

Dr inż. Witold Sutkowski

POWIERZCHNIOWE KONSTRUKCJE

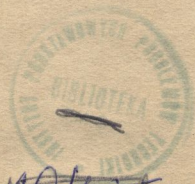
PRETOWE

/ Rozprawa habilitacyjna /

Instytut Podstawowych Problemów Techniki

Polska Akademia Nauk

[1965]



~~10435~~
336/D

1.1. Cel pracy.

Celem niniejszej pracy jest rozszerzenie zastosowania rachunku różnicowego do badań analitycznych nad regularnymi, powierzchniowymi układami prętowymi. W rozważaniach ograniczono się jedynie do analizy statycznej, jakkolwiek wiele zależności wyprowadzonych w niniejszej rozprawie można zastosować do zagadnień dynamicznych.

Zarówno w wyniku wstępnych rozważań jak i w wyniku analizy dotychczas opublikowanych prac w tym zakresie - zasadną konieczność opracowania geometrii różnicowej jako niezbędnego elementu dalszych dociekań. Dlatego też w rozdziale drugim podano podstawy specjalnie opracowanej geometrii różnicowej obrotowego, powierzchniowego zbioru punktów. W rozdziale tym wyprowadzono związki opisujące operacje nad wzajemnie prostopadłymi wektorami jednostkowymi będącymi funkcjami współrzędnych punktów zbioru. W tym celu zdefiniowano szereg pojęć analogicznych do znanych z geometrii różniczkowej, a więc takich, jak: krzywizna, promień krzywizny, wektor styczny, wektor normalny itd. W dalszej części rozdziału drugiego zbadano powierzchnię odkształconą i podano zależności pomiędzy przemieszczeniami u, v, w a odkształceniami. Każdą wywód w tym rozdziale przeprowadzono stosując rachunek wektorowy.

W rozdziale trzecim podano ogólne rozważania dotyczące elementu powłoki prętowej. Na początku tego rozdziału zestawiono sześć równań równowagi wycinka powłoki. Równania te zawierają w sumie dwanaście niewiadomych funkcji sił i momentów. Następnie, korzystając z geometrycznych związków określających odkształcenie powierzchni środkowej, podano zależności wiążące siły wewnętrzne i przemieszczenia. W ostatnim paragrafie rozdziału trzeciego podano warunki brzegowe dla róż-

nych rodzajów podpór.

W rozdziale czwartym przedstawiono szereg przypadków szczególnych powierzchniowych konstrukcji prętowych. Jako pierwsze podano równania równowagi siatki prętów w stanie półmomentowym i bezmomentowym. Jak wykazano, stan bezmomentowy w ogólnym przypadku będzie możliwy jest tylko przy obciążeniu osiowo symetrycznym. Przy dowolnym obciążeniu możliwy jest taki stan, w którym występują momenty zginające pręty o składowych normalnych do powierzchni. Stan ten będziemy dalej nazywali półmomentowym. W stanie bezmomentowym podane rozwiązanie prostego zagadnienia kopuły kulistej pod działaniem ciężaru własnego. W dalszym ciągu w stanie półmomentowym wprowadzono obie krzywizny do zera i otrzymano równania płaskiej tarczy prętowej. W przypadku tym podano zarówno funkcję rozwiązującą zagadnienie, jak i przykłady postaci tej funkcji. W dalszej części rozdziału czwartego zastawiono równania równowagi w przemieszczeniach walcowej powłoki prętowej o stałym promieniu krzywizny. Jako przykład zastosowania tych równań podano wyniki liczbowe i dane doświadczalne ugięć wycinka powłoki walcowej, podporządkowanej przegubowo i obciążonej jedną siłą normalną do powierzchni. Po przejściu z krzywizną powłoki walcowej do zera uzyskano równania rusztu płaskiego z uwzględnieniem podatności skrętnej poszczególnych prętów. W zakończeniu rozdziału podano przykład rusztu na sprężystym podłożu z uwzględnieniem podatności skrętnej prętów.

1.2. Przegląd literatury

Powierzchniowe konstrukcje prętowe w postaci rusztów, przekryć walcowych lub kulistych zaczęto stosować w połowie dziewiętnastego wieku. Jednakże ze względu na poważne trudności w technice obliczeniowej oraz w wykonaniu konstrukcji metalowych z elementów powtarzalnych zaczęto je stosować na większą skalę dopiero w latach czterdziestych.

Teoretycznie wyznaczanie sił i przemieszczeń w tego typu konstrukcjach / są to konstrukcje kratowe, ramowe i mieszane / nie przedstawia merytorycznych trudności. Literatura na ten temat jest bardzo obszerna; jest wiele monografii dotyczących tego zagadnienia, między innymi i w języku polskim: [7], [10], [33], [45], [61]. O wiele uboższa jest literatura traktująca o ramach w zakresie plastycznym, ale i temu zagadnieniu poświęcone są niektóre monografie, jak np. P.G. Hodge'a [32].

Omawiane konstrukcje charakteryzuje duża liczba prętów i węzłów, sięgająca setek, a nawet tysięcy w jednym układzie. Fakt ten powoduje, że podstawowym problemem staje się technika obliczeniowa, natomiast na dalszy plan odsuwa się analizę teoretyczną zagadnienia, polegającą na badaniu zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a parametrami kształtu. Niekiedy nawet rezygnuje się z opracowania metody obliczeniowej, a przeprowadza się jedynie badania doświadczalne, jak miało to miejsce z dobrze znanymi na terenie U.S.A. konstrukcjami typu "Unistrut" [20].

Wspomniane trudności sprawiły, że badania nad konstrukcjami prętowymi szkieletowymi w kierunku bądź to zależności sprężających, bądź to ugięć w obliczeniach konstrukcji bliskich rzeczywistości.

Pierwsze teoretyczne rozważania nad powierzchniowymi konstrukcjami prętowymi należą według S.P. Timoshenki [55] - przypisać A. Föpplowi [19], który w 1892 roku w pracy "Das Fachwerk im Raum" podał statyczną analizę walcowego przekroju prętowego z wykrzyłowaniem /później zwanego w literaturze przekrojem typu Föppla/. Rozważania swoje oparł on na założeniach, że przekroje jest kratowe, a więc że pręty połączone są między sobą przecubami kulistymi. Przy takim założeniu rozwiązanie sprowadzało się do rozkładu konstrukcji na szereg płaskich kratownic obciążonych w swoich płaszczyznach. Schemat statyczny przyjęty przez Föppla daleko jednak odbiega od rzeczywistości.

tości, gdyż sztywne węzły układu mają znaczny wpływ na wartości sił w prętach. Założenia Pöpppla uściślił dopiero w 1952 roku I.G. Popow [47], który przyjął, że węzły pomiędzy prętami leżącymi na łukach są sztywne. W rezultacie otrzymał on równania dalewzbiegoczościowe dla każdego węzła. Obliczeniowo uproszczenia I.G. Popowa polegały na grupowaniu niewiadomych, a więc redukowaniu liczby równań i niewiadomych. Stosując tę samą metodę postępowania co i I.G. Popow, W.A. Jerjegina rozszerzyła badania na zagadnienia stateczności przekryć typu Pöppla [18].

Poza wyżej wymienionymi autorami dość liczna grupa osób zajmowała się zagadnieniami kopuł ramowych, rusztów, regularnych ram itp. Z grupy tej należy wymienić przede wszystkim: [49], [50], [35], [8], [9], [13], [60], [54]. Prace ich obejmowały przede wszystkim zagadnienia statyki, stateczności i dynamiki kopuł ramowych i regularnych ram przy takich znacznie upraszczających analizach założeniach jak: pominięcie sztywności na rozciąganie, sztywności skręcanie itp. Nawet przy takich założeniach badania prowadziły się głównie do szukania uproszczeń w rozwiązywaniu układów równań.

Z wyżej wymienionych prac należy zwrócić uwagę na książkę D.W. Wajnberga i W.G. Czudnowskiego [60], którzy wprowadzili do analizy kopuł ramowych elementy rachunku różnicowego. Jednakże brak odpowiedniego opracowania geometrii takich układów spowodował, że rozważania i wzory podane przez wyżej wymienionych autorów są przybliżone i mało przejrzyste. Treść książki wykazuje dobitnie, jak komplikuje się zagadnienie wobec braku odpowiedniego zapisu geometrii konstrukcji.

Z chwilą szerszego zastosowania elektronowych maszyn liczących, rozpowszechniły się metody oparte o działania na macierzach, które są najkorzystniejsze przy programowaniu. Metody te doczekały się również wnikliwych opracowań, a. in. przez J.H. Argyrysa, S.O. Asplunda [1], [2] czy W.D. Szajkowieza [52].

Metody te są dogodnie przy stosowaniu maszyn, niemniej jednak mają poważną wadę polegającą na tym, że uniemożliwiają w znacznym stopniu analizę teoretyczną konstrukcji.

Dalsza metoda polega na zastępowaniu regularnej konstrukcji prętowej odpowiednią konstrukcją ciągłą /płyty, powłoki/. Sposób taki umożliwia korzystanie z gotowych, często zamkniętych wzorów. Metoda ta ma jednak tę wadę, że trudno jest ustalić sztywność zastępczej konstrukcji, co powoduje, że wyniki stosowania jej są często problematyczne. Przykładem zastosowania tej metody może być praca E. Laderera [37]. Mówiąc o konstrukcjach zastępczych należy jeszcze wspomnieć o metodzie odwrotnej, polegającej na zastępowaniu powłoki ciągłej kratownicą. Propozycje rozwiązania dowolnej powłoki obrotowej w stanie błonowym przez zastąpienie jej kratownicą podał Z. Grodzki [23] [24].

Na osobną uwagę zasługuje praca Cz. Woźniaka [64], który stworzył ciekawą teorię ośrodków włóknistych. Jakkolwiek teoria ta dotyczy ośrodka ciągłego, a nie dyskretnego, to w przypadku niedużych wymiarów "oczek" siatki - w porównaniu z wymiarami całej konstrukcji - może dać zadowalające wyniki.

W niniejszej rozprawie zastosowano metodę badania powierzchniowych konstrukcji prętowych w oparciu o rachunek różnicowy.

Pierwsze ujęcie zagadnienia statyki konstrukcji w zapisie różnicowym należy przypisać K. Clapeyronowi [11], który rozpatrując belkę na wielu równo oddalonych podporach wyprowadził tzw. równanie trzech momentów. Szybki postęp techniki sprawił, że zastosowanie rachunku różnicowego powoli się rozwinęło na początku 20 wieku, w szczególności w pracach ukończonych niemieckich. Poniżej ograniczymy się jedynie do wymienienia ważniejszych prac, które wniosły nowe elementy do tej dziedziny.

Jednym z pierwszych, który zastosował rachunek różnic do

złożonych konstrukcji prętowych, był L. Mann [40]. Podał on rozwiązanie płaskiej rury typu Vierendeel oraz zbadał powtarzalny element konstrukcji i ze względu na jego skończoną rozmiarę podał wszystkie równania w zapisie różnicowym. Praca zawiera rozwiązania tych równań w zakresie statyki i stateczności dla szeregu rodzajów obciążeń.

R. Missis i J. Ratzersdorfer [43] w 1925 roku podali teorię stateczności płaskiego słupa kratowego złożonego z jednakowych trójkątów. Rozwiązania zawarte w tej pracy oparte są na rachunku różnicowym, a otrzymane wyniki uszczelnione są oś ilością segmentów w słupie.

Na szczególną uwagę zasługuje książka F. Bleicha i E. Melana [6] wydana w 1926 roku i składająca się z dwóch zasadniczych części. Pierwsza z nich zawiera teorię różnic, sum i równań różnicowych zwyczajnych, liniowych o stałych i zmiennych współczynnikach. W ramach teorii równań różnicowych poruszone są takie zagadnienia, jak: transformacje Laplace'a oraz obliczanie równań różnicowych za pomocą funkcji własnych. Ostatnie rozdziały pierwszej części zawierają szereg uwag dotyczących równań różnicowych cząstkowych. Druga część książki obejmuje szereg ciekawych przykładów praktycznego zastosowania teorii wyłożonej w części pierwszej. W aspekcie niniejszej rozprawy habilitacyjnej na uwagę zasługują zagadnienia: płaskich i walcowych rusztów oraz płaskich tarcz ramowych, które uniemożliwiają rozwiązanie za pomocą równań różnicowych. Zagadnienia te są stosunkowo proste, ponieważ rozpatrzono je przy pominięciu podatności osiowej i sztywności skręcania.

Jedynym brakiem niniejszej książki jest zbyt powierzchowne potraktowanie problemu warunków brzegowych. Niemniej jednak stanowi ona do dziś niezwykle cenną pozycję. Jednak fakt, że nie jest powszechnie znana, sprawił, że zagadnienia w niej rozwiązane były niaraz rozwiązywane powtórnie w latach późniejszych. F. Bleich opublikował ponadto szereg prac, przyczyniając się do dalszego rozwoju zastosowań rachunku

różnicowego w statyce budowli. Należy wspomnieć tu choćby pracę na temat stateczności belki podpartej na podporach sprężystych [5].

W ostatnich latach niezwykle szybko rozwinęło się budownictwo stalowe z cięseństw postarzalnych. Szereg przykładów takich konstrukcji metalowych podaje w swych pracach Z. Makowski [33]. Duże zapotrzebowanie na tego rodzaju konstrukcje spowodowało, że zaczęto ponownie zajmować się szerzej stosowaniem rachunku różnicowego. Przede wszystkim należy wymienić tu książkę W.A. Bowina [9] i prace D.L. Deana [14], [15], [16], [17]. W.A. Bowin w swojej książce pierwszy wprowadził rachunek różnicowy do zagadnień wariacyjnych w mechanice budowli. Podaje on przy tym szereg oryginalnych przykładów z zakresu dynamiki i stateczności konstrukcji.

D.L. Dean w swej wcześniejszej pracy [14] podał rozwiązanie siatki prętowej, obciążonej osiowo symetrycznie, jak i szereg innych regularnych konstrukcji powierzchniowych. W późniejszej pracy podał on interesujące rozwiązanie różnego rodzaju siatek ścięgowych mających zastosowanie w konstrukcjach wiszących. We wszystkich swych pracach autor posługuje się rachunkiem różnicowym, wprowadzając całkowy obrysujące obciążenia w postaci delty Kroneckera.

W latach 1959 - 60 I. Babuska i B. Vitasek [3] [59] zaprezentowali - w oparciu o teorię dystrybucji - transformacje Fouriera w zastosowaniu do równań różnicowych. Na zakończenie swych prac podali oni proste przykłady rusztów i siatek prętowych.

Jak już wspomniano, powyższy przegląd nie jest pełnym odzwierciedleniem literatury dotyczącej omawianego tematu. W szczególności nie omawialiśmy tu prac typu konstrukcyjnego. Nie omówiliśmy również szeregu prac / jak np. [4], [1], [2], [39], [36], [34], [38], [44], [41], [57], [54], [53], [57] / nie wnoszących w zasadzie nic nowego do zastosowań rachunku różnicowego w mechanice budowli.

Wymienione prace, w których zastosowano rachunek różnic, wskazują wyraźnie na korzyści wynikające z jego zastosowania. Korzyści te przez wszystkie polegają na zwartości zapisu, co daje w konsekwencji:

- możliwość analizy jakościowej i ilościowej poszczególnych układów;
- możliwości uproszczonych a więc i tańszych obliczeń numerycznych zarówno "ręcznych" jak i maszynowych.

Biorąc pod uwagę treść obu pierwszych punktów, należy stwierdzić, że prace niniejsza zawiera takie nowe elementy w zakresie zastosowania rachunku różnicowego, jak:

- geometria różnicowa powierzchniowego zbioru punktów;
- ujęcie ogólnych różnic regularnych, osiowo symetrycznych siatek prętów w zapisie wektorowym z możliwościami przejścia w granicy do różnych typów konstrukcji, jak tarcze, ruszty;
- wskazanie drogi postępowania przy badaniu innych rodzajów siatek niż ta, którą opisano w niniejszej pracy;
- rozwiązanie niektórych przykładów - z uwzględnieniem podatności na rozciąganie i sztywności skręcania prętów / tarcza prętowa, powłoka walecowa, zaburzenia brzegowe /.

1.3 Założenia i oznaczenia.

Przez "powierzchniową konstrukcję prętową" będziemy rozumieć ramę lub kratę o prętach prostych, której węzły leżą na dowolnej powierzchni.

Liczba rodzajów siatek, jakie tworzą pręty, jest teoretycznie nieograniczona. W pracy niniejszej zbadano jedynie najczęściej spotykany rodzaj siatki pokazanej na rys. 2.2.1 aczkolwiek wprowadzona metoda może być z powodzeniem zastosowana i do innych siatek.

Układy o co najmniej jednej krzywej różnej od zera nazwane często powłokami - przez analogię do powłok w rozumieniu klasycznym. Dlatego

też przyjęto z teorii powłok [46] takie pojęcia, jak : wycinek powłoki, grubość powłoki, powierzchniowy środekowa itp. W pracy niniejszej będziemy rozpatrywać jedynie konstrukcje przy następujących założeniach:

a. Przemieszczenia węzłów są małe w stosunku do wymiarów poprzecznych prętów, a odkształcenia tych ostatnich mieszczą się w ramach prawa Hooke'a.

b. Obciążenia zewnętrzne nie zmieniają się ani co do wartości, ani co do kierunku wskutek odkształceń konstrukcji.

c. Pręty są proste, pryzmatyczne i mają skończoną sztywność rozciągania, zginania i skręcania oraz nieskończoną sztywność ścinania /hipoteza płaskich przekrojów/.

d. Pręty spotykające się w jednym węźle oddziałują na siebie dowolnymi wektorami sił i dowolnymi wektorami momentów.

e. Pręty w siatce są tak umieszczone, że ich osie geometryczne przecinają się w geometrycznych punktach siatki. Kierunki głównych osi bezwładności przekrojów prętów pokrywają się z kierunkami stycznej i normalnej do siatki w punkcie będącym geometrycznym środkiem pręta.

Osobnego omówienia wymaga zapis rachunku różnicowego. W większości literatury, w szczególności w książkach anglosaskich / np. [33a]

[42] /, rachunek różnic oparty jest na następujących podstawowych operacjach:

$$\Delta u(x) = u(x + \Delta x) - u(x)$$

$$\nabla u(x) = \frac{1}{2} [u(x + \Delta x) + u(x)]$$

$$E = 1 + \Delta; \quad M = \frac{1}{2} (1 + E) = 1 + \frac{1}{2} \Delta$$

$$P_{(x)}^{-1} u_t = \sum_{t=0}^x u_t; \quad \Delta P_{(x)}^{-1} u_t = u_x$$

Natomiast B.A. Bowin w swojej książce [9] wszystkie rozwa-

żania oparł się o zw. różnicach centralnych, wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\Delta u(x) = u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - u\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right),$$

/ 1.3.1 /

$$\nabla u(x) = u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) + u\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right),$$

oraz

$$\Delta v(x) = u(x)$$

$$Su(x) = v(x) + \sigma$$

$$\nabla v(x) = u(x)$$

$$\bar{S}u(x) = v(x) + \bar{\tau}$$

/ 1.3.2 /

$$\Delta v(x) = \nabla u(x)$$

$$Su(x) = v(x) + \sigma$$

gdzie

$$\bar{\sigma}(x+\omega) = \bar{\sigma}(x); \quad \bar{\tau}(x+\omega) = -\bar{\tau}(x)$$

/ 1.3.3 /

Nie negując przydatności pierwszej grupy operacji /np. w rachunku prawdopodobieństwa [33a] / należy stwierdzić, że w statyce konstrukcji korzystniejsze jest stosowanie operacji wynikających z różnic centralnych. Stosowanie ich umożliwi na ogół znacznie krótsze zapisy równań, jak i zapewni ich symetryczną postać. Jest to szczególnie cenne przy zadaniach brzegowych i przy badaniu przejść od równań różnicowych do różniczkowych. W niniejszej rozprawie przyjęliśmy więc oznaczenia wg W.A. Bowina z jedną zmianą, a mianowicie:

$$\nabla u(x) = u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) + u\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)$$

/ 1.3.4 /

W całej pracy wprowadziliśmy następujące podstawowe oznaczenia:

- \bar{r}, \bar{s} - promienie wektory
- $\{a_n\}$ - ciąg
- n liczby naturalne
- α, β - liczby całkowite, współrzędne zbioru.
- \bar{m} - funkcja wektorowa o stałym module
-
- $\Delta_\alpha W = W_{\alpha+\frac{1}{2}} - W_{\alpha-\frac{1}{2}} \quad \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} = \pm W_{\alpha+\frac{1}{2}} \mp W_\alpha$
- $\nabla_\alpha W = W_{\alpha+\frac{1}{2}} + W_{\alpha-\frac{1}{2}} \quad \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} = W_{\alpha+\frac{1}{2}} + W_\alpha$
- $\Delta_\alpha^2 W = \Delta_\alpha (\Delta_\alpha W)$
- $\nabla_\alpha^2 W = \nabla_\alpha (\nabla_\alpha W)$
- $\Delta_{2\alpha} W = \nabla_\alpha (\Delta_\alpha W) = \Delta_\alpha (\nabla_\alpha W) = W_{\alpha+1} - W_{\alpha-1}$
- $D_\alpha W = W_{\alpha+1} + 4W_\alpha + W_{\alpha-1}; \quad H_\alpha W = W_{\alpha+1} - 4W_\alpha + W_{\alpha-1}$
- h_1, h_2 - odległości między dwoma sąsiednimi punktami siatki przy ustalonym jednym argumencie
- $\bar{t}, \bar{i}, \bar{n}$ - wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe
- k - krzywizna
- R_1, R_2, R_3 - promienie krzywizny
- A_1, A_2, B_1, B_2 - współczynniki formy kwadratowych
- χ_1, χ_2 - kąty środkowe w kołach krzywiznowych

- u, v, w - składowe wektora przemieszczenia
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega_1, \omega_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ - odkształcenia liniowe siatki
- φ, ψ, δ - składowe kąta obrotu węzła siatki odkształconej
- β, q, λ - odkształcenia kątowe węzłów
- $\bar{\Omega}$ - wektor obrotu węzła
- N_1, N_2 - siły osiowe
- T_1, T_2, Q_1, Q_2 - siły poprzeczne
- M_1, M_2 - momenty skręcające
- H_1, H_2, G_1, G_2 - momenty zginające
- $E_1 J_{1n}, E_2 J_{2t}$ - sztywności zginania
-
- $G J_0$ - sztywności skręcania
- $E_1 F_1, E_2 F_2$ - sztywności rozciągania
- $\alpha = \frac{EJ}{h^4} ; \quad \mu = \frac{EF}{h^2} ; \quad \nu = \frac{GJ_0}{h^4}$

II. GEOMETRIA RÓŻNICOWA POWIERZ- CHNIOWEGO ZBIORU PUNKTÓW

2.1. Płaski zbiór punktów.

Niech X będzie zbiorem wartości funkcji $\{a_n\}$ w postaci:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{4}, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ -\frac{n-1}{4}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Jeżeli w powyższym ciągu oznaczymy dowolną liczbę całkowitą przez α , to elementy zbioru X będziemy mogli zapisać w postaci:

$$X = \left[\dots - \frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \right. \\ \left. \dots / \alpha - \frac{1}{2} /, \alpha, / \alpha + \frac{1}{2} / \dots \right].$$

Rozpatrzmy teraz jednojednoznaczna funkcję wektorową odwzorowującą X w zbiór Y wektorów \vec{r} o wspólnym początku. Zbiór Z punktów będących końcami tych wektorów nazwiemy jednowskaźnikowym zbiorem punktów/ rys. 2.1.1 - na rysunku dla jasności połączono punkty odcinkami prostych /. Liczba zbiorów Z jest niograniczona, ale my zajmiemy się jedynie tymi zbiorami, które mają następujące własności:

$$|\Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \vec{r}| = h = \text{const} \quad / 2.1.1 /$$

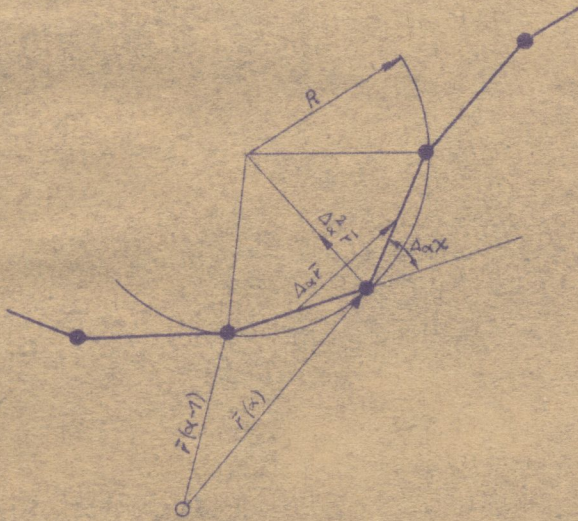
$$\nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \vec{r} - 2\vec{r}_{\alpha+\frac{1}{2}} = 0 \quad / 2.1.1 /$$

$$\Delta_{\alpha} [\Delta_{\alpha} \vec{r} \times \Delta_{\alpha}^2 \vec{r}] = 0 \quad / 2.1.3 /$$

Związek / 2.1.1 / oznacza, że odległość pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami siatki o argumentach całkowitych jest równa h .

Ze związku / 2.1.2 / wynika, że punkty wyznaczone końcami wektorów przy argumentach połówkowych $\left/ \alpha - \frac{1}{2} \right.$ i $\left/ \alpha + \frac{1}{2} \right.$ znajdują się w połowie odległości pomiędzy sąsiednimi punktami o argumentach całkowitych.

Związek / 1.1.3 / ogranicza rozpatrywany zbiór do zbioru siatek punktów leżących w jednej płaszczyźnie. Zbiory te nazwiemy płaskimi zbiorami punktów.



rys. 2.1.1.

Rozpatrzmy obecnie trzy związki będące podstawą dalszych rozważań nad płaskimi zbiorami punktów.

1. Jeżeli Y stanowi zbiór wektorów \bar{m} o jednakowych modułach, to dla każdego α suma $\nabla_{\alpha} \bar{m}$ / lub $\nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{m}$ / jest prostopadła do przyrostu $\Delta_{\alpha} \bar{m}$ / lub $\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{m}$ /.

Weźmy kwadrat wektora \bar{m} , który jest równy kwadratowi modułu tegoż wektora :

$$|\bar{m}|^2 = \text{const.}$$

znajdując przyrost Δ_α tej zależności otrzymamy:

$$\Delta_\alpha \bar{m} \cdot \nabla_\alpha \bar{m} = 0 \quad / 2.1.4 /$$

skąd bezpośrednio wynika, że $\Delta_\alpha \bar{m}$ jest prostopadłe do $\nabla_\alpha \bar{m}$.

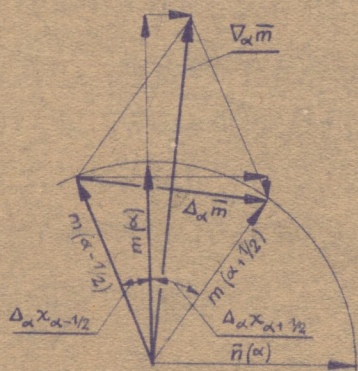
2. Jeżeli Y jest zbiorem wektorów \bar{m} o jedynkowych modułach, to dla każdego α różnica $\Delta_\alpha \bar{m}$ jest równa:

$$\Delta_\alpha \bar{m} = \Delta_\alpha \cos \frac{\Delta x}{2} \cdot \bar{m} - \nabla_\alpha \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \bar{n} \quad / 2.1.5 /$$

W szczególności gdy h jest stałe, różnica ta jest wektorem prostopadłym do rozpatrywanego wektora \bar{m} i równa:

$$\Delta_\alpha \bar{m} = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \bar{n} \quad / 2.1.6 /$$

Skusność powyższego związku wynika bezpośrednio z rys. 2.1.2.



rys. 2.1.2.

3. Dla zbioru Y jak wyżej dla każdego α suma $\nabla_\alpha \bar{m}$ jest równa:

$$\nabla_{\alpha} \bar{m} = \nabla_{\alpha} \cos \frac{\Delta_{\alpha} \chi}{2} \cdot \bar{m} - \Delta_{\alpha} \sin \frac{\Delta_{\alpha} \chi}{2} \cdot \bar{n} \quad / 2.1.7 /$$

W szczególności gdy h jest stałe, suma ta jest wektorem współliniowym z badanym wektorem $m(\alpha)$ i równa:

$$\nabla_{\alpha} \bar{m} = 2 \cos \frac{\Delta_{\alpha} \chi}{2} \cdot \bar{m} \quad / 2.1.8 /$$

Podobnie jak i w przypadku poprzednim, dowód wynika bezpośrednio z rys. 2.1.2.

Zdefiniujemy obecnie podstawowe wielkości charakteryzujące płaski zbiór punktów. Część tych wielkości odnosi się do wszystkich punktów zbioru Z , reszta zaś tylko do punktów tego zbioru o argumentach całkowitych.

W pierwszej grupie zdefiniujemy:

- styczną do Z w danym punkcie jako prostą przechodzącą przez ten punkt i równoległą do wektora $\Delta_{\alpha} \bar{r}$ lub $\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{r}$ / rys. 2.1.1/
- normalną do Z w danym punkcie jako prostą przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do stycznej / rys. 2.1.1 /.

W zbiorze $C \subset Z$ o argumentach całkowitych zdefiniujemy:

- krzywiznę k w danym punkcie jako stosunek

$$k = \frac{2 \sin \frac{\Delta_{\alpha} \chi}{2}}{h} \quad / 2.1.9 /$$

gdzie χ kąt pomiędzy wektorami $\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{r}$ i $\Delta_{\alpha} \bar{r}$ / rys. 2.1.1 /;

- promień krzywizny R w danym punkcie jako promień koła przechodzącego przez trzy punkty o kolejnych argumentach całkowitych / rys. 2.1.1 /.

Podobnie jak i w geometrii różniczkowej, promień krzywizny jest odwrotnością krzywizny:

$$R = \frac{1}{k} .$$

/ 2.1.10 /

Nie trudno ponadto zauważyć, że gdy wielkość h maleje do zera, to krzywizna przechodzi w granicy w wielkość krzywizny zdefiniowaną w geometrii różniczkowej [48], a mianowicie:

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_\alpha \chi}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta_\alpha \chi}{2}}{h} .$$

/ 2.1.11 /

Wprowadźmy obecnie w dowolnym punkcie naszego zbioru Z trójkę jednostkowych wektorów: \bar{t} , \bar{i} i \bar{n} , mających następujące kierunki:

- \bar{t} - stycznej do zbioru w danym punkcie,
- \bar{i} - normalnej do zbioru w danym punkcie,
- \bar{n} - iloczynu wektorowego $\bar{t} \times \bar{i}$.

Z pomocą tych wektorów możemy zdefiniować dowolne wektory będące funkcjami położenia poszczególnych punktów. Jednakże znajdowanie sum i przyrostów dowolnych wektorów związane jest z koniecznością określenia sum i różnic wektorów jednostkowych. Rozpatrzmy więc kolejno te przyrosty i sumy dla przy argumentach całkowitych i połówkowych, oznaczając:

$$|\Delta_\alpha \bar{r}|^2 = A^2; |\nabla_\alpha \bar{r} - 2\bar{r}| = B^2 = \left(\frac{h^2}{2R}\right)^2; \bar{t} = \frac{1}{A} \Delta_\alpha \bar{r} .$$

$$\bar{n} = \bar{t} \times \bar{i}$$

/ 2.1.12 /

Na podstawie związków 2 1 3 ze str. 15 otrzymamy:

$$\Delta_\alpha \bar{t} = -\frac{h}{R} \cdot \bar{n}; \quad \nabla_\alpha \bar{t} = 2 \frac{A}{h} \bar{t}; \quad \nabla_\alpha \bar{n} = 2 \frac{A}{h} \cdot \bar{n}$$

$$\Delta_\alpha \bar{n} = \frac{1}{2} [\dot{\Delta}_\alpha \bar{t} \times \nabla_\alpha \bar{t} + \nabla_\alpha \bar{t} \times \Delta_\alpha \bar{t}] = \frac{h}{R} \bar{t}. \quad / 2.1.13 /$$

Jak wynika z powyższych zależności, przyrost $\Delta \bar{t}$ jest wektorem współliniowym z \bar{n} / rys. 2.1.2 /, natomiast wektory $\nabla \bar{t}$ i $\nabla \bar{n}$ są współliniowe odpowiednio \bar{t} i \bar{n} . Należy zwrócić uwagę, że powyższe spostrzeżenia nie dotyczą przyrostów i sum wektorów jednostkowych w punktach o argumentach położkowych.

2.2. Powierzchniowy zbiór punktów.

Biorąc za punkt wyjścia rozważania w 2.1 przystąpimy obecnie do zbadania dwuwskaźnikowego, powierzchniowego zbioru punktów.

Rozpatrzmy w tym celu jednojednoznaczna funkcję, odwzorowującą zbiór X^2 , będący iloczynem kartezjańskim $X \times X$ zbioru X określonego w 2.1., w zbiór Y wektorów \bar{r} o wspólnym początku / rys. 2.2.1/.

Zbiór Z^2 punktów będących końcami tych wektorów nazwiemy dwuwskaźnikowym zbiorem punktów. W zbiorze X^2 parę uporządkowaną złożoną z liczb całkowitych oznaczmy $\{\alpha, \beta\}$.

W dalszym ciągu będziemy się zajmować jedynie zbiorami dwuwskaźnikowymi o następujących własnościach:

$$|\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{r}| = h_1 = \text{const} \quad a/$$

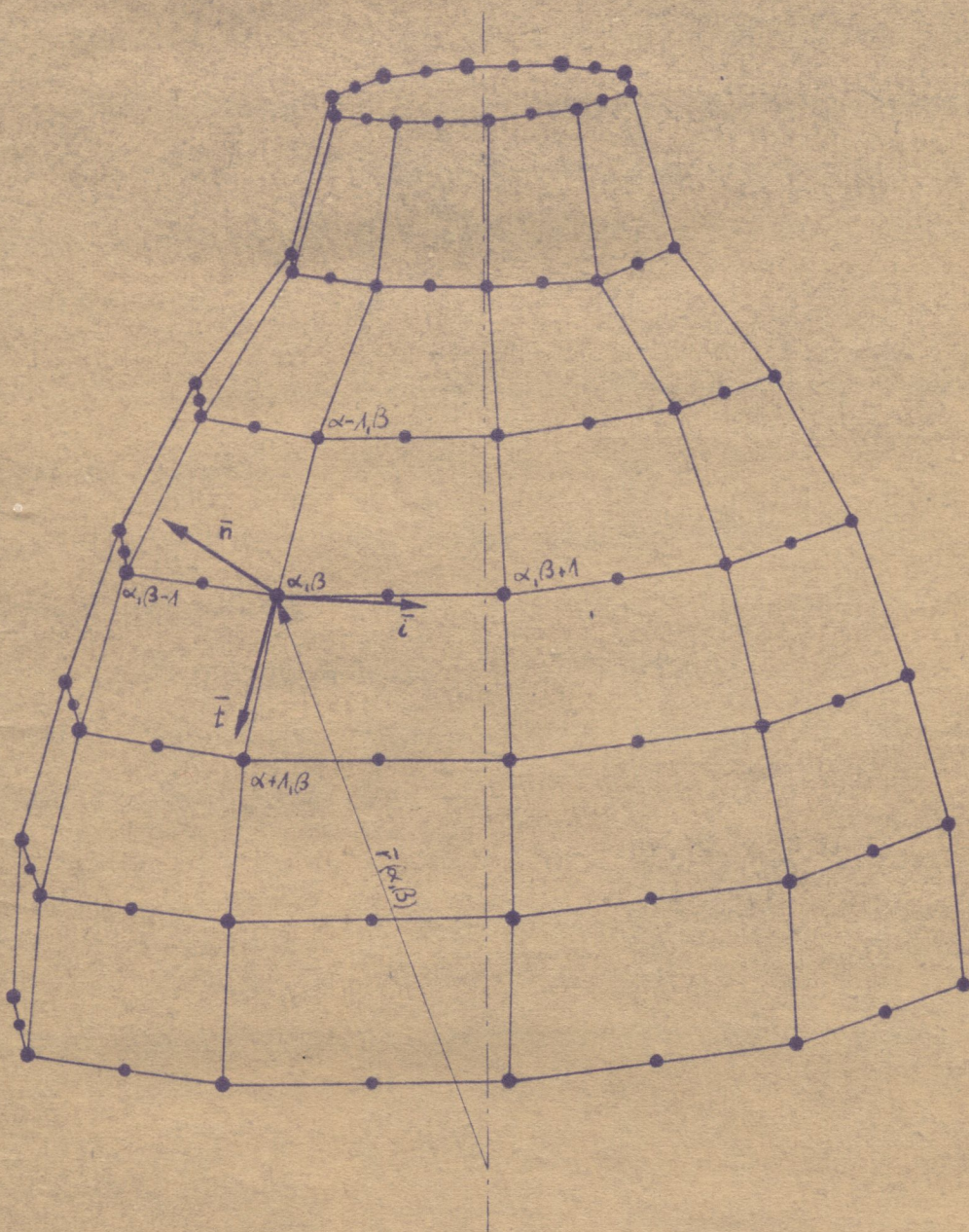
$$|\Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{r}| = h = \text{const}, \quad \Delta_\beta \bar{r} = A_2 = \text{const} \quad b/$$

$$\nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} - 2r_{\alpha \pm \frac{1}{2}} = 0 \quad \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} - 2r_{\beta \pm \frac{1}{2}} = 0 \quad c/ / 2.2.1 /$$

$$\Delta_\alpha [\Delta_\alpha \bar{r} \times \Delta_\alpha^2 \bar{r}] = 0; \quad \Delta_\beta [\Delta_\beta \bar{r} \times \Delta_\beta^2 \bar{r}] = 0 \quad d/$$

$$\Delta_p \bar{r} \cdot \Delta_\alpha \bar{r} = 0$$

e / / 2.2.1 /



rys. 2.2.1

Związek / 2.2.1.a / oznacza, że odległości pomiędzy punktami siatki przy dowolnym, ustalonym β i zmiennym α są stałe i równe h_1 . Związki / 2.2.1.b / oznaczają, że odległości pomiędzy punktami przy stałym α i zmiennym β są stałe, a same punkty leżą w wierzchołkach lub środkach boków wielokątów foremnych.

Ze związków / 2.2.1. c / wynika, że punkty wyznaczone końcem wektora \bar{r} przy argumentach połówkowych znajdują się w połowie odległości pomiędzy punktami o kolejnych argumentach całkowitych.

Związki / 2.2.1. d / oznaczają, że zbiory punktów o stałym β lub odpowiednio stałym α leżą na jednej wspólnej płaszczyźnie. I wreszcie związek / 2.2.1. e / oznacza, że płaszczyzny przy stałym α i stałym β są nawzajem prostopadłe. Reasumując, rozpatrywane przez nas zbiory mają co najmniej jedną oś symetrii prostopadłą do płaszczyzny $\alpha = \text{const.}$

2.2.1. Wektory jednostkowe i działania na d nim i.

Wszystkie wektory będące funkcjami położenia punktu rozpatrywanego zbioru będziemy zadawać w rzutach na kierunki styczne i normalny do zbioru w danym punkcie. / rys. 2.2.1. /.

Przez kierunki styczne będziemy rozumieli kierunki zgodne z wektorami jednostkowymi:

$$\bar{t} = \frac{1}{A_1} \Delta_\alpha \bar{r}; \quad \bar{i} = \frac{1}{A_2} \Delta_\beta \bar{r}, \quad / 2.2.2 /$$

a kierunek normalny zgodny z kierunkiem wektora jednostkowego:

$$\bar{n} = \bar{t} \times \bar{i}. \quad / 2.2.3 /$$

Wielkości A_1 , A_2 jak i później stosowane B_1 , B_2 wyznaczamy z następujących związków:

$$|\Delta_\alpha \bar{r}|^2 = A_1^2, \quad |\Delta_\beta \bar{r}|^2 = A_2^2$$

$$|\nabla_\alpha \bar{r} - 2\bar{r}|^2 = B_1^2 = \left(\frac{h_1^2}{2R_1}\right)^2; \quad |\nabla_\beta \bar{r} - 2\bar{r}|^2 = B_2^2 = \left(\frac{h_2^2}{2r_2}\right)^2 \quad / 2.2.4 /$$

Wielkości R_1 i r_2 są promieniami krzywizny płaskich siatek i zostały zdefiniowane w punkcie 2.1.

Szukanie wszelkich przyrostów i sum dowolnych wektorów będących funkcjami położenia punktu zbioru, związane jest z uprzednim wyznaczeniem przyrostów i sum wektorów jednostkowych \bar{t} , \bar{l} , \bar{n} . Dlatego też rozpatrzmy poniżej przyrosty i sumy tych wektorów, kolejno dla punktów o argumentach całkowitych i połówkowych.

Wektor \bar{t} . Ze względu na symetrię obrotową rzut przyrostu tego wektora na kierunek \bar{l} równy będzie zeru. Na podstawie definicji podanych w 2.1 rzut tegoż przyrostu na kierunek \bar{t} również jest równy zeru. I wreszcie na podstawie tychże samych definicji rzut na kierunek normalnej wyniesie:

$$\Delta_\alpha \bar{t} = -\frac{h_1}{R_1} \cdot \bar{n}. \quad / 2.2.5 /$$

Podobnie na podstawie związków z 2.1. możemy określić rzuty sumy $\nabla_\alpha \bar{t}$:

$$\nabla_\alpha \bar{t} = 2 \frac{A_1}{h_1} \cdot \bar{t}. \quad / 2.2.6 /$$

Na pozostałe osie rzuty tego wektora są równe zeru.

Rozpatrzmy z kolei przyrost i sumę tegoż wektora przy zmiennej β . Ze względu na obrotową symetrię przyrost ma tylko jedną składową w kierunku osi \bar{l} . W tym celu rozpatrzmy tożsamość:

$$\Delta_\beta (\Delta_\alpha \bar{r}) = \Delta_\alpha (\Delta_\beta \bar{r}) \quad / 2.2.7 /$$

lub

$$\Delta_{\beta} (A_1 \cdot \bar{t}) = \Delta_{\alpha} (A_2 \cdot \bar{i})$$

po zróżnicowaniu ostatniej równości stronami otrzymamy:

$$\Delta_{\beta} A_1 \cdot \nabla_{\beta} \bar{t} + \nabla_{\beta} A_1 \cdot \Delta_{\beta} \bar{t} = \Delta_{\alpha} A_2 \nabla_{\alpha} \bar{i} + \nabla_{\alpha} A_2 \cdot \Delta_{\alpha} \bar{i}. \quad / 2.2.8 /$$

Ze względu na symetrię $\Delta_{\beta} A_1 = 0$ jak i $\Delta_{\alpha} \bar{i} = 0$. Tak więc po przekształceniach otrzymamy:

$$\Delta_{\beta} \bar{t} = 2 \frac{\Delta_{\alpha} A_2}{\nabla_{\beta} A_1} \cdot \bar{i} \quad / 2.2.9 /$$

Przy przejściu do granicy, przy jednoczesnym podzieleniu przez element łuku, otrzymamy znaną zależność z teorii powierzchni [48] :

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial \beta} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} \cdot \bar{i}$$

Z kolei przejdźmy do wyznaczenia składowych sumy $\nabla_{\beta} \bar{t}$.

Ze względu na obrotową symetrię wielkość ta ma składowe wyłącznie w kierunkach \bar{t} i \bar{n} . Rzut na oś \bar{n} jest widoczny bezpośrednio z rys. 2.2.2. i wynosi:

$$\cdot (\nabla_{\beta} \bar{t})_n = -2 \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{\nabla_{\beta} A_1} \cdot \sin \frac{\chi_2}{2} \cdot \cos \delta \quad / 2.2.10 /$$

zależność tę można przekształcić pamiętając że:

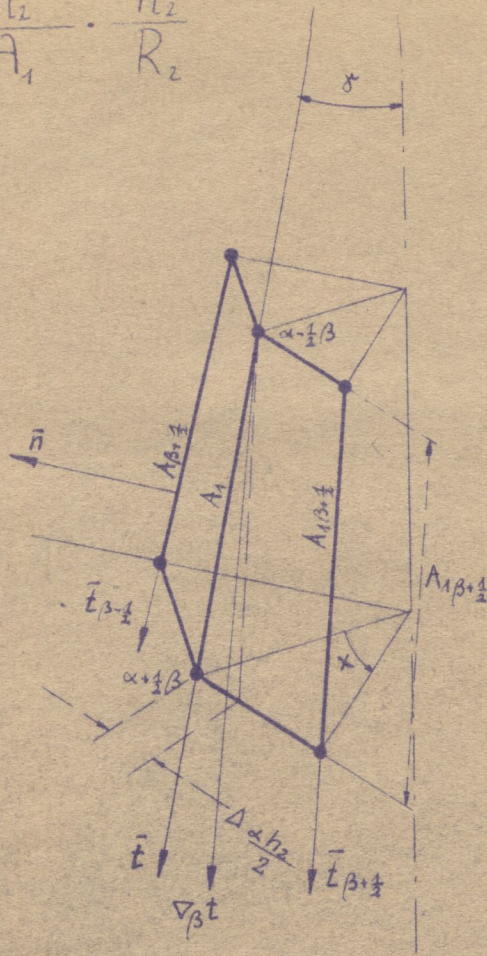
$$\sin \frac{\chi_2}{2} = \frac{h_2}{2r_2}$$

oraz wprowadzając oznaczenia:

$$\cos \delta = \frac{r_2}{R_2} \quad / 2.2.11 /$$

$$(\nabla_3 \bar{t})_n = - \frac{\Delta \alpha h_2}{\nabla_3 A_1} \cdot \frac{h_2}{R_2}$$

/ 2.2.12 /



rys. 2.2.2.

Z tegoż rysunku 2.2.2. otrzymamy rzut szukanego wektora na oś \bar{t} :

$$(\nabla_3 \bar{t})_t = \frac{4 A_1}{\nabla_3 A_1} - 2 \frac{\Delta \alpha h_2}{\nabla_3 A_1} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \delta.$$

/ 2.2.13 /

Z rys. 2.2.3 znajdujemy :

$$\sin \delta = \frac{\Delta \alpha h_2}{A_1},$$

/ 2.2.14 /

a po podstawieniu w / 2.2.13 / otrzymamy :

$$(\nabla_3 \bar{t})_t = \frac{4}{A_1 \nabla_3 A_1} \left[A_1^2 - \frac{(\Delta \alpha h_2)^2}{4} \right] \cdot \bar{t}.$$

/ 2.2.15 /

Ponieważ jednak :

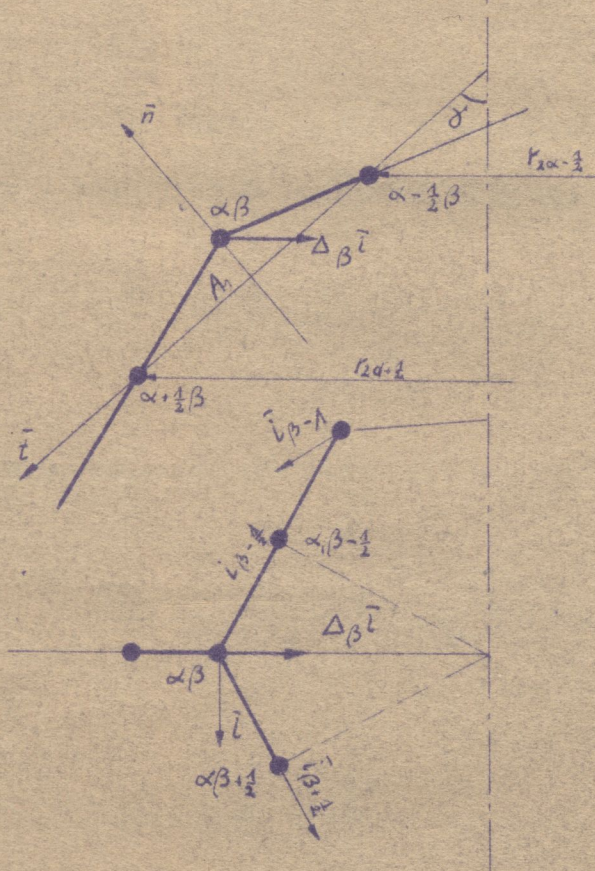
$$A_1^2 = \frac{(\Delta_\beta h_2)^2}{4} = \frac{(\nabla_\beta A_1)^2}{4}$$

/ 2.2.16 /

Otrzymamy ostatecznie:

$$(\nabla_\beta \bar{t})_t = \frac{\nabla_\beta A_1}{A_1}$$

/ 2.2.17 /



rys. 2.2.3.

Wektor \bar{i} . Ze względu na ośrodkową symetrię i ortogonalność płaszczyzn dla $\alpha = \text{const}$ i $\beta = \text{const}$ od razu otrzymamy:

$$\Delta_\alpha \bar{i} = 0, \quad \nabla_\alpha \bar{i} = 2\bar{i}, \quad \nabla_\beta \bar{i} = \frac{2A_2}{h_2}$$

/ 2.2.18 /

Składowe wektora $\Delta_\beta \bar{i}$ można łatwo wyznaczyć bezpośrednio z rys. 2.2.3 pamiętając, że sam wektor jest prostopadły do osi \bar{i} . I tak mamy:

$$\Delta_\beta \bar{i} = \frac{h_2}{r_2} \sin \delta \cdot \bar{t} - \frac{h_2}{r_2} \cos \delta \cdot \bar{n},$$

/ 2.2.19 /

ponieważ jednak: $\sin \delta = \frac{\Delta_\alpha r_2}{A_1}$, $\cos \delta = \frac{r_2}{R_2}$

to po przekształceniach otrzymamy:

$$\Delta_\beta \bar{i} = - \frac{\Delta_\alpha h_2}{A_1} \cdot \bar{t} - \frac{h_2}{R_2} \cdot \bar{n}. \quad / 2.2.20 /$$

Wektor \bar{n} . Wielkości rzutów \bar{t} i \bar{n} i różnic dla tego wektora otrzymany z definicji:

$$\bar{n} = \bar{t} \times \bar{i}$$

Po podstawieniu znalezionych uprzednio wielkości i po przekształceniach otrzymany odpowiednie zależności dla zmiennej α :

$$\Delta_\alpha \bar{n} = \frac{h_2}{R_1} \cdot \bar{t}; \quad \nabla_\alpha \bar{n} = 2 \frac{A_2}{h_1} \cdot \bar{n}. \quad / 2.2.21 /$$

Bardziej złożone są przekształcenia dla przyrostu i sumy względem β .

I tak:

$$\Delta_\beta \bar{n} = \frac{h_2}{2R_2 A_1 \nabla_\beta A_1} [(\nabla_\beta A_1)^2 + (\Delta_\alpha h_2)^2]$$

ponieważ zaś:

$$(\nabla_\beta A_1)^2 + (\Delta_\alpha h_2)^2 = 4A_1^2$$

otrzymamy ostatecznie:

$$\Delta_\beta \bar{n} = 2 \frac{A_1 \cdot h_2}{\nabla_\beta A_1 \cdot R_2} \cdot \bar{i}. \quad / 2.2.22 /$$

Z kolei

$$\nabla_\beta \bar{n} = \frac{1}{R_2 \nabla_\beta A_1} (A_2 \Delta_\alpha h_2 - h_2 \Delta_\alpha A_2) \bar{t} + \frac{A_2 (\nabla_\beta A_1)^2 + \Delta_\alpha A_2 \cdot h_2 \cdot \Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1 \cdot A_1 \cdot h_2} \cdot \bar{n}$$

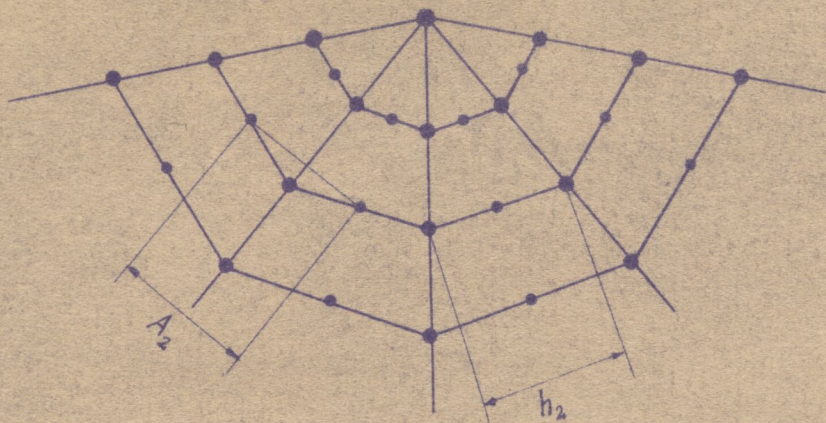
ponieważ jednak z obrotowej symetrii wynika, że / rys. 2.2.4. /

$$A_2 \Delta_\alpha h_2 = h_2 \Delta_\alpha A_2$$

otrzymamy ostatecznie:

$$\nabla_{\beta} \bar{n} = 4 \frac{A_1 \cdot A_2}{h_2 \nabla_{\beta} A_1} \cdot \bar{n}$$

/ 2.2.23 /



rys. 2.2.4.

Pozostaje jeszcze wyznaczyć przyrosty i sumy wektorów jednostkowych przy $a_n = \alpha \pm \frac{1}{2}$ i $b_n = \beta \pm \frac{1}{2}$. Rozpoczniemy od wektora \bar{i} . Ze względu na symetrię obrotową otrzymujemy bezpośrednio:

$$\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{i} = 0; \quad \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{i} = 2 \bar{i}_{\alpha \pm \frac{1}{2}}; \quad \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{i} = 2 \frac{A_2}{h_2} \bar{i}_{\beta \pm \frac{1}{2}},$$

/ 2.2.25 /

natomiast z rys. 2.2.3. można wywnioskować, że:

$$\Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{i} = -\frac{h_2}{r_2} \sin \delta' \cdot \bar{t} - \frac{h_2}{r_2} \cos \delta' \cdot \bar{n}$$

/ 2.2.26. /

z tegoż rysunku wyznaczamy $\sin \delta'$ i $\cos \delta'$:

$$\sin \delta' = 2 \frac{A_2}{h_2} \frac{\Delta_{\alpha} r_2}{\nabla_{\beta} A_1}; \quad \cos \delta' = 2 \frac{A_1}{\nabla_{\beta} A_1} \cos \delta = 2 \frac{A_1}{\nabla_{\beta} A_1} \cdot \frac{r_2}{R_2}$$

po podstawieniu tych zależności do / 2.2.26 / otrzymamy:

$$\Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{i} = -2 \frac{A_2 \cdot \Delta_{\alpha} h_2}{h_2 \nabla_{\beta} A_1} \cdot \bar{t}_{\beta \pm \frac{1}{2}} - 2 \frac{A_1 \cdot h_2}{R_2 \nabla_{\beta} A_1} \cdot \bar{n}_{\beta \pm \frac{1}{2}}$$

/ 2.2.26a /

Wektor \bar{t} . Ze związków podstawowych w 2.1. jak i z

rys. 2.2.5. wynika bezpośrednio, że:

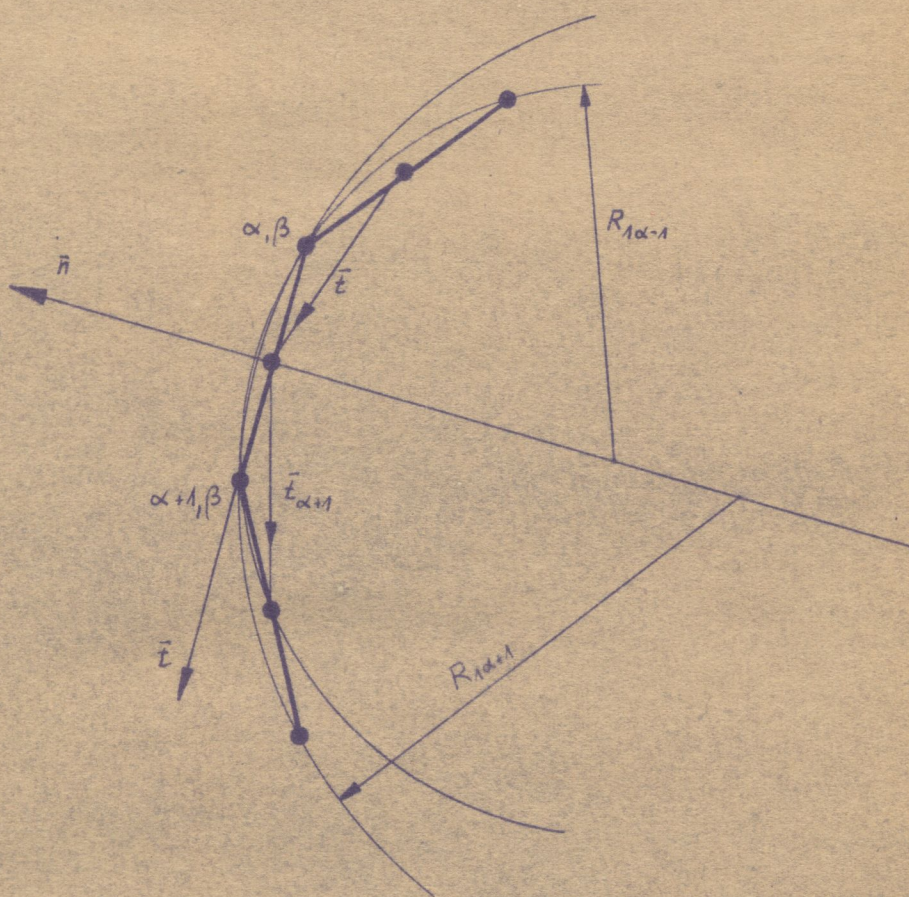
$$\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{t} = -\frac{h_1}{2} \cdot \nabla_{\alpha} \left(\frac{1}{R_1} \right) \cdot \bar{n}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} + \Delta_{\alpha} \left(\frac{A_1}{h_1} \right) \cdot \bar{t}_{\alpha \pm \frac{1}{2}}$$

/ 2.2.27 /

$$\nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{t} = \nabla_{\alpha} \left(\frac{A_1}{h_1} \right) \cdot \bar{t}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} - \frac{h_1}{2} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R_1} \right) \cdot \bar{n}_{\alpha \pm \frac{1}{2}}$$

/ 2.2.28 /

a z rys. 2.2.6

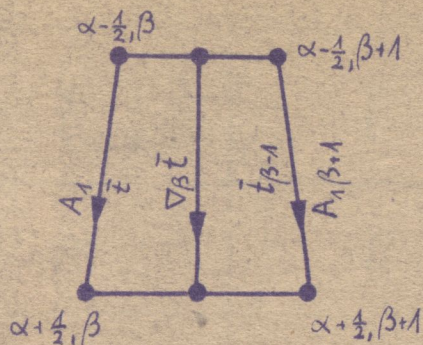


rys. 2.2.5.

$$\Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{t} = \frac{\Delta_{\beta} h_1}{A_1} \cdot \bar{t}_{\beta \pm \frac{1}{2}}; \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{t} = \frac{\nabla_{\beta} A_1}{A_1} \cdot \bar{t}_{\beta \pm \frac{1}{2}}$$

/ 2.2.29 /

Wektor \bar{n} . Odpowiednie wielkości dla \bar{n} uzyskamy jak i poprzednio i iloczynu wektorowego $\bar{t} \times \bar{l}$:



rys. 2.2.6.

$$\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{n} = \frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha} \left(\frac{1}{R_1} \right) \bar{t}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} + \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha} A_1 \cdot \bar{n}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \quad / 2.2.30 /$$

$$\nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{n} = \frac{1}{h_1} \nabla_{\alpha} A_1 \cdot \bar{n}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} + \frac{h_1}{2} \Delta_{\alpha} \left(\frac{1}{R_1} \right) \cdot \bar{t}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \quad / 2.2.31 /$$

$$\Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{n} = \frac{h_2}{R_2} \cdot \bar{i} \quad / 2.2.32 /$$

$$\nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{n} = - \frac{h_2 \Delta_{\alpha} h_2}{R_2 \nabla_{\beta} A_1} \cdot \bar{t}_{\beta \pm \frac{1}{2}} \frac{4 A_1 A_2}{h_2 \nabla_{\beta} A_1} \bar{n}_{\beta \pm \frac{1}{2}} \quad / 2.2.33 /$$

Jak już wspomnieliśmy, powyższe zależności / zestawione w tabelach 2.2.1 i 2.2.2 / umożliwiają znajdowanie przyrostów i sum wektorów w dowolnym punkcie siatki. Nie mniej jednak ze wzorów tych nie wynikają związki pomiędzy parametrami powierzchni takimi jak A_1 , A_2 i promieniami krzywizny R_1 i R_2 . Zależności te można otrzymać z podobnego rozumowania jak i w geometrii różniczkowej. Ważny w tym celu drugi, mieszany przyrost wektora \bar{n} :

Tabela 2.2.1.

	\bar{t}	\bar{i}	\bar{n}
$\Delta_{\alpha} \bar{t}$	0	0	$-\frac{h_1}{R_1}$
$\nabla_{\alpha} \bar{t}$	$2 \frac{A_1}{h_1}$	0	0
$\Delta_{\beta} \bar{t}$	0	$2 \frac{\Delta_{\alpha} A_2}{\nabla_{\beta} A_1}$	0
$\nabla_{\beta} \bar{t}$	$\frac{\nabla_{\beta} A_1}{A_1}$	0	$-\frac{h_2}{R_2} \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{\nabla_{\beta} A_1}$
$\Delta_{\alpha} \bar{i}$	0	0	0
$\nabla_{\alpha} \bar{i}$	0	$2i$	0
$\Delta_{\beta} \bar{i}$	$-\frac{\Delta_{\alpha} h_2}{A_1}$	0	$-\frac{h_2}{R_2}$
$\nabla_{\beta} \bar{i}$	0	$2 \frac{A_2}{h_2}$	0
$\Delta_{\alpha} \bar{n}$	$\frac{h_1}{R_1}$	0	0
$\nabla_{\alpha} \bar{n}$	0	0	$2 \frac{A_1}{h_1}$
$\Delta_{\beta} \bar{n}$	0	$2 \frac{A_1 h_2}{\nabla_{\beta} A_1 \cdot R_2}$	0
$\nabla_{\beta} \bar{n}$	0	0	$4 \frac{A_2}{h_2} \frac{A_1}{\nabla_{\beta} A_1}$

Tabela 2.2.2.

	\bar{t}	\bar{l}	\bar{n}
$\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{t}$	$\frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} A_1$	0	$-\frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R_1} \right)$
$\nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{t}$	$\frac{1}{h_1} \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} A_1$	0	$-\frac{h_1}{2} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R_1} \right)$
$\Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{t}$	0	$\frac{\Delta_{\alpha} h_2}{A_1}$	0
$\nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{t}$	$\frac{\nabla_{\beta} A_1}{A_1}$	0	0
$\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{l}$	0	0	0
$\nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{l}$	0	$2 i_{\alpha \pm \frac{1}{2}}$	0
$\Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{l}$	$-2 \frac{A_2}{h_2} \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{\nabla_{\beta} A_1}$	0	$-2 \frac{h_2}{R_2} \frac{A_1}{\nabla_{\beta} A_1}$
$\nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{l}$	0	$2 \frac{A_2}{h_2}$	0
$\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{n}$	$\frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R_1} \right)$	0	$\frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} A_1$
$\nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{n}$	$\frac{h_1}{2} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R_1} \right)$	0	$\frac{1}{h_1} \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} (A_1)$
$\Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{n}$	0	$\frac{h_2}{R_2}$	0
$\nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{n}$	$-\frac{h_2}{R_2} \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{\nabla_{\beta} A_1}$	0	$4 \frac{A_1 A_2}{h_2 \nabla_{\beta} A_1}$

$$\Delta_3(\Delta_\alpha \bar{n}) = \Delta_\alpha(\Delta_\beta \bar{n})$$

Wstawiając za $\Delta_\alpha \bar{n}$ i $\Delta_\beta \bar{n}$ wyrażenia / 2.2.21 / i / 2.2.22 / otrzymamy

$$\Delta_\beta \left(\frac{h_1}{R_1} \cdot \bar{t} \right) = 2 \Delta_\alpha \left(\frac{A_1 \cdot h_2}{R_2 \cdot \nabla_\beta A_1} \cdot \bar{l} \right)$$

a po przekształceniach:

$$\Delta_\beta \left(\frac{h_1}{R_1} \right) \cdot \frac{\nabla_\beta A_1}{A_1} \cdot \bar{t} + 2 \left[\frac{\Delta_\alpha A_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta \left(\frac{h_1}{R_1} \right) - 2 \Delta_\alpha \frac{A_1 \cdot h_2}{\nabla_\beta A_1 \cdot R_2} \right] \cdot \bar{l}$$

$$- \frac{h_1 \cdot \Delta_\alpha h_2}{R_2 \cdot \nabla_\beta A_1} \cdot \Delta_\beta \frac{h_1}{R_1} \cdot \bar{n} = 0 \quad / 2.2.34 /$$

Z równości tej wynika, że poszczególne składowe w kierunku \bar{t} , \bar{l} i \bar{n} są równe zero. Pierwsza i druga są równe zero tożsamościowo gdyż ze względu na symetrię obrotową:

$$\Delta_\beta \left(\frac{h_1}{R_1} \right) = 0$$

Z przyrównania współczynników przy \bar{l} otrzymamy zależność wiążącą ze sobą wielkości A_1 , A_2 , h_1 , h_2 , R_1 , R_2 :

$$\frac{\Delta_\alpha A_2}{\nabla_\beta A_1} \cdot \nabla_\beta \left(\frac{h_1}{R_1} \right) = 2 \Delta_\alpha \frac{A_1 \cdot h_2}{\nabla_\beta A_1 \cdot R_2} \quad / 2.2.35 /$$

Nie trudno wykazać, że przy przejściu do granicy otrzymamy znany związek Codazzi dla powierzchni obrotowej / patrz np. [48] / :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}$$

Rozpatrzmy z kolei tożsamość:

$$\Delta_\alpha \Delta_\beta \bar{t} = \Delta_\beta \Delta_\alpha \bar{t}$$

Wstawiając za $\Delta_\rho \bar{t}$ i $\Delta_\alpha \bar{t}$ zależności / 2.2.5 / otrzymamy:

$$\Delta_\alpha \left(2 \frac{\Delta_\alpha A_2}{\nabla_\rho A_1} \cdot \bar{i} \right) = \Delta_\rho \left(- \frac{h_1}{R_1} \cdot \bar{n} \right) \quad / 2.2.36 /$$

a po przekształceniach:

$$2 \Delta_\alpha \left(\frac{\Delta_\alpha A_2}{\nabla_\rho A_1} \right) = - \frac{1}{2} \frac{\nabla_\rho h_1 \cdot \nabla_\rho R_1 \cdot A_1 \cdot h_2}{R_1 \cdot \nabla_\rho A_1} \cdot \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \quad / 2.2.37 /$$

Jak i poprzednio tak i teraz nie trudno się przekonać, że wyrażenie to w granicy przechodzi do znanego z teorii powierzchni [49] związku Gaussa dla powierzchni obrotowej.

2.2.2. Geometria zbioru odkształconego.

Przyjmijmy jak i w poprzednich rozdziałach, że punkty zbioru określone są współrzędnymi α i β . Ponadto przyjmijmy, że dowolny punkt naszego zbioru doznał przemieszczenia \bar{u} i oprotu $\bar{\Omega}$ jako funkcji tychże współrzędnych α i β . Rozłożmy teraz nasze przemieszczenie \bar{u} na trzy podstawowe kierunki zgodne z kierunkami wektorów jednostkowych \bar{t} , \bar{i} i \bar{n} . W rezultacie tego nowe położenie punktu wyznaczone zostanie końcem wektora \bar{s} będącego sumą wektorową:

$$\bar{s} = \bar{r} + \bar{u} = \bar{r} + u \cdot \bar{t} + v \cdot \bar{i} + w \cdot \bar{n} \quad / 2.2.38 /$$

i przemieszczeniem kątowym w postaci wektora $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega} = \psi \cdot \bar{t} + \varphi \cdot \bar{i} + \gamma \cdot \bar{n} \quad / 2.2.38a /$$

Rozpatrzmy teraz wektor $\frac{1}{A_1} \Delta_\alpha \bar{s}$. Po zróżnicowaniu prawej strony równania / 2.2.38 / i wstawieniu za przyrosty i sumy wektorów jednostkowych poprzednio wyznaczone wielkości / tabela 2.2.1 /, otrzymamy:

$$\frac{1}{A_1} \Delta_\alpha \bar{s} = \left[1 + \frac{\Delta_\alpha u}{h_1} + \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\alpha w}{h_1} \right] \cdot \bar{t} + \frac{\Delta_\alpha v}{A_1} \cdot \bar{i} + \left[\frac{\Delta_\alpha w}{h_1} - \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\alpha u}{h_1} \right] \cdot \bar{n} \quad / 2.2.39 /$$

Jeżeli oznaczymy podobnie jak w teorii powłok [46] :

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\Delta_\alpha u}{h_1} + \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\alpha W}{h_1} \right) \quad \omega_1 = \frac{\Delta_\alpha V}{A_1} \quad / 2.2.40 /$$

$$-v_1^g = \left(\frac{\Delta_\alpha W}{h_1} - \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\alpha u}{h_1} \right)$$

to otrzymamy:

$$\frac{1}{A_1} \Delta_\alpha \bar{S} = (1 + \varepsilon_1) \bar{t} + \omega_1 \bar{i} - v_1^g \cdot \bar{n} \quad / 2.2.41 /$$

Podobnie możemy wyznaczyć względny przyrost wektora

przy zmiennym β . Rozumując jak poprzednio otrzymamy po przekształceniach:

$$\frac{1}{A_1} \Delta_\beta \bar{S} = \omega_2 \bar{t} + (1 + \varepsilon_2) \cdot \bar{i} - v_2^g \bar{n} \quad / 2.2.42 /$$

gdzie:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta_\beta A_2}{\nabla_\beta A_1} \frac{\nabla_\beta u}{A_2} + \frac{1}{h_2} \Delta_\beta V + \frac{A_1 h_2}{A_2 R_2 \nabla_\beta A_1} \nabla_\beta W \quad / 2.2.43 /$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \frac{\nabla_\beta A_1}{A_1 A_2} \Delta_\beta u - \frac{1}{2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{A_1 A_2} \nabla_\beta V \quad / 2.2.44 /$$

$$-v_2^g = -\frac{B_2 \Delta_\alpha h_2}{A_2 h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta u - \frac{B_2}{A_2 h_2} \nabla_\beta V + 2 \frac{A_1}{h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta W \quad / 2.2.45 /$$

Obecnie wyznaczmy przyrosty wektora \bar{S} przy argumentach połowkowych, a więc:

$$\Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \bar{S} \quad i \quad \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \bar{S}$$

Sposób postępowania jest identyczny jak i wyżej. Dlatego ponijając przekształcenie napiszemy:



$$\frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{S} = [1 + \varepsilon_{\alpha \pm \frac{1}{2}}] + \omega_{\alpha \pm \frac{1}{2}} - \psi_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \quad / 2.2.46 /$$

gdzie:

$$\varepsilon_{\alpha \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} (A u) + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{W}{R_1} \right) \quad / 2.2.47 /$$

$$\omega_{\alpha \pm \frac{1}{2}} = \frac{\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} U}{h_1} \quad / 2.2.48 /$$

$$-\psi_{\alpha \pm \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{U}{R_1} \right) + \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} (A_1 W) \quad / 2.2.49 /$$

Podobnie przy zmiennej β :

$$\frac{1}{h_1} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{S} = \omega_{\beta \pm \frac{1}{2}} + (1 + \varepsilon_{\beta \pm \frac{1}{2}}) - \psi_{\beta \pm \frac{1}{2}} \quad / 2.2.50 /$$

gdzie:

$$\varepsilon_{2\beta \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} U \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{h_1 A_1} + \frac{A_2}{h_2} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} U + \frac{A_2 \cdot \nabla_{\beta} A_1}{A_1 h_2 \nabla_{\beta} R_2} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} W \quad / 2.2.51 /$$

$$\omega_{2\beta \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\nabla_{\beta} A_1}{A_1 \cdot h_2} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} U - \frac{\Delta_{\alpha} A_2}{h_2 \nabla_{\beta} A_1} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} U - \frac{A_2 \Delta_{\alpha} h_2}{h_1 A_1 \nabla_{\beta} R_2} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} W \quad / 2.2.52 /$$

$$-\psi_{\alpha \pm \frac{1}{2}} = -\frac{A_2}{h_2 \nabla_{\beta} R_2} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} U + 2 \frac{A_1 \cdot A_2}{h_2 \nabla_{\beta} A_1} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} W \quad / 2.2.53 /$$

Wyznamy teraz wektory jednostkowe odkształconej siatki oznaczając je \bar{t}^* , \bar{i}^* , \bar{n}^* . Rozumując analogicznie jak w teorii powierzchni [46] dochodzimy do następujących zależności przy założeniu, że odkształcenia są małe:

$$A_1^* \cong A_1 (1 + \varepsilon_1) ; \quad A_2^* \cong A_2 (1 + \varepsilon_2) \quad / 2.2.54 /$$

$$\bar{t}^* \equiv \bar{t} + \omega_1 \bar{i} - \nu_1 \bar{n}$$

$$\bar{i}^* \equiv \omega_2 \bar{t} + \bar{i} - \nu_2 \bar{n}$$

/ 2.2.54 /

$$\bar{n}^* \equiv \nu_1 \bar{t} + \nu_2 \bar{i} + \bar{n}$$

Przy pomocy powyższych zależności możemy określić odkształcenie postaciowe ω siatki jako iloczyn skalarny:

$$\omega = \bar{t}^* \cdot \bar{i}^* = \omega_2 + \omega_1 + \nu_1 \nu_2$$

/ 2.2.55 /

Przy małych odkształceniach, pomijając iloczyn $\nu_1 \nu_2$ jako małą wielkość wyższego rzędu, otrzymamy ostatecznie:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

/ 2.2.56 /

Przy badaniu powłok prętowych konieczne jest posługiwanie się kątami obrotu węzłów siatki. Dlatego też zajmiemy się teraz znajdowaniem różnic i sum kątów obrotu dwu kolejnych punktów / węzłów / o argumentach będących dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi. Kąt $\bar{\Omega}$ został zdefiniowany wzorem / 2.2.39a /. Ponieważ rozumowanie w tych przypadkach jest podobne jak przy znajdowaniu odkształceń liniowych, dlatego też pominiemy przekształcenia zestawiając gotowe wzory:

$$\Delta_2 \bar{\Omega} = p_1 \bar{t} + q_1 \bar{i} + s_1 \bar{n}$$

/ 2.2.57 /

gdzie:

$$p_1 = \left(\Delta_2 \psi \cdot \frac{A_1}{h_1} + \nabla_2 \gamma \frac{B_1}{h_1} \right)$$

$$q_1 = \Delta_2 \psi$$

$$s_1 = \frac{A_1}{h_1} \Delta_2 \gamma - \frac{B_1}{h_1} \nabla_2 \psi$$

/ 2.2.58 /

$$\Delta_\beta \bar{\Omega} = q_\beta \bar{t} + p_\beta \bar{l} + s_\beta \bar{n}$$

/ 2.2.59 /

gdzie:

$$p_\beta = \left(\frac{\Delta_\alpha A_\alpha}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta \Psi + \Delta_\beta \Psi + \nabla_\beta \delta \frac{A_1 h_2}{R_2 \nabla_\beta A_1} \right)$$

$$q_\beta = \frac{1}{2} \Delta_\beta \Psi \cdot \frac{\nabla_\beta A_1}{A_1} - \frac{\Delta_\alpha h_2}{A_1} \nabla_\beta \Psi$$

/ 2.2.60 /

$$s_\beta = - \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \cdot \frac{B_\alpha}{h_2} \nabla_\beta \Psi - \frac{B_\alpha}{h_2} \nabla_\beta \Psi + 2 \frac{A_1 A_\alpha}{h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta \delta$$

$$\Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{\Omega} = p_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{t}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} + q_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{l}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} + s_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{n}_{\alpha \pm \frac{1}{2}}$$

/ 2.2.61 /

gdzie:

$$p_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} (\Psi \cdot A_1) + h_1 \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{\delta}{R_1} \right)$$

$$q_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} = \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \Psi$$

/ 2.2.62 /

$$s_1 = - \frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{\Psi}{R_1} \right) + \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} (A_1 \cdot \delta)$$

$$\Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{\Omega} = q_{2\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{t}_{\beta \pm \frac{1}{2}} + p_{2\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{l}_{\beta \pm \frac{1}{2}} + s_{2\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{n}_{\beta \pm \frac{1}{2}}$$

/ 2.2.63 /

gdzie:

$$P_{2p \pm \frac{1}{2}} = \frac{\Delta_x h_2}{2A_1} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \Psi + \frac{A_2}{h_2} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \Psi + \frac{h_2}{R_2} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \delta$$

$$Q_{2p \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\nabla_{\beta} A_1}{A_1} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \Psi - \frac{A_2 \Delta_x h_2}{h_2 \nabla_{\beta} A_1} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \Psi - \frac{h_2}{2R_2} \frac{\Delta_x h_2}{\nabla_{\beta} A_1} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \delta \quad / 2.2.64 /$$

$$S_{2p \pm \frac{1}{2}} = \frac{2A_1 A_2}{h_1 \nabla_{\beta} A_1} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \delta - \frac{h_2}{R_2} \frac{A_1}{\nabla_{\beta} A_1}$$

$$\nabla_x \Omega = p'_1 \bar{t} + q'_1 \bar{i} + s'_1 \bar{n}$$

/ 2.2.65 /

gdzie:

$$p'_1 = \frac{A_1}{h_1} \nabla_x \Psi + \frac{B_1}{h_1} \Delta_x \delta$$

/ 2.2.66 /

$$q'_1 = \nabla_x \Psi$$

$$s'_1 = -\frac{B_1}{h_1} \Delta_x \Psi + \frac{A_1}{h_1} \nabla_x \delta$$

$$\nabla_{\beta} \Omega = q'_2 \bar{t} + p'_2 \bar{i} + s'_2 \bar{n}$$

/ 2.2.67 /

gdzie:

$$p'_2 = \frac{\Delta_x A_2}{\nabla_{\beta} A_1} \Delta_x \Psi + \frac{A_2}{h_2} \nabla_{\beta} \Psi + \frac{A_1 h_2}{R_2 \nabla_{\beta} A_1} \Delta_{\beta} \delta$$

/ 2.2.68 /

$$q'_2 = \frac{\nabla_{\beta} A_1}{2A_1} \nabla_{\beta} \Psi - \frac{\Delta_x h_2}{2A_1} \Delta_{\beta} \Psi$$

$$S'_2 = -\frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta \Psi - \frac{B_2}{h_2} \Delta_\beta \Psi + 2 \frac{A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \nabla_\beta \delta.$$

$$\nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{\Omega} = p'_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{t}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} + q'_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{l}_{\alpha \pm \frac{1}{2}} + S'_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} \bar{n} \quad / 2.2.69 /$$

gdzie:

$$p'_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{h_1} \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} (A_1 \Psi) + \frac{h_1}{2} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{\delta}{R_1} \right)$$

$$q'_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} = \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \Psi \quad / 2.2.70 /$$

$$S'_{1\alpha \pm \frac{1}{2}} = -\frac{h_1}{2} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{\Psi}{R_1} \right) + \frac{1}{h_1} \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} (A_1 \delta).$$

$$\nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{\Omega} = q'_{2\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{t}_{\beta \pm \frac{1}{2}} + p'_{2\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{l}_{\beta \pm \frac{1}{2}} + S'_{2\beta \pm \frac{1}{2}} \bar{n} \quad / 2.2.71 /$$

gdzie:

$$p'_{2\beta \pm \frac{1}{2}} = \frac{\Delta_\alpha h_2}{2 A_1} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \Psi + \frac{A_2}{h_2} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \Psi + \frac{B_2}{h_2} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \delta$$

$$q'_{2\beta \pm \frac{1}{2}} = \frac{\nabla_\beta A_1}{2 A_1} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \Psi - \frac{A_2 \Delta_\alpha h_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} \Psi - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \delta \quad / 2.2.72 /$$

$$S'_{2\beta \pm \frac{1}{2}} = -2 \frac{B_2}{h_2} \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1} \Delta_{\beta \pm \frac{1}{2}} \Psi + 2 \frac{A_2}{h_2} \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1} \nabla_{\beta \pm \frac{1}{2}} \delta$$

III. OGÓLNE RÓWNANIA TEORII POWŁOK PRĘTOWYCH.

W rozdziale tym zestawimy wszystkie równania niezbędne do pełnej, statycznej analizy obrotowych powłok prętowych, zdefiniowanych we wstępie. Są nimi: równania równowagi elementu powłoki, równania wiążące związki geometryczne z funkcjami sił wewnętrznych i równania określające warunki brzegowe. Przy wyprowadzeniu wyżej wymienionych zależności będziemy korzystali ze związków geometrycznych podanych w poprzednim rozdziale.

3.1. Siły wewnętrzne.

Wytnijmy powtarzalny element d, β powłoki, dokonując cięć w płaszczyznach normalnych do powłoki w punktach $d + \frac{1}{2}\beta$; $d - \frac{1}{2}\beta$; $d, \beta + \frac{1}{2}$; $d, \beta - \frac{1}{2}$ / rys. 3.1.1. / . Przyjmijmy, że w dowolnym przekroju działają nieznanymi wektor siły wewnętrznej \bar{N} jak i nieznanymi wektor momentu wewnętrznego \bar{M} / rys. 3.1.1. - dla jasności na rysunku podano osobno siły i momenty / . Oznaczmy następująco składowe wektora siły rozłożonego na kierunki $\bar{t}, \bar{i}, \bar{n}$:

$$\bar{N}_1 = N_1 \bar{t} + T_1 \bar{i} + Q_1 \bar{n}$$

$$\bar{N}_2 = N_2 \bar{t} + T_2 \bar{i} + Q_2 \bar{n}$$

/3.1.1. /

Indeksy 1 i 2 odnoszą się odpowiednio do zmiennych α i β . Przyjmijmy ponadto te składowe sił i momentów za dodatnie, które mają zwroty zgodne z wektorami jednostkowymi $\bar{t}, \bar{i}, \bar{n}$, przy kierunku zewnętrznej normalnej do przekroju zgodnym ze wzrastającym α / odpowiednio β / . w przypadku gdy wspomniana normalna ma kierunek malejących wartości α / względnie β / , za dodatnie przyjmujemy te składowe, które mają zwroty przeciwne do zwrotów wektorów jednostkowych $\bar{t}, \bar{i}, \bar{n}$. Tak więc w dowolnym przekroju mamy trzy nieznanne składowe sił i trzy nieznanne składowe momentów, przy czym wszystkie sześć wielkości są odpowiednimi funkcjami α i β . W dalszym ciągu przyjmujemy za-

założenie, że wyżej wymienione siły i momenty są statycznie równoważne działającym w omawianych przekrojach naprężeniom, zgodnym z hipotezą płaskich przekrojów w teorii prętów cienkich.

3.2. Równania równowagi elementu.

Rozpatrzmy obecnie warunki równowagi wspomnianego w poprzednim punkcie elementu, obciążonego siłami wewnętrznymi i zewnętrznymi. Siły zewnętrzne w najogólniejszym przypadku można sprowadzić do trzech skupionych sił i trzech skupionych momentów działających w węźle elementu, a mających odpowiednio kierunki trzech wektorów jednostkowych \bar{t} , \bar{l} , \bar{n} . Oznaczmy je kolejno P_t , P_l , P_n , L_1 , L_2 , L_n . W przekroju o współrzędnych $d + \frac{1}{2}$, β przyłożmy wektor siły:

$$\bar{N}_{1d+\frac{1}{2}} = N_{1d+\frac{1}{2}} \bar{t}_{d+\frac{1}{2}} + T_{1d+\frac{1}{2}} \bar{l}_{d+\frac{1}{2}} + Q_{1d+\frac{1}{2}} \bar{n}_{d+\frac{1}{2}} \quad / 3.2.1. /$$

i momentu:

$$\bar{M}_{1d+\frac{1}{2}} = M_{1d+\frac{1}{2}} \bar{t}_{d+\frac{1}{2}} + G_{1d+\frac{1}{2}} \bar{l}_{d+\frac{1}{2}} + H_{1d+\frac{1}{2}} \bar{n}_{d+\frac{1}{2}} \quad / 3.2.2. /$$

W przekroju o współrzędnych $d - \frac{1}{2}$, β przyłożmy wektor siły:

$$-\bar{N}_{1d-\frac{1}{2}} = - \left(N_{1d-\frac{1}{2}} \bar{t}_{d-\frac{1}{2}} + T_{1d-\frac{1}{2}} \bar{l}_{d-\frac{1}{2}} + Q_{1d-\frac{1}{2}} \bar{n}_{d-\frac{1}{2}} \right) \quad / 3.2.3. /$$

i momentu:

$$-\bar{M}_{1d-\frac{1}{2}} = - \left(M_{1d-\frac{1}{2}} \bar{t}_{d-\frac{1}{2}} + G_{1d-\frac{1}{2}} \bar{l}_{d-\frac{1}{2}} + H_{1d-\frac{1}{2}} \bar{n}_{d-\frac{1}{2}} \right) \quad / 3.2.4. /$$

Odpowiednio przy zmiennym β będziemy mieli w punkcie $d, \beta + \frac{1}{2}$, siły:

$$\bar{N}_{2\beta+\frac{1}{2}} = N_{2\beta+\frac{1}{2}} \bar{t}_{\beta+\frac{1}{2}} + T_{2\beta+\frac{1}{2}} \bar{l}_{\beta+\frac{1}{2}} + Q_{2\beta+\frac{1}{2}} \bar{n}_{\beta+\frac{1}{2}} \quad / 3.2.5. /$$

i moment:

$$\bar{M}_{2\beta+\frac{1}{2}} = M_{2\beta+\frac{1}{2}} \cdot \bar{t}_{\beta+\frac{1}{2}} + G_{2\beta+\frac{1}{2}} \cdot \bar{l}_{\beta+\frac{1}{2}} + H_{2\beta+\frac{1}{2}} \cdot \bar{n}_{\beta+\frac{1}{2}} \quad / 3.2.6. /$$

a w punkcie o współrzędnych $\alpha, \beta - \frac{1}{2}$, siłę:

$$-\bar{N}_{2\beta-\frac{1}{2}} = -[N_{2\beta-\frac{1}{2}} \cdot \bar{t}_{\beta-\frac{1}{2}} + T_{2\beta-\frac{1}{2}} \cdot \bar{l}_{\beta-\frac{1}{2}} + Q_{2\beta-\frac{1}{2}} \cdot \bar{n}_{\beta-\frac{1}{2}}] \quad / 3.2.7. /$$

i moment:

$$-\bar{M}_{2\beta-\frac{1}{2}} = -[M_{2\beta-\frac{1}{2}} \cdot \bar{t}_{\beta-\frac{1}{2}} + G_{2\beta-\frac{1}{2}} \cdot \bar{l}_{\beta-\frac{1}{2}} + H_{2\beta-\frac{1}{2}} \cdot \bar{n}] \quad / 3.2.8. /$$

Ponadto w węzle elementu działają siły zewnętrzne o składowych:

$$\bar{P} = P_t \cdot \bar{t} + P_l \cdot \bar{l} + P_n \cdot \bar{n} \quad / 3.2.9. /$$

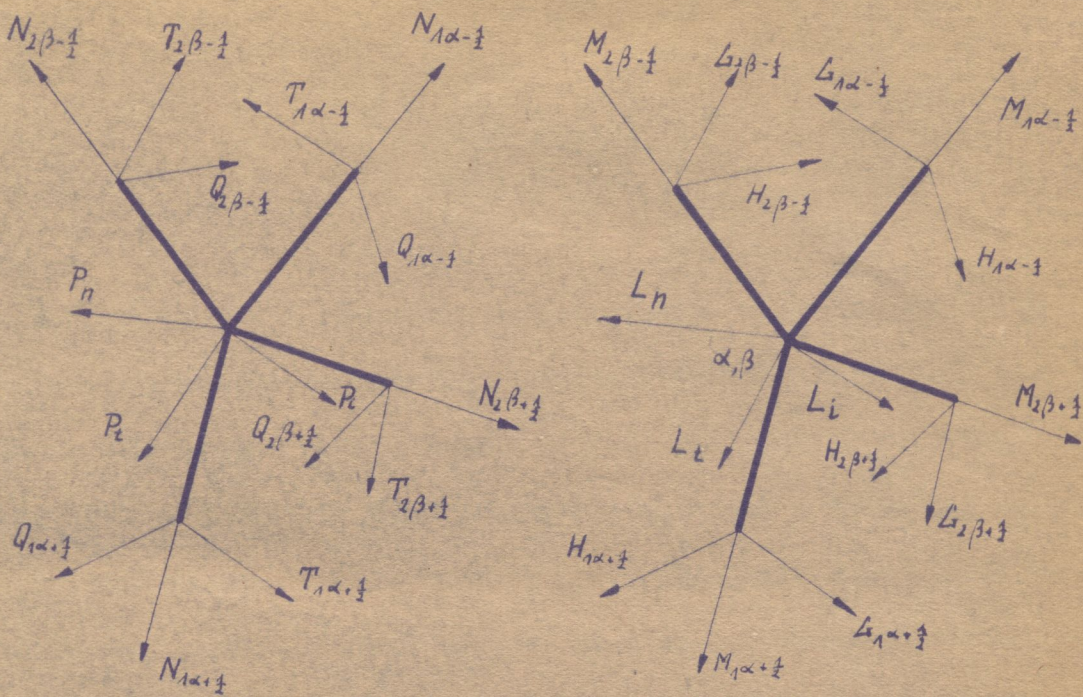
i momenty zewnętrzne:

$$\bar{L} = L_t \cdot \bar{t} + L_l \cdot \bar{l} + L_n \cdot \bar{n} \quad / 3.2.10. /$$

Pamiętając, że na przeciwległych przekrojach siły i momenty wewnętrzne mają zwroty dodatnie przeciwne, napiszmy wektorowe równanie równowagi sił rozważanego elementu:

$$\Delta_\alpha \bar{N}_1 + \Delta_\beta \bar{N}_2 + P_t \bar{t} + P_l \bar{l} + P_n \bar{n} = 0 \quad / 3.2.11. /$$

Podstawiając za \bar{N} zależność / 3.1.1 / i korzystając ze związków dotyczących działań na wektorach jednostkowych podanych w rozdziale 2, otrzymamy trzy równania równowagi wynikające z przyrównania do zera trzech składowych, wypadkowego wektora sił działającego na rozpatrywany element:



rys. 3.1.1.

$$\frac{A_c}{h_1} \Delta_\alpha N_1 + \frac{B_c}{h_1} \nabla_\alpha Q_1 - \frac{\Delta_\alpha h_c}{2A_1} \nabla_\beta N_2 + \frac{\nabla_\beta A_1}{2A_1} \Delta_\beta T_2 + P_t = 0$$

$$\Delta_\alpha T_1 + \frac{A_c}{h_2} \Delta_\beta N_2 + 2 \frac{B_c}{h_2} \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta Q_2 + \frac{\Delta_\alpha A_c}{\nabla_\beta A_1} \cdot \nabla_\beta T_2 +$$

$$+ P_i = 0$$

/ 3.2.12. /

$$- \frac{B_c}{h_1} \nabla_\alpha N_1 + \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha Q_1 - \frac{P_2}{h_2} \nabla_\beta N_2 - \frac{B_c}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_c}{\nabla_\beta A_1} \Delta_\beta T_2 +$$

$$+ \frac{2 A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \cdot \Delta_\beta Q_2 + P_n = 0 \quad / 3.2.12. /$$

Obecnie zbadajmy warunki równowagi rozpatrywanego elementu pod działaniem wypadkowego wektora momentu. Rozpocznijmy od wyznaczenia sumy momentów wewnętrznych. Sumę tą możemy uzyskać zamieniając w równaniach równowagi sił, wielkości tych ostatnich wielkościami odpowiednio skierowanych momentów wewnętrznych. Jednakże w tym przypadku sumy rzutów na odpowiednie osie nie będą równe zero, a to dlatego, że na wypadkowy wektor momentu składają się również momenty odpowiednich sił wewnętrznych. Weźmy więc sumy momentów sił poprzecznych względem trzech osi: równoległych do tycznych i normalnej, i przechodzących przez węzeł elementu.

Wprowadźmy w tym celu pomocniczy, prostokątny układ współrzędnych x, y, z , z początkiem w węźle elementu i z osiami: y równoległą do wektora t i z - równoległą do osi symetrii powłoki / rys. 3.2.1. /. Zrzućmy teraz siły $Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}}$ i $T_{2\beta\pm\frac{1}{2}}$ na poszczególne osie pomocniczego układu i wyznaczmy współrzędne ich punktów zaczepienia. Wielkości te można odczytać bezpośrednio z rys. 3.2.1. Są one następujące:

$$r_{x\beta\pm\frac{1}{2}} = -\frac{h_2}{2} \sin \frac{\chi_2}{2}; \quad r_{y\beta\pm\frac{1}{2}} = \pm \frac{h_2}{2} \cos \frac{\chi_2}{2}; \quad r_z = 0$$

$$P_{x\beta\pm\frac{1}{2}} = \pm Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \cos \delta' \cos \frac{\chi_2}{2} \pm T_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \sin \delta' \cos \frac{\chi_2}{2} \quad / 3.2.13. /$$

$$P_{y\beta\pm\frac{1}{2}} = Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \cos \delta' \sin \frac{\chi_2}{2} + T_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \sin \delta' \sin \frac{\chi_2}{2}$$

$$P_{z\beta\pm\frac{1}{2}} = T_{z\beta\pm\frac{1}{2}} \cos \delta' \pm Q_{z\beta\pm\frac{1}{2}} \sin \delta' \quad / 3.2.13. /$$

Z tego samego rysunku można również odczytać wartości ramion siły Q_1 względem osi \bar{t} i siły T_1 względem osi \bar{n} . Są one równe odpowiednio:

$$\frac{h_1}{2} \quad ; \quad \frac{A_1}{2} \quad / 3.2.14 /$$

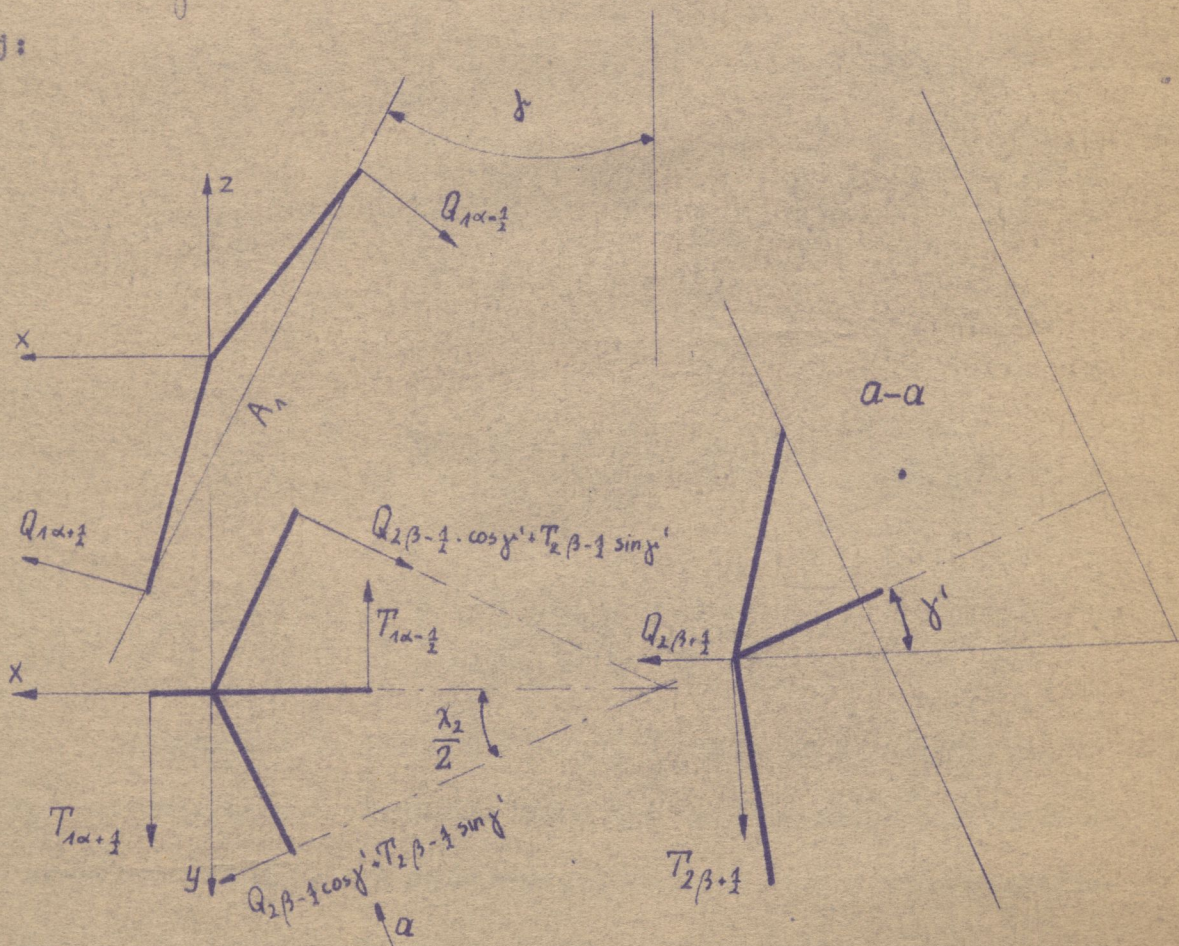
Momenty sił $Q_{z\beta\pm\frac{1}{2}}$ i $T_{z\beta\pm\frac{1}{2}}$ względem wspomnianych osi obliczymy jako rzut iloczynu wektorowego:

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{P}$$

na te osie, a więc jako iloczyn skalarowy:

$$M_L = i_x (r_y P_z - r_z P_y) + i_y (r_z P_x - r_x P_z) + i_z (r_x P_y - r_y P_x) \quad / 3.2.15 /$$

gdzie i_x, i_y, i_z , są cosinusami kierunkowymi zestawionymi poniżej:



rys. 3.2.1.

	\bar{t}	\bar{l}	\bar{n}
i_x	$\sin\delta$	0	$\cos\delta$
i_y	0	1	0
i_z	$-\cos\delta$	0	$\sin\delta$

/ 3.2.16 /

Po uwzględnieniu powyższych zależności otrzymamy ostatecznie trzy równania równowagi momentów działających na element powłoki:

$$\frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha M_1 + \frac{B_1}{h_1} \Delta_\alpha H_1 - \frac{\Delta_\alpha h_2}{A_1} \nabla_\beta M_2 + \Delta_\alpha T_1 \frac{h_1^2}{4R^2} + \frac{\nabla_\beta A_1}{2A_1} \Delta_\beta G_2 + \nabla_\beta Q_2 \frac{h_2 \nabla_\beta A_1}{4A_1} + L_t = 0$$

$$\Delta_\alpha G_1 + \frac{A_2}{h_2} \Delta_\beta M_2 + 2 \frac{B_2}{h_2} \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta H_2 + \frac{\Delta_\alpha A_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta G_2 - \frac{h_1}{2} \nabla_\alpha Q_2 +$$

$$- \frac{h_1^2 A_1}{2R_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta T_2 + \frac{\Delta_\alpha h_2 A_2}{2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta Q_2 + L_i = 0$$

/ 3.2.17 /

$$\frac{B_1}{h_1} \nabla_\alpha M_1 + \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha H_1 - \frac{B_2}{h_2} \nabla_\beta M_2 - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \Delta_\beta G_2 + \frac{A_1}{2} \nabla_\alpha T_1 +$$

$$\frac{2A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta H_2 - \frac{A_1 A_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta T_2 - \frac{h_1^2 \Delta_\alpha h_2}{4R_2 \nabla_\beta A_1} + L_n = 0$$

Równania / 3.2.12 / 1 / 3.2.17 / stanowią układ równań równowagi rozpatrywane o elemencie. Układ ten zawiera sześć niewiadomych sił i sześć niewiadomych momentów wewnętrznych, a więc o dwie niewiadome więcej niż ma analogiczny układ równań nieskończonego małego wycinka

cienkich powłoki i tyle samo co element ośrodka włókniatego [64].

Różnica polega na tym, że w klasycznej teorii powłok nie występują momenty o wektorach mających kierunek normalnej. Poza tym powyższe równania przy przejściu do granicy z wielkościami h_1 i h_2 przechodzą w równanie równowagi wspomnianej, klasycznej teorii powłok, oczywiście po odrzuceniu momentów działających w kierunku normalnej. Zbadajmy przykładowo przejście do granicy równania równowagi sił na oś \bar{t} , pamiętając, że siły w równaniach klasycznej teorii powłok odniesione są do jednostki długości.

Przyjmując oznaczenia wg W.W. Nowakowskiego [46] otrzymamy:

$$N_1 = T_1 A_2 d\alpha_2 \quad Q_1 = N_2 A_2 d\alpha_2 \quad N_2 = T_2 A_1 d\alpha_1$$

$$T_2 = T_1 A_1 d\alpha_1 \quad P = q_1 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

a po uwzględnieniu powyższych uwag otrzymamy:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial h_1 T_{c1}}{\partial x} \right] + \frac{N_1}{R_1} - q_1 = 0$$

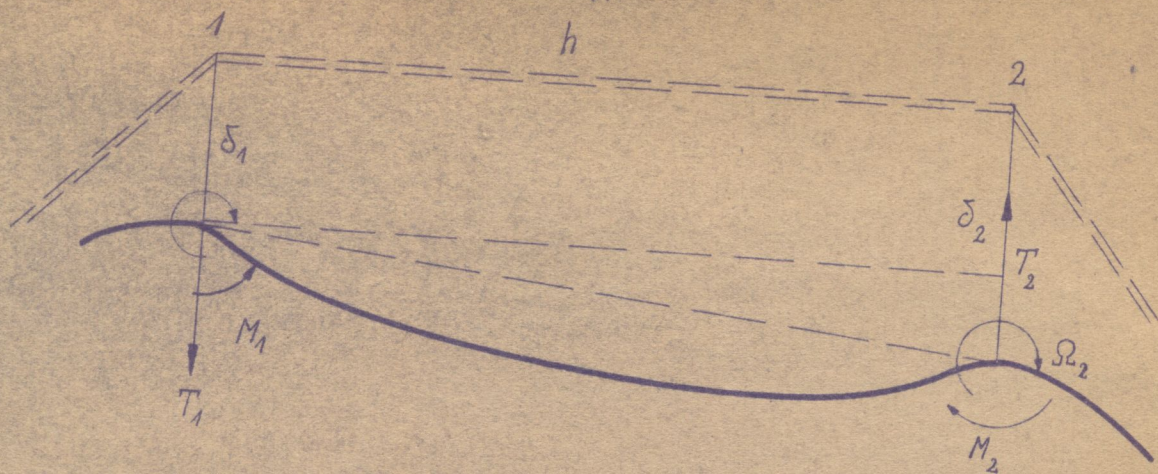
co pokrywa się z odpowiednim równaniem klasycznej teorii powłok obrotowych [46].

3.3. Związki pomiędzy siłami i momentami wewnętrznymi a odkształceniami i przemieszczeniami powierzchni środkowej.

Jak już wspomnieliśmy we wstępie i w poprzednim paragrafie, siły wewnętrzne w określonych przekrojach są statycznie równoważne naprężeniom wyznaczonym zgodnie z hipotezą płaskich przekrojów. Przy tych założeniach związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami możemy wyznaczyć na podstawie powszechnie znanych zależności teorii zginania prętów cienkich.

Rozpatrzmy w tym celu, pręt układu odkształconego / rys.

3.3.1. / przyjmując następujące oznaczenia pomocnicze:



rys. 3.3.1.

$\delta_1; \delta_2$ - przemieszczenia liniowe węzłów 1, 2 prostopadłe do osi pręta,

$\Omega_1; \Omega_2$ - bezwzględne kąty obrotu węzłów 1, 2, względem osi p prostopadłych do rysunku,

$\tau_1; \tau_2$ - względne kąty obrotu węzłów 1, 2, względem osi prostopadłych do rysunku.

Związki pomiędzy tymi wielkościami są następujące:

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{h} + \tau_1 = -\Omega_1; \quad \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} + \tau_2 = \Omega_2 \quad / 3.3.1. /$$

Wykorzystując znane związki pomiędzy względnymi kątami, ugięcia, a siłami i momentami na końcach pręta otrzymamy:

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{h} - \frac{Mh}{2EJ} - \frac{Th^2}{12EJ} = \Omega_1.$$

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{h} + \frac{Mh}{2EJ} - \frac{Th^2}{12EJ} = \Omega_2.$$

a po prze kształceniach :

$$T = \left[\frac{\delta_2 - \delta_1}{h} - \frac{1}{2} (\Omega_1 + \Omega_2) \cdot h \right] h \alpha. \quad / 3.3.2. /$$

$$M = \alpha \cdot h^3 (\Omega_2 - \Omega_1)$$

/ 3.3.2. /

gdzie

$$\alpha = \frac{EJ}{h^4}$$

Uwzględniając fakt, że w geometrii powierzchniowego zbioru punktów wyznaczyliśmy dla poszczególnych prętów wielkości:

$$(\delta_2 - \delta_1); \quad (\Omega_2 - \Omega_1); \quad \Omega_1 + \Omega_2$$

/ patrz związki / 2.2.46. / do / 2.2.53 / i / 2.2.61. / do / 2.2.72 / /

w funkcji odkształceń i przemieszczeń u, v, w , i biorąc pod uwagę znaki poszczególnych sił wewnętrznych / rys. 3.3.1. / otrzymamy następujące zależności określające cztery siły poprzeczne i cztery momenty zginające:

$$Q_{1\alpha+\frac{1}{2}} = 12 h_1^2 \alpha_{1\alpha} \left[-\mathcal{V}_{1\alpha+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} q_{1\alpha+\frac{1}{2}} \right] = 12 h_1 \alpha_{1\alpha} \left[-\frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{u}{R_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 \cdot w) + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \Psi \cdot h_1 \right],$$

$$Q_{2\beta+\frac{1}{2}} = 12 h_2^2 \alpha_{2\beta} \left[\mathcal{V}_{2\beta+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} q_{2\beta+\frac{1}{2}} \right] = 12 h_2 \alpha_{2\beta} \left[\frac{2A_1}{h_2 \nabla_{\beta} A_1} \left(-\frac{B_2}{h_2} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} U + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{A_2}{h_2} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} w \right) - \frac{\nabla_{\beta} A_1}{4 A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \Psi + \frac{A_1}{h_2} \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{2 \nabla_{\beta} A_1} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \Psi - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{2 \nabla_{\beta} A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \delta \right],$$

$$T_{1\alpha+\frac{1}{2}} = 12 h_1^2 \alpha_{1\alpha} \left[\omega_{1\alpha+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \delta_{1\alpha+\frac{1}{2}} \right] = 12 h_1 \alpha_{1\alpha} \left[\frac{\Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} U}{h_1} + \frac{1}{4} h_1 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{U}{R_1} \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2 h_1} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 \delta) \right],$$

$$T_{2\beta+\frac{z}{2}} = 12 h_2^2 \alpha_{2t} \left[\omega_{2\beta+\frac{z}{2}} + \frac{1}{2} \delta_{2\beta+\frac{z}{2}} \right] = \frac{12 h_2^2 \alpha_{2t}}{A_1 h_2 \nabla_\beta A_1} \left[\frac{1}{2} (\nabla_\beta A_1)^2 \Delta_{\beta+\frac{z}{2}} U - \frac{1}{2} A_2 \Delta_\alpha h_2 \nabla_{\beta+\frac{z}{2}} U + \right. \\ \left. - B_2 \Delta_\alpha h_2 \Delta_{\beta+\frac{z}{2}} W + B_2 A_1^2 \Delta_{\beta+\frac{z}{2}} \Psi + A_2 A_1^2 \nabla_{\beta+\frac{z}{2}} \delta \right]$$

$$G_{1\alpha+\frac{z}{2}} = \alpha_{1n} \cdot h_1^3 \Delta_{\alpha+\frac{z}{2}} \Psi$$

/ 3.3.3. /

$$G_{2\alpha+\frac{z}{2}} = \alpha_{2n} h_2^3 \left[\frac{1}{2} \frac{\nabla_\beta A_1}{A_1} \Delta_{\beta+\frac{z}{2}} \Psi - \frac{A_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_{\beta+\frac{z}{2}} \Psi - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \Delta_{\beta+\frac{z}{2}} \delta \right]$$

$$H_{1\alpha+\frac{z}{2}} = \alpha_{1t} h_1^3 \cdot \delta_{1\alpha+\frac{z}{2}} = \alpha_{1t} h_1^3 \left[-\frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{z}{2}} \left(\frac{\Psi}{R_1} \right) + \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{z}{2}} (A_1 \delta) \right]$$

$$H_{2\beta+\frac{z}{2}} = \alpha_{2t} h_2^3 \cdot \delta_{2\beta+\frac{z}{2}} = \alpha_{2t} h_2^3 \left[\frac{2 A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_{\beta+\frac{z}{2}} \delta - \frac{h_2}{R_2} \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1} \nabla_{\beta+\frac{z}{2}} \Psi \right]$$

gdzie:

$$\alpha_{1n} = \frac{E_1 J_{1n}}{h_1^4}; \quad \alpha_{2n} = \frac{E_2 J_{2n}}{h_2^4}; \quad \alpha_{1t} = \frac{E_1 J_{1t}}{h_1^4}; \quad \alpha_{2t} = \frac{E_2 J_{2t}}{h_2^4}$$

Związki określające siły normalne i momenty skręcające w funkcji przemieszczeń i odkształceń mają postać następującą i nie wymagają szeregów omówienia:

$$N_{1\alpha+\frac{z}{2}} = \mu_1 h_1^2 \varepsilon_{1\alpha+\frac{z}{2}} = \mu_1 h_1^2 \left[\frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{z}{2}} (A_1 U) + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{z}{2}} \left(\frac{W}{R_1} \right) \right]$$

$$N_{2\beta+\frac{z}{2}} = \mu_2 h_2^2 \varepsilon_{2\beta+\frac{z}{2}} = \mu_2 h_2^2 \left[\frac{\Delta_\alpha h_2}{2 A_1} \nabla_{\beta+\frac{z}{2}} U + \frac{A_2}{h_2} \Delta_{\beta+\frac{z}{2}} U + \frac{B_2}{h_2} \nabla_{\beta+\frac{z}{2}} W \right]$$

/ 3.3.4. /

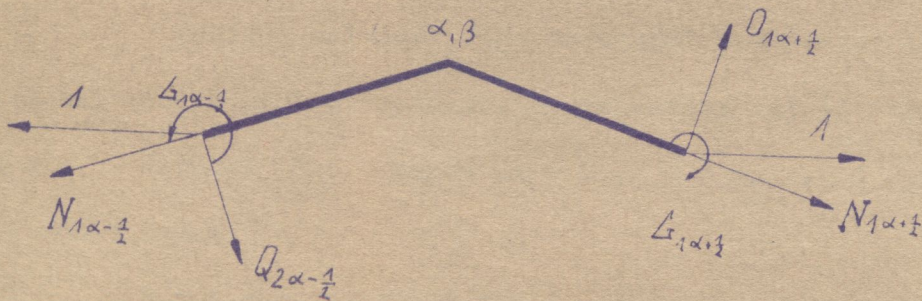
$$M_{1\alpha+\frac{z}{2}} = \nu_1 \cdot h_1^2 \cdot p_{1\alpha+\frac{z}{2}} \left[\frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{z}{2}} (\Psi A_1) + h_1 \Delta_{\alpha+\frac{z}{2}} \left(\frac{\delta}{R_1} \right) \right]$$

$$M_{2\beta+\frac{1}{2}} = \nu_2 h_2 \left[\frac{\Delta_\alpha h_2}{2 A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \psi + \frac{A_2}{h_2} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \psi + \frac{B_2}{h_2} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \delta \right] / 3.3.4. /$$

Powyższy sposób nie jest jedynym sposobem wyznaczenia związków pomiędzy siłami wewnętrznymi i przeniesaczeniami. Zależności te można wyznaczyć również dla punktów przy argumentach całkowitych. Jednakże droga ta prowadzi do wzorów dość złożonych i nie mających zdaje się większego znaczenia praktycznego. Dla zilustrowania tego sposobu rozpatrzmy zależność pomiędzy ϵ_1 i siłami wewnętrznymi. Związek ten otrzymany wyznaczając odkształcenie elementu powłoki w kierunku \bar{t} / rys. 3.3.2. /. Po przekształceniach otrzymamy:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2 A_1 \chi_{in}} \left[\frac{1}{2 A R_1} \Delta_\alpha Q_1 - \frac{1}{4 h_1 R_1} \nabla_\alpha M_1 + \frac{A_1 \chi_{in}}{h_1^2 \mu_1} \nabla_\alpha N_1 \right]$$

Jak widać, powyższe zależność przedstawia sobą związek w postaci liniowej kombinacji sum i przyróżtów kilku funkcji, co poważnie utrudnia stosowanie go.



rys. 3.3.2.

Na zakończenie rozważań nad siłami wewnętrznymi należy zwrócić uwagę na to, że tylko zależności określające siły normalne / N_1, N_2 / przechodzą w granicy w odpowiednie wyrażenie w teorii powłok cienkich / przy współczynniku Poissona równym zero /. Pozostałe siły i momenty wewnętrzne mają granicę różną od odpowiednich wielkości w powłokach cienkich. Wynika to stąd, że zostały one wyznaczone z ugięć pręta prostego, który w granicy nie osiąga wycinka powłoki, ogólnie bio-

rac o dwu krzywiznach róónnych od zera.

3.4. Warunki brzegowe.

Wszystkie otrzymane w 3.2 równania równowagi w liczbie szeóciu, są pierwszego rzódu i to w odniesieniu do kaódej z nieznaných funkcji sił wewnętrznych. W punkcie 3.3. wyznaczyliśmy z kolei kaóda z dwunastu funkcji sił wewnętrznych przez równania pierwszego rzódu w odniesieniu do kaódego z szeóciu przemieszczeń liniowych i kątowych.

Jeóeli teraz podstawimy do równań równowagi siły wyrażone przez przemieszczenia, to otrzymamy szeóć równań drugiego rzódu względem przemieszczeń. Łócznie uzyskamy wióce ukłóad równań równowážny jednemu równaniu dwunastego rzódu względem nieznaney funkcji rozwiązujócej.

Przyjmijmy, że linie konturu ograniczajóce naszą powłóke, leżą w płaszczyznach wyznaczonych punktami o $\alpha = \text{const}$ lub $\beta = \text{const}$. W takich przypadkach rozwiązanie wspomnianego ukłóadu równań wymaga znajomoóci szeóciu warunków brzegowych na kaódej z krawódkí wycinka powłóki.

Ponióżej zajmiemy się warunkami brzegowymi dla kilku najczóściej spotykanych przypadków, ograniczajóce się jedynie do brzegu

$\alpha = \alpha_0$. Warunki dla brzegów $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$, i $\beta = 0$ mają postać analogiczną.

Brzeg powłóki swobodny. Wszystkie szeóć skłóadowych sił i momentów równe są zeru:

$$N_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = Q_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = T_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0; \quad M_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = H_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = G_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0 \quad / 3.4.1. /$$

Brzeg podparty przegubowo nieprzesuwnie / przegub kulisty / :

$$W_{\alpha_0} = \bar{V}_{\alpha_0} = u_{\alpha_0} = 0; \quad Q_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_2}{2} + G_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0 \quad / 3.4.1. /$$

$$T_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_2}{2} - H_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0; \quad M_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0. \quad / 3.4.1./$$

Brzeg całkowicie utwierdzony:

$$U_{\alpha_0} = V_{\alpha_0} = W_{\alpha_0} = 0; \quad \Psi_{\alpha_0} = \Psi'_{\alpha_0} = \delta_{\alpha_0} = 0. \quad / 3.3.2/$$

Powłoka zamknięta w kierunku α . Jeżeli będziemy zmieniali α przy ustalonym β to zawsze będziemy wracać do tego samego punktu, otrzymując te same wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych. Tak więc w przypadku powłoki zamkniętej warunki brzegowe zamieniają się w warunki okresowości.

Powłoka podparta na brzegach przeciwnych przegubowo z możliwością przesuwu w kierunku α . W takim przypadku jeżeli stosujemy rozwiązania w postaci okresowych szeregów półokresowych jak np. $\sin \frac{n\pi\alpha}{\alpha_0}$ gdzie n liczba całkowita, to warunki brzegowe również sprowadzają się do warunków okresowości w postaci:

$$f(-\alpha) = -f(\alpha). \quad / 3.4.3./$$

Rozpatrując zagadnienia brzegowe w równaniach różnicowych musimy pamiętać o różnicach jakie tu występują w porównaniu z zagadnieniami brzegowymi w równaniach różniczkowych. W tych ostatnich funkcja jak i jej dowolna pochodna określone są w jednym i tym samym punkcie. W równaniach różnicowych natomiast n -tego rzędu / n - liczba parzysta / przyrost lub suma określone są ogólnie rzecz biorąc wartościami funkcji w / $n+1$ / sąsiednich punktach. Jeżeli więc rozpatrujemy w obszarze α_0 punktów zwyczajne równanie różnicowe n -tego rzędu, to ma ono sens tylko w / $\alpha_0 - n$ / punktach. W punktach brzegowych w liczbie $n/2$ na jednym brzegu i $n/2$ na drugim brzegu nasze równanie traci sens. Punktem brzegowym odpowiadają bowiem równania zbu-

dowane z uwzględnieniem wyżej wymienionych warunków brzegowych.

IV. NIEKTÓRE PRZYPADKI POWIERZ- CHNIOWYCH KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH.

4.1. Konstrukcje w stanie półmomentowym i bezmomentowym.

Podobnie jak w klasycznej teorii powłok [46] tak i w niniejszej pracy można przyjąć, że w pewnych określonych warunkach zarówno wartości momentów zginających G_1 , G_2 , siły poprzecznych Q_1 , Q_2 jak i momentów skręcających M_1 , M_2 są pomijalnie małe. Nie mniej jednak elementy powłoki mają skończone sztywności na zginanie co umożliwia przenoszenie przez nie sił ściskających.

W klasycznej teorii powłok stan, w którym możemy pominąć momenty zginające i siły poprzeczne nazywamy stanem bezmomentowym / błonowym /. W naszym przypadku pominięcie momentów o wektorach stycznych do powłoki nie pociąga za sobą znikanie momentów o wektorach normalnych do powłoki. Dlatego też stan powyższy nazywać będziemy stanem półmomentowym. Całkowite znikanie momentów zginających i skręcających może mieć miejsce dopiero wtedy, jeżeli powłoka obciążona jest osiowo symetrycznie. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że wprowadzone określenie " stan półmomentowy " nie pokrywa się z pojęciem o tej samej nazwie wprowadzonym przez W.Z. Własowa [63] do teorii powłok.

Niezbędne warunki do zapewnienia stanu półmomentowego, o których była mowa wyżej pokrywają się w zasadzie z warunkami niezbędnymi do zachowania stanu bezmomentowego w powłokach ciągłych [46] i nie będą tu omawiane.

Podobnie też zagadnienie warunków brzegowych zblizone jest do warunków brzegowych w klasycznej teorii powłok bezmomentowych [46]. Zestawiony poniżej układ równań /4.1.1./ powłoki prętowej w stanie półmomentowym jest szóstego rzędu i wymaga sformułowania trzech warunków brzegowych na każdym brzegu. Warunki te określone są siłami o wektorach stycznych i momentami o wektorach normalnych do powłoki / N, T, H /. Również w przypadku warunków brzegowych wyrażanych w przemieszczeniach, rozumowanie jest identyczne jak w klasycznej teorii powłok.

Obecnie przejdziemy do zestawienia równań dla powłok obrotowych w stanie półmomentowych:

$$a_1 \Delta_\alpha N_1 - \frac{\Delta_\alpha h_2}{2A_1} \nabla_\beta N_2 + \frac{1}{2c} \Delta_\beta T_2 = -P_t$$

$$\Delta_\alpha T_1 + a_2 \Delta_\beta N_2 + c \nabla_\beta T_2 = -P_i$$

$$-b_1 \nabla_\alpha N_1 + b_2 \nabla_\beta N_2 - b_2 \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \Delta_\beta T_2 = -P_n \quad / 4.1.1. /$$

$$\nabla_\alpha H_1 + \frac{h_1}{2} \Delta_\alpha T_1 = -\frac{L_t}{b_1}$$

$$\nabla_\beta H_2 - \frac{h_2}{2} \Delta_\beta T_2 = -\frac{L_i}{2b_2c}$$

$$a_1 \Delta_\alpha H_1 + 2a_2 c \Delta_\beta H_2 + \frac{A_1}{2} \nabla_\alpha T_1 - A_2 c \nabla_\beta T_2 = -L_n$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{A_1}{h_1}; \quad b_1 = \frac{B_1}{h_1}; \quad c = \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1}; \quad a_2 = \frac{A_2}{h_2}; \quad b_2 = \frac{B_2}{h_2}$$

Sześć powyższych równań równowagi zawiera w sobie sześć nie-

wiadomych funkcji sił i momentów, a mianowicie:

$$N_1, N_2, T_1, T_2, H_1, H_2.$$

Jeżeli więc warunki brzegowe zadane są w siłach to zagadnienie jest statycznie wyznaczalne.

W przypadku konstrukcji obciążonej osiowo symetrycznie powyższy układ równań / 4.1.1. / zredukuje się do układu o trzech równaniach z trzema niewiadomymi:

$$a_1 \Delta_\alpha N_1 - \frac{\Delta_\alpha h_2}{2A_1} \nabla_\beta N_2 = -P_t$$

$$a_2 \Delta_\beta N_2 = 0$$

/ 4.1.2. /

$$-b_1 \nabla_\alpha N_1 + b_2 \nabla_\beta N_2 = -P_n$$

Drugie równanie równowagi narzuca warunek niezmienności siły N_2 przy zmianie β . W rezultacie pozostaje do rozwiązania układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$a_1 \Delta_\alpha N_1 - \frac{\Delta_\alpha h_2}{A_1} N_2 = -P_t$$

/ 4.1.3. /

$$-b_1 \nabla_\alpha N_1 + 2b_2 N_2 = -P_n$$

Po przekształceniach otrzymamy oddzielne wyrażenia na każdą z sił:

$$\left[\frac{h_2}{R_2} a_1 \Delta_\alpha - \frac{\Delta_\alpha h_2}{A_1} b_1 \nabla_\alpha \right] N_1 = -2b_2 P_t - \frac{\Delta_\alpha h_2}{A_1} P_n$$

$$2\Delta_\alpha \left(\frac{b_2}{b_1} N_2 \right) - \nabla_\alpha \left(\frac{\Delta_\alpha h_2}{a_1 A_1} N_2 \right) = -\nabla_\alpha \frac{P_t}{a_1} - \Delta_\alpha \frac{P_n}{b_1}$$

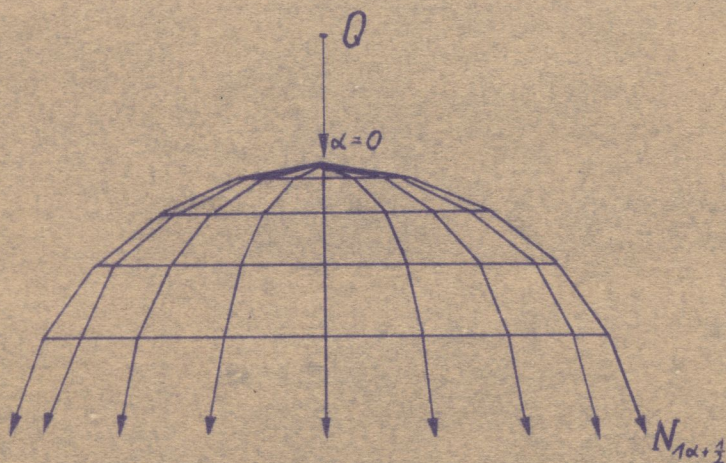
/ 4.1.4. /

4.1.1. - Osiowo symetrycznie obciążona prętowa kopuła kulista w stanie bezmomentowym.

Rozpatrzmy dla przykładu kulistą kopułę prętową pod działaniem ciężaru własnego. Podobnie jak w klasycznej teorii powłok mamy w tym przypadku dwie drogi postępowania. Pierwsza z nich polega na rozwiązaniu równań różnicowych / 4.1.4. / . Druga zaś polega na wyznaczeniu siły N_1 w wyniku rozpatrzenia równowagi sił działających na odciętą część kopuły w kierunku pionowym. Poniżej rozwiążemy omawiane zagadnienie drugim sposobem.

Przyjmijmy, że ciężary jednostkowe prętów są jednakowe i wynoszą q . Ciężar jednego, elementarnego wycinka powłoki wynosi / rys. 4.1.1. / :

$$\Delta Q = q(h_1 + h_2) = 2Rq \left(\sin \frac{\chi_1}{2} + \sin \frac{\chi_2}{2} \sin \alpha \chi_1 \right)$$



rys. 4.1.1.

Sumując po całym obszarze w następujących granicach:

$$0 \leq \chi_2 \leq \beta_0$$

$$0 \leq \alpha \leq \alpha + \frac{1}{2}$$

gdzie $\beta_0 = \frac{2\pi}{\chi_2}$

otrzymamy ciężar całej kopuły:

$$Q = 2qR \int_0^{\beta_0} \int_0^{\alpha + \frac{1}{2}} (\sin \frac{\chi_1}{2} + \sin \frac{\chi_2}{2} \sin \chi_1) =$$

$$= 2qR \beta_0 \left[(\alpha + \frac{1}{2}) \sin \frac{\chi_1}{2} + \frac{\sin \frac{\chi_2}{2}}{2 \sin \frac{\chi_1}{2}} (1 - \cos(\alpha + \frac{1}{2}) \chi_1) \right]$$

Rzutuując wszystkie siły na oś pionową otrzymamy / rys. 4.1.1/:

$$\beta_0 N_{1, \alpha + \frac{1}{2}} \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{2}) \chi_1 = Q_1$$

a stąd:

$$N_{1, \alpha + \frac{1}{2}} = \frac{Q}{\beta_0 \sin(\alpha + \frac{1}{2}) \chi_1} = 2qR \frac{(\alpha + \frac{1}{2}) \sin \frac{\chi_1}{2} + \frac{\sin \frac{\chi_2}{2}}{2 \sin \frac{\chi_1}{2}} [1 - \cos(\alpha + \frac{1}{2}) \chi_1]}{\sin(\alpha + \frac{1}{2}) \chi_1}$$

Korzystając z dowolnego z równań / 4.1.3. / otrzymamy siłę N_2 :

$$N_2 = \frac{2 \sin \frac{\chi_1}{2} (2 \alpha \sin^2 \frac{\chi_1}{2} + \sin \frac{\chi_2}{2}) \cos \chi_1 - (2 \sin \frac{\chi_2}{2} + \sin \frac{\chi_1}{2} \sin \alpha \chi_1)}{2 \sin \frac{\chi_2}{2} \sin^3 \alpha \chi_1} + \frac{2 \sin^2 \alpha \chi_1 \cos \alpha \chi_1 (\sin \frac{\chi_1}{2} + \sin \frac{\chi_2}{2} \sin \alpha \chi_1)}{2 \sin \frac{\chi_2}{2} \sin^3 \alpha \chi_1}$$

4.1.2. - Tarcza prętowa.

Jeżeli w sześciu równaniach równowagi / 4.1.1. / powłoki w stanie póknomentowym przyjmiemy:

$$R_1 = R_2 = \infty$$

to otrzymamy układ trzech równań, gdyż trzy pozostałe równania są tożsamościowo spełnione. Dwa rozpatrywane równania są równaniami sumy rzutów sił ostatnie zaś sumą momentów. Oto te równania:

$$\Delta_\alpha N_1 + \Delta_\beta T_2 + P_t = 0$$

$$\Delta_\beta N_2 + \Delta_\alpha T_1 + P_t = 0$$

$$\Delta_\alpha H_1 + \Delta_\beta H_2 + \nabla_\alpha T_1 \frac{h_1}{2} - \nabla_\beta T_2 \frac{h_2}{2} = 0$$

/ 4.1.5. /

Ponieważ badamy trzy równania, w których mamy sześć niewiadomych musimy dołączyć dalsze ~~trzy~~ równania, które w tym przypadku będą związkami pomiędzy siłami wewnętrznymi a przemieszczeniami:

$$N_{1\alpha+\frac{1}{2}} = \frac{E_1 F_1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} u \qquad N_{2\beta+\frac{1}{2}} = \frac{E_2 F_2}{h_2} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} v$$

$$H_{2\beta+\frac{1}{2}} = \frac{E_2 J_{2t}}{h_2} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \delta$$

$$H_{1\alpha+\frac{1}{2}} = \frac{E_1 J_{1t}}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \delta$$

/ 4.1.6. /

$$T_{1\alpha+\frac{1}{2}} = 6 \frac{E_1 J_{1t}}{h_1^3} (2 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} v - h_1 \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \delta)$$

$$T_{2\beta+\frac{1}{2}} = 6 \frac{E_2 J_{2t}}{h_2^3} (2 \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} u + h_2 \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \delta)$$

Wstawiając powyższe zależności do równań równowagi / 4.1.5 / otrzymamy trzy równania w przemieszczeniach u , v , δ . W dalszym ciągu będziemy rozpatrywali wspomniany układ przy szczególnych wartościach geometrycznych i fizycznych, a mianowicie:

$$h_1 = h_2 = h \qquad E_1 J_{1t} = E_2 J_{2t}$$

co da nam:

$$(k \Delta_{\alpha}^2 + \Delta_{\beta}^2) u + \frac{h}{2} \Delta_{\beta\beta} \delta = - \frac{P_t}{6 h \alpha_t}$$

$$(\Delta_{\alpha}^2 + k \Delta_{\beta}^2) v - \frac{h}{2} \Delta_{2\alpha} \delta = - \frac{P_t}{6 h \alpha_t} \quad / 4.1.7. /$$

$$-3 \Delta_{\beta\beta} u + 3 \Delta_{2\alpha} v - h (\nabla_{\alpha} + \nabla_{\beta}) \delta = - \frac{L_n}{2 h^2 \alpha_t}$$

gdzie:

$$k = \frac{\delta^2}{12} \quad \delta - \text{smukłość pręta}$$

$$D_\alpha X = X_{\alpha+1} + 4X_\alpha + X_{\alpha-1}$$

W przypadku niejednorodnego układu równań / 4.1.7. / jego

funkcja rozwiązująca $\bar{\Phi}$ ma postać:

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_3 \quad / 4.1.8. /$$

$\bar{\Phi}_1; \bar{\Phi}_2; \bar{\Phi}_3$ muszą spełniać następujące zależności:

$$D\bar{\Phi}_1 = -\frac{P_t}{6h\alpha_t}; \quad D\bar{\Phi}_2 = -\frac{P_i}{6h\alpha_t}; \quad D\bar{\Phi}_3 = -\frac{L_n}{2h^2\alpha_t} \quad / 4.1.9. /$$

Przemieszczenia $u, v,$ określone są wtedy zależnościami:

$$u = D_{11}\bar{\Phi}_1 + D_{21}\bar{\Phi}_2 + D_{31}\bar{\Phi}_3 = [-(D_\alpha + D_\beta)(k\Delta_\beta^2 + \Delta_\alpha^2) + \frac{3}{2}\Delta_\alpha^2\Delta_\beta^2]h\bar{\Phi}_1 +$$

$$(\frac{3}{2}\Delta_{2\alpha}\Delta_{2\beta})h\bar{\Phi}_2 + [\frac{1}{2}\Delta_{23}(k\Delta_\beta^2 + \Delta_\alpha^2)]h\bar{\Phi}_3$$

$$v = D_{21}\bar{\Phi}_1 + D_{22}\bar{\Phi}_2 + D_{23}\bar{\Phi}_3 = (-\frac{3}{2}\Delta_{2\alpha}\Delta_{2\beta})h\bar{\Phi}_1$$

$$+ [-(D_\alpha + D_\beta)(k\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2) + \frac{3}{2}\Delta_\beta^2\Delta_\alpha^2]h\bar{\Phi}_2 + [-\frac{1}{2}(k\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2)\Delta_{2\alpha}]h\bar{\Phi}_3$$

$$\delta = [3\Delta_{4\beta}(k\Delta_\beta^2 + \Delta_\alpha^2)]\bar{\Phi}_1 + 3\Delta_{2\alpha}(k\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2)\bar{\Phi}_2 + \quad / 4.1.10. /$$

$$(k\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2)(\Delta_\alpha^2 + k\Delta_\beta^2)\bar{\Phi}_3 = D_{31}\bar{\Phi}_1 + D_{32}\bar{\Phi}_2 + D_{33}\bar{\Phi}_3$$

D jest wyznacznikiem macierzy, której elementami są operacje nad poszczególnymi przemieszczeniami w układzie równań / 4.1.7. /. Wartość jego wynosi:

$$D = \frac{k}{2} [\Delta_\alpha^6 - 2\Delta_\alpha^4 D_\beta - 2k\Delta_\alpha^2 \Delta_\beta^2 (D_\alpha + D_\beta) - 2\Delta_\beta^4 D_\alpha + \Delta_\beta^6] \quad / 4.1.11. /$$

co można również zilustrować przy pomocy tabeli 4.1.1.

D_{11} , D_{12} , D_{22} , ... itd są odpowiednio podwyznacznikami macierzy opisanej powyżej.

Jeżeli przejdziemy do granicy z wyznacznikiem / 4.1.11. / uprzednio podzieliliśmy go przez h^4 , to otrzymamy równanie różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu, takie jak dla funkcji Airy w płaskim zagęszczeniu teorii sprężystości:

$$D = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}$$

Jednородne równanie:

$$D \bar{\Phi} = 0$$

jest tożsamościowo spełnione jeżeli funkcja $\bar{\Phi}$ przyjmuje jedną z poniższych postaci:

$$\text{const, } \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \beta^2, \beta^3, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta, \alpha\beta^2, \alpha\beta^3 \quad / 4.1.12 /$$

Ponadto funkcja $\bar{\Phi}$ podobnie jak funkcja Airy może przyjmować postacie wielomianów, funkcji trygonometrycznych, wykładniczych i ich kombinacji.

W przypadku równań jednorodnych otrzymujemy w zasadzie trzy różne stany odkształcenia, jednakże niektóre z nich mogą wyrażać sztywny obrót lub przesunięcie tarczy jako całości. Weźmy przykładowo funkcję:

$$\bar{\Phi} = \alpha^3$$

i potraktujemy ją kolejno jako:

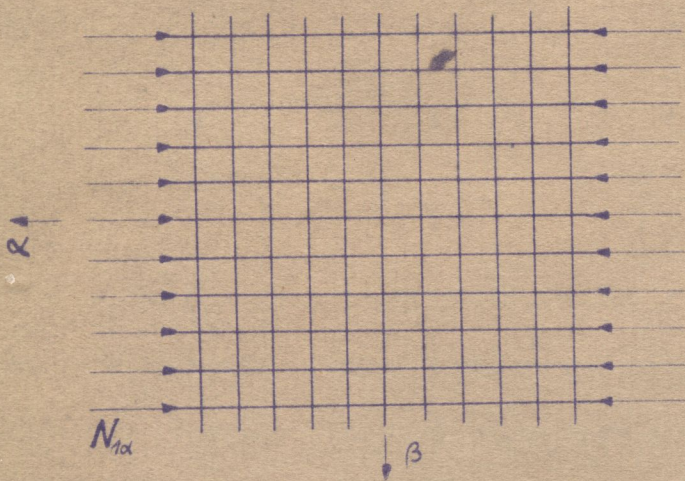
Z wzorów / 4.1.6./ i / 4.1.10 / otrzymamy dla $\Phi_1 = \alpha^3$

$$u = -32\alpha \quad v = 0 \quad \gamma = 0$$

ze związków pomiędzy siłami i przemieszczeniami wynika, że w tym stanie na brzegu $\alpha = \text{const}$ powinny działać siły:

$$N_1 = -32 \frac{EF}{h}$$

co odpowiada równomiernemu ściskaniu w kierunku / rys. 4.1.2. /



rys. 4.1.2.

Jeżeli przyjmiemy $\Phi_2 = \alpha^3$ otrzymamy

$$u = 0 \quad v = 0 \quad \gamma = 18k$$

Podstawiając powyższe związki do równań / 4.1.6. / i / 4.1.10. / otrzymamy na brzegu układ sił poprzecznych, powodujących obrót tarczy jako całości. Z uwagi na to, że funkcja rozwiązująca spełnia równania równowagi stan taki jest niemożliwy, a za tym rozwiązanie przedstawia nieobciążoną tarczę obróconą jako całość o kąt $\gamma = 18k$.

Podobnie przy $\Phi_3 = \alpha^3$ otrzymujemy przesunięcie tarczy jako całości o $U = -3k$

4.2. Konstrukcje w stanie momentowym.

Jak już wspomnieliśmy w rozdziale trzecim, układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi przemieszczeniami, odnoszący się do dowolnie obciążonej powłoki obrotowej, otrzymamy podstawiając rów-

nia / 3.3.4 / i / 3.3.6 / do równań / 3.2.11 / i / 3.2.16 /. Poniżej przeanalizujemy zastosowanie tych równań do badań nad powłoką walcową o przekroju kołowym, zaburzeniami brzegowymi w tejże powłoce oraz rusztami płaskimi.

4.2.1. Kołowa powłoka walcowa.

Przyjmijmy, że w równaniach równowagi / 3.2.11 / i / 3.2.16 / i równaniach fizycznych / 3.3.4 / i / 3.3.6 / mają miejsce następujące związki:

$$\begin{aligned} R_1 &= \infty & A_1 &= h_1 & R_1 &= R = \text{const} \\ & & A_1 &= A = \text{const} & & \end{aligned}$$

Po przekształceniach w równań i wstawieniu związków fizycznych w równania równowagi otrzymamy dla walcowej powłoki prętowej o przekroju kołowym, układ równań w przesłuszczeniach zestawiony w tabeli 4.2.1. W ostatniej kolumnie tabeli podaliśmy funkcje sił i momentów zewnętrznych obciążających rozpatrywany węzeł.

Otrzymaliśmy w ten sposób sześć równań z sześcioma niewiadomymi przesłuszczeniami. Są to równania różnicowe, cząstkowe, liniowe o stałych współczynnikach. Mimo, że dla takiego układu można łatwo wyznaczyć funkcję rozwiązującą nie będziemy się nią jednak zajmowali, gdyż równanie rozwiązujące ma bardzo złożoną postać i stosowanie go nie prowadzi do żadnych korzyści praktycznych. Złożoność tego równania w porównaniu z analogicznymi w klasycznej teorii powłok walcowych polega na większej liczbie parametrów kształtu w powłoce prętowej. Ciągłą powłokę kołową opisują: promień, grubość, moduł sprężystości, liczba Poissona. Natomiast w przypadku jednorodnej powłoki prętowej wielkości te są następujące: promień, powierzchnia przekroju pręta, dwa momenty bezwładności, sztywność skręcania, moduł sprężystości, długość pręta.

Praktycznie lepiej jest więc operować całym układem sześciu równań z sześcioma niewiadomymi, podanym w tabeli 4.2.1.

Jako przykład zastosowania omawianego układu równań rozpatrzmy wycinek powłoki kołowej o $\alpha_0 \cdot \beta_0$ segmentach / rys. 4.2.1. /.

Powłoka podparta jest przegubowo-przesuwnie w kierunku stycznej, prostopadłej do krawędzi wycinka. Należy więc spełnić następujące warunki brzegowe:

$$\text{na krawędzi } \alpha = 0 \quad \text{i} \quad \alpha = \alpha_0$$

$$w = 0, \quad u = 0, \quad N_1 = 0, \quad H_1 = G_1 = M_1 = 0$$

$$\text{na krawędziach } \beta = 0 \quad \text{i} \quad \beta = \beta_0$$

$$w = v = 0, \quad N_2 = 0, \quad H_2 = G_2 = E_2 = 0.$$

Jednorodny układ równań / tabela 4.2.1. / będzie spełniony jeżeli przemieszczenia wyrażymy za pomocą podwójnych szeregów trygonometrycznych o postaci:

$$u = \sum_{m=1}^{\alpha_0-1} \sum_{n=1}^{\beta_0-1} A \cos \frac{m\pi\alpha}{\alpha_0} \sin \frac{n\pi\beta}{\beta_0}$$

$$v = \sum_{m=1}^{\alpha_0-1} \sum_{n=1}^{\beta_0-1} B \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_0} \cos \frac{n\pi\beta}{\beta_0}$$

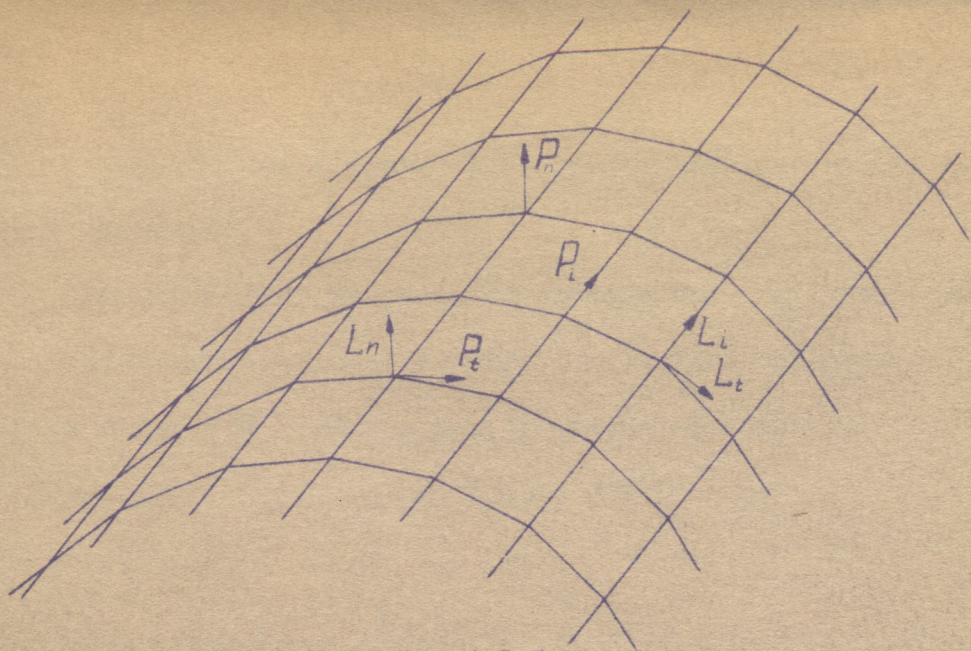
$$w = \sum_{m=1}^{\alpha_0-1} \sum_{n=1}^{\beta_0-1} C \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_0} \sin \frac{n\pi\beta}{\beta_0}$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\alpha_0-1} \sum_{n=1}^{\beta_0-1} D \cos \frac{m\pi\alpha}{\alpha_0} \sin \frac{n\pi\beta}{\beta_0}$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\alpha_0-1} \sum_{n=1}^{\beta_0-1} E \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_0} \cos \frac{n\pi\beta}{\beta_0}$$

$$\delta = \sum_{m=1}^{\alpha_0-1} \sum_{n=1}^{\beta_0-1} F \cos \frac{m\pi\alpha}{\alpha_0} \cos \frac{n\pi\beta}{\beta_0}$$

/ 4.2.1. /



rys. 4.2.1.

Analizując spełnienie warunków brzegowych przez powyższe szeregi i rozumując jak w punkcie 3.4, możemy wyznik potraktować jako fragment nieskończonej, zamkniętej powłoki walcowej. W przypadku takim wielkości przyjmujące wartości równe zero na brzegach powinny być funkcjami okresowymi, nieparzystymi. Wielkości nie przyjmujące wartości zerowych powinny wtedy być odpowiednio funkcjami okresowymi, parzystymi o okresach odpowiednio $2\alpha_0$ i $2\beta_0$.

Zbadajmy obecnie, czy zaproponowane rozwiązanie spełnia warunki narzucone na siły wewnętrzne. Spełnienie warunków narzuconych na przemieszczenia wynika bezpośrednio z proponowanych szeregów / 4.2.1/.

Rozpatrzmy przykładowo siłę N_1 :

$$(N_1)_{-\frac{1}{2}\beta} = \mu_1 h_1 (u_{q\beta} - u_{-1,\beta})$$

$$(N_1)_{+\frac{1}{2}\beta} = \mu_1 h_1 (u_{1,\beta} - u_{q\beta})$$

ponieważ:

$$(u)_{-1,\beta} = (u)_{+1,\beta}$$

to

$$(N_1)_{-\frac{1}{2}\beta} = -(N_1)_{+\frac{1}{2}\beta}$$

Tak więc N_1 jest funkcją nieparzystą okresową względem α co jest zgodne z założeniem.

Podobnie można wykazać, że proponowane rozwiązanie spełnia warunki narzucone na pozostałe siły z wyjątkiem momentów skręcających. Stwierdzenie to wynika z następującego rozumowania:

Ze związków fizycznych na brzegu $\alpha = 0$ mamy:

$$(M_1)_{-\frac{1}{2}\beta} = \sqrt{h_1} (\Psi_{0,\beta} - \Psi_{-1,\beta})$$

$$(M_1)_{+\frac{1}{2}\beta} = \sqrt{h_1} (\Psi_{1,\beta} - \Psi_{0,\beta})$$

ponieważ

$$\Psi_{-1,\beta} = -\Psi_{+1,\beta} \quad \Psi_{0,\beta} = 0$$

to otrzymamy

$$(M_1)_{-\frac{1}{2}\beta} = (M_1)_{+\frac{1}{2}\beta}$$

co jest sprzeczne z warunkiem narzuconym na tę wielkość, która powinna być okresową funkcją nieparzystą. Badany warunek będzie więc tylko spełniony w przypadku gdy:

$$(M_1)_{-\frac{1}{2}\beta} = (M_1)_{+\frac{1}{2}\beta} = 0$$

Tak więc całkowite spełnienie warunków brzegowych nastąpi przy sztywności skręcenia równej zero.

Współczynniki A_{mn} , B_{mn} , F_{mn} , szeregów / 4.2.1./ obliczamy podobnie jak w przypadku rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Podstawy w tym celu przyjęte rozwiązanie do równań powłoki w przenieszeniach / tabela 4.2.1. / . Mnożąc stronami przez $\sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_0}$, $\sin \frac{n\pi\beta}{\beta_0}$ i sumując stronami odpowiednio w granicach $0 - \alpha_0$ i $0 - \beta_0$, otrzymamy sześć równań algebraicznych z sześcioma nieznanymi współczynnikami A_{mn} , B_{mn} , F_{mn} .

Dla zilustrowania liczbowego zagadnienia rozważmy zadanie polegające na wyznaczeniu przemieszczeń w wycinka powłoki obciążonego jedną siłą $P_n = -P_0$ przyłożoną w jego środku. Dane liczbowe zadania są następujące:

$$h_1 = h_2 = h = 60 \text{ mm} \quad R = 500 \text{ mm}$$

pręty wykonano z drutu o przekroju okrągłym $d = 3 \text{ mm}$ i module sprężystości $E = 1,25 \cdot 10^6 \text{ KG/cm}^2$ oraz współczynnika Poissona $\nu = 0,3$.

$$\alpha_0 = 18, \quad \beta_0 = 12.$$

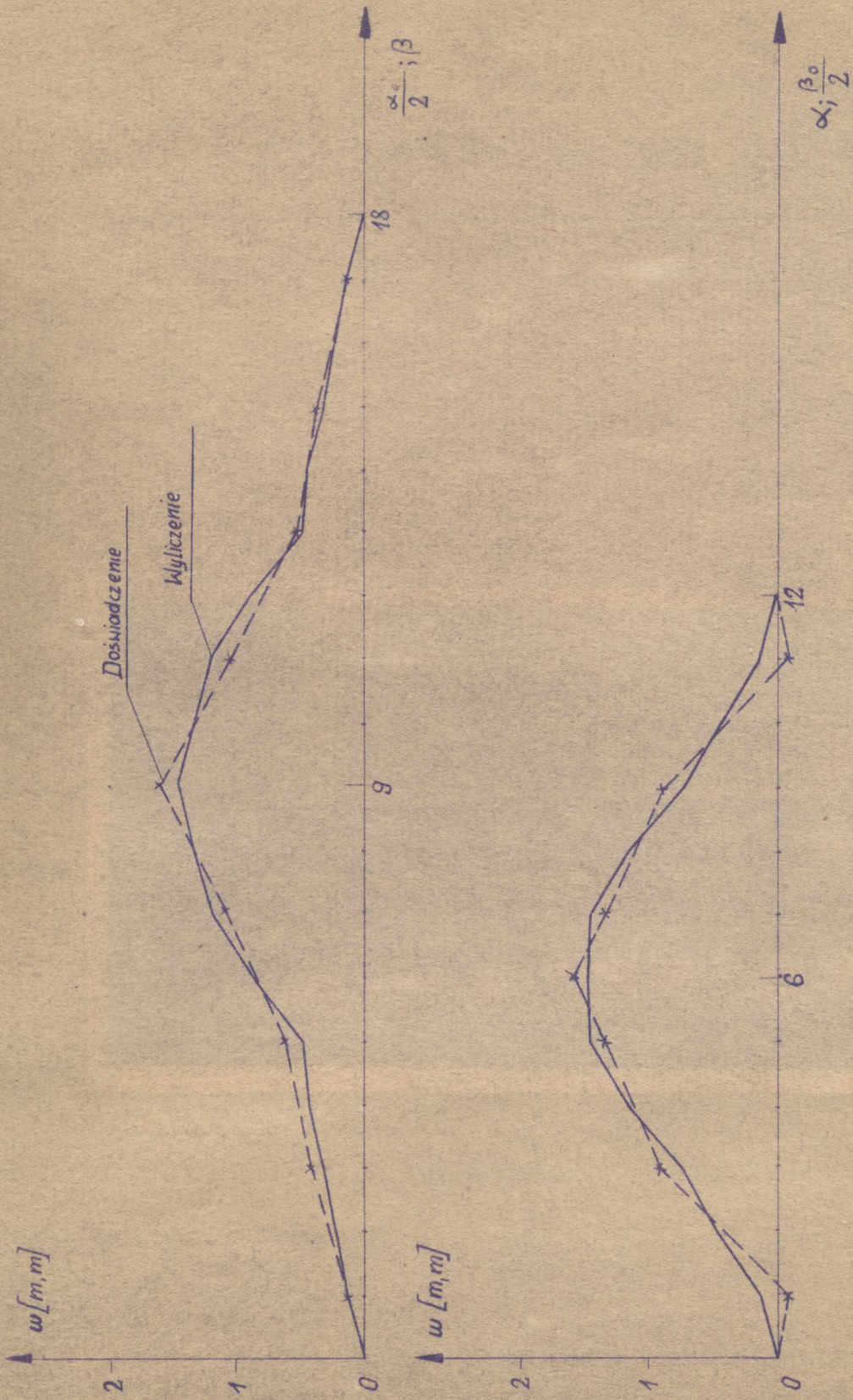
Powłoka jak już wspomniano, obciążona jest w punkcie o współrzędnych $\alpha_0/2$ i $\beta_0/2$, siłą skupioną $P_n = -0,5 \text{ KG}$.

Układ równań algebraicznych $A_{mn}, B_{mn}, \dots, F_{mn}$, obliczymy jedynie dla czterech kombinacji mn , pamiętając o tym, że konstrukcja wraz z obciążeniem jest podwójnie symetryczna. Poniżej zestawiliśmy wyniki obliczeń czterech współczynników C_{mn} pozwalających wyznaczyć w przybliżeniu przemieszczenie w dowolnym punkcie - oto one:

$$C_{11} = 1,24 \text{ mm}, \quad C_{33} = 6,270, \quad C_{55} = 0,153, \quad C_{51} = -0,172 \text{ mm}.$$

Obliczenia teoretyczne sprawdzono doświadczalnie na modelu / rys. 4.2.2. / o danych jak w przykładzie liczbowym. Ugięcie konstrukcji zmierzono czujnikami z dokładnością do $0,01 \text{ mm}$ i $0,001 \text{ mm}$ w zależności od odległości punktu od sztywnych podpór. Czujniki rozstawiono nad węzłami leżącymi w obu płaszczyznach symetrii powłoki. Średnią z pięciu pomiarów dla każdego węzła zestawiono w tabeli 4.2.2.

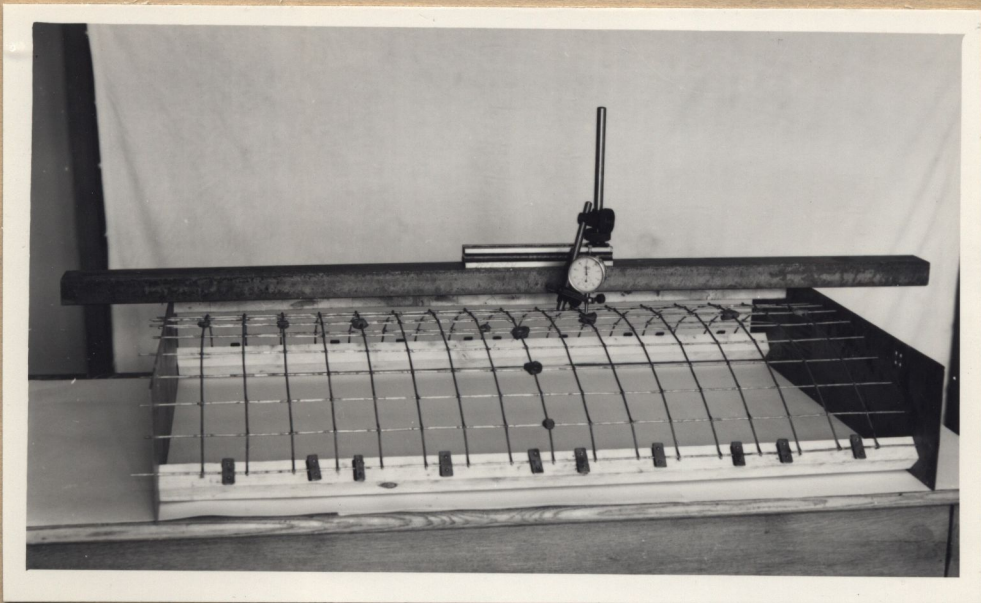
Na rys. 4.2.3. pokazano wykres ugięć zmierzonych i wyliczonych / przy czterech wyrazach szeregu/. Punkty wykresu dla jasności połączono odcinkami prostych.



rys. 4.2.3.

Tabela 4.2.2.

α, β	1;6	3;6	5;6	7;6	11;6	13;6	15;6	17;6
w [mm] przy $P_n = 0,5 \text{ kg}$	0,15	0,37	0,56	1,01	0,98	0,57	0,57	0,18
α, β	9;1	9;3	9;5	9;6	9;7	9;9	9;11	-
w [mm] przy $P_n = 0,5 \text{ kg}$	-0,035	0,81	1,39	1,60	1,36	0,92	-0,031	-



rys. 4.2.2.

4.2.2. Zaburzenia brzegowe w kokowej powłoce walcowej.

Poniżej rozpatrzmy walcową, kokową powłokę prętową obciążoną osiowo symetrycznie na brzegu. Wyniki tych rozważań dają ogólny pogląd na wpływ zaburzeń brzegowych na rozkład przemieszczeń i sił wewnętrznych w regularnych, powierzchniowych konstrukcjach pręto-

nych.

Zestawmy układ równań opisujący osiowo - symetrycznie obciążoną powłokę kulkową. Korzystając zarówno z warunków symetrii jak i z zależności

$$R_1 = \infty \quad R_2 = R = \text{const} \quad h_2 = \text{const}$$

$$A_1 = h_1$$

otrzymamy z zależności / 3.2.11. / i / 3.2.16. / następujące równanie równowagi wycinka powłoki:

$$\Delta_{\alpha} N_1 = -P_t$$

$$\Delta_{\alpha} Q_1 - \frac{h_2}{R} N_2 = -P_n \quad / 4.2.2. /$$

$$\Delta_{\alpha} G_1 + \frac{h_2}{R} H_2 - \frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha} Q_1 = -L_i$$

Przy tych samych założeniach z zależności / 3.3.4. / i / 3.3.6. / otrzymamy równania sił w funkcji przemieszczeń:

$$N_{1\alpha+\frac{1}{2}} = \mu_1 h_1 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} u$$

$$Q_{1\alpha+\frac{1}{2}} = 12 h_1 \alpha_{1n} \left(\Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} w + \frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \psi \right)$$

$$G_{1\alpha+\frac{1}{2}} = \alpha_{1n} h_1^3 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \psi$$

/ 4.2.3. /

$$N_{2\alpha+\frac{1}{2}} = \mu_2 h_2^2 \cdot \frac{1}{R} w = \frac{E_2 F_2}{R} w$$

$$H_{2\alpha} = - \frac{E_2 J_{2t}}{R} \psi$$

Przy pominięciu sił powierzchniowych, pierwsze równanie równowagi wskazuje na to, że siła N_1 nie zmienia się wzdłuż tworzącej, a więc jest taka jaką przyłożyliśmy na brzegu. W celu zbadania jak rozchodzą się działania innych sił i przemieszczeń przyłożonych na brzegu, podstawmy drugie równanie równowagi do trzeciego. Otrzymamy:

$$\Delta_{\alpha}^2 G_1 + \frac{h_1}{R} \Delta_{\alpha} H_2 - \frac{h_1 h_2}{2 R_2} \nabla_{\alpha} N_2 = - \frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha} P_n - \Delta_{\alpha} L_i \quad / 4.2.4. /$$

Wykorzystując jeszcze raz drugie równanie równowagi oraz związki pomiędzy siłami Q_1 i N_2 a przemieszczeniami otrzymamy:

$$\Delta_{\alpha} \Psi = \frac{h_1^2}{6 E_1 J_1} \left(\frac{h_2 E_2 F_2'}{R_2^2} w - \frac{12 E_1 J_1}{h_1^3} \Delta_{\alpha}^2 w \right) \quad / 4.2.5. /$$

Zależność ta pozwala nam na wyznaczenie momentów G_1 i H_2 w funkcji przemieszczenia w . Po przekształceniach, w przypadku braku obciążeń zewnętrznych na powłoce, otrzymamy względem w jedno liniowe, jednorodne równanie różnicowe czwartego rzędu o stałych współczynnikach

$$\Delta_{\alpha}^4 w + k (s^2 + 1) \Delta_{\alpha}^2 w + k s^2 \left(6 - \frac{k}{2} \right) w = 0 \quad / 4.2.6. /$$

gdzie:

$$k = \frac{E_2 J_{2t}}{E_1 J_1} \frac{h_1 h_2}{R_2^2} \quad s^2 = \frac{1}{6} \frac{E_2 F_2'}{E_2 J_{2t}} h_1^2$$

Postać rozwiązania równania / 4.2.6. / zależy od wielkości k i s^2 . Rozpatrzmy dwa praktyczne przypadki, a mianowicie dla

$$k_1 = 1 \quad \text{i dla} \quad k_2 = 0,01$$

i przy tym samym $s^2 = 600$

Do wyliczenia równania / 4.2.6. / można wykorzystać zestawienie rozwiązań analogicznych równań sporządzone przez W.A. Bowina [9]. Bowin zapisał odpowiednie równanie w postaci:

i podał jednocześnie wykres z którego odczytujemy odpowiednie rozwiązania dla różnych wielkości h i g określonych zależnościami:

$$h = 1 - \beta \qquad \varepsilon = 1 + \alpha - 2\beta$$

/ w tym przypadku h nie jest długością pręta /.

Biorąc pod uwagę, że w naszym przypadku:

$$\beta = \frac{1}{4} k (s^2 + 1) \qquad \alpha = \frac{1}{4} k s^2 (6 - \frac{k}{2})$$

otrzymamy:

$$h = 1 - \frac{1}{4} k s^2 - \frac{1}{4} k; \qquad g = 1 + k s^2 - \frac{1}{8} k^2 s^2 - \frac{1}{2} k$$

a w obu wspomnianych przypadkach

$$h_1 = -149,25 \qquad \varepsilon_1 = 525,5$$

$$h_2 = -0,5 \qquad \varepsilon_2 = 7,$$

W pierwszym przypadku rozwiązanie ogólne ma postać:

$$w_1 = C_1 e^{-\lambda_1 d} + C_2 e^{-\lambda_2 d} + C_3 e^{\lambda_1 d} + C_4 e^{\lambda_2 d}$$

gdzie

$$\operatorname{ch} \lambda_1 = |h| + \sqrt{h^2 - g} = 298; \quad \operatorname{ch} \lambda_2 = |h| - \sqrt{h^2 - g} = 2$$

Przyrównując $C_3 = C_4 = 0$ - ze względu na zanikające przenieszczenia

w nieskończoności, otrzymamy:

$$w_1 = C_1 e^{-\lambda_1 d} + C_2 e^{-\lambda_2 d}$$

oraz siły:

$$N_1 = \frac{E_2 F_2'}{R} (C_1 e^{-\lambda_1 d} + C_2 e^{-\lambda_2 d})$$

$$Q_1 = -\frac{E_2 F_2'}{R^2} h_2 \left[\frac{C_1 e^{-\lambda_1 d}}{2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_1}{2}} + \frac{C_2 e^{-\lambda_2 d}}{2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_2}{2}} \right]$$

itd.

Jak wynika z powyższych rozważań wszystkie funkcje mają ten sam charakter i znikają praktycznie najdalej w punktach o współrzędnych $\alpha = 3$ gdyż $\text{ch } \lambda_2 = 2$ co daje $\lambda_2 \approx 1,32$ i $e^{-1,32 \cdot 3} = 0,019$.

W drugim przypadku rozwiązanie ogólne ma postać:

$$w_2 = e^{-\mu \alpha} (C_1 \cos \nu \alpha + C_2 \sin \nu \alpha) + e^{\mu \alpha} (C_3 \cos \nu \alpha + C_4 \sin \nu \alpha)$$

przy czym znowu ze względu na znikanie przemieszczeń w nieskończoności $C_3 = C_4 = 0$. Rodzaj funkcji jest w tym przypadku identyczny jak przy badaniu zaburzenia brzegowego w teorii powłok cienkich [63].

$$w_2 = e^{-\mu \alpha} (C_1 \cos \nu \alpha + C_2 \sin \nu \alpha)$$

gdzie: $\text{ch } \mu \cos \nu = h, \quad \text{sh } \mu \sin \nu = \sqrt{e - h^2}$

co w naszym przypadku daje $\mu = 1,7$, a więc zanikanie zaburzeń praktycznie już w punktach powłoki o współrzędnych $\alpha = 2$ gdyż $e^{-1,7 \cdot 2} = 0,033$.

4.2.3. Ruszt płaski.

Poniżej rozpatrzmy ruszt płaski obciążony siłami o wektorach normalnych do płaszczyzny rusztu, jak i momentami o wektorach leżących w jego płaszczyźnie. Ze względu na powyższe ograniczenia w obciążeniach przyjmujemy, że przemieszczenia $u = v = 0$ i $\delta = 0$.

Jeżeli teraz w równaniach powłoki walcowej / tabela 4.2.1⁵/ uwzględnimy powyższe ograniczenia oraz to, że $R = \infty$, $A = h$ i $h_1 = h_2 = h$ to otrzymamy trzy równania równowagi w przemieszczeniach, opisujące rozpatrywany ruszt:

$$\begin{aligned} 2(\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2)w + h \Delta_{23} \psi - h \Delta_{12} \psi &= - \frac{P_n}{\delta \alpha \cdot h} \\ -6 \Delta_{23} w + h K_3 \psi &= - \frac{L_t}{\delta h^2} \quad / 4.2.3. / \\ 6 \Delta_{12} w + h K_2 \psi &= - \frac{L_i}{\delta h^2} \end{aligned}$$

gdzie:

$$K_\alpha = [d \Delta_\beta^2 - 2(\Delta_\alpha^2 + 6)] \quad d = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$K_\beta = [d \Delta_\alpha^2 - 2(\Delta_\beta^2 + 6)] \quad / 4.2.9. /$$

Dla jednorodnego układu równań /4.2.8./ funkcja rozwiązująca musi spełnić następujące równania różnicowe:

$$D \bar{\Phi} = 2h^2 [3\Delta_\alpha^2 \nabla_\alpha^2 K_\beta + (\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2) K_\alpha K_\beta + 3\Delta_\beta^2 \nabla_\beta^2 K_\alpha] \bar{\Phi} = 0 \quad / 4.2.10. /$$

W przypadku równań niejednorodnych

$$\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_3$$

gdzie

$$D \bar{\Phi}_1 = -\frac{P_n}{6h\alpha_n}; \quad D \bar{\Phi}_2 = -\frac{L_t}{\alpha h^2}; \quad D \bar{\Phi}_3 = -\frac{L_i}{\alpha h^2} \quad / 4.2.11. /$$

Przemieszczenia możemy wyznaczyć przy pomocy funkcji $\bar{\Phi}$ następującymi zależnościami:

$$w = h^2 K_\alpha K_\beta \bar{\Phi}_1 + 6h \Delta_{2\beta} K_\alpha \bar{\Phi}_2 - 6h \Delta_{2\alpha} K_\beta \bar{\Phi}_3$$

$$\psi = h \Delta_{2\beta} K_\alpha \bar{\Phi}_1 + 2h(\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2) K_\alpha \bar{\Phi}_2 - 6h \Delta_{2\alpha} \Delta_{2\beta} \bar{\Phi}_3 \quad / 4.2.12. /$$

$$\Psi = h \Delta_{2\alpha} K_\beta \bar{\Phi}_1 - 6h \Delta_{2\alpha} \Delta_{2\beta} \bar{\Phi}_2 + [2(\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2) K_\beta + 6h \Delta_\beta^2 \nabla_\beta^2] \bar{\Phi}_3$$

Nie trudno się przekonać, że jeśli w powyższych równaniach przyrównamy sztywność skręcania do zera, to otrzymamy równania regularnego rusztu przedstawionego w książce W. Nowackiego [45].

Przyjmijmy więc, że $d = 0$ i że ruszt obciążony jest jedynie siłami normalnymi. Otrzymamy wtedy:

$$K_\alpha = -2(\Delta_\alpha^2 + 6) \quad K_\beta = -2(\Delta_\beta^2 + 6)$$

a po wstawieniu do / 4.2.10 /

$$\left(\Delta_{\alpha}^4 D_{\beta} + \Delta_{\beta}^4 D_{\alpha} \right) \bar{\Phi}_1 = - \frac{P_n}{6\gamma h}$$

Poddając powyższe równanie dwustronnie operacjom $D_{\alpha} D_{\beta}$ otrzymamy identyczne równanie z wspomnianym równaniem z [45]:

$$\left(\Delta_{\alpha}^4 D_{\beta} + \Delta_{\beta}^4 D_{\alpha} \right) w = D_{\alpha} D_{\beta} \left(- \frac{P_n}{6\gamma h} \right)$$

Rozpatrzmy obecnie przykładowo ruszt na sprężystym podłożu typu Winklera. Ruszt obciążony jedną siłą skupioną w punkcie o współrzędnych α, β . Przy rozwiązaniu tego zadania posłużymy się transformacją Fouriera przystosowaną do równań różnicowych przez I. Babuska i E. Vitaska [3] [59].

Przyjmując stałą sprężystą podłoża za C możemy napisać równania / 4.2.8. / w nowej postaci:

$$2 \left(\Delta_{\alpha}^2 + \Delta_{\beta}^2 - C \right) w + h \Delta_{\alpha\beta} \psi - h \Delta_{\alpha\alpha} \psi = - \frac{P_n}{6\gamma h}$$

$$-6 \Delta_{\alpha\beta} w + h K_{\beta} \psi = 0 \quad / 4.2.14 /$$

$$6 \Delta_{\alpha\alpha} w + h K_{\alpha} \psi = 0$$

gdzie:

$$C' = \frac{C}{6\gamma h}$$

Przyjmując oznaczenia z powyższych prac możemy układ równań / 4.2.13. / zapisać w postaci wektorowej:

$$A \bar{g} = \bar{f} \quad / 4.2.14 /$$

gdzie: \bar{g} jest wektorem o składowych w, ψ, ψ a \bar{f} wektorem o współrzędnych:

$$\frac{P_n}{6\gamma h} \quad \frac{L_t}{6\gamma h^2} \quad \frac{L_i}{6\gamma h^2}$$

A jest macierzą odwzorowującą, określoną operacjami a_{kl} :

$$A = \begin{bmatrix} 2(\Delta_a^2 + \Delta_b^2 - C'); & h\Delta_{z3} & -h\Delta_{z2} \\ -6\Delta_{z3} & hk_3 & 0 \\ 6\Delta_{z2} & 0 & hk_2 \end{bmatrix} \quad / 4.2.15 /$$

Transformata $((\mathcal{F}a_{kl}))$ ma natomiast postać:

$$((\mathcal{F}a_{kl})) = \begin{bmatrix} -4(2+C'-\cos x_1 - \cos x_2); & 2h i \sin x_2; & -2h i \sin x_1 \\ -12 i \sin x_2; & 2h(d \cos x_1 - 2 \cos x_2 - d - 4); & 0 \\ 12 i \sin x_1; & 0 & 2h(d \cos x_2 - 2 \cos x_1 - d - 4) \end{bmatrix} \quad / 4.2.16 /$$

Jak nie trudno przekonać się wartość tego wyznacznika nie równa się zero dla żadnej wartości x_1 i x_2 , a więc założenia twierdzenia 3.2 w pracy E. Vitaska [59] są spełnione.

Na podstawie / 4.2.14 / \bar{g} wyraża się zależnością

$$\bar{g} = A^{-1} \bar{f}$$

gdzie A^{-1} jest macierzą określoną wielkościami a_{kl}^{-1} , a ponad to

$$((\mathcal{F}a_{kl}^{-1})) = ((\mathcal{F}a_{kl}))^{-1}$$

Tak więc A^{-1} jest macierzą odwrotną macierzy / 4.2.16 /.

Chcąc wyznaczyć przemieszczenia, a więc składowe wlok-

tora \bar{g} musimy wyznaczyć macierz $((F_{ki}))^{-1}$ i \bar{f} .

W naszym konkretnym przypadku ograniczymy się jedynie do znalezienia funkcji ugięcia w . . Mamy więc jedynie do znalezienia składową w wektora \bar{g} , która ma postać:

$$w = \frac{1}{3\alpha(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(d\cos x_1 - 2\cos x_2 - d - 4)(d\cos x_2 - 2\cos x_1 - d - 4)}{D} e^{-i(\alpha x_1 + \beta x_2)} dx_1 dx_2$$

gdzie D wartość wyznacznika macierzy L 4.2.16. /.

Jeżeli w powyższym rozwiązaniu przyrównamy $d = 0$ to otrzymamy identyczną zależność jaką podał E. Vitasek [59] w przykładzie rusztu o sztywności skręcania równej zeru.

Literatura:

1. J.H. Argyris - "Recent advances in matrix methods of structural analysis". Pergamon Press 1964.
2. S.O. Asplund - "Structural mechanics" I, II. Göteborg 1963.
3. I. Babuška - "The Fourier Transform in the Theory of Difference Equations and Its Applications". Arch. Mech. Stos. XI, 4, 1959.
4. F. Bleich - "Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes". wyd.2 Berlin 1925.
5. F. Bleich, H. Bleich - "Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktweise elastische gestützten Stabes". Der Stahlbau t.10, str7, 1937.
6. F. Bleich, E. Melan - "Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik - Berlin 1927.
7. St. Błaszkowiak, Z. Kączkowski - "Metoda Crossa". Warszawa 1959.
8. М.А. Бородинский - "Устойчивость рамных куполов" - Расчет пространственных конструкций" - Москва, IV, 1958
9. В.А. Бовин - "Разномерно-вариационные методы строительной механики" Киев 1963.
10. Z. Brzoska - "Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych". P.W.N. Warszawa 1961.
11. K. Clapeyron - "Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés" - Comptes rendus hebdomadaires de séances de l'Académie des sciences de Paris t.45, nr.26, 1857.
12. P. Csonka - "Die Winderberechnung von Rahmentragwerken mit Hilfe von Differenzgleichungen" - Bautechnik t. 39, nr.10, 1962
13. В.Г. Чудновский - "Свободные колебания и устойчивость циклических симметричных пространственных рам" - Рас. прогн. Конс. II, 1951

14. D.L. Dean - " Analysis of curved Lattices with Generalized Joint Loadings " - vol.20 Publications IABSA, 1960.
15. D.L. Dean, -C.P. Ugarte - " Analysis of Structural Nets " vol. 23, Publications IABSA, 1960
16. D.L. Dean - " Lamella Beams and Grids". Jour. Eng. Mech. Div. vol.90 nr.EM2, Part 1, April 1964.
17. D.L. Dean, E. Tauber - " Solutions for One - Dimensional Structural Lattices ". Jour. Eng. Mech. Div. A.S.C.E. October 1959
18. *В.А. Ерагина - "Устойчивость цилиндрических стержневых систем." Изв. Высш. учебн. заведения. Стр-во и архит-ктура №226, 1963*
19. A. Föppl - " Das Fachwerk im Raume " Leipzig 1892.
20. G. Geisendorfer, L. Legatski, - " Unistruts space - frame system " Univ. of Michigan Press. 1955.
- 21.
22. *Б.Н. Горбунов, Ю.В. Крашов - " Основы расчета пространственных рам " Москва 1936*
23. Z. Grodecki - " Próba uproszczenia obliczeń chłodni kominowych " Zeszyty Naukowe Pol. Wrocławskiej, Budownictwo III - Wrocław 1956.
24. Z. Grodecki - " Kratownice powierzchniowe w zastosowaniu do analizy bezmomentowego stanu napięcia otwartych powłok obrotowo - symetrycznych". Zeszyty Naukowe Pol. Wrocławskiej. Budownictwo XII, Wrocław 1962.
25. W. Gulkowski - " Statics and Stability of Prismatic Frame - Lattice shells ". Bull. de l'Académie Polonaise des Sciences. vol. IX nr.5 - 1961.
26. W. Gulkowski - " The Stability of Lattice Struts " - Z.A.M.M., band 43 heft 6, 1963.

27. W. Gutkowski - " Stateczność pozornie nieszttywnej powłoki ramowo-
kratowej ściskanej siłą osiową". Roz. Inż. 3, 11, 1963.
28. W. Gutkowski - " Unistrut Plates " - Bull. de l'Académie Polonaise
des Sciences vol. XII nr. 3 , 1964.
29. W. Gutkowski - " Plane polygonal bars ". Bull. de l'Académie Polonaise
des Sciences, vol. XII, nr. 9, 1964.
30. W. Gutkowski - " Cylindrical Grid Shell ", Arch. Mech. Stos. 3, 1965.
31. W. Gutkowski - " Geometria różnicowa powierzchniowej siatki punktów".
Mech. Teor. i Stos. tom. 3, zeszyt 2, 1965
32. P.G. Hodge - " Plastic analysis of structures " Mc Graw - Hill 1959.
33. P. Jastrzębski, R. Solecki, J. Szymkiewicz - Kratownice - obliczenia
statyczne ". Arkady 1959.
- 33a. C. Jordan - "Calculus of finite differences". Chelsea Pub. Com.
New York 1950.
34. Ю. В. Кротов - " Расчет пространственных рам с криволиней-
ными стержнями." Расчет пространственных
конструкций - вып. II, 1951.
35. Б. Н. Куцуков - " Расчет регулярных плоских систем и
биконструкций по методу бесконечной основной
системы ". Расчет простран. Конст. вып. II 1951.
36. Б. Н. Куцуков - " Некоторые задачи статического и динамичес-
кого расчета регулярных систем." Расчет простран.
Конст. вып. IV - 1958.
37. F. Laderer - " Grid shells composed of steel tubes " Proceedings of
the Symposium on Shell Research, Delf Aug. 30- Sept. 2
1961.
38. S.L. Lee, M. Makino - " Analysis of Corner - Supported grillages ".
Publications IABSE vol. 20, 1960.

39. Z. Makowski - "Räumliche Tragwerke aus Stahl" Düsseldorf 1963.
40. L. Mann - "Die Berechnung steifer Vierecknetze". Zeitschrift für Bauwesen t. 59, str. 539, 1909.
41. J.B. Martin - "The elastic analysis of simple rectangular grids by virtual work methods". Proc. Amer. Soc. Civil. Engr. / J.Struct. Div./ 41, June 1963.
42. D.M. Milne - Thomson - "The calculus of finite differences" - London 1951.
43. E. von Mises, J. Ratzersdorfer - "Die Knicksicherheit von Fachwerken" Z.A.M.M. t.5, str. 218, 1925.
44. J. Mütternilch - "W sprawie obliczania ram przestrzennych o kształcie foremnego graniastopu. Zeszyty Naukowe Pol. Warszawskiej nr.6, 1954.
45. W. Nowacki - "Mechanika Budowli" t.II, Warszawa 1960.
46. В.В. Новожилов - "Теория тонких оболочек" - Ленинград 1962.
47. И.Г. Попов - "Цилиндрические стержневые системы" - Москва 1952
48. П.К. Рашевский - "Курс дифференциальной геометрии" - Москва 1956.
49. А.Н. Сегаль - "Высотные сооружения. Работы на прочной, жесткой и устойчивой." Гостройиздат 1949.
50. А.Н. Сегаль - "О работе несимметричной цилиндрической стержневой системы". Работы пространств. Констр. бв. II. 1951.
51. Л.Н. Ставраки - "Устойчивость пространственных каркасов из тонкостенных открытых, симметричных профилей" Сборник трудов Института стир. мех. 12, 1950.
52. В.Д. Шайкович - "Матричный метод расчета регулярных стержневых систем". Работы пространств. Констр. бв. IV 1958.
53. S. Tezcan - "The analysis of grid frameworks whose girders are considered to have torsional rigidities. Bull. Istanbul Tek. Univ. t.14,2, 1961.

54. Thein Wak - " Analysis of laterally loaded grid works ". Jour. Engin. Mech. Divis. vol.90 nr.EM2, April 1964, part 1.
55. S.P. Timoshenko - History of strenght of materials". Londan 1953.
56. S.P. Timoshenko - Theory of plates and shells". Mc Graw - Hill 1959.
57. H.P. Tsang - " Analysis of rigid frames by difference equations". Proc. Amer. Soc. Civil. Eng. 89ST,2,Part 1, April 1963.
58. А.А. Уманский - *"Прогрессивные системы" Модера 1948.*
59. E. Vitasek - " The n - Dimensional Fourier transform in the Theory of Difference Equations" Arch. Mech. Stos. 2,XII, 1960.
60. Д.В. Вайнберг, В.Г. Судновский - *"Прогрессивные рамные каркасы инженерных сооружений", Киев 1948.*
61. W. Wierzbicki - " Mechanika Budowli". Warszawa 1946.
62. W. Wierzbicki - " Zastosowanie różnic skończonych do obliczenia dźwignarów zamkniętych w planie". Przegląd Techniczny 1930.
63. В.З. Власов - *"Избранные труды" том 1. Модера 1962.*
64. Cz. Woźniak - " Fibrous media as continous models of frames and lattices". Bull. Académie Polonaise des Sciences IV,7,1964.

Spis treści:

I. WSTĘP

1.1. Cel pracy.	1
1.2. Przegląd literatury.	2
1.3. Założenia i oznaczenia.	8

II. GEOMETRIA RÓŻNICOWA POWIERZ-
CHNIOWEGO ZBIORU PUNKTÓW.

2.1. Płaski zbiór punktów.	13
2.2. Powierzchniowy zbiór punktów.	18
2.2.1. Wektory jednostkowe i działania nad nimi	20
2.2.2. Geometria zbioru odkształconego	32

III. OGÓLNE RÓWNANIA TEORII POWŁOK
PRĘTOWYCH.

3.1. Siły wewnętrzne	39
3.2. Równania równowagi elementu.	40
3.3. Związki pomiędzy siłami i momentami wewnętrznymi a odkształceniami i przemieszczeniami powierzchni środkowej.	46
3.4. Warunki brzegowe.	51

IV. NIEKTÓRE PRZYPADKI POWIERZ-
CHNIOWYCH KONSTRUKCJI
PRĘTOWYCH

4.1. Konstrukcje w stanie półmomentowym i bezmomentowym.	53
4.1.1. Osłowo symetrycznie obciążona, prętowa kopuła kulista w stanie bezmomentowym.	56
4.1.2. Tarcza prętowa.	57
4.2. Konstrukcje w stanie momentowym.	62
4.2.1. Kołowa powłoka walcowa	63

4.2.2. Zaburzenia brzegowe w kołowej powłoce walcowej. 69.

4.2.3. Ruszt płaski. 73.

