

B7/4

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMOW TECHNIKI

Stefan Zahorski

PEWNE ZAGADNIENIA RUCHU I STATECZNOŚCI
OSRODKÓW NIELINIOWO LEPKOSPĘŻYSTYCH

Rozprawa habilitacyjna

Warszawa 1965



53/D



~~44/38~~

Spis treści

Część I. Teoria małego ruchu nałożonego na podstawowe powolne odkształcenia materiału nieliniowo lepkosprężystego	
1. Wstęp	str. 1
2. Kinematyka odkształceń we współrzędnych konwekcyjnych	" 3
3. Równania konstytutywne dla izotropowych materiałów lepkosprężystych. Przypadek powolnego i ustalonego ruchu podstawowego	" 9
4. Podstawowe zależności dla małego dodatkowego ruchu nałożonego na jednorodne i równomierne odkształcenia lepkosprężystego prostopadłościemu	" 15
Część II. Niestateczność nieliniowo lepkosprężystych belek poddanych skończonemu ścisnaniu	
5. Wstęp	str. 25
6. Przypadek małego płaskiego ruchu nałożonego na proste osiowe ścisnienie niesciśliwej belki lepkosprężystej	" 26
6.1. Cztery różne pierwiastki. $c_n^2 \neq d_n$	" 34
6.2. Dwa podwójne pierwiastki. $c_n^2 = d_n$	" 37
6.3. Alternatywna postać równania wiekowego. Przypadek $h/a = 0$	" 38
7. Niestateczność ruchu, a zjawisko wybooczenia	" 41
8. Stacjonarny i oscylacyjny typ utraty stateczności	" 44
9. Inne rozwiązania dopuszczalne dla smukłych belek lub prętów	" 47
10. Niektóre nierówności podstawowe dla funkcji opisujących własności materiałów	" 56
11. Uwagi końcowe	" 59

Dodatek A	str. 61
Dodatek B	" 64
Literatura cytowana w tekście	" 67

Część I

Teoria małego ruchu nałożonego na podstawowe powolne odkształcenia materiału nieliniowo lepkosprężystego

1. Wstęp

Matematyczne podstawy teorii równań stanu dla nieliniowych materiałów lepkosprężystych były rozważane przez wielu badaczy w ciągu ostatnich kilkunastu lat. Wymienimy tylko niektóre grupy prac z tego zakresu, jak prace Rivlina i Ericksena, [1], Rivlina, [2], Spencera i Rivlina, [3], [4], Nolla, [5], [6], oraz Colemana i Nolla, [7]. Ogólna teoria nieliniowych materiałów lepkosprężystych z pamięcią została zbudowana przez Greena i Rivlina, [8], [10], Greena, Rivlina i Spencera, [9], a także w innym ujęciu przez Nolla, [6].

Teoria małych dodatkowych odkształceń nałożonych na duże podstawowe odkształcenia nieliniowych materiałów sprężystych, początkowo zaproponowana przez Greena, Rivlina i Shiela w roku 1952, [11] /por. także [12/, umożliwiła rozwiązanie wielu konkretnych zagadnień, zwłaszcza dotyczących stateczności układów sprężystych /por. wstęp do części II oraz p. 6 i 7 /. Pewne aspekty małych odkształceń nałożonych na duże, dla materiałów z zanikającą pamięcią, zostały przedyskutowane przez Pipkina i Rivlina, [13]. Również ostatnie prace autora dotyczyły specjalnych zagadnień małego dodatkowego ruchu nałożonego na ruch podstawowy ośrodka niesprężystego /por. [14], [15] /.

Niniejsza praca poświęcona jest teorii małego dodatkowego ruchu nałożonego na powolny i ustalony ruch podstawowy materiałów nieliniowo lepkosprężystych z zanikającą krótką pamięcią,

oraz jej zastosowaniom do badania niestateczności ruchu podstawowego.

W początkowej części pracy /p. 2/ rozwinięto kinematyczną stronę zagadnienia, bez żadnych dodatkowych założeń odnośnie charakteru ruchu podstawowego, a następnie zbudowano odpowiednie równania konstytutywne dla przyrostów /p. 3/, wykorzystując założenie o powolności i stacjonarności ruchu podstawowego. W dalszym ciągu wyprowadzono pewne ogólne kinematyczne i fizyczne zależności dla jednorodnych i równomiernych odkształceń lepkosprężystych ~~tego~~ prostopadłościanu /p. 4/, oraz zastosowano je do zagadnienia wyboczenia ściskanej osiowo belki o dowolnych wymiarach /p. 6/. Uzyskano rozwiązanie dla małego dodatkowego ruchu ważne w krótkim lecz skończonym przedziale czasu następującym bezpośrednio po momencie działania zaburzeń oraz przedyskutowano dwa różne przypadki warunków brzegowych zadanych na końcach belki. Omówiono ogólne aspekty niestateczności ruchu podstawowego pod kątem zagadnienia wyboczenia /p. 7/, jakkolwiek zastosowana metoda nadaje się również do badania przypadków utraty stateczności lokalnej itp. W kolejnych punktach zatrzymano się nad możliwościami występowania różnych typów utraty stateczności /p. 8/ oraz wyprowadzono uproszczone rozwiązania słuszne dla smukłych belek lub prętów /p. 9/. Istotnym elementem pracy było uzyskanie pewnych nierówności, nałożonych na funkcje materiałowe i parametry procesu odkształcenia /p. 10/; nierówności te wynikały z niemożliwości występowania zjawiska wyboczenia przy prostym osiowym rozciąganiu. Na zakończenie krótko podsumowano niektóre wyniki otrzymane w poprzednich rozważaniach /p. 11/.

Jakkolwiek zakres metod stosowanych w niniejszej pracy jest ograniczony do przypadków powolnego i ustalonego ruchu podstawowego

wego, to jednak w opinii autora, otrzymane wyniki stanowią niewątpliwie krok naprzód w porównaniu z wynikami uzyskiwanymi dotychczas na bazie "statycznych odkształceń podstawowych". "Statyczne procesy odkształcenia" są prawie zawsze w rzeczywistości realizowane z pewnymi bardzo małymi lecz skończonymi prędkościami, których uwzględnienie może wywoływać nowe dodatkowe efekty. Ponadto wiadomo, że prawie wszystkie materiały "sprężyste" poddane dużym zmiennym w czasie odkształceniom /np. materiały gumopodobne, niektóre polimery i plastyki/, wykazują zwykle pewne własności lepkie lub relaksacyjne /por. np. [16], [17]/, które mogą istotnie wpływać na zachowanie się materiału, zwłaszcza w pewnych stanach krytycznych.

Metoda współrzędnych konwekcyjnych stosowana w niniejszej pracy wydaje się bardziej korzystna dla rozważanych zagadnień szczególnych, jednakże zastosowanie innego układu współrzędnych jest formalnie możliwe. Wszystkie uzyskane w pracy zależności mogą być, bez żadnych istotnych trudności, przetransformowane do jakiegokolwiek ustalonego układu współrzędnych /por. [18/.

2. Kinematyka odkształceń we współrzędnych konwekcyjnych

Niektóre ze związków kinematycznych omawianych w niniejszym punkcie można znaleźć w dość obszernej literaturze przedmiotu /por. np. [11], [12], [19]/, inne zaś zostały wyprowadzone w poprzednich pracach autora /14], [15]. Jednakże dla obecnych celów jest rzeczą pożyteczną przedstawiać te związki razem, korzystając z nieznacznie zmienionej notacji oraz dodając pewne nowe wyniki.

Będziemy rozważać ośrodek ciągiły odkształcający się w czasie, którego ruch opisany jest odpowiednimi równaniami ruchu wyrażającymi czasową zależność między różnymi położeniami cząstki materialnej w fizycznej przestrzeni odniesienia. Oznaczając przez (x^i) dowolny ustalony układ współrzędnych przestrzennych z kowariantnym tensorem metrycznym g_{ij} i kontrawariantnym tensorem metrycznym g^{ij} , oraz przez (X^A) materialny układ współrzędnych z metrycznymi tensorami G_{AB} i G^{AB} , można równania ruchu zapisać w postaci

$$(2.1) \quad x^i = x^i(X^A, \tau), \quad X^A = X^A(x^i, \tau),$$

w założeniu, że spełnione są warunki regularności zapewniające istnienie zależności odwrotnych. Często współrzędne materialne można uważać za współrzędne cząstki materialnej w przestrzennym układzie odniesienia odpowiadające początkowej chwili czasu $\tau = 0$.

Gradyenty odkształcenia

$$(2.2) \quad \partial x^i / \partial X^A = x^i_{,A}, \quad \partial X^A / \partial x^i = X^A_{,i},$$

są miarami lokalnego odkształcenia w sąsiedztwie cząstki X^A ($A = 1, 2, 3$) dla dowolnej chwili czasu.

Jeśli założymy, że układ (X^A) porusza się i odkształca razem z ośrodkiem, otrzymamy wówczas tzw. konwekcyjny /unoszony/ układ współrzędnych. Oznaczając współrzędne konwekcyjne przez (X^α) , można równania ruchu wyrazić również w postaci

$$(2.3) \quad x^i = x^i(X^\alpha, \tau), \quad X^\alpha = X^\alpha(x^i, \tau).$$

Teraz wielkości $x^i_{,\alpha}$, $X^\alpha_{,i}$ są współczynnikami transformacji tensorowej od układu (X^α) do (x^i) dokonywanej w tej samej chwili czasu i odwrotnie.

Tensory odkształcenia Cauchy-Greena /por. [1], [13] / zdefiniowane następująco:

$$(2.4) \quad \mathbf{C} = \|C_{ij}\|, \quad C_{ij} = G_{AB} X^A_{,i} X^B_{,j}, \quad \mathbf{C} = \|C_{AB}\|, \quad C_{AB} = g_{ij} x^i_{,A} x^j_{,B},$$

są wielkościami zależnymi od czasu i bez żadnych trudności mogą być przedstawione we współrzędnych konwekcyjnych. W szczególności jeśli układ $(X^A) = (X^\alpha)$ dla $\tau = 0$, porusza się i odkształca razem z ośrodkiem w taki sposób, że w jakiejś chwili $\tau = t$ pokrywa się z układem (x^i) , możemy napisać

$$(2.5) \quad C_{\alpha\beta}(t) = C_{AB}(t) = g_{ij} x^i_{,A} x^j_{,B}, \quad \dot{G}_{\alpha\beta}(0) = G_{AB}, \quad G_{\alpha\beta}(t) = g_{ij},$$

gdzie przez $\dot{G}_{\alpha\beta}$ i $G_{\alpha\beta}$ oznaczyliśmy tensory metryczne układu konwekcyjnego odpowiednio w chwili początkowej $\tau = 0$ i w chwili bieżącej $\tau = t$. Inny opis ruchu podstawowego może być traktowany w podobny sposób.

Tensory kinematyczne Rivlina-Ericksena \mathbf{A}_τ ($\tau = 0, 1, \dots, N$), [1], zdefiniowane w przestrzennym układzie współrzędnych (x^i) w następującej postaci:

$$(2.6) \quad \mathbf{A}_0 = \|A^{(0)}_{ij}\|, \quad A^{(0)}_{ij} = 2 \nabla_{(i} v_{j)} = 2 d_{ij} = \nabla_i v_j + \nabla_j v_i,$$

$$(2.7) \quad \mathbf{A}_\tau = \|A^{(\tau)}_{ij}\|, \quad A^{(\tau+1)}_{ij} = \dot{A}^{(\tau)}_{ij} + A^{(\tau)}_{ip} \nabla_j v^p + A^{(\tau)}_{pj} \nabla_i v^p,$$

mogą być przetransformowane do konwekcyjnego układu współrzędnych. Otrzymane następujące związki /por. [18]/:

$$(2.8) \quad A^{(0)}_{\alpha\beta} = 2 \nabla_{(\alpha} v_{\beta)} = 2 d_{\alpha\beta},$$

$$(2.9) \quad A^{(\tau+1)}_{\alpha\beta} = \dot{A}^{(\tau)}_{\alpha\beta} + A^{(\tau)}_{\alpha\mu} \nabla_\beta v^\mu + A^{(\tau)}_{\mu\beta} \nabla_\alpha v^\mu = \frac{D}{Dt} A^{(\tau)}_{\alpha\beta} = \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} A^{(0)}_{\alpha\beta}.$$

W powyższych wyrażeniach v^p i v^μ oznaczają kontrawariantne składowe wektora prędkości, d_{ij} są składowymi tensora prędkości odkształcenia, kropka u góry symbolu oznacza materialną pochodną czasową, zaś D/Dt oznacza cząstkową pochodną czasową dla $X^\alpha = \text{const}$. Należy podkreślić, że ostatnie dwa symbole mają ogólnie rzecz biorąc różne znaczenia. Cząstkowa pochodna czasowa dla $X^\alpha = \text{const}$ nosi wyłącznie analityczny charakter, podczas gdy materialna pochodna czasowa określa zmianę w czasie jakiegoś tensora stwierdzoną przez obserwatora "poruszającego się" razem z cząstką materialną. Jednakże dla wektorów w notacji absolutnej, traktowanych jako funkcje cząstki i czasu, obydwie powyższe oznaczenia są formalnie równoważne. We współrzędnych konwekcyjnych korzystamy z następującej definicji pochodnej materialnej /por. Dodatek A lub [20]/:

$$(2.10) \quad \dot{\varphi}^{\alpha \dots \beta} = \frac{D}{Dt} \varphi^{\alpha \dots \beta} + \sum^i \varphi^{\mu \dots \beta} \nabla_\mu v^\alpha - \sum \varphi^{\alpha \dots \mu} \nabla_\beta v^\mu,$$

gdzie \sum^i i \sum oznaczają odpowiednie sumy po wszystkich górnych i dolnych indeksach tensora $\varphi^{\alpha \dots \beta}$.

Rozważmy obecnie równania ruchu otrzymane przez nałożenie na ruch podstawowy (2.3) w chwili t , małego dodatkowego pola przemieszczeń. Jeśli takie pole określone jest przez wektor

$\eta \mathbf{w}(X^\alpha, t)$, otrzymamy

$$(2.11) \quad \overset{*}{x}^i(X^\alpha, t) = x^i(X^\alpha, t) + \eta w^i(X^\alpha, t),$$

$$(2.12) \quad \overset{*}{x}_{,\alpha}^i(X^\beta, t) = x_{,\alpha}^i(X^\beta, t) + \eta w_{,\alpha}^i(X^\beta, t),$$

przy czym η jest małym bezwymiarowym parametrem, którego kwadraty i wyższe potęgi mogą być pominięte w porównaniu z samym η . Wielkość $\eta \mathbf{w}$ jest zgodna z definicją pierwszej wariacji, a zatem liniowe przyrosty wszystkich tensorów, wektorów lub skalarów mogą być wyrażone przez składowe wektora $\eta \mathbf{w}$ /por.

[12], [14]/.

We współrzędnych konwekcyjnych przyrosty tensorów metrycznych i symboli Christoffela drugiego rodzaju przybierają postać

$$(2.13) \quad G'_{\alpha\beta} = 2\nabla_{(\alpha} w_{\beta)}, \quad G'^{\alpha\beta} = -2\nabla^{(\alpha} w^{\beta)}, \quad G' = (\det G_{\alpha\beta})'$$

$$(2.14) \quad G' = 2 \det G_{\alpha\beta} \nabla_{\mu} w^{\mu}, \quad \{^{\alpha}_{\beta\gamma}\}' = \nabla_{\beta} \nabla_{\gamma} w^{\alpha},$$

gdzie w^{α} i w_{α} oznaczają składowe wektora \mathbf{w} odpowiednio w bazie \mathbf{G}_{α} i \mathbf{G}^{α} . Wektor \mathbf{w} można również rozłożyć w nowych bazach \mathbf{G}_{α}^* i $\mathbf{G}^{\alpha*}$, jednakże różnice między składowymi w_{α}^* i w_{α} lub $w^{\alpha*}$ i w^{α} są rzędu η^2 i wobec tego mogą być pominięte.

Przyrosty składowych prędkości i przyspieszenia można otrzymać mnożąc skalarnie zależności wektorowe

$$(2.15) \quad \dot{\mathbf{v}}^* = \mathbf{v} + \eta \dot{\mathbf{w}}^*, \quad \dot{\mathbf{v}}^* = \dot{\mathbf{v}} + \eta \ddot{\mathbf{w}}^*,$$

przez odpowiednie wektory bazy $\mathbf{G}^{\alpha*}$ i \mathbf{G}_{α}^* . Stąd mamy

$$(2.16) \quad v'_{\alpha} = \dot{w}_{\alpha} + v_{\nu} \nabla_{\alpha} w^{\nu}, \quad v'^{\alpha} = \dot{w}^{\alpha} - v^{\nu} \nabla_{\nu} w^{\alpha},$$

$$(2.17) \quad \dot{v}'_{\alpha} = \ddot{w}_{\alpha} + \dot{v}_{\nu} \nabla_{\alpha} w^{\nu}, \quad \dot{v}'^{\alpha} = \ddot{w}^{\alpha} - \dot{v}^{\nu} \nabla_{\nu} w^{\alpha},$$

gdzie drugie człony po prawej stronie powyższych zależności noszą konwekcyjny charakter i znikają wraz z zatrzymaniem ruchu podstawowego. Mając na uwadze definicję materialnej pochodnej czasowej oraz uwzględniając (2.16), (2.17), otrzymamy np. dla przyrostów składowych kowariantnych następujące już rozwinięte wyrażenia:

$$(2.18) \quad v'_{\alpha} = \frac{D}{Dt} w_{\alpha} - w_{\mu} \nabla_{\alpha} v^{\mu} + v_{\nu} \nabla_{\alpha} w^{\nu},$$

$$(2.19) \quad \dot{v}'_{\alpha} = \frac{D^2}{Dt^2} w_{\alpha} - 2\nabla_{\alpha} v^{\mu} \frac{D}{Dt} w_{\mu} - \frac{D}{Dt} (\nabla_{\alpha} v^{\mu}) w_{\mu} + w_{\mu} \nabla_{\nu} v^{\mu} \nabla_{\alpha} v^{\nu} + \nabla_{\alpha} w^{\nu} \left(\frac{D}{Dt} v_{\nu} - v_{\mu} \nabla_{\nu} v^{\mu} \right).$$

Łatwo zauważyć, że wzory powyższe upraszczają się znacznie, jeśli w ruchu podstawowym ciało porusza się jako ciało sztywne.

Przyrosty tensorów odkształcenia Cauchy-Greena wynikają z definicji (2.4) i dodatkowych założeń. Kiedy układ współrzędnych konwekcyjnych $(X^\alpha) = (X^A)$ dla $\tau = 0$, mamy

(2.20)

$$C'_{\alpha\beta}(t) = C'_{AB} = g'_{ij} x^i_{,A} x^j_{,B} + g'_{ij} (x^i_{,A} w^j_{,B} + w^i_{,A} x^j_{,B}) = 2 \nabla_{(\alpha} w'_{\beta)},$$

i jeśli ponadto $(X^\alpha) \doteq (x^i)$ dla $\tau = t$, to również

$$(2.21) \quad G_{\alpha\beta}(t) \doteq g_{ij}, \quad C'_{\alpha\beta}(t) = G'_{\alpha\beta}(t) = 2 \nabla_{(\alpha} w'_{\beta)} \doteq 2 \nabla_{(i} w'_{j)}.$$

Ostatni związek wyrażony we współrzędnych kartezjańskich

$(G_{\alpha\beta} \doteq \delta_{\alpha\beta})$ jest równoważny definicji klasycznego tensora odkształcenia /por. [13]/, a mianowicie:

$$(2.22) \quad C'_{\alpha\beta}(t) = 2 e_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha})$$

Przyrosty tensorów A_τ , po uwzględnieniu (2.8), (2.9) i

(2.13), można zapisać w następujący prosty sposób:

$$(2.23) \quad A'_{\alpha\beta}{}^{(0)} = \frac{D}{Dt} 2 \nabla_{(\alpha} w'_{\beta)} = 2 d'_{\alpha\beta} = \frac{D}{Dt} G'_{\alpha\beta},$$

$$(2.24) \quad A'_{\alpha\beta}{}^{(r+1)} = \frac{D}{Dt} A'_{\alpha\beta}{}^{(r)} = \frac{D^{r+1}}{Dt^{r+1}} A'_{\alpha\beta}{}^{(0)}.$$

Podobnie przyrosty $d'_{\alpha\beta}$ wyrażone we współrzędnych kartezjańskich są zgodne z definicją klasycznego tensora prędkości odkształcenia.

Podnoszenia indeksów α $\overset{*}{A}{}^{(r)}_{\alpha\beta} = A^{(r)}_{\alpha\beta} + \eta A'^{(r)}_{\alpha\beta}$ należy dokonywać w położeniu zaburzonym za pomocą tensora metrycznego $\overset{*}{G}{}^{\alpha\beta}$; w ten sposób otrzymamy np.

$$(2.25) \quad A'^{(r)\sigma}_{\alpha} = A'^{(r)}_{\alpha\mu} G^{\sigma\mu} + A^{(r)}_{\alpha\mu} G'^{\sigma\mu} = G^{\sigma\mu} \frac{D^r}{Dt^r} A'^{(0)}_{\alpha\mu} - 2 \nabla^{(\sigma} w'^{\mu)} A'^{(r)}_{\alpha\mu}$$

$$(2.26) \quad A'^{(0)\sigma}_{\alpha} = \frac{D}{Dt} (\nabla_{\alpha} w'^{\sigma} + \nabla^{\sigma} w'_{\alpha}) + 2 \nabla_{(\alpha} w'_{\mu)} A'^{(0)\sigma\mu} - 2 \nabla^{(\sigma} w'^{\mu)} A'^{(0)}_{\alpha\mu}.$$

Na zakończenie obecnego punktu zacytujemy jeszcze równania równowagi i warunki powierzchniowe dla wektora naprężenia i tensora naprężenia. Dla mieszanych składowych tensora naprężenia σ_{β}^{α} i kowariantnych składowych powierzchniowego wektora naprężenia t_{α} , mamy np.

$$(2.27) \quad \nabla_{\mu} \sigma_{\alpha}^{\mu} + g f_{\alpha} = g \dot{v}_{\alpha}, \quad t_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^{\mu} n_{\mu} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

gdzie f_{α} oznaczają składowe siły masowej na jednostkę masy, g jest aktualną gęstością ośrodka, zaś n_{α} oznaczają składowe jednostkowego wektora normalnego. W założeniu, że w zaburzonem położeniu wszystkie powyższe wielkości doznają pewnych przyrostów oznaczonych w dalszym ciągu primami tj. $\eta \sigma_{\mu}^{\alpha}$, $\eta t'_{\alpha}$, $\eta f'_{\alpha}$, $\eta g'$, $\eta n'_{\alpha}$, otrzymamy /por. [12]/ dla przyrostów

$$(2.28) \quad \nabla_{\mu} \sigma'^{\mu}_{\alpha} - \sigma'^{\nu}_{\mu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\nu} w^{\mu} + \sigma'_{\alpha}{}^{\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} w^{\mu} + g' f'_{\alpha} + g f'_{\alpha} = \\ = g' \dot{v}'_{\alpha} + g (\ddot{w}_{\alpha} + \dot{v}_{\nu} \nabla_{\alpha} w^{\nu}),$$

$$(2.29) \quad t'_{\alpha} = \sigma'^{\mu}_{\alpha} n_{\mu} + \sigma'_{\alpha}{}^{\mu} n'_{\mu},$$

gdzie przyrosty przyspieszenia zapisano zgodnie z (2.17). Podobnie równania uzyskamy dla składowych ^{intra} kowariantnych tensora naprężenia.

Jeśli rozważany ośrodek jest ośrodkiem nieściśliwym, to biorąc pod uwagę (2.14) i (2.26) otrzymamy następujący warunek nieściśliwości:

$$(2.30) \quad \nabla_{\mu} w^{\mu} = 0.$$

3. Równania konstytutywne dla izotropowych materiałów lepko-sprężystych. Przypadek powolnego i ustalonego ruchu podstawowego

Ogólne podstawy mechaniki nieliniowych materiałów z pamięcią

zostały wyprowadzone przez A.E. Greena i E.S. Rivlina, [8], [10], oraz przez tych samych autorów i A.J.M. Spencera, [9]. /por. także [6], [7]/. Autorzy ci zakładali, że w rozważanej chwili czasu tensor naprężenia w elemencie materiału zależy nie tylko od gradientów odkształcenia w tejże chwili czasu, lecz także od gradientów odkształcenia w chwilach czasu poprzedzających rozważany moment. W przypadku izotropowego materiału charakteryzującego się funkcjonalem typu "dziedzicznego", zostało także pokazane, że w pewnych warunkach tensor naprężenia może być wyrażony jako symetryczny i izotropowy wielomian tensorowy od tensora odkształcenia \mathbf{C} i tensorów kinematycznych \mathbf{A}_r , w zgodzie zresztą z teorią poprzednio sformułowaną przez R.S. Rivlina i J.L. Ericksena, [1]. W szczególności można tego dokonać, jeśli tensor odkształcenia zdefiniowany następująco:

$$(3,1) \quad 2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I} \quad , \quad 2E_{\beta}^{\alpha} = C_{\beta}^{\alpha} - \delta_{\beta}^{\alpha} \quad ,$$

jest funkcją wielomianową czasu w zakresie charakterystycznym dla skończonego okresu trwania zanikającej pamięci materiału. Jeśli natomiast \mathbf{E} daje się rozwinąć w szereg zbieżny dla dowolnego czasu, to wspomniana wyżej teoria nie ogranicza się do materiałów z zanikającą pamięcią.

Zgodnie z teorią Rivlina-Ericksena /por. [1]/ można przyjąć, że

$$(3,2) \quad \mathbf{S} = \mathbf{F}(\mathbf{C}, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N) \quad ,$$

przy czym \mathbf{F} jest izotropowym i symetrycznym wielomianem macierzowym utworzonym z macierzy \mathbf{C} i \mathbf{A}_r zdefiniowanych przez (2.4), (2.6), (2.7). Metody konstruowania funkcji \mathbf{F} w ogólnych przypadkach zostały przedyskutowane m.in. w pracach [3], [4], [21]. Pokazano tam, że zależność (3,2) można ostatecznie przedstawić w postaci następującej sumy:

$$(3.2a) \quad \mathbf{G} = \alpha_0 \mathbf{I} + \sum_{n=1}^M \alpha_n (\mathbf{P}_n + \mathbf{P}_n^t),$$

w której \mathbf{P}_n oznaczają pewne iloczyny macierzowe utworzone z \mathbf{C} i \mathbf{A}_τ ($\tau = 0, 1, \dots, N$), \mathbf{P}_n^t są iloczynami transponowanymi, zaś α_n oznaczają wielomiany zbudowane ze śladów pewnych innych iloczynów macierzowych \mathbf{Q}_p ($p = 1, 2, \dots, R$) utworzonych z \mathbf{C} i \mathbf{A}_τ . Iloczyn \mathbf{P}_n otrzymuje się według z góry ustalonego porządku biorąc kolejno wszystkie możliwe kombinacje iloczynów jednej, dwóch, itd., aż do pięciu spośród $N+2$ macierzy \mathbf{C} i \mathbf{A}_τ . Podobnie iloczyn \mathbf{Q}_p buduje się biorąc kolejno wszystkie możliwe kombinacje iloczynów jednej, dwóch, itd., aż do sześciu, spośród $N+2$ macierzy \mathbf{C} i \mathbf{A}_τ .

W niniejszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku quasi-statycznego, kiedy ruch podstawowy jest na tyle powolny, że pole prędkości może być wyrażone następująco:

$$(3.3) \quad \mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{u},$$

gdzie ε jest małym bezwymiarowym parametrem, którego kwadraty ε^2 są pomijalne wobec ε /por. [21]/. Jeśli ponadto ruch podstawowy jest ustalony, równania konstytutywne (3.2) i (3.2a) można przedstawić w postaci uproszczonej nie zawierającej \mathbf{A}_τ dla $\tau \geq 1$, a mianowicie

$$(3.4) \quad \mathbf{G} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{C} + \alpha_2 \mathbf{C}^2 + \alpha_3 \mathbf{A}_0 + \alpha_5 (\mathbf{C} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{C}) + \\ + \alpha_7 (\mathbf{C}^2 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{C}^2) + O(\varepsilon^2),$$

gdzie przez α_i oznaczyliśmy skalarne wielomiany od 6-ciu następujących niezmienników:

$$(3.5) \quad \text{tr} \mathbf{C}, \text{tr} \mathbf{C}^2, \text{tr} \mathbf{C}^3, \text{tr} \mathbf{A}_0, \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{A}_0, \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{A}_0.$$

Pamiętając założenie o powolności ruchu podstawowego, można od razu pominąć ostatnie trzy niezmienniki w wielomianach α_3 , α_5 , α_7 . Wielomiany powinny być budowane w ten sposób, ażeby z pra-

wej strony równania (3.4) pozostały wyłącznie człony rzędu ε .

Rozważmy obecnie przypadek dowolnego małego ruchu nałożonego na quasi-statyczny ruch podstawowy. Dla zaburzonego położenia cząstki materialnej, zgodnie z wynikami poprzedniego punktu, wszystkie tensory występujące w (3.2) doznają pewnych przyrostów, które oznaczymy odpowiednio przez $\eta \mathbf{b}'$, $\eta \mathbf{c}'$, $\eta \mathbf{A}'_0$, \dots , $\eta \mathbf{A}'_N$. Należy przy tym podkreślić, że małe parametry ε i η mogą być różnego rzędu małości różniącego się wzajemnie. Parametr ε charakteryzuje powolność quasi-statycznego ruchu podstawowego, podczas gdy η wyraża infinitezymalny charakter dodatkowych przemieszczeń, których zależność od czasu nie jest ograniczona w żaden sposób. Oznacza to, że wszystkie człony zarówno rzędu η , jak i rzędu $\eta \varepsilon$ powinny być zachowane w równaniach konstytutywnych dla przyrostów. Wychodząc z (3.2) i (3.2a) otrzymamy :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}' = & \alpha'_0 \mathbf{I} + \alpha'_1 \mathbf{c}' + \alpha'_1 \mathbf{c} + \alpha'_2 (\mathbf{c}' \mathbf{c} + \mathbf{c} \mathbf{c}') + \alpha'_2 \mathbf{c}^2 + \alpha'_3 \mathbf{A}'_0 + \alpha'_3 \mathbf{A}_0 + \\
 & + \alpha'_4 (\mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_0) + \alpha'_5 (\mathbf{c}' \mathbf{A}_0 + \mathbf{c} \mathbf{A}'_0 + \mathbf{A}'_0 \mathbf{c} + \mathbf{A}_0 \mathbf{c}') + \\
 & + \alpha'_5 (\mathbf{c} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{c}) + \alpha'_6 (\mathbf{c} \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{c} \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_0 + \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{c} + \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_0 \mathbf{c}) + \\
 & + \alpha'_7 (\mathbf{c}' \mathbf{c} \mathbf{A}_0 + \mathbf{c} \mathbf{c}' \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{c}' \mathbf{c} + \mathbf{A}_0 \mathbf{c} \mathbf{c}' + \mathbf{c}^2 \mathbf{A}'_0 + \mathbf{A}'_0 \mathbf{c}^2) + \\
 (3.6) \quad & + \alpha'_7 (\mathbf{c}^2 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{c}^2) + \alpha'_8 (\mathbf{c}^2 \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{c}^2 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_0 + \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{c}^2 + \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_0 \mathbf{c}^2) + \\
 & + \sum_{\tau=1}^N \beta_\tau \mathbf{A}'_\tau + \sum_{\tau=1}^N \delta_\tau (\mathbf{c} \mathbf{A}'_\tau + \mathbf{A}'_\tau \mathbf{c}) + \sum_{\tau=1}^N \delta_\tau (\mathbf{c}^2 \mathbf{A}'_\tau + \mathbf{A}'_\tau \mathbf{c}^2) + \\
 & + \sum_{\tau=1}^N \varepsilon_\tau (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_\tau + \mathbf{A}'_\tau \mathbf{A}_0) + \sum_{\tau=1}^N \zeta_\tau (\mathbf{c} \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_\tau + \mathbf{A}'_\tau \mathbf{A}_0 \mathbf{c} + \\
 & + \mathbf{A}_0 \mathbf{c} \mathbf{A}'_\tau + \mathbf{A}'_\tau \mathbf{c} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_\tau \mathbf{c} + \mathbf{c} \mathbf{A}'_\tau \mathbf{A}_0) + \\
 & + \sum_{\tau=1}^N \eta_\tau (\mathbf{c}^2 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_\tau + \mathbf{A}'_\tau \mathbf{A}_0 \mathbf{c}^2 + \mathbf{A}_0 \mathbf{c}^2 \mathbf{A}'_\tau + \mathbf{A}'_\tau \mathbf{c}^2 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_\tau \mathbf{c}^2 + \mathbf{c}^2 \mathbf{A}'_\tau \mathbf{A}_0) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\tau=1}^N \vartheta_{\tau} (CA_0 C^2 A'_{\tau} + A'_{\tau} C^2 A_0 C + CA_0 A'_{\tau} C^2 + C^2 A'_{\tau} A_0 C + CA'_{\tau} C^2 A_0 + A_0 C^2 A'_{\tau} C + CA'_{\tau} A_0 C^2 + C^2 A_0 A'_{\tau} C) + O(\varepsilon^2) + O(\eta^2),$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \beta_{\tau}, \delta_{\tau}, \delta_{\tau}$ są skalarnymi wielomianami od niezmienników wymienionych w (3.5).

Należy pamiętać, że wszystkie człony zawierające A_0^2 można również pominąć w wyrażeniach na $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_7$. Funkcje $\alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \varepsilon_{\tau}, \zeta_{\tau}, \eta_{\tau}, \vartheta_{\tau}$ są skalarnymi wielomianami wyłącznie od trzech pierwszych niezmienników (3.5).

Primowane α'_i są liniowymi wyrażeniami względem następujących $5 + 6(N+1)$ przyrostów niezmienników:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} I'_{100} &= \text{tr } C', & I'_{110} &= \text{tr } C' C, & I'_{120} &= \text{tr } C' C^2, \\ I'_{101} &= \text{tr } C' A_0, & I'_{111} &= \text{tr } C' C A_0, \\ J^{1(\tau)}_{100} &= \text{tr } A'_{\tau}, & J^{1(\tau)}_{110} &= \text{tr } A'_{\tau} A_0, & J^{1(\tau)}_{101} &= \text{tr } A'_{\tau} C, \\ J^{1(\tau)}_{102} &= \text{tr } A'_{\tau} C^2, & J^{1(\tau)}_{111} &= \text{tr } A'_{\tau} A_0 C, & J^{1(\tau)}_{112} &= \text{tr } A'_{\tau} A_0 C^2, \end{aligned}$$

$(\tau = 0, 1, 2, \dots, N)$

zapisanych jako wszystkie możliwe kombinacje wskaźników potęgowych lm ($l = 0, 1, 2; m = 0, 1$) oraz mn ($m = 0, 1; n = 0, 1, 2$); zgodnie z wyrażeniami pomocniczymi.

$$(3.8) \quad I'_{1lm} = \text{tr } C' C^l A_0^m, \quad J^{1(\tau)}_{1mn} = \text{tr } A'_{\tau} A_0^m C^n.$$

W wyrażeniach (3.7) i (3.8) /por.[3]/ wykorzystaliśmy fakt, że ślad iloczynu macierzowego utworzonego z 3×3 macierzy nie ulega zmianie ani przy cyklicznej permutacji czynników, ani też przy odwróceniu ich kolejności w iloczynie.

Współczynniki skalarnych wielomianów $\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_5, \alpha'_7$ właściwe dla odpowiednich przyrostów

niezmienników I'_{ilm} i $J'_{lmn}^{(r)}$, można obliczyć różniczkując α_i względem niezmienników (3.5), oraz niezmienników zawierających A_τ aż do drugiej potęgi włącznie /por. [4]/. W ten sposób otrzymamy

$$(3.9) \quad a_{n(100)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{C}}, \quad b_{n(110)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{C}^2}, \quad c_{n(120)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{C}^3},$$

$$d_{n(101)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{A}_0}, \quad e_{n(111)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{A}_0},$$

oraz ($\tau = 0, 1, \dots, N$)

$$(3.10) \quad f_{n(100)}^{(r)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{A}_\tau}, \quad g_{n(101)}^{(r)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{A}_\tau}, \quad h_{n(102)}^{(r)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{A}_\tau},$$

$$i_{n(110)}^{(r)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_\tau}, \quad j_{n(111)}^{(r)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_\tau \mathbf{C}}, \quad k_{n(112)}^{(r)} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \text{tr} \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_\tau \mathbf{C}^2},$$

przy czym: $a_n, b_n, c_n, f_n^{(r)}, g_n^{(r)}, h_n^{(r)}$ są skalarnymi wielomianami od niezmienników (3.5), podczas gdy: $d_n, e_n, i_n^{(r)}, j_n^{(r)}, k_n^{(r)}$ są skalarnymi wielomianami tylko od pierwszych trzech niezmienników (3.5).

Jeśli rozważany materiał jest nieściśliwy, wszystkie dopuszczalne podstawowe i małe dodatkowe ruchy noszą izochoryczny charakter. Oznacza to, że wszystkie człony zawierające $\text{tr} \mathbf{A}_0 = 0$ mogą być odrzucone w (3.4) i (3.6), oraz pierwszy człon $\alpha_0 \mathbf{I}$ powinien być zastąpiony przez $-p \mathbf{I}$, gdzie p jest nową skalarną funkcją /ciśnienie hydrostatyczne/ współrzędnych i czasu wyznaczaną z równań równowagi i warunków brzegowych. Z powodu nieściśliwości materiału mamy również $\det \mathbf{C} = 1$, a więc pierwsze trzy niezmienniki (3.5) nie są niezależne lecz związane relacją wynikającą z twierdzenia Cayley'a - Hamiltona /por. np. [3]/, a mianowicie:

$$(3.11) \quad \text{tr } \mathbf{C}^3 = \text{tr } \mathbf{C} \text{tr } \mathbf{C}^2 - \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{C} [(\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2] + 3.$$

Także wszystkie czony zawierające następujące przyrosty niezmienników:

$$(3.21) \quad \mathbf{I}'_{100} = \text{tr } \mathbf{C}' = 0, \quad \mathbf{J}'_{100}^{(\tau)} = \text{tr } \mathbf{A}'_{\tau} = 0 \quad (\tau = 0, 1, \dots, N),$$

mogą być pominięte w równaniach (3.6), oraz pierwszy człon $\alpha'_0 \mathbf{I}$ zastąpiony przez $-p' \mathbf{I}$, gdzie p' oznacza przyrost funkcji p .

4. Podstawowe zależności dla małego dodatkowego ruchu nałożonego na jednorodne równomierne odkształcenie lepkosprężystego prostopadłościanu.

Równania konstytutywne dyskutowane w poprzednim punkcie można przedstawić w bardziej jawnej postaci dla przypadku jednorodnego równomiernego odkształcenia lepko-sprężystego prostopadłościanu.

Rozważmy stały układ prostokątnych współrzędnych kartezjańskich (x^i) , oznaczając przez a_0 , b_0 i $2h_0$ odpowiednie wymiary nieodkształconego prostopadłościanu w kierunkach x^1 , x^2 i x^3 . Jeśli w pewnej bieżącej chwili czasu $\tau = t$ jego wymiary wynoszą a , b i $2h$, to równania ruchu można zapisać w postaci

$$(4.1) \quad x^1 = \lambda_1 X^1, \quad x^2 = \lambda_2 X^2, \quad x^3 = \lambda_3 X^3,$$

przy czym założyliśmy, że współczynniki odkształcenia $\lambda_1 = a/a_0$, $\lambda_2 = b/b_0$, $\lambda_3 = h/h_0$ są ciągłymi funkcjami tylko czasu t , zaś X^A oznaczają współrzędne cząstki materialnej w stanie nieodkształconym. Zakładając, że w rozważanej chwili czasu t układ współrzędnych konwekcyjnych (X^α) po-

krywa się z przyjętym układem współrzędnych kartezjańskich $(x^i) = (x, y, z)$, oraz biorąc pod uwagę (2.4), (2.5), możemy zapisać tensor odkształcenia, pole prędkości i przyspieszenia w następujących postaciach:

$$(4.2) \quad \left\| C_{\alpha\beta} \right\| = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} ,$$

$$(4.3) \quad v_1 = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} x = \mu_1 x, \quad v_2 = \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} y = \mu_2 y, \quad v_3 = \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} z = \mu_3 z,$$

$$(4.4) \quad \dot{v}_1 = (\dot{\mu}_1 + \mu_1^2)x, \quad \dot{v}_2 = (\dot{\mu}_2 + \mu_2^2)y, \quad \dot{v}_3 = (\dot{\mu}_3 + \mu_3^2)z.$$

Dla przypadku ruchu ustalonego mamy $\mu_i = \text{const}$, co jest równoważne $\lambda_i = \exp \mu_i t$. Przy dostatecznie powolnym ruchu charakteryzującym się $\mu_i = \varepsilon v_i$ składowe przyspieszenia są rzędu ε^2 , a wobec tego mogą być pominięte w dalszych zależnościach w porównaniu z członami rzędu ε . Zgodnie z (2.8) mamy także

$$(4.5) \quad \left\| A_{\alpha\beta}^{(0)} \right\| = \begin{vmatrix} 2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_3 \end{vmatrix}, \quad A_{\alpha\beta}^{(r)} = 0 \quad \text{dla } r > 0.$$

Podstawiając powyższe wyniki do zależności (3.4) otrzymamy

$$(4.6) \quad \sigma_j^i = \delta_j^i (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i^2 + \alpha_2 \lambda_i^4 + 2\alpha_3 \mu_i + 4\alpha_5 \lambda_i^2 \mu_i + 4\alpha_7 \lambda_i^4 \mu_i)$$

(bez sumowania!)

Można łatwo zauważyć, że równania równowagi (2.27) są spełnione tożsamościowo oraz że wszystkie ściany rozważanego prostopadłościanu są obciążone co najwyżej odpowiednimi naprężeniami normalnymi wynikającymi z (4.6).

Jeśli pewne powierzchnie rozważanego prostopadłościanu są swobodne od obciążenia, wówczas odpowiednie współczynniki odkształcenia są związane zależnościami wynikającymi z (4.6). W szczególności dla przypadku prostego rozciągania lub ściskania w kierunku osi x mamy

$$(4.7) \quad \sigma_1^1 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda^4 + \alpha_3 \mu + 4\alpha_5 \lambda^2 \mu + 4\alpha_7 \lambda^4 \mu, \\ \lambda_1 = \lambda, \mu_1 = \mu, \sigma_2^2 = \sigma_3^3 = 0, \lambda_2 = \lambda_3, \mu_2 = \mu_3.$$

Będziemy rozważać obecnie dowolny mały ruch nałożony na prostopadłościan odkształcony w bieżącej chwili czasu. Oznaczając przez: $w_1 = u$, $w_2 = v$, $w_3 = w$ odpowiednie kowariantne składowe wektora \mathbf{W} traktowane jako funkcje czasu t i położenia cząstki oraz uwzględniając zależności (2.11) do (2.24), otrzymamy dla przyrostów

$$(4.8) \quad \left\| C'_{\alpha\beta} \right\| = \left\| G'_{\alpha\beta} \right\| = \begin{vmatrix} 2u_{,1} & \cdot & \cdot \\ u_{,2} + v_{,1} & 2v_{,2} & \cdot \\ u_{,3} + w_{,1} & v_{,3} + w_{,2} & 2w_{,3} \end{vmatrix},$$

$$G'^{\alpha\beta} = -G'_{\alpha\beta},$$

$$(4.9) \quad \left\| A^{(0)}_{\alpha\beta} \right\| = \begin{vmatrix} 2 \frac{D}{Dt} u_{,1} & \cdot & \cdot \\ \frac{D}{Dt} (u_{,2} + v_{,1}) & 2 \frac{D}{Dt} v_{,2} & \cdot \\ \frac{D}{Dt} (u_{,3} + w_{,1}) & \frac{D}{Dt} (v_{,3} + w_{,2}) & 2 \frac{D}{Dt} w_{,3} \end{vmatrix},$$

$$(4.10) \quad \left\| A^{(0)\alpha}_{\beta} \right\| = \begin{vmatrix} 2 \frac{D}{Dt} u_{,1} & \left[\frac{D}{Dt} + 2(\mu_2 - \mu_1) \right] (\cdot) & \left[\frac{D}{Dt} + 2(\mu_3 - \mu_1) \right] (\cdot) \\ \left[\frac{D}{Dt} + 2(\mu_1 - \mu_2) \right] (u_{,2} + v_{,1}) & 2 \frac{D}{Dt} v_{,2} & \left[\frac{D}{Dt} + 2(\mu_3 - \mu_2) \right] (\cdot) \\ \left[\frac{D}{Dt} + 2(\mu_1 - \mu_3) \right] (u_{,3} + w_{,1}) & \left[\frac{D}{Dt} + 2(\mu_2 - \mu_3) \right] (v_{,3} + w_{,2}) & 2 \frac{D}{Dt} w_{,3} \end{vmatrix}$$

$$(4.11) \quad A^{(1)\alpha}_{\beta} = \frac{D}{Dt} A^{(0)\alpha}_{\beta} \quad , \quad A^{(\tau)\alpha}_{\beta} = \frac{D^{\tau}}{Dt^{\tau}} A^{(1)\alpha}_{\beta} \quad \text{dla } \tau > 1 \quad ,$$

gdzie wskaźniki cyfrowe za przecinkiem oznaczają odpowiednio pochodne względem współrzędnych x , y , z .

W rozważanym przypadku jednorodnego i równomiernego odkształcenia podstawowego, przyrosty niezmienników zdefiniowane wzorami (3.7) przybierają postać (dla $\tau = 0, 1, \dots, N$)

$$(4.12) \quad I'_{100} = 2 \sum_{i=1}^3 w_{i,i} \quad , \quad I'_{110} = 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 w_{i,i} \quad , \quad I'_{120} = 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^4 w_{i,i} \quad ,$$

$$I'_{101} = 4 \sum_{i=1}^3 \mu_i w_{i,i} \quad , \quad I'_{111} = 4 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mu_i w_{i,i} \quad ,$$

$$(4.13) \quad J^{(1)\alpha}_{100} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{i,i} \quad , \quad J^{(1)\alpha}_{110} = 4 \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{i,i} \quad ,$$

$$J^{(1)\alpha}_{101} = 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{i,i} \quad ,$$

$$J^{(1)\alpha}_{102} = 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^4 \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{i,i} \quad , \quad J^{(1)\alpha}_{111} = 4 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mu_i \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{i,i} \quad ,$$

$$J^{(1)\alpha}_{112} = 4 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^4 \mu_i \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{i,i} \quad .$$

Dla naszych obecnych celów jest rzeczą bardziej korzystną wprowadzić nowe oznaczenia na wielomiany występujące w równaniach konstytutywnych (3.6) jako współczynniki przy przyrostach niezmienników określonych przez (4.12) i (4.13). Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(4.14) \quad A_i = a_{0(100)} + a_{1(100)} \lambda_i^2 + a_{2(100)} \lambda_i^4 + 2a_{3(100)} \mu_i + 4a_{5(100)} \lambda_i^2 \mu_i + 4a_{7(100)} \lambda_i^4 \mu_i \quad ,$$

$$(4.15) \cdot F_i^{(\tau)} = f_{0(100)}^{(\tau)} + f_{1(100)}^{(\tau)} \lambda_i^2 + f_{2(100)}^{(\tau)} \lambda_i^4 + 2f_{3(100)}^{(\tau)} \mu_i + 4f_{5(100)}^{(\tau)} \lambda_i^2 \mu_i +$$

$$(4.16) K_i^{(\tau)} = k_{0(112)}^{(\tau)} + k_{1(112)}^{(\tau)} \lambda_i^2 + k_{2(112)}^{(\tau)} \lambda_i^4, \quad + 4f_{7(100)}^{(\tau)} \lambda_i^4 \mu_i, \\ (\tau = 0, 1, \dots, N).$$

Pozostałe wielomiany, a mianowicie: B_i , C_i , D_i , E_i oraz $G_i^{(\tau)}$, $H_i^{(\tau)}$, mogą być zbudowane w sposób podobny do (4.14) oraz (4.15), natomiast wielomiany $I_i^{(\tau)}$, $J_i^{(\tau)}$ podobnie do (4.16). Oznaczmy również przez

$$L_{ij} = \alpha_1 + \alpha_2 (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) + 2\alpha_5 (\mu_i + \mu_j) + 2\alpha_7 (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) (\mu_i + \mu_j),$$

$$(4.17) M_{ij} = \alpha_3 + 2\alpha_4 (\mu_i + \mu_j) + \alpha_5 (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) + 2\alpha_6 (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) (\mu_i + \mu_j) + \\ + \alpha_7 (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) + 2\alpha_8 (\lambda_i^4 + \lambda_j^4) (\mu_i + \mu_j),$$

$$N_{ij}^{(\tau)} = \beta_\tau + \gamma_\tau (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) + \delta_\tau (\lambda_i^4 + \lambda_j^4) + 2\varepsilon_\tau (\mu_i + \mu_j) + \\ + 2\zeta_\tau (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) (\mu_i + \mu_j) + 2\zeta_\tau (\lambda_i^2 \mu_i + \lambda_j^2 \mu_j) + 2\eta_\tau (\lambda_i^4 + \lambda_j^4) (\mu_i + \mu_j) + \\ + 2\eta_\tau (\lambda_i^4 \mu_i + \lambda_j^4 \mu_j) + 2\vartheta_\tau (\lambda_i^2 \lambda_j^4 + \lambda_i^4 \lambda_j^2) (\mu_i + \mu_j) + \\ + 2\vartheta_\tau (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) (\lambda_i^2 \mu_i + \lambda_j^2 \mu_j). \\ 1 \leq \tau \leq N$$

Powyższe wielomiany są symetryczne względem wskaźników i, j ($i, j = 1, 2, 3$).

Korzystając z wprowadzonych powyżej oznaczeń, równania konstytutywne (3.6) można zapisać w następującej prostszej postaci

$$(4.18) \sigma_L^i = 2L_{ii} w_{i,i} + 2A_i \sum_n^3 w_{n,n} + 2B_i \sum_n^3 \lambda_n^2 w_{n,n} + 2C_i \sum_n^3 \lambda_n^4 w_{n,n} + \\ + 4D_i \sum_n^3 \mu_n w_{n,n} + 4E_i \sum_n^3 \lambda_n^2 \mu_n w_{n,n} + 2M_{ii} \frac{D}{Dt} w_{i,i} +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2F_i^{(0)} \sum_n^3 \frac{D}{Dt} W_{n,n} + 2G_i^{(0)} \sum_n^3 \lambda_n^2 \frac{D}{Dt} W_{n,n} + 2H_i^{(0)} \sum_n^3 \lambda_n^4 \frac{D}{Dt} W_{n,n} + \\
 & + 4I_i^{(0)} \sum_n^3 \mu_n \frac{D}{Dt} W_{n,n} + 4J_i^{(0)} \sum_n^3 \lambda_n^2 \mu_n \frac{D}{Dt} W_{n,n} + 4K_i^{(0)} \sum_n^3 \lambda_n^4 \mu_n \frac{D}{Dt} W_{n,n} + \\
 & + 2 \sum_{\tau=1}^N N_{ii}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} W_{i,i} + \sum_{\tau=1}^N \left[2F_i^{(\tau)} \sum_n^3 \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} W_{n,n} + 2G_i^{(\tau)} \sum_n^3 \lambda_n^2 \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} W_{n,n} + \right. \\
 & + 2H_i^{(\tau)} \sum_n^3 \lambda_n^4 \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} W_{n,n} + 4I_i^{(\tau)} \sum_n^3 \mu_n \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} W_{n,n} + 4J_i^{(\tau)} \sum_n^3 \lambda_n^2 \mu_n \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} W_{n,n} + \\
 & \left. + 4K_i^{(\tau)} \sum_n^3 \lambda_n^4 \mu_n \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} W_{n,n} \right] \quad (n=1, 2, 3),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}^1 = & L_{ij} (w_{i,j} + w_{j,i}) + M_{ij} \left[\frac{D}{Dt} + 2(\mu_i - \mu_j) \right] (w_{i,j} + w_{j,i}) + \\
 & + \sum_{\tau=1}^N N_{ij}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} (w_{i,j} + w_{j,i}),
 \end{aligned}$$

przy czym nie należy sumować po indeksach i , natomiast sumowanie po $n = 1, 2, 3$ oraz $\tau = 1, 2, \dots, N$, zostało oznaczone przez właściwe znaki sumowania. Podobne związki będą słuszne dla materiału nieściśliwego; należy wtedy odrzucić wszystkie człony zawierające $\sum_n W_{n,n}$, $\sum_n \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} W_{n,n}$,

$a_{0(100)}, \dots, k_{0(112)}, a_{n(100)}, f_{n(100)}$ oraz dodać człon $- p^i \delta_j^i$

Podstawiając (4.18) i (4.6) do równań równowagi (2.28), oraz uwzględniając przyrosty przyspieszenia zgodne z (2.19), a mianowicie

$$(4.19) \quad \dot{v}_\alpha^1 = \frac{D^2}{Dt^2} w_\alpha - 2v^\mu{}_{,\alpha} \frac{D}{Dt} w_\mu + O(\varepsilon^2) \quad (\alpha=1, 2, 3),$$

otrzymamy układ cząstkowych równań różniczkowych rządzących małym dodatkowym ruchem nałożonym na ruch podstawowy badanego prostopadłościanu.

Założmy dla prostoty, że przemieszczenia $w_1 = u(x, y, t)$, $w_2 = v(x, y, t)$, $w_3 = w(x, y, t) = 0$ są wyłącznie funkcjami argumentów wymienionych w nawiasach. Wówczas po prostych

przekształceniach równania równowagi i warunków nieściśliwości mogą być zapisane w następującej postaci:

$$(4.20) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial^r}{\partial t^r} (C_r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_r \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) - \frac{\partial p'}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$E \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial^r}{\partial t^r} (G_r \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + H_r \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) - \frac{\partial p'}{\partial y} = c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + d \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

przy czym: $A, \dots, C_r, \dots, a, b, c, d$ są tylko funkcjami czasu t , zaś $p'(x, y, t)$ oznacza przyrost ciśnienia hydrostatycznego. W ogólnym przypadku współczynniki równań mogą być dość skomplikowanymi funkcjami czasu i rozwiązanie zagadnienia, nawet dla wyspecyfikowanych własności materiału, staje się praktycznie niemożliwe.

Matematyczna teoria równań cząstkowych typu (4.20), jak się wydaje, nie została dotychczas opracowana. Nawet ogólna teoria równań o znacznie prostszej postaci, na przykład

$$(4.21) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t}, \quad f = f(x, t),$$

istotnych dla efektów drugiego rzędu w teorii dynamiki płynów nie została należycie rozwinięta /por. [7]/. Oczywiście w ostatnim przypadku często można rozdzielić zmienne i uzyskać pewne interesujące rozwiązania.

Można jednakże zastosować inne podejścia, użyteczne w dyskusji zjawiska utraty stateczności lub zjawiska wyboczenia, /por. p. 5/ wykorzystując konwekcyjny opis małego dodatkowego ruchu wraz z poprzednimi założeniami dotyczącymi quasi-statycznego charakteru ruchu podstawowego. Należy przy tym pamiętać, że konwekcyjne składowe wektora η^w opisują pewien infinitesimalny ruch względny odniesiony do powoli poruszającego się

~~Wzrost~~ i odkształcającego się układu współrzędnych konwekcyjnych.

Wszystkie współczynniki funkcyjne pojawiające się we wzorach (4.6) i (4.18) zależą od czasu t poprzez wielomiany od λ_i będące także liniowymi wyrażeniami względem

$\mu_i = \text{const}$. Przypuśćmy, że mały dodatkowy ruch jest wynikiem pewnych zaburzeń działających nagle w dowolnej chwili

$t = \bar{t}$, oraz że przyczyna wywołująca zaburzenia natychmiast znika. Jeśli najwyższą potęgę λ_i ($i = 1, 2$ lub 3) w wyrażeniach (4.6) lub (4.18) oznaczymy przez liczbę całkowitą m , to biorąc pod uwagę że $\lambda_i = \exp \mu_i t$, możemy $\lambda_i^m(t)$ rozwinąć w szereg zbieżny w otoczeniu $t = \bar{t}$, a mianowicie

$$(4.22) \quad \lambda_i^m(t) = \lambda_i^m(\bar{t}) \left[1 + m \mu_i (t - \bar{t}) + \frac{m^2}{2!} \mu_i^2 (t - \bar{t})^2 + \dots \right].$$

Dla wystarczająco małych wartości μ_i będących rzędu $O(\varepsilon)$, można zawsze znaleźć taki krótki lecz skończony przedział czasu $T - \bar{t}$, ażeby uważać wszystkie człony, za wyjątkiem pierwszego po prawej stronie (4.22), za wielkości rzędu $O(\varepsilon^2)$ dla $\bar{t} \leq t \leq T$. Przy takim założeniu możemy napisać

$$(4.23) \quad \lambda_i^m(t) = \lambda_i^m(\bar{t}) + O(\varepsilon^2),$$

dla $\bar{t} \leq t \leq T$.

$$\mu_i \lambda_i^m(t) = \mu_i \lambda_i^m(\bar{t}) + O(\varepsilon^3),$$

Podstawiając powyższe zależności do wielomianów będących współczynnikami w równaniach konstytutywnych (4.6), (4.18), oraz pomijając człony rzędu wyższego niż ε otrzymamy przybli-

żone równania konstytutywne ważne w krótkim przedziale czasu występującym bezpośrednio po momencie działania zaburzeń.

Można zaobserwować, że dla $\mu_i \rightarrow 0$ rozważany materiał staje się materiałem nieliniowo sprężystym odkształcającym się "w sposób statyczny"; wówczas wszystkie czony przemnożone przez μ_i dążą do zera i pierwsza zależność (4.23) staje się ważna w nieskończonym przedziale czasu. Osiągniemy także analogiczny wynik, jeśli materiał lepkosprężysty z zanikającą pamięcią jest przetrzymany w ustalonym stanie odkształcenia wystarczająco długo, ażeby poprzedni proces odkształcenia mógł być całkowicie zapomniany /por. [13]/.

Jeśli podstawowy stan ciała jest jego stanem naturalnym, tj. wszystkie $\lambda_i = 1$ oraz $\mu_i = 0$, to wielomiany (4.14) do (4.17) charakteryzujące własności materiału przybierają stałe wartości. Zamiast (4.17) otrzymamy np.

$$(4.24) \quad L_{ij} = L = \alpha_1 + 2\alpha_2, \quad M_{ij} = N_0 = \alpha_3 + 2\alpha_5 + 2\alpha_7,$$

$$N_{ij}^{(\tau)} = N_\tau = \beta_\tau + 2\gamma_\tau + 2\delta_\tau, \quad 1 \leq \tau \leq N;$$

także zależności (4.18) uproszczą się do postaci

$$(4.25) \quad \sigma_{ij}^i = L (w_{i,j} + w_{j,i}) + \sum_{\tau=0}^N N_\tau \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} (w_{i,j} + w_{j,i}) +$$

$$+ \delta_j^i \left[S \sum_{n=1}^3 w_{n,n} + \sum_{\tau=0}^N \sum_{n=1}^3 T_\tau \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{n,n} \right],$$

w której oznaczyliśmy

$$(4.26) \quad S = 2A_i + 2B_i + 2C_i, \quad T_\tau = 2F_i^{(\tau)} + 2G_i^{(\tau)} + 2H_i^{(\tau)}.$$

Po uwzględnieniu (2.28) i (4.19), równania równowagi dla rozważanego prostopadłościanu można zatem zapisać w następującej postaci:

$$(4.27) \quad 2L w_{(i,j)i} + \sum_{\tau=0}^N N_{\tau} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{(i,j)i} + \delta_{ij} \left[S w_{n,ni} + \right. \\ \left. + \sum_{\tau=0}^N T_{\tau} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{n,ni} \right] = S \frac{D^2}{Dt^2} w_j, \quad j=1,2,3,$$

gdzie uwzględniono sumowanie po powtarzających się wskaźnikach. Wykorzystując notację wektorową, otrzymamy inną równoważną postać równań (4.27), a mianowicie

$$(4.28) \quad L \Delta \mathbf{w} + (L+S) \text{grad}(\text{div} \mathbf{w}) + \sum_{\tau=0}^N \left[N_{\tau} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} \Delta \mathbf{w} + \right. \\ \left. + (N_{\tau} + T_{\tau}) \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} \text{grad}(\text{div} \mathbf{w}) \right] = S \frac{D^2}{Dt^2} \mathbf{w}.$$

Równania powyższe można uważać za uogólnienie znanych równań Lamé'go w klasycznej teorii sprężystości. Współczynniki typu L i S charakteryzują sprężyste własności materiału, podczas gdy współczynniki typu N_{τ} i T_{τ} ($\tau=0,1,\dots,N$) są związane z jego własnościami lepкими. Równania (4.28) są formalnie zgodne z równaniami dyskutowanymi np. w [22], dla materiałów lepko-sprężystych opisywanych ogólnymi liniowymi równaniami różniczkowymi.

Zależności dyskutowane dotychczas tworzą podstawę dla dalszych badań zagadnień szczególnych. Przykładem takiego zagadnienia jest zagadnienie wyboczenia przedstawione w drugiej części pracy.

C z e ś ć I I

Niestateczność nieliniowo lepkosprężystych belek poddanych
skonczonemu ściskaniu

5. Wstęp

Niniejsza część pracy stanowi kontynuację pierwszej części pracy, w której rozwinięto ogólną teorię małego ruchu nałożonego na powolny i ustalony ruch podstawowy nieliniowego materiału lepkosprężystego. Obecnie zastosujemy niektóre wyniki poprzedniej części, zwłaszcza te dotyczące jednorodnego i równomiernego odkształcenia lepkosprężystego prostopadłościanu, do zbadania zagadnienia wyboczenia nieściśliwej belki /kolumny/ o dowolnych wymiarach.

W dalszych rozważaniach wykorzystujemy kryterium dynamicznej utraty stateczności początkowo prostej ściskanej osiowo belki, niezależnie od tego czy rozważana belka jest cienka czy też nie. Podobne kryterium utraty stateczności zostało zaproponowane m.in. w pracy [23] dotyczącej wyboczenia pełzającego cienkich prętów przy dwóch szczególnych postaciach prawa pełzania. Również prace [24], [25], a ostatnio [26], poświęcają wiele uwagi porównaniu wyników teoretycznych uzyskanych dla wyboczenia pełzającego w oparciu o dynamiczne kryterium niestateczności, z wynikami doświadczalnymi oraz z wynikami przy innych, nieraz czysto inżynierskich kryteriach. Inne metody, opracowane głównie dla wyboczenia pełzającego wstępnie zakrzywionych prętów, mogą być reprezentowane m.in. przez prace [27], [28], gdzie również cytuje się obszerną literaturę przedmiotu. Zagadnienie wyboczenia grubego pręta sprężystego przy szczególnym nieliniowym prawie fizycznym zostało rozwiązane ostatnio w pracy [29].

Chcielibyśmy zaznaczyć, że obecne rozważania dotyczą wyłącznie przypadków skończonych odkształceń podstawowych oraz ogólnych nieliniowych związków fizycznych; jednakże przejście do infinitezymalnych odkształceń podstawowych oraz liniowych związków fizycznych jest całkowicie możliwe, jeśli postępować będziemy w sposób podobny do przedstawionego np. w pracach [21] lub [7],[30].

6. Przypadek małego płaskiego ruchu nałożonego na proste osiowe ściskanie nieściśliwej belki lepkosprężystej

Rozważmy nieściśliwy prostopadłościan w kształcie belki ścis-
kanej osiowo w kierunku osi x w ten sposób, że jej długość
 a_0 dla $\tau = 0$, zmienia się na a w chwili bieżącej
 $\tau = t$. Oznaczając współczynniki odkształcenia λ_i oraz
parametry prędkości μ_i odpowiednio przez

$$(6.1) \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mu_1 = \mu, \quad \mu_2 = \mu_3 = -\frac{1}{2}\mu,$$

możemy wykorzystać wszystkie zależności kinematyczne wyprowadzo-
ne w p. 4 do zbadania możliwości wyboczenia rozważanej belki.

Najbardziej prawdopodobne przypadki wyboczenia mogą mieć miej-
sce w płaszczyznach xz lub xy w zależności od odpo-
wiednich wymiarów $2h$ i b . Zakładając, że $2h < b$
rozważmy przypadek małego dodatkowego ruchu w płaszczyźnie xz ,
a mianowicie

$$(6.2) \quad w_1 = u(x, z, t), \quad w_2 = 0, \quad w_3 = w(x, z, t).$$

Wprowadzamy następujące wyrażenia:

(6.3)

$$P_{ij} = L_{ij} + \delta_{ij} L_{ij} + 2B_i \lambda_j^2 + 2C_i \lambda_j^4 + 4D_i \mu_j + 4E_i \lambda_j^2 \mu_j + 2(\delta_{ij} - 1) M_{ij} (\mu_j - \mu_i),$$

$$Q_{ij}^{(0)} = M_{ij} + \delta_{ij} M_{ij} + 2G_i^{(0)} \lambda_j^2 + 2H_i^{(0)} \lambda_j^4 + 4I_i^{(0)} \mu_j + 4J_i^{(0)} \lambda_j^2 \mu_j + 4K_i^{(0)} \lambda_j^4 \mu_j,$$

$$Q_{ij}^{(\tau)} = N_{ij}^{(\tau)} + \delta_{ij} N_{ij}^{(\tau)} + 2G_i^{(\tau)} \lambda_j^2 + 2H_i^{(\tau)} \lambda_j^4 + 4I_i^{(\tau)} \mu_j + 4J_i^{(\tau)} \lambda_j^2 \mu_j + 4K_i^{(\tau)} \lambda_j^4 \mu_j,$$

($\tau = 1, 2, \dots, N$)

$$R_{ij} = L_{ij} + 2M_{ij} (\mu_j - \mu_i),$$

oznaczające nowe wielomiany od λ_i i μ_i ; przy czym

$ij = 11, 13, 31, 33$ /bez sumowania po powtarzających się wskaźnikach/. Wielomiany $L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}^{(\tau)}, B_i, \dots, E_i$ oraz $G_i^{(\tau)}, \dots, K_i^{(\tau)}$ zostały zdefiniowane w p. 4. Mając na uwadze zależności (2.3) otrzymamy następujące zależności dla przyrostów tensora naprężenia:

$$\sigma_{11}^{\tau+1} = P_{11} u_{,1} + \sum_{\tau=0}^N Q_{11}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} u_{,1} + \sum_{\tau=0}^N Q_{13}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{,3} + (P_{13} - R_{13}) w_{,3} - M_{13} \frac{D}{Dt} w_{,3} - p',$$

$$\sigma_{33}^{\tau+1} = P_{33} w_{,3} + \sum_{\tau=0}^N Q_{33}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{,3} + \sum_{\tau=0}^N Q_{31}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} u_{,1} + (P_{31} - R_{31}) u_{,1} - M_{31} \frac{D}{Dt} u_{,1} - p',$$

$$\sigma_{13}^{\tau+1} = R_{13} (u_{,3} + w_{,1}) + M_{13} \frac{D}{Dt} (u_{,3} + w_{,1}) + \sum_{\tau=1}^N N_{13}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} (u_{,3} + w_{,1}),$$

$$\sigma_{31}^{\tau+1} = R_{31} (u_{,3} + w_{,1}) + M_{31} \frac{D}{Dt} (u_{,3} + w_{,1}) + \sum_{\tau=1}^N N_{31}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} (u_{,3} + w_{,1}),$$

(6.4)

$$\sigma_3^{12} = \sigma_2^{13} = \sigma_2^{11} = \sigma_1^{12} = 0,$$

gdzie p' oznacza odpowiedni przyrost ciśnienia hydrostatycznego.

Uwzględniając p. 2 - wzory (2.28), (2.30), oraz p. 4. - wzór (4.19), równania równowagi dla przyrostów i warunków nieściśliwości można zapisać w postaci

$$(6.5) \quad \sigma_{1,1}^{11} + \sigma_{1,3}^{13} + \sigma_1^1 w_{,13} = \rho \left(\frac{D^2 u}{Dt^2} - 2\mu_1 \frac{Du}{Dt} \right),$$

$$\sigma_{3,3}^{13} + \sigma_{3,1}^{11} - \sigma_1^1 u_{,13} = \rho \left(\frac{D^2 w}{Dt^2} - 2\mu_3 \frac{Dw}{Dt} \right),$$

$$u_{,1} + w_{,3} = 0.$$

Podstawiając (6.4) do (6.5) otrzymamy następujący układ cząstkowych równań różniczkowych:

$$(6.6) \quad P_{11} u_{,11} + (P_{13} + \sigma_1^1) w_{,13} + R_{13} u_{,33} + \sum_{\tau=0}^N Q_{11}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} u_{,11} + \\ + \sum_{\tau=0}^N Q_{13}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{,13} + \sum_{\tau=1}^N N_{13}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} u_{,33} - p'_{,1} = \rho \left(\frac{D^2 u}{Dt^2} - 2\mu_1 \frac{Du}{Dt} \right),$$

$$P_{33} w_{,33} + (P_{31} - \sigma_1^1) u_{,13} + R_{31} w_{,11} + \sum_{\tau=0}^N Q_{33}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{,33} + \\ + \sum_{\tau=0}^N Q_{31}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} u_{,13} + \sum_{\tau=1}^N N_{31}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} w_{,11} - p'_{,3} = \rho \left(\frac{D^2 w}{Dt^2} - 2\mu_3 \frac{Dw}{Dt} \right),$$

$$u_{,1} + w_{,3} = 0.$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania powyższego układu równań dla wystarczająco krótkiego lecz skończonego przedziału czasu

$\bar{t} \leq t \leq T$, przy czym \bar{t} oznacza chwilę czasu odpowiadającą pojawieniu się dopuszczalnych zaburzeń. Ponadto, będąc zainteresowanymi wyłącznie w zagadnieniu wyboczenia, dochodzimy do wniosku, że pole dodatkowych przemieszczeń u i w musi spełniać następujące geometryczne i początkowe warunki:

a/ przemieszczenia $u(x, z, t - \bar{t})$ i $w(x, z, t - \bar{t})$ są odpowiednio nieparzystą i parzystą funkcją zmiennej z , a mianowicie

$$(6.7) \quad u(x, -z, t - \bar{t}) = -u(x, z, t - \bar{t}), \quad w(x, -z, t - \bar{t}) = w(x, z, t - \bar{t});$$

b/ przemieszczenia u i w powinny zawierać stałe całkowania zależne od warunków początkowych nałożonych np. na u i jej pochodne czasowe w chwili $t = \bar{t}$.

Dla rozważanego zagadnienia mamy również następujące warunki brzegowe:

A/ powierzchnie $z = \pm h$ są swobodne od dodatkowych naprężeń stycznych i normalnych, a więc zgodnie z (2.29)

$$(6.8) \quad \sigma_{13}^1 = 0 \quad (\text{lub } u_{,3} + w_{,1} = 0) \quad \text{dla } z = \pm h$$

$$(6.9) \quad \sigma_{33}^1 = 0 \quad \text{dla } z = \pm h$$

oraz jedno z dwóch: albo

B/ powierzchnie $x = 0, a$ nie mogą przesuwać się w kierunku osi z , będąc jednocześnie swobodnymi od naprężeń stycznych, tj.

$$(6.10) \quad u = 0, \quad \sigma_{31}^1 = 0 \quad (u_{,3} + w_{,1} = 0) \quad \text{dla } x = 0, a,$$

albo też

C/ powierzchnie $x = 0, a$ nie mogą przesuwać się w kierunku osi z , będąc jednocześnie swobodnymi od dodatkowych naprężeń normalnych, tj.

$$(6.11) \quad w = 0, \quad \sigma_{11}^y = 0 \quad \text{dla } x = 0, a.$$

Dwie ostatnie możliwości /B i C/ zostały zilustrowane na rys. 1 i 2. Przypadek dodatkowych przemieszczeń symetrycznych względem płaszczyzny xy może być traktowany w podobny sposób, jakkolwiek taki przypadek nie jest związany ze zjawiskiem wyboczenia, a raczej z lokalną utratą stateczności.

W założeniu, że funkcje u , w , p' są funkcjami analitycznymi, rozwiązanie układu (6.6), ważne dla małego skończonego przedziału czasu $\bar{t} \leq t \leq T$, może być przedstawione w postaci szeregów trygonometrycznych

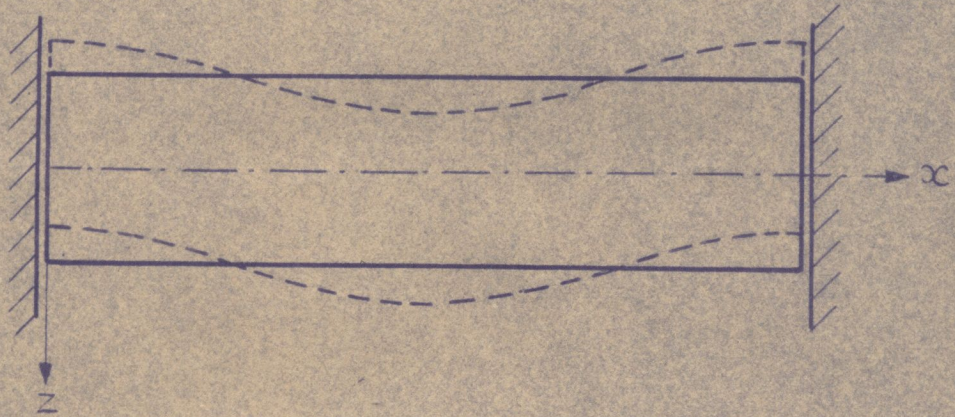
$$(6.12) \quad u(x, z, t - \bar{t}) = \sum_n f_n(z) \begin{Bmatrix} \sin \gamma_n x \\ \cos \gamma_n x \end{Bmatrix} e^{i\omega_n(t - \bar{t})},$$

$$w(x, z, t - \bar{t}) = \sum_n g_n(z) \begin{Bmatrix} \cos \gamma_n x \\ \sin \gamma_n x \end{Bmatrix} e^{i\omega_n(t - \bar{t})},$$

$$p'(x, z, t - \bar{t}) = \sum_n h_n(z) \begin{Bmatrix} \cos \gamma_n x \\ \sin \gamma_n x \end{Bmatrix} e^{i\omega_n(t - \bar{t})},$$

gdzie n oznacza nieznikającą liczbę naturalną, zaś górne i dolne wyrażenia w nawiasach dotyczą odpowiednio omawianych powyżej przypadków B i C.

a) $n=2$

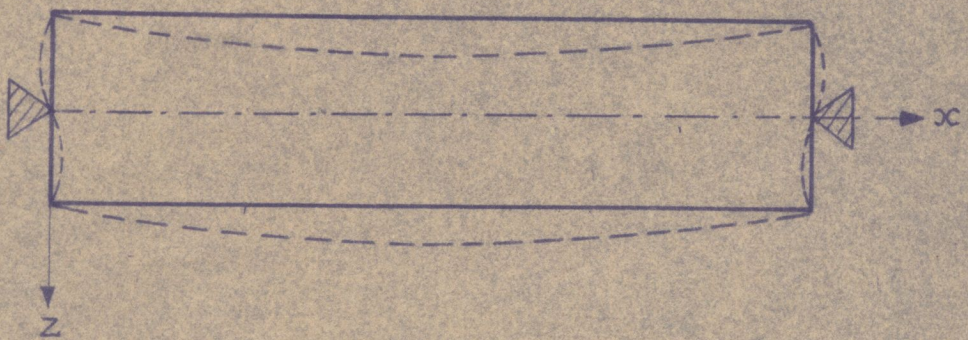


b) $n=1$



Rys.1

$n=1$



Rys.2

Podstawiając powyższe wyrażenia do warunków brzegowych (6.10), (6.11) oraz uwzględniając (6.4), możemy uzyskać tożsamościowe spełnienie warunków B i C, jeśli

$$(6.13) \quad \sigma_n = \frac{\pi}{\alpha} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty) .$$

Podstawiając (6.12) do równań równowagi (6.6) otrzymamy również

$$\begin{aligned} -\sigma_n^2 f_n \left[\bar{P}_{11} + \sum_{\tau=0}^N \bar{Q}_{11}^{(\tau)} (i\omega_n)^{\tau+1} \right] \mp \sigma_n g_n' \left[\bar{P}_{13} + \bar{\delta}_1^1 + \right. \\ \left. + \sum_{\tau=0}^N \bar{Q}_{13}^{(\tau)} (i\omega_n)^{\tau+1} \right] + f_n'' \left[\bar{R}_{13} + \sum_{\tau=1}^N \bar{N}_{13}^{(\tau)} (i\omega_n)^{\tau+1} \right] \pm \sigma_n h_n = \\ = -g f_n (\omega_n^2 + 2\mu_1 i\omega_n) , \end{aligned}$$

$$(6.14) \quad \begin{aligned} g_n'' \left[\bar{P}_{33} + \sum_{\tau=0}^N \bar{Q}_{33}^{(\tau)} (i\omega_n)^{\tau+1} \right] \pm \sigma_n f_n' \left[\bar{P}_{31} - \bar{\delta}_1^1 + \right. \\ \left. + \sum_{\tau=0}^N \bar{Q}_{31}^{(\tau)} (i\omega_n)^{\tau+1} \right] - \sigma_n^2 g_n \left[\bar{R}_{31} + \sum_{\tau=1}^N \bar{N}_{31}^{(\tau)} (i\omega_n)^{\tau+1} \right] - h_n' = \\ = -g g_n (\omega_n^2 + 2\mu_3 i\omega_n) , \end{aligned}$$

$$\pm \sigma_n f_n + g_n' = 0 \quad , \quad (\quad)' = \frac{d}{dz} (\quad) ,$$

przy czym górne i dolne znaki odpowiadają górnym i dolnym wyrażeniom w nawiasach w (6.12), zaś kreski nad symbolami wielomianów \bar{P}_{ij} , $\bar{Q}_{ij}^{(\tau)}$, \bar{R}_{ij} , $\bar{N}_{ij}^{(\tau)}$ przypominają, że wielomiany te zostały obliczone w chwili \bar{t} .

Obecnie, wyrażając funkcje f_n i h_n w zależności od g_n i jej pochodnych, możemy napisać

$$(6.15) \quad f_n = \bar{\gamma} \frac{1}{\delta_n} g_n'$$

$$h_n = - \left[\bar{P}_{11} - \bar{P}_{13} - \bar{\sigma}_1' + \sum_{r=0}^N (\bar{Q}_{11}^{(r)} - \bar{Q}_{13}^{(r)}) (i\omega_n)^{r+1} - \right. \\ \left. - \frac{g}{\delta_n^2} (\omega_n^2 + 2\mu_1 i\omega_n) \right] g_n' + \frac{1}{\delta_n^2} \left[\bar{R}_{13} + \sum_{r=1}^N \bar{N}_{13}^{(r)} (i\omega_n)^{r+1} \right] g_n''$$

Podstawiając powyższe zależności do drugiego równania (6.14) otrzymamy jedno zwyczajne równanie różniczkowe na funkcję g_n , a mianowicie

$$(6.16) \quad g_n^{IV} - 2\delta_n^2 c_n g_n'' + \delta_n^4 d_n g_n = 0,$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(6.17) \quad c_n = \frac{1}{2e_n} \left[\bar{P}_{11} + \bar{P}_{33} - \bar{P}_{13} - \bar{P}_{31} + \sum_{r=0}^N (\bar{Q}_{11}^{(r)} + \bar{Q}_{33}^{(r)} - \bar{Q}_{13}^{(r)} - \bar{Q}_{31}^{(r)}) (i\omega_n)^{r+1} - \right. \\ \left. - \frac{g}{\delta_n^2} (\omega_n^2 + 2\mu_1 i\omega_n) \right],$$

$$d_n = \frac{1}{e_n} \left[\bar{R}_{31} + \sum_{r=1}^N \bar{N}_{31}^{(r)} (i\omega_n)^{r+1} + \frac{g}{\delta_n^2} (\omega_n^2 + 2\mu_3 i\omega_n) \right],$$

$$e_n = \bar{R}_{13} + \sum_{r=1}^N \bar{N}_{13}^{(r)} (i\omega_n)^{r+1}.$$

Pozostałe warunki brzegowe (6.8) i (6.9), po uwzględnieniu (6.12) i (6.15), przybierają następującą postać:



$$(6.18) \quad g_n'' + \delta_n^2 g_n = 0 \quad \text{dla } z = \pm h,$$

$$(6.19) \quad -\frac{1}{\delta_n^2} \left[\bar{R}_{13} + \sum_{\tau=1}^N \bar{N}_{13}^{(\tau)} (i\omega_n)^{\tau+1} \right] g_n''' + \left[\bar{P}_{11} + \bar{P}_{33} - \bar{P}_{13} - \bar{P}_{31} + \right. \\ \left. + \sum_{\tau=0}^N (\bar{Q}_{11}^{(\tau)} + \bar{Q}_{33}^{(\tau)} - \bar{Q}_{13}^{(\tau)} - \bar{Q}_{31}^{(\tau)}) (i\omega_n)^{\tau+1} - \frac{9}{\delta_n^2} (\omega_n^2 + 2\mu_1 i\omega_n) + \right. \\ \left. + \bar{R}_{31} - \bar{G}_1^1 + \bar{M}_{31} i\omega_n \right] g_n' = 0,$$

lub

$$(6.20) \quad -\frac{1}{\delta_n^2} e_n g_n''' + [2e_n c_n + \bar{R}_{31} - \bar{G}_1^1 + \bar{M}_{31} i\omega_n] g_n' = 0 \quad \text{dla } z = \pm h.$$

W ten sposób zagadnienie zostało sprowadzone do zagadnienia na wartości własne dla równania (6.16) z odpowiednimi warunkami brzegowymi (6.18) i (6.20). Dalsze rozwiązanie tego zagadnienia zależy od pierwiastków równania charakterystycznego dla (6.16), które posiada albo cztery różne pierwiastki albo też dwa pierwiastki podwójne. Rozważymy obydwie przypadki osobno.

6.1. Cztery różne pierwiastki $c_n^2 \neq d_n$

Jeśli $c_n^2 \neq d_n$ pierwiastki równania charakterystycznego dla (6.16) mogą być zapisane w postaci

$$(6.1.1) \quad \tau_{1n} = -\tau_{3n} = \delta_n (c_n + \sqrt{c_n^2 - d_n})^{\frac{1}{2}}, \\ \tau_{2n} = -\tau_{4n} = \delta_n (c_n - \sqrt{c_n^2 - d_n})^{\frac{1}{2}},$$

i rozwiązanie ogólne równania (6.16) jest określone przez

$$(6.1.2) \quad g_n(z) = C_{1n} e^{\tau_{1n} z} + C_{2n} e^{\tau_{2n} z} + C_{3n} e^{\tau_{3n} z} + C_{4n} e^{\tau_{4n} z},$$

gdzie C_{in} - stałe całkowania. Warunki geometryczne (6.7) są równoważne zależnościom

$$(6.1.3) \quad f_n(-z) = -f_n(z) \quad , \quad g_n(-z) = g_n(z) \quad ;$$

zatem otrzymamy ostatecznie

$$(6.1.4) \quad g_n(z) = D_{1n} \operatorname{ch} \tau_{1n} z + D_{2n} \operatorname{ch} \tau_{2n} z \quad ,$$

oraz

$$(6.1.5) \quad f_n(z) = \mp \frac{1}{\delta_n} (D_{1n} r_{1n} \operatorname{sh} \tau_{1n} z + D_{2n} r_{2n} \operatorname{sh} \tau_{2n} z) \quad ,$$

$$\begin{aligned} h_n(z) = & - \left[\bar{P}_{11} - \bar{P}_{13} - \bar{G}_1^1 + \sum_{r=0}^N (\bar{Q}_{11}^{(r)} - \bar{Q}_{13}^{(r)}) (i\omega_n)^{r+1} - \right. \\ & - \frac{g}{\delta_n^2} (\omega_n^2 + 2\mu_1 i\omega_n) \left. \right] (D_{1n} r_{1n} \operatorname{sh} \tau_{1n} z + D_{2n} r_{2n} \operatorname{sh} \tau_{2n} z) + \\ & + \frac{1}{\delta_n^2} e_n (D_{1n} r_{1n}^3 \operatorname{sh} \tau_{1n} z + D_{2n} r_{2n}^3 \operatorname{sh} \tau_{2n} z) . \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wyniki do warunków brzegowych w postaci (6.18) i (6.20) otrzymamy następujący układ dwóch jednorodnych równań algebraicznych z niewiadomymi D_{1n} i D_{2n} .

$$D_{1n} (r_{1n}^2 + \delta_n^2) \operatorname{ch} \tau_{1n} h + D_{2n} (r_{2n}^2 + \delta_n^2) \operatorname{ch} \tau_{2n} h = 0 \quad ,$$

(6.16)

$$\begin{aligned} & \left[2c_n + \frac{1}{e_n} (\bar{R}_{31} - \bar{G}_1^1 + \bar{M}_{31} i\omega_n) - \frac{r_{1n}^2}{\delta_n^2} \right] D_{1n} r_{1n} \operatorname{sh} \tau_{1n} h + \\ & + \left[2c_n + \frac{1}{e_n} (\bar{R}_{31} - \bar{G}_1^1 + \bar{M}_{31} i\omega_n) - \frac{r_{2n}^2}{\delta_n^2} \right] D_{2n} r_{2n} \operatorname{sh} \tau_{2n} h = 0 . \end{aligned}$$

Nietrywialne rozwiązanie układu (6.1.6) istnieje wtedy i tylko wtedy, jeśli odpowiedni wyznacznik charakterystyczny równa się zeru. Oznaczając

$$(6.1.7) \quad \Lambda_n(\lambda_i, \mu_i, \omega_n) = 2c_n + \frac{1}{e_n} (\bar{R}_{31} - \bar{b}_1' + \bar{M}_{31} i \omega_n),$$

dochodzimy do równania wiekowego w postaci

$$(6.1.8) \quad \frac{(r_{1n}^2 + \delta_n^2) \operatorname{ch} r_{1n} h}{(r_{2n}^2 + \delta_n^2) \operatorname{ch} r_{2n} h} - \frac{[\Lambda_n(\lambda_i, \mu_i, \omega_n) - \frac{r_{1n}^2}{\delta_n^2}] r_{1n} \operatorname{sh} r_{1n} h}{[\Lambda_n(\lambda_i, \mu_i, \omega_n) - \frac{r_{2n}^2}{\delta_n^2}] r_{2n} \operatorname{sh} r_{2n} h} = 0.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób warunek istnienia małego dodatkowego ruchu spełniającego warunki brzegowe A, B lub C. Odpowiednie wartości częstości ω_n zależą zarówno od wymiarów a , h belki, jak i od parametrów procesu odkształcenia λ_i i μ_i wchodzących do wielomianów charakteryzujących własności materiału. Mając wyspecyfikowaną postać funkcji materiałowych można próbować obliczyć odpowiednie częstości ω_n w sposób numeryczny, jakkolwiek w ogólnym przypadku, ω_n są liczbami zespolonymi i takie obliczenia mogą okazać się bardzo skomplikowane. W pewnych szczególnych przypadkach odkształceń oraz dla pewnych szczególnych typów utraty stateczności, wszystkie potrzebne obliczenia numeryczne upraszczają się w sposób istotny /por. p. 8/.

6.2. Dwa pierwiastki podwójne. $C_n^2 = d_n$

W szczególnym przypadku, jeśli $C_n^2 = d_n$, pierwiastki równania charakterystycznego dla (6.16) można przedstawić w postaci

$$(6.2.1) \quad \tau_n = \tau_{1n} = -\tau_{3n} = \sigma_n \sqrt{C_n} .$$

Pierwiastki te są liczbami rzeczywistymi, jeśli $C_n > 0$ i liczbami urojonymi, jeśli $C_n < 0$. Ogólne rozwiązanie równania (6.16), a mianowicie

$$(6.2.2) \quad g_n(z) = (C_{1n} + C_{2n}z)e^{\tau_{1n}z} + (C_{3n} + C_{4n}z)e^{\tau_{3n}z} ,$$

po uwzględnieniu warunków (6.1.3), przybiera ostatecznie postać

$$(6.2.3) \quad g_n(z) = D_{1n} \operatorname{ch} \tau_n z + D_{2n} z \operatorname{sh} \tau_n z .$$

Stąd

$$f_n(z) = \mp \frac{1}{\sigma_n} [D_{1n} \tau_n \operatorname{sh} \tau_n z + D_{2n} (\operatorname{sh} \tau_n z + \tau_n z \operatorname{ch} \tau_n z)] ,$$

(6.2.4)

$$\begin{aligned} h_n(z) = & - \left[\bar{P}_{11} - \bar{P}_{13} - \bar{\sigma}_1^{-1} + \sum_{r=0}^N (\bar{Q}_{11}^{(r)} - \bar{Q}_{13}^{(r)}) (i\omega_n)^{r+1} - \right. \\ & \left. - \frac{9}{\sigma_n^2} (\omega_n^2 + 2\mu_1 i\omega_n) \right] \times [D_{1n} \tau_n \operatorname{sh} \tau_n z + D_{2n} (\operatorname{sh} \tau_n z + \tau_n z \operatorname{ch} \tau_n z)] + \\ & + \frac{1}{\sigma_n^2} e_n [D_{1n} \tau_n^3 \operatorname{sh} \tau_n z + D_{2n} (3\tau_n^2 \operatorname{sh} \tau_n z + \tau_n^3 z \operatorname{ch} \tau_n z)] . \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wyniki do warunków brzegowych (6.18) i (6.20) dochodzimy do następującego układu równań algebraicznych na stałe D_{1n} i D_{2n} :

$$D_{1n}(\tau_n^2 + \delta_n^2) \operatorname{ch} \tau_n h + D_{2n}[(\tau_n^2 + \delta_n^2) h \operatorname{sh} \tau_n h + 2\tau_n \operatorname{ch} \tau_n h] = 0,$$

$$(6.2.5) \quad \left[2c_n + \frac{1}{e_n} (\bar{R}_{31} - \bar{\delta}_1 + \bar{M}_{31} i \omega_n) - \frac{\tau_n^2}{\delta_n^2} \right] D_{1n} \tau_n \operatorname{sh} \tau_n h + \\ + \left\{ \left[2c_n + \frac{1}{e_n} (\bar{R}_{31} - \bar{\delta}_1 + \bar{M}_{31} i \omega_n) - 3 \frac{\tau_n^2}{\delta_n^2} \right] \operatorname{sh} \tau_n h + \right. \\ \left. + \left[2c_n + \frac{1}{e_n} (\bar{R}_{31} - \bar{\delta}_1 + \bar{M}_{31} i \omega_n) - \frac{\tau_n^2}{\delta_n^2} \right] h \tau_n \operatorname{ch} \tau_n h \right\} D_{2n} = 0.$$

W tym przypadku równanie wiekowe przybiera postać

$$(6.2.6) \quad \frac{(\tau_n^2 + \delta_n^2) \operatorname{ch} \tau_n h}{(\tau_n^2 + \delta_n^2) h \operatorname{sh} \tau_n h + 2\tau_n \operatorname{ch} \tau_n h} - \\ - \frac{[\Lambda_n(\lambda_i, \mu_i, \omega_n) - \frac{\tau_n^2}{\delta_n^2}] \tau_n \operatorname{sh} \tau_n h}{[\Lambda_n(\lambda_i, \mu_i, \omega_n) - 3 \frac{\tau_n^2}{\delta_n^2}] \operatorname{sh} \tau_n h + [\Lambda_n(\lambda_i, \mu_i, \omega_n) - \frac{\tau_n^2}{\delta_n^2}] h \tau_n \operatorname{ch} \tau_n h} = 0.$$

Powyższy warunek musi być wykorzystany zamiast (6.1.8), jeśli $C_n^2 = d_n$, ponieważ w tym ostatnim przypadku rozwiązania (6.1.4) i (6.1.5) spełniają (6.1.8) tożsamościowo.

6.3. Alternatywna postać równania wiekowego.

Przypadek $h/a \rightarrow 0$

W ogólności pierwiastki równania charakterystycznego zdefiniowane przez (6.1.1) są zespolonymi funkcjami λ_i i μ_i . Ażeby uniknąć trudności rachunkowych, jakie mogą pojawić się przy bezpośrednim stosowaniu warunku (6.1.8) wyprowadzimy

alternatywną, bardziej dogodną do obliczeń numerycznych, postać równania wiekowego w sposób podobny do zastosowanego w pracy [31].

Jeśli $d_n > c_n^2$ /przypuścimy/, to (6.1.1) zapisujemy w innej postaci

$$(6.3.1) \quad \tau_{1n} = -\tau_{3n} = \delta_n (c_n + i\sqrt{d_n - c_n^2})^{1/2} = \alpha_n + i\beta_n,$$

$$\tau_{2n} = -\tau_{4n} = \delta_n (c_n - i\sqrt{d_n - c_n^2})^{1/2} = \alpha_n - i\beta_n,$$

$$\text{Im}\alpha_n = \text{Im}\beta_n = 0,$$

gdzie

$$(6.3.2) \quad \alpha_n = \delta_n a_n = \frac{\delta_n}{\sqrt{2}} (\sqrt{d_n} + c_n)^{1/2}, \quad \beta_n = \delta_n b_n = \frac{\delta_n}{\sqrt{2}} (\sqrt{d_n} - c_n)^{1/2}.$$

Funkcję (6.1.4) można przedstawić w następującej postaci

$$(6.3.3) \quad g_{\delta_n}(z) = E_{1n} \text{ch}\alpha_n z \cos\beta_n z + E_{2n} \text{sh}\alpha_n z \sin\beta_n z,$$

gdzie E_{1n} i E_{2n} są nowymi stałymi całkowania. Z nowymi oznaczeniami

$$(6.3.4) \quad \alpha_1 = \alpha_n^2 - \beta_n^2 + \delta_n^2, \quad \alpha_3 = \alpha_n (\alpha_n^2 - 3\beta_n^2 - \delta_n^2 \Lambda_n),$$

$$\alpha_2 = 2\alpha_n \beta_n, \quad \alpha_4 = \beta_n (3\alpha_n^2 - \beta_n^2 - \delta_n^2 \Lambda_n),$$

warunki brzegowe (6.18) i (6.20) prowadzą do odpowiedniego układu równań na stałe E_{1n} i E_{2n} , a mianowicie

$$(\alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_n h \cos \beta_n h - \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_n h \sin \beta_n h) E_{1n} +$$

$$+ (\alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_n h \cos \beta_n h + \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_n h \sin \beta_n h) E_{2n} = 0,$$

(6.3.5)

$$(\alpha_3 \operatorname{sh} \alpha_n h \cos \beta_n h - \alpha_4 \operatorname{ch} \alpha_n h \sin \beta_n h) E_{1n} +$$

$$+ (\alpha_4 \operatorname{sh} \alpha_n h \cos \beta_n h + \alpha_3 \operatorname{ch} \alpha_n h \sin \beta_n h) E_{2n} = 0.$$

Stąd równanie wiekowe przybiera postać

$$(6.3.6) \quad [2c_n + d_n + \sqrt{d_n} - (1 - \sqrt{d_n}) \Lambda_n] +$$

$$+ [2c_n + d_n - \sqrt{d_n} - (1 + \sqrt{d_n}) \Lambda_n] \frac{\alpha_n \sin 2\beta_n h}{\beta_n \operatorname{sh} 2\alpha_n h} = 0.$$

Powyższy warunek jest całkowicie równoważny warunkowi (6.1.8) i może być stosowany do obliczania wartości ω_n . Jego postać jest również dogodna do rozważenia przypadku granicznego, w którym stosunek $h/a = 0$; oznacza to, że rozważana belka, albo staje się nieskończenie długim prętem /dla $h = \text{const}$, $b = \text{const}$ /, albo też jej grubość dąży do zera /dla skończonych wartości $b = \text{const}$ i $a = \text{const}$ /. Łatwo zauważyć, że

$$(6.3.7) \quad \frac{\alpha_n \sin 2\beta_n h}{\beta_n \operatorname{sh} 2\alpha_n h} = \frac{\alpha_n \sin(2\pi b_n h/a)}{b_n \operatorname{sh}(2\pi a_n h/a)} \leq 1$$

dla wszystkich dodatnich i rzeczywistych α_n , β_n , dążąc do jedności gdy h/a dąży do zera. W tym ostatnim przypadku, uwzględniając (6.1.7), możemy uprościć (6.3.6) do postaci

$$(6.3.8) \quad d_n - \frac{1}{e_n} (\bar{R}_{31} - \bar{\delta}_1^1 + \bar{M}_{31} i \omega_n) = 0$$

lub też do postaci równoważnej

$$(6.3.9) \quad \sum_{\tau=1}^N \bar{N}_{31}^{(\tau)} (i \omega_n)^{\tau+1} + \frac{9}{\delta_n^2} (\omega_n^2 + 2\mu_1 i \omega_n) + \bar{\delta}_1^1 - \bar{M}_{31} i \omega_n = 0,$$

będącej jawnym równaniem algebraicznym stopnia $N+1$ ze zmienną $i \omega_n$. Najmniejsza przy tym wartość krytyczna $\bar{\delta}_1^1$ odpowiada ω_n przy $n=1$.

Chcielibyśmy podkreślić, że w rozważanym zagadnieniu materiały ściśle można traktować w podobny sposób, wychodząc z ogólnej postaci zależności wyprowadzonych w pierwszej części niniejszej pracy. Otrzymamy wówczas dwa równania równowagi o strukturze podobnej do pierwszych dwóch równań (6.6). Również wtedy poszukuje się rozwiązań na przemieszczenia u i w w klasie funkcji analitycznych, jakkolwiek dalsze przekształcenia i zależności będą nosiły bardziej skomplikowany charakter.

7. Niestateczność ruchu, a zjawisko wyboczenia

Istnieje bardzo obszerna literatura poświęcona badaniu stateczności stanów równowagi ośrodka ciągłego, w zwłaszcza literatura dotycząca układów liniowo i nieliniowo sprężystych. Oprócz prac wymienionych na wstępie do niniejszej części, zacytujemy m.in. [32], [33], [34], [35], [36], [37]. Obszerny przegląd stosowanych

metod oraz krytykę pewnych metod opartych na zlinearyzowanych równaniach dla infinitezymalnych odkształceń nałożonych na stan równowagi, można znaleźć w pracach [38] i [39]. Tam też została zacytowana bardziej wyczerpująca literatura przedmiotu.

W ogólnym przypadku materiałów niesprężystych lub układów nie zachowawczych, tylko metoda dynamiczna tj. metoda badania równań małego ruchu zaburzonego układu, jest podstawowa i wystarczająco poprawna /por. [37], [39], [23]/. Zgodnie z definicją stateczności ruchu podaną przez A.M. Lapunowa, [40], jakikolwiek ruch podstawowy jest uważany za stateczny, jeśli w dodatkowych kinematycznie dopuszczalnym ruchu wywołanym dowolnymi zaburzeniami amplitudy dodatkowych przemieszczeń i prędkości są zawsze bardzo małe, jeśli same zaburzenia są wystarczająco małe. Innymi słowy, dla układu statecznego małe zaburzenia - przyczyny nie mogą spowodować dużych skutków /por. np. [38], [39], [19]/. Oczywiście "miary" początkowych zaburzeń należy określić wystarczająco precyzyjnie. Można brać pod uwagę zarówno początkowe przemieszczenia, prędkości, zmiany obciążenia, jak i zmiany energii odkształcenia lub inne funkcjonały. Rozwinięcie pewnych idei i metod zaczerpniętych z teorii Lapunowa stateczności ruchu układów dyskretnych do układów ciągłych zostało przedstawione w pracach [41], [42].

W niniejszej pracy, zgodnie zresztą z poprzednimi rozważaniami, ograniczymy się do badania przypadku niestateczności "w sensie małym" - opartym na zlinearyzowanych równaniach ruchu ważnych dla infinitezymalnych ruchów nałożonych na powolny i ustalony ruch podstawowy. Jeśli zachowanie się ośrodka w zakresie pozakrytycznym nie jest głównym celem badań, takie podejście wydaje się całkowicie uzasadnione, przynajmniej dla takich zagadnień niestateczności jak wyboczenie belek lepko-sprężystych.

Jednakże należy pamiętać, że czasami zlinearyzowana teoria stateczności może się okazać niewystarczająca do zbadania pozakrytycznych postaci małego dodatkowego ruchu. Ażeby zapewnić jej ważność również w tym zakresie, należy wykazać, że mały dodatkowy ruch pozostaje wystarczająco mały w miarę upływu czasu /por. [39], [40]/.

Ogólnie możemy uważać ruch podstawowy za stateczny, jeśli amplitudy dodatkowego ruchu albo znikają w miarę upływu czasu, albo też pozostają małe zamieniając się okresowo. Podstawowy ruch będzie niestateczny, jeśli istnieje conajmniej jedno zlinearyzowane rozwiązanie, przy którym amplitudy wzrastają nieograniczenie z upływem czasu.

W przypadku belki /pręta/ ściskanej w sposób prosty, początkowe wartości dodatkowych przemieszczeń lub prędkości powstają albo na skutek małych zaburzeń w siłach powierzchniowych, albo też z powodu małych "niedoskonałości" w fizycznej strukturze materiału. W obydwu przypadkach układ jest bardzo czuły na wszystkie zaburzenia naruszające równomierność i jednorodność ruchu podstawowego, co w konsekwencji prowadzi do dodatkowych efektów zginania. Jeśli amplitudy nieskończenie małych przemieszczeń wywołanych nieskończenie małymi zaburzeniami wykazują tendencję do wzrastania, nawet w wystarczająco krótkim lecz skończonym przedziale czasu, to zjawisko praktycznej utraty stateczności staje się najbardziej prawdopodobne. Odpowiedni warunek, przy którym amplitudy wzrastają może być uważany za "wystarczające kryterium niestateczności"^{1/}.

1/ Podobne podejście do definicji niestateczności, występującej w bardzo krótkim okresie czasu zostało zastosowane w pracy [23].

Zatem wykorzystanie rozwiązań uzyskanych dla przemieszczeń w przedziale $\bar{t} \leq t \leq T$ w myśl rozważań p. 4, może być użyteczne do badania niestateczności ruchu podstawowego i wyrowadzenia pewnych wystarczających kryteriów. Jednakże taka metoda nie zawsze będzie wystarczająca do wykazania stateczności ruchu podstawowego. Po pierwsze jest rzeczą oczywistą, że człony rzędu $O(\varepsilon^2)$, pominięte w rozważanym przez nas przedziale czasu, mogą stać się członami rzędu $O(\varepsilon)$ lub nawet $O(1)$ dla dłuższych przedziałów czasu naruszając początkowo stateczny charakter ruchu. Przeciwnie, utrata stateczności spowodowana członami rzędu $O(\varepsilon)$ w rozważanym krótkim przedziale czasu nie zależy od członów rzędu $O(\varepsilon^2)$. Po drugie, może się także zdarzyć, że człony rzędu $O(\eta^2)$, odrzucone we wszystkich zlinearyzowanych zależnościach /por.p. 2 i 3/, stają się istotnymi w dalszych stadiach małego ruchu będącego konsekwencją zaburzeń w siłach masowych lub powierzchniowych /por. [39]/. Oczywiście, człony te są nieistotne dla pewnego stanu krytycznego zależnego od członów rzędu $O(\eta)$.

8. Stacjonarny i oscylacyjny typ utraty stateczności

W zagadnieniach, w których dla ograniczonego przedziału czasu korzystamy z harmonicznym rozwiązań dla małego dodatkowego ruchu; otrzymujemy z reguły warunki istnienia takiego ruchu w postaciach podobnych do /6.1.8/ lub /6.2.6/. Pozwalają one określić odpowiednie częstości ω_n , które, jak już poprzednio podkreślaliśmy, w ogólnym przypadku są wielkościami zespolonymi zależnymi od parametrów charakteryzujących proces podstawowy. Utrata stateczności może nastąpić, jeśli dla pewnych wartości tych parametrów

(8.1)

$$\operatorname{Im} \omega_n < 0 \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

W zależności od tego, jaką wartość przybiera $\operatorname{Re} \omega_n$ gdy $\operatorname{Im} \omega_n$ przechodzi przez zero do wartości ujemnych, możliwe są dwa typy utraty stateczności. Dla $\operatorname{Re} \omega_n = 0$ ma miejsce stacjonarny typ niestateczności, wówczas amplitudy dodatkowych przemieszczeń wzrastają wykładniczo; dla $\operatorname{Re} \omega_n \neq 0$ obserwujemy oscylacyjny typ niestateczności, przy którym amplitudy wzrastają pozostając quasi-okresowymi funkcjami czasu /por. [37], [38], [45]/. Toteż stan $\operatorname{Im} \omega_n = 0$ lub w szczególności $\omega_n = 0$ może być uważany za stan krytyczny, w którym ruch podstawowy staje się niestateczny. Dwie możliwe postaci utraty stateczności występują całkowicie niezależnie; ani stacjonarny typ, ani też oscylacyjny typ nie mogą być uprzywilejowane a priori. Tylko dla niektórych szczególnych ośrodków poddanych szczególnym stanom odkształcenia, jeden z omawianych typów utraty stateczności może całkowicie nie mieć miejsca. Tzw. "zasada zamiany stateczności" /the principle of exchange of stabilities - por. [43]/ została uzasadniona na gruncie pewnych zagadnień hydrodynamiki i nie może być stosowana w ogólnym przypadku. Jednakże, dla bardzo małych wartości prędkości charakteryzujących ruch podstawowy, rozważany w niniejszej pracy materiał staje się bardzo bliski materiałowi sprężystemu, dla którego tylko stacjonarny /statyczny/ typ utraty stateczności jest możliwy, o ile układ jest konserwatywny "w całości" /por. [37], [38]/. Wówczas ω_n^2 są zawsze liczbami rzeczywistymi, a niestateczność pojawia się gdy ω_n^2 przechodzą od dodatnich do ujemnych wartości.

Zgodnie z naszymi poprzednimi uwagami, warunek zaistnienia

niestateczności typu stacjonarnego, a mianowicie

$$(8.2) \quad \omega_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

jest "wystarczającym kryterium niestateczności". W tym przypadku zależności (6.17) i (6.1.1) upraszczają się istotnie z racji ich niezależności od częstości ω_n . Otrzymamy wówczas

$$(8.3) \quad c_n = \frac{1}{2\bar{R}_{13}} (\bar{P}_{11} + \bar{P}_{33} - \bar{P}_{13} - \bar{P}_{31}), \quad d_n = \frac{\bar{R}_{31}}{\bar{R}_{13}} = \frac{\bar{L}_{31} + 3\bar{M}_{31}\mu}{\bar{L}_{13} - 3\bar{M}_{13}\mu},$$

przy czym μ zostało zdefiniowane przez (6.1), oraz

$$(8.4) \quad r_{1n, 2n}^2 = \frac{\sigma_n^2}{\bar{R}_{13}} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{P}_{11} + \bar{P}_{33} - \bar{P}_{13} - \bar{P}_{31}) \pm \left[\frac{1}{4} (\bar{P}_{11} + \bar{P}_{33} - \bar{P}_{13} - \bar{P}_{31})^2 - \bar{R}_{13} \bar{R}_{31} \right]^{1/2} \right\}.$$

Zatem warunek (6.1.8) lub (6.2.6) może być traktowany jako równanie, z którego określa się w sposób numeryczny albo λ_{kr} przy zadanych μ i h/a , albo też μ_{kr} przy zadanych λ i h/a , o ile funkcje materiałowe są wystarczająco znane.

Wiele materiałów jak materiały nieliniowo sprężyste, ciecze nieliniowo lepkie, klasyczne ciecze newtonowskie, materiały Mooney'a, neo-hoo-kean i-tp., są szczególnymi przypadkami ośrodka rozważanego w niniejszej pracy.

Oscylacyjny typ utraty stateczności przy $\text{Im } \omega_n = 0$ jest znacznie trudniejszy do bezpośredniej analizy, chociaż obejmuje typ poprzedni jako przypadek szczególny. Przepisując ω_n

w postaci $\omega_n = \xi_n + i\eta_n$, gdzie ξ_n

i η_n są wyłącznie liczbami rzeczywistymi, możemy rozdzielić lewe strony zależności (6.1.8) lub (6.2.6) odpowiednio na części rzeczywiste i urojone, a następnie podstawiając

$\eta_n = \text{Im } \omega_n = 0$ wyprowadzić odpowiednie warunki charakteryzujące możliwość występowania oscylacyjnego typu utraty stateczności. Oczywiście, może się zdarzyć, że dla pewnych materiałów i pewnych wartości parametrów określających proces podstawowy, typ oscylacyjny jest całkowicie niemożliwy. Przedstawiony sposób podejścia, w ogólnym przypadku, prowadzi do stosunkowo skomplikowanych zależności, które zamieszczamy w Dodatku B. Do warunku $\text{Im } \omega_n = 0$ powrócimy jeszcze w p. 9 dyskutując niestateczność belek lub prętów o dużej smukłości.

W szczególnym przypadku dyskutowanym na zakończenie p. 6.3, tj. dla $h/a = 0$, można stosować uproszczone równania (6.3.9). Łatwo zauważyć, że wówczas stacjonarny typ wyboczenia jest możliwy nawet dla $\bar{\sigma}_1 = 0$, tj. nawet w stanie nieodkształconym.

9. Inne rozwiązania dopuszczalne dla smukłych belek lub prętów

Graniczny przypadek, w którym stosunek h/a dąży do zera, został omówiony w p. 6.3. Wówczas warunek istnienia rozwiązania (6.3.6) równoważny warunkowi (6.1.8) staje się równaniem algebraicznym ze zmienną ω_n , którego rozwiązanie /zespolone, rzeczywiste lub urojone/ zawsze istnieje. Podobne wyniki można otrzymać rozwijając bezpośrednio funkcje hiperboliczne występujące w (6.1.8) na szeregi Taylora względem h/a . Wykorzystując (6.1.1) i (6.13) oraz oznaczając

$$(9.1) \quad \tau_{1n} = -\tau_{3n} = \sigma_n R_{1n}, \quad \tau_{2n} = -\tau_{4n} = \sigma_n R_{2n},$$

otrzymamy

$$(9.2) \quad \operatorname{sh} r_{1n} h = r_{1n} h \left[1 + \frac{1}{3!} \pi^2 R_{1n}^2 n^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 + \frac{1}{5!} \pi^4 R_{1n}^4 n^4 \left(\frac{h}{a} \right)^4 + \dots \right]$$

$$\operatorname{ch} r_{1n} h = \left[1 + \frac{1}{2!} \pi^2 R_{1n}^2 n^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 + \frac{1}{4!} \pi^4 R_{1n}^4 n^4 \left(\frac{h}{a} \right)^4 + \dots \right]$$

i podobne wyrażenia dla r_{2n} . W myśl (6.1.1) i (6.17) parametry R_{1n} i R_{2n} są niezależne od wymiarów belki, zawierają natomiast częstości drgań ω_n . Jeśli

$$(9.3) \quad \left| \frac{1}{2!} \pi^2 R_{1n}^2 n^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right| \ll 1, \quad \left| \frac{1}{2!} \pi^2 R_{2n}^2 n^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right| \ll 1,$$

to bierzemy pod uwagę tylko pierwsze człony po prawych stronach (9.2). Można tego dokonać przy bardzo małych lecz skończonych wartościach stosunku h/a , dla jednocześnie niskich częstości ω_n i dla małych liczb pół-fal pojawiających się wzdłuż osi belki /por. np. [44]/. Ostatnie założenie jest równoważne małym wartościom wskaźnika n .

Zgodnie z wynikami p. 8 przypomnijmy również, że krytyczny stan równowagi odpowiadający $\operatorname{Im} \omega_n = 0$, a w szczególności stacjonarny typ wyboczenia przy $\operatorname{Re} \omega_n = 0$ i oscylacyjny typ przy $\operatorname{Re} \omega_n \neq 0$, są najbardziej prawdopodobne dla $n = 1$ lub 2 /Rys. 1, 2/.

Funkcje przemieszczenia zdefiniowane przez (6.12), (6.1.4) i

(6.1.5), z tym samym stopniem dokładności co (9.2), mogą być przedstawione w postaci

$$u_n \approx \mp \delta_n \begin{Bmatrix} \sin \delta_n x \\ \cos \delta_n x \end{Bmatrix} z (D_{1n} R_{1n}^2 + D_{2n} R_{2n}^2) e^{i\omega_n(t-\bar{t})}, \quad (9.4)$$

$$w_n \approx \begin{Bmatrix} \cos \delta_n x \\ \sin \delta_n x \end{Bmatrix} (D_{1n} + D_{2n}) e^{i\omega_n(t-\bar{t})},$$

$$p'_n \approx \bar{P}_n \begin{Bmatrix} \cos \delta_n x \\ \sin \delta_n x \end{Bmatrix} z e^{i\omega_n(t-\bar{t})} = q'_n(x, t-\bar{t}) z,$$

gdzie $\bar{P}_n(\bar{t})$ nie zależy od $x, z, t-\bar{t}$. Powyższe wyrażenia prowadzą do zależności

$$w_n(x, z, t-\bar{t}) = w_n(x, 0, t-\bar{t}),$$

(9.5)

$$u_n(x, 0, t-\bar{t}) = 0,$$

$$u_n = k_n z \frac{\partial w_n}{\partial x}, \quad p'_n = q'_n z, \quad k_n = \frac{D_{1n} R_{1n}^2 + D_{2n} R_{2n}^2}{D_{1n} + D_{2n}},$$

podobnych do obowiązujących w teorii smukłych belek i prętów poddanych małym ugięciom. Pragniemy jednak podkreślić, że zależności (9.4) i (9.5) nie zostały założone a priori; są one granicznym przypadkiem /dla małych $h/a, n, \omega_n$ / ogólniejszych związków (6.12), których słuszność została wykazana w poprzednich punktach.

Zauważmy, że do tego aby były spełnione jednocześnie warunki na powierzchni $z = \pm h$ /por. (6.8), (6.9)/ oraz zależności (9.5), wystarczy położyć zgodnie z (6.4)

$$(9.6) \quad k_n = -1,$$

$$q_n^i(x, t - \bar{t}) = - \sum_{\tau=0}^N \bar{Q}_{31}^{(\tau)} \frac{D^{\tau+1}}{Dt^{\tau+1}} \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \right) + \\ + \bar{M}_{31} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \right) - (\bar{P}_{31} - \bar{R}_{31}) \frac{\partial w_n}{\partial x^2}.$$

Pamiętając, że wszystkie gradienty przemieszczenia, występujące w równaniach konstytutywnych na przyrosty tensora naprężenia (6.4), są wielkościami infinitezymalnymi rzędu $O(\varepsilon)$, zaś ich kwadraty rzędu $O(\varepsilon^2)$, można byż najpierw wyprowadzić odpowiednie zależności dla momentów zginających i sił poprzecznych, a następnie podstawić je do równań równowagi.

W niniejszej pracy wykorzystamy jednak inny formalny sposób podejścia - prowadzący w konsekwencji do tych samych wyników końcowych /por. [45]/. Dla bardzo małych wartości h/a można bezpośrednio całkować równania równowagi (6.5) po grubości belki $2h$, biorąc przy tym pod uwagę warunki brzegowe na powierzchni $z = \pm h$.

Równania równowagi zapisujemy w następującej równoważnej postaci

$$(9.7) \quad \sigma_{1,1}^{14} + \sigma_{1,13}^{11} w_{,13} + \sigma_{1,3}^{13} = \{X\} + \sigma_{1,3}^{13} = S \left(\frac{D^2 u}{Dt^2} - 2\mu_1 \frac{Du}{Dt} \right),$$

(9.8)

$$-\sigma_{1,13}^1 + \sigma_{3,3}^{13} + \sigma_{3,1}^{14} = \{Z\} + \sigma_{3,3}^{13} + \sigma_{3,1}^{14} = \\ = g \left(\frac{Dw}{Dt^2} - 2\mu_3 \frac{Dw}{Dt} \right).$$

Mnożąc (9.7) przez z i całkując po całkowitej grubości belki otrzymamy

$$(9.9) \quad \int_{-h}^{+h} (\{X\} + \sigma_{1,3}^{13}) z dz = g \int_{-h}^{+h} \left(\frac{D^2 u}{Dt^2} - 2\mu_1 \frac{Du}{Dt} \right) z dz.$$

Całkując przez części drugi człon po lewej stronie oraz pamiętając, że dla $z = \pm h$, $\sigma_{1,3}^{13} = 0$, mamy

$$(9.10) \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_{1,3}^{13} dz = \int_{-h}^{+h} \{X\} z dz - g \int_{-h}^{+h} \left(\frac{D^2 u}{Dt^2} - 2\mu_1 \frac{Du}{Dt} \right) z dz.$$

Warunek, że dla $z = \pm h$, $\sigma_{3,3}^{13} = 0$, oraz proste całkowanie (9.8) prowadzą do wyniku następującego:

$$(9.11) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{+h} \sigma_3^{14} dz + \int_{-h}^{+h} \{Z\} dz = g \int_{-h}^{+h} \left(\frac{D^2 w}{Dt^2} - 2\mu_3 \frac{Dw}{Dt} \right) dz.$$

Zgodnie z (6.4) mamy również formalną zależność

$$(9.12) \quad \int_{-h}^{+h} \bar{\sigma}_3^{11} dz = \int_{-h}^{+h} \bar{\sigma}_1^{13} dz + 4\bar{M}_{13} (\mu_3 - \mu_1) \int_{-h}^{+h} (u_{,3} + w_{,1}) dz .$$

Obecnie podstawiając (9.12), (9.10) do (9.11) i uwzględniając wyrażenia na $\{X\}$ i $\{Z\}$ zdefiniowaną przez (9.7) i (9.8), otrzymamy

$$(9.13) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{+h} (\bar{\sigma}_{1,1}^{11} + \bar{\sigma}_1^{13} w_{,13}) z dz + 4\bar{M}_{13} (\mu_3 - \mu_1) \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{+h} (u_{,3} + w_{,1}) dz -$$

$$- \varrho \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{+h} \left(\frac{D^2 u}{Dt^2} - 2\mu_1 \frac{Du}{Dt} \right) z dz - \int_{-h}^{+h} \bar{\sigma}_1^{13} u_{,13} dz = \varrho \int_{-h}^{+h} \left(\frac{D^2 w}{Dt^2} - 2\mu_3 \frac{Dw}{Dt} \right) dz .$$

Z uwagi na (6.4), (9.5), i (9.6), całki w powyższym równaniu mogą być łatwo obliczone, co prowadzi do następującego wyniku:

$$(9.14) \quad -\frac{h^2}{3} [\bar{P}_{11} - \bar{P}_{31} + \bar{R}_{31} + \sum_{r=0}^N (\bar{Q}_{11}^{(r)} - \bar{Q}_{31}^{(r)}) \frac{D^{r+1}}{Dt^{r+1}} + \bar{M}_{31} \frac{D}{Dt}] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} +$$

$$+ [\bar{\sigma}_1^{13} + \varrho \frac{h^2}{3} (\frac{D^2}{Dt^2} - 2\mu \frac{D}{Dt})] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varrho (\frac{D^2}{Dt^2} + \mu \frac{D}{Dt}) w ,$$

w którym podstawiliśmy $\mu_1 = \mu$, $\mu_3 = -\frac{1}{2}\mu$.

To jest końcowe równanie na funkcję przemieszczenia

$w(x, t - \bar{t})$; jego dalsze rozwiązanie zależy istotnie od warunków brzegowych zadanych na końcach pręta.

Rozważmy dwa następujące przypadki: 1/ końce zamocowane przesuwnie, 2/ końce swobodnie podparte. W myśl (9.4) i ogólniejszych wyników (6.12), rozwiązanie równania (9.14) można przedstawić w postaci

$$(9.15) \quad w(x, t - \bar{t}) = \sum_n A_n \begin{Bmatrix} \cos \gamma_n x \\ \sin \gamma_n x \end{Bmatrix} e^{i\omega_n(t - \bar{t})} ,$$

gdzie A_n oznaczają stałe.

1/ Dla zamocowanych przesuwnie końców żądamy, żeby

$$(9.16) \quad u = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x=0, a \text{ i } z=0 ;$$

2/ dla swobodnie podpartych końców żądamy, żeby

$$(9.17) \quad w = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\bar{G}_1 = 0) \quad \text{dla } x=0, a \text{ i } z=0 .$$

Powyższe warunki są granicznymi przypadkami ścisłych warunków (6.10) i (6.11) dyskutowanych poprzednio w p. 6; będą one spełnione automatycznie, jeśli

$$(9.18) \quad \gamma_n = \frac{\pi}{a} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots \infty) .$$

Łatwo zaobserwować, że w przypadku 1/, zamocowane przesuwnie końce pręta mogą swobodnie przesuwać się tylko w kierunku osi z , jednakże dla parzystych n ($n = 2, 4, \dots, \infty$) pręt porusza się w tym kierunku jako ciało sztywne, a więc rozwiązanie w postaci (9.15) jest również słuszne dla pręta ze sztywno zamocowanymi końcami /por. Rys. 1a, b/.

Podstawiając (9.15) do (9.14) otrzymamy następujące równanie algebraiczne:

$$(9.19) \quad \frac{\hbar^2}{3} \frac{\pi^4}{a^4} n^4 \left[\bar{P}_{11} - \bar{P}_{31} + \bar{R}_{31} + \sum_{\tau=0}^N (Q_{11}^{(\tau)} - Q_{31}^{(\tau)}) (i\omega_n)^{\tau+1} + \bar{M}_{31} i\omega_n \right] + \frac{\pi^2}{a^2} n^2 \left[\bar{b}_1 - g \frac{\hbar^2}{3} (\omega_n^2 + 2\mu i\omega_n) \right] = g (\omega_n^2 - \mu i\omega_n),$$

z którego można określić częstotliwości ω_n dla ruchu następującego bezpośrednio po momencie działania zaburzeń ($\bar{t} \leq t \leq T$)

Jeżeli przynajmniej jeden pierwiastek powyższego równania jest taki, że $\text{Im} \omega_n < 0$, to ruch podstawowy jest niestacyczny. Także krytyczne wartości λ_{kr} lub μ_{kr} /dla zadanych a, \hbar /, odpowiadające stanowi równowagi krytycznej

$\text{Im} \omega_n = 0$ można wyliczyć z równania (9.19).

Oznaczając $\omega_n = \xi_n + i\eta$ możemy rozdzielić równanie (9.19) odpowiednio na część rzeczywistą i urojoną. Jeśli z kolei podstawimy $\eta_n = \text{Im} \omega_n = 0$, to otrzymamy następujące dwa wyrażenia:

$$(9.20) \quad \frac{\pi^2}{3} \frac{\hbar^2}{a^2} n^2 \left[\bar{P}_{11} - \bar{P}_{31} + \bar{R}_{31} + \sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+1} (Q_{11}^{(2\tau+1)} - Q_{31}^{(2\tau+1)}) \xi_n^{2\tau+2} \right] - g \left(\frac{\hbar^2}{3} + \frac{a^2}{\pi^2 n^2} \right) \xi_n^2 + \bar{b}_1 = 0,$$

$$\frac{\pi^2}{3} \frac{h^2}{a^2} n^2 \left[\sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+2} (\bar{Q}_{11}^{(2\tau)} - Q_{31}^{(2\tau)}) \xi_n^{2\tau+1} + \bar{M}_{31} \xi_n \right] -$$

(9.21)

$$-g \mu \left(\frac{2}{3} h^2 - \frac{a^2}{\pi^2 n^2} \right) \xi_n = 0.$$

Pierwsze z powyższych wyrażeń wiąże krytyczną wartość naprężenia

$\bar{\sigma}_1^1$ z ξ_n i charakterystycznymi parametrami λ , μ , podczas gdy drugie reprezentuje dodatkowy związek między ξ_n i λ , μ . Eliminując ξ_n otrzymamy krytyczne naprężenie $\bar{\sigma}_1^1$ jako jawną funkcję zmiennych λ , μ i $n = 1, 2, \dots$. Należy przy tym pamiętać, że $a = \lambda a_0$, $h = h_0 / \sqrt{\lambda}$, gdzie a_0 i h_0 oznaczają wymiary początkowe. Najmniejsza wartość $\bar{\sigma}_1^1$ odpowiada $n = 1$.

Chcielibyśmy podkreślić, że w rozważanym przypadku naprężenie krytyczne nigdy nie równa się zero, o ile stosunek h/a przybiera dowolnie małe lecz skończone wartości. Wartość naprężenia krytycznego zależy istotnie od λ , μ oraz funkcji wielomianowych określających własności materiału.

Podobnie jak poprzednio, wykorzystujemy wystarczające kryterium stacjonarnego typu wybożenia, kładąc $\omega_n = 0$ w (9.19). Prowadzi to do warunku w postaci

$$(9.22) \quad \frac{\pi^2}{3} n^2 \frac{h^2}{a^2} (\bar{P}_{11} - \bar{P}_{31} + \bar{R}_{31}) + \bar{\sigma}_1^1 = 0,$$

z którego również można wyliczyć krytyczne współczynniki odkształcenia λ_{kr} i krytyczne parametry prędkości μ_{kr} pamiętając, że \bar{P}_{11} , \bar{P}_{31} , \bar{R}_{31} , /por. (6.3)/, są wielomianami względem λ , liniowymi względem μ .

Na przykład dla pręta o przekroju kwadratowym siła krytyczna wynikająca z (9.22) przybiera postać

$$(9.23) \quad \bar{F}_{kr} = \frac{4\pi^2 n^2 I_s (\bar{P}_{11} - \bar{P}_{31} + \bar{R}_{31})}{\alpha^2}, \quad I_s = \frac{h^4}{12},$$

- podobną do siły Eulera, z tym, że moduł Younga został zastąpiony wyrażeniem w nawiasach.

10. Niektóre nierówności podstawowe dla funkcji opisujących własności materiału

Rozważane w niniejszej pracy przykłady utraty stateczności mogą być wykorzystane do wyprowadzenia pewnych podstawowych nierówności dla funkcji opisujących własności materiału. Tego typu nierówności mają duże znaczenie przy konstruowaniu różnych teorii przybliżonych oraz powinny być brane pod uwagę przy dalszych badaniach eksperymentalnych.

Wszystkie dotychczas dyskutowane zależności są formalnie słuszne zarówno dla przypadku prostego ściskania jak i prostego rozciągania. Jedyna różnica polega na różnych zakresach zmienności współczynników odkształcenia λ i odpowiednich znakach parametrów prędkości μ . Jednakże rozważana postać wybożenia belki /pręta/ z fizycznego punktu widzenia nie wydaje się

możliwa w przypadku prostego rozciągania. Oznacza to, że wystarczające warunki utraty stateczności, przedstawione w poprzednich punktach, nie mogą być spełnione, jeśli $\bar{\sigma}_1^1 > 0$.

W ogólnym przypadku, warunki niestateczności (6.1.8) i (6.2.6), wyprowadzone w p. 5, są zbyt skomplikowane dla szczegółowej analizy bez dalszych uproszczeń dotyczących postaci równań konstytutywnych. Dla wystarczająco smukłych belek lub prętów dyskutowanych w p. 9, możemy wykorzystać uproszczone równanie (9.20) - ważne dla stacjonarnego typu utraty stateczności.

Dla powolnego prostego rozciągania nieściśliwego materiału lepkosprężystego, naprężenie $\bar{\sigma}_1^1$ /por. (4.7)/ przybiera postać następującą:

$$(10.1) \quad \bar{\sigma}_1^1 = \alpha_1 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + \alpha_2 \left(\lambda^4 - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 3\alpha_3 \mu + \\ + 4\alpha_5 \left(\lambda^2 + \frac{1}{2\lambda} \right) \mu + 4\alpha_7 \left(\lambda^4 + \frac{1}{2\lambda^2} \right) \mu \geq 0,$$

gdzie α_i , w myśl p. 3 wzór (3.5), są wielomianami co najwyżej od czterech następujących niezmienników:

$$(10.2) \quad \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^4}, \quad \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \mu, \quad \left(\lambda^4 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \mu.$$

Prosta analiza wykazuje, że do tego aby warunek (9.20) nie był spełniony dla dowolnych wartości λ i μ powiązanych zależnością (10.1), potrzeba żeby

$$(10.3) \quad \bar{P}_{11} - \bar{P}_{31} + \bar{R}_{31} > 0.$$

Uwzględniając definicje (6.3) i (6.1) / por. także (4.14) / do (4.17) / można nierówność (10.2) zapisać w rozwiniętej postaci. Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha_1 + 2\alpha_2\lambda^2 + 6\alpha_3\mu + 6\alpha_5\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{3}\right)\mu + 6\alpha_7\left(\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{4}{3}\lambda^2\right)\mu \\
 & + 2(b_1\lambda^2 + c_1\lambda^4 + 2d_1\mu + 2e_1\lambda^2\mu)\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) + \\
 (10.4) \quad & + 2(b_2\lambda^2 + c_2\lambda^4 + 2d_2\mu + 2e_2\lambda^2\mu)\left(\lambda^4 - \frac{1}{\lambda^2}\right) + \\
 & + 6\lambda^2\mu(b_3 + \lambda^2c_3) + 8\lambda^2\mu\left(\lambda^2 + \frac{1}{2\lambda}\right)(b_5 + \lambda^2c_5) + \\
 & + 8\lambda^2\mu\left(\lambda^4 + \frac{1}{2\lambda^2}\right)(b_7 + \lambda^2c_7) > 0,
 \end{aligned}$$

gdzie b_i , c_i , d_i , e_i , oznaczają wielomiany zdefiniowane przez (3.10). Z powyższej nierówności wynikają dwa szczególne związki. Dla ciała nieodkształconego - rozpoczynającego podstawowy proces odkształcenia

($\lambda = 1$, $\mu \neq 0$) mamy

$$\begin{aligned}
 (10.5) \quad & 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + [6\alpha_3 + 16\alpha_5 + 20\alpha_7 + 6(b_3 + c_3) + \\
 & + 18(b_5 + c_5) + 12(b_7 + c_7)]\mu > 0,
 \end{aligned}$$

oraz dla ciała odkształconego w sposób idealnie statyczny

($\lambda \neq 1$, $\mu = 0$) mamy

$$\begin{aligned}
 (10.6) \quad & 2\alpha_1 + 2\alpha_2\lambda^2 + 2\lambda^2(b_1 + c_1\lambda^2)\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) + \\
 & + 2\lambda^2(b_2 + c_2\lambda^2)\left(\lambda^4 - \frac{1}{\lambda^2}\right) > 0.
 \end{aligned}$$

Dla ciała znajdującego się w stanie naturalnym ($\lambda=1, \mu=0$) otrzymujemy następujący wynik:

$$(10.7) \quad \alpha_1 + \alpha_2 > 0.$$

11. Uwagi końcowe

Podsumujmy krótko niektóre zasadnicze wyniki otrzymane w niniejszej pracy.

1. W przypadku małego zlinearyzowanego ruchu nałożonego na powolny ustalony ruch podstawowy materiału lepkosprężystego, metoda rozwiązań harmonicznycch jest słuszną w wystarczająco krótkim lecz skończonym okresie czasu następującym bezpośrednio po dowolnych małych zaburzeniach.
2. Postać dopuszczalnego małego ruchu zależy zarówno od warunków brzegowych, jak i warunków początkowych zadanych w chwili działania zaburzenia.
3. Warunek istnienia rozwiązania nie zależy od warunków brzegowych zadanych na końcach ściskanej belki lub pręta - przynajmniej w dwóch szczególnych przypadkach rozważanych w pracy.
4. W ogólnym przypadku częstości drgań są liczbami zespolonymi zależnymi od wymiarów belki, współczynników odkształcenia, parametrów prędkości i funkcji charakteryzujących własności materiału.
5. Metoda zlinearyzowanych równań ruchu i analiza harmoniczna pozwalają na badanie zjawisk niestateczności i wyprowadzenie

odpowiednich wystarczających kryteriów niestateczności.

Jednakże, taki sposób podejścia może być niewystarczający do zapewnienia stateczności układu.

6. Są możliwe dwa niezależne typy utraty stateczności: typ stacjonarny, jeśli $\omega_n = 0$, oraz typ oscylacyjny, jeśli

$\text{Im } \omega_n = 0$ przechodząc do wartości ujemnych,

a $\text{Re } \omega_n \neq 0$. Oczywiście warunek $\text{Im } \omega_n = 0$

zawiera jako przypadek szczególny $\omega_n = 0$.

7. Dla bardzo małych prędkości ruchu podstawowego, stacjonarny typ utraty stateczności wydaje się bardziej prawdopodobny, przynajmniej jeśli układ jest zachowawczy. W zachowawczych układach sprężystych tylko stacjonarny typ niestateczności jest możliwy.

8. Jeżeli materiał lepkosprężysty pozostaje w pewnym ustalonym stanie odkształcenia wystarczająco długo do tego, ażeby "zapomnieć" poprzedni przebieg procesu odkształcenia, przedstawione rozwiązania są ważne w dowolnie długim przedziale czasu.

9. W przypadku smukłych belek lub prętów, niskich częstości drgań i małej liczby półfal pojawiających się wzdłuż belki, inny uproszczony sposób podejścia jest dopuszczalny. Odpowiednie naprężenia krytyczne zależą istotnie od parametrów λ , μ , liczby $n = 1, 2, \dots$ i nigdy nie są równe zeru, jeśli stosunek h/a przybiera skończone wartości.

10. Funkcje α_i charakteryzujące własności materiału nie są dowolne; są one dodatkowo związane m.in. nierównościami wynikającymi z wystarczającego warunku niestateczności.

Dodatek A.

Uzasadnimy obecnie zależność (2.10) p.2 - określającą pochodną materialną składowych tensora absolutnego o dowolnej walencji. Jak już wspominaliśmy, pojęcie pochodnej materialnej jest związane ze zmianą w czasie tensora /rozumianego jako obiektu geometrycznego/ "widzianą" przez obserwatora poruszającego się razem z cząstką materialną.

Rozważmy dwa nieskończenie bliskie położenia danej cząstki materialnej; pierwsze odpowiadające dowolnemu czasowi t , drugi zaś czasowi $t + \Delta t$. Punktem wyjścia jest następująca definicja pochodnej materialnej :

$$(1A) \quad \dot{\phi} \equiv \frac{d}{dt} \phi \stackrel{df}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\hat{\phi}(X^\alpha, t + \Delta t) - \phi(X^\alpha, t)],$$

gdzie daszkiem oznaczyliśmy tensor^w chwili czasu $t + \Delta t$.

Ażeby otrzymać reprezentacje tensora $\dot{\phi}(X^\alpha, t)$ w poruszającym się konwekcyjnym układzie współrzędnych, wykorzystamy definicję (1A) pamiętając jednak, że składowe tensorów odniesione do różnych poruszających się układów nie mogą być bezpośrednio porównywane. Przede wszystkim należy je przetransformować do jakiegoś wspólnego i ustalonego układu współrzędnych, np. do nieruchomego układu kartezjańskiego (ξ^i) , a następnie przejść do granicy $(\Delta t \rightarrow 0)$ i dopiero wtedy powrócić do ruchomego układu (X^α) .

Zauważmy, że

$$(2A) \quad \hat{x}_{,\alpha}^i(X^\beta, t + \Delta t) = x_{,\alpha}^i(X^\beta, t) + \Delta t v_{,\alpha}^i(X^\beta, t),$$

$$(3A) \quad \hat{X}_{,i}^{\alpha}(X^{\beta}, t + \Delta t) = X_{,i}^{\alpha}(X^{\beta}, t) + \Delta t X_{,is}^{\alpha} v^s(X^{\beta}, t),$$

dążą odpowiednio do $x_{, \alpha}^i$ i $X_{,i}^{\alpha}$, gdy $\Delta t \rightarrow 0$.

Korzystając z oznaczeń wprowadzonych na początku do niniejszej pracy, otrzymamy również

$$(4A) \quad \frac{D}{Dt} x_{, \alpha}^i = \left(\frac{Dx^i}{Dt} \right)_{, \alpha} = v_{, \alpha}^i,$$

$$(5A) \quad \frac{D}{Dt} X_{,i}^{\alpha} = -X_{,r}^{\alpha} X_{,i}^{\mu} \frac{D}{Dt} x_{, \mu}^r = -X_{,r}^{\alpha} X_{,i}^{\mu} v_{, \mu}^r.$$

Wykorzystując kartezjański układ (ξ^i) mamy z definicji

$$(6A) \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \delta \end{matrix} \right\} = \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial \xi^r} \frac{\partial}{\partial X^{\beta}} \left(\frac{\partial \xi^r}{\partial X^{\delta}} \right) = X_{,r}^{\alpha} \xi_{, \beta \delta}^r.$$

Biorąc pod uwagę (1A) oraz powyższe zależności otrzymamy

$$\dot{\phi}_{\dots \beta}^{\alpha \dots} = X_{,r}^{\alpha} \dots \xi_{, \beta}^s \dot{\phi}_{\dots s}^{\dots r \dots} =$$

$$= X^{\alpha}_{,\tau} \cdots \sum_{\beta}^s \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{\mu}^{\tau} \cdots \hat{X}^{\nu}_{,s} \hat{\phi}^{\mu \cdots \nu}(X^s, t + \Delta t) - \sum_{\mu}^{\tau} \cdots X^{\nu}_{,s} \phi^{\mu \cdots \nu}(X^s, t) \right] \right\} =$$

$$(7A) \quad = X^{\alpha}_{,\tau} \cdots \sum_{\beta}^s \frac{D}{Dt} \left(\sum_{\mu}^{\tau} \cdots X^{\nu}_{,s} \phi^{\mu \cdots \nu} \right) =$$

$$= X^{\alpha}_{,\tau} \cdots \sum_{\beta}^s \left[\sum_{\mu}^{\tau} \cdots X^{\nu}_{,s} \frac{D}{Dt} \phi^{\mu \cdots \nu} + \right.$$

$$\left. + v^{\tau}_{,\mu} \cdots X^{\nu}_{,s} \phi^{\mu \cdots \nu} + \cdots - \sum_{\mu}^{\tau} \cdots v^t_{,s} X^{\nu}_{,t} X^s \phi^{\mu \cdots \nu} \right] =$$

$$= \frac{D}{Dt} \phi^{\alpha \cdots \beta} + X^{\alpha}_{,\tau} (v^s_{,\mu} \sum_{\mu}^{\tau} \cdots) \phi^{\mu \cdots \beta} + \cdots - X^{\nu}_{,t} (v^t_{,\mu} \sum_{\mu}^{\tau} \cdots) \phi^{\alpha \cdots \nu}$$

$$= \frac{D}{Dt} \phi^{\alpha \cdots \beta} + (v^{\alpha}_{,\mu} + \{\mu\nu\} v^{\nu}) \phi^{\mu \cdots \beta} + \cdots$$

$$- (v^{\mu}_{,\beta} + \{\nu\beta\} v^{\nu}) \phi^{\alpha \cdots \mu} =$$

$$= \frac{D}{Dt} \phi^{\alpha \cdots \beta} + \phi^{\mu \cdots \beta} \nabla_{\mu} v^{\alpha} + \cdots - \phi^{\alpha \cdots \mu} \nabla_{\beta} v^{\mu},$$

skąd już bezpośrednio wynika (2.10). Korzystając z powyższych związków łatwo sprawdzić, np., że

$$(8A) \quad \overline{(\phi_{\mu}^{\alpha} G^{\mu\beta})} = \dot{\phi}_{\mu}^{\alpha} G^{\mu\beta} + \phi_{\mu}^{\alpha} \dot{G}^{\mu\beta} = \dot{\phi}^{\alpha\beta}$$

Dodatek B.

Analizę omówionego w p. 7 przypadku $\text{Im } \omega_n = 0$ przeprowadzamy oznaczając $\omega_n = \xi_n + i\eta_n$, gdzie ξ_n i η_n są liczbami rzeczywistymi, a następnie podstawiając $\eta_n = \text{Im } \omega_n = 0$ w rzeczywistej i urojonej części warunku (6.1.8).

W tym celu wielomiany (6.17) zapisujemy w postaci

$$c_n = \frac{1}{2e_n} \left[\bar{P}_{11} + \bar{P}_{33} - \bar{P}_{13} - \bar{P}_{31} + \sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+1} (\bar{Q}_{11}^{(2\tau+1)} + \bar{Q}_{33}^{(2\tau+1)} - \bar{Q}_{13}^{(2\tau+1)} - \bar{Q}_{31}^{(2\tau+1)}) \xi_n^{2\tau+2} - \frac{g}{\sigma_n^2} \xi_n^2 + \right.$$

$$(1B) \quad \left. + \frac{l}{2e_n} \left[\sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+2} (\bar{Q}_{11}^{(2\tau)} + \bar{Q}_{33}^{(2\tau)} - \bar{Q}_{13}^{(2\tau)} - \bar{Q}_{31}^{(2\tau)}) \xi_n^{2\tau+1} - 2 \frac{g}{\sigma_n^2} \mu \xi_n \right] \right]$$

$$d_n = \frac{1}{e_n} \left[\bar{R}_{31} + \sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+1} \bar{N}_{31}^{(2\tau+1)} \xi_n^{2\tau+2} + \frac{g}{\sigma_n^2} \xi_n^2 \right] +$$

$$+ \frac{l}{e_n} \left[\sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+1} \bar{N}_{31}^{(2\tau+2)} \xi_n^{2\tau+3} - \frac{g}{\sigma_n^2} \xi_n \right],$$

$$e_n = \left[\bar{R}_{13} + \sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+1} \bar{N}_{13}^{(2\tau+1)} \xi_n^{2\tau+2} \right] + i \left[\sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+1} \bar{N}_{13}^{(2\tau+2)} \xi_n^{2\tau+3} \right].$$

Oznaczając odpowiednio $\text{Re } r_{in} = s_{in}$, $\text{Im } r_{in} = t_{in}$, ($n=1,2,\dots,\infty$; $i=1,2,3,4$) otrzymamy w myśl (6.1.1)

$$(2B) \quad s_{in} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \Phi_n + \frac{1}{2} \sqrt{\Phi_n^2 + \Psi_n^2}}$$

$$t_{in} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \Phi_n + \frac{1}{2} \sqrt{\Phi_n^2 + \Psi_n^2}}$$

gdzie

$$\Phi_n = \text{Rec}_n \pm \left\{ \frac{1}{2} [(\text{Rec}_n)^2 - (\text{Imc}_n)^2 - \text{Red}_n] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{[(\text{Rec}_n)^2 - (\text{Imc}_n)^2 - \text{Red}_n]^2 + [2\text{Rec}_n \text{Imc}_n - \text{Imd}_n]^2} \right\}^{1/2}$$

(3B)

$$\Psi_n = \text{Imc}_n \pm \left\{ -\frac{1}{2} [(\text{Rec}_n)^2 - (\text{Imc}_n)^2 - \text{Red}_n] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{[(\text{Rec}_n)^2 - (\text{Imc}_n)^2 - \text{Red}_n]^2 + [2\text{Rec}_n \text{Imc}_n - \text{Imd}_n]^2} \right\}^{1/2}$$

przy czym należy stosować jednoimiennie znaki równocześnie w wyrażeniach na Φ_n i Ψ_n .

Zamiast (5.1.8) uzyskamy dwa następujące warunki:

$$(4B) \quad \epsilon_{ij3} \left\{ [s_{in}(s_{jn}^2 - t_{jn}^2 + \delta_n^2) - 2t_{in}s_{jn}t_{jn}] [\bar{P}_{11} + \bar{P}_{33} - \bar{P}_{13} - \bar{P}_{31} + \right. \\ \left. + \bar{R}_{31} - \bar{O}_1 - \frac{g}{\delta_n^2} \frac{\mu}{2} (1 + \frac{s_{in}^2 - t_{in}^2}{\delta_n^2}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\delta_n^2} (s_{in}^2 - t_{in}^2) (\bar{R}_{13} + \sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+1} \bar{N}_{31}^{(2\tau+1)} \frac{\mu}{2}^{2\tau+2}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\delta_n^2} 2s_{in}t_{in} \sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+1} \bar{N}_{13}^{(2\tau+2)} \frac{\mu}{2}^{2\tau+3} \right] - \\ - [t_{in}(s_{jn}^2 - t_{jn}^2 + \delta_n^2) + 2s_{in}s_{jn}t_{jn}] \left[\sum_{\tau=0}^N (-1)^{\tau+2} (\bar{Q}_{11}^{(2\tau)} + \right. \\ \left. + \bar{Q}_{33}^{(2\tau)} - \bar{Q}_{13}^{(2\tau)} - \bar{Q}_{31}^{(2\tau)}) \frac{\mu}{2}^{2\tau+1} + \bar{M}_{31} \frac{\mu}{2} - \frac{1}{\delta_n^2} g \mu \frac{\mu}{2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\delta_n^2} 2 \sin t_{in} \left(\bar{R}_{13} + \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} \bar{N}_{31}^{(2r+1)} \xi_n^{2r+2} \right) - \\
 & -\frac{1}{\delta_n^2} (s_{in}^2 - t_{in}^2) \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} \bar{N}_{13}^{(2r+2)} \xi_n^{2r+3} \Big] \times \left[\text{sh}(s_{in}h) \cos(t_{in}h) + \right. \\
 & \left. + \sin(t_{in}h) \text{ch}(s_{in}h) \right] \left[\text{ch}(s_{jn}h) \cos(t_{jn}h) - \text{sh}(s_{jn}h) \sin(t_{jn}h) \right] = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \in ij3 \left\{ \left[t_{in} (s_{jn}^2 - t_{jn}^2 + \delta_n^2) + 2 s_{in} s_{jn} t_{jn} \right] \left[\bar{P}_{11} + \bar{P}_{33} - \bar{P}_{13} - \bar{P}_{31} + \right. \right. \\
 (4B) \quad & \left. + \bar{R}_{31} - \bar{O}_1^1 - \frac{9}{\delta_n^2} \xi_n^2 \left(1 + \frac{s_{in}^2 - t_{in}^2}{\delta_n^2} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\delta_n^2} (s_{in}^2 - t_{in}^2) \left(\bar{R}_{13} + \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} \bar{N}_{31}^{(2r+1)} \xi_n^{2r+2} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\delta_n^2} 2 \sin t_{in} \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} \bar{N}_{13}^{(2r+2)} \xi_n^{2r+3} \right] - \\
 & - \left[s_{in} (s_{jn}^2 - t_{jn}^2 + \delta_n^2) - 2 t_{in} s_{jn} t_{jn} \right] \left[\sum_{r=0}^N (-1)^{r+2} \left(\bar{Q}_{11}^{(2r)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \bar{Q}_{33}^{(2r)} - \bar{Q}_{13}^{(2r)} - \bar{Q}_{31}^{(2r)} \right) \xi_n^{2r+1} + \bar{M}_{31} \xi_n - \frac{1}{\delta_n^2} 9 \mu \xi_n - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\delta_n^2} 2 \sin t_{in} \left(\bar{R}_{13} + \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} \bar{N}_{31}^{(2r+1)} \xi_n^{2r+2} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\delta_n^2} (s_{in}^2 - t_{in}^2) \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} \bar{N}_{13}^{(2r+2)} \xi_n^{2r+3} \right] \times \left[\text{sh}(s_{in}h) \cos(t_{in}h) + \right. \\
 & \left. + \sin(t_{in}h) \text{ch}(s_{in}h) \right] \left[\text{ch}(s_{jn}h) \cos(t_{jn}h) - \text{sh}(s_{jn}h) \sin(t_{jn}h) \right] = 0,
 \end{aligned}$$

w których dla ustalonego n , $ij = 1, 2$.

Literatura cytowana w tekście

- [1] R.S. Rivlin, J.L. Ericksen, Stress-deformation relations for isotropic materials, *J.Rat.Mech.Anal.*, 4 (1955), 323-425.
- [2] R.S. Rivlin, Further remarks on the stress-deformation relations for isotropic materials, *J.Rat.Mech.Anal.*, 4 (1955) 681-701.
- [3] A.J.M. Spencer, R.S. Rivlin, The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 2 (1959) 309-336; Further results in the theory of matrix polynomials, *Arch.Rat.Mech. Anal.*, 4 (1960) 214-230.
- [4] A.J.M. Spencer, R.S. Rivlin, Finite integrity basis for five or fewer symmetric 3×3 matrices, *Arch.Rat.Mech. Anal.*, 2 (1959) 435-446.
- [5] W. Noll, On the continuity of the solid and fluid state, *J.Rat.Mech.Anal.*, 4 (1955) 3-81.
- [6] W. Noll, A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 2 (1958) 197-226.
- [7] B.D. Coleman, W. Noll, An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics, *Arch.Rat. Mech.Anal.*, 6 (1960) 355-370.
- [8] A.E. Green, R.S. Rivlin, The mechanics of non-linear materials with memory, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 1 (1957) 1-21.
- [9] A.E. Green, R.S. Rivlin, A.J.M. Spencer, The mechanics of non-linear materials with memory, Part II, *Arch.Rat.Mech., Anal.*, 3 (1959) 82-90.

- [10] A.E. Green, R.S. Rivlin, The mechanics of non-linear materials with memory, Part III, Arch.Rat.Mech.Anal., 4 (1960) 387-404.
- [11] A.E. Green, R.S. Rivlin, R.T. Shield, General theory of small elastic deformation superposed on finite elastic deformations, Proc.Roy.Soc., A 211 (1952) 128-154.
- [12] A.E. Green, W. Zerna, Theoretical E-lasticity, Oxford 1954.
- [13] A.C. Pipkin, R.S. Rivlin, Small deformations superposed on large deformations in materials with fading memory, Arch.Rat.Mech.Anal., 8 (1961) 297-308.
- [14] S. Zahorski, Some problems of motion and stability for hygrosteric materials, Arch.Mech.Stos., 6, 15 (1963) 915-940.
- [15] S. Zahorski, Kinematic stability in the case of slow steady plastic flow, Arch.Mech.Stos., 6, 16 (1964) 1197-1206.
- [16] L. Treloar, The Physics of Rubber-Like Elasticity, Oxford 1949.
- [17] S. Zahorski, Experimental investigations of some mechanical properties of rubber, Bull.Acad.Polon.Sci., sci.techn., 10, 10 (1962) 421-427.
- [18] S. Zahorski, Kinematics of small superposed motions. Convective and spatial description, Brown University Report 1964.
- [19] A.E. Green, J.E. Adkins, Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics, Oxford 1960.
- [20] Guo Zhong-heng, Time derivatives of tensor fields in non-linear continuum mechanics, Arch.Mech.Stos., 1, 15 (1963), 131-163.
- [21] R.S. Rivlin, Viscoelastic fluids, Brown University Report 1963.

- [22] W. Nowacki, Teoria Peizania, Warszawa 1963.
- [23] В.Н. Работнов, С.А. Шестерников, Устойчивость стержней и пластинки в условиях ползучести, ПММ, 3, 21, (1957) 406-412.
- [24] W.E. Jahsman, F.A. Field, Creep instability and collapse of initially straight columns, Lockheed Aircraft Corp. Report, LMSD-2458 (1958).
- [25] W.E. Jahsman, F.A. Field, A theory of creep instability of initially straight columns, Lockheed Aircraft Corp. Report, LMSD-48329 (1958).
- [26] N.J. Hoff, Reversed creep. A remark on the creep buckling theory of Rabotnov and Shesterikov, J.Mech.Phys.Solids, 2, 12 (1964) 113-123.
- [27] N.J. Hoff, A survey of the theories of creep buckling, Proc. 3rd US Nat. Congr. Appl. Mech., Brown University 1958.
- [28] M. Życzkowski, Geometrically non-linear creep buckling of bars, Arch. Mech. Stos., 3, 12 (1960) 379-411.
- [29] M.A. Biot, Exact theory of buckling of a thick slab, Appl. Sci. Res. A, 2, 12 (1963) 183-198.
- [30] B.D. Coleman, W. Noël, Foundations of linear viscoelasticity, Rev. Modern Phys., 33 (1961) 239-249.
- [31] Z. Wesolowski, Stability in some cases of tension in the light of the theory of finite strain, Arch. Mech. Stos., 6, 14 (1962) 875-900.
- [32] H. Ziegler, Linear elastic stability, ZAMP, 4 (1953) 89-121, 167 - 180.
- [33] H. Ziegler, On the concept of elastic stability, Adv. Appl. Mech., 4 (1956) 351-403.
- [34] C.E. Pearson, General theory of elastic stability, Quart. Appl. Math., 14 (1956) 133-144.

- [35] R. Hill, On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain, *J.Mech.Phys.Sol.*, 5 (1957) 229-241.
- [36] В.В. Волотин, Нелинейная теория устойчивости "в большом", *Расчёты на Прочность*, вып. 3 (1958) 310-354.
- [37] В.В. Волотин, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Москва 1961.
- [38] Guo Zhong-heng, W. Urbanowski, Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations, *Arch.Mech.Stos.*, 2, 15 (1963) 309-321.
- [39] R.T. Shield, A.E. Green, On a certain methods in the stability theory of continuous systems, *Arch.Rat.Mech,Anal.*, 12 (1963) 354-360.
- [40] А.М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Москва-Ленинград 1950.
- [41] А.А. Мовчан, О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем, *ПММ*, 3, 23, (1959) 483-493.
- [42] А.А. Мовчан, Устойчивость процессов по двум метрикам, *ПММ*, 6, 24 (1960) 988-1001.
- [43] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*, Oxford 1961.
- [44] H. Zorski, Anelastic waves in thin shells. *Inter.Symp. on stress waves in anelastic solids*, Brown University 1963
- [45] Guo Zhong-heng, The problem of stability and vibration of a circular plate subject to finite initial deformation. *Arch.Mech.Stos.*, 2, 14 (1962) 239-252.

