Zagadnienie wzmocnienia w uogólnionym płaskim stanie naprężenia ośrodka plastycznego

Wojciech Szczepiński

Tematem pracy jest zagadnienie wzmocnienia materiału w płaskim stanie naprężenia. Składa się ona z dwóch części: doświadczalnej i teoretycznej. W części doświadczalnej dokonano przeglądu prac teoretycznych i doświadczalnych poświęconych wpływowi odkształceń plastycznych na warunek plastyczności, po czym omówiono wyniki własnych doświadczeń. Wskazują one, że dopiero przebadanie całej krzywej naprężenie-odkształcenie przy powtórnym obciążeniu pozwala wnioskować, która z wielu możliwych hipotez wzmocnienia stanowi w określonych warunkach najlepsze przybliżenie rzeczywistych własności materiału. W drugiej części zaproponowano metodę kolejnych przybliżeń przy rozwiązywaniu zagadnień uogólnionego płaskiego stanu naprężenia z uwzględnieniem wzmocnienia. Przyjęto mieszaną hipotezę wzmocnienia, uwzględniającą zarówno przesuwanie się powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń, jak i zmianę jej wymiarów w czasie obciążania. Rozwiązano kilka przykładów liczbowych z zakresu tłoczenia cienkościennych powłok. Pokazują one wpływ wzmocnienia na geometrię wytłoczki oraz na stan naprężenia. Porównano ponadto różnice ilościowe jakie dają dwie podstawowe hipotezy wzmocnienia, a mianowicie izotropowa i kinematyczna.

Podane w części drugiej p. 2 równania stanowią jednocześnie podstawę teorii płaskiego stanu naprężenia ciała plastycznego, wykazującego jednoczesną anizotropię i niejednorodność.

Część I

Doświadczalna analiza wpływu odkształceń plastycznych na warunek plastyczności

Zagadnienie wpływu odkształceń plastycznych na warunek plastyczności jest jednym z najbardziej aktualnych problemów teorii plastyczności. W ostatnich latach opublikowano szereg prac teoretycznych wysuwając coraz to nowe koncepcje zachowania się powierzchni plastyczności po odkształceniu plastycznym. Niestety jednak liczba prac doświadczalnych na ten temat jest wysoce niewystarczająca. Kilka zaledwie prac podających wyniki dla niektórych tylko materiałów nie może stanowić dostatecznej podstawy dla żadnej z tych teorii. Celem niniejszej pracy było wskazanie, że istnieje możliwość przeprowadzenia stosunkowo prostego doświadczenia, które może dać szereg nowych informacji o wpływie odkształceń plastycznych na kształt powierzchni plastyczności. Jednym z zasadniczych powodów braku prac doświadczalnych nad powierzchnią plastyczności jest ich złożoność wynikająca ze stosowania próbek rurkowych i konieczność posiadania specjalnych maszyn wytrzymałościowych do złożonego obciążania. W niniejszej pracy stosowano płaskie próbki wycinane z blachy. Obciążono je na zwykłej zrywarce hydraulicznej. Do pomiaru odkształceń zastosowano uniwersalny ekstensometr mechaniczny prostej budowy. Otrzymane wyniki porównano z innymi pracami doświadczalnymi, oraz z istniejącymi teoriami wzmocnienia.

1. Hipotezy wzmocnienia.

Najstarszą i najszerzej stosowaną w obliczeniach praktycznych jest hipoteza izotropowego wzmocnienia, która zakłada równomierne rozszerzenie się początkowej powierzchni plastyczności. Dla płaskiego stanu naprężenia ze stałymi kierunkami głównymi ilustruje ją rys. 1. Początkowa elipsa Hubera-Misesa nie zmienia po rozszerzeniu się ani kształtu ani orientacji w przestrzeni naprężeń. Najpoważniejszym z argumentów przeciwko tej hipotezie jest to, że nie uwzględnia ona efektu Bauschingera, pokazanego schematycznie dla przypadku rozciągania-ściskania na rys. 2. Zgodnie z rys. 1 zależność pomiędzy naprężeniem i odkształceniem dla rozciągania i następnego ściskania powinna przebiegać wzdłuż linii ABC. Jednakże w rzeczywistości zależność ta przebiega zgodnie z linią AB'C'. Jak później zostanie wykazane hipoteza izotropowego wzmocnienia stanowi, mimo tego braku, lepsze przybliżenie w wielu praktycznych obliczeniach aniżeli inne ostatnio proponowane teorie.

rys.1

Jedną z najbardziej rozpowszechnionych współczesnych hipotez wzmocnienia jest tzw. kinematyczna hipoteza wzmocnienia zaproponowana przez W. Pragera [1,2] i niemal równocześnie przez I. Iszlinskiego [3]. Hipoteza ta została później nazwana przez J. Kadaszewicza i W. Nowożyłowa [4] idealnym efektem Bauschingera. Zasadę jej dla warunku plastyczności Treski przedstawia rys. 3. Początkowa powierzchnia plastyczności po obciążeniu po za jej granice nie zmienia swego kształtu tylko przesuwa się jak sztywna rama, pod naciskiem trzpienia umieszczonego na końcu drogi obciążania. Pomiędzy ramą a trzpieniem nie ma tarcia, tak że możliwe jest tylko przemieszczenie normalne do powierzchni ramy. Na rys. 2 interpretacją tej hipotezy będzie linia DE, stanowiąca przedłużenie wykresu ściskania dla materiału wyjściowego. Zamiast drogi OABC przy izotropowym wzmocnieniu mamy teraz drogę OADE.

Odmianę hipotezy kinematycznej zaproponował H. Ziegler [5].

W tym przypadku rama przedstawiająca początkowy warunek plastyczności /rys. 4/ zostaje przesunięta w kierunku drogi obciążania.

Istnieje ponad to szereg innych propozycji zachowania się warunku plastyczności, opartych na różnych wariantach przesuwania się poszczególnych boków wieloboku Treski [6,7]. Boki te mogą przesuwać się w sposób niezależny od pozostałych /rys. 5ab/, lub zależny /rys. 5c/. Jedną z bardziej aktualnych jest hipoteza wzmocnienia oparta na teorii poślizgów Batdorfa i Budiansky'ego [8]. Prowadzi ona do wniosku, że po przekroczeniu przez drogę obciążenia granicy początkowego warunku plastyczności, powstaje na powierzchni plastyczności róg utworzony przez styczną do początkowej powierzchni /rys. 6/, której pozostała część nie zmienia się. Zagadnienie rogu i związanej z nim osobliwości jest obecnie bardzo szeroko dyskutowane [9, 10, 11, 12, 13].

Omówione koncepcje teoretyczne, które wniosły wiele nowego do teorii plastyczności, nie mają dostatecznego udokumentowania doświadczalnego. W zastosowaniach praktycznych poprostu nie wiadomo, która z nich w określonych warunkach stanowi najlepsze przybliżenie. W tej sytuacji każda nowa propozycja, o ile tylko nie zawiera logicznych sprzeczności, może konkurować z już istniejącymi hipotezami.

2. Przegląd prac doświadczalnych.

Prace doświadczalne nad wpływem odkształceń plastycznych na kształt powierzchni plastyczności można podzielić na dwie grupy. Pierwszą poświęconą wyłącznie sprawdzeniu istnienia rogi i drugą, w której starano się otrzymać możliwie dokładne informacje o kształcie powierzchni.

Doświadczenia grupy pierwszej [14 - 19] polegają na poddawaniu cienkościennych próbek rurkowych złożonemu stanowi naprężenia /jednoczesne rozciąganie i skręcanie lub rozciąganie i ciśnienie wewnętrzne/, przy czym kierunek drogi obciążenia w przestrzeni naprężeń jest raptownie zmieniany. W przypadku istnienia rogu przyrosty odkształcenia plastycznego, wywołane różnie skierowanymi przyrostami naprężeń, mają różne kierunki. Jeżeli jednak zamiast rogu istnieje tylko silnie zakrzywiony wierzchołek w powierzchni plastyczności, kierunek przyrostu odkształcenia plastycznego jest skierowany normalnie do powierzchni i nie zależy od kierunku przyrostu naprężenia. Doświadczenia tego rodzaju nie mogą jednak, na co zwrócił uwagę A. Phillips [19], jednoznacznie udowodnić istnienia rogu, gdyż niemożliwe jest zmierzenie nieskończenie małych przyrostów odkształcenia, a przy pomiarze małych ale skończonych przyrostów ostry róg i silne zakrzywienie powierzchni dają te same wyniki. Wszystkie prace tej grupy potwierdzają istnienie silnie zakrzywionej części powierzchni plastyczności w miejscu styku z końcem drogi obciążania. Co do istnienia rogu istnieją jednak różne opinie w różnych pracach, ale wszystkie wyniki wskazują, że nawet w przypadku pojawienia się rogu jest on bardzo tępy i w żadnym przypadku nie można oczekiwać tak silnej osobliwości powierzchni plastyczności jak na rys. 6.

Powyższe prace nie dają praktycznie żadnych danych co do kształtu i zachowania się całej powierzchni plastyczności pod wpływem odkształceń plastycznych. Dokładniejszemu zbadaniu tego zagadnienia poświęcone są prace grupy drugiej. Stanowią one kontynuację klasycznej pracy Taylora i Quinneya [20] z 1931 r., w której rurkowe próbki ze stali, miedzi i aluminium były najpierw rozciągane w kierunku osiowym znacznie powyżej granicy plastyczności, a następnie po częściowym odciążeniu obciążane dodatkowo momentem skręcają-

Do świadczenia grup y pierwszej

cym przy utrzymywaniu stałej wartości naprężeń rozciągających. Dla każdej próbki otrzymywano wykres wydłużenia w zależności od momentu skręcającego. Jako granicę plastyczności przyjmowano przecięcie przedłużenia łagodnej części krzywej z osią momentów, a nie naprężenia przy których zaczyna się krzywoliniowa część wykresu. Otrzymana w ten sposób kr-zywa na płaszczyźnie $\sigma_x \tau_{xy}$ jest elipsą, odpow-iada-jącą warunkowi Hubera-Misesa. Wynik ten odpowiada hipotezie izotropowego wzmocnienia, która dla innego przypadku obciążenia została schematycznie pokazana na rys. 1. Jest rzeczą ciekawą, że w literaturze [21, 22] doświadczenia Taylora i Quinneya podawane są jako dowód słuszności warunku Hubera-Misesa dla metali, podczas gdy w rzeczywistości nie badali oni zupełnie początku odkształceń plastycznych materiału wyjściowego, a odrazu wszystkie próbki wstępnie odkształcali plastycznie, w kierunku osiowym. W tych warunkach praca ta nie może być interpretowana jako potwierdzenie kwadratowego warunku plastyczności, a jedynie jako pierwsza i bardzo cenna praca nad wpływem odkształceń plastycznych na powierzchnię plastyczności.

W pracy Naghdiego, Essenburga i Koffa [23], opublikowanej w 1958 r., rurkowe próbki ze stopu aluminium były najpierw skręcane powyżej granicy plastyczności, a następnie po odciążeniu poddawane różnym wariantom jednoczesnego rozciągania i skręcania. Przy powtórnym obciążaniu granicę plastyczności utożsamiano z granicą proporcjonalności. Drogę obciążania w przestrzeni naprężeń przedstaw-ia ry-s. 7a. Podobny charakter miały doświadczenia Ivey'a [24] opublikowane w 1961 r. Rurkowe próbki z różnych stopów aluminium poddawano n ajpierw skręcaniu po za granicą plastyczności a następnie po częściowym odciążeniu /rys. 7b/, obciążano je w ró-żny sposób jednoczesnym rozciąganiem i skręcaniem.

Porównanie obydwu prac wskazuje, że reprezentują one dwa różne sposoby podejścia do badania kształtu powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego materiału. W pierwszym /rys. 7a/ bada się powierzchnię plastyczności materiału o nowych własnościach nabytych dzięki wstępnemu odkształceniu. W drugim /rys. 7b/ otrzymuje się aktualną powierzchnię, istniejącą w trakcie obciążenia. Przy dużych wartościach wstępnych naprężeń stycznych τ Ivey uzyskał nie tylko przejście punktu B, odpowiadającego pojawieniu się odkształceń plastycznych przy odciążaniu, powyżej osi σ_x , ale również znaczne spłaszczenie krzywej plastyczności. Orientacyjnie przy wstępnych naprężeniach τ_A 2-krotnie przewyższających początkową granicę plastyczności τ_{A_0} odcinek AB jest dwukrotnie mniejszy od odcinka A_oB_o dla materiału wyjściowego. W obydwu omawianych pracach przerywano obciążenie natychmiast po pojawieniu się pierwszych oznak zakrzywienia wykresu naprężenie-odkształcenie i wobec tego nie uzyskano całkowicie jasnego obrazu zachowania się materiału. Jednakże istnieje dość bogaty materiał doświadczalny dotyczący badania efektu Bauschingera przy skręcaniu rurkowych próbek w przeciwnych kierunkach. Specjalnie interesujące są wyniki Deaka [25] , który mierzył odkształcenia zarówno przy obciążeniu jak i odciążaniu za pomocą bardzo czułego specjalnie zaprojektowanego urządzenia. Otrzymane wyniki wskazują, że po nawet stosunkowo niewielkim odkształceniu plastycznym przez skręcenie, wykres odciążania jest krzywoliniowy praktycznie od samego początku. Wynika stąd, że położenie punktu B na rys. 7b zależy w bardzo znacznym stopniu od dokładności pomiaru odkształcenia i przy bardzo dokładnych pomiarach nie wykluczone jest pokrywanie się punktów A i B. Jako przykład może służyć jeden z rysunków z pracy Deaka /rys. 8/, pokazujący wyniki dla szeregu próbek z odwęglonej stali przy obciążaniu do odkształcenia ca 3,6 % i następnym odciążaniu. Dla stali tej otrzymano analogiczne wykresy dla różnych odkształceń wstępnych aż do 19,2 %. Wszystkie one pokazują, że linia odciążania jest zakrzywiona praktycznie od samego początku. Taki sam wynik otrzymano dla wyżarzonej miedzi. W tej sytuacji trudno jest mówić o jakiejś powierzchni plastyczności wewnątrz której materiał jest liniowo sprężysty. Wydaje się niezbędnym dla jednoznaczności różnych badań doświadczalnych przyjmować jako powierzchnię plastyczności powierzchnię określoną przez stany naprężenia, odpowiadające jakimś określonym niewielkim odkształceniom trwałym. Można tu przyjąć przez analogię do $\sigma_{0,2}$, określającego tzw. umowną granicę plastyczności przy próbie rozciągania, powierzchnię odpowiadającą stanom naprężenia, które dają intensywność odkształcenia równą 0,2 %. W dotychczasowych pracach doświadczalnych wartość tych odkształceń była milcząco przyjmowana jako równa granicy wykrywalnej przez przyrząd pomiarowy i zależna od jego czułości.

Inną drogę obciążania zastosowano w pracy Hu i Bratta [26] z 1958 r. Cienkościenne próbki rurkowe ze stopu aluminium poddawano najpierw rozciąganiu powyżej granicy plastyczności, a następnie różnym kombinacjom rozciągania i ciśnienia wewnętrznego. Również i w tej pracy wyznaczano jedynie punkty, odpowiadające granicy proporcjonalności. W pracy Tałypowa [27] rurkowe próbki z niskowęglowej stali były również poddawane jednoczesnemu rozciąganiu i ciśnieniu wewnętrznemu.

Jeszcze inna kombinacja obciążania została zastosowana w pracach Gilla i Parkera [28] oraz Parkera i Kettlewella [29]. W tym przypadku rurkowe próbki były obciążane jednoczesnym skręcaniem i ciśnieniem wewnętrznym. Jednakże w doświadczeniach tych badano jedynie trzy punkty na powierzchni plastyczności, wobec czego trudno jest wysnuć jakieś ogólniejsze wnioski o jej kształcie. Cenną zaletą obydwu prac jest wyznaczenie krzywych naprężenie-odkształcenie przy powtórnym obciążani u wstępnie odkształconego materiału. Krzywe te są praktycznie równoległe do krzywych dla materiału początko wego z wyłączeniem krótkie go początkowego odcinka silnej krzywizny, analogiczne go do obserwowanego przy badaniu efektu. Bauschingera. Są one przesunięte o kilka procent w kierunku osi naprężeń względem krzywych początkowych.

3. Własne badania kształtu powierzchni plastyczności

W celu wyjaśnienia zasady poniższych doświadczeń rozpatrzmy warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_{pl}^2 .$$

Wyrażenie to jest ważne dla ciała izotropowego. Dla ustalonych kierunków x i y warunek powyższy można przedstawić w przestrzeni naprężeń σ_x σ_y τ_{xy} przez pewną elipsoidę /rys. 9/. Różne drogi obciążenia rurkowych próbek stosowane w wyżej omówionych pracach są reprezentowane przez elipsy leżące na powierzchni elipsoidy. Równoczesne rozciąganie i skręcanie [20, 23, 24] przedstawiają elipsy AB i AC, rozciąganie i ciśnienie wewnętrzne [26 , 27] - elipsa BDEC i wreszcie jednoczesne skręcanie i ciśnienie wewnętrzne [28, 29] - elipsy AFD lub AGE.

Rozpatrzmy teraz elipsę BFHGC otrzymaną przez przecięcie elipsoidy z płaszczyzną $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{pl}$ prostopadłą do płaszczyzny σ_x σ_y. Podstawiając zamiast σ_{pl} sumę $\sigma_x + \sigma_y$ do warunku plastyczności otrzymamy zależność $\sigma_x \sigma_y = \tau_{xy}^2$, która musi być spełniona wzdłuż tej elipsy. Jak łatwo zauważyć z wykresu Mohra /rys. 10/ jest to możliwe jedynie wtedy gdy jedno z naprężeń głównych jest równe zeru. Wynika stąd, że punkty leżące na elipsie EFHGC odpowiadają stanom jednoosiowego rozciągania w różnych kierunkach względem osi x. Na przykład punkt H przedstawia rozciąganie w kierunku tworzącym z osią x kąt 45°.

W niniejszej pracy badano zmiany kształtu powyższej elipsy dla początkowo izotropowego materiału, po wstępnym rozciągnięciu go w kierunku osi x znacznie powyżej granicy plastyczności. Doświadczenie wykonywano w następujący sposób. Najpierw dużą próbkę wyciętą z blachy w kierunku x poddawano rozciąganiu na zrywarce hydraulicznej. Próbkę odciążano po osiągnięciu określonych odkształceń trwałych. Następnie po odciążeniu wycinano z niej małe próbki pod różnymi kątami α /rys. 11/ względem osi x. Każda z małych próbek była obciążona jednoosiowym rozciąganiem na zrywarce hydraulicznej, przy czym zdejmowano wykres naprężenie-odkształcenie. W celu uniknięcia dodatkowego zginania próbek mocowano je w szczękach wahliwych. Do pomiaru odkształceń użyto tensometr mechaniczny o wartości podziałki czujnika, odpowiadającej $\varepsilon = 2.10^{-5}$.

Do badań użyto blachę o grubości ca 6,5 mm ze stopu aluminium o składzie chemicznym: 4,7 % Mg, 0,4 % Mn, 0,5 % Zn, 0,1 % Si, 0,15 % Fe oraz 0,1 % Cr. Pierwszą serię prób poświęcono sprawdzeniu czy materiał ten jest izotropowy. W tym celu wycięto z niego szereg próbek pod kątami $\alpha = 0^{\circ}, 15^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 75^{\circ}$ i 90°, względem przyjętego uprzednio kierunku x równoległego do krótszego brzegu arkusza. Otrzymane wykresy pokazano na rys. 12-15 Wartości wyraźnie zaznaczonej granicy plastyczności dla różnych kierunków bardzo nieznacznie odchylają się od średniej wartości 1330 kG/cm². Największe odchylenie 4,5 % stwierdzono dla kierunku $\alpha = 45^{\circ}$. Można więc przyjąć, że materiał początkowy jest niemal izotropowy w płaszczyźnie arkusza, dla rozpatrywanego sposobu obciążania.

W drugiej serii doświadczeń wycinano próbki w tych samych kierunkach co w pierwszej serii z dużej próbki, w której najpierw przez rozciąganie w kierunku x wywołano odkształcenie trwałe ε^{p} = 1,92 %. Wykresy rozciągania każdej z małych próbek przedstawiono również na rys. 12-15 w celu porównania z wykresami materiału początkowego. Jak widać po początkowym odcinku o dużej krzywiźnie wszystkie wykresy dla materiału wstępnie odkształconego są równoległe do wykresów materiału początkowego i są stosunkowo niewiele przesunięte w kierunku osi naprężeń. Jednakże granica proporcjonalności σ_{prop} bardzo wyraźnie zależy od kąta α. Dla $\alpha = 0^{o}$ wynosi ona 1600 kG/cm^2, a dla $\alpha = 90^{o}$ jedynie 770 kG/cm^2. Wobec tego jednak, że silnie zakrzywiony odcinek wykresów jest bardzo krótki i nie przekracza 0,5% odkształcenia trwałego wydaje się uzasadnione określać granicę plastyczności przez ekstrapolację łagodnej części krzywych do przecięcia z przedłużeniem prostoliniowej początkowej części wykresów. Sposób wyznaczenia ekstrapolowanej granicy plastyczności σ_{ex} zaznaczono liniami przerywanymi na wykresach. Tak samo określano granicę plastyczności w pracy Taylora i Quinneya [20]. Jak widać z wykresów granica σ_{ex} jest bardzo nieznacznie anizotropowa.

Otrzymane wyniki dla pierwszej i drugiej serii doświadczeń przedstawiono w przestrzeni naprężeń $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$. Rys. 16a przedstawia rzut na płaszczyznę $\sigma_x \sigma_y$ za ś rys. 16b rzut na płaszczyznę AOK /rys. 9/ zawierającą oś τ_{xy} oraz prostopadłą do dłuższej osi elipsoidy. Trójkątami zaznaczono punkty doświadczalne odpowiadające granicy plastyczności σ_o materiału początkowego. Kółka odpowiadają granicy proporcjonalności σ_{prop}, a kwadraty - ekstrapolowanej granicy plastyczności σ_{ex}. Linia przerywana, przedstawiająca początek płynięcia materiału początkowego, odpowiada teoretycznej elipsie BFEGO z rys. 9 dla materiału izotropowego. Wobec bardzo nieznacznej anizotropii badanego materiału niewiele różni się ona od tej elipsy. Linią ciągłą zaznaczono granicę proporcjonalności σ_{prop} materiału wstępnie odkształconego dla różnych stanów naprężenia, zaś linią kreska-kropka ekstrapolowaną granicę plastyczności σ_{ex}. Wyraźnie widać, że ta ostatnia może być w przybliżeniu interpretowana jako równomierne rozszerzenie początkowej elipsy dla materiału początkowego.

Jak już poprzednio wspomniano przy wyznaczaniu granicy proporcjonalności wstępnie odkształconego materiału występują poważne trudności, gdyż krzywa naprężenie-odkształcenie początkowo odchyla się bardzo nieznacznie od linii prostej i określenie punktu początku tego odchylenia zależy w znacznym stopniu od dokładności przyrządu pomiarowego i subiektywnej oceny odczytującego. W tej sytuacji wydaje się celowe określać powierzchnię plastyczności przez stany naprężenia, odpowiadające jakimś określonym niewielkim odkształceniom trwałym. Na rys. 17 przedstawiono w dużej skali początkowe części wykresów pokazanych poprzednio na rys. 12-15. Rysunki te wyraźnie pokazują, że wobec dużej stromości krzywych dokładne określenie położenia granicy proporcjonalności jest praktycznie niemożliwe. Znacznie lepiej przedstawia się jednak sprawa wyznaczenia naprężeń, odpowiadających nawet tak małym odkształceniom trwałym jak $\varepsilon^{p} = 0{,}01\ \%$ lub $\varepsilon^{p} = 0{,}02\ \%$. W celu otrzymania jaśniejszego obrazu zachowania się wstępnie odkształconego materiału wyznaczono ponadto dla wszystkich próbek na podstawie rys. 18 naprężenia, odpowiadające odkształceniom trwałym 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 i 0,5 %. Wyniki przedstawiono na rys.19, na którym poszczególne krzywe reprezentują stany naprężenia, odpowiadające różnym wartościom odkształceń trwałych przy ponownym obciążeniu wstępnie odkształconego materiału. Im większe odkształcenie tym bardziej otrzymane krzywe zbliżone są do elips izotropowego wzmocnienia.

Porównajmy obecnie otrzymane wyniki z jedną z kinematycznych hipotez wzmocnienia /rys. 20/, która w naszym przypadku po wstępnym obciążeniu naprężeniami σ_x/odcinek OB/ odpowiada przesunięciu początkowej elipsoidy zaznaczonej linią przerywaną o odcinek B_0B wzdłuż osi σ_x. Stany jednoosiowego rozciągania w różnych kierunkach względem osi x przedstawia teraz krzywa BHC, leżąca na przesuniętej elipsoidzie. Tę krzywą przedstawiono na rys. 21 za pomocą linii kreskowanej. Liniami ciągłymi zaznaczono granicę proporcjonalności oraz granice odpowiadające odkształceniom trwałym 0,01 % i 0,02 %. Jak widać w tym przypadku kinematyczna hipoteza wzmocnienia jakościowo dość dobrze opisuje kształt nowej powierzchni plastyczności, jednakże jak to później zostanie uzasadnione we wnioskach znacznie lepsze przybliżenie dla wielu praktycznych obliczeń stanowi izotropowa teoria wzmocnienia.

Trzecią serię próbek poświęcono dokładniejszemu zbadaniu istnienia rogu na powierzchni plastyczności po wstępnym odkształceniu plastycznym. Doświadczenia przeprowadzono w podobny sposób jak poprzednio. Najpierw rozciągnięto dużą próbkę, wyciętą w kierunku x, aż odkształcenie trwałe osiągnęło wartość 4,2 %. Po odciążeniu wycięto z niej małe próbki pod kątami $\alpha = 0^o$, 5^o, 10^o, 15^o, 20^o oraz 25^o względem osi x. W celu uzyskania większej pewności wycięto po dwie próbki dla każdego kierunku. Każdą z tych próbek następnie rozciągano mierząc odkształcenia. Otrzymane wykresy przedstawiono na rys. 22, na podstawie którego wyznaczono naprężenia, odpowiadające odkształceniom trwałym 0,1 i 0,2 %. Dla określenia naprężeń powodujących odkształcenia trwałe 0,01 % i 0,02 % wykonano wykresy w większej skali przedstawione na rys. 23. W tym przypadku nie wyznaczano granicy proporcjonalności wobec dużej niepewności w odczytaniu jej wartości. Ostateczne wyniki pokazano na rys. 24 w postaci rzutów otrzymanych krzywych na płaszczyzny $\sigma_x \tau_{xy}$ oraz $\sigma_x \sigma_y$. Krzywa $\sigma_{0,01}$ wykazuje bardzo silne zakrzywienie, ale nie posiada rogu. Oczywiście nie przesądza to faktu, że nie istnieje róg dla granicy proporcjonalności ale wydaje się, że nawet przy bardzo dużej dokładności pomiarów wątpliwe jest jednoznaczne stwierdzenie jego występowania.

4. Wnioski

Zarówno otrzymane tu wyniki jak i bliższa analiza krzywych naprężenie-odkształcenie podanych w pracach Gilla i Parkera [28] i Parkera i Kettlewella [29] oraz w pracach poświęconych badaniu efektu Bauschingera wskazują, że dla praktycznych obliczeń w ogólnym przypadku obciążania ze zmianą znaku naprężeń izotropowa hipoteza wzmocnienia mimo szeregu braków jest najbardziej zbliżona do rzeczywistości ze wszystkich istniejących hipotez. Wszystkie wykresy naprężenie-odkształcenie można przedstawić schematycznie we współrzędnych $\sigma_i \ \varepsilon_i$ jak na rys.25. Materiał początkowy został wstępnie obciążony wg linii OAB, a następnie odciążony do punktu C. Ponowne obciążenie innym stanem naprężenia przedstawia krzywa CDE. We wszystkich doświadczeniach linia powtórnego obciążenia po początkowym krótkim odcinku silnego zakrzywienia przebiega z bardzo niewielkimi odchyleniami równolegle do przedłużenia BG linii wstępnego obciążenia i jest stosunkowo niewiele przesunięta względem niej. Widać stąd, że izotropowa hipoteza wzmocnienia, która odpowiada linii CBG przy ponownym obciążaniu, dość dobrze odpowiada rzeczywistym własnościom metali. Znacznie gorsze przybliżenie stanowi linia CDF, przy czym punkt D określa granicę proporcjonalności przy powtórnym obciążaniu. Należy jednak podkreślić, że w przypadku aktywnego obciążania /bez odciążania w czasie procesu/ hipoteza kinematyczna zupełnie dobrze opisuje rzeczywiste warunki. Z powyższego widać jak niepełny obraz dają doświadczenia, w których przerywa się obciążanie natychmiast po pojawieniu się pierwszych odkształceń plastycznych [23, 24, 26].

5. Uwagi o warunku anizotropii R. Hilla.

R. Hill [21] opisuje warunek plastyczności blachy, wykazującej anizotropię wskutek procesu walcowania lub innego rodzaju obróbki plastycznej, wyrażeniem

$$(G+H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H+F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1,$$

gdzie F, G, H i N są stałymi, które należy wyznaczyć doświadczalnie, zaś x jest kierunkiem walcowania. Kierunek jest do niego prostopadły w płaszczyźnie arkusza. Geometryczną reprezentacją tego warunku w przestrzeni naprężeń $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$ jest elipsoida ze środkiem w początku układu i dwiema osiami leżącymi w płaszczyźnie $\sigma_x \sigma_y$, a trzecią pokrywającą się z osią τ_{xy}. W zależności od wartości stałych elipsoida ma różne wielkości półosi oraz ulega obrotowi względem osi τ_{xy}. Dla F = G = H =0,5, N = 1,5 warunek ten przechodzi w warunek Hubera-Misesa dla ośrodka izotropowego, którego geometryczną reprezentację przedstawia elipsoida na rys. 9. Powyższe wyrażenie dla anizotropowego arkusza blachy nie uwzględnia oczywiście efektu Bauschingera, który jest bardzo wyraźny w materiale poddanym obróbce plastycznej np. przez rozciąganie. Jednakże dla blachy walcowanej nie prowadzi to do znaczniejszych błędów.

Podstawowe znaczenie ma zagadnienie wyznaczania wielkości stałych F,G,H i N. Metoda podana w pracy Hilla w nawiązaniu do doświadczeń Klinglera i Sachsa [30] polega na wycinaniu z badanego arkusza blachy próbek w różnych kierunkach i wyznaczaniu ich granic plastyczności przez próbę jednoosiowego rozciągania. Jeżeli dla próbki wyciętej pod kątem α_i, względem przyjętego kierunku x, granica plastyczności wynosi σ_i to naprężenia w kierunkach x i y w tej próbce równają się:

$$\sigma_x = \sigma_i \cos^2\alpha_i \quad , \qquad \sigma_y = \sigma_i \sin^2\alpha_i \quad , \qquad \tau_{xy} = \sigma_i \sin\alpha_i \cos\alpha_i \, .$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do powyższego warunku plastyczności i dokonaniu przekształceń otrzymujemy równanie

$$F\sin^2\alpha_i + G\cos^2\alpha_i + H + (2N - F - G - 4H)\sin^2\alpha_i \cos^2\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \, .$$

Wycinając cztery próbki w różnych kierunkach otrzymujemy w ten sposób układ czterech równań z czterema niewiadomymi stałymi F, G, H i N. Niestety, jednak przeprowadzone w ramach niniejszej pracy próby wyznaczenia tych stałych dla doświadczeń opisanych w p. 3, zawiodły, gdyż układ równań za każdym razem okazywał się sprzeczny. Przeprowadzona ogólna analiza wykazała, że w żadnym przypadku niemożliwe jest wyznaczenie stałych w sposób zaproponowany przez Hilla. Oznaczmy kąty pod jakimi zostały wycięte cztery próbki przez α_1, α_2, α_3, α_4. Przez odejmowanie otrzymanych równań można ich układ sprowadzić do postaci

$$A + \tfrac{1}{2}B(\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \, ,$$

$$A + \tfrac{1}{2}B(\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_3) = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_3^2} \, ,$$

$$A + \tfrac{1}{2}B(\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_4) = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_4^2} \, ,$$

gdzie $A = F - G$, $B = 2N - F - G - 4H$. Powyższe trzy równania z dwiema niewiadomymi A i B są jak widać sprzeczne. Znaczy to że niemożliwe jest wyznaczenie stałych F, G, H i N na podstawie wyników jednoosiowego rozciągania różnie zorientowanych próbek. Przynajmniej jeden pomiar musi być wykonany przy innym stanie naprężenia. Jak łatwo wykazać ten czwarty pomiar ma bardzo silny wpływ zarówno na położenie osi elipsoidy plastyczności jak i na wymiary jej półosi.

Część II

Uogólniony płaski stan naprężenia ośrodka plastycznego ze wzmocnieniem

Liczba znanych rozwiązań teorii plastyczności z uwzględnieniem wzmocnienia materiału jest znikomo mała. Dotyczy to w szczególności przypadków dużych odkształceń plastycznych, do których m.in. należą zagadnienia dotyczące obróbki plastycznej metali. Wywołane to jest złożoną zależnością warunku plastyczności od stanu odkształcenia, która pozwala efektywnie rozwiązywać jedynie przypadki elementarnych stanów naprężenia /np. skręcanie prętów o kołowym przekroju, zginanie i tp./. Przy przyjęciu hipotezy izotropowego wzmocnienia udaje się niekiedy rozwiązać zagadnienie prostego obciążania, przy którym wszystkie składowe stanu naprężenia rosną w tym samym stosunku. Obowiązuje wtedy tzw. prawo jednej krzywej, głoszące, że krzywa intensywność naprężeń stycznych σ_i - intensywność odkształceń postaciowych ε_i dla danego materiału nie zależy od drogi obciążenia. Prawo to stosowane jest również w przypadkach, gdy droga obciążania niezbyt różni się od obciążania prostego. Z ciekawszych rozwiązań można tu wymienić pracę W. . Sokołowskiego [31] dotyczącą pewnych szczególnych problemów płynięcia plastycznego między niekołowymi powierzchniami cylindrycznymi. Znacznie gorzej przedstawia się jednak sprawa, gdy sposób obciążania wyraźnie odbiega od prostego obciążania. Dotyczy to ogromnej większości procesów obróbki plastycznej, dla których rozwiązania ze wzmocnieniem są nieznane. Dla celów praktycznych opracowano szereg metod inżynierskich [32] opartych na bardzo zgrubnych założeniach i dających jedynie szacunkową ocenę rozwiązania. Brak jest jednak rozwiązań ścisłych, które są niezbędne chociażby dla sprawdzenia stopnia dokładności metod przybliżonych. Pewną próbę stanowią tu prace H. W. Swifta [33] i R. Hilla [21], w których podano rozwiązania ciągnienia rury i wytłoczki z uwzględnieniem wzmocnienia. Ażeby uzyskać rozwiązanie przyjęto tam jednak drastyczne założenie, że intensywność odkształceń postaciowych w każdym punkcie równa się odkształceniu obwodowemu. W obu przypadkach założenie to daje dość dobre wyniki. Różnica nie przekracza 5 procent, jeżeli redukcja średnicy jest mniej niż dwukrotna, ale przy większej redukcji szybko rośnie. W innych zagadnieniach rozwiązanych w niniejszej pracy stosowanie takiego założenia jest niemożliwe, gdyż daje ono błędy rzędu 20 procent i więcej.

Zaproponowana w niniejszej pracy metoda kolejnych przybliżeń oparta jest na spostrzeżeniu, że w wielu praktycznie ważnych przypadkach plastycznego odkształcenia metali jak ciągnięnie rur i wytłoczek, obciskanie, roztłaczanie, wyciskanie i tp. rozkład prędkości płynięcia materiału w nieznacznym stosunkowo stopniu zmienia się przy uwzględnieniu wzmocnienia materiału. Jest to zrozumiałe, gdyż przy takich procesach w określonym czasie musi przejść przez narzędzie określona ilość materiału. We wszystkich tych przypadkach można zastosować, w celu uwzględnienia zjawiska wzmocnienia w rozwiązaniu, podaną poniżej metodę kolejnych przybliżeń. Polega ona na wstępnym przyjęciu pewnego pola prędkości płynięcia materiału, możliwie bliskiego rzeczywistemu poszukiwanemu polu. Tak przyjęte prędkości w każdym punkcie pozwalają na prześledzenie drogi każdej cząstki materiału i obliczenie przez całkowanie wzdłuż tej drogi, intensywności odkształceń postaciowych oraz wielkości odkształceń w każdym punkcie. Umożliwia to następne wyznaczenie, na podstawie przyjętej hipotezy wzmocnienia oraz znanego wykresu rozciągania dla rozpatrywanego materiału, nowego warunku plastyczności we wszystkich punktach badanego obszaru. Tak otrzymana niejednorodność warunku plastyczności stanowi punkt wyjścia dla obliczenia następnego przybliżenia. Rozwiązując mianowicie ponownie problem dla ośrodka z poprzednio otrzymaną niejednorodnością możemy wyznaczyć nowe pole prędkości płynięcia materiału i powtórzyć następnie powyższą procedurę do chwili, gdy dwa kolejne przybliżenia dadzą wystarczająco zbliżone wyniki. Podane dalej rozwiązania szeregu konkretnych przypadków wykazały, że metoda ta jest bardzo szybko zbieżna. Okazuje się, że jeżeli jako wyjściowe pole prędkości płynięcia przyjąć pole otrzymane z rozwiązania dla ośrodka bez wzmocnienia, to wystarczy obliczyć jedynie dwa przybliżenia. Różnica między pierwszym a drugim nie przekracza 3 procent. Obliczania dalszych przybliżeń nie daje już zauważalnych różnic przy przyjętej dokładności obliczeń do trzech miejsc znaczących. Obliczenia przeprowadzono przy dwóch podstawowych hipotezach wzmocnienia a mianowicie: izotropowej i kinematycznej. Nie sprawia jednak żadnej trudności uzyskanie wyników przy hipotezach kombinowanych, łączących zmianę wymiarów początkowej powierzchni plastyczności z jednoczesnym jej przesuwaniem w przestrzeni naprężeń. Obok uzyskania efektywnej metody uwzględnienia wzmocnienia w rozwiązaniu jednym z głównych celów pracy było sprawdzenie ilościowych różnic w wynikach jakie dają w złożonym procesie obciążania hipotezy izotropowa i kinematyczna. Okazuje się, że hipoteza kinematyczna daje dużo mniejszą różnicę w odkształceniach w stosunku do rozwiązania bez wzmocnienia, niż hipoteza izotropowa.

W pracy ograniczono się do rozpatrzenia przypadków uogólnionego płaskiego stanu naprężenia, dla którego było możliwe uzyskanie efektywnych rozwiązań ze wzmocnieniem. Obejmuje to wielką liczbę praktycznie ważnych przypadków plastycznego odkształcania cienkich blach. Podano ogólne równania teorii uogólnionego płaskiego stanu naprężenia. Uzyskanie metody rozwiązania tych równań było możliwe jedynie przy założeniu stałej grubości odkształconego materiału. Jednakże dla zagadnień osiowo-symetrycznych, mających największe znaczenie praktyczne, podano kompletne rozwiązania uwzględniające zarówno wzmocnienie jak i zmianę grubości. Jako ilustrację zaproponowanej metody przeliczono przypadek stacjonarnego ciągnienia rury z izotropowym i kinematycznym wzmocnieniem oraz trzy przypadki niestacjonarne ze wzmocnieniem izotropowym.

1. Uogólniony płaski stan naprężenia

Rozpatrzmy cienką powłokę o dowolnej podwójnej krzywiźnie, obciążoną od wewnątrz lub od zewnątrz ciągłym obciążeniem normalnym p rozłożonym nierównomiernie. Odpowiada to wielu procesom kształtowania blach powszechnie stosowanym w przemyśle /rys. 26/. Jeżeli powłoka jest wystarczająco cienka to można przyjąć, że naprężenie w każdym miejscu są rozłożone równomiernie na całej grubości, czyli że w powłoce istnieje błonowy stan naprężenia. Pomijamy przy tym oczywiście działanie naprężeń normalnych do powierzchni powłoki, a wywołanych działaniem wewnętrznego lub zewnętrznego obciążenia ciągłego. Naprężenia te są jednak w praktycznie ważnych przypadkach bardzo małe w porównaniu z naprężeniami działającymi w normalnych przekrojach powłoki, tak że pominięcie ich jest w pełni uzasadnione. Przyjmiemy również, że prędkości płynięcia materiału są rozłożone równomiernie po grubości.

Przyjmiemy na powłoce ortogonalny układ współrzędnych krzywoliniowych α , β /rys. 27/. Dla pełnego rozwiązania stanu naprężenia i odkształcenia w powłoce należy w każdym jej punkcie znaleźć trzy składowe naprężenia σ_α σ_β τ , ciśnienie p między forman nikiem a blachą, składowe prędkości płynięcia materiału wzdłuż współrzędnych v_α i v_β oraz grubość blachy h.

Rozpatrzmy teraz układ równań wiążący wzajemnie powyższe niewiadome. W równaniach równowagi uwzględnimy siły tarcia pomiędzy foremnikiem a przesuwającym się po nim materiałem powłoki. W takich procesach jak ciągnienie można przyjąć, że wielkość siły tarcia T na jednostkę powierzchni styku wynosi μp, gdzie μ jest współczynnikiem tarcia stałym na całej powierzchni styku, oraz że siła ta jest skierowana przeciwnie do wektora prędkości płynięcia w danym punkcie. Wektor T można rozłożyć na dwie składowe T_α i T_β. Z rys. 28 widać, że składowe te można wyrazić za pomocą prędkości

$$T_\alpha = \mu p \frac{v_\alpha}{v}, \qquad T_\beta = \mu p \frac{v_\beta}{v}, \qquad \text{gdzie} \quad v = \sqrt{v_\alpha^2 + v_\beta^2}.$$

Równania równowagi będą miały postać

$$\left.\begin{aligned}
&h(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)\frac{\partial B}{\partial \alpha} + B\frac{\partial (h\sigma_\alpha)}{\partial \alpha} + 2h\tau\frac{\partial A}{\partial \beta} + A\frac{\partial (h\tau)}{\partial \beta} - \mu p\frac{v_\alpha}{v} = 0,\\
&h(\sigma_\beta - \sigma_\alpha)\frac{\partial A}{\partial \beta} + A\frac{\partial (h\sigma_\beta)}{\partial \beta} + 2h\tau\frac{\partial B}{\partial \alpha} + B\frac{\partial (h\tau)}{\partial \alpha} - \mu p\frac{v_\beta}{v} = 0,\\
&\qquad\frac{\sigma_\alpha}{\rho_\alpha} + \frac{\sigma_\beta}{\rho_\beta} = \frac{p}{h},
\end{aligned}\right\} \qquad /1/$$

gdzie A i B są współczynnikami pierwszej formy kwadratowej powłoki, a ρ_α i ρ_β - promieniami krzywizny odpowiednio w kierunkach α i β.

Następną zależność stanowi warunek nieściśliwości

$$\dot\varepsilon_\alpha + \dot\varepsilon_\beta + \dot\varepsilon_h = 0$$

gdzie $\dot\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}v_\beta, \qquad \dot\varepsilon_\beta = \frac{1}{B}\frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}v_\alpha.$

Prędkość odkształcenia w kierunku grubości h można przedstawić w postaci:

$$\dot{\varepsilon}_h = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{v_\alpha}{A}\frac{\partial h}{\partial \alpha} + \frac{v_\beta}{B}\frac{\partial h}{\partial \beta}\right).$$

Wyrażenie po prawej stronie przedstawia pełną albo inaczej substancjalną pochodną względem czasu. Uwzględniając powyższe wyrażenia na $\dot{\varepsilon}_\alpha$, $\dot{\varepsilon}_\beta$, i $\dot{\varepsilon}_h$ dokonując pewnych przekształceń można warunek nieściśliwości przedstawić następująco:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}(hBv_\alpha) + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \beta}(hAv_\beta) = 0. \qquad /2/$$

Powyższy układ czterech równań /1/ - /2/ zawiera siedem niewiadomych. Dodatkowe równania stanowić będą warunek plastyczności oraz związki między prędkościami odkształcenia a naprężeniami. Podamy tu zależności dla hipotezy wzmocnienia izotropowego, kinematycznego i mieszanego. To ostatnie odpowiada jednoczesnej zmianie wymiarów początkowej powierzchni plastyczności i przemieszczaniu jej w przestrzeni naprężeń. Jako wyjściowy warunek plastyczności przyjmiemy we wszystkich przypadkach warunek Hubera-Misesa.

Przy hipotezie izotropowego wzmocnienia warunek plastyczności będzie miał postać

$$\Phi^2 = \sigma_\alpha^2 - \sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2 + 3\tau^2 = 3k^2, \qquad /3/$$

gdzie k nie jest wielkością stałą i przedstawia granicę plastyczności materiału na ścinanie zależną od stanu odkształcenia. Dodatkową zależność wiążącą k z historią odkształcenia daje albo doświadczalnie otrzymana zależność

$$k = k(\varepsilon_i), \qquad /4/$$

gdzie $\varepsilon_i = \int d\varepsilon_i$ zaś $d\varepsilon_i = \sqrt{\frac{1}{2}\left(d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_h^2\right)}$,

co odpowiada hipotezie wzmocnienia przez odkształcenie, albo porównanie pracy dysypowanej w materiale

$$W_p = \int\left(\sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2\right) \qquad \text{/ 1,2 - kierunki główne /}$$

z pracą dysypowaną przy jednym z elementarnych stanów naprężenia, przy jakich bada się własności materiału. Odpowiada to hipotezie, wzmocnienia przez pracę dysypowaną. Obydwie hipotezy dają te same wyniki jeżeli przy warunku plastyczności Hubera-Misesa przyjąć związki Lévy-Misesa między prędkościami odkształcenia a naprężeniami. Związki te mają postać

$$\frac{\dot{\varepsilon}_\alpha}{\partial\Phi/\partial\sigma_\alpha} = \frac{\dot{\varepsilon}_\beta}{\partial\Phi/\partial\sigma_\beta} = \frac{\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}}{\partial\Phi/\partial\tau}, \qquad /5/$$

albo zgodnie z /3/

$$\frac{\dot{\varepsilon}_\alpha}{2\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = \frac{\dot{\varepsilon}_\beta}{2\sigma_\beta - \sigma_\alpha} = \frac{\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}}{6\tau}.$$

Uwzględniając, że

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{A}\frac{\partial v_\beta}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial v_\alpha}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}v_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta}v_\alpha\right),$$

można je zapisać w ostatecznej formie

$$\frac{\frac{1}{A}\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v_\beta}{2\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = \frac{\frac{1}{B}\frac{\partial v_\beta}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}v_\alpha}{2\sigma_\beta - \sigma_\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{1}{A}\frac{\partial v_\beta}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial v_\alpha}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}v_\beta - \frac{\partial A}{\partial\beta}v_\alpha\right)}{6\tau}. \qquad /6/$$

Tak więc przy hipotezie izotropowego wzmocnienia uzyskanie wyniku wymaga rozwiązania siedmiu równań /1/, /2/, /3/, /6/ z siedmioma niewiadomymi.

W przypadku wzmocnienia kinematycznego [5] warunek plastyczności ma postać

$$\Phi^2 = (\sigma_\alpha - a_\alpha)^2 - (\sigma_\alpha - a_\alpha)(\sigma_\beta - a_\beta) + (\sigma_\beta - a_\beta)^2 + 3(\tau - a_{\alpha\beta})^2 = \sigma_0^2, \qquad /7/$$

gdzie σ_0 ma stałą wartość zaś wielkości a_α a_β $a_{\alpha\beta}$ oznaczają składowe przesunięcia środka elipsoidy Hubera-Misesa w przestrzeni naprężeń, wywołanego odkształceniem plastycznym. Są one związane ze składowymi odkształcenia zależnościami

$$a_\alpha = c(2\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta), \qquad a_\beta = c(2\varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha), \qquad a_{\alpha\beta} = c \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}. \qquad /8/$$

Parametr c ma stałą wartość. Zależności /5/ między prędkościami odkształcenia i naprężeniami przyjmują teraz postać

$$\frac{\frac{1}{A}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} v_\beta}{2(\sigma_\alpha - a_\alpha) - (\sigma_\beta - a_\beta)} = \frac{\frac{1}{B}\frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} v_\alpha}{2(\sigma_\beta - a_\beta) - (\sigma_\alpha - a_\beta)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{A}\frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} v_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} v_\alpha\right)}{6(\tau - a_{\alpha\beta})}. \qquad /9/$$

W tym przypadku mamy również układ siedmiu równań z siedmioma niewiadomymi, złożony z równań równowagi /1/, warunku nieściśliwości /2/, warunku plastyczności /7/, oraz związków /9/.

Dla hipotez mieszanych, łączących jednoczesną zmianę położenia i wymiarów początkowej powierzchni warunek plastyczności można zapisać następująco:

$$\Phi^2 = (\sigma_\alpha - a_\alpha)^2 - (\sigma_\alpha - a_\alpha)(\sigma_\beta - a_\beta) + (\sigma_\beta - a_\beta)^2 + 3(\tau - a_{\alpha\beta})^2 = 3k^2, \qquad /10/$$

gdzie $k = k(\varepsilon_i)$ jest znaną funkcją drugiego niezmiennika stanu odkształcenia. Składowe a_α, a_β, $a_{\alpha\beta}$ przesunięcia środka elipsoidy są również pewnymi funkcjami stanu odkształcenia. Zależności /9/ pomiędzy prędkościami płynięcia a naprężeniami podane powyżej dla hipotezy kinematycznej zachowują swą ważność. Mamy więc, jak i w poprzednich przypadkach układ siedmiu równań z siedmioma niewiadomymi.

2. Metoda rozwiązania zagadnień uogólnionego płaskiego stanu naprężenia

Podane powyżej układy równań mają niestety bardzo złożoną budowę i aczkolwiek istnieje teoretyczna możliwość opracowania ogólnej metody ich rozwiązania, opartej na analogicznej zasadzie jak poniższa metoda oparta na pewnych założeniach upraszczających, to jednak nie podano jej tutaj. Metoda taka byłaby bowiem zbyt skomplikowana aby pozwalała uzyskać w obecnych warunkach efektywne rozwiązania. Rozpatrzmy teraz kiedy i przy jakich uproszczeniach możliwe jest uzyskanie efektywnej metody rozwiązywania zagadnień uogólnionego płaskiego stanu naprężenia dla powłok o dowolnej podwójnej krzywiźnie. Pominiemy tu przypadki osiowo-symetryczne, które można rozwiązać bez żadnych dalszych dodatkowych uproszczeń i które zostaną omówione w następnym paragrafie. Wszystkie rozważania przeprowadzimy przy mieszanej hipotezie wzmocnienia /10/, gdyż zarówno hipoteza izotropowa /3/ jak i kinematyczna /7/ wynikają z niej jako przypadki szczególne.

Zaproponowana poniżej metoda oparta jest na założeniu, że grubość h jest jednakowa w każdym punkcie i nie ulega zmianie w czasie procesu odkształcania. Przy niestacjonarnych procesach może to prowadzić do dość znacznych błędów, jak to pokazują dalej rozwiązane przypadki osiowo-symetryczne. Jednakże rozwiązanie procesów niestacjonarnych dla powłok o dowolnej podwójnej krzywiźnie jest obecnie nawet i przy tym założeniu praktycznie niemożliwe. Natomiast przy wielu procesach stacjonarnych sprawa przedstawia się znacznie lepiej. Jak wynika z przeliczonego dalej przykładu ciągnienia rury zmiana grubości ścianki nawet przy bardzo dużej bo 50-cio procentowej redukcji średnicy nie przekracza kilkunastu procent, a błąd w naprężeniach kilku procent. Należy tu również zaznaczyć, że dotychczas nie udało się uzyskać rozwiązań z uwzględnieniem zmiany grubości ścianki nawet dla zwykłego płaskiego stanu naprężenia i materiału bez wzmocnienia. Znane są jedynie rozwiązania osiowo-symetryczne. Dalsze uproszczenie zagadnienia może być osiągnięte przez pominięcie sił tarcia w równaniach równowagi /1/, aczkolwiek drogą bardzo żmudnych rachunków możnaby uwzględnić je w rozwiązaniu. Dla ośrodka bez wzmocnienia zadanie takie z siłami tarcia zostało rozwiązane w pracy autora [34], gdzie uwzględniono siły tarcia przy ciągnieniu powłoki o ogólnej podwójnej krzywiźnie. W naszym przypadku uwzględnienie tych sił spowodowałoby zaciemnienie istotnego celu proponowanej metody jakim jest uwzględnienie wzmocnienia.

Po omówionych uproszczeniach równanie równowagi mają postać

$$\left.\begin{aligned}
&(\sigma_\alpha-\sigma_\beta)\frac{\partial B}{\partial \alpha}+B\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha}+2\tau\frac{\partial A}{\partial \beta}+A\frac{\partial \tau}{\partial \beta}=0,\\
&(\sigma_\beta-\sigma_\alpha)\frac{\partial A}{\partial \beta}+A\frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \beta}+2\tau\frac{\partial B}{\partial \alpha}+B\frac{\partial \tau}{\partial \alpha}=0,\\
&\frac{\sigma_\alpha}{\rho_\alpha}+\frac{\sigma_\beta}{\rho_\beta}=\frac{p}{h}.
\end{aligned}\right\} \qquad /11/$$

Związki /9/ pomiędzy prędkościami odkształcenia a naprężeniami nie ulegają zmianie. Również warunek plastyczności /10/ nie zmienia się. Warunek nieściśliwości wobec przyjęcia stałej grubości h nie będzie spełniony. Mamy więc obecnie układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi σ_α, σ_β, τ, p, v_α, v_β

Rozwiązanie rozpoczniemy od obliczenia pierwszego przybliżenia przyjmując wstępnie w każdym punkcie powłoki wartości a_α a_β $a_{\alpha\beta}$ składowych przemieszczenia środka elipsoidy plastyczności oraz wartość k. W ten sposób warunek plastyczności jest znany na całym obszarze powłoki. Warunek ten wraz z równaniami /11/ tworzy teraz układ czterech równań z czterema niewiadomymi σ_α σ_β τ p. Jeżeli jednak zauważymy, że p występuje tylko w jednym równaniu, wystarczy dla wyznaczenia stanu naprężenia rozwiązać układ trzech równań złożony z dwóch pierwszych równań równowagi i warunku plastyczności.

Naprężenia wyrazimy za pomocą nowej funkcji ω oraz kąta φ jaki tworzy większe z naprężeń głównych z kierunkiem β

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\alpha &= a_\alpha + k(\sqrt{3}\cos\omega - \sin\omega\cos 2\varphi), \\
\sigma_\beta &= a_\beta + k(\sqrt{3}\cos\omega + \sin\omega\cos 2\varphi), \\
\tau &= a_{\alpha\beta} + k\sin\omega\sin 2\varphi.
\end{aligned}\right\} \qquad /12/$$

Jak łatwo sprawdzić wyrażenia te spełniają tożsamościowo warunek plastyczności /10/.

Tak określone naprężenia podstawimy do dwóch pierwszych równań równowagi, pamiętając, że ω i φ są szukanymi funkcjami współrzędnych, zaś a_α a_β $a_{\alpha\beta}$ oraz k są znanymi funkcjami współrzędnych. Po dokonaniu przeróbek otrzymujemy podstawowy układ równań quasiliniowych

$$
\left.
\begin{aligned}
&A\cos\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\beta}+2A\sin\omega\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-B(\sqrt{3}\sin\omega+\cos\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}+\\
&+2B\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=2\sin\omega\cos 2\varphi\frac{\partial B}{\partial\alpha}-2\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial A}{\partial\beta}-\\
&-B(\sqrt{3}\cos\omega-\sin\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial\ln k}{\partial\alpha}-A\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\ln k}{\partial\beta}-\\
&-\frac{1}{k}\left[(a_\alpha-a_\beta)\frac{\partial B}{\partial\alpha}+2a_{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+B\frac{\partial a_\alpha}{\partial\alpha}+A\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\right];\\
&\\
&-A(\sqrt{3}\sin\omega-\cos\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-2A\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+B\cos\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}+\\
&+2B\sin\omega\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=-2\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial B}{\partial\alpha}-2\sin\omega\cos 2\varphi\frac{\partial A}{\partial\beta}-\\
&-B\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\ln k}{\partial\alpha}-A(\sqrt{3}\cos\omega+\sin\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial\ln k}{\partial\beta}+\\
&-\frac{1}{k}\left[(a_\beta-a_\alpha)\frac{\partial A}{\partial\beta}+2a_{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+A\frac{\partial a_\beta}{\partial\beta}+B\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}\right].
\end{aligned}
\right\}\qquad /13/
$$

Układ ten rozwiążemy metodą chrakterystyk. Równania różniczkowe charakterystyk mają postać

$$
\frac{d\alpha}{d\beta}=\frac{B}{A}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\pm\sqrt{3-4\cos^2\omega}}{\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi-\cos\omega}\;. \qquad /14/
$$

Zależności różniczkowe, które muszą być spełnione wzdłuż charakterystyk mają bardzo złożoną budowę

$$
\left.
\begin{aligned}
&d\varphi\mp\frac{\sqrt{3-4\cos^2\omega}}{2\sin\omega}d\omega=C\,d\beta-D\,d\alpha;\\
&C=\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{B}{2A}(1-\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial\ln k}{\partial\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{ctg}\,\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\ln k}{\partial\beta}-\\
&\quad-\frac{\cos 2\varphi}{2kA\sin\omega}\left[(a_\alpha-a_\beta)\frac{\partial B}{\partial\alpha}+2a_{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+B\frac{\partial a_\alpha}{\partial\alpha}+A\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\right]+\\
&\quad+\frac{\sin 2\varphi}{2kA\sin\omega}\left[(a_\beta-a_\alpha)\frac{\partial A}{\partial\beta}+2a_{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+A\frac{\partial a_\beta}{\partial\beta}+B\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}\right];\\
&D=\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{ctg}\,\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\ln k}{\partial\alpha}+\frac{A}{2B}(1+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial\ln k}{\partial\beta}+\\
&\quad+\frac{\cos 2\varphi}{2kB\sin\omega}\left[(a_\beta-a_\alpha)\frac{\partial A}{\partial\beta}+2a_{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+A\frac{\partial a_\beta}{\partial\beta}+B\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}\right]+\\
&\quad+\frac{\sin 2\varphi}{2kB\sin\omega}\left[(a_\alpha-a_\beta)\frac{\partial B}{\partial\alpha}+2a_{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+B\frac{\partial a_\alpha}{\partial\alpha}+A\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\right];
\end{aligned}
\right\}\qquad /15/
$$

Z równań charakterystyk /14/ widać, że układ /13/ ma dwie rodziny charakterystyk, a więc jest hiperboliczny, jedynie w przypadku, gdy wyrażenie pod pierwiastkiem / $3 - 4\cos^2\omega$ / jest dodatnie. Zakres ten zaznaczono na rys. 29, na płaszczyźnie naprężeń głównych, grubymi liniami. W pozostałym obszarze zagadnienie jest eliptyczne i nie może być rozwiązane metodą charakterystyk. W naszych rozważaniach ograniczymy się do rozpatrzenia jedynie przypadku hiperbolicznego. Jak łatwo zauważyć, we wszystkich przypadkach, gdy naprężenia główne mają różne znaki /rys. 26ac/, układ z pewnością będzie hiperboliczny. Obejmuje to znaczną większość praktycznie ważnych zagadnień. W przypadkach, gdy naprężenia główne mają jednakowe znaki /rys. 26 bd./ mogą pojawiać się obszary, w których układ /13/ jest eliptyczny, jednakże w zagadnieniach praktycznych zdarza się to bardzo rzadko.

Równania charakterystyk można zapisać w bardziej zwartej postaci wprowadzając pomocnicze oznaczenia

$$2\psi(\omega) = \pi - \arccos\frac{\operatorname{ctg}\omega}{\sqrt{3}},$$

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\omega}\frac{\sqrt{3-4\cos^2\omega}}{\sin\omega}\,d\omega,$$

$$\xi = \varphi + \chi, \qquad \eta = \varphi - \chi.$$

Ostatecznie równania charakterystyk można wyrazić następująco:

Pierwsza rodzina

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{B}{A}\operatorname{tg}(\varphi+\psi), \qquad d\xi = C\,d\beta - D\,d\alpha,$$

Druga rodzina

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{B}{A}\operatorname{tg}(\varphi-\psi), \qquad d\eta = C\,d\beta - D\,d\alpha. \qquad /16/$$

Równania te zostały podane w pracy [35] z uwzględnieniem zmiany grubości ścianki h dla niejednorodnego ośrodka z izotropowym warunkiem plastyczności.

Z równań /16/ można bezpośrednio otrzymać równania charakterystyk dla zwykłego płaskiego stanu naprężenia w prostoliniowych współrzędnych prostokątnych x,y podstawiając $A = B = 1$ oraz zamieniając β i α odpowiednio na x i y. Pierwsza rodzina charakterystyk wyrazi się równaniami

$$\frac{dy}{dx} = tg(\varphi+\psi), \qquad 2d\xi = C'dx - D'dy,$$

zaś druga rodzina -

$$\frac{dy}{dx} = tg(\varphi-\psi), \qquad 2d\eta = C'dx - D'dy,$$

gdzie

$$C' = (1-\sqrt{3}\,ctg\,\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial \ln k}{\partial y} + \sqrt{3}\,ctg\,\omega\sin 2\varphi\frac{\partial \ln k}{\partial x} -$$
$$- \frac{\cos 2\varphi}{k\sin\omega}\left(\frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_{xy}}{\partial x}\right) + \frac{\sin 2\varphi}{k\sin\omega}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_{xy}}{\partial y}\right),$$

$$D' = \sqrt{3}\,ctg\,\omega\sin 2\varphi\frac{\partial \ln k}{\partial y} + (1+\sqrt{3}\,ctg\,\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial \ln k}{\partial x} +$$
$$+ \frac{\cos 2\varphi}{k\sin\omega}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_{xy}}{\partial y}\right) + \frac{\sin 2\varphi}{k\sin\omega}\left(\frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_{xy}}{\partial x}\right).$$

Tak więc całkowanie podstawowego układu równań /13/ zostało sprowadzone do całkowania równań charakterystyk /16/. Rozwiązanie konkretnych zagadnień polega na kolejnym rozwiązywaniu zagadnień brzegowych jak zagadnienie Cauchy, zagadnienie charakterystyczne /Darboux/ i różne zagadnienia mieszane. Rachunki przeprowadza się numerycznie, metodą różnic skończonych.

Ze względu na to, że na ogół trudno jest określić wstępny ~~rozkład~~ rozkład wielkości k oraz przesunięć a_α a_β $a_{\alpha\beta}$ najdogodniej jest jako punkt wyjścia przyjąć materiał bez wzmocnienia. W takim przypadku $k = k_0 = const.$, $a_\alpha = a_\beta = a_{\alpha\beta} = 0$. Równania charakterystyk /16/ ulegają znacznemu uproszczeniu.

Pierwsza rodzina

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{B}{A}\,tg(\varphi+\psi), \qquad d\xi = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}d\beta - \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}d\alpha,$$

Druga rodzina

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{B}{A}\,tg(\varphi-\psi), \qquad d\eta = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}d\beta - \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}d\alpha.$$

Równania te zostały wyprowadzone w pracach autora [36,37], gdzie podano również przykłady liczbowe i wyznaczone siatki charakterystyk. Dla zwykłego płaskiego stanu naprężenia w prostoliniowym układzie współrzędnych prostokątnych x, y przechodzą one w równania podane przez W. Sokołowskiego [38]:

$$\frac{dy}{dx} = tg(\varphi+\psi), \qquad \xi = const,$$

$$\frac{dy}{dx} = tg(\varphi-\psi), \qquad \eta = const.$$

Po wyznaczeniu stanu naprężenia można przystąpić do obliczenia prędkości płynięcia materiału w każdym punkcie. Zależności /9/ po podstawieniu w miejsce naprężeń wyrażeń /12/ przyjmują postać

$$\frac{\frac{1}{A}\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v_\beta}{\sqrt{3}\cos\omega - 3\sin\omega\cos 2\varphi} = \frac{\frac{1}{B}\frac{\partial v_\beta}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}v_\alpha}{\sqrt{3}\cos\omega + 3\sin\omega\cos 2\varphi} =$$

$$= \frac{\frac{1}{A}\frac{\partial v_\beta}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial v_\alpha}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}v_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta}v_\alpha\right)}{6\sin\omega\sin 2\varphi}.$$

Łatwo wykazać, że charakterystyki powyższego układu równań dla prędkości pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń. Równania różniczkowe obydwu rodzin charakterystyk będą miały więc pop rzednią postać/14/. Inne będą oczywiście zależności różniczkowe spełnione wzdłuż tych charakterystyk. Wyrażą się one następująco:

$$\operatorname{tg}(\varphi \pm \psi)\, dv_\alpha + dv_\beta = \frac{1}{A}\left[\operatorname{tg}(\varphi + \psi)\operatorname{tg}(\varphi - \psi)\frac{\partial A}{\partial \beta} v_\beta - \frac{\partial B}{\partial \alpha} v_\alpha\right] d\beta + \qquad /17/$$

$$+ \frac{1}{B}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\sin 2\varphi}{\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) v_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} v_\alpha\right] d\alpha .$$

Podobnie jak dla naprężeń wyznaczanie prędkości polega na kolejnym rozwiązywaniu zagadnień brzegowych dla równań charakterystyk. Oczywiście siatka charakterystyk oraz wielkości φ i ψ są już znane z rozwiązania dla naprężeń i należy jedynie scałkować zależności /17/ odpowiednio wzdłuż linii pierwszej i drugiej rodziny charakterystyk. Warto podkreślić, że zależności /17/ nie ulegają zmianie dla ośrodka bez wzmocnienia. Były one podane w pracy [36], gdzie rozpatrywano powłoki z materiału idealnie plastycznego. Rozwiązano tam również przykład liczbowy wyznaczania prędkości dla powłoki o ogólnej podwójnej krzywiźnie. Nie znaczy to oczywiście, że rozkład prędkości płynięcia materiału jest taki sam przy wzmocnieniu jak i przy braku wzmocnienia, gdyż wielkości φ i ψ otrzymane z rozwiązania dla naprężeń są w obu przypadkach różne i różne są siatki charakterystyk.

Po wyznaczeniu prędkości można obliczyć stan odkształcenia materiału w każdym punkcie przez całkowanie wzdłuż trajektorii poszczególnych cząstek. Mając trajektorie i prędkości wyznaczamy przyrosty czasu, odpowiadające przyrostom drogi cząstki wzdłuż trajektorii, a następnie przyrosty składowych odkształcenia ze wzorów

$$d\varepsilon_\alpha = \left(\frac{1}{A}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} v_\beta\right) dt,$$

$$d\varepsilon_\beta = \left(\frac{1}{B}\frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} v_\alpha\right) dt,$$

$$d\varepsilon_{\alpha\beta} = \left[\frac{1}{A}\frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} v_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} v_\alpha\right)\right] dt.$$

lub dla zwykłego płaskiego stanu naprężenia w prostoliniowych współrzędnych prostokątnych.

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dt, \qquad d\varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} dt, \qquad d\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) dt.$$

Znając przyrosty odkształceń można obliczyć zarówno nową wartość k jak i składowe przemieszczenia początkowej powierzchni plastyczności a_α a_β $a_{\alpha\beta}$. Teraz można przystąpić do obliczania drugiego przybliżenia postępując analogicznie jak przy pierwszym. W ten sam sposób oblicza się dalsze przybliżenia. Obliczenia przerywamy, gdy dwa kolejne przybliżenia dadzą wystarczająco bliskie wyniki.

Podane powyżej równania charakterystyk dla naprężeń /16/ i prędkości stanowią jednocześnie podstawę teorii płaskiego stanu naprężenia ciała plastycznego z jednoczesną niejednorodnością i anizotropią.

3. Stacjonarne zagadnienia osiowo-symetryczne

Do grupy stacjonarnych zagadnień osiowo-symetrycznych w uogólnionym płaskim stanie naprężenia zalicza się bardzo wiele praktycznie ważnych przypadków obróbki plastycznej jak ciągnienie, obciskanie, roztłaczanie i rozciąganie rur, różne odmiany przetłaczania wytłoczek i tp. Podstawowe równania wyprowadzimy wychodząc z przykładu ciągnienia rury /rys. 30/, chociaż zachowują one ważność i dla innych rodzajów obróbki za pomocą stożkowego narzędzia.

Zagadnienie to bez uwzględnienia wzmocnienia zostało rozwiązane przez A. Iliuszyna [39], a z izotropowym wzmocnieniem przez R. Swifta [33] przy bardzo drastycznym założeniu, że intensywność odkształceń postaciowych równa się bezwzględnej wartości odkształcenia obwodowego. Założenie to niezwykle upraszcza rozwiązanie, gdyż odkształcenie obwodowe zupełnie nie zależy od stanu naprężenia i dla dowolnego promienia r może być określone ze wzoru $\varepsilon_t = \ln r/R_0$. Pozwala to odrazu określić rozkład wzdłuż promienia, a następnie rozwiązać zagadnienie z tak znalezioną niejednorodnością. Przejdźmy do rozpatrzenia naszego zagadnienia przy ogólnej hipotezie wzmocnienia bez tak daleko idących założeń upraszczających. Ze względu na małą grubość ścianki h w porównaniu z pozostałymi wymiarami, można jak w poprzednich ogólnych rozważaniach zaniedbać zmianę naprężeń wzdłuż grubości i uważać stan naprężeń w rurze jako błonowy. Ciśnienie p pomiędzy rurą a ścianką matrycy jest bardzo małe w porównaniu z naprężeniami i może być pominięte w warunku plastyczności. W każdym punkcie należy wyznaczyć cztery niewiadome: naprężenie wzdłuż tworzącej σ_r naprężenie obwodowe σ_t, grubość ścianki h oraz składową promieniową prędkości płynięcia materiału v.

Równanie równowagi wyrazi się następująco

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r h) - \sigma_t h(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) = 0. \qquad /18/$$

Warunek plastyczności przyjmuje postać

$$(\sigma_r - a_r)^2 - (\sigma_r - a_r)(\sigma_t - a_t) + (\sigma_t - a_t)^2 = 3k^2, \qquad /19/$$

gdzie a_r, a_t i k są pewnymi funkcjami stanu odkształcenia. Dla obliczenia pierwszego przybliżenia wartości te zakładamy, a następnie obliczamy z zależności

$$a_r = a_r(\varepsilon_r, \varepsilon_t), \quad a_t = a_t(\varepsilon_r, \varepsilon_t), \quad k = k(\varepsilon_i). \qquad /20/$$

Związek między prędkością płynięcia v a naprężeniami ma teraz postać

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} \cdot \frac{2(\sigma_r - a_r) - (\sigma_t - a_t)}{2(\sigma_t - a_t) - (\sigma_r - a_r)} . \qquad /21/$$

Ostatnim równaniem jest warunek nieściśliwości, mówiący, że ilość materiału przepływająca przez każdy przekrój musi być stała. Innymi słowy $\frac{d}{dr}(rhv) = 0$, albo po rozwinięciu

$$\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} + \frac{v}{h}\frac{dh}{dr} = 0 . \qquad /22/$$

Równania /18/, /19/, /21/, /22/ tworzą układ czterech równań z czterema niewiadomymi. Z równań tych można wyrugować prędkość v podstawiając /21/ do /22/. W rezultacie otrzymujemy

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{h}{r} \cdot \frac{(\sigma_r - a_r) + (\sigma_t - a_t)}{2(\sigma_t - a_t) - (\sigma_r - a_r)} . \qquad /23/$$

Następnie za pomocą równania /23/ można wyrugować grubość h z równania równowagi /18/. Otrzymane w ten sposób równanie

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} \cdot \frac{(\sigma_t - a_t) - 2(\sigma_r - a_r)}{2(\sigma_t - a_t) - (\sigma_r - a_r)} - \frac{\sigma_t}{r}(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) = 0 \qquad /24/$$

tworzy wraz z warunkiem plastyczności /19/ układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi σ_r i σ_t . Naprężenia przedstawimy za pomocą nowej funkcji ω

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= a_r + 2k\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) , \\ \sigma_t &= a_t + 2k\cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) . \end{aligned}\right\} \qquad /25/$$

Wyrażenia te spełniają tożsamościowo warunek plastyczności /19/. Podstawiając je do równania /24/ otrzymujemy ostatecznie równanie różniczkowe z jedną niewiadomą funkcją

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{a_r + 2k\cos(\omega - \frac{\pi}{6})}{r} \cdot \frac{\cos(\omega + \frac{\pi}{6}) - 2\cos(\omega - \frac{\pi}{6})}{\sin(\omega - \frac{\pi}{6})\left[2\cos(\omega + \frac{\pi}{6}) - \cos(\omega - \frac{\pi}{6})\right]} -$$

$$- \frac{a_t + 2k\cos(\omega + \frac{\pi}{6})}{2kr\sin(\omega - \frac{\pi}{6})}(1 + \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha) + \frac{1}{2k\sin(\omega - \frac{\pi}{6})} \cdot \frac{da_r}{dr} + \mathrm{ctg}(\omega - \frac{\pi}{6})\frac{d\ln k}{dr}. \qquad /26/$$

Rozwiązanie tego równania można uzyskać przez całkowanie numeryczne na przykład metodą Runge-Kutta, rozpoczynając od krawędzi na której $\sigma_r = 0$, a więc $\omega = \frac{2}{3}\pi$. Po wyznaczeniu ω obliczamy w ten sam sposób grubość h z równania

$$\frac{dh}{dr} = \frac{h}{r} \cdot \frac{\cos(\omega - \frac{\pi}{6}) + \cos(\omega + \frac{\pi}{6})}{\cos(\omega - \frac{\pi}{6}) - 2\cos(\omega + \frac{\pi}{6})}, \qquad /27/$$

otrzymanego przez podstawienie wyrażeń /25/ do równania /23/, a prędkość v z równania /21/, które po podstawieniu wyrażeń /25/ przybiera następującą postać

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} \cdot \frac{2\cos(\omega - \frac{\pi}{6}) - \cos(\omega + \frac{\pi}{6})}{2\cos(\omega + \frac{\pi}{6}) - \cos(\omega - \frac{\pi}{6})}. \qquad /28/$$

Jak już powiedziano w części ogólnej przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych wygodnie jest przyjąć jednorodny materiał izotropowy bez wzmocnienia jako punkt wyjścia do obliczenia pierwszego przybliżenia. Wartości a_r i a_t są wtedy zerami, a wielkość $k = k_o = const$. Równanie /26/ ulega znacznemu uproszczeniu

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{3 - 2\cos(\omega + \frac{\pi}{6})\left[\cos(\omega - \frac{\pi}{6}) - 2\cos(\omega + \frac{\pi}{6})\right]\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\sin(\omega - \frac{\pi}{6})\left[\cos(\omega - \frac{\pi}{6}) - 2\cos(\omega + \frac{\pi}{6})\right]}.$$

Równanie /27/ i /28/ nie ulegają zmianie. Po obliczeniu zmiany grubości h /obliczanie prędkości v nie jest konieczne/ można wyznaczyć przyrosty odkształcenia w każdym punkcie

$$d\varepsilon_t = \frac{dr}{r}, \qquad d\varepsilon_h = \frac{dh}{h}, \qquad d\varepsilon_r = -d\varepsilon_t - d\varepsilon_h,$$

a następnie składowe przesunięcia środka początkowej elipsy plastyczności

$$a_r = a_r(\varepsilon_r, \varepsilon_t), \qquad a_t = a_t(\varepsilon_r, \varepsilon_t),$$

oraz intensywność odkształceń postaciowych

$$\varepsilon_i = \int \sqrt{\tfrac{1}{2}(d\varepsilon_t^2 + d\varepsilon_h^2 + d\varepsilon_r^2)} .$$

Całkowanie przeprowadza się wzdłuż trajektorii ruchu cząstek. Wartość ε_i pozwala na obliczenie nowej wartości $k = k(\varepsilon_i)$ w każdym punkcie obszaru odkształcenia.

Mając wyznaczone w ten sposób wielkości a_r, a_t i k można przystąpić do obliczenia d rugiego przybliżenia. Obliczenia powtórzemy do chwili, gdy dwa kolejne przybliżenia dadzą wystarczająco bliskie wyniki.

Podane równania pozwalają rozwiązać wiele stacjonarnych zagadnień z zakresu plastycznego odkształcenia rur, w których rura ma kontakt z narzędziem tylko jedną stroną ścianki /zewnętrzną lub wewnętrzną/, jak wspomniane poprzednio ciągnienie i obciskanie przez stożkową matrycę oraz rozpychanie i rozciąganie na stożkowym trzpieniu. Nie sprawia żadnych trudności uwzględnienie tzw. przeciwciągu. W każdym z tych przypadków zmieniają się jedynie warunki brzegowe.

Przykład liczbowy obliczono dla przypadku ciągnienia /rys. 30/ w dwóch wariantach, a mianowicie dla izotropowej hipotezy wzmocnienia i kinematycznej hipotezy wzmocnienia. Dla obu hipotez przyjęto takie samo liniowe prawo wzmocnienia przy ścinaniu $\tau = k_0 + c \cdot \varepsilon$ gdzie moduł c ma stałą wartość a ε jest połową kąta odkształcenia postaciowego. Obliczenia rozpoczynamy od całkowania równania /26/ z warunkiem brzegowym $\sigma_r = 0$ $(\omega = \frac{2}{3}\pi)$ dla $r = r_0$. W celu uniknięcia zaciemnienia wpływu wzmocnienia na otrzymane wielkości pominięto w rozwiązaniu siły tarcia, chociaż ich uwzględnienie nie przedstawia żadnej trudności. Po obliczeniu ω wyznaczamy naprężenia z zależności /25/. Grubość h znajdujemy przez całkowanie równania różniczkowego /27/ wykorzystując uprzednio znalezione ω. Warunkiem brzegowym jest $h = h_0$ dla $r = r_0$.

Przy hipotezie izotropowego wzmocnienia mamy $a_r = a_t = 0$ a więc równanie /26/ znacznie się upraszcza. Przyjęte prawo wzmocnienia odpowiada zależności $k = k_0 + c \cdot \varepsilon_i$, pozwalającej obliczyć wartość k w kolejnych przybliżeniach. Rachunki wykonano przy $c = 1$ co dość dobrze odpowiada miękkiej stali ~~...~~.

Przy hipotezie kinematycznej mamy $k = k_0 = const.$ wobec czego w równaniu /26/ znika ostatni wyraz zawierający pochodną k. Wartości a_r i a_t obliczamy z zależności $a_r = c(2\varepsilon_r + \varepsilon_t)$, $a_t = c(2\varepsilon_t + \varepsilon_r)$. W tym przypadku również przyjęto $c = 1$.

Dla obydwu hipotez wzmocnienia zastosowana metoda kolejnych przybliżeń jest bardzo szybko zbieżna. Jeżeli, jak to zrobiono, za punkt wyjścia przyjąć rozwiązanie bez wzmocnienia to następujące po nim przybliżenie różni się od kolejnego mniej niż 3 procent. Obliczanie dalszych przybliżeń nie daje już uchwytnych różnic.

Na rys. 31 przedstawiono wykresy naprężeń σ_r i σ_t. Jak widać różnice jakie dają obydwie hipotezy wzmocnienia są bardzo małe. Nieco większa różnica występuje w wielkości siły potrzebnej dla przeciągnięcia rury przez matrycę. Jest ona określona zależnością $P = 2\pi r_1 h_1 \sigma_{r_1} \cos\alpha$. Dla hipotezy izotropowej wynosi ona $P = 1{,}31\ P_o$, a dla kinematycznej $P = 1{,}19\ P_o$, gdzie P_o jest siłą otrzymaną z rozwiązania bez wzmocnienia. Zmianę grubości ścianki pokazano na rys. 32. Ciekawe jest, że hipoteza kinematyczna daje wyniki bardzo bliskie rozwiązaniu bez wzmocnienia. Przyczynę tego wyjaśnia częściowo rys. 33, na którym krzywa AB przedstawia drogę obciążenia dla materiału bez wzmocnienia, a krzywa AC - dla materiału ze wzmocnieniem kinematycznym. Krzywa OO' jest drogą środka elipsy plastyczności. Widać, że w obu przypadkach znajdujemy się na tym samym odcinku elipsy /nieruchomej lub przesuwanej/, a więc przyrosty odkształcenia, które zgodnie z warunkami płynięcia Lévy-Misesa są normalne do elipsy są bardzo zbliżone. Przy hipotezie izotropowej początkowa elipsa rozszerza się, a więc zmienia się jej krzywizna. Różnice w kierunkach normalnych w stosunku do rozwiązania bez wzmocnienia będą więc znacznie większe niż przy hipotezie kinematycznej. Na rys. 34 przedstawiono drogi obciążenia oraz wektory prędkości odkształcenia, odpowiadające obydwu hipotezom.

4. Niestacjonarne zagadnienia osiowo-symetryczne

Pierwsze rozwiązanie zagadnienia niestacjonarnego zostało podane przez R. Hilla [21]. Przy takim samym drastycznym założeniu odnośnie intensywności odkształceń postaciowych jak w pracy Swifta [5] uzyskano rozwiązanie dla izotropowej hipotezy wzmocnienia. Również i w tym przypadku założenie to prowadzi do zasadniczego uproszczenia zagadnienia, szczególnie przy warunku plastyczności Treski jaki przyjęto w pracy. Zmianę grubości ścianki w ciągu procesu oraz prędkość płynięcia wyznaczono ze związków Lévy-Misesa i warunku nieściśliwości. Sposób ten, chociaż w omawianym przypadku daje dobre wyniki, zupełnie zawodzi w innych.

Dla przypadku roztłaczania końca rury, podanego dalej, błąd przy dwukrotnym rozszerzeniu średnicy przekracza 15 procent. Dla rozszerzania pierścienia i końcowego etapu ciągnienia rury wynosi ca 10 procent, odpowiednio przy dwukrotnym powiększeniu lub zmniejszeniu swobodnego końca. Dla większych deformacji różnicę te szybko rosną.

Typowe przykłady osiowo-symetrycznych procesów niestacjonarnych pokazują rys. 35 i 36. W takich przypadkach wszystkie szukane funkcje, a więc naprężenia σ_r i σ_t, grubość ścianki h i prędkość promieniowa v zależą nie tylko od promienia na którym w danej chwili znajduje się rozpatrywana cząstka, ale również od promienia swobodnego końca b, określającego stopień zaawansowania procesu. Promień b może być traktowany jako miara czasu. Podamy teraz ogólną teorią rozwiązywania tego rodzaju zagadnień z uwzględnieniem sił tarcia między powłoką, a foremnikiem oraz wzmocnienia materiału przy mieszanej hipotezie. Równanie równowagi jest takie samo jak przy procesach stacjonarnych.

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r h) - \sigma_t h(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) = 0.$$

Również warunek plastyczności zachowuje poprzednią postać

$$(\sigma_r - a_r)^2 - (\sigma_r - a_r)(\sigma_t - a_t) + (\sigma_t - a_t)^2 = 3k^2,$$

gdzie

$$a_r = a_r(\varepsilon_r, \varepsilon_t), \qquad a_t = a_t(\varepsilon_r, \varepsilon_t), \qquad k = k(\varepsilon_i).$$

Związek między prędkościami płynięcia v, a naprężeniami wyraża się następująco

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{v}{r} \cdot \frac{2(\sigma_r - a_r) - (\sigma_t - a_t)}{2(\sigma_t - a_t) - (\sigma_r - a_r)}. \qquad /29/$$

Ostatnim równaniem jest warunek nieściśliwości

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial b} + \frac{v}{h}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \qquad /30/$$

Układ ten jest zawsze hiperboliczny i ma dwie rodziny charakterystyk rzeczywistych. Równania pierwszej rodziny można z łatwością otrzymać rugując pochodną $\partial v/\partial r$ z równania /30/ za pomocą równania /29/. Uzyskane w ten sposób równanie zawiera pochodne tylko jednej funkcji h

$$\frac{\partial h}{\partial b} + v\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{hv}{r}\cdot\frac{(\sigma_r - a_r) + (\sigma_t - a_t)}{(\sigma_r - a_r) - 2(\sigma_t - a_t)}.$$

Równania różniczkowe charakterystyk mają postać

$$\frac{db}{1} = \frac{dr}{v} = \frac{dh}{\dfrac{hv}{r}\cdot\dfrac{(\sigma_r - a_r) + (\sigma_t - a_t)}{(\sigma_r - a_r) - 2(\sigma_t - a_t)}},$$

albo inaczej

$$dr - v\,db = 0, \qquad \frac{dh}{dr} = \frac{h}{r}\cdot\frac{(\sigma_r - a_r) + (\sigma_t - a_t)}{(\sigma_r - a_r) - 2(\sigma_t - a_t)}.$$

Równania drugiej rodziny charakterystyk wynikają odrazu z równania /29/

$$b = \text{const.}, \qquad \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r}\cdot\frac{2(\sigma_r - a_r) - (\sigma_t - a_t)}{2(\sigma_t - a_t) - (\sigma_r - a_r)}.$$

Wzdłuż charakterystyk tej rodziny musi być spełniona zależność różniczkowa

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{h}{r}\left[1 - \frac{\sigma_t}{\sigma_r}(1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha)\right] - \frac{h}{\sigma_r}\cdot\frac{d\sigma_r}{dr},$$

otrzymana z równania równowagi.

Jak poprzednio w celu wyeliminowania warunku plastyczności wyrazimy naprężenia za pomocą nowej funkcji

$$\sigma_r = a_r + 2k\cos(\omega - \frac{\pi}{6}),$$

$$\sigma_t = a_t + 2k\cos(\omega + \frac{\pi}{6}).$$

Wyrażenia te spełniają tożsamościowo warunek plastyczności. Podstawiając je do powyższych równań otrzymujemy ostatecznie równanie różniczkowe dla pierwszej rodziny charakterystyk

$$\left.\begin{aligned} & dr - v\,db = 0, \\ & \frac{dh}{dr} = \frac{h}{r}\cdot\frac{\cos(\omega-\frac{\pi}{6}) + \cos(\omega+\frac{\pi}{6})}{\cos(\omega-\frac{\pi}{6}) - 2\cos(\omega+\frac{\pi}{6})}, \end{aligned}\right\} \qquad /31/$$

oraz dla drugiej rodziny $b = \mathrm{const.}$

$$\left.\begin{aligned} & \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r}\cdot\frac{2\cos(\omega-\frac{\pi}{6}) - \cos(\omega+\frac{\pi}{6})}{2\cos(\omega+\frac{\pi}{6}) - \cos(\omega-\frac{\pi}{6})}, \\ & \frac{dh}{dr} = -\frac{h}{r}\left[1 - \frac{a_t + 2k\cos(\omega+\frac{\pi}{6})}{a_r + 2k\cos(\omega-\frac{\pi}{6})}(1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\right] - \\ & - \frac{h}{a_r + 2k\cos(\omega-\frac{\pi}{6})}\left[\frac{da_r}{dr} + 2\cos(\omega-\frac{\pi}{6})\frac{dk}{dr} - 2k\sin(\omega-\frac{\pi}{6})\frac{d\omega}{dr}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad /32/$$

Tak więc rozwiązanie zostało sprowadzone do całkowania równań różniczkowych zwyczajnych /31/ i /32/. Całkowanie przeprowadza się rozwiązując odpowiednie zagadnienia brzegowe dla tych równań. Rachunki wykonuje się numerycznie metodą różnic skończonych.

Rozpatrzmy podstawowe zagadnienia brzegowe na płaszczyźnie zmiennych niezależnych r,b. Pominiemy tu zagadnienie Cauchy, gdyż mimo tego, że można sobie wyobrazić procesy tłoczenia, których rozwiązanie sprowadza się do tego zagadnienia, nie mają one jednak żadnego znaczenia praktycznego. Najczęściej występującym w konkretnych przypadkach jest zagadnienie charakterystyczne, gdy na dwóch charakterystykach należących do różnych rodzin znane są wszystkie funkcje. Łatwo zauważyć, że charakterystyki pierwszej rodziny przedstawiają trajektorie poszczególnych cząstek, a znalezione wzdłuż nich wielkości opisują historię obciążenia i odkształcenia jaką przechodzi w czasie procesu odpowiednia cząstka. Jedna z tych charakterystyk przedstawia swobodny nieobciążony brzeg. Wzdłuż niej musi być $\sigma_r = 0$ a więc $\omega = \frac{2}{3}\pi$ lub $\omega = \frac{5}{3}\pi$, w zależności od znaku naprężenia obwodowego σ_t. Na brzegu tym przyjmiemy jednostkową prędkość promieniową płynięcia materiału v = 1. Ponadto można scałkować wzdłuż tej charakterystyki drugie z równań /31/, po podstawieniu stałej wartości ω. Zarówno dla $\omega = \frac{2}{3}\pi$ jak i dla $\omega = \frac{5}{3}\pi$ po scałkowaniu otrzymujemy taką samą zależność między grubością ścianki swobodnej krawędzi, a jej promieniem b. Wyraża się ona wzorem $h = \frac{h_0}{\sqrt{b}}$, gdzie h_0 jest grubością ścianki swobodnej krawędzi na początku procesu. Zależność ta ma duże znaczenie praktyczne, gdyż jest ważna w każdym przypadku, a więc zarówno dla materiału ze wzmocnieniem jak i bez wzmocnienia, a ze względu na swą prostotę może być stosowana do obliczeń w praktyce inżynierskiej. Charakterystyki drugiej rodziny b = const. przedstawiają różne stadia zaawansowania procesu, określone przez chwilową wartość promienia swobodnej krawędzi b. Wartości h, σ_r i σ_t otrzymane wzdłuż tych charakterystyk podają jak zmienia się grubość ścianki i naprężenia wzdłuż promienia dla ustalonego b. W większości przypadków na początku procesu, a więc przy $b = b_o$ znany jest przebieg grubości ścianki wzdłuż promienia. Pozwala to wyznaczyć również pozostałe wielkości, a więc naprężenia i prędkość v, wzdłuż charakterystyki $b = b_o$, przez całkowanie równań /32/. Znając wartości wszystkich szukanych funkcji wzdłuż dwóch charakterystyk, należących do różnych rodzin, możemy wyznaczyć rozwiązanie dla dowolnej chwili i w dowolnym punkcie.

Na rys. 35 przedstawiono na przykładzie odkształcenia pierścienia cztery odmiany zagadnienia charakterystycznego. Odcinek AB jest charakterystyką pierwszej rodziny i odpowiada swobodnej, nieobciążonej krawędzi pierścienia Mamy wzdłuż niego $\omega = \frac{2}{3}\pi$ lub $\omega = \frac{5}{3}\pi$, następnie $h = \frac{h_o}{\sqrt{b}}$ oraz $v = 1$. Odcinek AC jest charakterystyką drugiej rodziny $b = b_o$ i przedstawia stan naprężenia i odkształcenia na początku procesu. Mamy wzdłuż niego np. $h = h_o = \text{const}$. Dane te pozwalają znaleźć rozwiązanie w całym czworokącie ABCD. Jak widać nie ma żadnych ograniczeń odnośnie położenia punktu B na charakterystyce AB. Rozwiązanie można więc przedłużać dowolnie daleko. Innymi słowy można je uzyskać dla dowolnie dużych odkształceń. Ma ono oczywiście sens fizyczny do chwili osiągnięcia wytrzymałości materiału.

W niektórych przypadkach rozwiązanie sprowadza się do zagadnienia mieszanego, którego dwie odmiany pokazano na rys. 36. Warunki na charakterystyce AB, odpowiadającej swobodnej krawędzi, są takie same jak poprzednio. Odcinek AC, nie będący charakterystyką, odpowiada promieniowi r przy którym poszczególne cząstki wchodzą w obszar odkształcania. Wzdłuż AC grubość h jest znana i równa początkowej grubości h_o nieodkształconej części rury.

Dane te pozwalają wyznaczyć wszystkie szukane wielkości w całym trójkącie ABC.

Kolejność obliczeń jest taka sama jak w przypadku procesów stacjonarnych. Najpierw przyjmujemy pewien wstępny rozkład wielkości a_r, a_t i k wzdłuż promienia i wyznaczamy rozwiązanie na podstawie powyższych zależności. Po obliczeniu odkształceń znajdujemy nowe wartości a_r, a_t i k i powtarzamy rozwiązanie. Procedurę tę powtarza się do chwili, gdy dwa kolejne przybliżenia dadzą wystarczająco bliskie wyniki. Zbieżność metody jest w tym przypadku równie szybka jak przy procesach stacjonarnych.

Przejdźmy do rozwiązania przykładów liczbowych. Jako pierwszy rozpatrzmy końcowy niestacjonarny etap ciągnienia rury. Rozpoczyna się on w chwili, gdy końcowy swobodny przekrój rury z rys. 30 osiągnie krawędź matrycy. Bardziej zaawansowane stadium tego niestacjonarnego etapu pokazuje rys. 37. Mamy tu typowe zagadnienie charakterystyczne, dla którego siatkę charakterystyk przedstawia schematycznie rys. 35b. Obliczenia należy oczywiście przerwać po dojściu do pionowej linii poprowadzonej z punktu C, gdyż przy promieniu $r = r_0$ materiał wychodzi z obszaru odkształcenia. Wzdłuż charakterystyki AB, odpowiadającej swobodnej krawędzi, mamy $\omega = \frac{2}{3}\pi$, $v = 1$, oraz $h = \frac{h_0}{\sqrt{b}}$, gdzie h_0 jest grubością ścianki rury przed odkształceniem /rys. 30/. Wzdłuż charakterystyki AC, reprezentującej stan wzdłuż tworzącej w chwili rozpoczęcia niestacjonarnego etapu ciągnienia, grubość ścianki h musi oczywiście zmieniać się w taki sam sposób jak w procesie stacjonarnym. Dane te wystarczają do rozwiązania zagadnienia w całym polu charakterystyk. Obliczenia wykonano bez uwzględnienia sił tarcia dla izotropowej hipotezy wzmocnienia przyjmując taką samą zależność $k = k(\varepsilon_i)$, jak w przypadku stacjonarnym ~~[illegible]~~. Jako punkt wyjścia do obliczeń wzięto rozwiązanie dla materiału bez wzmocnienia. Na rys. 37 przedstawiono siatkę charakterystyk dla takiego rozwiązania. Siatka przy uwzględnieniu wzmocnienia różni się od niej bardzo niewiele. Zmianę grubości ścianki wzdłuż promienia dla materiału bez wzmocnienia pokazuje rys. 38 a, a ze wzmocnieniem rys. 38 b. Liniami ciągłymi zaznaczono jak zmienia się grubość wzdłuż promienia przy określonych wartościach promienia swobodnej krawędzi b. Linia AB odpowiada $\frac{b}{R_0} = 1$, a więc musi być identyczna z odpowiednią linią otrzymaną w poprzednim rozwiązaniu procesu stacjonarnego. Liniami przerywanymi oznaczono trajektorie poszczególnych cząstek materiału. W szczególności linia AC pokazuje jak zmienia się grubość swobodnej krawędzi w miarę zmniejszania jej promienia. Jak widać wpływ wzmocnienia jest niewielki, a dla kinematycznej hipotezy podobnie jak w procesie stacjonarnym będzie jeszcze mniejszy. Znaczna różnica jest jednak w naprężeniach. Na rys. 39 pokazano naprężenia promieniowe odpowiednio dla materiału bez i ze wzmocnieniem. Również i tu liniami ciągłymi pokazano zmianę naprężenia wzdłuż promienia przy określonym b. Linie przerywane przedstawiają historię zmiany naprężenia promieniowego w poszczególnych cząstkach. Rys. 40 pokazuje jak zmienia się siła ciągnąca w miarę zmniejszania się promienia swobodnej krawędzi b. Siłę tę obliczono w stosunku do siły P_0 otrzymanej poprzednio dla procesu stacjonarnego bez wzmocnienia. Na rys. 41 przedstawiono zmianę grubości ścianki końcowego odcinka przeciągniętej rury, otrzymaną z rozwiązania bez wzmocnienia. Uwzględnienie wzmocnienia daje niewielką tylko różnicę.

Następnym przykładem będzie proces roztłaczania końca rury, mający duże zastosowanie w praktyce. Siatkę charakterystyk dla tego przypadku pokazano schematycznie na rys. 36a. Jak już poprzednio wspomniano mamy w tym przypadku zagadnienie mieszane. Wzdłuż charakterystyki AB, odpowiadającej swobodnej krawędzi jest $\omega = \frac{5}{3}\pi$, $h = h_0/\sqrt{6}$, oraz v = 1. Wzdłuż odcinka AC, który nie jest charakterystyką i odpowiada momentom wchodzenia poszczególnych cząstek w obszar odkształcenia, mamy oczywiście $h = h_0$, gdzie h_0 jest grubością ścianki walcowej nieodkształconej części rury. Dane te pozwalają wyznaczyć wszystkie szukane wielkości w całym polu trójkąta ABC. Obliczenia wykonano przy izotropowej hipotezie wzmocnienia przyjmując taką samą zależność między intensywnościami naprężeń stycznych i odkształceń postaciowych jak w poprzednich przykładach liczbowych. Rys. 42 przedstawia siatkę charakterystyk otrzymaną z rozwiązania ze wzmocnieniem. Różni się ona minimalnie od odpowiedniej siatki bez uwzględnienia wzmocnienia. Zmianę grubości ścianki pokazano na rys. 43. Tu wpływ wzmocnienia jest wyraźniejszy niż poprzednio szczególnie przy dużym stosunku zewnętrznej średnicy kołnierza do średnicy rury. Jak poprzednio liniami ciągłymi zaznaczono zmianę grubości wzdłuż promienia dla określonych promieni swobodnej krawędzi b. Linie przerywane pokazują historię zmiany grubości dla różnych partii materiału wchodzących kolejno w obszar odkształcenia. W szczególności linia przerywana abc przedstawia historię zmiany grubości swobodnej krawędzi. Na rys. 44 pokazano wielkość naprężeń promieniowych, a na rys. 45 wielkość siły nacisku P potrzebnej do roztłoczenia w stosunku do końcowej wartości P_0 uzyskanej z rozwiązania bez wzmocnienia. Jak widać wpływ wzmocnienia nie jest zbyt wielki, szczególnie dla niedużego stopnia roztłoczenia końca rury.

Jako ostatni przykład liczbowy procesu niestacjonarnego podamy rozwiązanie dla procesu rozszerzania płaskiego pierścienia. Schemat siatki charakterystyk pokazano na rys. 35a. Zagadnienie to ma duże znaczenie praktyczne, gdyż z jego rozwiązania uzyskuje się odrazu liczbowe wyniki dla takich procesów jak np. wywijanie kołnierzy płaskim stemplem /rys. 46a/ lub próbą rozszerzania otworu metodą Siebela i Pompa /rys. 46b/ stosowana do badania tłoczliwości blach. W takich przypadkach należy oczywiście przerwać obliczenia na pionowej linii poprowadzonej z punktu C na płaszczyźnie charakterystyk r, b. Rozwiązanie sprowadza się do zagadnienia charakterystycznego. Wzdłuż charakterystyki pierwszej rodziny AB, która odpowiada wewnętrznej nieobciążonej krawędzi mamy $\omega = \frac{5}{3}\pi$, $h = h_0/\sqrt{b}$, oraz v = 1. Jeżeli przyjmiemy, że pierścień miał początkowo stałą grubość, to wzdłuż charakterystyki drugiej rodziny AC mamy $h = h_0 = const$. Dane te pozwalają wyznaczyć rozwiązanie w całym czworokącie ABCD. Również i w tym przypadku obliczenia wykonano dla hipotezy izotropowej i dla takiego samego materiału jak poprzednio. Siatkę charakterystyk, uzyskaną przy uwzględnieniu wzmocnienia pokazuje rys. 47. W ledwie dostrzegalny sposób różni się ona od siatki dla materiału bez wzmocnienia. Również różnice w zmianie grubości ścianki są w obu przypadkach znikomo małe. Na rys. 48 pokazano rozwiązanie dla grubości uzyskane ze wzmocnieniem. Linie ciągłe przedstawiają zmianę grubości wzdłuż promienia dla określonych wartości promienia otworu b. Linie przerywane pokazują historię zmiany grubości poszczególnych elementów pierścienia. W szczególności linia AB przedstawia zmianę grubości wewnętrznej krawędzi w różnych stadiach procesu. Jak widać największe pocienienie występuje na krawędzi otworu. W każdym momencie procesu rozkład grubości wzdłuż promienia niewiele odbiega od równomiernego. Na rys. 49 pokazano wielkość naprężeń promieniowych σ_r. Linie ciągłe otrzymano z rozwiązania bez wzmocnienia a przerywane ze wzmocnieniem. Grube linie przedstawiają zmianę naprężeń wzdłuż promienia dla określonych wartości promienia otworu a cienkie linie historię zmiany naprężenia w poszczególnych cząstkach materiału.

5. Przejście od procesu niestacjonarnego do stacjonarnego.

W punkcie 4 przedstawiono rozwiązanie końcowego etapu ciągnienia rury. Jest to typowy przykład przejścia od stacjonarnej do niestacjonarnej fazy procesu. Zupełnie odmiennie przedstawia się zagadnienie odwrotne, gdy przechodzimy od fazy niestacjonarnej do stacjonarnej. Ściśle mówiąc proces ustala się dopiero w nieskończoności, jednakże praktycznie już po bardzo krótkim czasie warunki niewiele różnią się od stacjonarnych.

Rozpatrzmy teraz dalszy etap procesu roztłaczania rury pokazanego na rys.42. Etap ten rozpoczyna się w chwili, gdy swobodna końcowa krawędź osiąga cylindryczną część trzpienia /rys.50/. Jako skalę czasu można teraz przyjąć długość roztłoczonego odcinka rury x. Należy oczekiwać, że w miarę powiększania się długości x rozkład grubości ścianki wzdłuż stożkowej części trzpienia będzie zbliżał się do rozkładu otrzymanego dla procesu stacjonarnego. Równanie równowagi /18/, warunek plastyczności /19/ oraz związek /29/ między prędkością płynięcia a naprężeniami nie zmieniają się. Jedynie w warunku nieściśliwości /30/ należy zamiast b podstawić x

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{h}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 .$$

Równaniem różniczkowym pierwszej rodziny charakterystyk będzie równanie $dr - vdx = 0$. Charakterystyki drugiej rodziny są określone równaniami $x = \text{const}$. Zależności różniczkowe, które muszą być spełnione wzdłuż tych charakterystyk, są takie same jak w poprzednim przypadku.

Rozpatrzmy na płaszczyźnie x,r zagadnienia brzegowe i początkowe dla równań charakterystyk /rys.51/. Odcinek AB charakterystyki $x = 0$ drugiej rodziny, odpowiada chwili w której swobodna krawędź roztłaczanej rury osiąga cylindryczną część trzpienia. Wzdłuż AB znamy więc wszystkie szukane funkcje z rozwiązania poprzedniego etapu procesu. Wzdłuż pionowej linii $r = R_0$, która przedstawia granicę między częścią walcową i stożkową, mamy $\omega=\frac{\overline{5}}{3}\bar{h}$ oraz $v = 1$. Dane te pozwalają wyznaczyć rozwiązanie w całym polu ABC. Wzdłuż pionowej linii $r = r_0$ mamy $h = h_0$, co wraz ze znalezionymi już wartościami h, ω i v wzdłuż charakterystyki AC pierwszej rodziny tworzy problem mieszany w trójkącie ACD. W ten sposób można przedłużać rozwiązanie dla dowolnie dużych wartości x. Rys.52 pokazuje zmianę grubości ścianki h wzdłuż stożkowej części trzpienia przy różnych wartościach x. Otrzymane rozwiązanie bardzo szybko zbliża się do rozwiązania dla procesu stacjonarnego, pokazanego linią przerywaną a uzyskanego w sposób podany w punkcie 3. Przy $x = 0{,}8r_0$ rozkład grubości bardzo niewiele odbiega od rozkładu dla procesu stacjonarnego. Wartości liczbowe otrzymano dla materiału bez wzmocnienia. Rysunek 52 uzupełniono podanymi już poprzednio wynikami dla poprzedniego etapu procesu, w którym swobodna końcowa krawędź rury znajdowała się na stożkowej części trzpienia.

W ten sam sposób można rozwiązać również inne przypadki przejścia od niestacjonarnej fazy procesu do stacjonarnej. Przykładem może być obciskanie rury pokazane na rys.36b. Równania charakterystyk pozostają bez zmiany. Inne będą tylko wamunki brzegowe i początkowe na płaszczyźnie x,r. Wartość x oznacza tu również długość już obciśniętego odcinka rury poza matrycą.

6. Uwagi końcowe

Jak widać z powyższych przykładów wpływ wzmocnienia na zmianę grubości ścianki jest niewielki. Na przewidywaniu takiego rezultatu oparto zresztą zaproponowaną metodę kolejnych przybliżeń. Z przykładu stacjonarnego procesu ciągnienia rury widać, że kinematyczna hipoteza wzmocnienia daje wyniki bardzo bliskie rozwiązaniu dla materiału bez wzmocnienia. Znacznie większe różnice daje hipoteza izotropowa. Jak już wspomniano decydującą rolę odgrywa tu wielkość krzywizny powierzchni plastyczności. Przesuwanie powierzchni plastyczności przy hipotezie kinematycznej nie zmienia jej krzywizny, a różnice grubości ścianki w stosunku do rozwiązania bez wzmocnienia wynikają z nieco innej drogi obciążenia po powierzchni plastyczności w obu przypadkach. Stosując hipotezę wzmocnienia izotropowego znacznie zmniejszamy krzywiznę powierzchni plastyczności w czasie obciążania. Daje to poważniejsze różnice w kierunku wektorów prędkości odkształcania i w rezultacie inny rozkład grubości ścianki. W związku z tym nasuwa się uwaga, czy w procesie aktywnego obciążania nie będziemy bliżsi rzeczywistości stosując hipotezę kinematyczną. Jak wynika bowiem z pierwszej części pracy doświadczenia pokazują, iż w otoczeniu punktu obciążania powierzchnia plastyczności silnie zwiększa swą krzywiznę. W żadnym przypadku nie zaobserwowano zmniejszenia krzywizny jak przy hipotezie izotropowej.

L i t e r a t u r a

1. W. Prager - The Theory of Plasticity; A Survey of Recent Achievements /James Clayton Lecture/ - Proc.Inst.Mech.Engrs. vol. 169, /1955/, 41.
2. W. Prager - Probleme der Plastizitatstheorie - Birhauser Verlag, Basel, /1955/.
3. A.I. Iszliński - Obszczaja tieorija płasticznosti s liniejnym uprocznienijem - Ukr.Matem.Żurn., Nr 3,/1954/, 314-324.
4. J.I. Kadaszewicz, W.W. Nowożyłow - Tieorija Płasticznosti uczitywajuszczaja ostatocznyje mikronaprіażenija - PMM, t.XXII, /1958/, 78-89.
5. H. Ziegler - A Modification of Prager's Hardening Rule - Quat. Appl.Math. Vol. 17, /1959/, 55-65.
6. P.G. Hodge - Theory of Piecewise Linear Isotropic Plasticity - Proc.Coll.Deform. and Flow of Solids, Madrid, /1955/, 147-169.
7. J.L. Sanders - Plastic Stress-Strain Relations Based on Linear Loading Functions - Proc.2nd US Congr.Appl.Mech. /1954/, 455-460.
8. S.B. Batdorf, B. Budiansky - A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip - NACA TN 1871, /1949/.
9. D.C. Drucker - Plasticity - Proc.1st Symp.Naval Struct.Mech. /1958/, 407-455.
10. P.M. Naghdi - Stress-Strain Relations in Plasticity and Thermoplasticity - Proc.2nd Symp. Naval Struct.Mech./1960/, 121-167.
11. D.C. Drucker - A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations - Proc.1st US Congr. Appl.Mech./1950/, 487-491.
12. W.D. Kluszników - O wozmożnosti puti postrojenija sootnoszenij płasticznosti - PMM, T. XXIII, /1959/, 282-291.

13. W.D. Klusznikow - Nowyje predstawlenija w plasticznosti i deformacjonnaja tieorija - PMM, T.XXIII, /1959/, 722-731.

14. A. Phillips - An Experimental Investigation on Plastic Stress-Strain Relations - Proc.IXth Intern.Congr.Appl.Mech. /1956/, 23 - 33.

15. P.M. Naghdi, J.C. Rowley and C.W. Beadle - Experiments Concerning the Yield Surface and the Assumption of Linearity in the Plastic Stress-Strain Relations - J.Appl.Mech.vol.22, /1955/, 416-420.

16. B. Budiansky, N.J. Dow, R.W. Peters, R.P. Shepherd - Experimental Studies of Polyaxial Stress-Strain Laws of Plasticity - Proc. 1st US Congr.Appl.Mech. 1950/, 503-512.

17. D.C. Drucker and F.D. Stockton - Instrumentation and Fundamental Experiments in Plasticity - Proc. SESA vol. X no.2, /1953/,127.

18. P.M.Naghdi and J.C. Rowley- An Experimental Study of Biaxial Stress-Strain Relations in Plasticity - J.Mech.Phys.Sol. vol. 3, /1954/, 63-80.

19. A. Phillips - Pointed Vertices in Plasticity - Proc. 2nd Symp. Naval Struct. Mech. /1960/, 202-214.

20. G.J. Taylor and H. Quinney - The Plastic Distortion of Metals- Phil.Trans.Roy.Soc. A vol. CCXXX, /1931/, 323-362.

21. R. Hill - The Mathematical Theory of Plasticity-/1950/,

22. A. Nadai - Theory of Flow and Fracture of Solids - /1950/.

23. P.M. Naghdi, F. Essenburg and W. Koff - An Experimental Study of Initial and Subsequent Yield Surfaces in Plasticity - J. Appl. Mech.vol. 25, /1958/, 201-209.

24. H.J.Ivey - Plastic Stress-Strain Relations and Yield Surfaces for Aluminium Alloys - J.Mech.Eng.Sc.vol. 3, no 1, /1961/, 15-31.

25. G.J. Desk - A Study on the Causes of the Bauschinger Effect - Thesis, MIT, /1962/.

26. L.W.Hu and J.F. Bratt - Effect of Tensile Plastic Deformation on Yield Condition - J.Appl.Mech.vol. 25, /1958/, 441.

27. G.B. Tałypow - Granicy tekuczesti i razruszenija małouglerodistoj stali w słuczaje prostowo i słożnowo nagrużenija. Wlijanije starienija - Izw.AN ZSRR, Otd. Tech.Nauk, No.6,/1961/, 125-130.

28. S.S. Gill and J. Parker - Plastic Stress-Strain Relationships; Some Experiments on the Effect of Loading Path and Loading History - J. Appl.Mech.vol. 26, /1959/, 77-87.

29. J. Parker and J. Kettlewel - Plastic Stress-Strain Relationship; Further Experiments on the Effect of Loading History -J.Appl. Mech.vol. 28, /1961/, 439-446.

30. L.J. Ebingler and G. Sachs - Dependence of the Stress-Strain Curves of Cold-Worked Metals Upon the Testing Direction -J. Aeronautical Sciences, vol. 15, /1948/, 151-154.

31. W.W. Sókołowski - Axial Plastic Flow Between Non-Circular Cylinders - AMS, vol. 12, /1960/, 173-183.

32. B.P. Zworono - Opredielenije napriażenij i dieformacji priblizonnym integrirowanijem po prawiłam trapecij i priamougolnikow - Sbornik, Osnowy tieorii obrabotki mietałłow dawlenijem, 1959.

33. H.W. Swift - Stresses and Strains in Tube-Drawing -Phil.Mag. vol. 40, /1949/, 883-902.

34. W. Szczepiński - Naprężenia i prędkości przy ciągnieniu i obciąganiu cienkościennych powłok o podwójnej krzywiźnie - Praca doktorska, Polit.Warsz. /1960/.

35. W. Szczepiński - Steady-State Plastic Flow Processes with Strain Hardening Experimentally Determined - AMS, vol. 13, /1961/, 377-388.

36. W. Szczepiński - The Equations of Stress and Velocity During the Drawing and Stretchforming Process of Thin Shells with Double Curvature - AMS, vol. 12, /1960/, 565-581, Proc.10th Int.Congr.Appl.Mech., /1960/, 302-303.

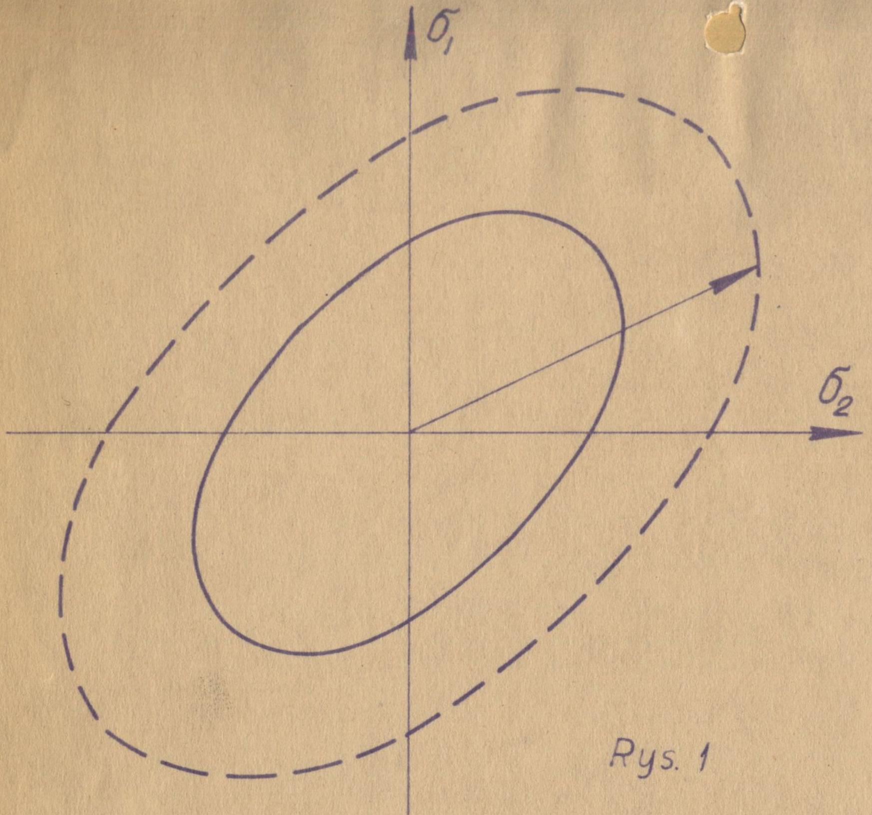
37. W. Szczepiński - Równania naprężeń przy obciąganiu i ciągnieniu cienkich powłok o podwójnej krzywiźnie - ABM, vol. 6, /1959/, 325-345.

38. W.W. Sokołowski - Urawnienija plasticznoho rawnowiesija pri płoskom napriażonnom sostojanii - PMM, vol. 9, /1945/.

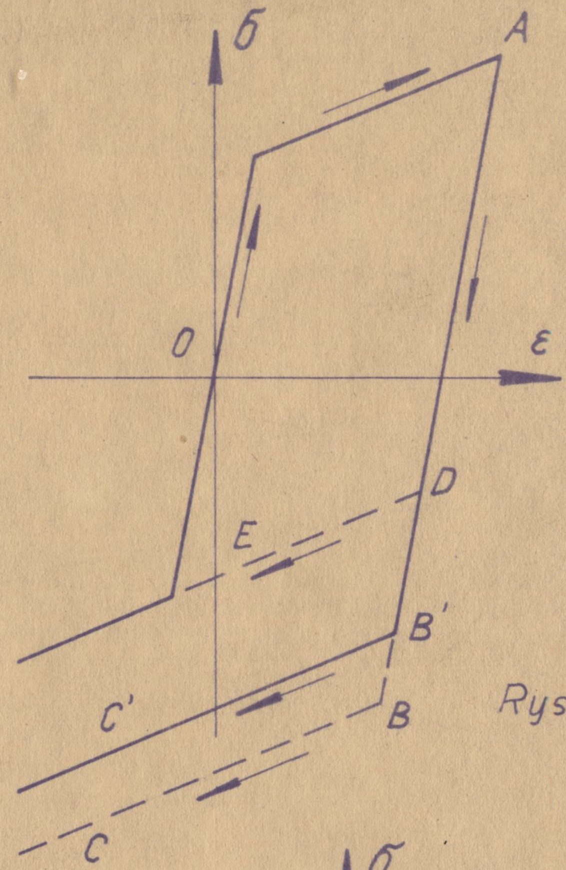
39. A.A. Iljuszyn - Plasticznost́ - /1948/, 254-263.

40. W. Szczepiński - A Method of Successive Approximations of Some Strain-Hardening Solutions - Proc. 4th US Nat. Coggr. Appl.Mech.

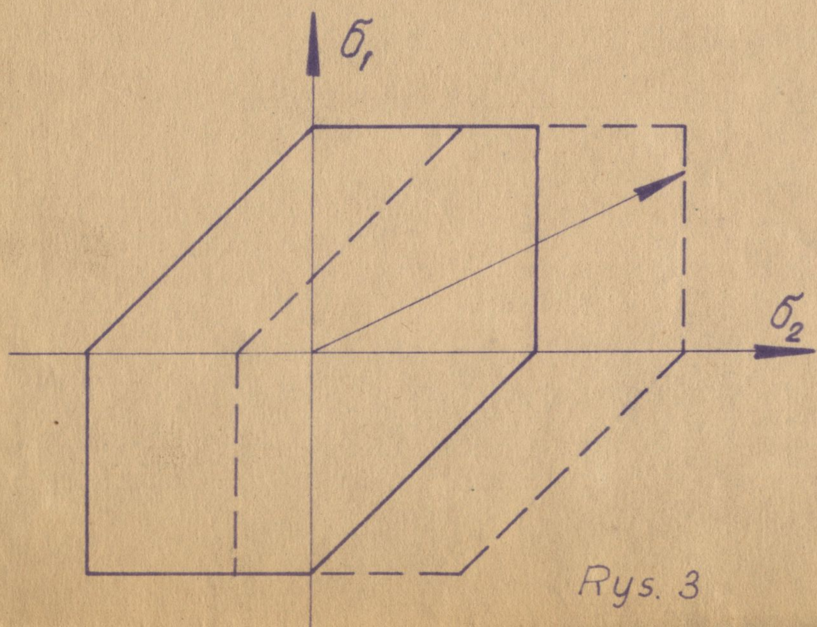
41. W. Szczepiński - Recent Advances in the Theory of Drawing of Thin Shells - Appl.Mech.Rev., vol. 14, /1961/.



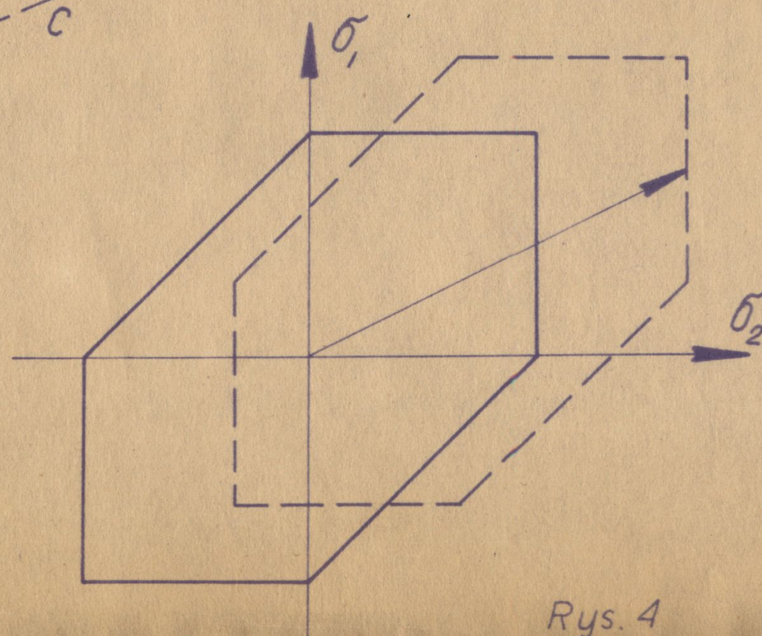
Rys. 1



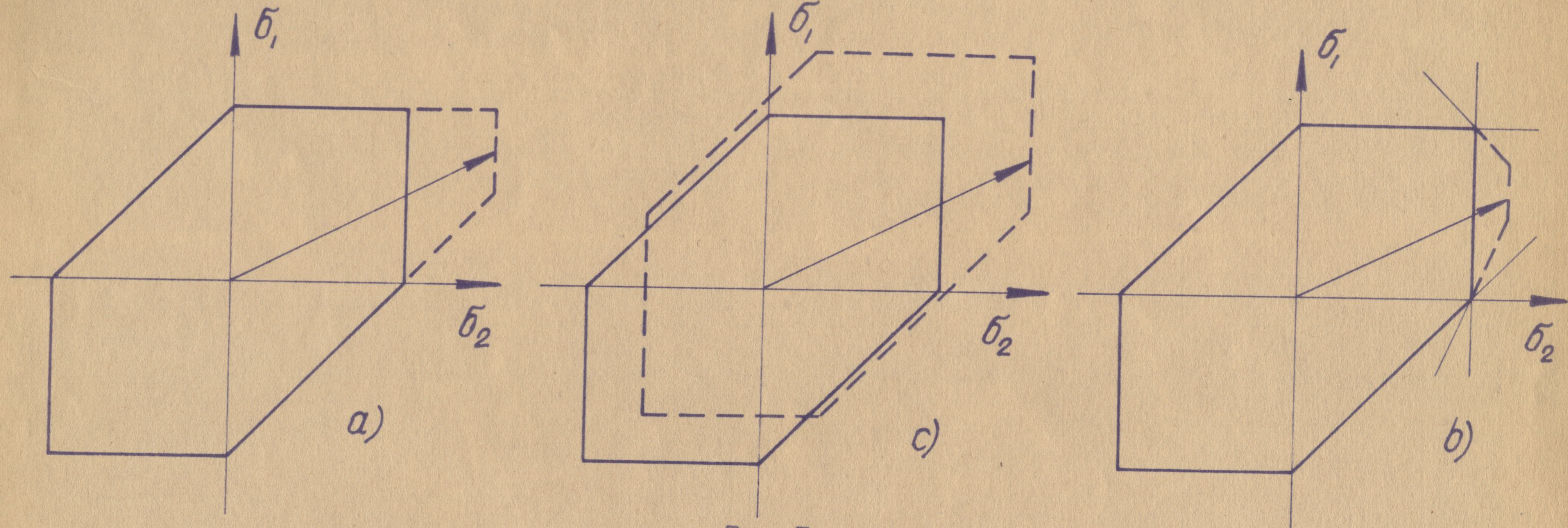
Rys. 2



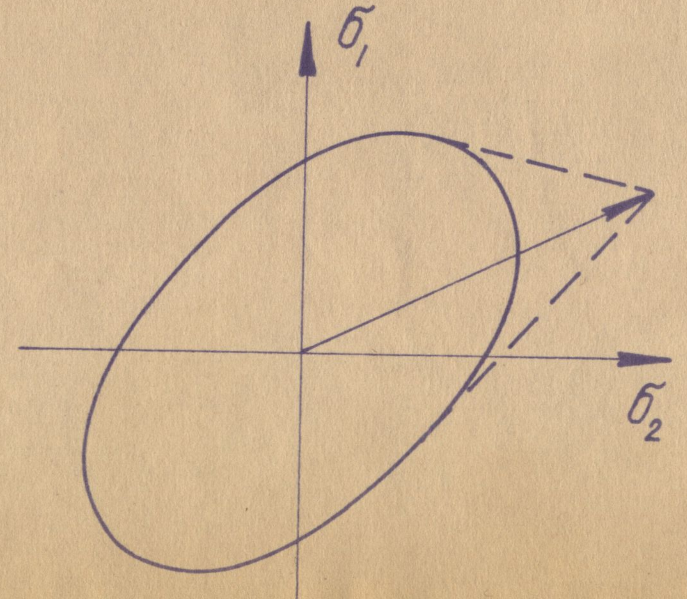
Rys. 3



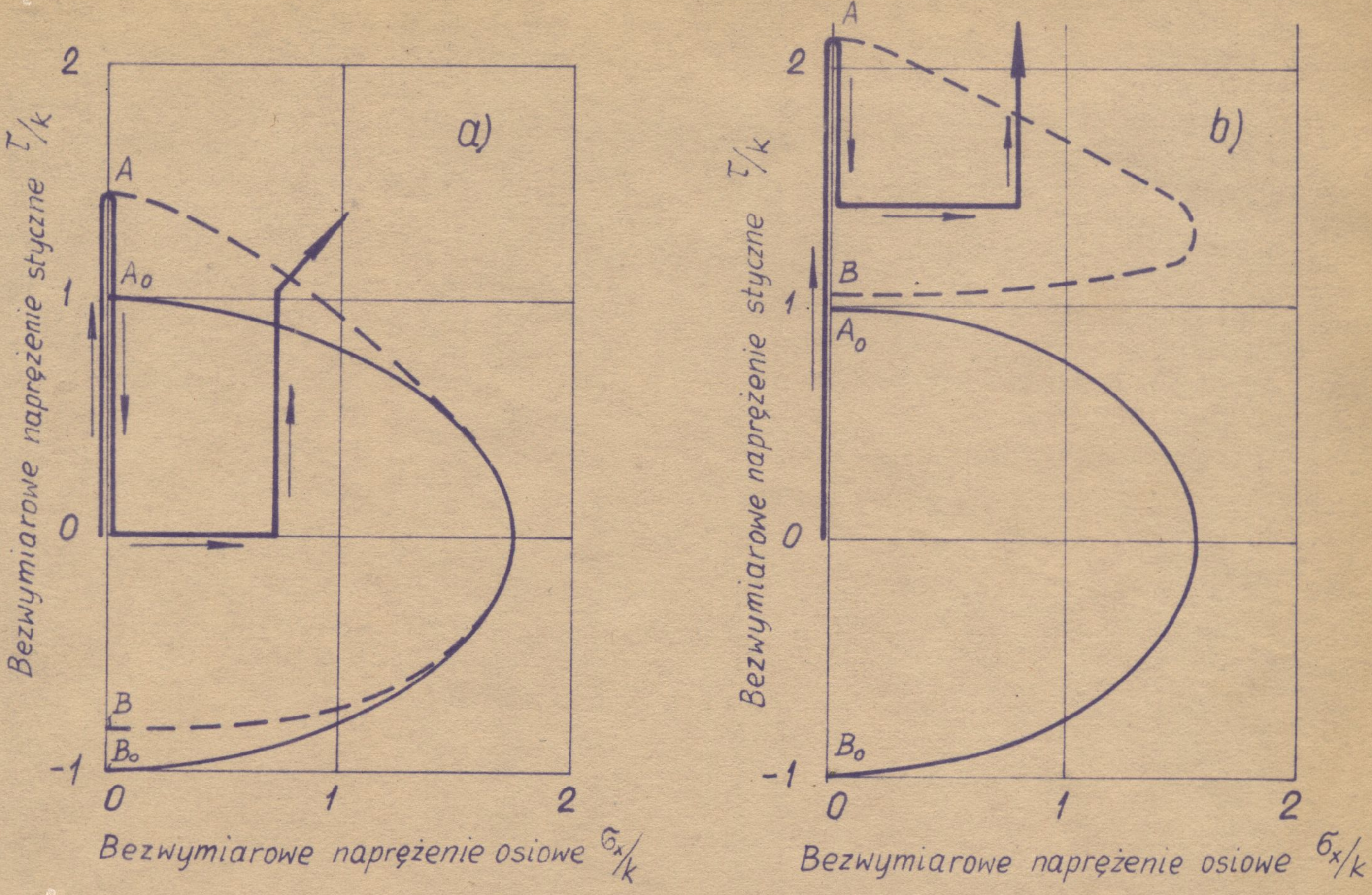
Rys. 4



Rys. 5

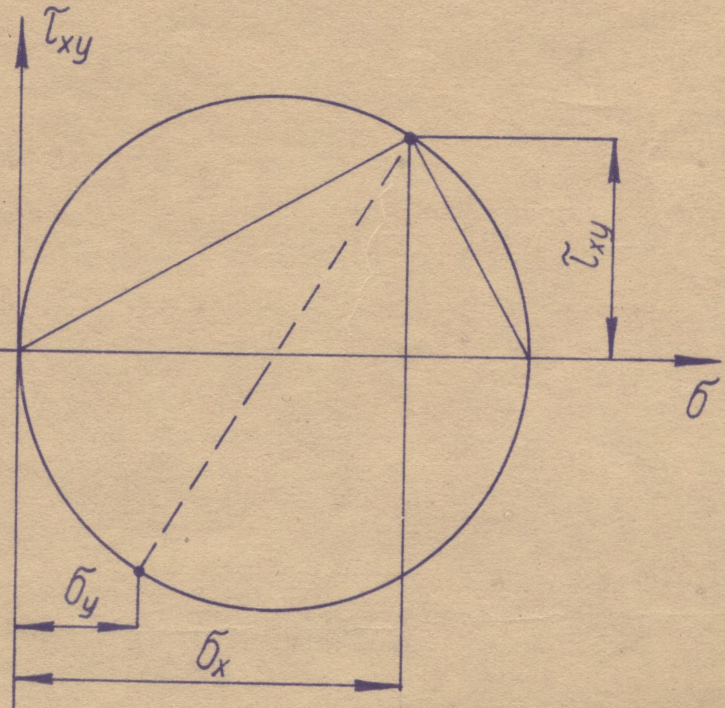


Rys. 6



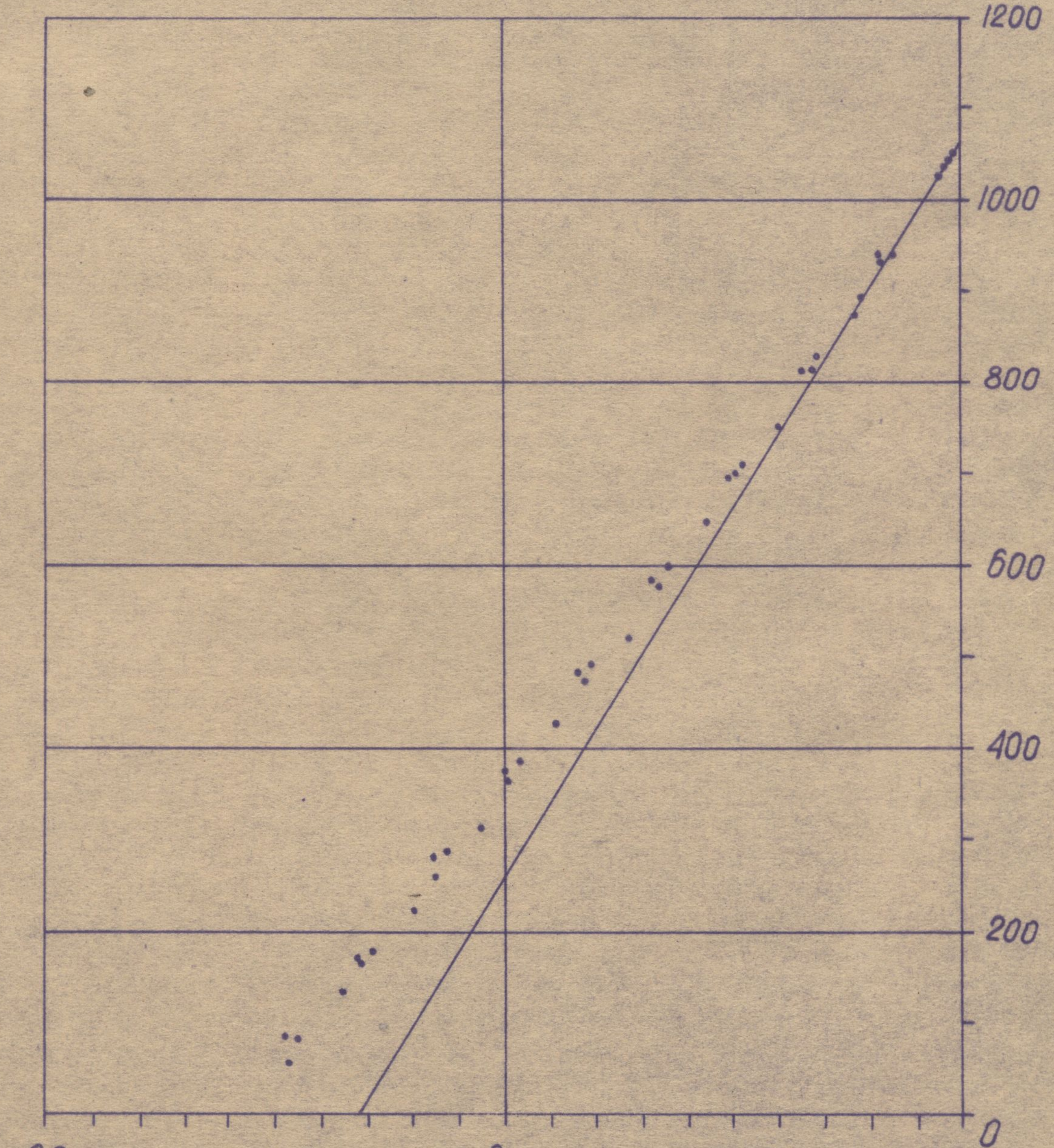
a)
b)
A
A_o
B
B_o
Bezwymiarowe naprężenie styczne τ/k
Bezwymiarowe naprężenie osiowe σ_x/k
2
1
0
-1

Rys. 7

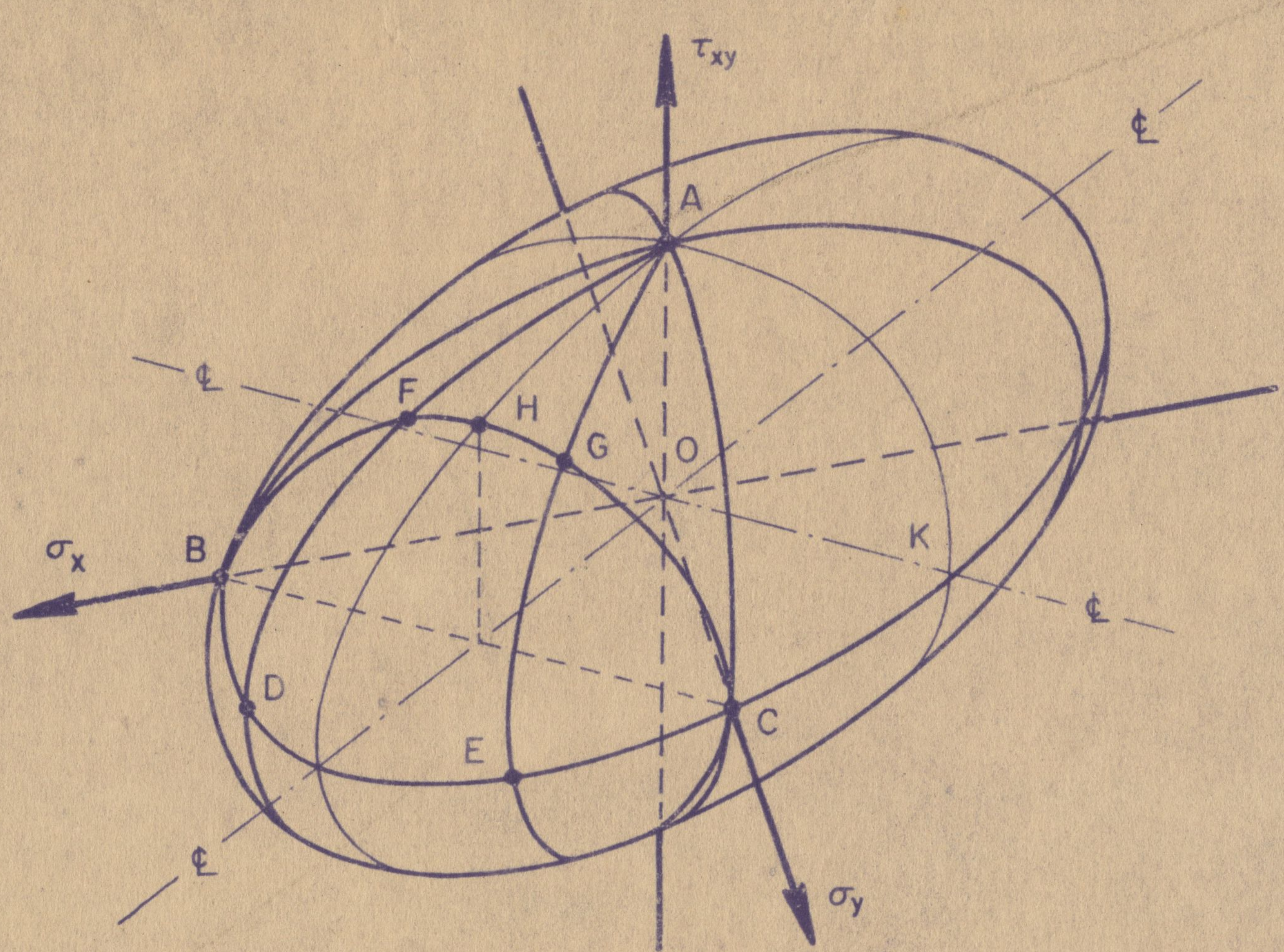


τ_{xy}
σ
σ_y
σ_x

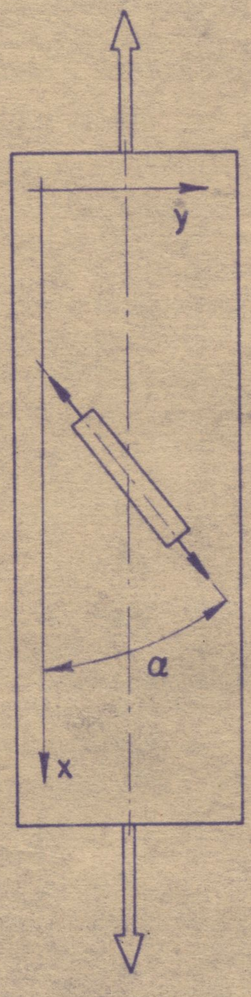
Rys. 10



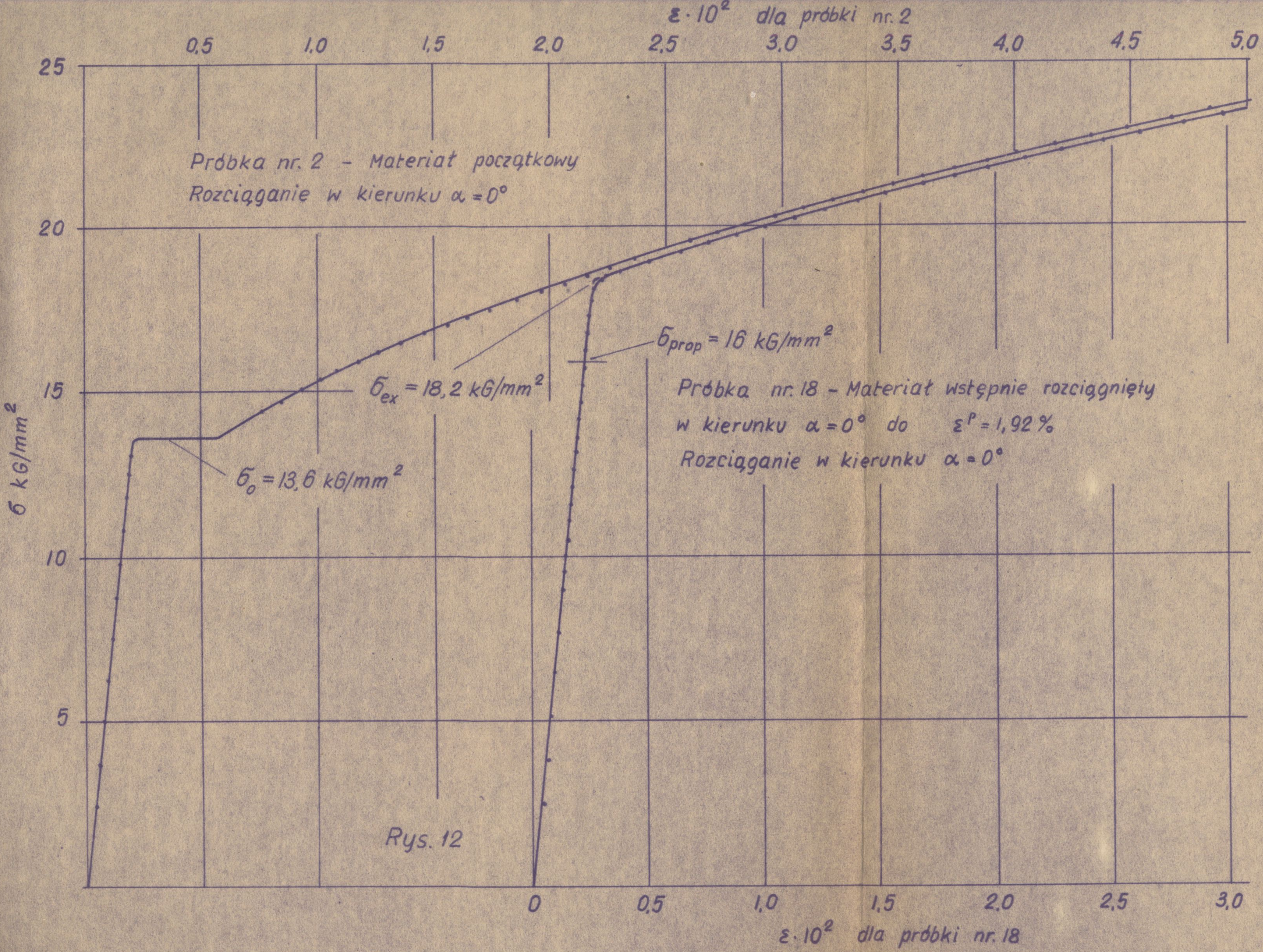
Rys. 8



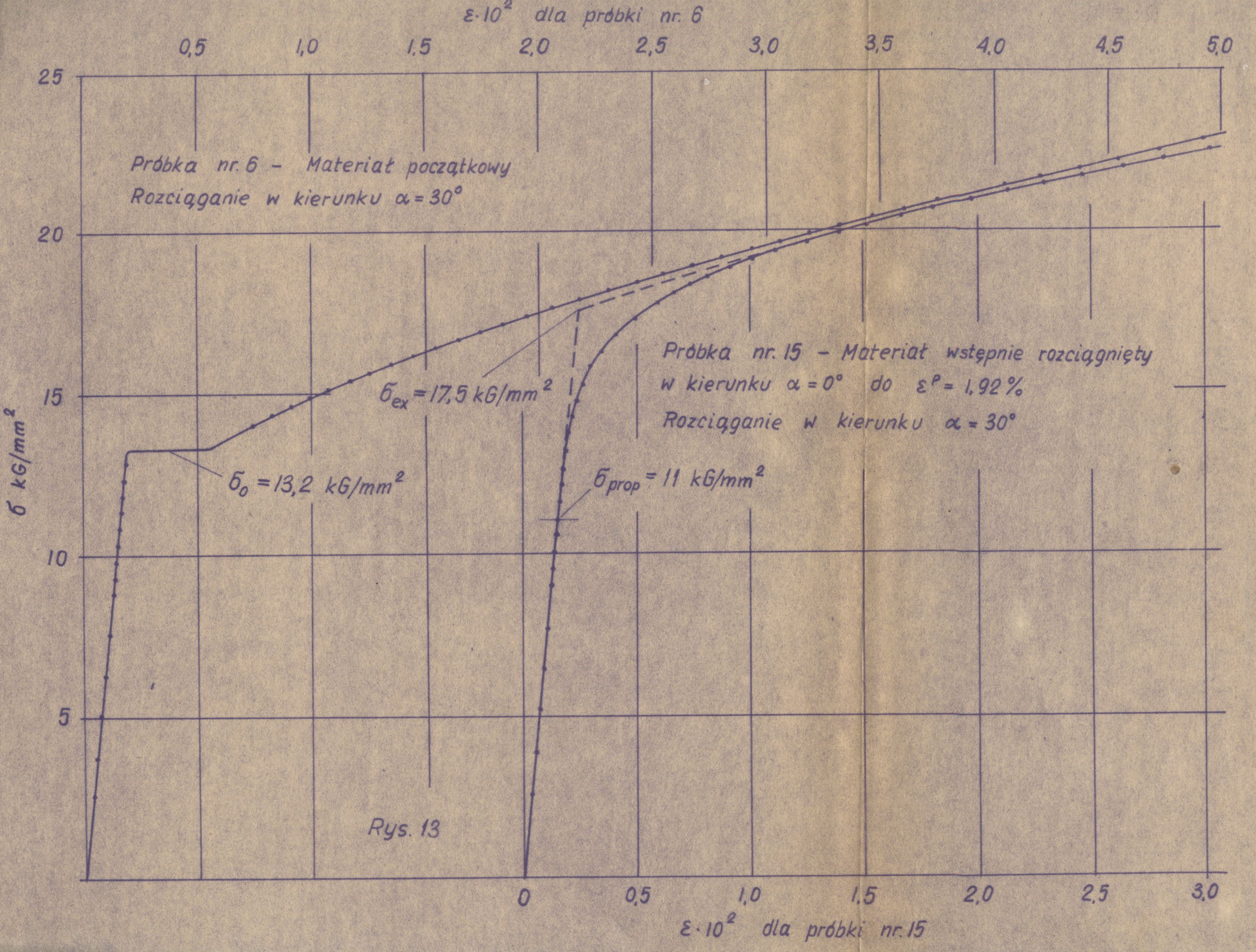
Rys. 9



Rys. 11

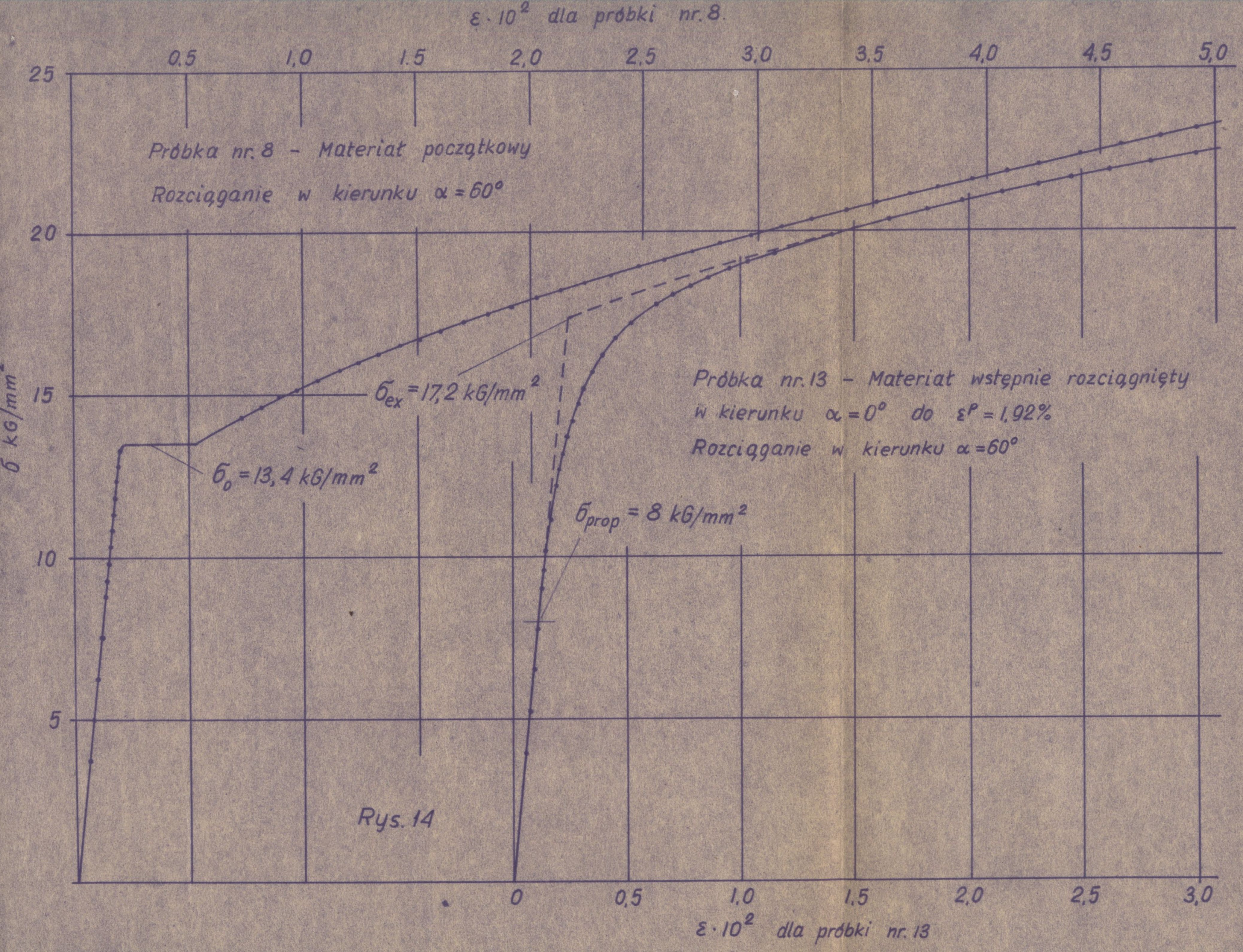

$\varepsilon \cdot 10^2$ dla próbki nr. 2
0,5 1,0 1,5 2,0 2,5 3,0 3,5 4,0 4,5 5,0
25 20 15 10 5
σ kG/mm^2
Próbka nr. 2 - Materiał początkowy
Rozciąganie w kierunku $\alpha = 0°$
$\sigma_{ex} = 18,2$ kG/mm^2
$\sigma_o = 13,6$ kG/mm^2
$\sigma_{prop} = 16$ kG/mm^2
Próbka nr. 18 - Materiał wstępnie rozciągnięty
w kierunku $\alpha = 0°$ do $\varepsilon^P = 1,92$ %
Rozciąganie w kierunku $\alpha = 0°$
0 0,5 1,0 1,5 2,0 2,5 3,0
$\varepsilon \cdot 10^2$ dla próbki nr. 18

Rys. 12



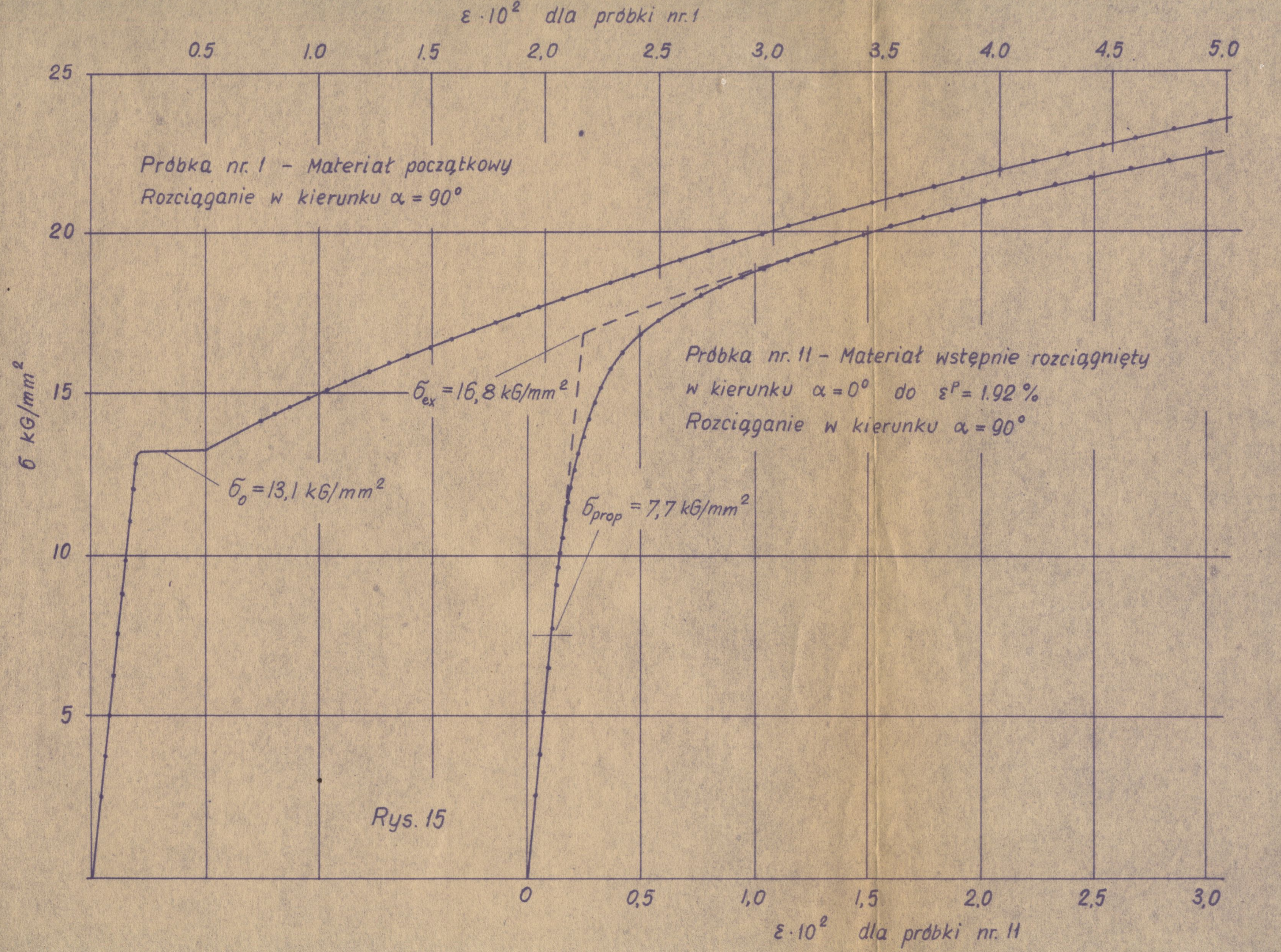
ε·10² dla próbki nr. 6
0,5
1,0
1.5
2,0
2,5
3,0
3,5
4.0
4.5
5,0
25
20
15
10
5
б kG/mm²
Próbka nr. 6 - Materiał początkowy
Rozciąganie w kierunku α = 30°
Próbka nr. 15 - Materiał wstępnie rozciągnięty
w kierunku α = 0° do ε^P = 1,92 %
Rozciąganie w kierunku α = 30°
б_ex = 17,5 kG/mm²
б_o = 13,2 kG/mm²
б_prop = 11 kG/mm²
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
ε·10² dla próbki nr. 15

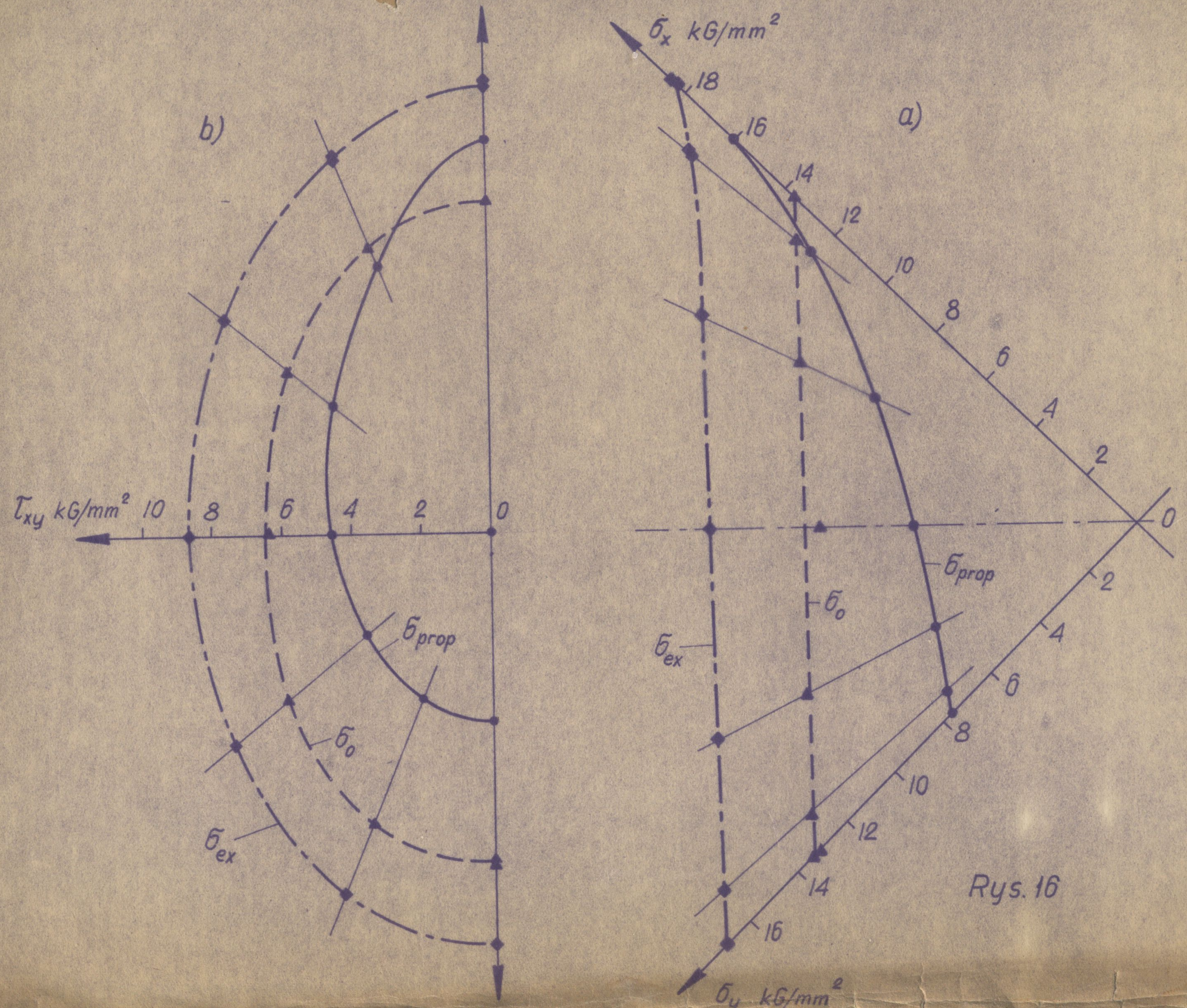
Rys. 13



ε · 10² dla próbki nr. 8.
0.5
1,0
1.5
2,0
2.5
3,0
3.5
4,0
4.5
5,0
25
20
15
10
5
б kG/mm²
Próbka nr. 8 - Materiał początkowy
Rozciąganie w kierunku α = 60°
б_ex = 17,2 kG/mm²
б_o = 13,4 kG/mm²
Próbka nr. 13 - Materiał wstępnie rozciągnięty
w kierunku α = 0° do ε^p = 1,92%
Rozciąganie w kierunku α = 60°
б_prop = 8 kG/mm²
0
0,5
1,0
1.5
2,0
2,5
3,0
ε · 10² dla próbki nr. 13

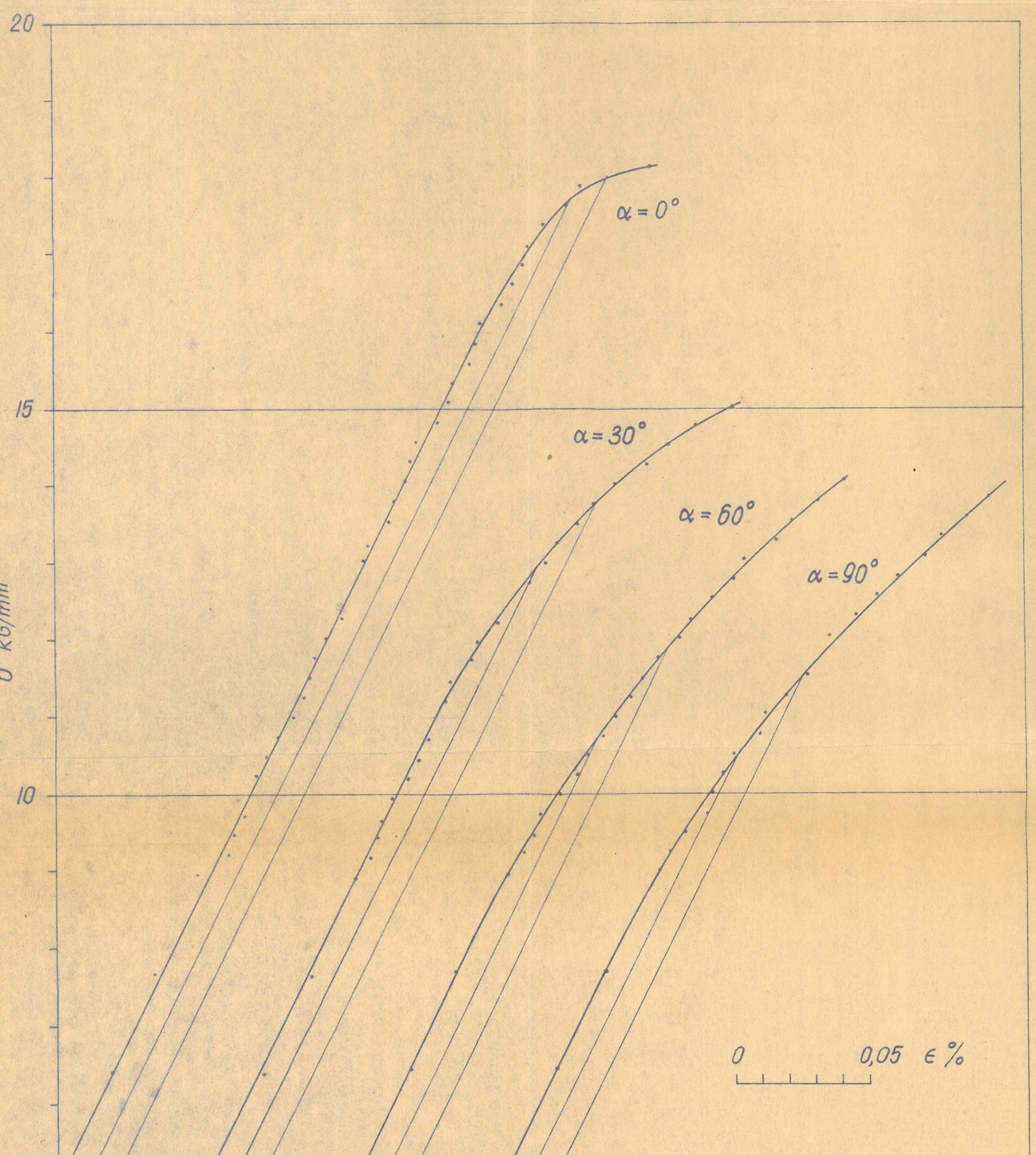
Rys. 14


ε · 10² dla próbki nr.1
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
25
20
15
10
5
σ kG/mm²
Próbka nr. I - Materiał początkowy
Rozciąganie w kierunku α = 90°
σ_ex = 16,8 kG/mm²
σ_o = 13,1 kG/mm²
σ_prop = 7,7 kG/mm²
Próbka nr. II - Materiał wstępnie rozciągnięty
w kierunku α = 0° do ε^P = 1.92 %
Rozciąganie w kierunku α = 90°
Rys. 15
0
0,5
1,0
1,5
2.0
2,5
3,0
ε · 10² dla próbki nr. II

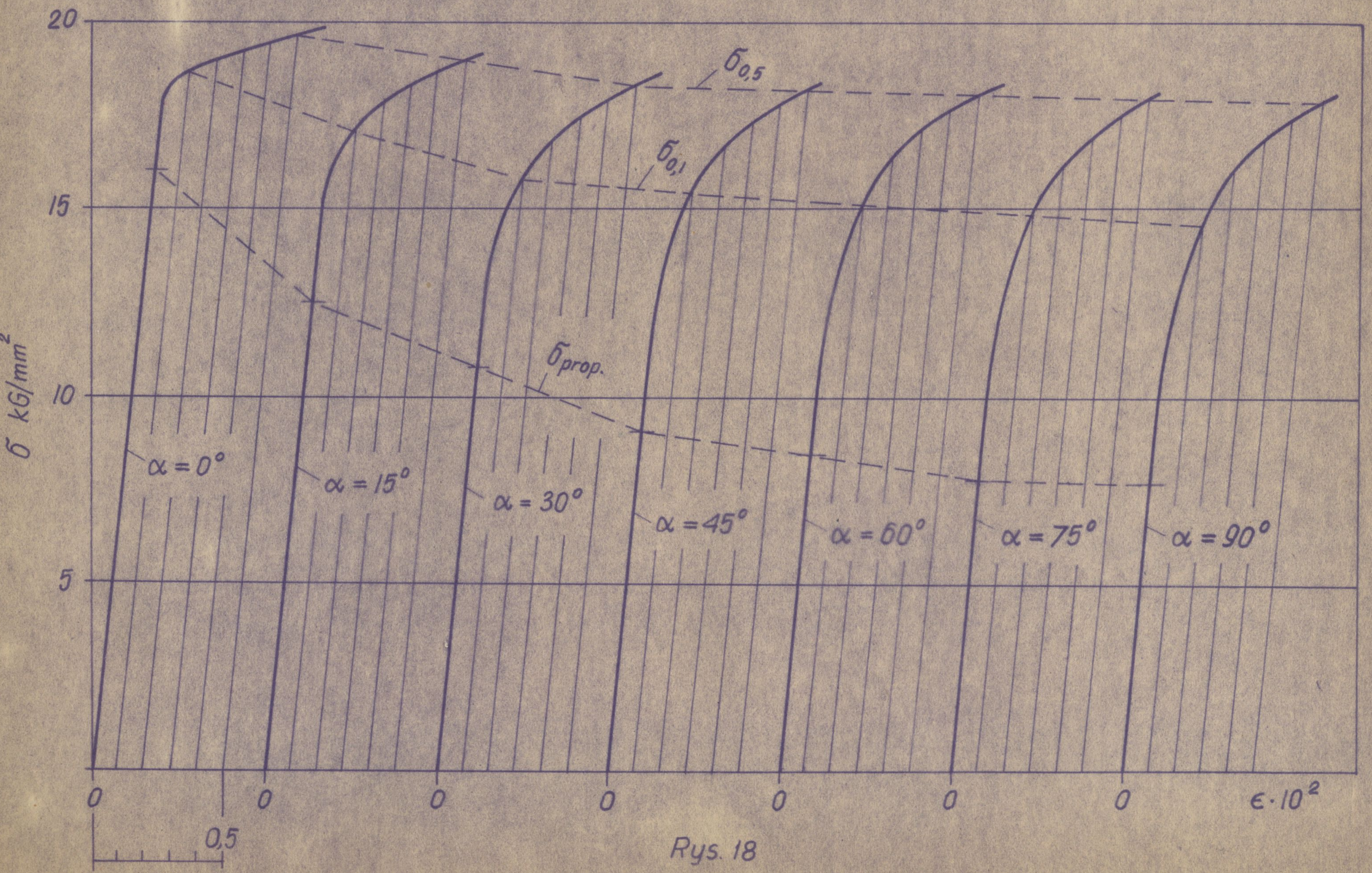


b)
a)
σ_x kG/mm^2
σ_y kG/mm^2
τ_{xy} kG/mm^2
σ_{prop}
σ_o
σ_{ex}
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

Rys. 16

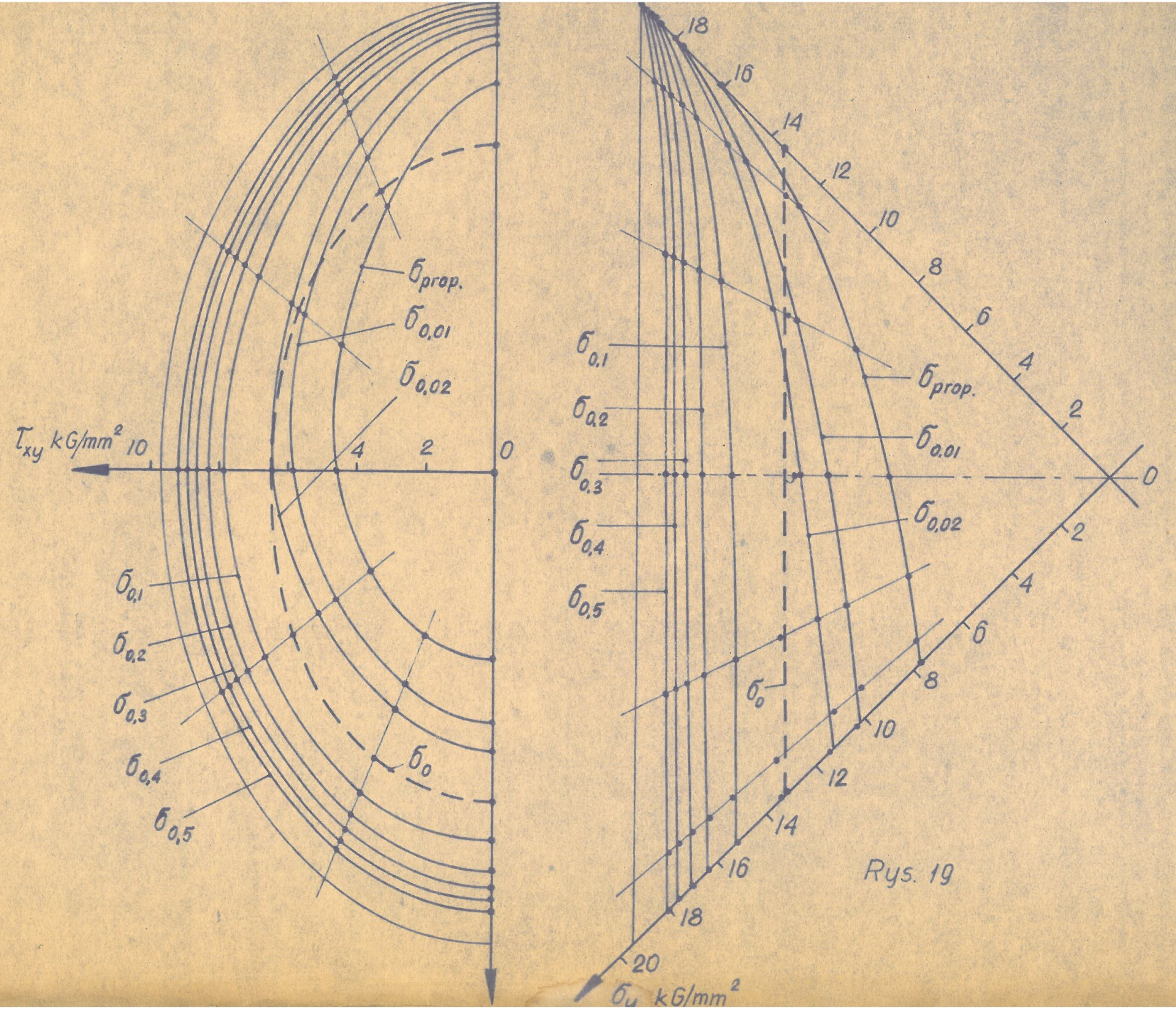


Rys. 17



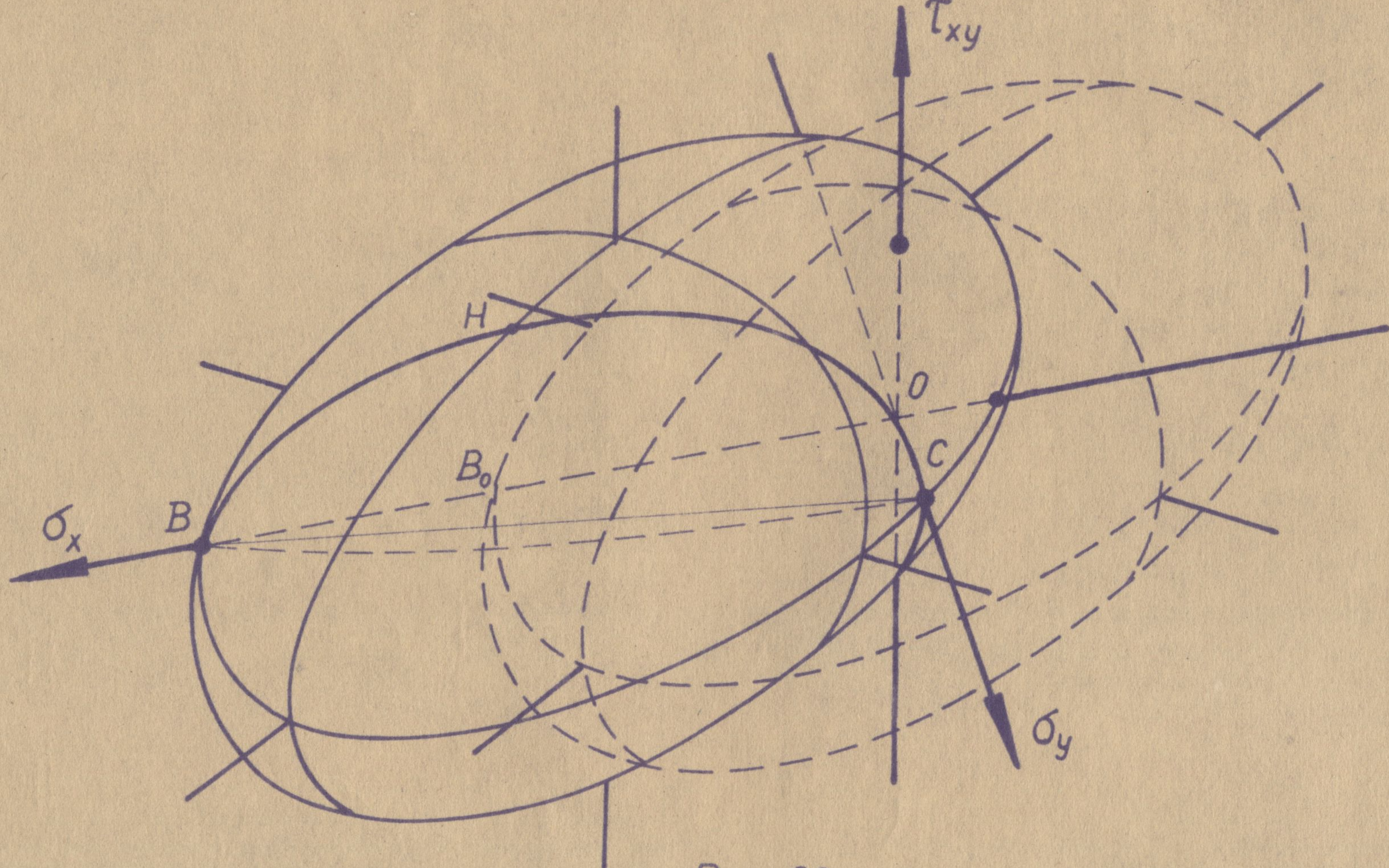
20
15
10
5
б kG/mm²
б0,5
б0,1
бprop.
α = 0°
α = 15°
α = 30°
α = 45°
α = 60°
α = 75°
α = 90°
0
0,5
ε·10²

Rys. 18

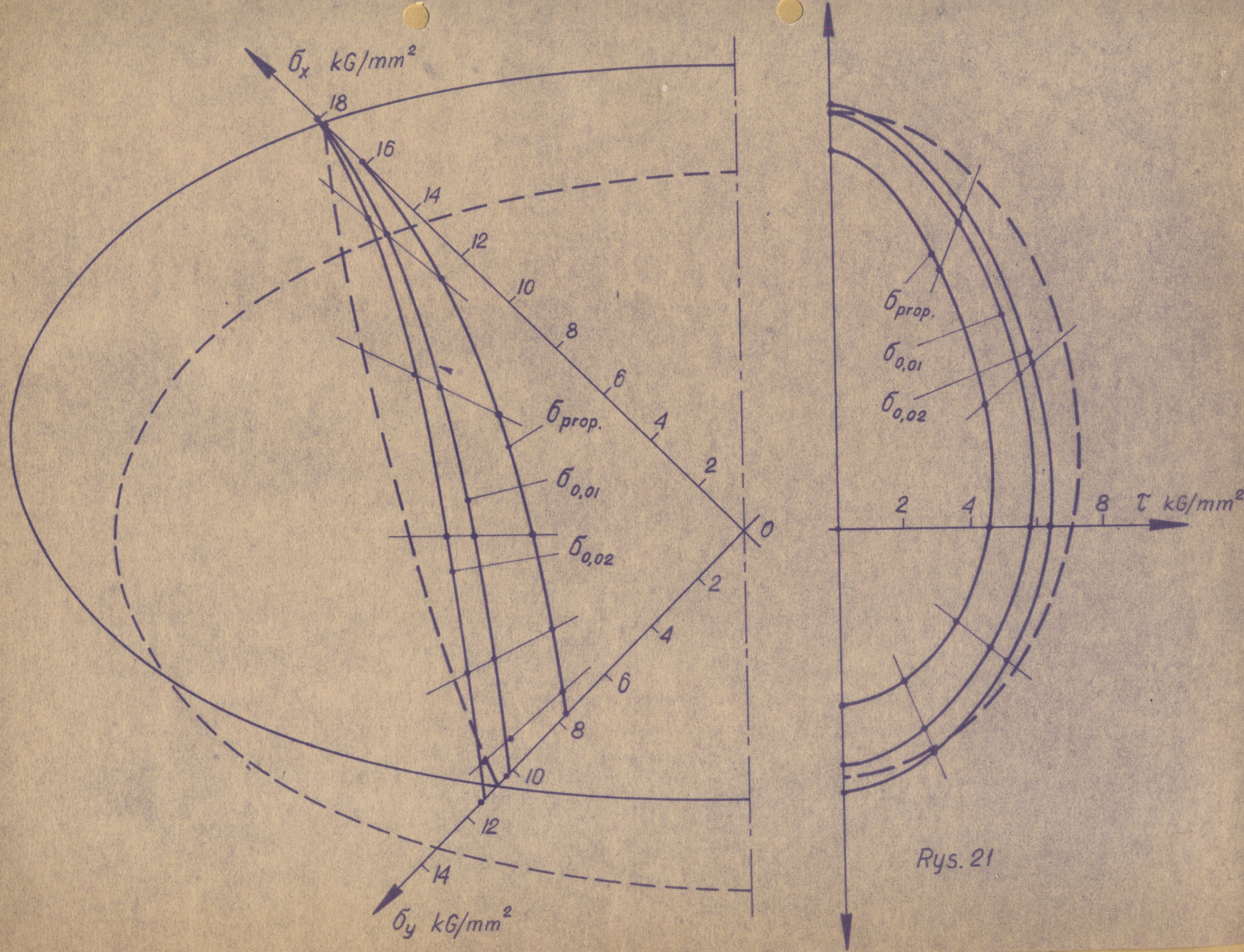


τ_{xy} kG/mm²
10
4
2
0
$\sigma_{prop.}$
$\sigma_{0,01}$
$\sigma_{0,02}$
$\sigma_{0,1}$
$\sigma_{0,2}$
$\sigma_{0,3}$
$\sigma_{0,4}$
$\sigma_{0,5}$
σ_{0}
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
20
σ_{u} kG/mm²

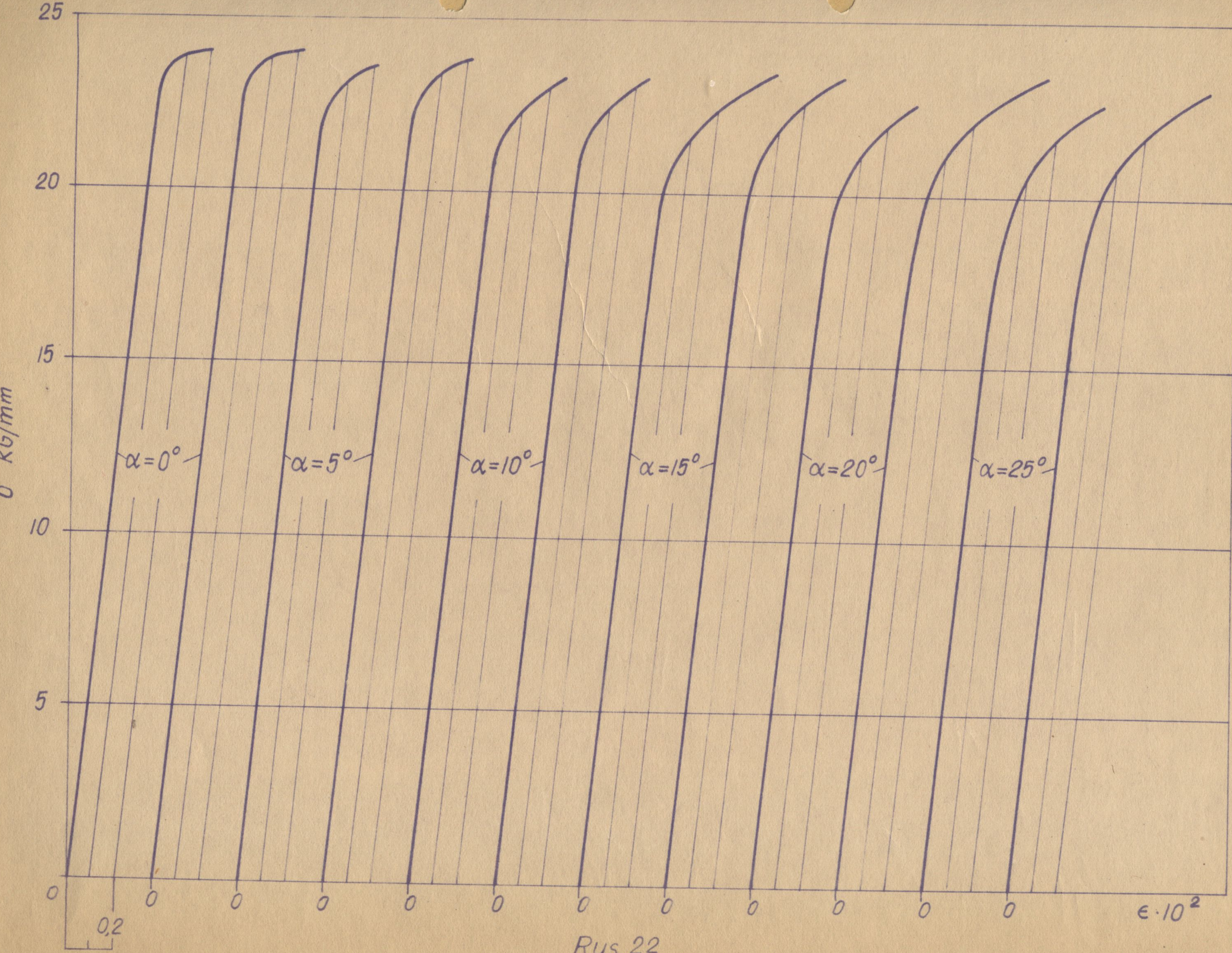
Rys. 19



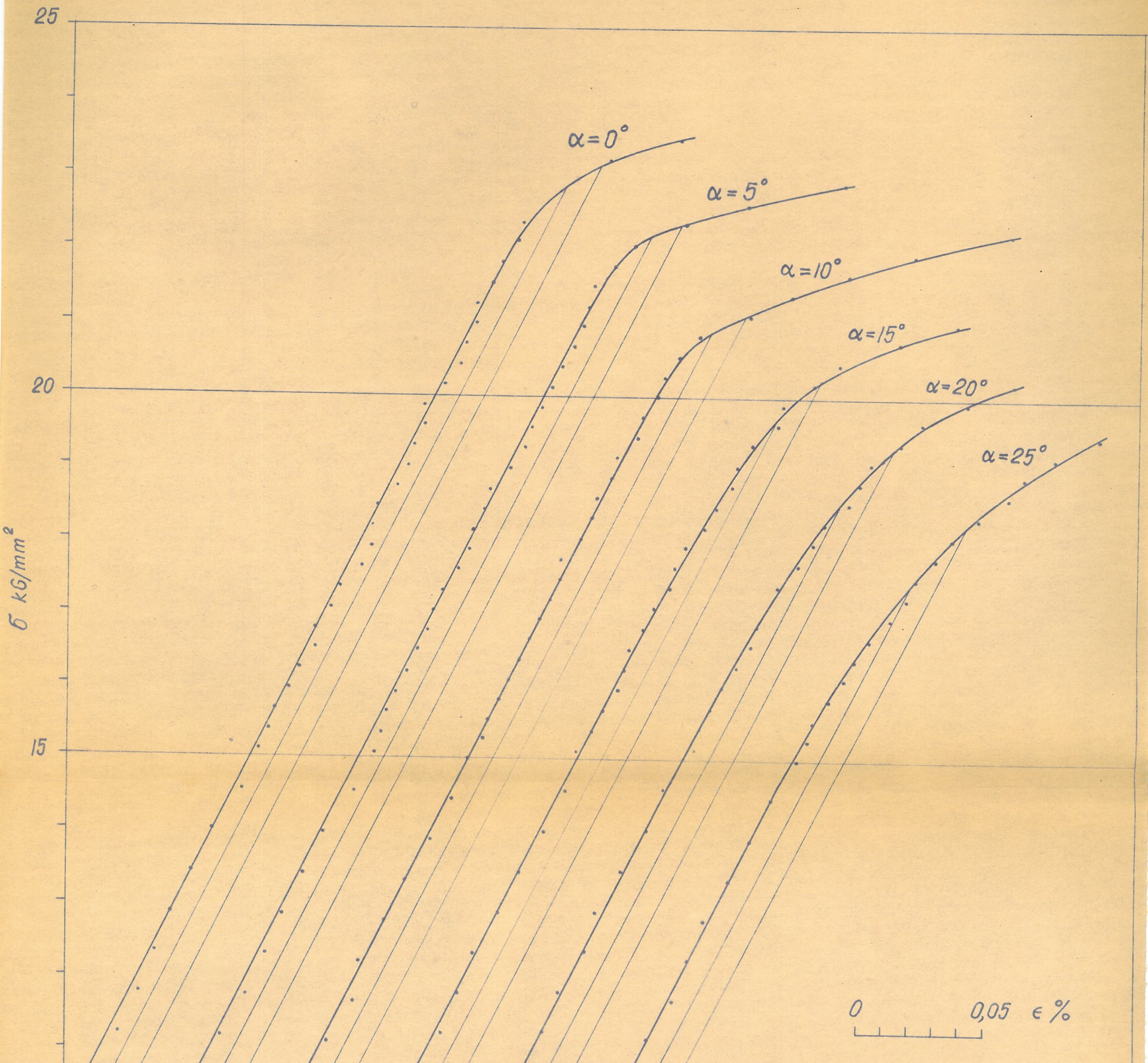
Rys. 20


б_x kG/mm²
б_y kG/mm²
τ kG/mm²
б_{prop.}
б_{0,01}
б_{0,02}
б_{prop.}
б_{0,01}
б_{0,02}

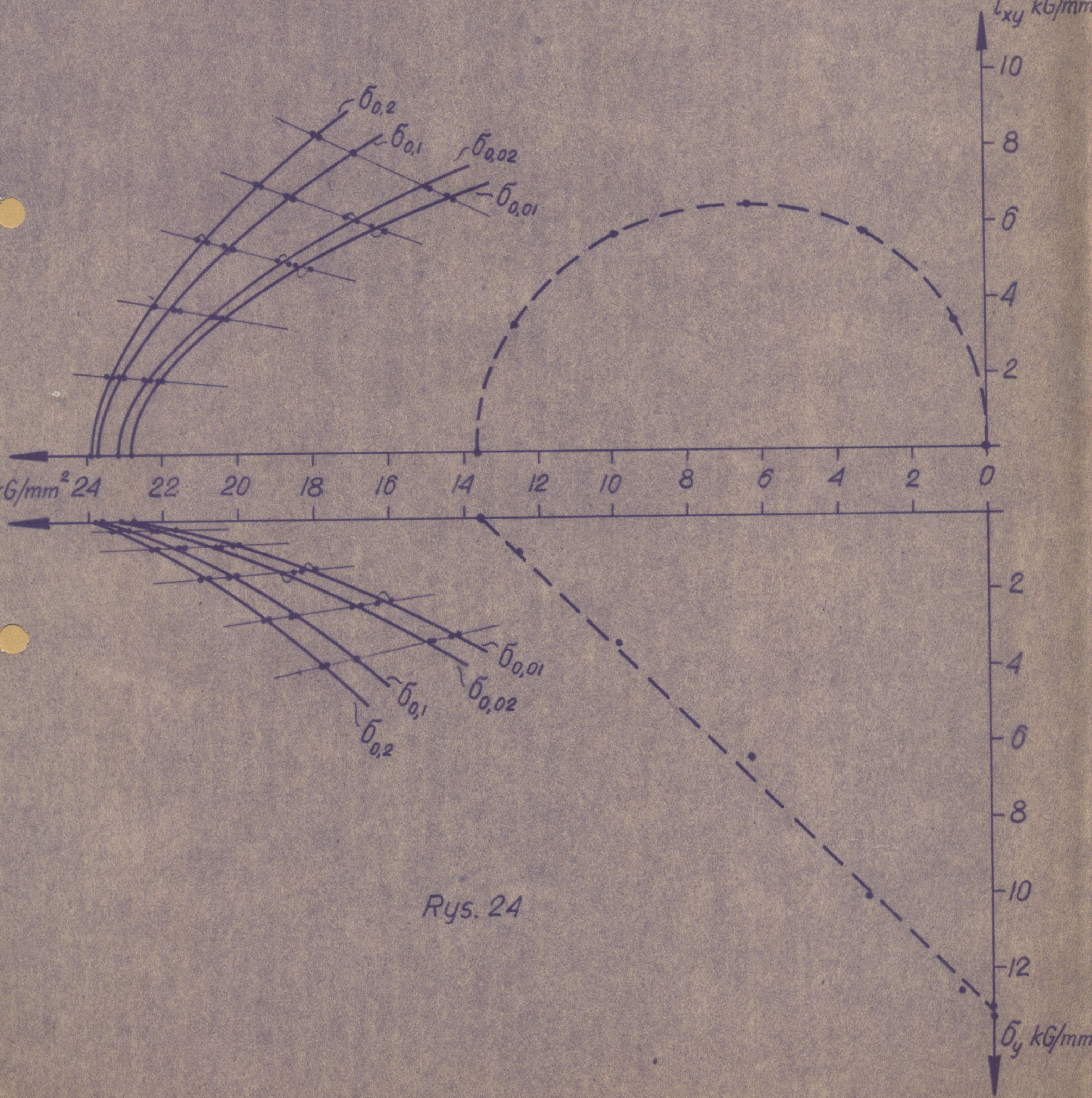
Rys. 21



Rys. 22

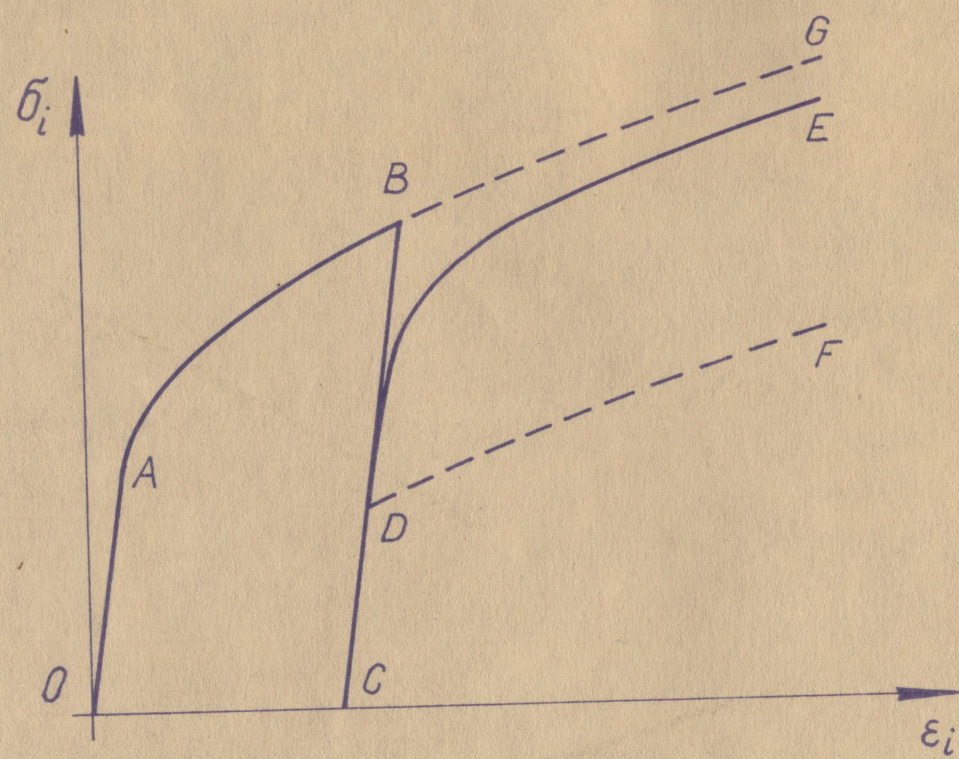


Rys. 23

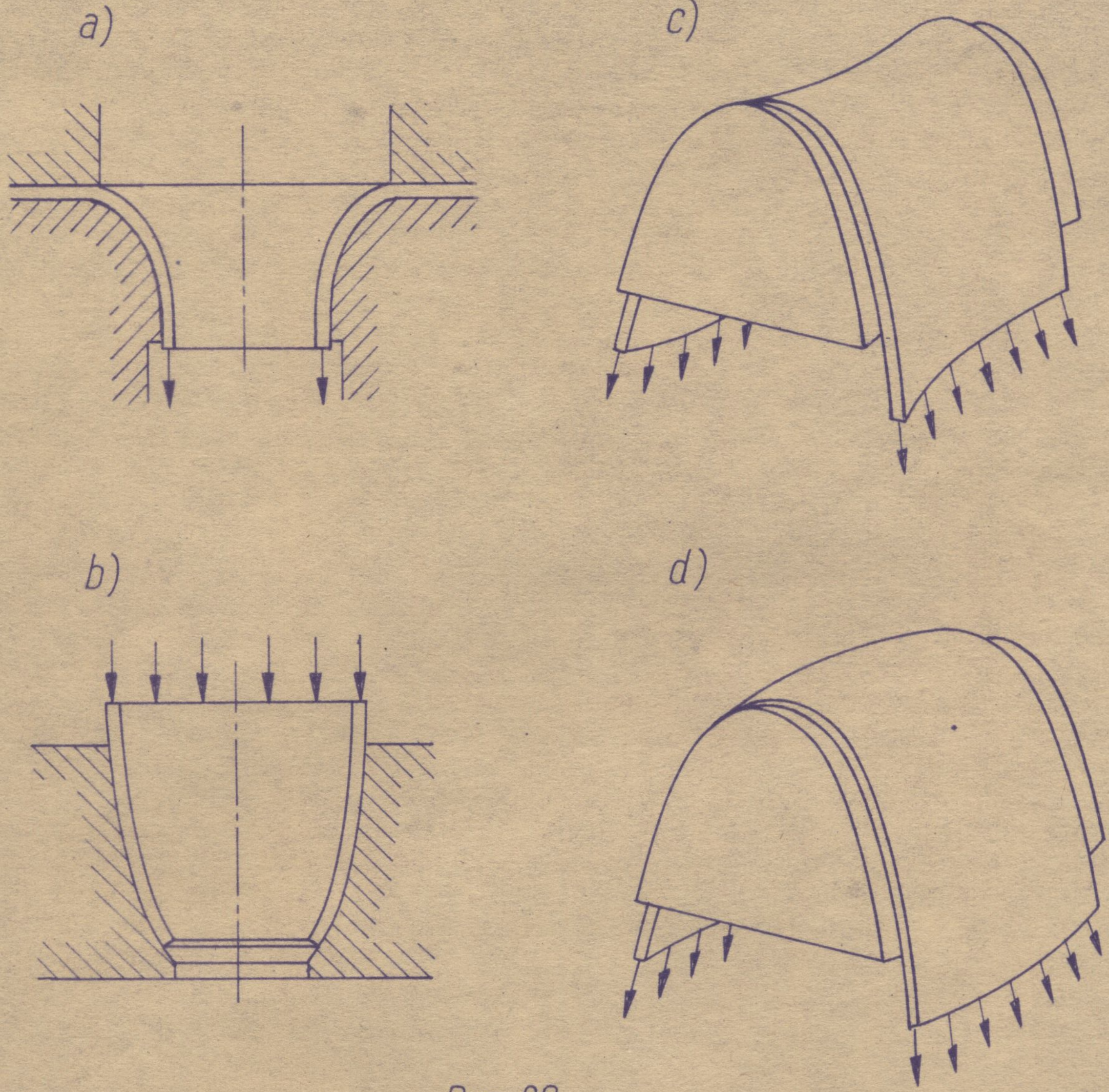


τ_{xy} kG/mm
$\sigma_{0,2}$
$\sigma_{0,1}$
$\sigma_{0,02}$
$\sigma_{0,01}$
σ_x kG/mm²
24 22 20 18 16 14 12 10 8 6 4 2 0
10 8 6 4 2
2 4 6 8 10 12
σ_y kG/mm

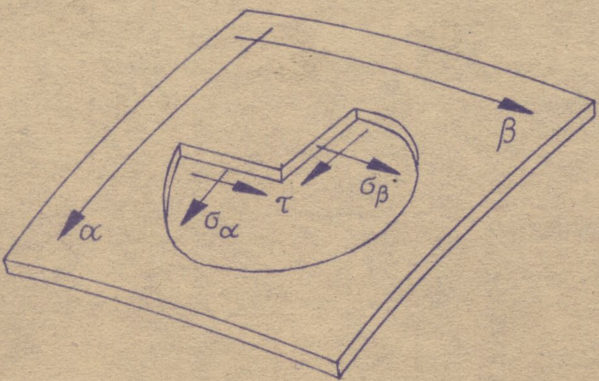
Rys. 24



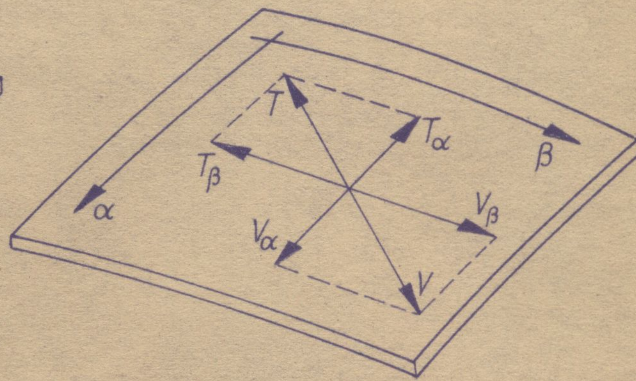
Rys. 25



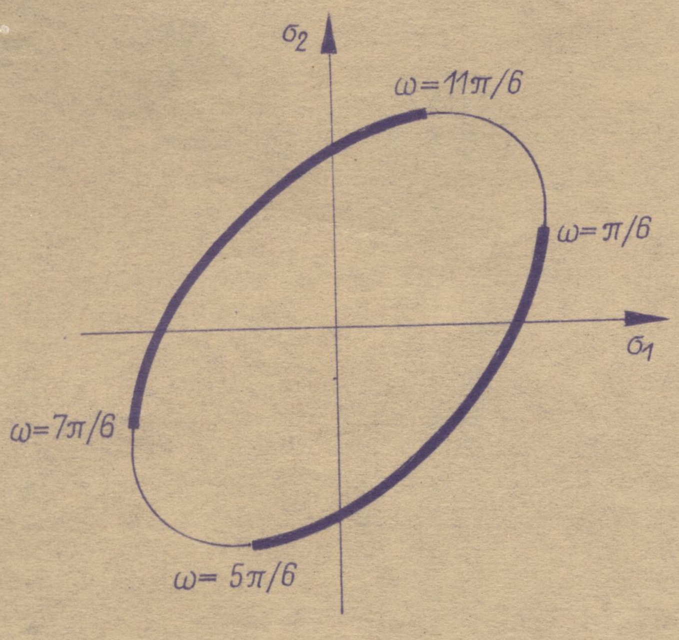
Rys. 26



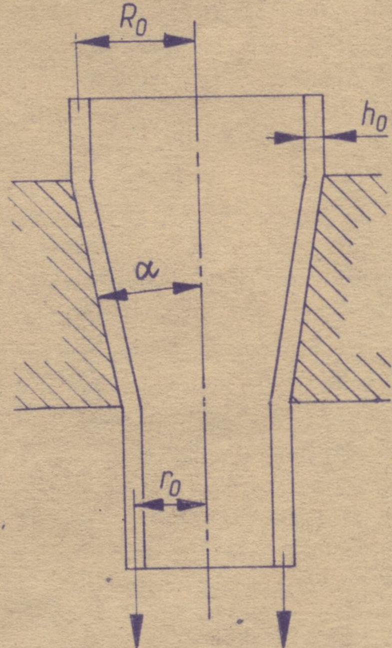
Rys. 27



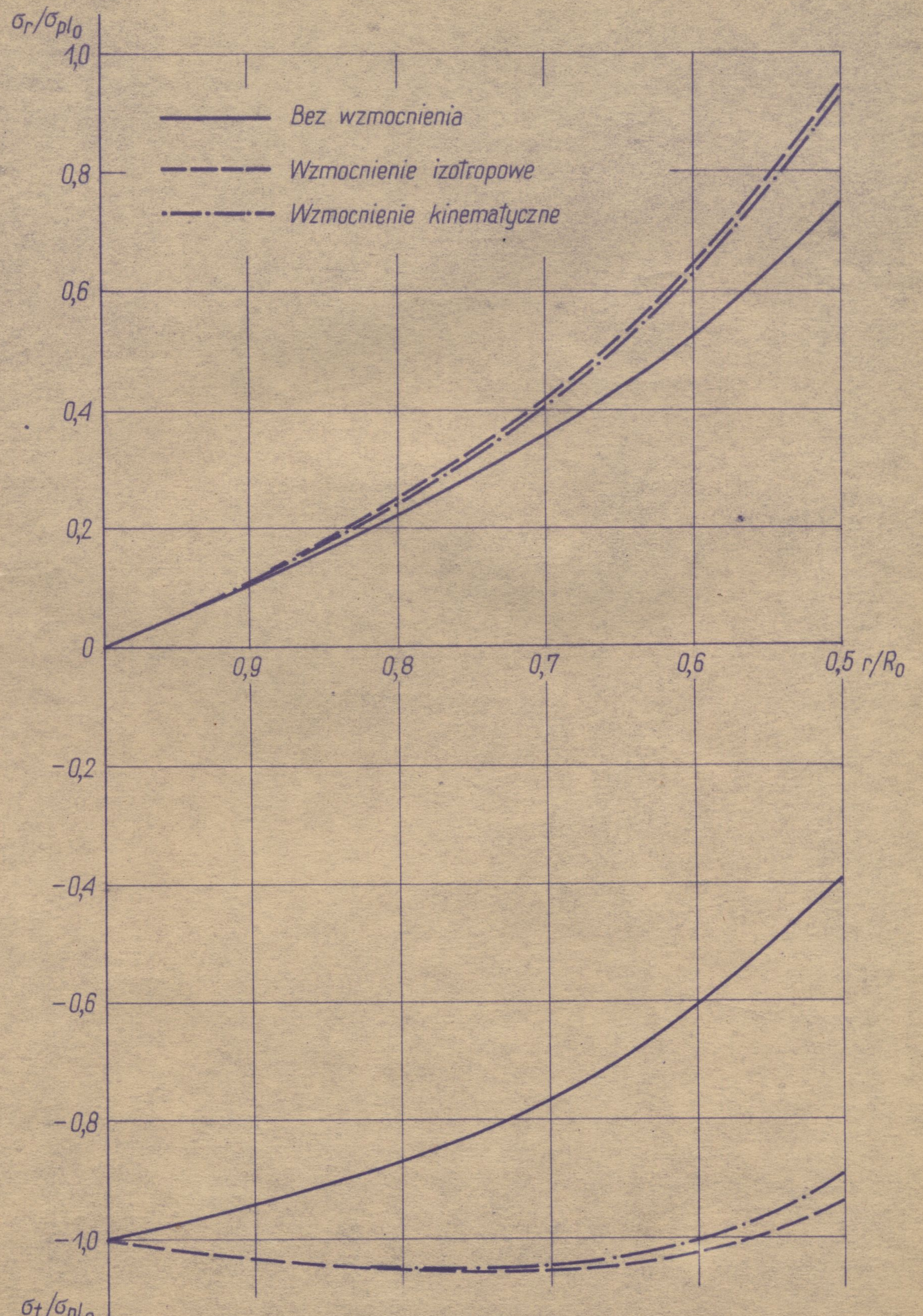
Rys. 28



Rys. 29

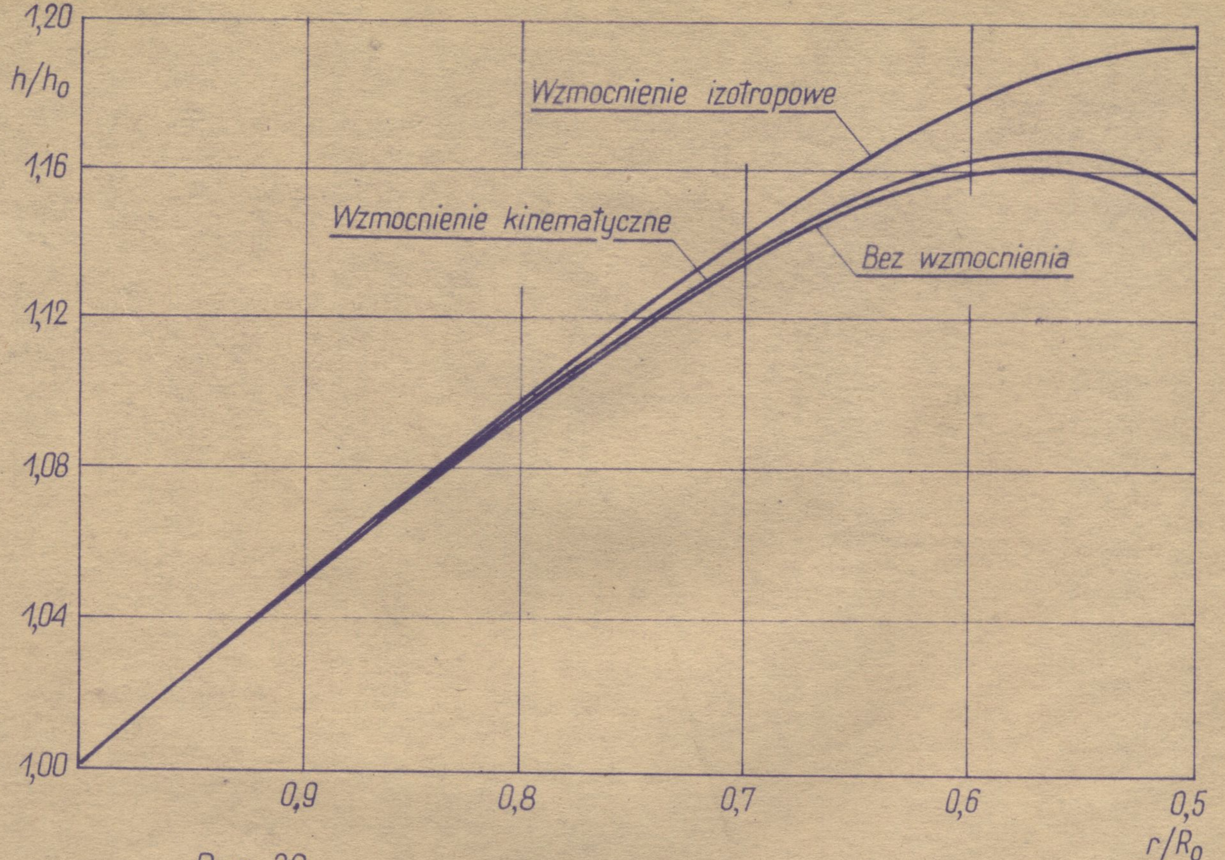


Rys. 30



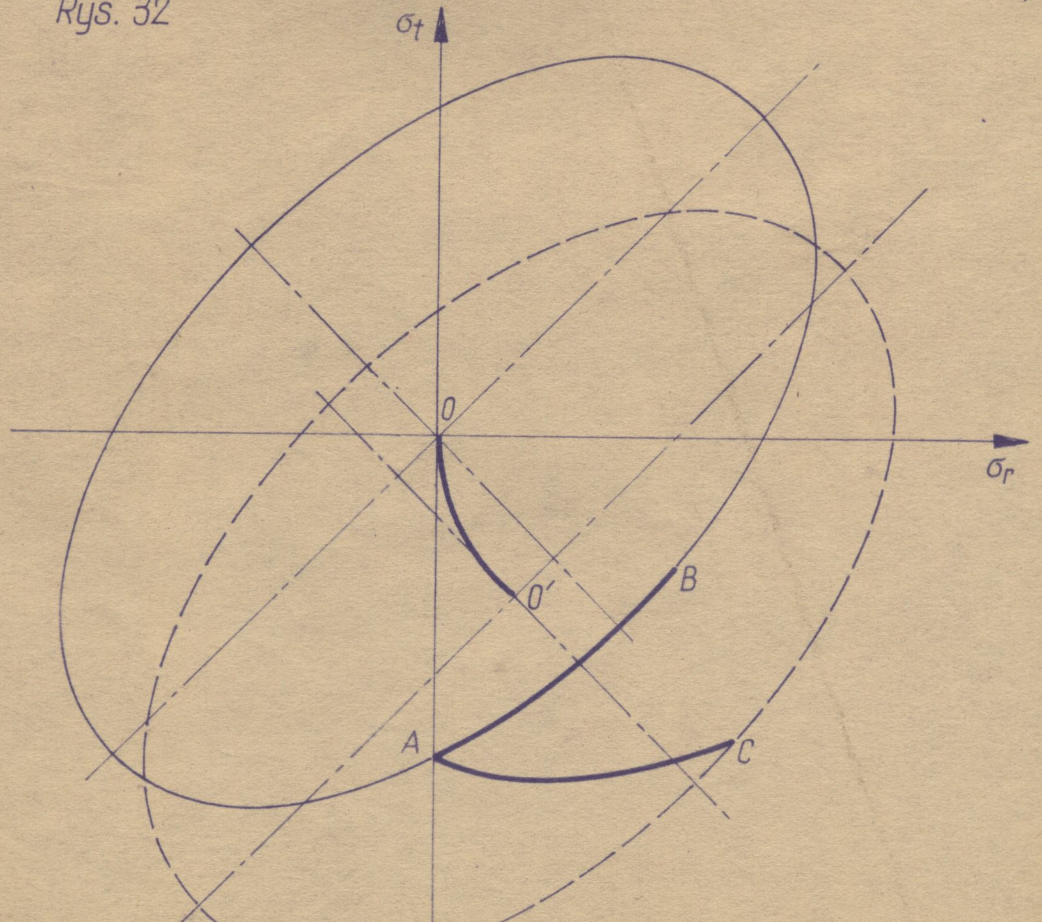
σr/σpl0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
σt/σpl0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5 r/R0
Bez wzmocnienia
Wzmocnienie izotropowe
Wzmocnienie kinematyczne

Rys. 31



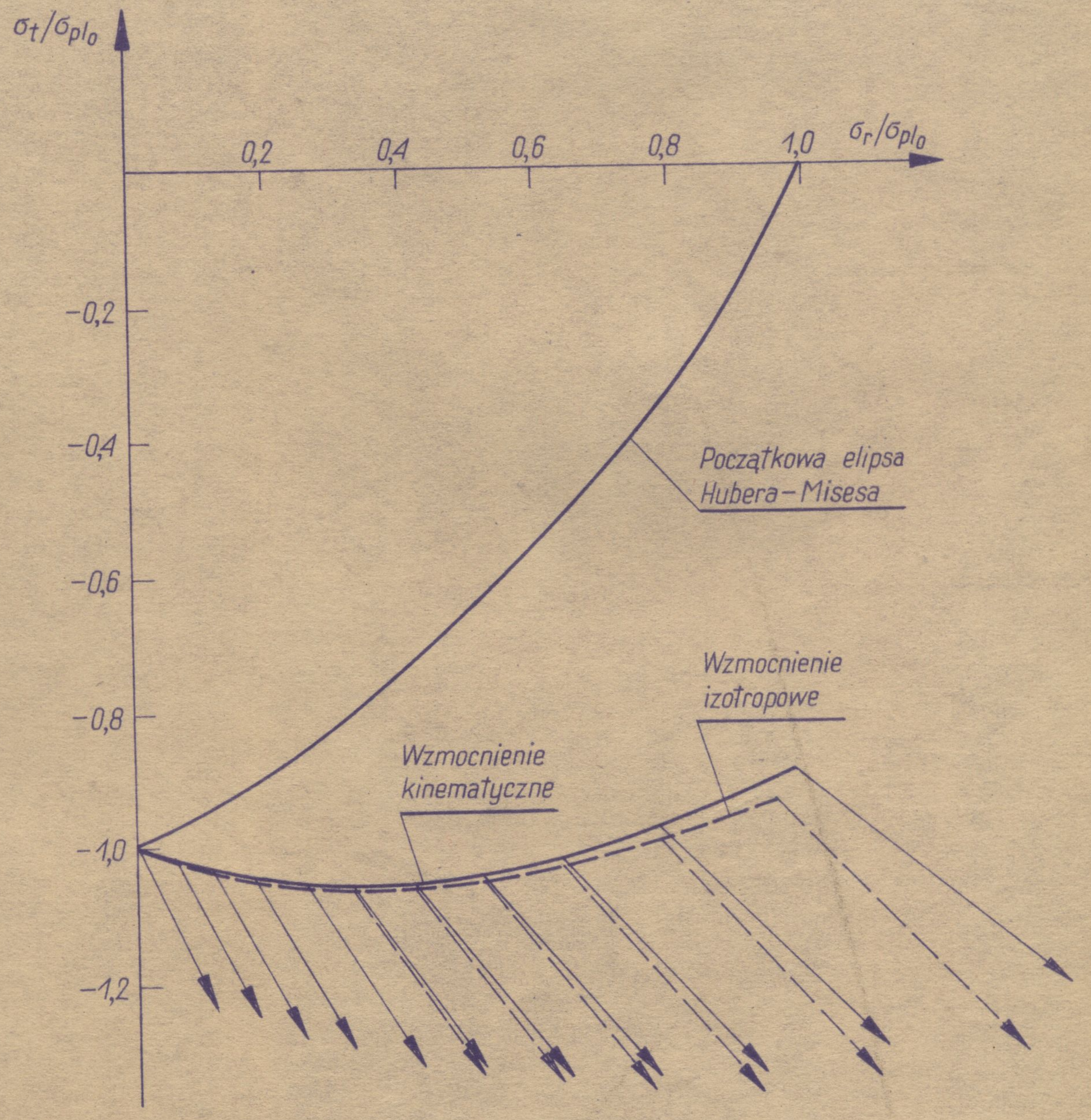
1,20
h/h0
1,16
1,12
1,08
1,04
1,00
Wzmocnienie izotropowe
Wzmocnienie kinematyczne
Bez wzmocnienia
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
r/R0

Rys. 32



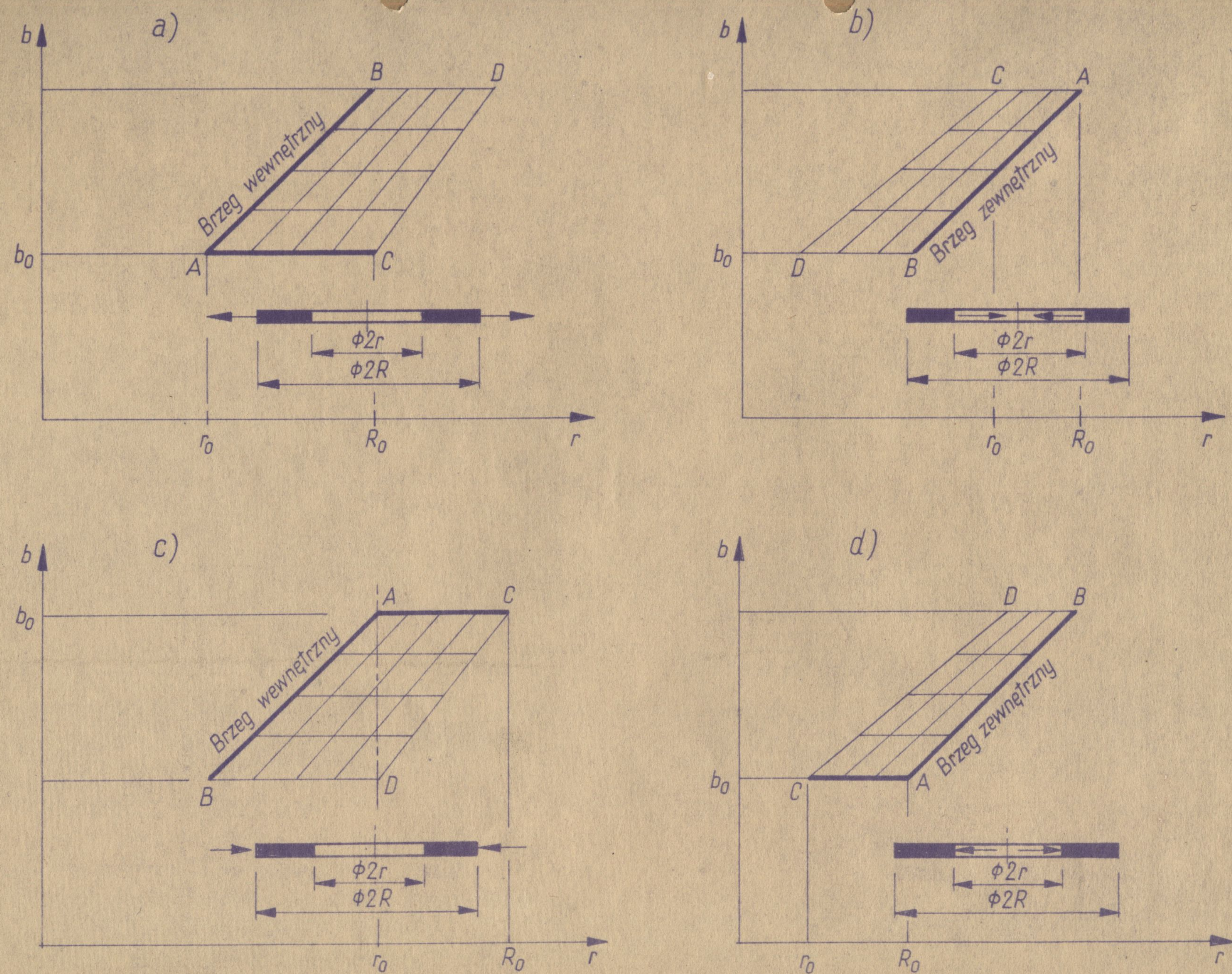
σt
σr
0
0'
A
B
C

Rys. 33

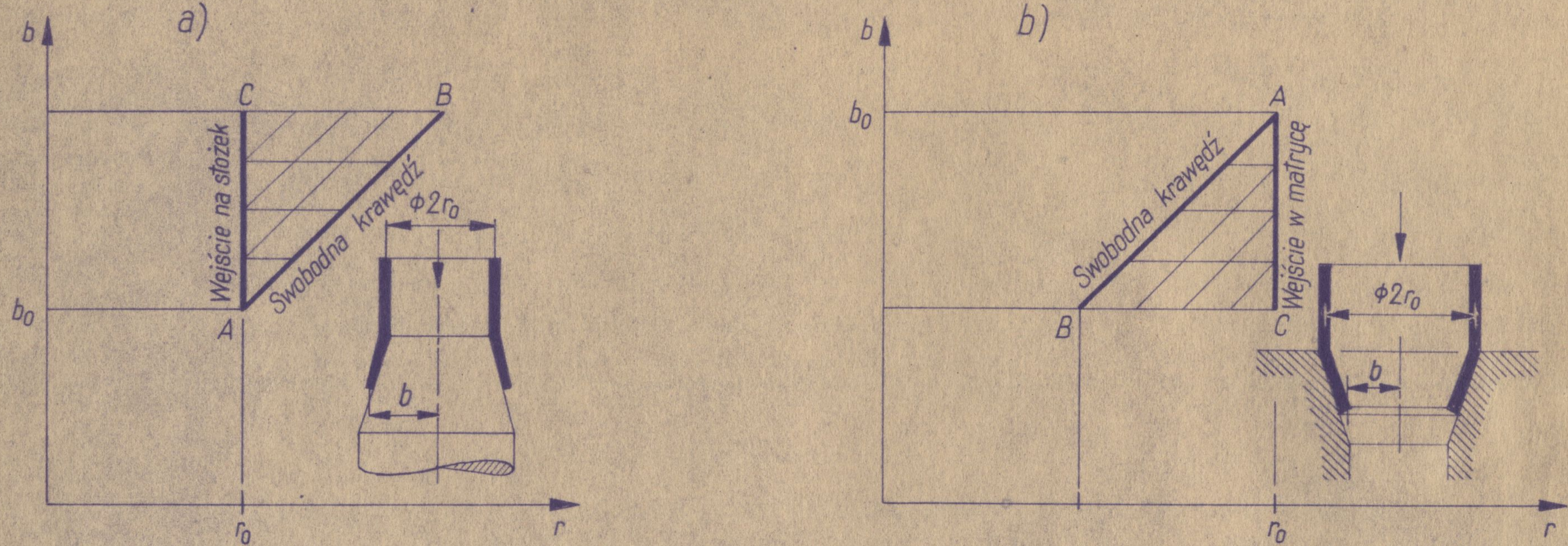


σ_t/σ_{pl_0}
σ_r/σ_{pl_0}
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1,0
−1,2
Początkowa elipsa Hubera – Misesa
Wzmocnienie izotropowe
Wzmocnienie kinematyczne

Rys. 34

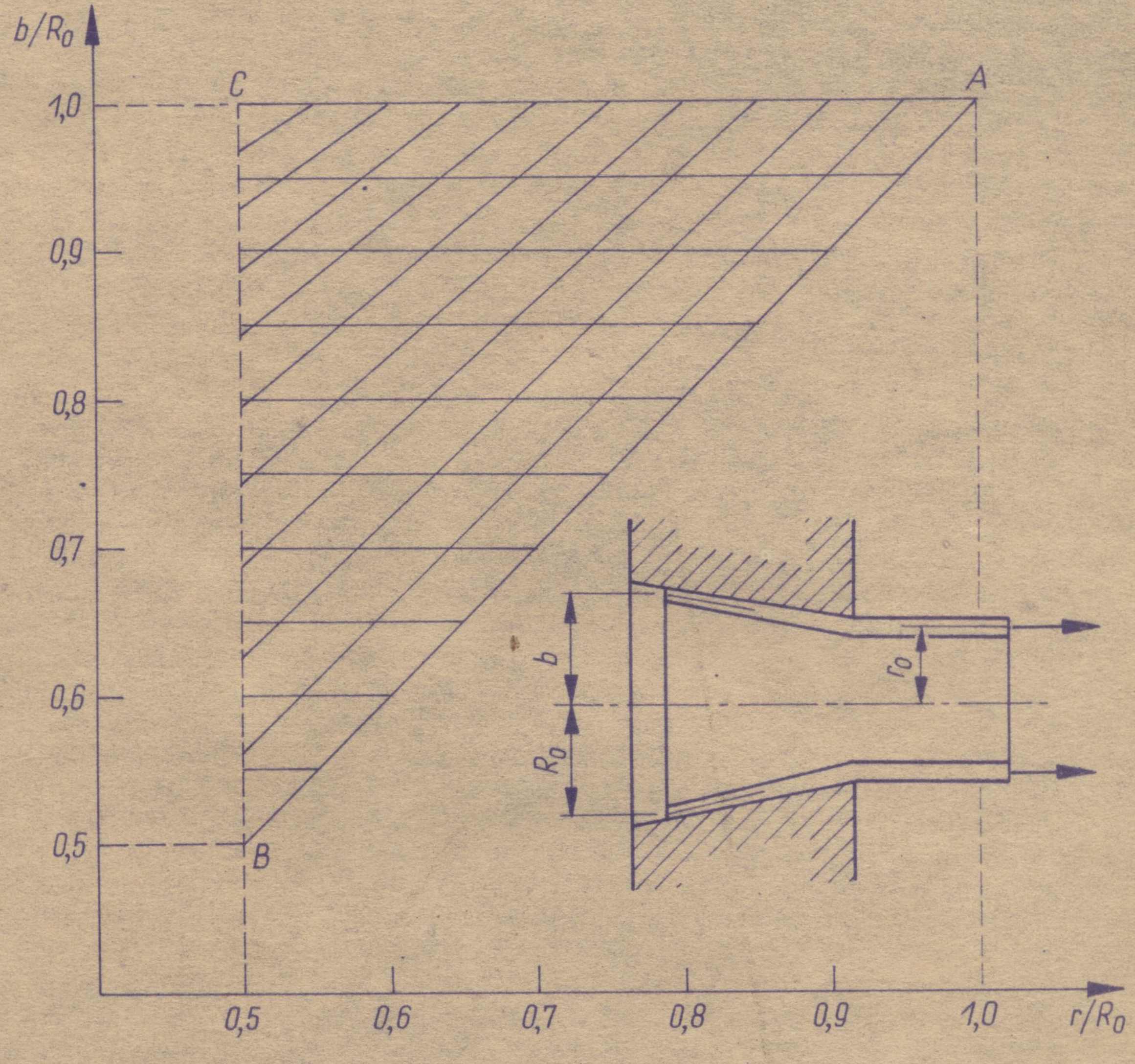

a)
b)
c)
d)
b
r
b_0
r_0
R_0
A
B
C
D
Brzeg wewnętrzny
Brzeg zewnętrzny
$\phi 2r$
$\phi 2R$

Rys. 35

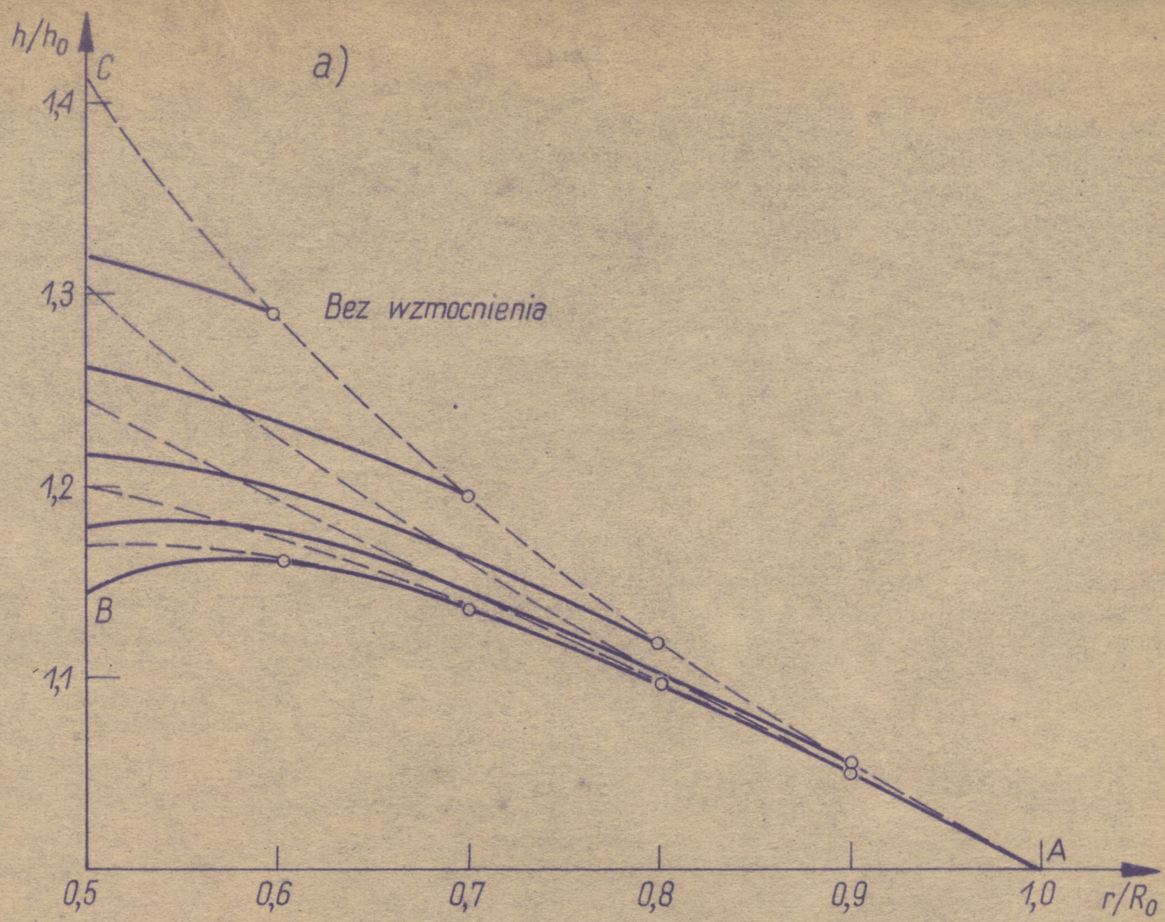


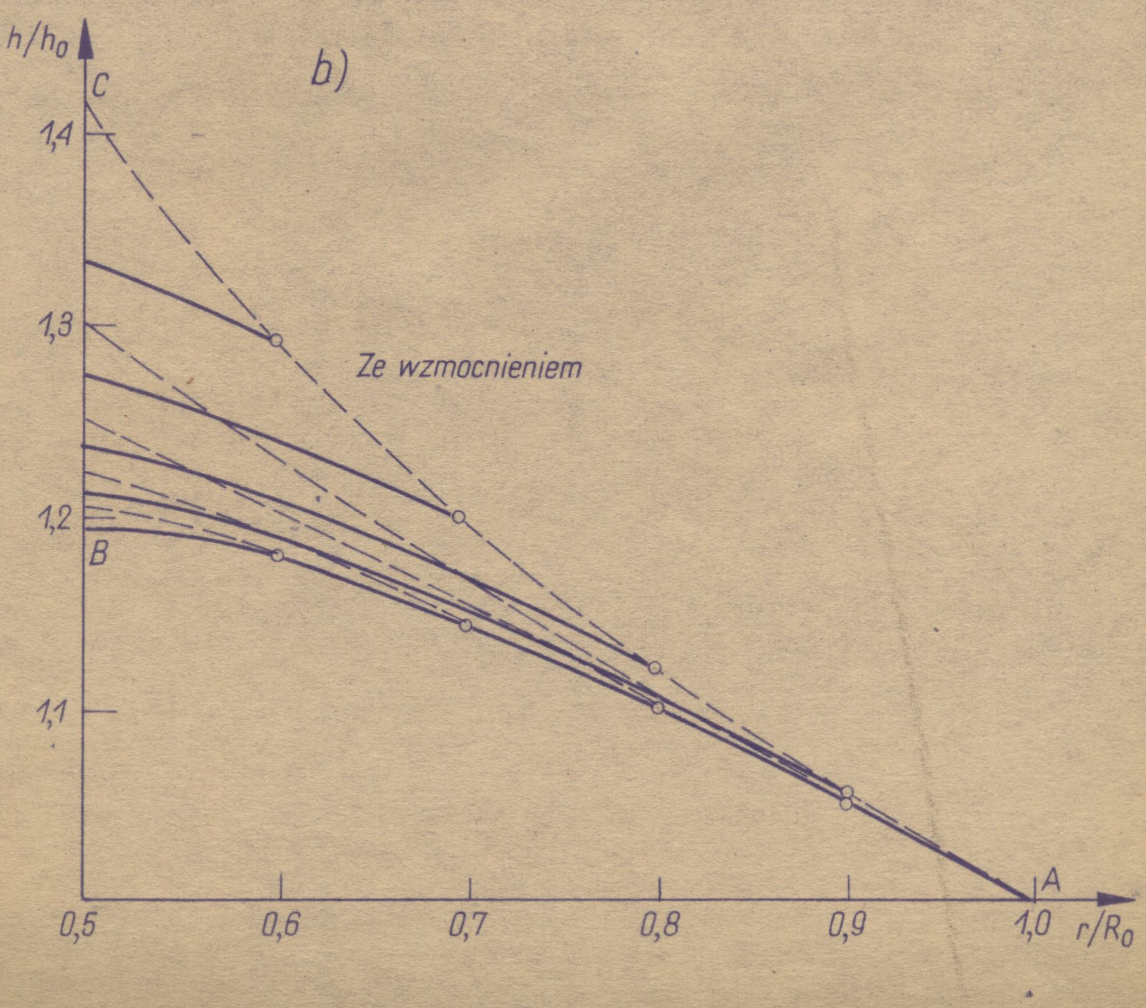
a)
b
b0
C
B
A
r0
r
Wejście na stożek
Swobodna krawędź
Φ2r0
b
b)
b
b0
A
B
C
r0
r
Swobodna krawędź
Wejście w matrycę
Φ2r0
b

Rys. 36

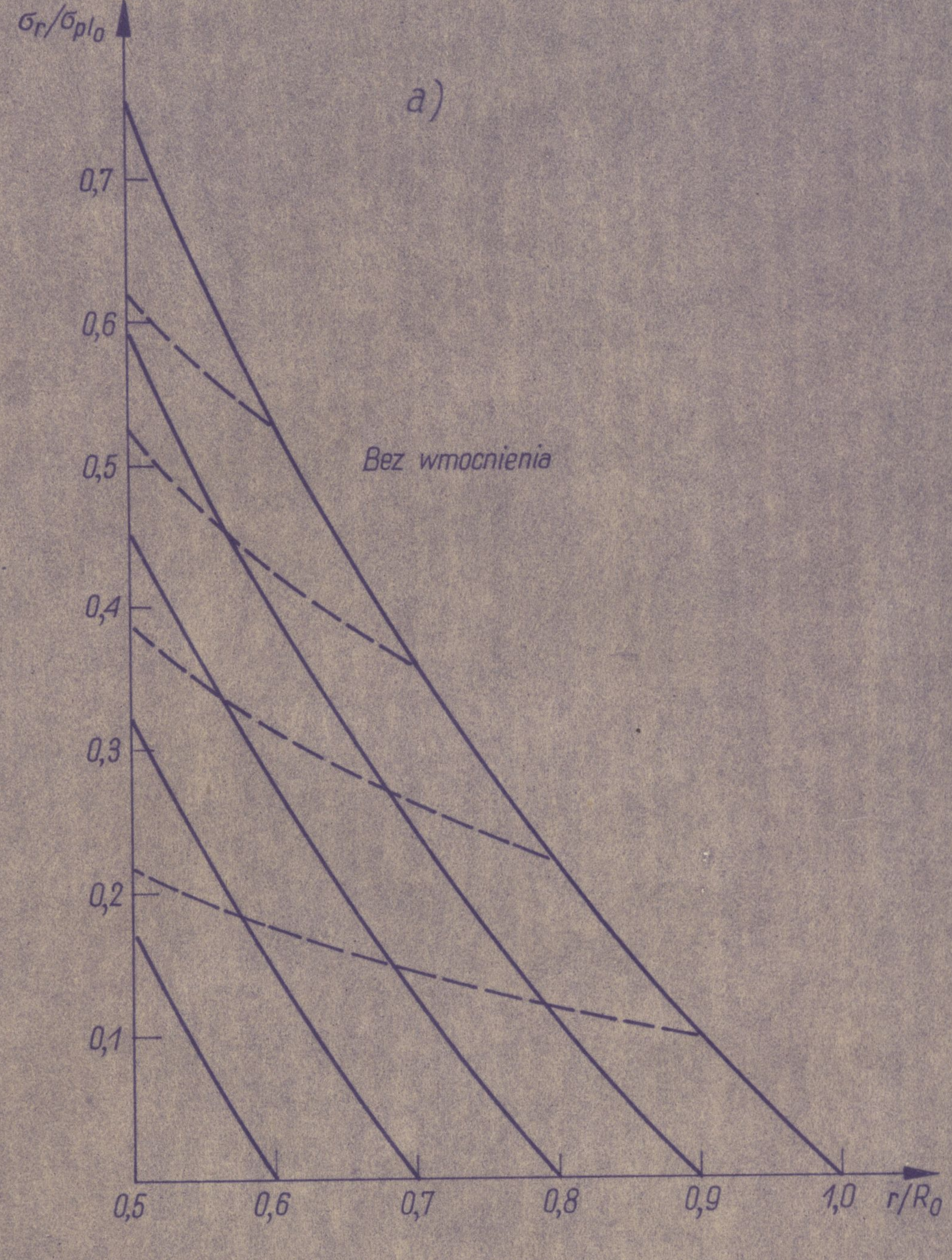


Rys. 37


h/h0
a)
C
1,4
1,3
Bez wzmocnienia
1,2
B
1,1
A
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
r/R0

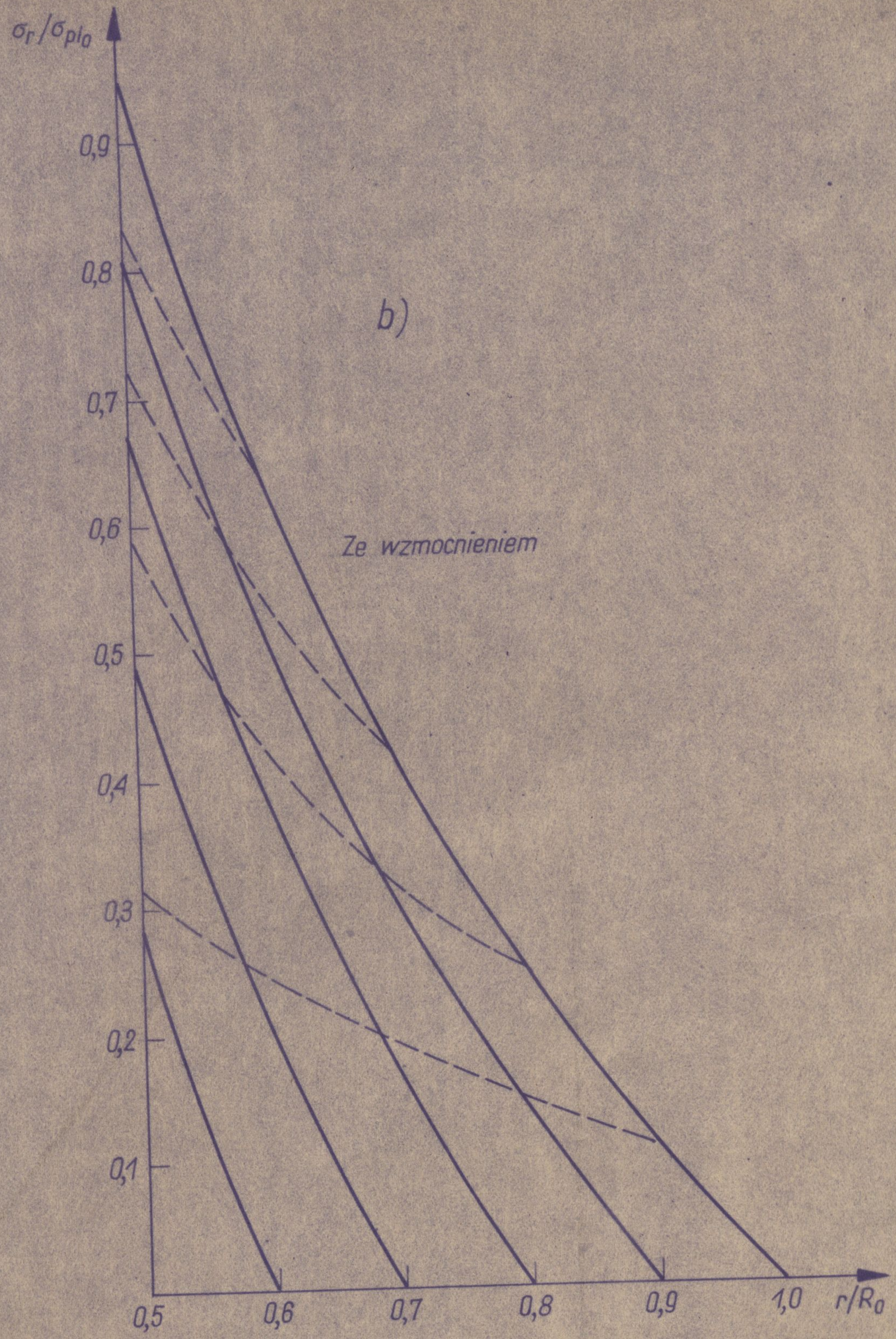

h/h0
b)
C
1,4
1,3
Ze wzmocnieniem
1,2
B
1,1
A
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
r/R0

Rys. 38



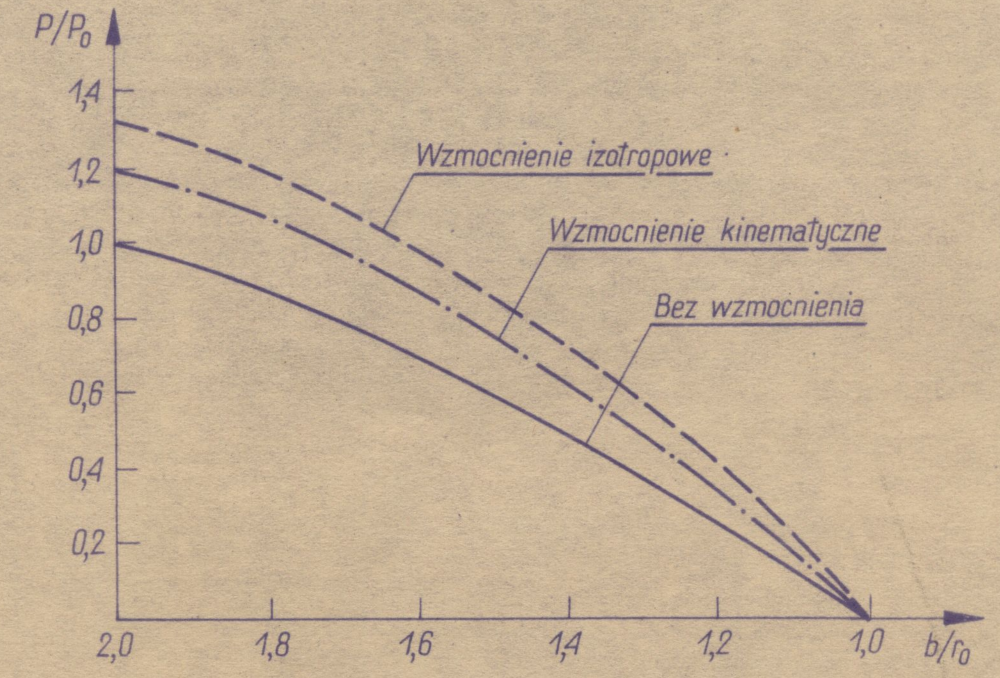
σ_r/σ_{pl_0}
a)
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
Bez wmocnienia
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
r/R_0

Rys. 39

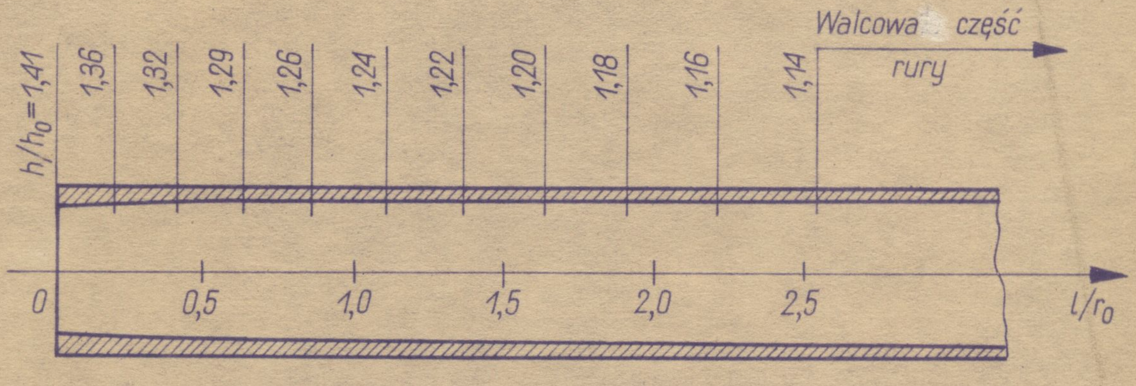


σ_r/σ_{pl_0}
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
b)
Ze wzmocnieniem
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
r/R_0

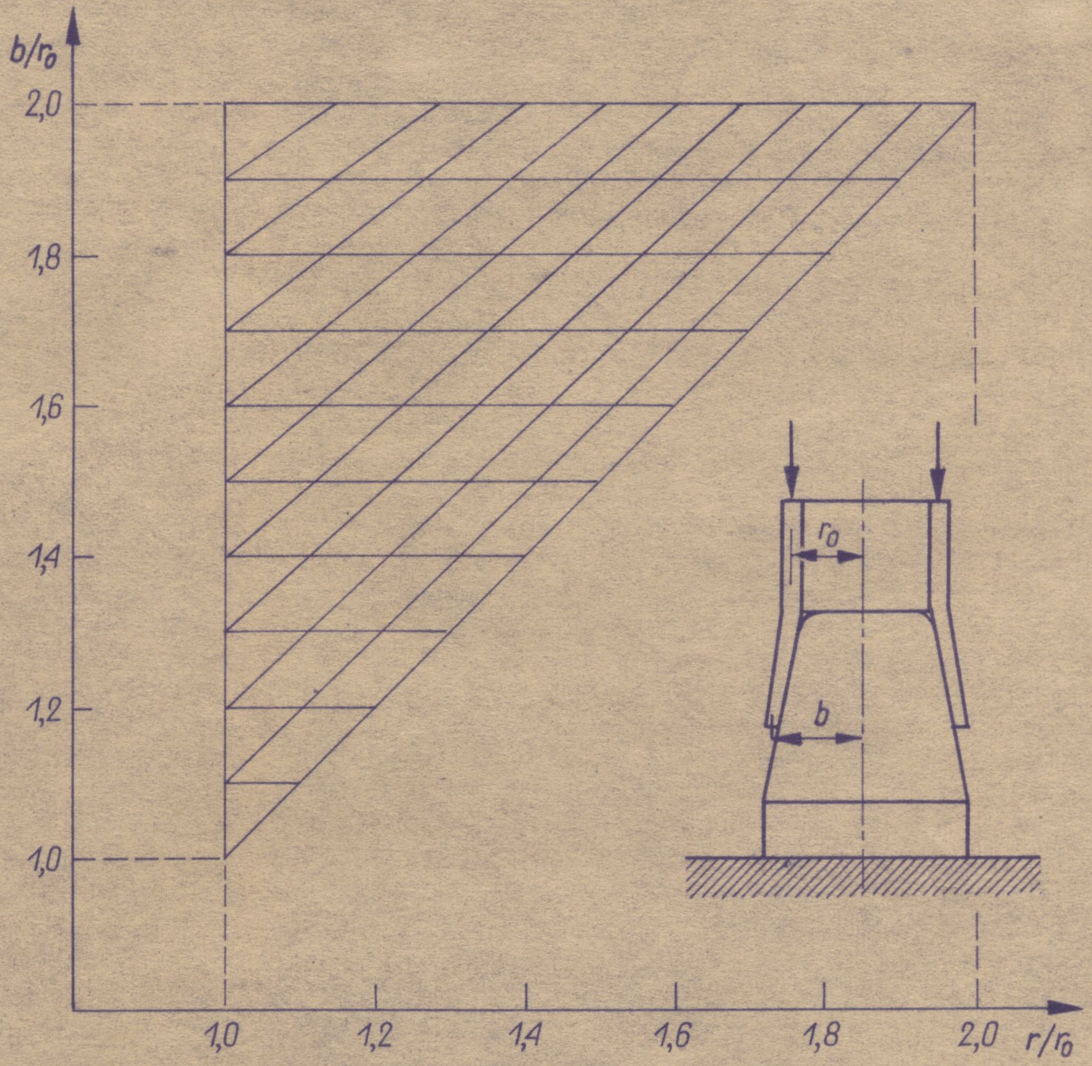
Rys. 39


P/P0
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
Wzmocnienie izotropowe
Wzmocnienie kinematyczne
Bez wzmocnienia
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
b/r0

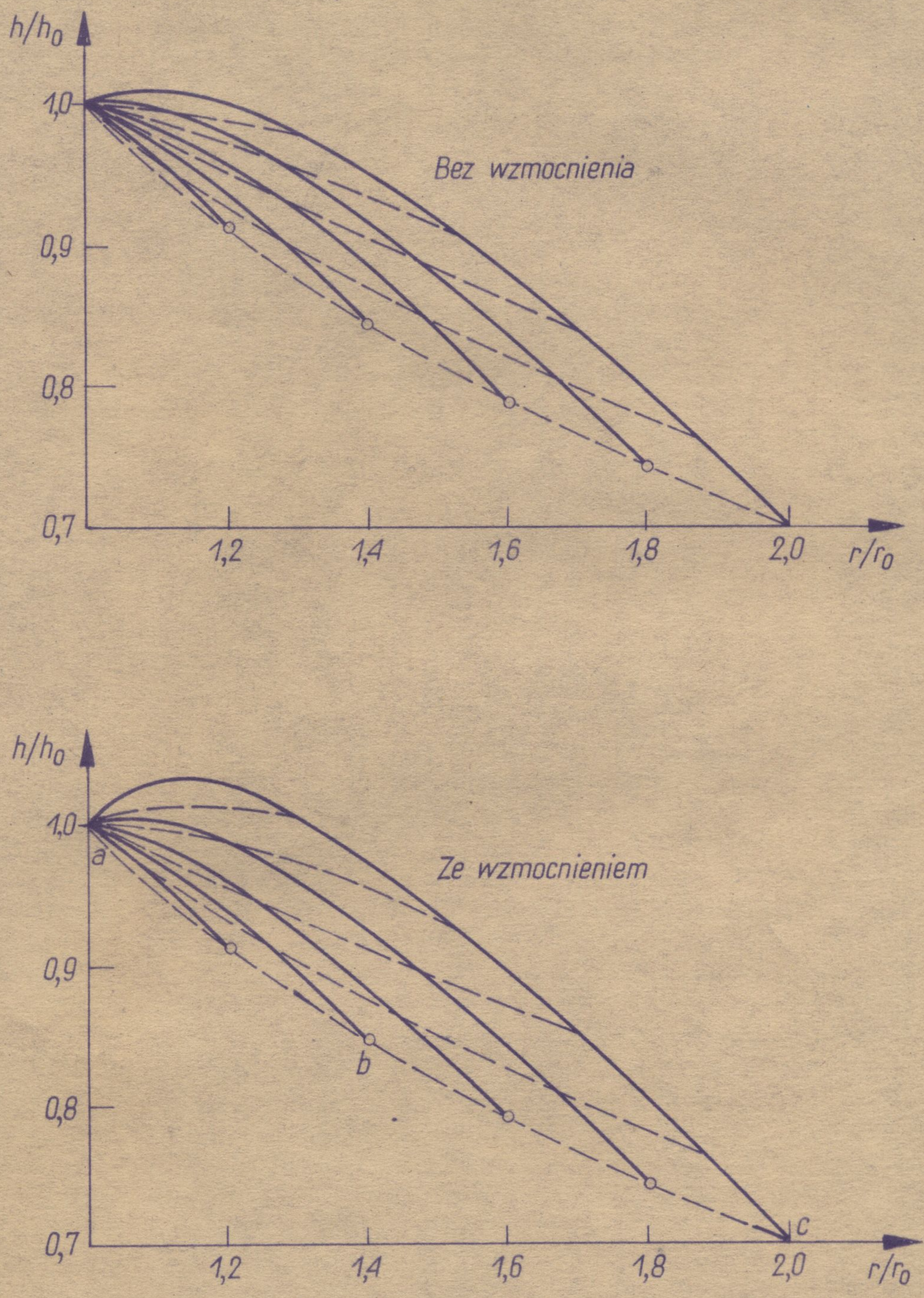
Rys. 40


Walcowa część
rury
h/h0=1,41
1,36
1,32
1,29
1,26
1,24
1,22
1,20
1,18
1,16
1,14
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
l/r0

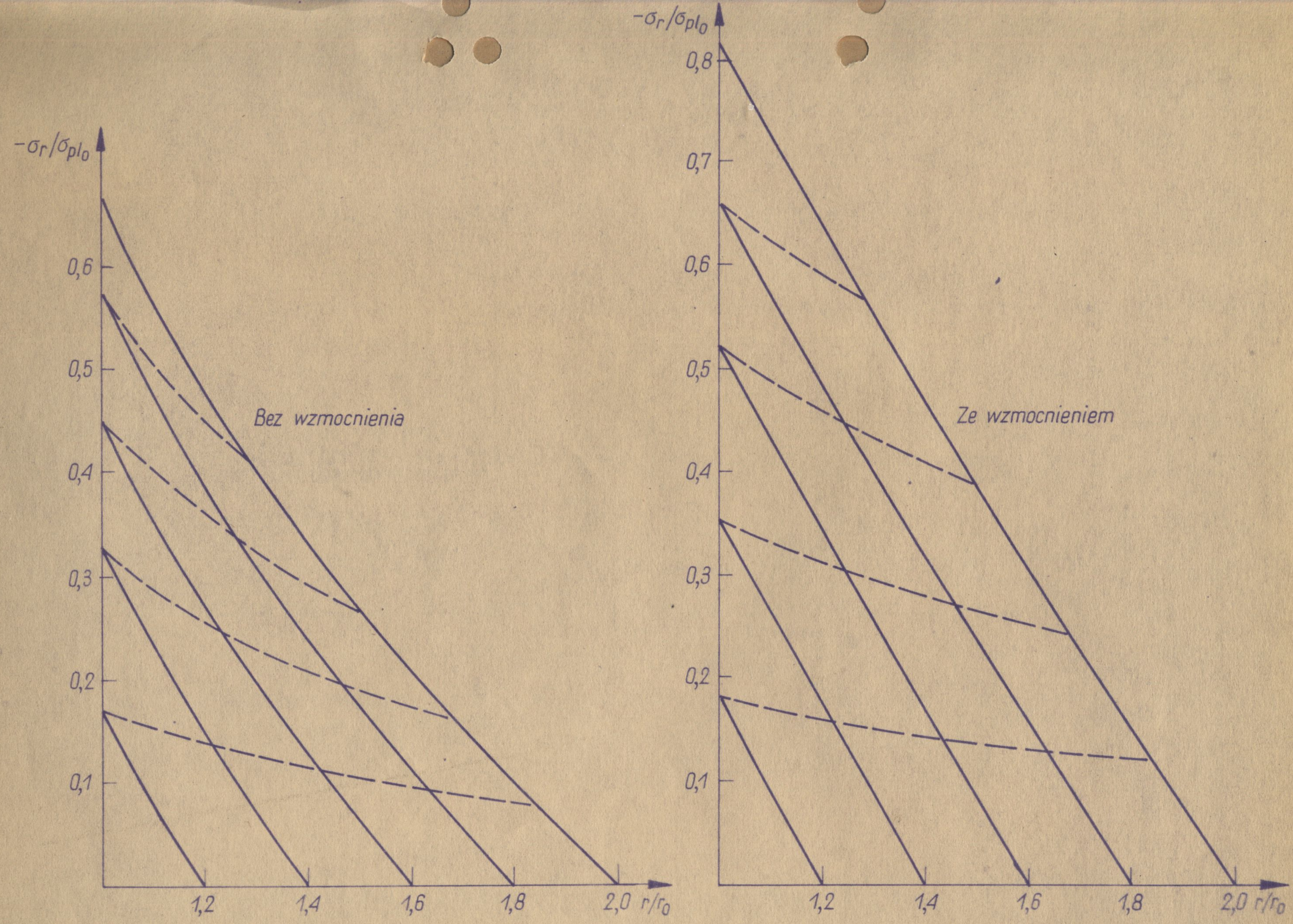
Rys. 41



Rys. 42

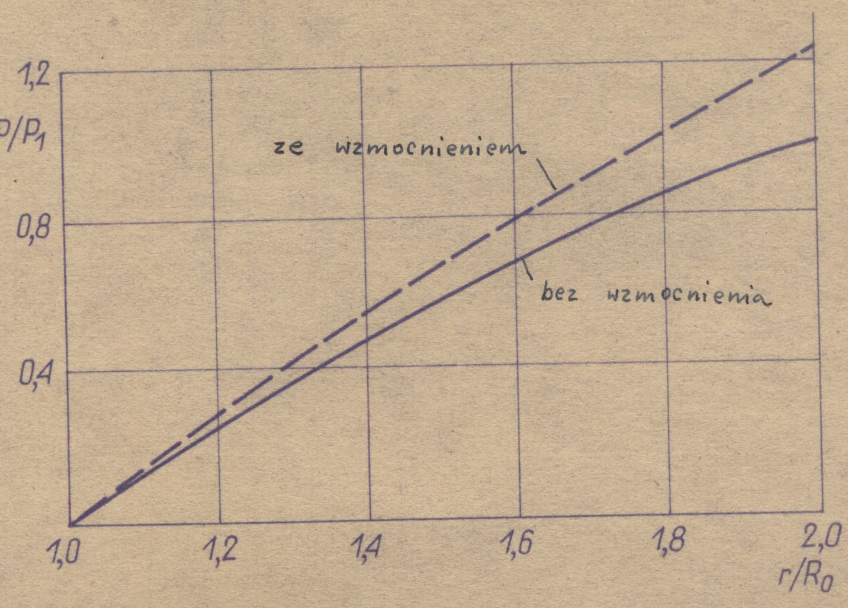

h/h0
1,0
0,9
0,8
0,7
Bez wzmocnienia
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
r/r0
h/h0
1,0
a
0,9
0,8
0,7
Ze wzmocnieniem
b
c
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
r/r0

Rys. 43



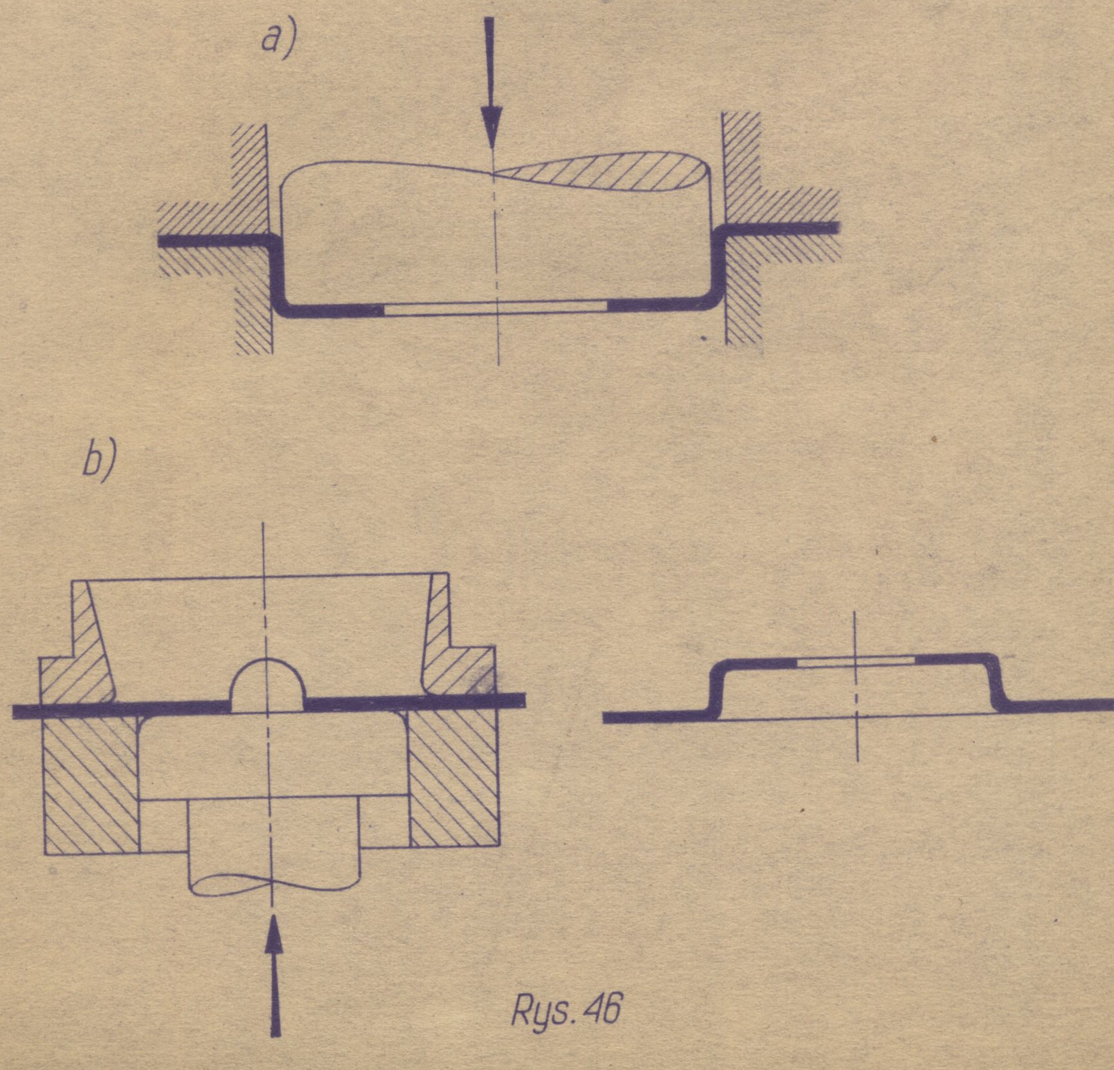
$-\sigma_r/\sigma_{pl_0}$
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
Bez wzmocnienia
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0 r/r_0
$-\sigma_r/\sigma_{pl_0}$
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
Ze wzmocnieniem
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0 r/r_0

Rys. 44



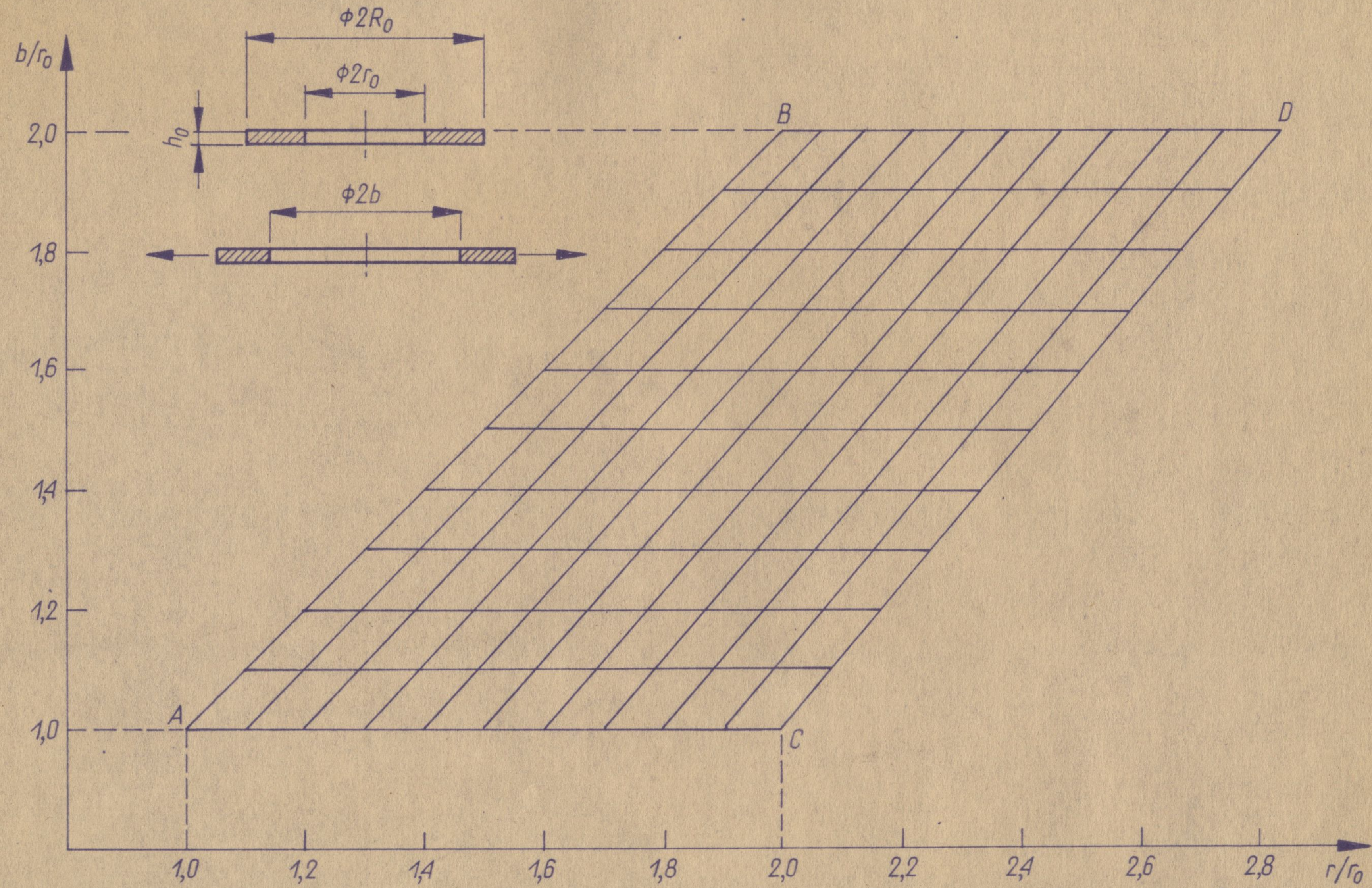
1,2
P/P1
ze wzmocnieniem
0,8
bez wzmocnienia
0,4
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
r/R0

Rys. 45

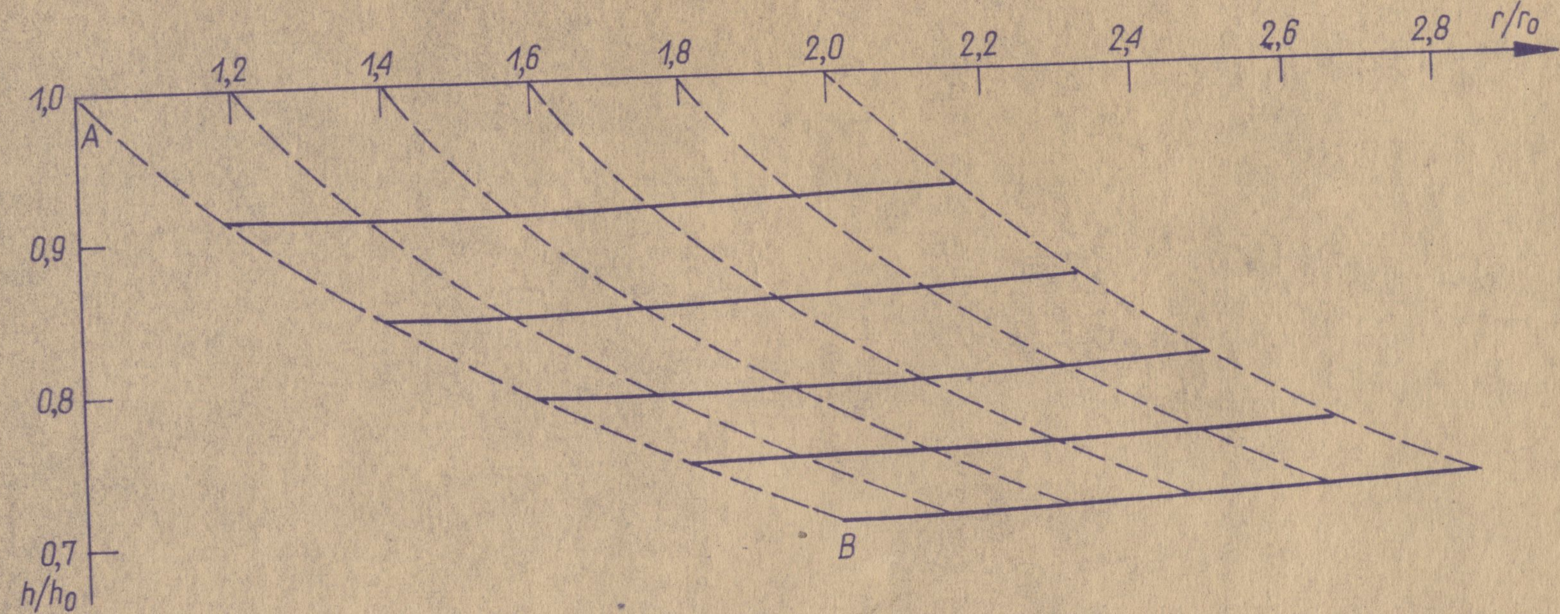


a)
b)

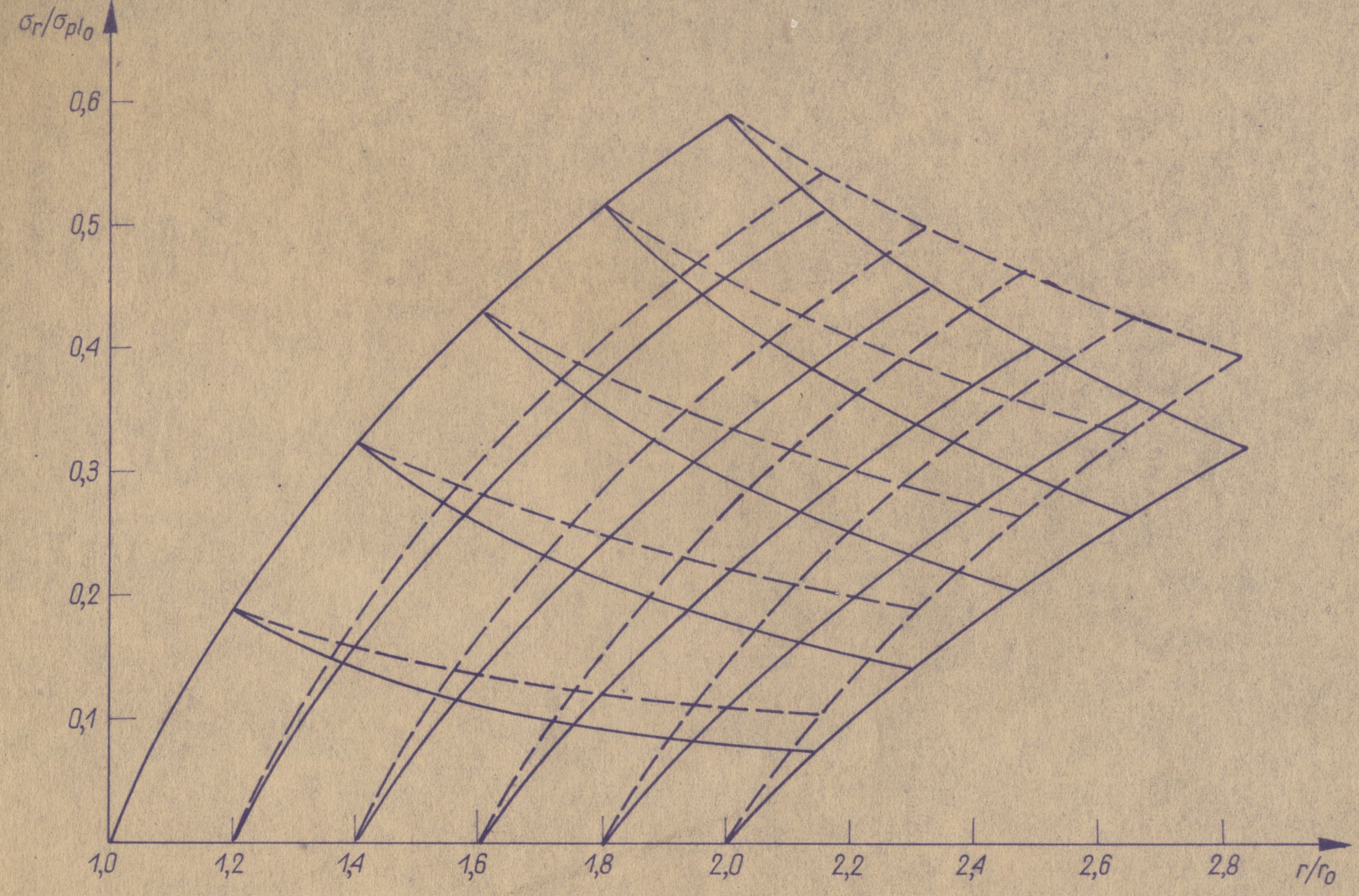
Rys. 46



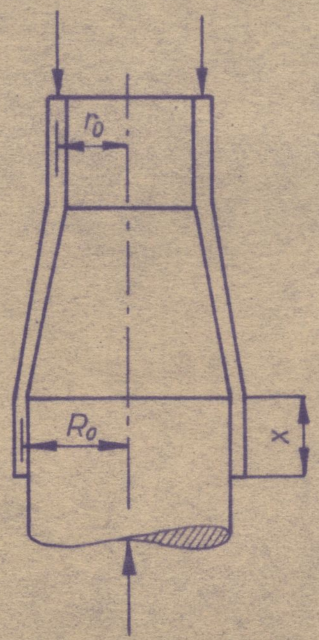
Rys. 47



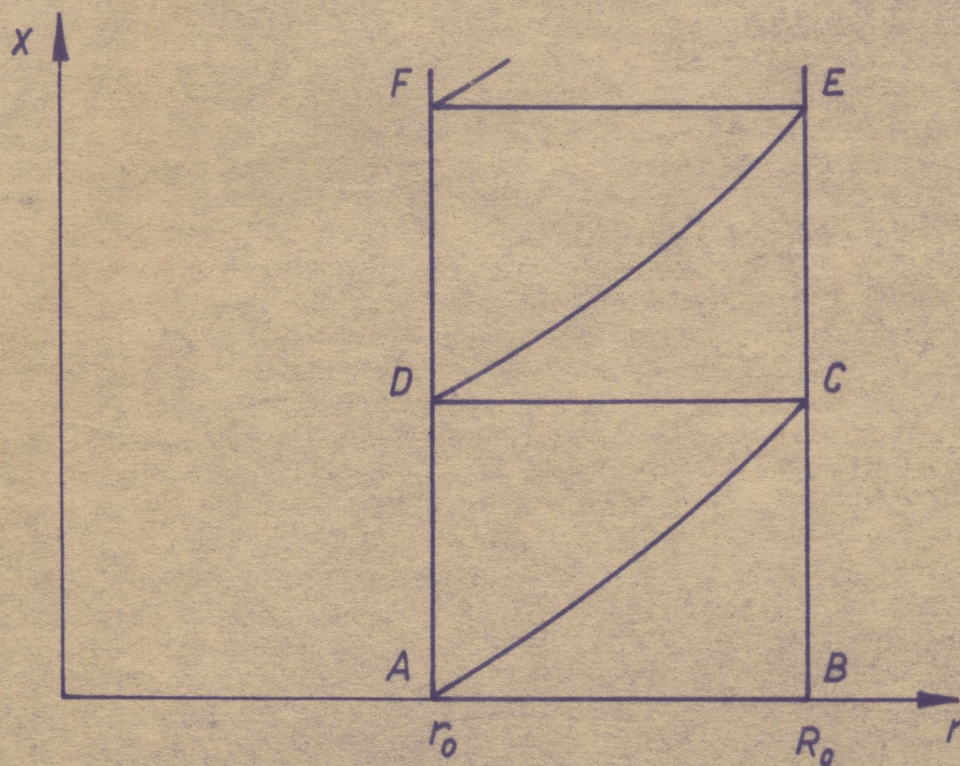
Rys. 48



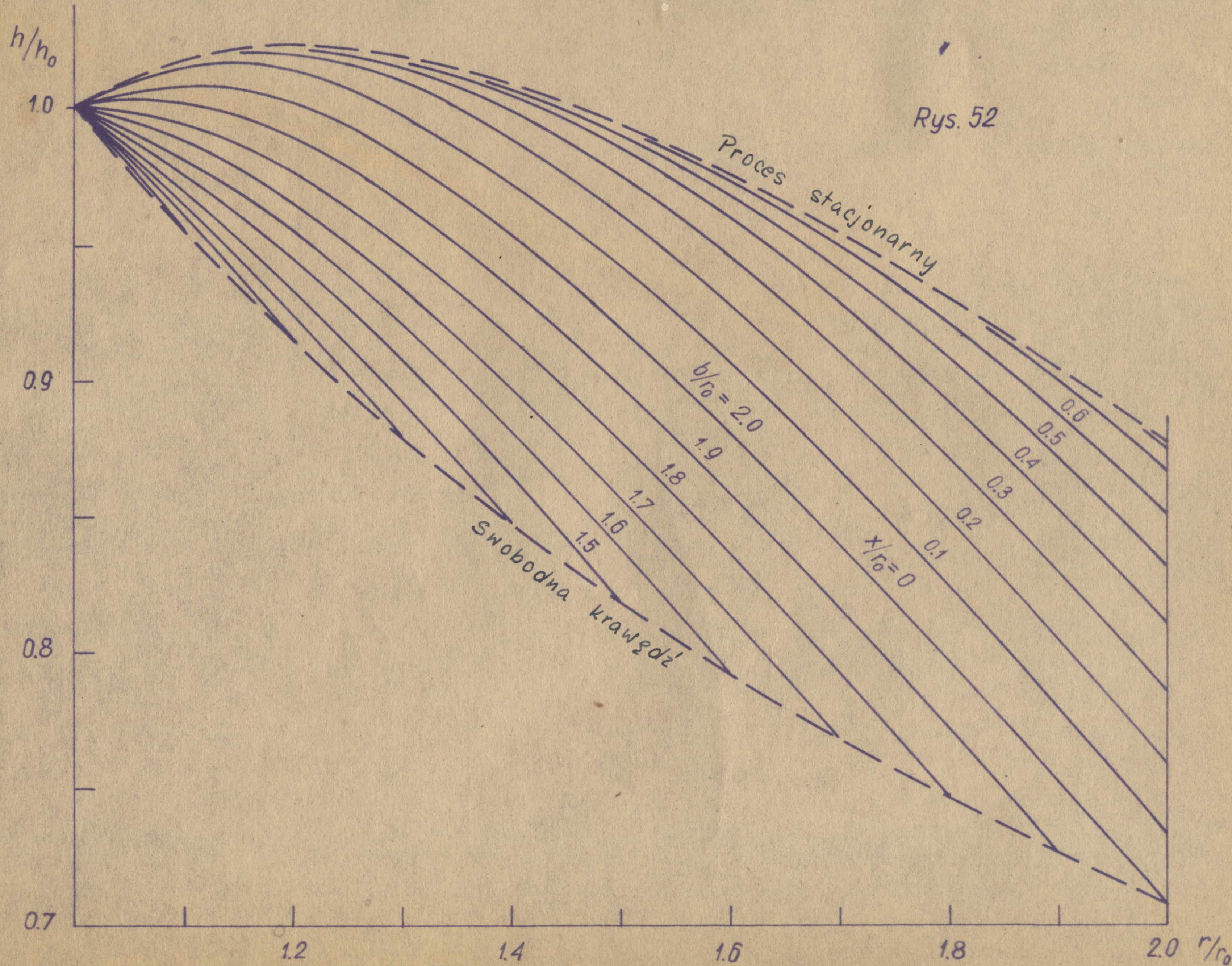
Rys. 49



Rys. 50



Rys. 51


h/h₀
1.0
0.9
0.8
0.7
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
r/r₀
Proces stacjonarny
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
x/r₀ = 0
b/r₀ = 2.0
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
Swobodna krawędź

Rys. 52