/ można w przypadku fali dociążania z  
lepszą dokładnością stosować teorię CL, zachowanie się  
innej grupy metali /w obecnym przypadku stal/ może być  
lepiej opisane teorią SM.

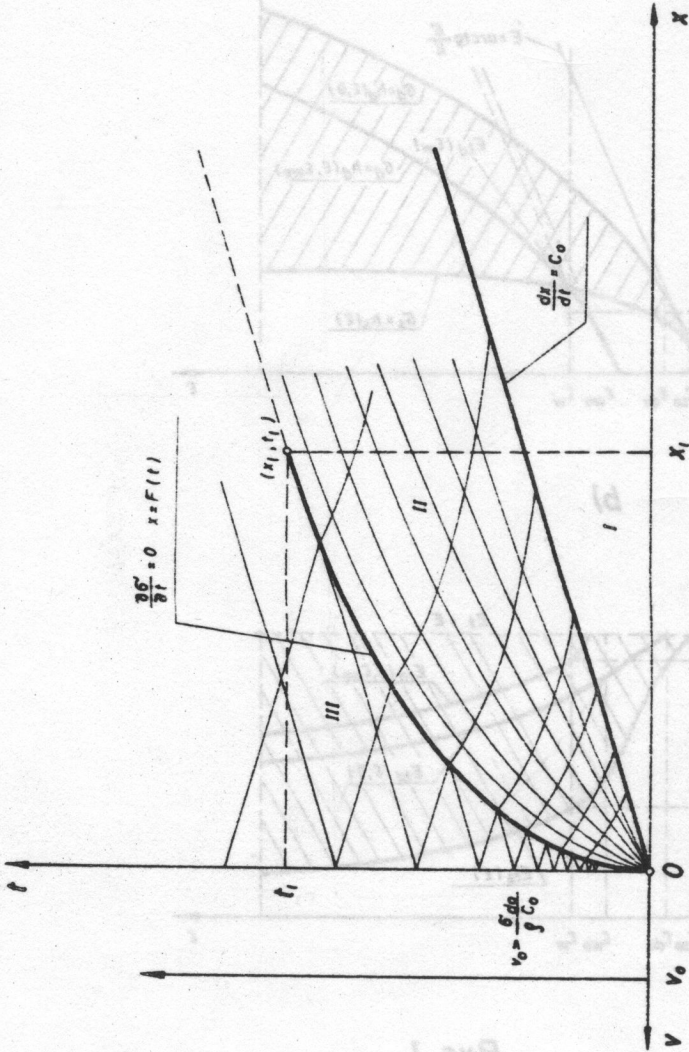
Literatura cytowana w tekście

- [1] Alter B.E.K., Curtis C.W., Effect of Strain - Rate on the Propagation of a Plastic Strain Pulse Along a Lead Bar, J.Appl.Phys., 9, 27 (1956), 1079.
- [2] Bell J.F., Propagation of Plastic Waves in Prestressed Bars, U.S. Navy Technical Report No 5, Baltimore, The John Hopkins University, (1951).
- [3] Bell J.F., Stein A., The Incremental Loading Wave in the Prestressed Plastic Field, J. Mécanique, 4, 1 (1962), 395.
- [4] Campbell J.D., Dowling A.R., The Dynamic Behavior of Materials Subjected to Dynamic Incremental Shear Loading, J.Mech. Phys. Solids, 1, 18 (1970), 43.
- [5] Conrad H, Thermally Activated Deformation of Metals, J. of Metals, 7, 16 (1964), 582.
- [6] Cristescu N, Some Problems of the Mechanics of Extensible Strings, Proc. Int. Symp. on Stress Waves in Anelastic Solids, Brown Univ., (1963).
- [7] Klepaczko J, Doświadczalne badania sprężysto - plastycznych procesów falowych w metalach, Cz. 1, Badanie wiasności metali i fal przyśpieszenia w metalach, Prace IPPT, 61, (1970).
- [8] Klepaczko J, Effects of Strain - Rate History on the Strain Hardening Curve of Aluminium, Arch. Mech. Stos., 2, 19 (1967), 211.
- [9] Klepaczko J, Strain Rate History Effects for Polycrystalline Aluminium and Theory of Intersections, J. Mech. Phys. Solids, 3, 16 (1968), 255.
- [10] Klepaczko J, Fizyczne koncepcje równań konstytutywnych i termicznie aktywowane procesy dyslokacyjne w metalach, Mech. Teoret i Stos., 3, 7 (1969) 261.

- [11] Klepaczko J., O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury, Rozpr. Inż., 3, 13 (1965), 561.
- [12] Kumar A. Kumble R.G., Viscous Drag on Dislocation of High Strain Rates in Copper, J. Appl. Phys., 9, 10 (1969), 3475.
- [13] Litoński J., Klepaczko J., Wpływ wstępnego plastycznego rozciągania na moduł Younga mosiądzu i niskowęglowej stali, Rozpr. Inż., 2, 12 (1964), 251.
- [14] Lubliner J., A Generalized Theory of Strain - Rate Dependent Plastic Wave Propagation in Bars, J. Mech. Phys. Solids, 2, 12 (1964), 59.
- [15] Lubliner J., The Strain - Rate Effect in Plastic Wave Propagation, J. de Mécanique, 1, 4 (1965), 111.
- [16] Malvern L.E., Plastic wave Propagation in a Bar of Material Exhibiting a Strain Rate Effect, Quart. Appl. Math., 4, 8 (1951), 405.
- [17] Malvern L.E., The Propagation of Longitudinal Waves of Plastic Deformation in a Bar of Material Exhibiting a Strain - Rate Effect, J. Appl. Mech., 2, 16 (1951), 203.
- [18] Santosham T.V., Ramsey H., Small Plastic Strain Wave Propagation in Prestressed Soft Copper Rods, Int. J. Mech. Sci., 6, 12 (1970), 447.
- [19] Simmons J.A., Hauser F., Dorn J.E., Mathematical Theories of Plastic Deformation Under Impulsive Loading, Univ. of California Press, (1962).
- [20] В.В. Соколовским, Распространение упруго - пластических волн в стержнях. ПММ, 3, 12 /1948/, 261.



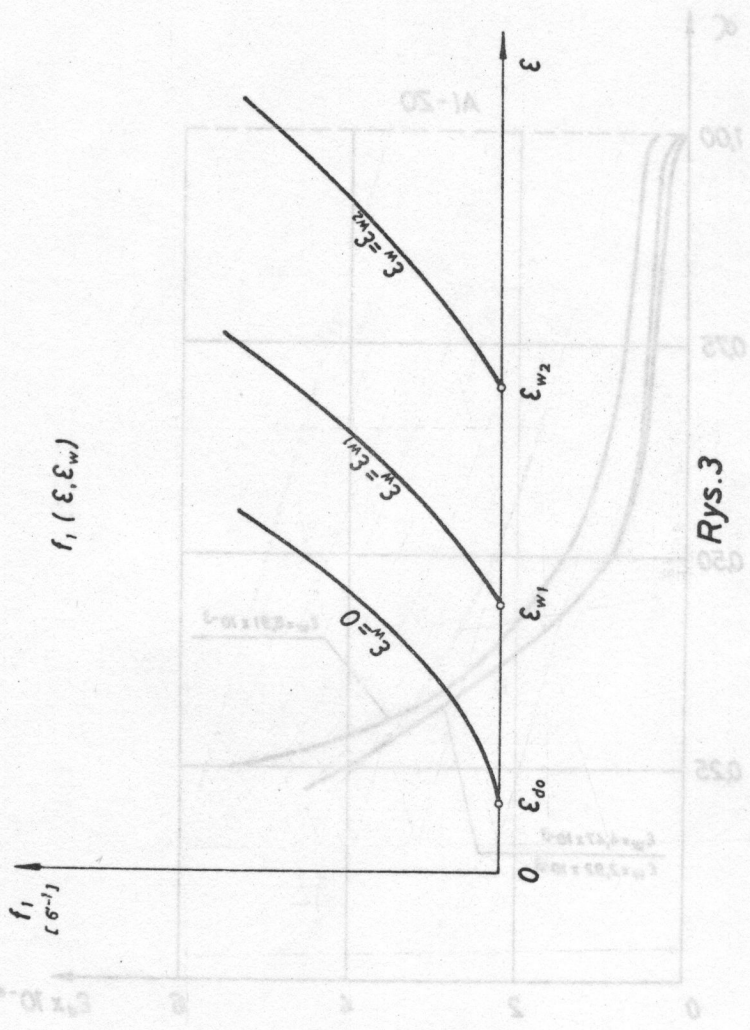
Rys. 1



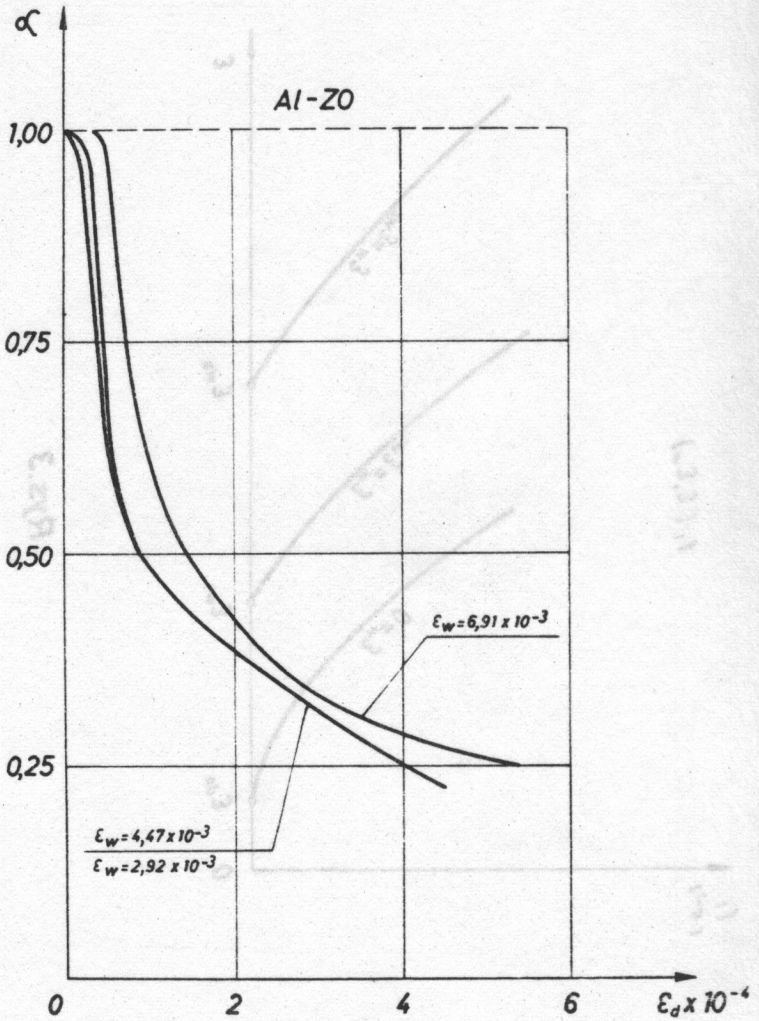
Rys.2



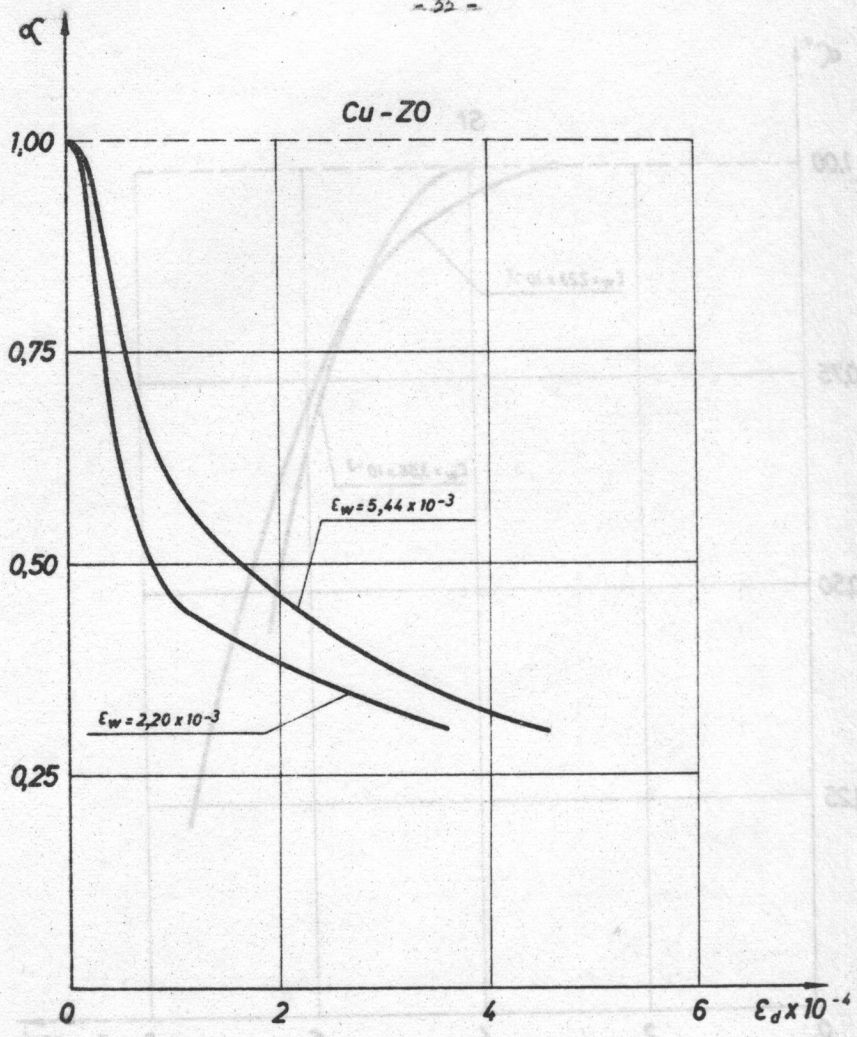
05-1A



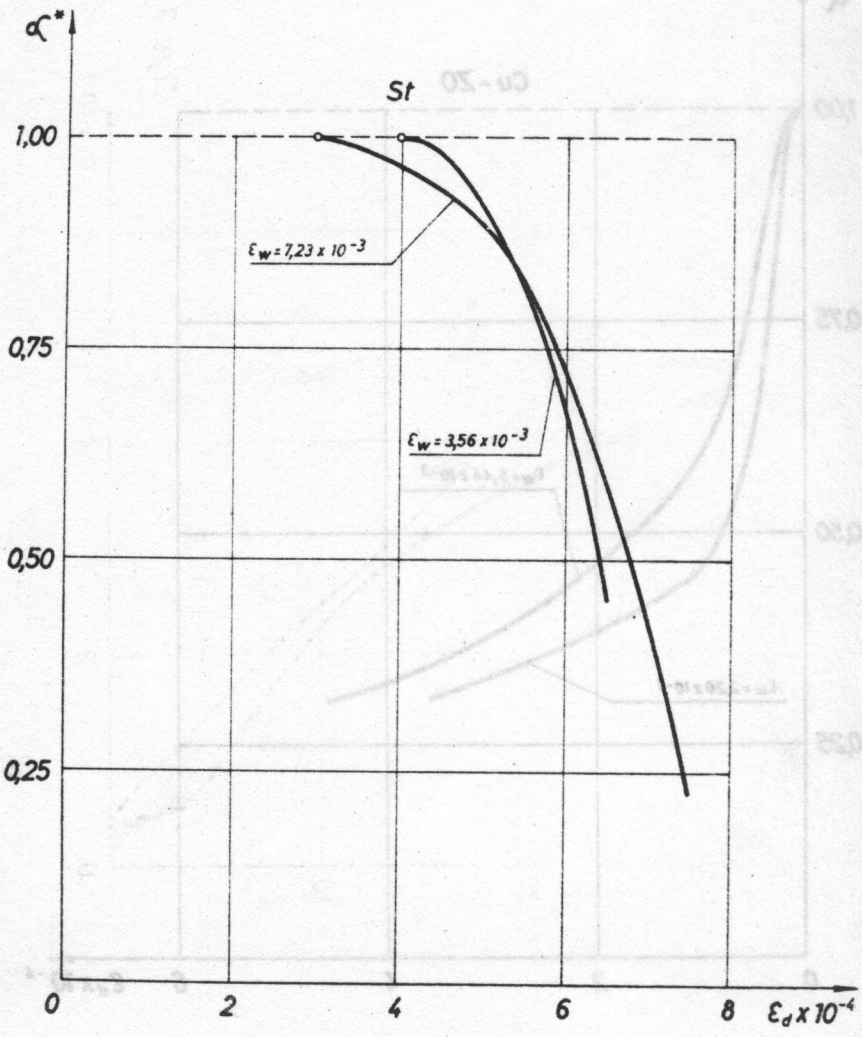
Rys. 3



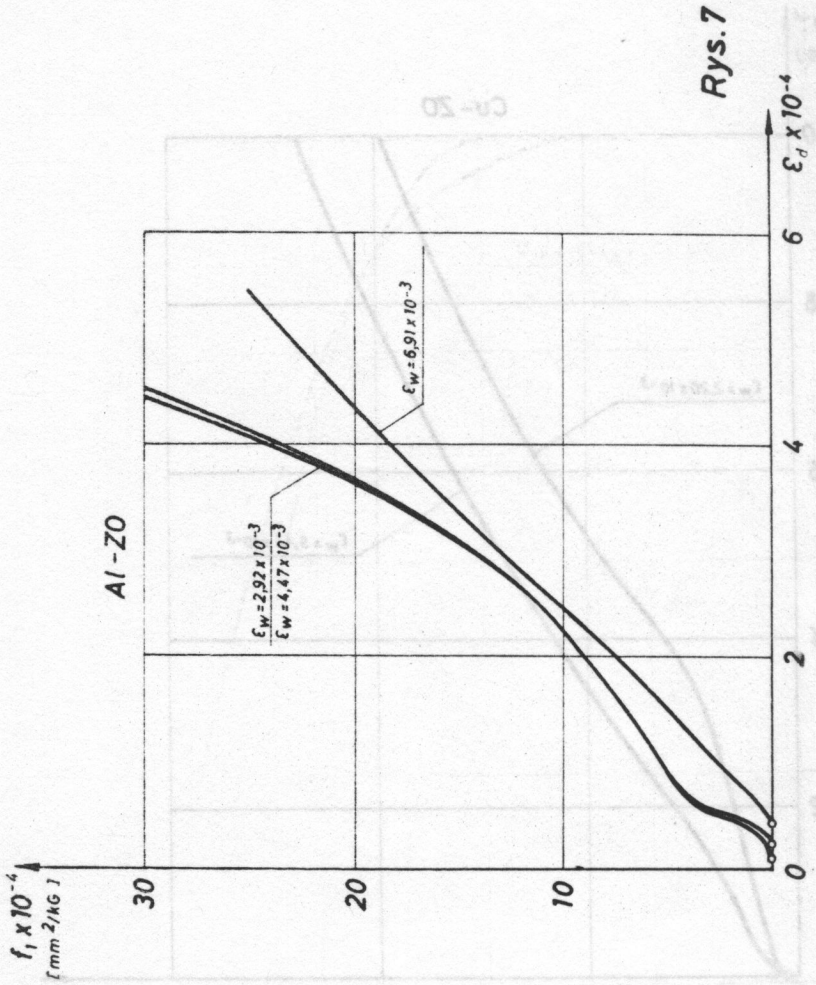
Rys.4



Rys. 5

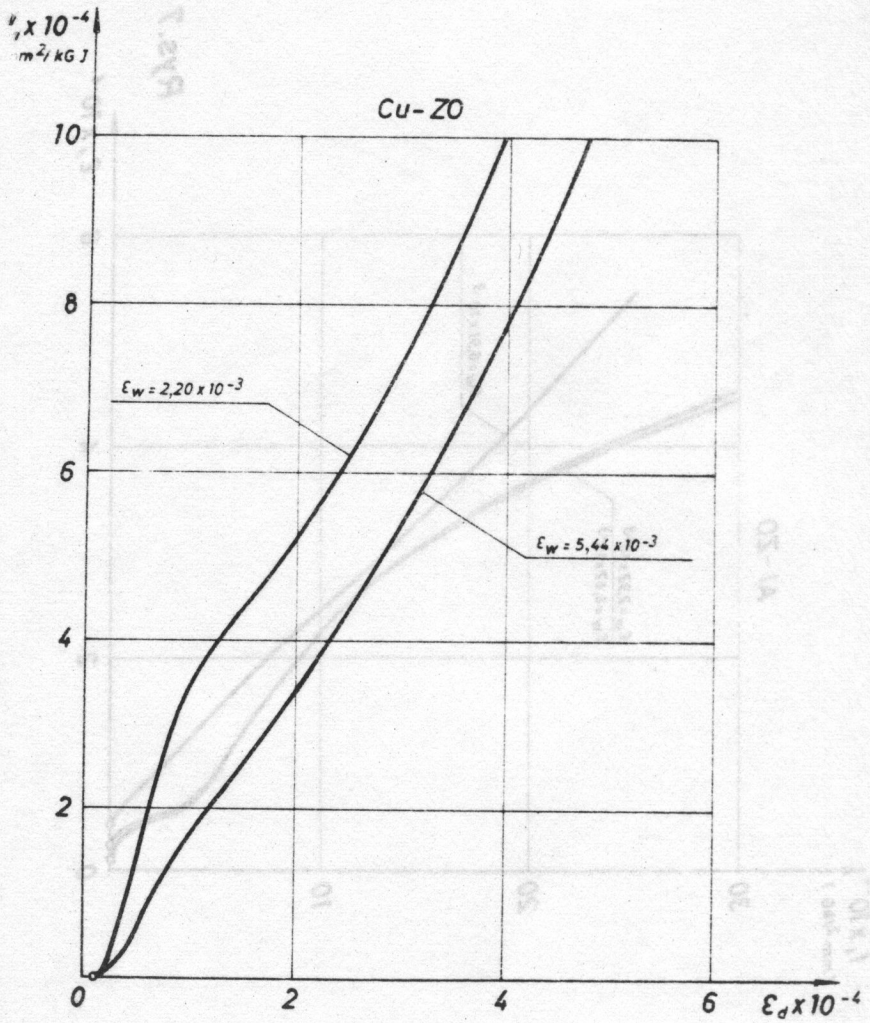


Rys. 6

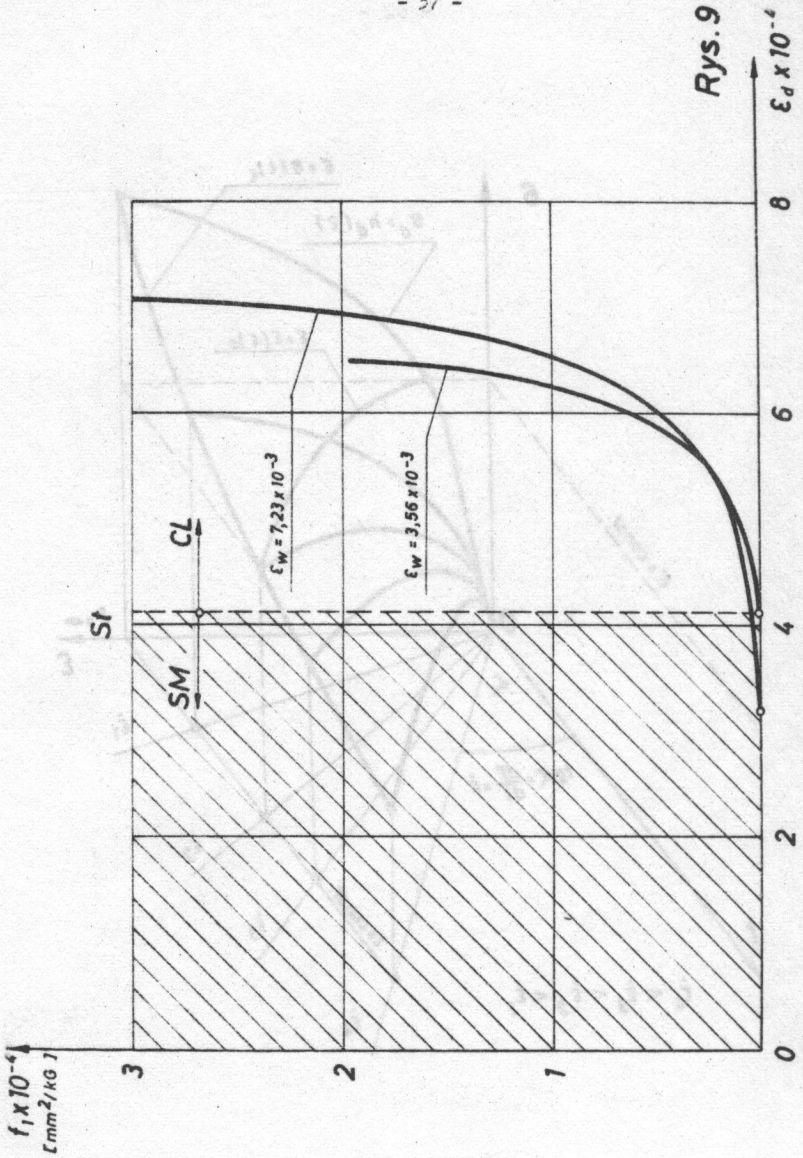


Rys.7



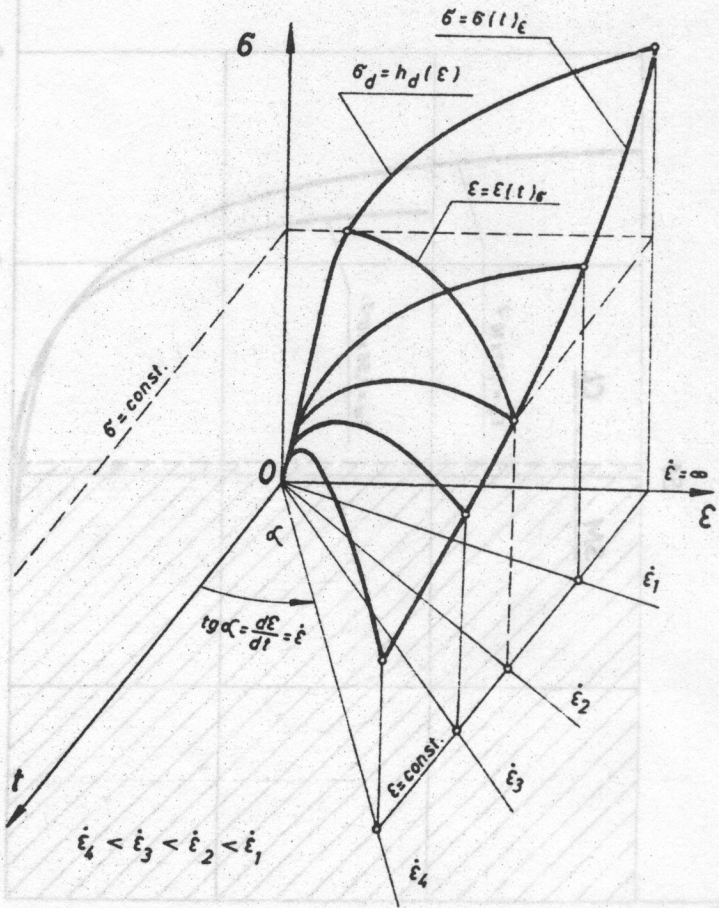


Rys. 8

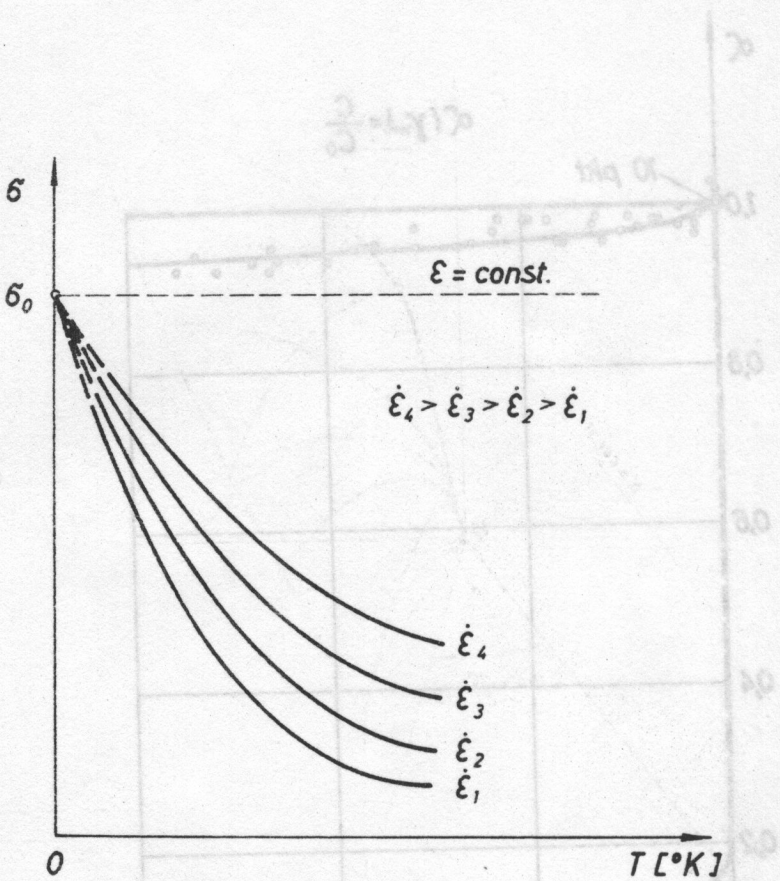


Rys. 9

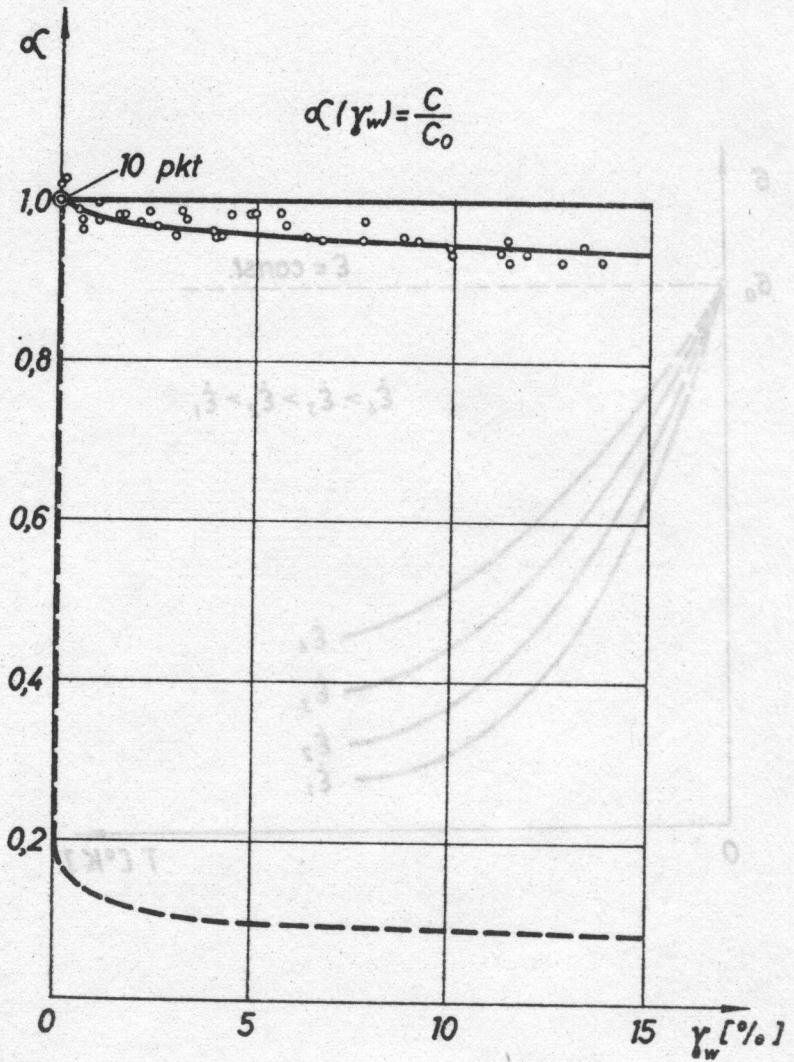
Rys. 10



Rys.10



Rys. 11



Rys. 12



Dodatek

Podstawy metody charakterystyk w zastosowaniu  
do zjawiska propagacji sprężysto-plastycznych  
fal w prętach

W wielu działach mechaniki spotyka się układ dwóch lub więcej równań różniczkowych, cząstkowych, quasi-liniowych, pierwszego rzędu, dla odpowiedniej ilości poszukiwanych funkcji. Na wstępie zostanie rozważony układ dla dwóch poszukiwanych funkcji  $\xi$  oraz  $\eta$  i dwóch zmiennych niezależnych  $x$  i  $y$

$$A_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial \xi}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_{14} \frac{\partial \eta}{\partial y} = B_1, \quad (D1)$$

$$A_{21} \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} + A_{23} \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_{24} \frac{\partial \eta}{\partial y} = B_2.$$

gdzie współczynniki  $A_{ik}$  są zadanymi funkcjami  $\xi, \eta, x$  oraz  $y$ ,  
stąd

$$A_{ik} = A_{ik}(\xi, \eta, x, y); \quad B_i = B_i(\xi, \eta, x, y), \quad (D2)$$

ponadto

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y) \quad (D3)$$

Układ równań (D1) uzupełnia się zależnościami dla różniczek zupełnych funkcji  $\xi$  i  $\eta$

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy. \quad (D4)$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy.$$

Zakłada się także, że pochodne cząstkowe funkcji  $\xi$  i  $\eta$  są ciągłe w rozpatrywanym zakresie zmiennych  $(x, y)$ . Układ zależności (D1) i (D4) stanowi komplet równań do rozwiązania problemu. Rozwiązaniem układu (D1) i (D4) w formie  $\xi = \xi(x, y)$  oraz  $\eta = \eta(x, y)$  jest pewna powierzchnia zwana powierzchnią całkową.

Rozwiązanie konstruuje się zakładając, że wzdłuż dowolnej krzywej  $L$  położonej w płaszczyźnie  $(x, y)$  dane są wartości funkcji  $\xi$  i  $\eta$ . Podstawowym okazuje się zagadnienie czy można przez daną linię  $L$  poprowadzić określoną powierzchnię całkową. Jest to tzw. problem Cauchy'ego. Z geometrycznego punktu widzenia możliwość jednoznacznego określenia wzdłuż  $L$  pierwszych pochodnych cząstkowych z równań (D1) daje z kolei możliwość wyznaczenia wzdłuż  $L$  płaszczyzny stycznej do płaszczyzny całkowej. Celem wyznaczenia płaszczyzny stycznej wzdłuż  $L$  wyznacza się z równań (D1) i (D4) jej współczynniki kierunkowe w postaci pochodnych cząstkowych oznaczonych przez  $\alpha_i$ . Ten sposób równania (D1) i (D4) stanowią układ liniowych równań algebraicznych z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi  $\alpha_i$  jako niewiadomymi.

Posiugując się wzorami Cramera mamy

$$\alpha_i = \frac{\Delta_i^i}{\Delta}, \quad (D5)$$

gdzie

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} \quad (D6)$$

oraz dla  $i = 1$

$$\Delta_1^1 = \begin{vmatrix} B_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ B_2 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ dx & dy & 0 & 0 \\ dx & 0 & dx & dy \end{vmatrix} \quad (D7)$$

Analiza równania (D5) prowadzi do trzech przypadków :

1 - pochodne  $\alpha_i$  są określone jednoznacznie, jeżeli  $\Delta \neq 0$  ;

2 - pochodne  $\alpha_i$  przyjmują wartości nieskończone, jeżeli

$$\Delta = 0 \quad \text{i} \quad \Delta_i^i = 0 ;$$

3 - pochodne  $\alpha_i$  są nieokreślone, jeżeli  $\Delta = 0$  i  $\Delta_i^i = 0$  .

Dwa pierwsze przypadki noszą nazwę eliptycznego i parabolicznego, natomiast interesujący nas trzeci przypadek nosi nazwę hiperbolicznego. W tym ostatnim przypadku, dla obszaru  $(x,y)$  zawierającego krzywą L, układu (D1) w sposób jednoznaczny rozwiązać nie można.

Natomiast krzywe, dla których zachodzi  $\Delta_i^i = 0$  i  $\Delta = 0$

nazywają się charakterystykami danego układu równań różniczkowych. Przyrównując wyznacznik charakterystyczny  $\Delta$  do zera ( $\Delta = 0$ ) otrzymuje się różniczkowe równania rodzin charakterystyk. Ilość rodzin charakterystyk odpowiada ilości liniowo niezależnych równań różniczkowych w rozważanym układzie. Związki jakie spełniają funkcje  $\xi$  i  $\eta$  oraz ich pochodne wzdłuż charakterystyk otrzymuje się z pozostałego warunku, tj.  $\Delta_1^i = 0$ .

Gdy rozważany problem został opisany różniczkowym równaniem cząstkowym, quasi-liniowym, drugiego rzędu, to takie równanie sprowadza się do układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych typu (D1) i rozwiązuje przedstawionym wyżej sposobem.

W odniesieniu do problemu propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach, sformułowanego zgodnie z teorią TKR, wykorzystuje się równanie ruchu w formie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (D8)$$

oraz równanie nierozdzielności przemieszczeń

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (D9)$$

Równanie (D9) zastępuje się równaniem (D10) ponieważ

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{d\varepsilon}{d\sigma} ; \quad \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{\rho C^2(\varepsilon)}$$

stąd

$$\frac{1}{\rho C^2(\varepsilon)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (D10)$$

Współczynniki w równaniu (D1) przyjmą postać

$$A_{11} = \frac{1}{\rho} ; A_{12} = 0 ; A_{13} = 0 ; A_{14} = -1 ; B_1 = 0 ;$$

$$A_{21} = 0 ; A_{22} = \frac{1}{\rho c^2(\varepsilon)} ; A_{23} = 0 ; A_{24} = 0 ; B_2 = 0 .$$

Stąd wyznacznik charakterystyczny  $\Delta$  przedstawi się w formie

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\rho c^2(\varepsilon)} & -1 & 0 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} (dt)^2 - \frac{1}{\rho c^2(\varepsilon)} (dx)^2 = 0 ,$$

co prowadzi bezpośrednio do równania dwóch rodzin charakterystyk na płaszczyźnie fazowej  $(x, t)$

$$dx \pm c(\varepsilon) dt = 0$$

Celem otrzymania zależności na charakterystykach wyznacznik

$\Delta_1'$  przyrównuje się do zera, wówczas

$$\Delta_1' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\rho c^2(\varepsilon)} & -1 & 0 \\ d\varepsilon & dt & 0 & 0 \\ dv & 0 & dx & dt \end{vmatrix} = dv dt - dx \frac{d\varepsilon}{\rho c^2(\varepsilon)} = 0 ,$$

stąd po uwzględnieniu równania charakterystyk  $\frac{dx}{dt} = \pm c(\varepsilon)$

oraz zależności  $d\varepsilon = \rho c^2(\varepsilon) d\varepsilon$  otrzymuje się

$$dv = \pm c(\varepsilon) d\varepsilon$$



W teorii SM postępuje się nieco inaczej, mianowicie komplet równań stanowią równania (D8), (D9) oraz równanie konstytutywne

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon) \quad (D11)$$

Po podstawieniu (D11) do (D9) oraz uzupełnieniu układu związkami różniczki zupełnej otrzymuje się układ równań (D12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \\ -\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= g(\sigma, \varepsilon), \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt &= dv, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt &= d\sigma. \end{aligned} \quad (D12)$$

Wyznacznik charakterystyczny układu (D12) przyjmie postać

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{E} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \\ dx & dt & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{dt^2}{\rho} - \frac{dx^2}{E} = 0. \quad (D13)$$

Na podstawie (D13) otrzymuje się dwie rodziny charakterystyk na płaszczyźnie fazowej  $(x, t)$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{lub} \quad \frac{dx}{dt} = \pm C_0 \quad (D14)$$

Związki na charakterystykach otrzymuje się przez zastąpienie na przykład pierwszej kolumny w wyznaczniku  $\Delta$  kolumną wy-

wyrazów wolnych, stąd

$$\Delta_1^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ g & -\frac{1}{E} & 1 & 0 \\ dv & 0 & dx & dt \\ d\delta & dt & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= dv - g(\delta, \varepsilon) dx - \frac{1}{E} \frac{dx}{dt} d\delta = 0,$$

lub po uwzględnieniu (D14)

$$dv = \frac{1}{\rho C_0} \frac{d\delta}{dt} + g(\delta, \varepsilon) dx \quad (D15)$$

Wreszcie w przypadku teorii CL komplet równań stanowią zależności (D8), (D9), równanie konstytutywne o postaci (równanie (1) w tekście)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = f(\delta, \varepsilon) \frac{\partial \delta}{\partial t} + g(\delta, \varepsilon) \quad (D16)$$

oraz trzy równania różniczek zupełnych  $\delta, v, \varepsilon$ .

Komplet równań dla teorii CL przedstawia się w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - f(\delta, \varepsilon) \frac{\partial \delta}{\partial t} &= g(\delta, \varepsilon), \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt &= dv, \\ \frac{\partial \delta}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta}{\partial t} dt &= d\delta, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt &= d\varepsilon. \end{aligned} \quad (D17)$$

Przyrównując wyznacznik charakterystyczny układu (D17) do zera otrzymuje się równania charakterystyk

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -f & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 \\ dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt \end{vmatrix} =$$

$$= -dt^2 dx f(\xi, \varepsilon) dx^3 = 0$$

lub

$$dx [\rho f(\xi, \varepsilon) dx^2 - dt^2] = 0 \quad (D18)$$

Na podstawie (D18) otrzymuje się trzy rodziny charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho f(\xi, \varepsilon)}} \quad \text{lub} \quad C(\xi, \varepsilon) = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho f(\xi, \varepsilon)}}$$

oraz

$$dx = 0.$$

Po zamianie na przykład czwartej kolumny w wyznaczniku  $\Delta$  na wyrazy wolne otrzymuje się wyznacznik  $\Delta_1$ . Przyrównanie wyznacznika  $\Delta_1$  do zera pozwala na wyznaczenie zależności, które muszą być spełnione wzdłuż dwóch rodzin charakterystyk

$$\Delta_1 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -f & 0 & g & 0 & 1 \\ 0 & 0 & dx & dv & 0 & 0 \\ dx & dt & 0 & d\bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\varepsilon & dx & dt \end{vmatrix} =$$

$$= -dv dt dx + f dx^2 d\bar{\sigma} + g dx^2 dt = 0$$

lub

$$dx [-dv dt + f(\bar{\sigma}, \varepsilon) dx d\bar{\sigma} + g(\bar{\sigma}, \varepsilon) dx dt] = 0, \quad (D20)$$

jeżeli  $dx \neq 0$ , to

$$dv = f(\bar{\sigma}, \varepsilon) \frac{dx}{dt} d\bar{\sigma} + g(\bar{\sigma}, \varepsilon) dx. \quad (D21)$$

Po uwzględnieniu (D19) w (D21) związki na charakterystykach  $\frac{dx}{dt}$  przyjmują postać

$$dv = \frac{1}{\rho c(\bar{\sigma}, \varepsilon)} + g(\bar{\sigma}, \varepsilon) dx. \quad (D22)$$

Wzdłuż charakterystyki  $dx = 0$  spełniony jest związek

$$d\varepsilon = f(\bar{\sigma}, \varepsilon) d\bar{\sigma} + g(\bar{\sigma}, \varepsilon) dt. \quad (D23)$$

#### Literatura uzupełniająca

- [1] N.Cristescu, Dynamic Plasticity, North - Holland, (1967).
- [2] S.Kaliski (red.), Drgania i Fałd, PWN, (1966).



