

Zagadnienie zupełności dla naprężeniowych równań  
ruchu w liniowej teorii sprężystości.

J ó z e f      I g n a c z a k

Rozprawa habilitacyjna.

Wstęp.



45/D

W liniowej teorii sprężystości, ciał niejednorodnych i anizotropowych, w ogólności istnieją właściwe metody rozwiązywania zagadnień brzegowych i początkowo-brzegowych. Dla zagadnień statycznych, w zależności od specyfiki problemu, można wyróżnić metody :a/ przemieszczeniową, b/ naprężeniową, c/ mieszaną. Każda z metod jest właściwa dla określonego problemu brzegowego i kwestia jej użycia jest dyktowana względnie. Przyjęto, że jeśli zagadnienie brzegowe jest sformułowane w przemieszczeniach, to punktem wyjścia do znalezienia rozwiązania jest statyczne równanie wektorowe Lamé'go. Jeśli problem jest sformułowany w naprężeniach /siły powierzchniowe zadane na całym brzegu ciała/ to do rozważań może być przyjęte jedno równanie tensorowe

określające tensor naprężeń  $\sigma_{ij}$ , tzw. warunki nierozdzielności Beltrami-Michella. Ponadto spełnić należy dodatkowo warunek znikania diwergencji tensora naprężeń / w założeniu, że siły masowe znikają / <sup>1</sup>. Kwestia, jak ta, czy łatwiej rozwiązać 6 naprężeniowych równań ~~znajdź~~, spełniać 3 równania równowagi i sprawdzać inne warunki konieczne, czy znaleźć 3 składowe wektora przemieszczenia jest relatywna i olbrzymia ilość przykładów ilustrujących obie metody może być znaleziona w literaturze, wskazująca na wygodę obu metod. Jeśli problem jest typu mieszanego / zadane siły na części brzegu zaś na pozostałej przemieszczenia / to używamy jednocześnie wszystkich równań pola statycznej teorii.

Dla zagadnień dynamicznych istnieje metoda równań przemieszczeniowych Lamé'go i właściwa separacja wektora przemieszczenia na część potencjalną i rotacyjną dominuje niemal we wszystkich dynamicznych, dotąd rozwiązywanych zagadnieniach początkowo-brzegowych. Również w przypadku, gdy tylko obciążenie zmienne w czasie jest zadane na brzegu dotychczasowe procedury rozwiązania posługują się przemieszczeniowymi równaniami ruchu <sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Gwoli ścisłości, przy naprężeniowym sformułowaniu, należy osobno rozróżnić przypadek obszaru wielospójnego, w którym obok warunków jakie należy spełnić dla obszaru jednospójnego dochodzą warunki ciągłości infinitezymalnego wektora obrotu i wektora przemieszczenia w dowolnym punkcie krzywej zamkniętej otacza-

Wprawdzie istnieją próby mieszanego, naprężeniowo-przemieszczeniowego traktowania problemów elastodynamiki, spośród których wymieniamy tzw. uogólnione naprężeniowe równania Beltrami-Michella, wiążące przestrzenne pochodne tensora naprężeń z przyspieszeniami tego tensora, jednakże, zdaniem autora, nie ma w literaturze jednoznacznego naprężeniowego sformułowania dynamicznego problemu liniowej sprężystości, analogicznego do tego jakie istnieje w przypadku statycznym. W pracy [6] P.P. Teodorescu wyprowadził rozmaite postaci warunków koniecznych jakie musi spełniać tensor naprężeń w elastodynamice, stwierdził jednak, że do znalezienia tego tensora koniecznym jest znalezienie wektora przemieszczenia. /por. str. 246 pracy [6] /. Kwestia jak ta, czy jest możliwe sformułowanie naprężeniowego początkowo-brzegowego zagadnienia, bez posługiwania

---

jącej każdy pojedynczy otwór ciała wielospójnego. Patrz dla przykładu naprężeniowe sformułowania dla ciał wielospójnych w pracy [10] /B.A. Boley, J.H. Weiner /str. 92.

<sup>2</sup> Spośród wielu metod rozwiązywania problemów liniowej elastodynamiki, wymienimy tzw. metodę wyznaczników operatorowych, gdzie dowolne operatory różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach mogą być uważane za liczby i prawa liniowej algebry liczb na się przenoszą. Metoda ta pozwala na rozwiązanie zagadnień równań cząstkowych z operatorami nieco bardziej skomplikowanymi niż te pojawiające się w klasycznej elastodynamice/magneto-termo-sprężystość i inne /.

się wektorem przemieszczenia jest tezą niniejszej pracy. Pytanie to wydaje się być interesujące zarówno z powodów praktycznych jak i z punktu widzenia teorii. Jeśli istnieje poprawne takie sformułowanie, to wypełnia ono lukę w atakowaniu dynamicznych zagadnień liniowej teorii sprężystości, przy pomocy naprężeniowych równań ruchu. Na powyższe pytanie dajemy odpowiedź w pierwszej części niniejszej pracy. Różne aspekty tego zagadnienia oraz ilustracje przedstawionej teorii są zawarte w dwóch pozostałych rozdziałach pracy.

## Rozdział I.

### Zagadnienie zupełności dla naprężeniowych równań ruchu w liniowej teorii sprężystości.

Rozpatrzmy tutaj zagadnienie, jaki układ naprężeniowych równań ruchu jedynie powinien być użyty, aby być pewnym, że wszystkie fundamentalne równania pola liniowej teorii sprężystości są spełnione. Pokażemy, że jeśli dynamiczny problem jest sformułowany w naprężeniach, to może być on traktowany w pewien całkiem odmienny sposób od tego w przypadku statycznym. Ustalimy pewien układ sześciu naprężeniowych równań ruchu dla sześciu składowych tensora naprężeń w dowolnym, niejednorodnym i anizotropowym ciele sprężystym/liniowym/ i udowodnimy podsta-

wowe twierdzenia pokazujące relacje między naprężeniowymi równaniami ruchu i fundamentalnym układem  $r$ - $n$  elastodynamiki. Dodatkowo dowodzimy twierdzenie o jednoznaczności dla dynamicznych równań naprężeniowych, zatem, że naprężeniowe  $r$ - $a$  ruchu, dodatnia określoność gęstości energii odkształceń sprężystych i towarzyszące im początkowe i brzegowe warunki wyrażone jedynie przez naprężenia, determinują problem zupełnie.

Pokażemy również w jakiej relacji pozostaje tzw. uogólnienie naprężeniowych równań Beltrami-Michella /dla jednorodnego i izotropowego ciała / do nowego sformułowania. Porównujemy też czysto naprężeniowe traktowanie z metodą mieszaną, w której uogólnione  $r$ - $a$  Beltrami-Michella winny być rozważane wraz z wektorem przemieszczenia. W rozdziale tym dyskutujemy również niektóre poprzednie prace, które rozważały problem naprężeniowych  $r$ - $n$  ruchu.

Podajemy wreszcie naprężeniowe sformułowania dla płaskiego stanu odkształcenia i uogólnionego płaskiego stanu naprężenia.

Przedstawioną metodą można rozwiązać wiele zagadnień klasycznej elastodynamiki, dla której znane są inne metody. W rozdziale II wybieramy pewne nietrywialne zagadnienie brzegowe z teorii rozchodzenia się fal powierzchniowych w ośrodkach niejednorodnych i wskazujemy na pewne zalety nowego podejścia w porównaniu do istniejących metod.

## §1. Podstawowe naprężeniowe równania ruchu w liniowej sprężystości.

Rozważmy anizotropowe, niejednorodne i sprężyste ciało o objętości  $V$ . Przypomnijmy tutaj wzięty z [1] /I.S. Sokolnikoff/ dynamiczny układ równań pola w izotermicznej, trójwymiarowej liniowej teorii sprężystości.

Zlinearyzowane związki pomiędzy wektorem przemieszczenia i tensorem odkształcenia w zwykłej, indeksowej notacji<sup>1</sup> przyjmują postać:

$$(1.1) \quad 2\varepsilon_{ij}(x,t) = u_{i,j}(x,t) + u_{j,i}(x,t)$$

gdzie  $u_i$  oraz  $\varepsilon_{ij}$  oznaczają kolejno kartezjańskie składowe wektora przemieszczenia oraz infinitesimalnego tensora odkształcenia, zaś  $t$  oznacza czas.

Równania ruchu redukują się do postaci:

$$(1.2) \quad \sigma_{ij,j} + F_i(x,t) = \rho(x) \ddot{u}_i(x,t)$$

gdzie  $\sigma_{ij}$  są składowymi tensora naprężenia zaś  $F_i$  oznacza wektor sił masowych. Kropka w równaniu (1.2) oznacza różniczkowanie cząstkowe względem czasu  $t$  i  $\rho = \rho(x)$  jest gęstością ośrodka.

Związki pomiędzy tensorem naprężenia i odkształcenia mają postać:

<sup>1</sup> Wszystkie łacińskie indeksy przebiegają zbiór liczb /1,2,3/, pojedynczy argument  $x$  oznacza trójkę liczb  $(x_1, x_2, x_3)$  i sumacyjna konwencja jest przyjęta. Ponadto:  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ .

$$(1.3) \quad \varepsilon_{ij}(x,t) = \alpha_{ijkl}(x) \sigma_{kl}(x)$$

gdzie  $\alpha_{ijkl} = \alpha_{ijkl}(x)$  oznacza tensor modułów sprężystości, będących w ogólności funkcją położenia, lecz nie czasu  $t$ .

### Twierdzenie 1.1

Jeśli  $u_i = u_i(x,t)$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x,t)$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(x,t)$  spełniają równania (1.1), (1.2), (1.3), wtedy  $\tilde{\sigma}_{ij}$  spotyka także równanie:

$$(1.4) \quad 2\alpha_{ijkl}(x) \ddot{\sigma}_{kl}(x,t) = [\rho^-(x) \tilde{\sigma}_{ik}(x,t)]_{,j} + [\rho^-(x) \tilde{\sigma}_{jk}(x,t)]_{,i} + [\rho^-(x) F_i(x,t)]_{,j} + [\rho^-(x) F_j(x,t)]_{,i}$$

Dowód: Aby otrzymać (1.4) kombinujemy równania (1.1), (1.2), (1.3).

Układ (1.4) dla izotropowego i jednorodnego ciała sprężystego był podany w pracy [2] /M. Iacovache, 1950/ i w [3] /V. Válcovic, 1951/. Patrz także C.A. Truesdell, Math. Rev. [4].

### Twierdzenie 1.2

Założmy, że ciało  $V$  jest w chwili początkowej w stanie spoczynku, tak, że następujące warunki są spełnione:

$$(1.5) \quad \left. \begin{aligned} u_i(x,t) = \tilde{\sigma}_{ij}(x,t) = 0 \\ \dot{u}_i(x,t) = \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}(x,t) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wewnątrz ciała } V \text{ i} \\ \text{dla } -\infty < t \leq 0 \end{array}$$

Niech ponadto  $\tilde{\sigma}_{ij}$  spełnia (1.4) zaś  $\varepsilon_{ij}$  jest dane wzorem (1.3), dla punktów wnętrza i dla  $0 < t < \infty$ .

Zdefiniujmy wektor:

$$(1.6) \quad u_i(x,t) = \rho^{-1}(x) \int_0^t [\tilde{\sigma}_{ij}(x,\tau) + F_i(x,\tau)] d\tau$$

wtedy :

a/  $u_i$  spełnia (1.2)

b/  $\varepsilon_{ij}$  oraz  $u_i$  spełniają związki odkształcenia - przemieszczenia.

Dowód:

Część a/ tego twierdzenia łatwo wywnioskować z definicji /1.6/ i jednorodnych początkowych warunków (1.5). Aby pokazać b/ wystarczy zróżniczkować (1.6) dwa razy względem czasu i skombinować otrzymane r-e z (1.4), tak, że znajdziemy:

$$(1.7) \quad \rho \sigma_{ijkl}(x) \ddot{\sigma}_{kl}(x,t) = \ddot{u}_{ij}(x,t) + \ddot{u}_{j,i}(x,t)$$

skąd jednorodne początkowe warunki (1.5) i relacje (1.3) prowadzą nas do równania (1.1).

Pokazaliśmy zatem, że dla każdego tensora  $\tilde{\sigma}_{ij}$  spełniającego (1.4) oraz jednorodne warunki początkowe, istnieje jednoznacznie zdefiniowany wektor (1.6) /też spełniający jednorodne warunki początkowe/, który jest wektorem przemieszczenia z linio-



wej elastodynamiki.

Oba twierdzenia (1.1) i (1.2) mówią, że układ równań (1.4) jest podstawowym, dynamicznym układem naprężeniowym. Jeśli znany  $\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(x, t)$ , który spełnia (1.4), to przemieszczenia można obliczyć ze wzoru (1.6).<sup>1</sup>

Twierdzenie 1.3 : Jednoznaczność rozwiązania układu (1.4) przy zadanych naprężeniowych warunkach początkowych i brzegowych.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Spośród wielu osobliwości liniowej elastodynamiki nie należących do elastostatyki zwracamy uwagę na fakt, że w dynamicznym przypadku wektor przemieszczenia jest zdefiniowany dwa razy przy pomocy tensora odkształcenia: pierwsza definicja jest dana wzorami (1.6) i (1.3) zaś druga wynika z (1.1). Zgodność obu tych definicji prowadzi nas do równania tensorowego (1.4). W przypadku statycznym tylko związki odkształcenia-przemieszczenia definiują wektor przemieszczenia /o ile tensor odkształcenia jest znany /.

<sup>2</sup> Twierdzenie o jednoznaczności jest dobrze znanym faktem z klasyycznej liniowej sprężystości i tutaj wynika z twierdzenia (1.2) o ile gęstość energii odkształceń sprężystych jest dodatnio określona funkcją składowych odkształceń i odpowiednie początkowe i brzegowe warunki są spełnione. Dowiedzimy raz jeszcze

Niech  $\tilde{\sigma}_{ij}$  spełnia naprężeniowe r-a ruchu w formie (1.4). R-e (1.4), które musi być spełnione w całym obszarze  $V$  zajmowanym przez ciało, jest poddane następującym warunkom początkowym

$$(1.8) \quad \tilde{\sigma}_{ij}(x,0) = \tilde{\sigma}_{ij}^{\circ}(x) \quad , \quad \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}(x,0) = \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}^{\circ}(x) \quad , \quad x \in V.$$

gdzie  $\tilde{\sigma}_{ij}^{\circ}(x)$  i  $\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}^{\circ}(x)$  są z góry danymi początkowymi rozkładami tensora naprężeń i prędkości tego tensora. Towarzyszące warunki brzegowe są scharakteryzowane przez równania :

$$(1.9) \quad \tilde{\sigma}_{ij}(x,t)\eta_j(x) = p_i(x,t) \quad , \quad x \in B, \quad 0 < t < \infty.$$

gdzie  $B$  jest brzegiem ciała  $V$ , podczas gdy  $p_i(x,t)$  są zadanymi powierzchniowymi obciążeniami.

Niech ponadto  $V$  będzie ograniczonym, regularnym obszarem przestrzeni z brzegiem  $B$  oraz w tym obszarze tensor 4-tego rzędu  $\mathcal{L}(x)$  tworzy formę kwadratową określoną dodatnio:

$$i,j,k,l$$


---

jednoznaczności dynamicznego naprężeniowego rozwiązania bez posługiwania się pojęciem energii kinetycznej, które jest wprowadzone w konwencjonalnym dowodzie twierdzenia Kirchhoffa-Neumana.

$$(1.10) \quad \begin{array}{l} \mathcal{R}_{ijkl}(x) f_{ij} f_{kl} > 0 \\ \mathcal{R}_{ijk} = \mathcal{R}_{jki} = \mathcal{R}_{kij} ; \quad \varrho(x) > 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{jeśli } f_{ij} \neq 0 \\ \text{i dla każdego } f_{ij} \neq f_{ji} \end{array} \right\} x \in V$$

Wtedy istnieje co najwyżej jeden taki tensor  $\tilde{\sigma}_{ij}(x, t)$ , który spełnia (1.4) wewnątrz  $V$  i dla  $0 < t < \infty$  oraz warunki (1.8) i (1.9).

Dowód:

Z uwagi na liniowość równań (1.4), (1.8), (1.9) wystarczy pokazać, że r-e:

$$(1.11) \quad 2\mathcal{R}_{ijkl}(x) \ddot{\tilde{\sigma}}_{kl}(x, t) = [\varrho'(x) \tilde{\sigma}_{ik,k}(x, t)]_{,j} + [\varrho'(x) \tilde{\sigma}_{j,t,k}(x, t)]_{,i} \\ x \in V, \quad 0 < t < \infty.$$

wraz z warunkami:

$$(1.12) \quad \tilde{\sigma}_{ij}(x, 0) = \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}(x, 0) = 0 \quad x \in V$$

$$(1.13) \quad \tilde{\sigma}_{ij}(x, t) \eta_{,j}(x) = 0 \quad x \in B, \quad 0 < t < \infty.$$

implikuje r-e

$$\tilde{\sigma}_{ij}(x, t) \equiv 0 \quad x \in V, \quad 0 < t < \infty.$$

W tym celu pomnożmy r-e (1.11) przez  $\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}(x, t)$  i scałkujmy obie strony tak otrzymanego r-a po obszarze  $V$  i w przedziale  $0 < \tau < t$ . Otrzymamy

$$(1.14) \int_V dV \int_0^t dt [2\alpha_{ijkl} \ddot{\sigma}_{kl} \dot{\sigma}_{ij} - (\bar{e}'_{ik,k})_{,j} \dot{\sigma}_{ij} - (\bar{e}'_{jkk})_{,i} \dot{\sigma}_{ij}] = 0$$

Z drugiej strony:

$$2\alpha_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} \ddot{\sigma}_{kl} = \alpha_{ijkl} (\ddot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{\sigma}_{ij} \ddot{\sigma}_{kl}) = \frac{d}{dt} \alpha_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl}$$

gdyż z uwagi na ostatnie relacje (1.10)

$$\alpha_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl} = \alpha_{klij} \dot{\sigma}_{kl} \dot{\sigma}_{ij}$$

Jeśli zauważymy ponadto, że

$$-(\bar{e}'_{ik,k})_{,j} \dot{\sigma}_{ij} = -(\bar{e}'_{ik,k} \dot{\sigma}_{ij})_{,j} + \bar{e}'_{ik,k} \dot{\sigma}_{ij,j}$$

$$-(\bar{e}'_{jkk})_{,i} \dot{\sigma}_{ij} = -(\bar{e}'_{jkk} \dot{\sigma}_{ij})_{,i} + \bar{e}'_{jkk} \dot{\sigma}_{ij,i}$$

$$\int_V [(\bar{e}'_{ik,k} \dot{\sigma}_{ij})_{,j}] dV = \int_B \bar{e}'_{ik,k} \dot{\sigma}_{ij} n_j dS = 0$$

otrzymamy z r-a (1.14)

$$\int_V dV \int_0^t dt \left[ \frac{d}{dt} (\alpha_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl}) + \frac{d}{dt} (\bar{e}'_{ik,k} \dot{\sigma}_{is,s}) \right] = 0$$

lub korzystając z jednorodnych warunków początkowych dla tenso-  
ra naprężeń:

$$(1.15) \int_V dV (\alpha_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + \bar{e}'_{ik,k} \dot{\sigma}_{is,s}) = 0.$$

skąd z uwagi na (1.10) i, że drugie wyrażenie podcałkowe w ostatnim r-u jest kwadratem, otrzymamy :  $\dot{\sigma}_{ij} \equiv 0$  i  $\dot{\sigma}_{ik,k} \equiv 0$ .  
 Zatem zgodnie z (1.12)  $\sigma_{ij}(x,t) \equiv 0$ ,  $x \in V$ ,  $0 < t < \infty$ .  
 To kończy dowód twierdzenia. Ze związku (1.15) wynika również tożsamościowe znikanie wektora przemieszczenia w jednorodnym problemie początkowo-brzegowym.

## §2. Naprężeniowe równania ruchu dla izotropowego i niejednorodnego ciała sprężystego.

Nie zmniejszając ogólności rozważań założymy, że gęstość ciała jest stała i wyspecjalizujemy tensorowe r-e (1.4) na przypadek izotropii. Otrzymamy:

$$(2.1) \quad \frac{1}{c^2(x)} \left[ \ddot{\sigma}_{ij}(x,t) - \frac{\lambda(x) \delta_{ij}}{3\lambda(x) + 2\mu(x)} \ddot{\sigma}_{kk}(x,t) \right] = \\ = \sigma_{ik,tj}(x,t) + \sigma_{jk,ki}(x,t) + F_{ij}(x,t) + F_{ji}(x,t),$$

gdzie  $\lambda = \lambda(x)$  oraz  $\mu = \mu(x)$  są modułami sprężystości dla izotropowego ośrodka zaś  $\delta_{ij}$  jest deltą Kroneckera, ponadto  $1/c^2(x) = \rho/\mu(x)$ .

Wektor przemieszczenia jest dany wzorem (1.6) o ile jednorodne początkowe warunki są założone dla danego ciała.

§3. Związek naprężeniowych równań ruchu z uogólnionymi naprężeniowymi równaniami Beltrami-Michella./przypadek izotropowego i jednorodnego ciała sprężystego/.

Twierdzenie 3.1

Jeśli  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  spełniają podstawowe r-a pola liniowej, izotropowej i jednorodnej sprężystości

$$(3.1) \quad 2\varepsilon_{ij} = u_{ij} + u_{ji}$$

$$(3.2) \quad \sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i$$

$$(3.3) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

wtedy tensor naprężeń  $\sigma_{ij}$  spełnia również r-a

$$(3.4) \quad \square^2 \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk,ij} + \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\right) \frac{\lambda \delta_{ij}}{3\lambda + 2\mu} \ddot{\sigma}_{kk} + \frac{\lambda \delta_{ij}}{\lambda + 2\mu} F_{kk} + F_{ij} + F_{ji} = 0$$

oraz

$$(3.5) \quad \square_1^2 \square_2^2 \tilde{\sigma}_{ij} + \square_1^2 (F_{ij} + F_{ji}) + \frac{\lambda \delta_{ij}}{\lambda + 2\mu} \square_2^2 F_{kk} - \frac{2\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} F_{k,kij} = 0$$

gdzie

$$(3.6) \quad \square_{\alpha}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_{\alpha}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} ; \quad \frac{1}{c_1^2} = \frac{c}{\lambda + 2\mu} , \quad \frac{1}{c_2^2} = \frac{c}{\mu}$$

Dowód:

Aby otrzymać związki (3.4) i (3.5) kombinujemy jednocześnie r-a (3.1), (3.2), (3.3) ./ Dla wyprowadzenia wspomnianych r-ń patrz np. J. Ignaczak [5], 1959 i P.P. Teodorescu [6], 1960 /

Równania (3.4) i (3.5) stanowią uogólnienie na przypadek dynamiki znanych w statyce r-ń zgodności Beltrami-Michella.

Nie wiemy dotąd, czy r-e tensorowe (3.4) wystarcza do rozwiązywania naprężeniowych, początkowo-brzegowych zagadnień? Niżej podajemy twierdzenie rzucające pewne światło na ostatnie pytanie.

Twierdzenie 3.2

Jeśli  $\sigma_{ij}$  spełnia uogólnione r-a naprężeniowe przy  $F_i = 0$ <sup>1</sup>

$$(3.7) \quad \square_{\alpha}^2 \sigma_{ij} + \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk,ij} + \left( \frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{kk,ij} = 0$$

i ponadto

-----

<sup>1</sup>Znikanie sił masowych nie zmniejsza ogólności rozważań.

$$(3.8)^1 \quad \frac{1}{c^2} \ddot{\sigma}_{kk} = \sigma_{ij,j} \quad ; \quad \frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{3\lambda + 2\mu}$$

wtedy przyperządkowane tensorowi  $\sigma_{ij}$  pole wektorowe

$$U_i = U_i(x, t) \quad \text{dane związkiem :}$$

$$(3.9) \quad \rho U_i(x, t) = \int_0^t (t - \tau) \sigma_{ij,j}(x, \tau) d\tau$$

spełnia przemieszczeniowe równania ruchu /r-a Lamé'go z elastodynamiki/

$$(3.10) \quad \mu U_{i,kk} + (\lambda + \mu) U_{k,ki} = \rho \ddot{U}_i$$

Dowód:

Zwężenie (3.7) daje

$$(3.11) \quad \square_{,kk}^2 \sigma = 0$$

Jeśli teraz zróżniczkujemy (3.7) względem  $x_j$  i użyjemy r-a (3.11), to otrzymamy

$$(3.12) \quad \square_{,2}^2 \sigma_{ij,j} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\rho}{3\lambda + 2\mu} \ddot{\sigma}_{kk,i} = 0$$

---

<sup>1</sup>Równanie (3.8) jest zwężeniem r-a (2.1) w założeniu  $F_i = 0$ .



skąd, z uwagi na (3.8) oraz (3.9) otrzymamy:

$$(3.13) \quad \square_2^2 U_i + \frac{\lambda + \mu}{\mu} U_{k,ki} = 0$$

Aby otrzymać ostatecznie r-e scałkowaliśmy związek (3.12) dwa razy względem czasu i użyliśmy jednorodnych początkowych warunków dla  $\sigma_{ij}$ .

### Twierdzenie 3.3

Niech wektor  $a_i$  oraz tensor  $\sigma_{ij}$  spełniają r-a:

$$(3.14) \quad \sigma_{ij,j} + F_i = \rho a_i$$

$$(3.15) \quad \sigma_{ij,kk} + \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk,ij} + \\ + (F_i - \rho a_i)_{,j} + (F_j - \rho a_j)_{,i} + \frac{\lambda \delta_{ij}}{\lambda + 2\mu} (F_s - \rho a_s)_{,s} = 0$$

Zdefiniujmy tensor

$$(3.16) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \right)$$

wtedy

$$(3.17) \quad \varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,jk} - \varepsilon_{jk,ik} = 0$$

Dowód:

Kombinujemy r-a (3.16), (3.15), i (3.14) i sprawdzamy (3.17).  
/por. też pracę [11] /

Niżej zbieramy pewne twierdzenia odnoszące się do płaskich stanów sprężystości niejednorodnej.

§4. Rozwiązania w płaskim stanie odkształcenia /  $\rho = \text{const}$ ,  
 $F_\alpha = 0$  /<sup>1</sup>.

Twierdzenie 4.1

Jeśli  $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(x, t)$  spełnia r-e

$$(4.1) \quad \mu(x) \left[ \sigma_{\alpha\beta}^{\ddot{}}(x, t) - \frac{\lambda(x) d_{\alpha\beta}^p}{2\lambda(x) + 2\mu(x)} \sigma_{\sigma\sigma}^{\ddot{}}(x, t) \right] = \sigma_{\alpha\gamma, \beta}^{\sim}(x, t) + \sigma_{\beta, \gamma\alpha}^{\sim}(x, t)$$

wtedy przyporządkowane pole wektorowe

$$(4.2) \quad u_\alpha(x, t) = e^{-t} \int_0^t (t-\tau) \sigma_{\alpha\gamma, \beta}^{\sim}(x, \tau) d\tau$$

wraz z tensorem odkształcenia danym związkiem

<sup>1</sup> Wszystkie greckie indeksy przyjmują wartości / 1, 2 / zaś pojedynczy argument  $x$  oznacza dwójkę liczb  $(x_1, x_2)$ .

$$(4.3) \quad \varepsilon_{\alpha\beta}(x,t) = \frac{1}{2\mu(x)} \left[ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(x,t) - \frac{\lambda(x)\delta_{\alpha\beta}}{2\lambda(x)+2\mu(x)} \bar{\sigma}_{rr}(x,t) \right]$$

spełniają związki odkształcenia -przemieszczenia i  $u_\alpha$  spełnia r-a ruchu przynależne do płaskiego stanu odkształcenia.

Naprężeniowe r-a ruchu w uogólnionym płaskim stanie naprężenia.

#### Twierdzenie 4.2

W dynamicznym zagadnieniu płaskiego stanu naprężenia wystarczy znaleźć pewne rozwiązanie  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$ <sup>1</sup> spełniające r-e

$$(4.4) \quad \frac{\rho}{\mu(x)} \left[ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\ddot{}}(x,t) - \frac{\lambda(x)\delta_{\alpha\beta}}{3\lambda(x)+2\mu(x)} \bar{\sigma}_{rr}^{\ddot{}}(x,t) \right] = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\ddot{}}(x,t) + \bar{\sigma}_{\beta\alpha}^{\ddot{}}(x,t)$$

wtedy przyporządkowany wektor przemieszczenia jest dany wzorem

$$(4.5) \quad u_\alpha(x,t) = \rho^{-1} \int_0^t (t-\tau) \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\ddot{}}(x,\tau) d\tau$$

---

<sup>1</sup>Spełnić należy przy tym również odpowiednie warunki brzegowe i początkowe/jednorodne/.

oraz relacje odkształcenia-~~przemieszczenia~~<sup>naprężenia</sup> przyjmują postać

$$(4.6) \quad \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}(x,t) = \frac{1}{2\mu(x)} \left[ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(x,t) - \frac{\lambda(x) d_{\alpha\beta}}{3\lambda(x) + 2\mu(x)} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\sigma}(x,t) \right]$$

Aby udowodnić oba twierdzenia (4.1) i (4.2) wystarczy ~~z~~ wziąć na uwagę definicje płaskiego stanu odkształcenia i uogólnionego płaskiego stanu naprężenia oraz przyjąć jednorodne warunki początkowe dla przemieszczenia i naprężenia.

Ze sformułowań  $r$ -n naprężeniowych dla ośrodka izotropowego, niejednorodnego / $r$ -e (2.1) w trzech wymiarach i płaskie  $r$ -a (4.1) oraz (4.4) wynika, że funkcje niejednorodności  $\lambda = \lambda(x)$ ,  $\mu = \mu(x)$  występują tutaj w postaci nieróżniczkowanej w przeciwieństwie do traktowania problemów dynamicznych i niejednorodnych metodą przemieszczeniową. Ale już w przypadku płaskim ilość  $r$ -n jest tu większa o jedno. Jednak w każdym naprężeniowym sformułowaniu warunki brzegowe przyjmują postać najprostsza.

Niżej rozważymy jeszcze nieco inne naprężeniowe  $r$ -a /wynikające z podstawowych  $r$ -n elastodynamiki/, które można znaleźć w literaturze. I tak np. ~~nie~~ pewne naprężeniowe problemy dynamicznej płaskiej sprężystości były studiowane między innymi

przez J.R.M.Radoka w pracy [7] oraz P.P.Teodorescu w [8].  
 Chociaż trzy naprężeniowe r-a ruchu były wyprowadzone w pracy  
 [7]<sup>1</sup> /płaski stan odkształcenia i przypadek ciała jednorodnego/ :

$$\begin{aligned}
 \square_1^2 \sigma_{\alpha\alpha} &= 0 \\
 \square_2^2 \sigma_{12} + \sigma_{\alpha\alpha,12} &= 0 \\
 (\sigma_{11,11} - \frac{c}{2\mu} \ddot{\phi}_{11}) - (\sigma_{22,22} - \frac{c}{2\mu} \ddot{\phi}_{22}) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

zatem wydawałoby się, że liczba r-ń określających jest wystarczająca, to autor uciekł się do wektora przemieszczenia, aby znaleźć składową  $\sigma_{12}^2$ . Teodorescu [8] także znalazł  $\sigma_{12}$  metodą mieszaną. Istotnie, chociaż układ r-ń (4.7) zawiera wszystkie trzy składowe  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  i został wyprowadzony przy pomocy płaskiego r-a zwartości, nie wystarcza, aby określić ogólny dynamiczny płaski problem. Aby tego dowiedzieć, wystarczy pokazać że istnieje taki tensor naprężeń  $\sigma_{\alpha\beta}^*$ , który spełnia (4.7) lecz nie spotyka (4.1)/jednorodny przypadek/.

Tensor  $\sigma_{\alpha\beta}^*$  może być przyjęty w postaci /patrz W.Nowacki [9]/

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = -\phi_{,\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \left( \phi_{,rr} - \frac{c}{2\mu} \ddot{\phi} \right)
 \tag{4.8}$$

gdzie

---

<sup>1</sup>Porównaj również rozdział o klasycznej teorii sprężystości w [12] str.118 , wzory (75.4) , (75.5) , (75.6) .

<sup>2</sup>Innym aspektem wspomnianej pracy [7] było przeniesienie metody zmiennej zespolonej stosowanej w płaskim zagadnieniu elastosta-

$$(4.9) \quad \square_1^2 \square_2^2 \phi = 0$$

Łatwo jest sprawdzić, że  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^*$  spełnia (4.7), o ile  $\phi$  spełnia (4.9). Jednakże jeśli podstawić  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^*$  w r-e (4.1) otrzymujemy po pewnych przekształceniach:

$$(4.10) \quad \int_{\alpha\beta} \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + 2\mu} \square_1^2 \ddot{\phi} = 0$$

Ostatnie r-e nie może być spełnione przez żadną funkcję  $\phi$  taką, że

$$(4.11) \quad \square_2^2 \phi = 0$$

Również jest widoczne, że chociaż tensor  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^*$  dla statycznego przypadku /  $\ddot{\phi} = 0$  / redukuje się do ogólnego rozwiązania w terminach funkcji Airy'ego, to nie reprezentuje on ogólnego rozwiązania płaskiego dynamicznego zagadnienia.

Istotnie, ponieważ

$$(4.12) \quad \tilde{\sigma}_{\alpha\beta,\beta}^* = -\frac{\rho}{2\mu} \ddot{\phi}_{,\alpha}$$

---

tyki na dynamikę.

i z uwagi na to, że ma być

$$(4.13) \quad \sigma_{\alpha\beta,\beta}^* = \rho \ddot{u}_\alpha^*$$

to wektor przemieszczenia  $u_\alpha^*$  jest pochodzenia potencjalnego tylko/potencjałem jest tutaj funkcja  $\phi$  /.Zatem do r-a (4.8) nie wchodzi tzw. fale ścinania.

W rozdziale II podkreślimy niektóre praktyczne zalety metody czyste-naprężeniowych r-ń ruchu w ciałach izotropowych niejednorodnych.

## Rozdział II.

### Fale Rayleigha w niejednorodnej, izotropowej i sprężystej półprzestrzeni.

W teorii fal powierzchniowych w ciałach niejednorodnych zwykle używamy przemieszczeniowych r-ń ruchu, które w przypadku ogólnej niejednorodności i dla trzech wymiarów można jedynie zapisać w postaci układu trzech r-ń cząstkowych o zmiennych współczynnikach. Rozmaite próby znalezienia rozwiązań tego skom-

plikowanego problemu, wreszcie rozmaite postacie rozwiązań z ogólną i szczególną postacią niejednorodności i przy bardziej lub mniej ogólnych założeniach odnośnie zachowania się ciała w niejednorodnego, mogą być znalezione w literaturze. Dla przykładu czytelnik znajdzie monografię napisaną przez Ewing, W.M., Jardetzky, W.S., Press, I. [13], która zawiera pewne podsumowanie niedawnych prac poświęconych tym problemom. Odsyłamy także do książek Kolskiego H. [14] i Sommerfelda, A. [15].

W tym rozdziale stosujemy metodę naprężeniowych  $r$ -ń ruchu do rozwiązania tzw. zagadnienia fal Rayleigha w niejednorodnej, izotropowej, sprężystej półprzestrzeni/płaski stan odkształcenia/. Pokazujemy, że istnieje pewna funkcja naprężeń spełniająca zwyczajne, liniowe, rzędu czwartego  $r$ -e różniczkowe dla dowolnej niejednorodności/ za wyjątkiem, że gęstość jest stała /. Zatem  $r$ -a ruchu można rozdzielić w tym przypadku i naprężenia mogą być wyrażone przez jedną funkcję. Otrzymane  $r$ -e o zmiennych współczynnikach może być rozwiązywane różnymi metodami numerycznymi. Podajemy tutaj tylko pewne klasy rozwiązań w postaci zamkniętej i ustalamy  $r$ -a prędkości fazowej, zdaniem autora nowe, dla specjalnych nietrywialnych postaci niejednorodności.

### 1. Sformułowanie zagadnienia:

Niech półprzestrzeń zajmująca obszar  $x_2 \geq 0$  będzie wpro-



wadzona w ruch falowy przez siły przyłożone w pewnej odległości od swobodnego brzegu ciała  $x_2=0$ . Załóżmy, że deformacja jest płaska /  $u_3=0$  / Poszukujemy rozwiązania dwuwymiarowych naprężeniowych r-ń ruchu dla niejednorodnego, sprężystego ciała /por.wz. (4.1) poprzedniego rozdziału/

$$(1.1) \quad \frac{1}{\mu(x)} \left[ \ddot{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, \tau) - \frac{\lambda(x) \delta_{\alpha\beta}}{2\lambda(x) + 2\mu(x)} \ddot{\sigma}_{\gamma\gamma}^{\sim}(x, \tau) \right] = \\ = \ddot{\sigma}_{\alpha\gamma, \gamma\beta}^{\sim}(x, \tau) + \ddot{\sigma}_{\beta\gamma, \gamma\alpha}^{\sim}(x, \tau)$$

w obszarze  $|x_1| < \infty$  ,  $0 < x_2 < \infty$  , takich, że

$$(1.2) \quad \left. \begin{aligned} \ddot{\sigma}_{22}^{\sim}(x_1, 0; \tau) = \ddot{\sigma}_{12}^{\sim}(x_1, 0; \tau) = 0 \\ \ddot{\sigma}_{22}^{\sim}(x_1, \infty; \tau) = \ddot{\sigma}_{12}^{\sim}(x_1, \infty; \tau) = 0 \end{aligned} \right\} |x_1| < \infty$$

Tutaj  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim}$  /  $\alpha, \beta = 1, 2$  / oznacza bezwymiarowy tensor naprężenia w płaskim stanie odkształcenia i następujące oznaczenia są przyjęte

$$(1.3) \quad \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim} = \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim} / \mu_0 , \quad \mu = \hat{\mu} / \mu_0 , \quad x_\alpha = \hat{x}_\alpha / x_0 \\ \tau = t \sqrt{\mu_0} / x_0 \sqrt{\rho_0} , \quad \lambda = \hat{\lambda} / \mu_0$$

gdzie  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(\hat{x}_\alpha)$  ,  $\hat{\mu} = \hat{\mu}(\hat{x}_\alpha)$  oznaczają współczynniki Lamé'go,  $\hat{x}_\alpha$  współrzędne kartezjańskie,  $t$  czas,  $\rho_0$  stała gęstość ośrodka; ponadto  $\mu_0 = \hat{\mu}(x_\alpha^0)$  i  $x_\alpha^0$  oznacza ustalony punkt płaszczyzny,  $x_0$  charakterystyczną długość i  $\tau$  bezwymiarowy czas.

W tym sformułowaniu i przy jednorodnych warunkach początkowych dla naprężeń rozwiązanie zagadnienia jest tożsamościowo równe zeru. Dlatego będziemy poszukiwać pewnej klasy rozwiązań r-a (1.1) z niejednorodnymi warunkami początkowymi.

Klasyczne rozwiązania dotyczące fal Rayleigha/te odnoszące się do ciała jednorodnego/ opierają się na założeniu, że amplituda przemieszczeniowa fali zanika wykładniczo w miarę oddalania się od swobodnej powierzchni ciała. Przyjmijmy naprężeniowe rozwiązanie zagadnienia opisanego przez r-a (1.1) do (1.3) w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x, \tilde{t}) &= \alpha(x_2) \exp [i(sx_1 - p\tilde{t})] \\ (1.4) \quad \sigma_{22}(x, \tilde{t}) &= \beta(x_2) \exp [i(sx_1 - p\tilde{t})] \end{aligned}$$

$$\sigma_{12}(x, \tilde{t}) = \gamma(x_2) \exp [i(sx_1 - p\tilde{t})]$$

gdzie  $\alpha = \alpha(x_2)$ ,  $\beta = \beta(x_2)$ ,  $\gamma = \gamma(x_2)$  znikają nie koniecznie wykładniczo dla  $x_2 \rightarrow \infty$ . W r-u (1.4)

okres fali wynosi  $2\pi/p$  i długość fali jest  $2\pi/s$ , prędkość rozchodzenia się możliwych zaburzeń powierzchniowych

jest  $\hat{c}_0 = p/s$ ,  $i^2 = -1$ .

## 2. Funkcja naprężeń dla fal Rayleigha w niejednorodnym i sprężystym ciele.

Aby określić funkcje  $\alpha(x_2)$ ,  $\beta(x_2)$ ,  $\gamma(x_2)$  występujące we wzorach (1.4) wstawiamy te związki do r-a (1.1) oraz warunków

(1.2) i stwierdzamy, że  $\lambda$  oraz  $\mu$  mogą być tylko funkcjami jednej zmiennej  $x_2$  :

$$(2.1) \quad \mu = \mu(x_2), \quad \lambda = \lambda(x_2)$$

oraz następujące trzy r-a winny być spełnione

$$(2.2) \quad \begin{aligned} -\beta^2 [\alpha(x_2) + \beta(x_2)] &= \\ &= 2 [\lambda(x_2) + \mu(x_2)] [-s^2 \alpha(x_2) + \beta''(x_2) + 2is\gamma'(x_2)] \\ -\beta^2 [\alpha(x_2) - \beta(x_2)] &= 2\mu(x_2) [-s^2 \alpha(x_2) - \beta''(x_2)] \\ -\beta^2 \gamma(x_2) &= \mu(x_2) [is\alpha'(x_2) + is\beta'(x_2) + \gamma''(x_2) - s^2 \gamma(x_2)] \end{aligned}$$

Warunki brzegowe przyjmują prostą postać:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \beta(0) = \gamma(0) &= 0 \\ \beta(\infty) = \gamma(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Układ r-ń (2.2) jest równoważny związkom:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \alpha(x_2) &= -\frac{1}{s^2(2-\omega)} (s^2\omega + 2D^2)\beta \\ 2is\gamma(x_2) &= \\ &= \frac{1}{s^2(1-\omega)} D \left\{ \frac{\omega}{2-\omega} \frac{1}{1-x} [D^2 - s^2(1-x\omega)]\beta - \right. \\ &\quad \left. - 4s^2 \frac{1-\omega}{2-\omega} \beta \right\} \end{aligned}$$

gdzie funkcja  $\beta = \beta(x_2)$  spełnia następujące r-e czwartego rzędu

$$(2.5) \quad \left( \frac{1}{s^2} D \frac{1}{1-\omega} D - 1 \right) \frac{1}{1-\alpha} \frac{\omega}{2-\omega} [D^2 - s^2(1-\alpha\omega)] \beta + \\ + 4 \left( \frac{1}{2-\omega} D^2 - D \frac{1}{1-\omega} D \frac{1-\omega}{2-\omega} \right) \beta = 0$$

Równoważność odpowiednich r-ń (2.2) i (2.4), (2.5) zachodzi dla takich funkcji niejednorodności dla których:

$$\omega \neq 1, \quad \omega \neq 2; \quad \alpha \neq 1.$$

W równaniach (2.4), (2.5) przyjęliśmy oznaczenia:

$$(2.6) \quad \kappa(x_2) = \frac{1-2\nu(x_2)}{2-2\nu(x_2)}, \quad \nu(x_2) = \frac{1-2\kappa(x_2)}{2-2\kappa(x_2)} \\ \omega(x_2) = \frac{\hat{c}_0^2}{\mu(x_2)}; \quad D = \frac{d}{dx},$$

tutaj  $\nu = \nu(x_2)$  oznacza zmienną z głębokością liczbę Poissona.

Funkcja  $\beta = \beta(x_2)$  odgrywa rolę funkcji naprężeń<sup>1</sup> dla fal Rayleigha w niejednorodnej półprzestrzeni. Istnieje wiele

<sup>1</sup>Pojęcie funkcji naprężeń jest wprowadzone w nieco innym sensie niż to spotykane w literaturze; funkcja  $\beta = \beta(x_2)$  obsługuje dowolną niejednorodność w rozważanym problemie podczas gdy tzw. funkcja naprężeń służy pewnej ogólnej klasie problemów brzegowych

metod poszukiwania numerycznych rozwiązań  $r$ -a (2.5) i rozmaite funkcje niejednorodności mogą być dyskutowane na tej drodze.

Aby porównać otrzymany problem brzegowy opisany równaniem (2.5) i warunkami brzegowymi (2.3) z innymi sformułowaniami przy pomocy przemieszczeniowych  $r$ -a ruchu scharakteryzujemy pokrótce niektóre, zdaniem autora ważniejsze, rozważane dotąd w literaturze. I tak np. w pracy [13], w rozdziale poświęconym falom Rayleigha w heterogenicznych izotropowych ośrodkach znajdziemy rozwiązanie Sezawy, który zbadał ogólne zagadnienie rozchodzenia się fali w półnieskończonym ciele o zmiennej sprężystości, ale w założeniu, że ciało jest nieściśliwe i moduł ścinania zmienia się liniowo wraz z głębokością/w nieskończoności ścinania są nieograniczone/. Stoneley uczynił te same założenia co jego poprzednik i przyjął, że przemieszczenia składają się z części potencjalnej i rotacyjnej. Dla części rotacyjnej przy tych uproszczonych założeniach otrzymał  $r$ -e zwyczajne drugiego rzędu o zmiennym współczynniku i stąd w zamkniętej postaci  $r$ -e na prędkość fazową. Metody małego parametru zaburzającego jednorodność spotkamy też w pracach Newlanda /patrz wspomniany rozdział [13]/

W każdym z wymienionych przypadków funkcje niejednorodności/liniowo zmieniające się z głębokością/ mogą dostarczać patologicznego zachowania się rozwiązania w nieskończoności, gdyż przeczą założeniu o znikaniu tam naprężeń. Również trudne sobie wy-

braź, że jest poprawnie sformułowane zagadnienie fal Rayleigha, w którym żąda się zanikania naprężeń w nieskończoności, gdy moduł ścinania ma np. postać

$$\mu(x_2) = \mu_0 (1 + \varepsilon x_2)^\alpha, \quad \mu_0, \varepsilon, \alpha > 0$$

Nawet w przypadku  $\alpha < 0$ , gdy  $\mu(\infty) = 0$  rozwiązanie może nie istnieć/nie istnieją rzeczywiste prędkości fazowe/.

Z innych prac wspomnijmy pracę Zwolińskiego [16], który założył że gęstość oraz moduły sprężystości zmieniają się tak samo w sposób wykładniczy

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha_1 x_2}, \quad \mu = \mu_0 e^{\alpha_2 x_2}; \quad \lambda = \lambda_0 e^{\alpha_3 x_2}$$

i otrzymał pewne r-e różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu o stałych współczynnikach. Nawet w tym ostatnim przypadku dyskusja o możliwych rzeczywistych prędkościach fazowych jest uciążliwa.

Zauważmy ponadto, że jeśli zmodyfikować nieco funkcje niejednorodności np. do postaci

lub

$$\mu_1(x_2) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) (1 + \varepsilon x_2)^{-\alpha}$$

$$\mu_2(x_2) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) e^{-\alpha x_2} \quad \alpha > 0$$

to następuje zasadnicza zmiana jakościowa rozwiązania. Parametr  $\mu_\infty \neq 0$  stabilizuje moduły ścinania w nieskończoności do wartości przyjmowanych w ciele jednorodnym, w którym odpowiednie warunki regularności w punktach dostatecznie od brzegu mogą być spełnione. Jednocześnie tenże parametr zasadniczo zmienia chara-

które r-ń rozwiązujących. Zdaniem autora nie ustalono dotąd żadnych zamkniętych postaci r-ń określających prędkości fazowe z sensownymi rozkładami niejednorodności/ i bez zakładania nieściśliwości materiału/ pozwalającymi na dyskusję zależności prędkości fazowych od wprowadzonych parametrów i zbadanie obszarów stabilności rozwiązania dla rozmaitych przedziałów tych parametrów.

Zanim przystąpimy do podania najprostszycy rozwiązań o postaci zamkniętej podamy dla przykładu kształt r-a na funkcję naprężeń

$\beta = \beta(x_2)$  w założeniu, że liczba Poissona jest stała, zaś funkcja  $\omega = \omega(x_2)$  zmienia się następująco:

$$(2.7) \quad \omega = \omega_\infty + (\omega_0 - \omega_\infty) \varrho^{-\alpha(\varrho-1)}$$

gdzie  $\varrho = 1 + \varepsilon x_2$ ,  $\omega_\infty = \frac{\hat{c}_0^2}{\mu_\infty}$ ,  $\omega_0 = \frac{\hat{c}_0^2}{\mu_0}$

R-e (2.5) przechodzi w tym przypadku na r-e o współczynnikach wielomianowych zmiennej  $\omega$  :

$$(2.8) \quad L_1^2 \frac{\omega}{2-\omega} L_3^2 \hat{\beta}(\omega) + 2(1-x_0) \hat{t}_0^2 L_1 \hat{\beta}(\omega) = 0$$

Operatory  $L_1^2$ ,  $L_3^2$ ,  $L$  mają postać

$$L_1^2 = (\omega_\infty - \omega) \left[ (\omega_\infty - \omega) \frac{d^2}{d\omega^2} - \frac{1 - \omega_\infty}{1 - \omega} \frac{d}{d\omega} \right] - \hat{t}_0^2 (1 - \omega)$$

$$L_3^2 = (\omega_\infty - \omega) \left[ (\omega_\infty - \omega) \frac{d^2}{d\omega^2} - \frac{d}{d\omega} \right] - \hat{t}_0^2 (1 - x_0 \omega)$$

$$L = \omega (\omega_\infty - \omega)^2 \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega}{2-\omega} \right) \frac{d}{d\omega} + \left[ L_1^2 + \hat{t}_0^2 (1 - \omega) \right] \left( \frac{\omega}{2-\omega} \right)$$

gdzie  $\hat{t}_0 = s/\varepsilon\alpha$  i półnieskończony przedział  $0 < x_2 < \infty$  transformuje się na przedział skończony zmiennej  $\omega_0 < \omega < \omega_\infty$ . R-e (2.8) może być rozwiązane przy pomocy szeregów potęgowych zmiennej  $\omega$  i zagadnienie możliwych prędkości fazowych sprowadza się do zbadania tego jednego r-a.

### 3. Pewna klasa rozwiązań w zamkniętej postaci.

Założmy, że  $\mu(x_2) = \text{const}$ ,  $\omega = \omega_0 < 1$   
Zgodnie z (2.5) otrzymamy

$$(3.1) \quad [D^2 - s^2(1 - \omega_0)] \frac{1}{1 - \alpha} [D^2 - s^2(1 - \alpha\omega_0)] \beta = 0$$

skąd dla dowolnego  $0 < \alpha(x_2) < 1$  znajdujemy

$$(3.2) \quad [D^2 - s^2(1 - \alpha\omega_0)] \beta = \beta_0 \omega_0 s^2 (1 - \alpha) \exp(-x_2 s \sqrt{1 - \omega_0})$$

gdzie  $\beta_0$  oznacza dowolną stałą i założyliśmy, że funkcja  $\beta(x_2)$  oraz jej druga pochodna znikają dla  $x_2 = \infty$  oraz funkcja  $\alpha = \alpha(x_2)$  jest ograniczona dla  $0 \leq x_2 < \infty$ .

Sprowadziliśmy zatem zagadnienie do rozwiązania różniczkowego r-a drugiego rzędu ze zmiennym współczynnikiem  $\alpha$ , zatem dla tych funkcji  $\alpha$ , dla których r-e zwyczajne drugiego rzędu całkuje się efektywnie mamy rozwiązania w postaci zamkniętej. Zakładamy, że  $\alpha = \alpha(x_2)$  przyjmuje postać:

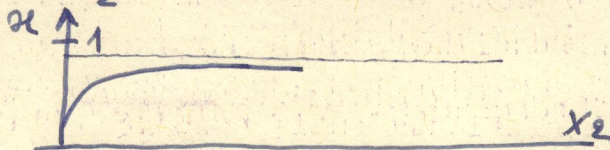
$$(3.3) \quad \alpha(x_2) = \alpha_\infty - (\alpha_\infty - \alpha_0) (1 + \varepsilon x_2)^{-2}$$



gdzie

$$\alpha_\infty = \alpha(\infty), \quad \alpha_0 = \alpha(0)$$

Rozważmy przypadek  $\alpha_\infty - \alpha_0 > 0$ . Rysunek 1 pokazuje zależność  $\alpha = \alpha(x_2)$ . Mamy tutaj  $\alpha'(x_2) > 0$ ,  $\alpha''(x_2) < 0$



Rys.1

Funkcja  $\bar{p} = \bar{p}(x_2)$  jest określona związkami:

$$(3.4) \quad \bar{p}(x_2) = 1 - (1 - \bar{p}_\infty) \left[ 1 + \frac{\bar{p}_0 - \bar{p}_\infty}{1 - \bar{p}_0} (1 + \varepsilon x_2)^{-2} \right]^{-1}$$

gdzie

$$(3.5) \quad \bar{p}_0 = \frac{1 - 2\alpha_0}{2 - 2\alpha_0}, \quad \bar{p}_\infty = \frac{1 - 2\alpha_\infty}{2 - 2\alpha_\infty}$$

$$\bar{p}'(x_2) < 0, \quad \bar{p}''(x_2) > 0$$

Na rysunku 2 pokazano krzywą  $\bar{p} = \bar{p}(x_2)$  dla  $\varepsilon = 1$ ,  $\alpha_\infty = \frac{1}{3}$

$$\alpha_0 = \frac{1}{9}, \quad \bar{p}_0 = 0.4375, \quad \bar{p}_\infty = 0.25$$



Rys.2

Nachylenie  $\bar{p}(x_2)$  jest określone parametrami  $\varepsilon > 0, \bar{p}_0, \bar{p}_\infty$  i w rozważanym przypadku  $\bar{p}(x_2)$  jest monotonicznie malejącą funkcją głębokości  $x_2$ ,  $0 < x_2 < \infty$ . Przypadek  $\bar{p}_0 < \bar{p}_\infty$  odpowiada monotonicznie rosnącej funkcji  $\bar{p} = \bar{p}(x_2)$  w rozważanym przedziale.

Rozwiązanie r-a (3.2) znikające w punktach  $x_2 = 0$  oraz  $x_2 = \infty$  i wyspecjalizowane na funkcję  $\bar{p} = \bar{p}(x_2)$  daną wzorem (3.4)

przyjmuje postać

$$(3.6) \quad \beta(x_2) = \beta_0 \left\{ \sqrt{1 + \varepsilon x_2} \frac{K_n[(1 + \varepsilon x_2)^m]}{K_n(m)} - \exp[-x_2 s \sqrt{1 - \omega_0}] \right\}$$

gdzie

$$m = \frac{s}{\varepsilon} \sqrt{1 - \alpha_\infty \omega_0}, \quad n = \sqrt{\frac{1}{4} + (\alpha_\infty - \alpha_0) \omega_0 \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^2}$$

oraz  $K_n = K_n(x)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju.

Jeśli  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to  $m \rightarrow \infty$  i otrzymujemy wzór przybliżony

$$(3.7) \quad K_n(m) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \exp(-m)$$

w tym przypadku  $\beta = \beta(x_2)$  przechodzi na funkcję

$$(3.8) \quad \bar{\beta}(x_2) = \beta_0 \left\{ \exp[-x_2 s \sqrt{1 - \alpha_\infty \omega_0}] - \exp[-x_2 s \sqrt{1 - \omega_0}] \right\}$$

Wracając do przypadku ogólnego  $\varepsilon \neq 0$  otrzymamy na mocy wzorów (3.6) oraz (2.4) następującą postać funkcji  $\gamma = \gamma(x_2)$ :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} 2i s \gamma(x_2) = & \\ = \frac{\beta_0}{1 - \omega_0} \frac{1}{2 - \omega_0} & \left\{ (\omega_0 - 2)^2 \exp(-x_2 s \sqrt{1 - \omega_0}) - \right. \\ & \left. - 4(1 - \omega_0) \sqrt{1 + \varepsilon x_2} \frac{K_n[m(1 + \varepsilon x_2)]}{K_n(m)} \right\} \end{aligned}$$

Poszukiwane r-e na prędkość fazową  $\omega_0$  otrzymujemy z warunku

$\gamma(0) = 0$ , który bierze postać r-a przestępnego:

$$(3.10) \quad (2 - \omega_0)^2 + 4 \sqrt{1 - \omega_0} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{s}\right) + \sqrt{1 - \alpha_\infty \omega_0} \frac{K_n'(m)}{K_n(m)} \right] = 0$$



W granicznym przypadku, gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$  ,  $m \rightarrow \infty$  otrzymamy

$$\frac{K_n'(m)}{K_n(m)} \rightarrow -1$$

skąd r-e (3.10) przechodzi w klasyczne r-e Rayleigha

$$(3.11) \quad (2 - \omega_0)^2 - 4 \sqrt{1 - \omega_0} \sqrt{1 - \alpha \omega_0} = 0$$

W ogólnym przypadku r-a (3.10) wynika, że  $\omega_0$  zależy od falowej długości  $2\pi/\lambda$  i parametru  $\varepsilon$  określającego niejednorodność. Jeśli  $\varepsilon = \lambda$  , to  $\omega_0$  będzie niezależne od  $\lambda$  /bo r-e (3.10) nie zawiera wtedy  $\lambda$  /, zatem w tym szczególnym przypadku sprzęgnięcia niejednorodności z długością fali nie będzie zjawiska dyspersji.

Jest widoczne również, że odpowiednie bardziej skomplikowane r-e przestępne na prędkość fazową  $\omega_0$  może być napisane dla warstwy sprężystej  $|\alpha_1| < \infty$  ,  $|\alpha_2| < h < \infty$  . Weźmiemy wtedy ogólne rozwiązanie zwyczajnego r-a (3.1) , aby spełnić cztery warunki brzegowe. Całkowanie r-a czwartego rzędu (3.1) jest efektywne dla tych  $\alpha$  , dla których r-e 2-go rzędu (3.2) jest całkwalne efektywnie.

## Rozdział III.

O naprężeniowych równaniach ruchu w liniowej  
termosprężystości.

W rozdziale I pokazaliśmy, że jeśli dynamiczny problem liniowej sprężystości jest sformułowany w naprężeniach, to wystarczy sprawdzić tylko jedno r-e tensorowe i odpowiednie początkowe i brzegowe warunki.

Z teoretycznego punktu widzenia interesujące wydaje się pytanie, czy dynamiczny problem naprężeniowy może być zredukowany do pewnego "naturalnego naprężeniowego problemu początkowo-brzegowego"<sup>1</sup>? Np. czy układ płaskich naprężeniowych r-ń ruchu /trzy równania/ może być zastąpiony pewnym innym układem /dwa r-a / w taki sposób, że zredukowany układ zawiera tylko te składowe tensora naprężenia, które są zadane na brzegu ciała sprężystego? W ostatecznym układzie liczba r-ń i nieznanymi funkcji będzie taka sama jak w przemieszczeniowej metodzie rozwiązania, lecz warunki brzegowe przyjmą postać najprostszą.

Nie należy mieszać tego pytania z ekonomią metod rozwiązywania w klasycznej elastodynamice. Nie będziemy tutaj czynić ani

---

<sup>1</sup>Pierwszy początkowo-brzegowy problem w liniowej elastodynamice /zadany wektor przemieszczenia na brzegu dla  $t > 0$  oraz jego wartość i prędkość w chwili początkowej  $t = 0$  /jest naturalnie rządzoney przemieszczeniowymi równaniami ruchu.

żadnych usiłowań, aby ocenić względne zalety alternatywnych metod rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych, ani dowodzić, że metoda naprężeniowych  $r$ -ń ruchu wydaje się być bardziej ekonomiczną niż procedury dotąd używane. Wskażemy tylko na pewne nowe aspekty dotyczące bezpośredniego określania naprężeń z naprężeniowych  $r$ -ń ruchu. Przykładem wybranym do tego celu niech będą naprężeniowe sformułowania w dynamicznej termosprężystości. Podamy także pewien przykład tzw. naturalnego naprężeniowego zagadnienia brzegowego.

1. Warunki konieczne i wystarczające na to, aby tensor należał do liniowej, dynamicznej termosprężystości.

Rozważmy jednorodny i izotropowy, sprężysty ośrodek, w którym moduły sprężystości  $\lambda$ ,  $\mu$  oraz współczynnik rozszerzalności termicznej  $\alpha_t$  są stałe i nie zależą od temperatury  $T = T(x, t)$ . Następujące  $r$ -a muszą być spełnione przez tensor naprężeń cieplnych  $\sigma_{ij}$ , /  $\sigma_{ij}$  / w dowolnym ciele  $V$ , /  $D$  /

a/ Trójwymiarowy przypadek:

$$(1.1) \quad \square^2 \sigma_{ij} + \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk,ij} + \left( \frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk}^{\ddot{}} + \\ + 2\mu \alpha_t \left( T_{,ij} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_{,kk} \delta_{ij} \right) - \frac{5\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_t \varrho \ddot{T} \delta_{ij} = 0$$

$$(1.2) \quad \square_2^2 \left\{ \square_1^2 \tilde{\sigma}_{ij} - \mathcal{D}_0 [2\mu (T_{ij} - T_{ss} \delta_{ij}) + c \ddot{T} \delta_{ij}] \right\} = 0$$

gdzie  $\mathcal{D}_0 = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_t$

Oba r-a tensorowe (1.1), (1.2) winny być spełnione w obszarze:

$$x \in V, \quad 0 < t < \infty$$

b/ Płaski stan odkształcenia :

$$(1.3) \quad \square_2^2 \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} + \tilde{\sigma}_{rr,\alpha\beta} + \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{\lambda \delta_{\alpha\beta}}{2\lambda + 2\mu} \ddot{\tilde{\sigma}}_{rr} + 2\mu \mathcal{D}_0 \square_2^2 T \delta_{\alpha\beta} = 0$$

$$(1.4) \quad \square_2^2 \left\{ \square_1^2 \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} - \mathcal{D}_0 [2\mu (T_{,\alpha\beta} - T_{,\mu\mu} \delta_{\alpha\beta}) + c \ddot{T} \delta_{\alpha\beta}] \right\} = 0$$

gdzie  $x \in D, \quad 0 < t < \infty$

c/ Uogólniony płaski stan naprężenia

$$(1.5) \quad \square_2^2 \overline{\sigma}_{\alpha\beta} + \overline{\sigma}_{rr,\alpha\beta} + \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{\lambda \overline{\sigma}_{rr}}{3\lambda + 2\mu} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \overline{\mathcal{D}}_0 \square_2^2 T \delta_{\alpha\beta} = 0$$

$$(1.6) \quad \square_2^2 \left\{ \square_1^2 \overline{\sigma}_{\alpha\beta} - \overline{\mathcal{D}}_0 [2\mu (T_{,\alpha\beta} - T_{,\mu\mu} \delta_{\alpha\beta}) + c \ddot{T} \delta_{\alpha\beta}] \right\} = 0$$

W ostatnich równaniach, które muszą być również spełnione dla

każdego  $x \in D$  i  $0 < t < \infty$  oznaczyliśmy

$$\bar{\sigma}_i^2 = \bar{\nu}^2 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\lambda + 2\mu}{4\lambda + 4\mu}, \quad \bar{\nu}_0 = \frac{3\lambda + 2\mu}{2\lambda + 2\mu} \alpha_t$$

Dowód konieczności otrzymanych związków (1.1) - (1.6) przeprowadzamy podobnie jak dowód twierdzenia (3.1)/Rozdział I/, gdzie r-a Duhamela-Neumana winny być użyte w miejsce izotermicznych r-a Hooke'a.

Otrzymane r-a dostarczają ogólnych informacji dotyczących tensorów  $\tilde{\sigma}_{ij}$  /  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ . Jednakże nie są one warunkami wystarczającymi do rozwiązania ogólnego, naprężeniowego zagadnienia brzegowego nawet wtedy, jeśli odpowiednie początkowe i brzegowe warunki są zadane. Podajemy niżej jakie naprężeniowe początkowo-brzegowe zagadnienia są sformułowane poprawnie.

I : Znaleźć tensor  $\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(x, t)$ ,  $x \in V$ ,  $0 < t < \infty$   
 taki, że

$$(1.7) \quad \tilde{\sigma}_{ij}(x, 0) = \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}(x, 0) = 0 \quad x \in V$$

$$(1.8) \quad \tilde{\sigma}_{ij}(x, t) \eta_j(x) = 0 \quad x \in B, 0 < t < \infty$$

$$(1.9) \quad \frac{1}{c^2} \left[ \ddot{\tilde{\sigma}}_{ij}(x, t) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \ddot{\tilde{\sigma}}_{kk}(x, t) \right] + 2\alpha_t \mathcal{C} \ddot{T} \delta_{ij} - \tilde{\sigma}_{ik,kj}(x, t) - \tilde{\sigma}_{jk,ki}(x, t) = 0, \quad x \in V, 0 < t < \infty.$$

II : Znaleźć tensor  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(x, t)$ ,  $x \in D$ ,  $0 < t < \infty$ ,  
 który spełnia układ związków :

$$(1.10) \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, 0) = \dot{\bar{\sigma}}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, 0) = 0, \quad x \in D$$

$$(1.11) \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, t) \eta_p(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < \infty$$

$$(1.12) \quad \frac{1}{c^2} \left[ \ddot{\bar{\sigma}}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, t) - \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu} \ddot{\bar{\sigma}}_{rr}^{\sim}(x, t) \right] + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \alpha_t \rho \ddot{T} \delta_{\alpha\beta}^{\sim} - \\ - \bar{\sigma}_{\alpha\gamma, \delta\beta}^{\sim}(x, t) - \bar{\sigma}_{\beta\gamma, \delta\alpha}^{\sim}(x, t) = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t < \infty$$

III  $\bar{\sigma}$  : Znaleźć tensor  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim} = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, t)$  w obszarze  $D$  i dla  $0 < t < \infty$  taki, że :

$$(1.13) \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, 0) = \dot{\bar{\sigma}}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, 0) = 0, \quad x \in D$$

$$(1.14) \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, t) \eta_p(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < \infty$$

$$(1.15) \quad \frac{1}{c^2} \left[ \ddot{\bar{\sigma}}_{\alpha\beta}^{\sim}(x, t) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \ddot{\bar{\sigma}}_{rr}^{\sim}(x, t) \right] + 2\alpha_t \rho \ddot{T} \delta_{\alpha\beta}^{\sim} - \\ - \bar{\sigma}_{\alpha\gamma, \delta\beta}^{\sim}(x, t) - \bar{\sigma}_{\beta\gamma, \delta\alpha}^{\sim}(x, t) = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t < \infty$$

Poprawność sformułowań I, II, III rozumiemy tutaj w sensie poprawności zagadnień brzegowych teorii r-n cząstkowych, na które się składają a/ istnienie rozwiązania b/ jednoznaczność c/ ciągła zależność rozwiązania od warunków początkowych i brzegowych /2 rozwiązania tego samego r-a tensorowego (1.9) różnią się małe



od siebie, gdy małe się różnią warunki (1.7) oraz (1.8) od jednorodnych /. Poprawność odpowiednich sformułowań wynika z rozważań rozdziału I i związków Duhamela-Neumana jakie przyjmuje się w klasycznej termosprężystości.

Warunki konieczne (1.1) - (1.6) mogą być pożyteczne przy rozwiązywaniu problemów I - III, które właśnie sformułowaliśmy. Zgodnie z równaniami (1.2), (1.4), (1.6) następujące tensory mogą być szczególnymi rozwiązaniami dynamicznej termosprężystości

$$(1.16) \quad \sigma_{ij}^k = \mathcal{D}_0 \square_1^{-2} [2\mu (T_{ij} - T_{ss} \delta_{ij}) + \rho \ddot{T} \delta_{ij}]$$

$$(1.17) \quad \sigma_{\alpha\beta}^k = \mathcal{D}_0 \square_1^{-2} [2\mu (T_{\alpha\beta} - T_{rr} \delta_{\alpha\beta}) + \rho \ddot{T} \delta_{\alpha\beta}]$$

$$(1.18) \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^k = \bar{\mathcal{D}}_0 \bar{\square}_1^{-2} [2\mu (T_{\alpha\beta} - T_{rr} \delta_{\alpha\beta}) + \rho \ddot{T} \delta_{\alpha\beta}]$$

gdzie  $\square_1^{-2}$  oraz  $\bar{\square}_1^{-2}$  oznaczają odpowiednie operatory odwrotne do operatorów falowych  $\square_1^2$  oraz  $\bar{\square}_1^2$ . Zauważmy, że (1.16) - (1.18) wskazują na to jak w sposób jawny zależy tensor naprężeń od funkcji temperatury. Bezpośrednie podstawienie r-ń (1.16), (1.17) oraz (1.18) do r-ń (1.9), (1.12) oraz (1.15) odpowiednio pokazuje, że  $\sigma_{ij}^k$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^k$ ,  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^k$  spełniają także wystarczające r-ą tensory zatem reprezentują one szczególne rozwiązania dynamicznej termosprężystości.<sup>1</sup> Jeśli np. chcemy rozwiązać problem I<sub>σ</sub>, to

<sup>1</sup> Szczególne rozwiązania naprężeniowe (1.16) - (1.18) stanowią pewien odpowiednik tzw. potencjalnych rozwiązań w termosprężystości. Dla przykładu patrz [17] oraz [18].

piszemy:  $\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}^k + \tilde{\sigma}_{ij}^g$  gdzie  $\tilde{\sigma}_{ij}^g$  spełnia pewne niejednorodne warunki brzegowe, lecz jednorodne naprężeniowe r-a (1.9) oraz jednorodne warunki początkowe.

Nie będziemy tutaj dyskutować ekonomii ostatniej procedury, która wydaje się być cośkolwiek dłuższa niż analiza metodą przemieszczeniową. Pokażemy jedynie pewien przykład dotyczący zagadnienia III aby zilustrować, jak to zagadnienie może być zastąpione tzw. naturalnym naprężeniowym problemem brzegowym.

Przykład:

Znaleźć tensor  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ , który spełnia III, jeśli obszar  $D$  jest opisany nierównościami  $|x_1| < \infty$ ,  $|x_2| < h < \infty$

Wydaje się, że jedną z najbardziej naturalnych metod rozwiązania tego przykładu jest metoda transformacji całkowych [19].

Przyjmując wz. (1.18) jako całkę szczególną jest widoczne, że jedynym układem r-a, który pozostanie do dyskusji będą trzy jednorodne r-a (1.15) /  $T=0$ /. Stosując do (1.15) kolejno transformację Laplace'a i potęgi Fouriera zdefiniowane związkami

$$(1.19) \quad f^*(x_1, x_2; p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(x_1, x_2; t) dt$$

$$(1.20) \quad \hat{g}(x_1, x_2; p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 x_1} g^*(x_1, x_2; p) dx_1$$

zauważamy, że składowa  $\tilde{\sigma}_{11}^g$  może być wyeliminowana z rozważań i otrzymujemy dwa zwyczajne r-a różniczkowe określające składowe

$\hat{\sigma}_{22}^{\vartheta}$  oraz  $\hat{\sigma}_{12}^{\vartheta}$  <sup>42</sup> :

$$(1.21) \quad \begin{aligned} & [\alpha_0 \hat{\omega} (D^2 - \mu_1^2) + (1 - \hat{\omega}) D^2] \hat{\sigma}_{22}^{\vartheta} - i \frac{\xi}{1} D \hat{\sigma}_{12}^{\vartheta} = 0 \\ & (D^2 - \mu_2^2) [(1 - \hat{\omega}) D \hat{\sigma}_{22}^{\vartheta} - i \frac{\xi}{1} \hat{\sigma}_{12}^{\vartheta}] = 0 \end{aligned}$$

Warunki brzegowe w przetransferowanym obszarze przyjmują prostą postać

$$(1.22) \quad \left( \hat{\sigma}_{22}^{\vartheta} + \hat{\sigma}_{22}^{\kappa} \right)_{x_2 = \pm h} = 0, \quad \left( \hat{\sigma}_{12}^{\vartheta} + \hat{\sigma}_{12}^{\kappa} \right)_{x_2 = \pm h} = 0$$

Dla układu (1.21) przyjęliśmy oznaczenia

$$\begin{aligned} D &= \frac{d}{dx_2}, \quad \bar{k}_1^2 = \frac{b^2}{c_1^2}, \quad k_2^2 = \frac{b^2}{c_2^2}, \quad \hat{\omega} = \frac{k_2^2/2}{\xi_1^2 + k_2^2/2}, \\ \mu_1 &= \sqrt{\xi_1^2 + \bar{k}_1^2}, \quad \mu_2 = \sqrt{\xi_1^2 + k_2^2}, \quad \alpha_0 = \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \end{aligned}$$

Zagadnienie brzegowe opisane układem (1.21) oraz warunkami brzegowymi (1.22) stanowi tzw. naturalne naprężeniowe zagadnienie brzegowe, dla tych składowych tensora naprężenia, które są zadane na brzegu.

Zwracamy tutaj uwagę na fakt, że drugie r-e układu (1.21) jest trzeciego rzędu względem  $x_2$ , na ekoliczność, która nie pojawia się w przemieszczeniowym traktowaniu rozważanego problemu.

Również w metodzie przemieszczeniowej, przy konwencjonalnym rozbięciu wektora przemieszczenia na część potencjalną i rotacyjną, lub przy użyciu każdej innej metody dynamicznych funkcji przemieszczeń warunki brzegowe będą zawierać odpowiednio wysocki

rzęd funkcji naprężeń.

Jest też widoczne, że układ (1.21) może być użyty do rozwiązania ogólnego dynamicznego zagadnienia naprężeniowego w obszarze pasma tarczowego, jeśli dowolne powierzchniowe obciążenie jest zadane na brzegu.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Redukujemy układ (1.21) do postaci:

$$i\frac{F}{\mu_2} \hat{\sigma}_{12}^2 \hat{\varphi} = D [\alpha_0 \hat{\omega} (D^2 - \mu_1^2) + (1 - \hat{\omega}) \mu_2^2] \hat{\sigma}_{22}^2 \hat{\varphi}$$

gdzie  $(D^2 - \mu_1^2)(D^2 - \mu_2^2) \hat{\sigma}_{22}^2 \hat{\varphi} = 0$

oraz  $\hat{\sigma}_{11}^2 \hat{\varphi}$  jest dane związkami

$$\left(\frac{F}{\mu_1} + k_2/2\right) \hat{\sigma}_{11}^2 \hat{\varphi} = - (D^2 - \mu_2^2) \hat{\sigma}_{22}^2 \hat{\varphi}$$

## L i t e r a t u r a

- [1] ,I.S.Sokolnikoff,Mathematical theory of elasticity.Sec.Edit.  
New York,Toronto,Londen 1956.
- [2] ,M.Iacovache,Asupra Relațiilor dintre tensiuni intrun corp  
elastic in miscare,Acad.R.P.R.,Bull.Stuatific,t.II,(1950)  
Nr.9 p.699.
- [3] ,V.Vâlcovici,Suma les relations entre les tensions,Com.Acad.  
R.P.Romane,1,(1951) p.337-339.
- [4] ,C.A.Truesdell,An opinion on Vâlcovici's [3] paper ,Math.  
Rev.Vol.17,Nr 4 ,1956,p.428.
- [5] ,J.Ignaczak ,Direct determination of stresses from the stress  
equations of motion in elasticity,Arch.Mech.Stes. 9,Nr.5,  
(1959).
- [6] ,P.P.Teodorescu,K prostranstwiennej zadaczie elastodinamiki,  
Acad.R.P.Romane.Rev.Mec.Appl.t.4,Nr.2,(1961).
- [7] ,J.R.M.Radok,On the solution of problems of dynamic plane  
elasticity,Quart.Appl.Math.14,289, (1956) .
- [8] ,P.P.Teodorescu,Asupra unei metode generale de rezolvare a  
problemei plane a elastodinamicii,Com.Acad.R.P.R. , (1956) ,  
6 ,6, p.795.
- [9] ,W.Newacki,On the treatment of the two-dimensional coupled  
thermoelastic problems in terms of stresses.Bull.Acad.Polon.  
Sci.s.tech.3,9, (1961) p.159 .
- [10] ,B.A.Beley and J.H.Weiner,Theory of thermal stresses,  
John Wiley and Sons,Inc.1960 p.92 .

- [11] ,C.E.Pearson, Theoretical elasticity, Cambridge, Massachusetts, 1959 ,p.86-88.
- [12] ,I.N.Snedden and D.S.Berry, The classical theory of elasticity. Handbuch der Physik, B.VI. Springer-Verlag 1958 ,p.118.
- [13] ,Ewing, W.M., Jardetzky, W.S., Press, I., Elastic waves in layered media, New York, 1957.
- [14] ,Kolsky, H., Stress waves in solids , Oxford , 1953 .
- [15] ,Semmerfeld A., Mechanics of deformable bodies, New York, N.Y. 1950 .
- [16] ,Zveliński N.V. Rayleigh's waves in an inhomogeneous elastic half-space of special type. Izvest. Akad. Nauk S.S.S.R. Ser. geograph. i geophys. vol.9, Nr.3, pp.261-278, (1945) /in Russian/
- [17] ,H.Parkus , "Instationäre Warmespannungen", Springer, Wien 1959 .
- [18] , W.Nowacki , Thermoelasticity, Pergamon Press, 1963 .
- [19] ,I.N.Snedden , Fourier Transforms, Mc Graw Hill, New York 1951 .
- [20] ,J.Ignaczak , A completeness problem for stress-equations of motion in the linear elasticity theory, Arch. Mech. Stos. Nr.2 (1963) .
- [21] ,J.Ignaczak, Rayleigh waves in a nonhomogeneous isotropic elastic semi-space, Part I, Arch. Mech. Stos. Nr.3 (1963) .
- [22] ,J.Ignaczak , On the stress-equations of motion in the linear thermoelasticity/praca złożona do publikacji/.

