



KRZYSZTOF P. MRÓZ

**PROPAGACJA SZCZELINY ZMĘCZENIOWEJ
W BIMATERIALE:
MODEL MATEMATYCZNY I ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE.**

W A R S Z A W A 2 0 0 8

Promotor :

Doc. dr hab. KRZYSZTOF DOLIŃSKI

P r a c a d o k t o r s k a

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Badania, których wynikiem jest przedkładana praca, były prowadzone w ramach projektu Sieć Doskonałości „Materiały wieloskładnikowe oparte na wiedzy” (Network of Excellence on Knowledge-based Multicomponent Materials – KMM-NoE) finansowanego w 6. Programie Ramowym Komisji Europejskiej (kontrakt NMP3-CT-2004-502243).

Spis treści

1. Wstęp	7
1.1. Cel pracy, jej istota i uzasadnienie podjęcia problemu	8
1.2. Istniejący stan wiedzy w zakresie tematu badań	8
1.3. Metodyka badań	10
2. Mechanika pękania: szczelina w złożonym stanie naprężenia	13
2.1. Osobliwa natura naprężenia w pobliżu szczeliny	13
2.2. Pole naprężenia	15
2.2.1. Sformułowania podstawowe teorii sprężystości	15
2.2.2. Dwu-osioowy stan obciążenia	19
2.3. Współczynniki intensywności naprężeń.	23
2.3.1. Metody analityczne.	23
2.3.2. Metody numeryczne.	25
2.4. Wprowadzenie do Metody Osobliwych Równań Całkowych typu Cauchy’ego. . .	26
2.4.1. Dyslokacje	26
2.4.2. Sformułowanie problemów	27
2.4.3. Numeryczne rozwiązanie równań całkowych osobliwych	31
2.5. Funkcje Airy’ego dla pojedynczych dyslokacji	33
2.5.1. Dla sferycznej inkluzji	33
2.5.2. W okolicy prostoliniowego interfejsu	35
2.5.3. Dyslokacja w prostoliniowym interfejsie	36
2.6. Pole naprężenia od pojedynczej dyslokacji. Funkcje Greena.	37
2.6.1. W sąsiedztwie sferycznej inkluzji	37
2.6.2. W sąsiedztwie prostoliniowego interfejsu	39
2.6.3. W prostoliniowym interfejsie	40
2.7. Zastosowanie metody	41
2.7.1. Sferyczna inkluzja i dowolnie zorientowana szczelina prostoliniowa	44
2.7.2. Prostoliniowy interfejs i dowolnie zorientowana szczelina	47
2.7.3. Ogólne sformułowania dla szczelin	49
2.8. Szczeliny w bimateriale.	53
2.8.1. Wstęp	53
2.8.2. Idealne połączenie materiałów	53
2.8.3. Rzeczywiste połączenie materiałów	62
2.9. Wyznaczenie WIN oraz składowej T	64
2.9.1. Współczynniki intensywności naprężeń	64
2.9.2. Obliczanie składowej T	67
2.10. Strefa plastyczna w otoczeniu wierzchołka szczeliny	71
2.10.1. Model Irwina	72
2.10.2. Model Dugdale’a	73
2.10.3. Przemieszczenie wierzchołka szczeliny	75

2.11. Rezultaty dla wybranych konfiguracji szczeliny i interfejsu	76
3. Szczelina zmęczeniowa w złożonym stanie naprężenia.	89
3.1. Podstawy teorii zmęczenia materiałów	89
3.1.1. Naprężenia zmienne	89
3.1.2. Strefa plastyczna podczas obciążenia cyklicznego	92
3.2. Kryteria określające kierunek wzrostu szczeliny zmęczeniowej	93
3.2.1. Kryterium maksymalnych naprężenia obwodowych, 1963, (MNO).	94
3.2.2. Kryterium gęstości energii odkształcenia, 1973–1974, (S).	95
3.2.3. Kryterium współczynnika uwalniania energii, 1974, (G).	96
3.2.4. J –kryterium, 1975.	97
3.2.5. Kryterium maksymalnego odkształcenia obwodowego, 1981, (MOO).	97
3.2.6. T –kryterium, 1982.	98
3.2.7. Det –kryterium, 1987.	99
3.2.8. Kryterium maksymalnego współczynnika obwodowego naprężenia i odkształcenia, 1989, (MWON, MWOO).	100
3.2.9. Kryterium wektora wierzchołkowego przemieszczenia szczeliny, 1989, (CTD).	102
3.2.10. Kryterium Nielokalnego Naprężeniowego Kruchej Pęknięcia, 1995, (NNKP).	102
3.2.11. W –kryterium, 2000	103
3.2.12. Podsumowanie	103
3.3. Prędkość wzrostu szczeliny	104
3.3.1. Wstęp	104
3.3.2. Złożone pole naprężenia	107
3.4. Propagacja szczeliny zmęczeniowej	109
3.5. MK – Kryterium – propozycja	111
3.5.1. Kierunek wzrostu szczeliny. Obciążenie monotoniczne.	120
3.5.2. Kierunek wzrostu szczeliny. Obciążenie cykliczne.	123
3.5.3. Prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej.	124
3.6. Szczelina zmęczeniowa w bimateryale	128
3.6.1. Proponowany model interfejsu	128
3.6.2. Rezultaty symulacji numerycznej	130
4. Zakończenie.	135
Bibliografia	139

Rozdział 1

Wstęp

Praca dotyczy płaskiego zagadnienia wzrostu szczeliny zmęczeniowej w bimateryale powstałym na skutek idealnego zespolenia dwóch materiałów sprężystych. Celem jest uzyskanie efektywnej metody umożliwiającej określenie wzrostu takiej szczeliny, dowolnie usytuowanej w bimateryale. W pracy zostanie przedstawiona adekwatna metoda oraz efektywny algorytm umożliwiający symulację komputerową propagacji szczeliny zmęczeniowej w bimateryale. Zadanie takie nie było dotychczas rozpatrywane w literaturze światowej. Opracowana metoda polega na zaadaptowaniu istniejących modeli matematycznych rozwijanych w ramach mechaniki pęknięcia i dających podstawy wyznaczania współczynników intensywności naprężenia (WIN) dla szczelin w bimateryale oraz składowej T (ang.: T -stress) będącej częścią wyrażen określających pole naprężenia w sąsiedztwie wierzchołka szczeliny. Do tego celu wykorzystana będzie Metoda Osobliwych Równań Całkowych typu Cauchy'ego, w której zastosowany zostanie dyslokacyjny model szczeliny. Pole naprężenia wokół jej wierzchołków wyznaczane będzie za pomocą funkcji Greena odpowiadającej wpływowi dyslokacji krawędziowych umieszczonych w bimateryale reprezentujących szczelinę. Wynikające z metody osobliwe równania całkowe będą rozwiązane numerycznie. Pozwala to ocenić dla każdego kolejnego cyklu obciążenia kierunek propagacji i przyrost długości szczeliny dowolnie ukształtowanej w wyniku procesu zmęczeniowego. Do ich określenia zaproponowano nowe kryterium określające kierunek wzrostu szczeliny (**MK** – kryterium), bazujące na podziale gęstości energii odkształcenia w na jej część postaciową T_D i objętościową T_V . Kierunek pęknięcia określa największa wartość ilorazu $\frac{T_V}{T_D}$ na granicy wprowadzonego tu obszaru dekohezji wyznaczonym przez warunek $T_V = \text{const.}$ Kryterium to zweryfikowano również pozytywnie w przypadku obciążenia monotonicznego. Przyrost zmęczeniowy szczeliny określa prawo wzrostu wykorzystujące iloczyn zmiany długości strefy dekohezji na kierunku pęknięcia i części postaciowej gęstości energii odkształcenia $\frac{da}{dN} = C[\Delta(T_D \cdot r(T_V^{\text{const.}}))]^n$, gdzie C , n oznaczają stałe zmęczeniowe zależne od materiału.

1.1. Cel pracy, jej istota i uzasadnienie podjęcia problemu

Materiały kompozytowe znajdują obecnie coraz szersze zastosowanie w konstrukcjach inżynierskich. Wykorzystywane są one do produkcji elementów samolotów, pojazdów kosmicznych, samochodów, podzespołów elektronicznych, gdzie często narażone są na obciążenia cykliczne. W trakcie procesów produkcji trudno jest jednak wyeliminować powstawanie defektów (np. w interfejsie), które rozwijając się pod wpływem zmiennych w czasie obciążeń eksploatacyjnych tworzą pęknięcia prowadzące do zmęczeniowego zniszczenia konstrukcji. Umiejętność oszacowania czasu do zniszczenia zmęczeniowego elementu konstrukcji jest konieczna dla zagwarantowania odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa, a właściwy dobór materiałów i technologii wytwarzania pozwala podwyższyć niezawodność całej konstrukcji. Jednym z przykładów kompozytu jest bimateriał. Możliwość opisu wzrostu szczeliny zmęczeniowej w bimateriale, a w szczególności w otoczeniu połączenia dwóch materiałów (interfejsu) jest kluczowa dla modelowania tego zjawiska w bardziej złożonych materiałach kompozytowych. W pracy rozważony będzie problem wzrostu szczeliny pod wpływem obciążeń cyklicznych umieszczonej w bimateriale, czyli w elemencie złożonym z dwóch idealnie połączonych materiałów sprężystych o różnych stałych materiałowych i nieskończenie dużych rozmiarach. Rozważany będzie przypadek płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia. Proponowane podejście może być wykorzystane do rozwiązania problemu propagacji szczeliny zmęczeniowej dla innych konfiguracji interfejsu oraz zjawiska zmęczenia bardziej złożonych materiałów kompozytowych. Uzyskane wyniki symulacji komputerowej będą porównane z wynikami eksperymentów dostępnych w literaturze dla materiałów jednorodnych. Natomiast wyników modelowania, jak i rezultatów eksperymentów dla bimateriałów brak jest w dostępnej literaturze światowej. Algorytm numeryczny będzie zaimplementowany w pakiecie MatLab.

1.2. Istniejący stan wiedzy w zakresie tematu badań

Podstawą zaproponowanej metody modelowania zmęczeniowego wzrostu szczeliny jest mechanika pękania, której zastosowanie dla bimateriałów datuje się pod koniec lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku. W przypadku bimateriałów złożoność problemu wynika z różnych właściwości połączonych materiałów i obecności interfejsu, a tym samym istnieniu lokalnych naprężenia ścinających w jego sąsiedztwie, nawet w przypadku czystego rozciągania. Umieszczenie w okolicy interfejsu szczeliny, inaczej niż w przypadku materiału jednorodnego, powoduje że jest ona obciążona w sposób mieszany (ang.: mixed-mode loading), w wyniku czego warunki wzrostu szczeliny są również mieszane (ang.: mixed mode conditions). W literaturze można spotkać wiele kryteriów określających kierunek wzrostu szczeliny w takich przypadkach. Do najbardziej rozpowszechnionych pomimo częstych relacji o ich niedostateczności w określaniu kierunku propagacji należą: kryterium maksymalnego naprężenia stycznego oraz minimum gęstości energii odkształcenia. Dotychczas badacze poświęcili wiele wysiłku na modelowanie propagacji szczeliny umieszczonej w interfejsie. Jest to bardzo ważny problem praktyczny, gdyż podczas wytwarzania materiałów kompozytowych połączenia dwóch materiałów nie zawsze są wolne od uszkodzeń. Wówczas interfejs może stać się źródłem defektów, które podczas eksploatacji mogą doprowadzić do awarii. Bardzo często zakłada się [71], [74], [75], iż interfejs jest idealny, bez fazy przejściowej, tzn. jest wyraźną granicą między materiałami składowymi kompozytu. W wyniku takiego założenia, w przypadku istnienia szczeliny w interfejsie, mate-

matyczne rozwiązanie dla pola naprężenia jest zespolone, ma postać oscylacyjną i jest z natury swojej niefizyczne. Aby temu zaradzić niektórzy autorzy proponują wprowadzenie dodatkowej trzeciej fazy, która jest materiałem przejściowym, [81]. Kierunek propagacji szczeliny jest tu często determinowany wzdłuż płaszczyzny maksymalnego naprężenia obwodowego, $\sigma_{\theta\theta}$, wokół wierzchołka szczeliny. W [82], [83], [84] kąt rozwoju szczeliny jest określany przy użyciu wyrażeń na energię odkształcenia. Generalnie, prace te wskazują, że szczelina w interfejsie propaguje się w kierunku materiału bardziej podatnego, natomiast w przypadku szczeliny dłuższej z rozgałęzieniem oraz podczas jej dalszego wzrostu pojawia się zjawisko powrotu w kierunku interfejsu. Problem szczeliny umieszczonej w jednym z zespolonych materiałów i zbliżającej się lub stykającej się z interfejsem był rozważany w [85]. Badano tam problem zatrzymywania się procesu propagacji szczeliny w interfejsie oraz zmianę kierunku propagacji przy zbliżaniu się do interfejsu. Osobliwość pola naprężenia na wierzchołku szczeliny jest tu stopnia $r^{-\lambda}$, gdzie eksponent λ zależy od orientacji szczeliny w stosunku do interfejsu, jak również od parametrów bisprężystych. Efekt sprężysto-plastyczny wokół wierzchołka szczeliny w interfejsie był szczegółowo dyskutowany w [86]–[88] ukazując o wiele większą intensywność pól mechanicznych w okolicy interfejsu niż ma to miejsce w materiale jednorodnym.

Mechaniczne aspekty propagacji szczeliny w interfejsie lub w jego sąsiedztwie wymienione powyżej mogły być wyjaśniane dzięki rozwojowi mechaniki pękania, w ramach której możemy określać m.in. współczynniki intensywności naprężeń niezbędne do określenia zmęczeniowego przyrostu szczeliny oraz kierunku jej propagacji. W przypadku szczeliny w bimateriale należy uwzględnić złożony stan naprężenia w równaniach na przyrost szczeliny zmęczeniowej. Wiele propozycji rozwiązań tego zagadnienia można znaleźć w literaturze [98], wśród nich najbardziej rozpowszechnionymi wydają się być te bazujące na efektywnym współczynniku intensywności naprężenia oraz współczynniku gęstości energii odkształcenia. W każdym przypadku jednak znajomość parametrów charakteryzujących naprężenie oraz odkształcenie w otoczeniu wierzchołka szczeliny jest konieczna do analizy wzrostu szczeliny zmęczeniowej. W serii artykułów Erdogan oraz jego współpracownicy konsekwentnie analizowali wpływ szczelin w bimateriale na pola naprężenia używając techniki superpozycji. Rozwiązanie to wyrażone jest jako suma dwóch rozwiązań: pierwsze (A) otrzymane dla danego zewnętrznego obciążenia i bimateriału bez szczeliny, oraz drugie (B1) otrzymane dla dwóch połączonych materiałów ze szczeliną, gdzie na powierzchnię szczeliny przyłożone jest naprężenie wynikające z rozwiązania problemu (A) wzdłuż umiejscowienia szczeliny (z przeciwnym zwrotem). Takie zagadnienie wymaga jednak rozważenia problemu (B2), czyli wpływu ciągłego rozkładu dyslokacji krawędziowych wzdłuż założonej lokalizacji szczeliny. Jednocześnie wymagana jest równoważność rozwiązania problemu B2 i B1, [102], czyli poszukiwany jest taki rozkład dyslokacji, który spełnia ten warunek równoważności. Wpływ dyslokacji krawędziowej może być określony za pomocą funkcji Greena właściwej dla bimateriału. W wyniku tego otrzymuje się równania całkowite osobliwe typu Cauchego.

Powyższy przegląd literatury ukazuje dość bogatą wiedzę uzyskaną w ramach mechaniki pękania w bimateriałach. Brak jest jednak pozycji opisujących propagację szczeliny zmęczeniowej. Pomimo tego, iż w kilku artykułach [103]–[106] można znaleźć wyniki doświadczalne zachowania się takiej szczeliny, to teoretyczne rozważania ograniczają się do szczeliny w interfejsie i w zasadzie nie podają żadnej efektywnej metody do określenia ścieżki, kierunku i wielkości ewentualnego przyrostu szczeliny zależnej od cyklicznego obciążenia. Modelowanie zjawiska wzrostu zmęczeniowej szczeliny w tego typu materiale

wydaże się więc problemem otwartym, na który, przynajmniej w pewnym zakresie, może dać odpowiedź niniejsza praca. Dodać należy, że nawet modelowanie wzrostu szczeliny w materiale jednorodnym jest źródłem wielu problemów, które nie są do końca rozwiązane.

Należy również zwrócić uwagę, że kierunek wzrostu szczeliny zmęczeniowej umieszczonej w złożonym stanie naprężenia, w większości przypadków różni się od kierunku propagacji szczeliny pod wpływem obciążenia monotonicznego [127], czego w zasadzie żadne kryterium nie uwzględnia. Jednakże powstająca różnica zmniejsza się sukcesywnie wraz z rozwijającą się szczeliną, co związane jest z malejącym udziałem modu II w rozwiązaniu. Natomiast znacznie ważniejszym problemem wydaje się możliwość rzeczywistego określenia przyrostu szczeliny, która w warunkach złożonego stanu naprężenia zachowuje się inaczej niż ma to miejsce w przypadku klasycznie rozważanej szczeliny, prostopadłej do jednoosiowego obciążenia. Obecnie w literaturze istnieją wyrażenia określające wzrost takiej szczeliny, ale nie są one uniwersalne, głównie bazują na kilku efektywnych parametrach. W pracy podana będzie propozycja prawa określającego zarówno wzrost szczeliny, jak i kierunek jej wzrostu uwzględniający złożony stan naprężenia. W tym celu uwzględniony zostanie również stały człon T , którego wpływ może być kluczowy szczególnie w przypadku dwuosiowego obciążenia, a bywa zwykle pomijany w licznych pracach.

1.3. Metodyka badań

Mimo tego, że w literaturze istnieją modele matematyczne dające teoretycznie możliwość określenia współczynników intensywności naprężenia dla dowolnie usytuowanej szczeliny w bimateryale, to efektywne rozwiązania ograniczają się do kilku specyficznych, dość elementarnych konfiguracji geometrycznych szczeliny względem interfejsu. Celem pracy jest zaadaptowanie istniejących modeli teoretycznych i zaproponowanie efektywnej procedury numerycznej obliczania współczynników intensywności naprężenia oraz składowej T dla dowolnie zaawansowanej i ukształtowanej w procesie zmęczeniowym szczeliny. Do tego celu wykorzystany będzie jako model wyjściowy dyslokacyjny model szczeliny, bazujący na pracach Erdogana np. [59] i jego współpracowników, w którym pole naprężenia wokół wierzchołków wyznaczane jest za pomocą funkcji Greena odpowiadającej wpływowi dyslokacji krawędziowych reprezentujących szczelinę. Adekwatna i umożliwiająca rozwiązanie funkcja Greena będzie zaadoptowana dla bimateryału z pracy Dundursa & Mury [57]. Wynikające z tego osobliwe równania całkowe będą rozwiązywane numerycznie za pomocą proponowanego w pracy algorytmu. W sytuacji szczeliny nie prostoliniowej lub będącej w kontakcie z interfejsem rozwiązanie zawiera inne stopnie osobliwości niż $-(\frac{1}{2})$ jak to ma miejsce w przypadku szczeliny prostoliniowej w materiale jednorodnym, również zespolone. Stopnie osobliwości zależą ogólnie od dodatkowych warunków brzegowych, tj. konfiguracji szczeliny oraz położenia jej wierzchołków, jak również od stałych materiałowych. Powstały układ osobliwych równań całkowych będzie rozwiązywany numerycznie za pomocą metody Gaussa-Chebyshewa, w której układ równań całkowych redukuje się do układu równań liniowych. W rozwiązaniu wykorzystane zostanie podejście oparte na odpowiedniej dyskretyzacji równań całkowych co pozwoli na otrzymanie efektywnego algorytmu dla określenia kierunku i przyrostu szczeliny zmęczeniowej na poszczególnych cyklach obciążenia. Wynikiem tego będzie rozwiązanie problemu trwałości zmęczeniowej elementu z bimateryału, osłabionego defektem w postaci początkowej szczeliny (możliwy jest również rozwój algorytmu dla symulacji wzrostu dowolnej liczby początkowych szcze-

lin). Metoda zostanie zweryfikowana poprzez porównanie z wynikami eksperymentów i symulacji dla materiału jednorodnego. Dla przypadku bimateriału przedstawione zostaną wyniki symulacji numerycznej.

Rozdział 2

Mechanika pękania: szczelina w złożonym stanie naprężenia

2.1. Osobliwa natura naprężenia w pobliżu szczeliny

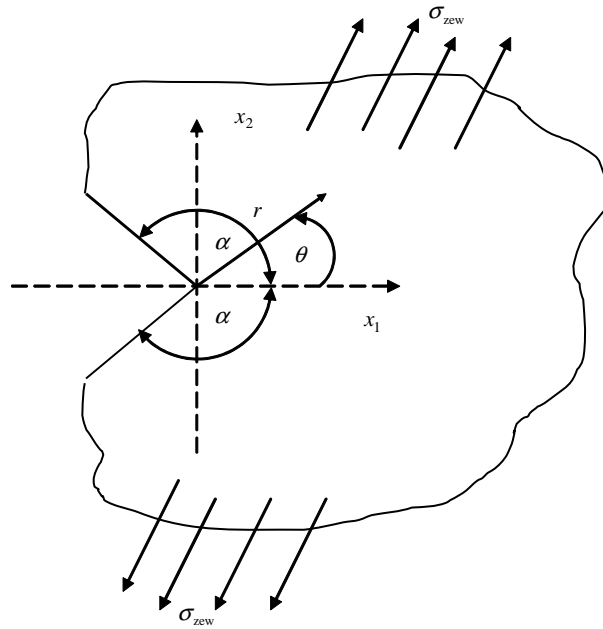
Wszyscy inżynierowie intuicyjnie wiedzą, że w otoczeniu nacięć lub ostro zakończonych wewnętrznych pustek powstaje koncentracja naprężenia pod działaniem np. obciążenia zewnętrznego. Dlatego też niekiedy w lotnictwie stosuje się technikę polegającą na rozwiercaniu ostro zakończonych wierzchołków szczelin co zmniejsza koncentrację naprężenia i w rezultacie spowalnia lub nawet zatrzymuje ich dalszy rozwój. Opierając się na rozwiązaniach liniowej teorii sprężystości (LTS) wartości naprężenia wraz ze zbliżaniem się do wierzchołka szczeliny zmierzają do nieskończoności co sprawia, że naprężenia stają się osobliwe. Jest to oczywiście fizycznie niemożliwe. Jednakże wynika to jedynie z zastosowanego rozwiązania LTS, które zakłada czysto sprężyste zachowanie materiału, gdy tymczasem w rzeczywistości materiał w sąsiedztwie wierzchołka szczeliny poddany jest dużym odkształceniom, którym dodatkowo towarzyszą liczne formy trwałych zmian struktury materiału. Pomimo tego, rozwiązanie oparte na koncepcji LTS dostarcza bardzo wiele użytecznych informacji, ponieważ charakteryzuje sprężyste pole odkształceń poza obszarem przywierzchołkowym i przez to, pośrednio, opisuje warunki panujące tuż przy wierzchołku szczeliny.

Jeśli rozważymy obszar bardzo blisko wierzchołka szczeliny, por. Rys. 2.1, to można spodziewać się w jego okolicy bardzo dużych wartości naprężenia dla $2\alpha > 180^\circ$. Powstaje również pytanie o stopień osobliwości pola naprężenia? Na to pytanie odpowiedział Williams [45]. Stwierdził on, że naprężenie w najbliższym sąsiedztwie wierzchołka karbu, por. Rys. 2.1, $r \rightarrow 0$, może być zapisane w postaci szeregu:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_k e_k r^{\lambda_k} f_k(\theta) = e_1 r^{\lambda_1} f_1(\theta) + e_2 r^{\lambda_2} f_2(\theta) + \dots \quad (2.1)$$

gdzie współczynniki e_k , funkcje f_k oraz eksponenty λ_k należy określić. Jeśli λ_k są wszystkie dodatnie, wówczas naprężenia na wierzchołku karbu wynoszą zero. W przypadku kiedy naprężenia są osobliwe, wówczas co najmniej jeden z λ_k jest ujemny, czyli $\sigma \rightarrow \infty$, gdy $r \rightarrow 0$. Następnie, jeśli $\lambda_1 < 0$ oraz założony zostanie warunek $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, to naprężenia w pobliżu wierzchołka podane przez wyrażenie (2.1) są zdominowane przez pierwszy człon:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) \approx e_1 r^{\lambda_1} f_1(\theta), \quad r \rightarrow 0. \quad (2.2)$$



RYSUNEK 2.1. Schemat karbu.

Następnie poprzez odpowiedni dobór funkcji, zwanej funkcją Airy'ego ($\chi = \chi(r, \theta)$), która poprzez różniczkowanie w układzie współrzędnych biegunowych definiuje składowe stanu naprężenia:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \chi) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\tag{2.3}$$

oraz wykorzystując warunki brzegowe, Williams otrzymuje następujące równania:

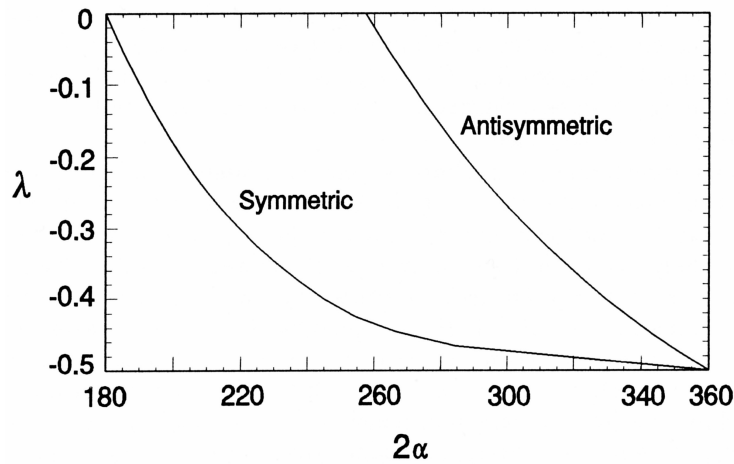
- dla symetrycznego obciążenia

$$(\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha = 0,\tag{2.4}$$

- dla antysymetrycznego obciążenia

$$(\lambda + 1) \sin 2\alpha - \sin 2(\lambda + 1)\alpha = 0.\tag{2.5}$$

Równania (2.4) i (2.5) mogą być łatwo rozwiązane dla uzyskania λ , przy określonej wartości α , por. Rys. 2.2. Jeśli rozwiązanie daje więcej niż jedną wartość λ , wówczas wybrać należy wartość najmniejszą. Jeśli wartość kąta wzrasta, stopień osobliwości również wzrasta, aż do osiągnięcia $\lambda = -\frac{1}{2}$ przy $2\alpha = 360^\circ$. Karb ten wówczas nazywany jest szczeliną.



RYSUNEK 2.2. Stopień osobliwości pola naprężenia.

2.2. Pole naprężenia

2.2.1. Sformułowania podstawowe teorii sprężystości

Składowe tensora naprężenia w trójwymiarowej przestrzeni x, y, z oznaczamy jako $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$. Dla płaskiego stanu naprężenia $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, zaś dla płaskiego stanu odkształcenia składowa odkształcenia $\epsilon_{zz} = 0$, z czego wynika, że $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$. Dla płaszczyzny równania równowagi (przy braku sił masowych) można wyrazić w następującej postaci:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (2.6)$$

Jeśli przemieszczenia w kierunkach x i y oznaczymy odpowiednio u i v , to odkształcenia wyrażą się jako:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Natomiast relacja między naprężeniem a odkształceniem w przypadku płaskiego stanu naprężenia jest postaci:

$$E\epsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}, \quad E\epsilon_{yy} = \sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}, \quad \mu\epsilon_{xy} = \sigma_{xy}, \quad (2.8)$$

a w przypadku płaskiego stanu odkształcenia wyraża się jako:

$$E\epsilon_{xx} = (1 - \nu^2) \left(\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{yy} \right), \quad E\epsilon_{yy} = (1 - \nu^2) \left(\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{xx} \right), \quad \mu\epsilon_{xy} = \sigma_{xy}, \quad (2.9)$$

gdzie, μ to moduł ścinania ($\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$), E - moduł Younga, ν - współczynnik Poissona. Równania równowagi (2.6) są automatycznie spełnione gdy:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \quad (2.10)$$

Funkcja χ jest funkcją naprężenia Airy'ego, a wyrażenia (2.10) opisują składowe tensora naprężenia podobnie jak (2.3) w układzie współrzędnych biegunowych. Podstawiając równania (2.7) i (2.10) do wyrażenia (2.8) oraz podwójnie różniczkując otrzymać można równanie biharmoniczne:

$$\nabla^4 \chi = 0 \text{ lub } \nabla^2(\nabla^2 \chi) = 0, \quad (2.11)$$

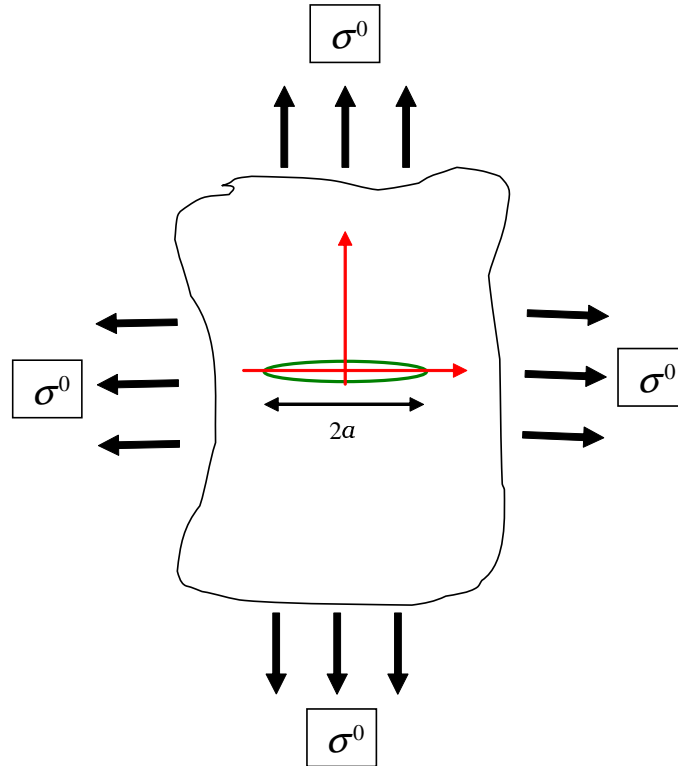
przy czym

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{ dla układu współrzędnych kartezjańskich,}$$

lub

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \text{ dla układu współrzędnych biegunowych.}$$

Generalnie, funkcja Airy'ego χ pełni bardzo ważną rolę w zagadnieniach płaskich, w szczególności w przypadku płaskich elementów ze szczelinami lub krawędziami. Jednakże jej wyznaczenie wymaga dużego doświadczenia. Musi ona spełniać równanie biharmoniczne (2.11), jak i również składowe tensora naprężenia uzyskane na podstawie np. (2.10) muszą być zgodne z warunkami brzegowymi problemu.



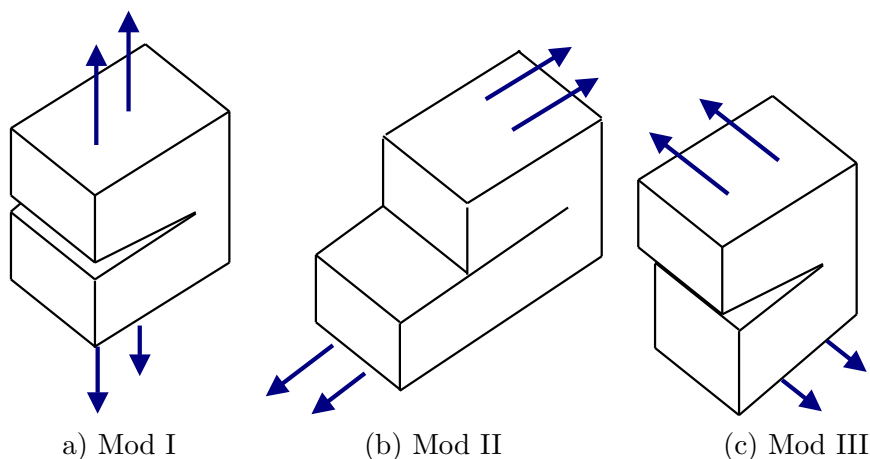
RYSUNEK 2.3. Konfiguracja szczeliny i obciążenia dla I modu obciążenia.

Przypadek prostoliniowej szczeliny umieszczonej w nieskończenie dużej płycie i obciążonej jak na Rys. (2.3) analizował Westergaard [46]. Podał rozwiązanie, uznawane za klasyczne, uzyskane poprzez zastosowanie odpowiedniej funkcji naprężenia. Wynikiem są składowe tensora naprężenia podane w Tabeli 2.1 dla I modu obciążenia. W oryginalnym rozwiązaniu zamiast K_I zastosowane jest wyrażenie $\sigma\sqrt{\pi a}$. Współczynnik K_I jest nazywany współczynnikiem intensywności naprężenia (WIN), a indeks określa sposób

obciążenia. Ponieważ w praktyce pola naprężenia bywają często bardzo złożone, wprowadzono w terminologii liniowo-sprężystej mechaniki pęknięcia trzy podstawowe sposoby (mody) obciążenia szczeliny, a co za tym idzie trzy sposoby deformacji:

- Mod I – pierwszy sposób obciążenia nazywany rozrywaniem, jest to normalne rozwarcie szczeliny, w wyniku czego następuje przemieszczenie powierzchni szczeliny prostopadle do jej położenia, por. Rys. 2.4.a
- Mod II – drugi sposób obciążenia nazywany ścinaniem wzdłużnym. Wówczas powierzchnie szczeliny ślizgają się po sobie w płaszczyźnie próbki, por. Rys. 2.4.b
- Mod III – trzeci sposób obciążenia, nazywany ścinaniem poprzecznym. Wówczas powierzchnie szczeliny ślizgają się po sobie w kierunku prostopadłym do płaszczyzny próbki, por. Rys. 2.4.c.

Superpozycja tych sposobów deformacji pozwala na uwzględnienie złożonego stanu obciążeń szczeliny. Sposób rozwiązania dla składowych tensora naprężenia w przypadku modów II i III jest podobny jak w rozwiązaniu Westergaarda, a wyniki są przedstawione w dalszej części Tabeli 2.1. Współczynniki intensywności naprężeń mogą więc charakteryzować



RYSUNEK 2.4. Sposoby deformacji szczeliny

stan pola naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia w otoczeniu wierzchołka szczeliny w zależności od sposobu jej obciążenia. Należy dodać, że funkcje trygonometryczne we wzorach podanych w tabeli są niezależne od geometrii próbki i od zewnętrznego obciążenia. Od tych wielkości uzależniona jest natomiast wielkość WIN . Posługując się wzorami z Tabeli 2.1, można również zdefiniować rozwarcie szczeliny (COD) w okolicach jej wierzchołka, które wyraża się jako:

$$g(r) = u_y(r, +\pi) - u_y(r, -\pi) = \frac{\kappa + 1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}}, \quad (2.12)$$

gdzie,

$\kappa = 3 - 4\nu$ – dla płaskiego stanu odkształcenia,

$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ – dla płaskiego stanu naprężenia.

TABELA 2.1. Składowe tensora naprężenia dla różnych modów obciążenia. Rozwiązanie osobliwe.

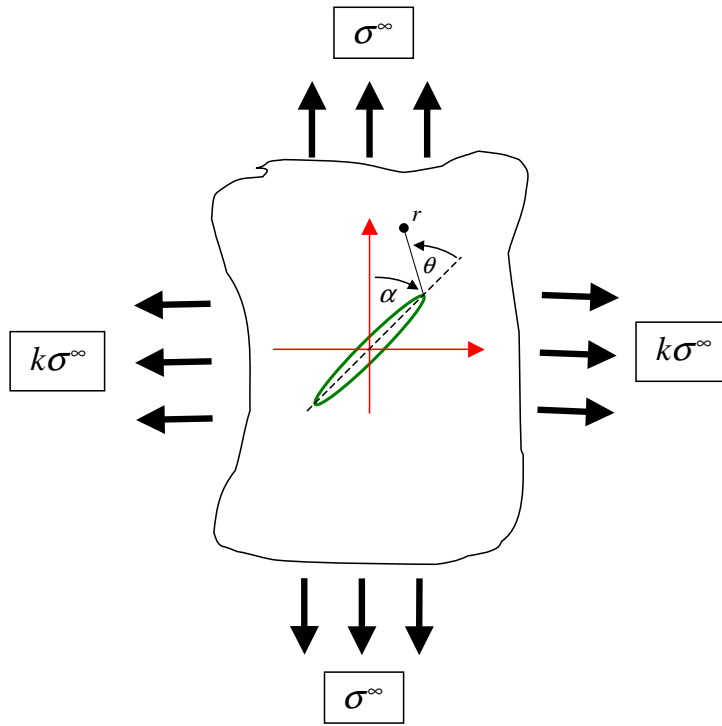
WSP. KARTEZJAŃSKIE	WSP. BIEGUNOWE
mod I	mod I
$\sigma_{xx} \cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}]$	$\sigma_{rr} \cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2}]$
$\sigma_{yy} \cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}]$	$\sigma_{\theta\theta} \cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2}]$
$\sigma_{xy} \cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$	$\sigma_{r\theta} \cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2}]$
$u_x \cong \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta)$	$u_r \cong \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}]$
$u_y \cong \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta)$	$u_\theta \cong \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [-(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}]$
mod II	mod II
$\sigma_{xx} \cong -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} [2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}]$	$\sigma_{rr} \cong \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} [1 - 3\sin^2 \frac{\theta}{2}]$
$\sigma_{yy} \cong \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$	$\sigma_{\theta\theta} \cong \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} [-3 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}]$
$\sigma_{xy} \cong \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}]$	$\sigma_{r\theta} \cong \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [1 - 3\sin^2 \frac{\theta}{2}]$
$u_x \cong \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta)$	$u_r \cong \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [-(2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2}]$
$u_y \cong \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta)$	$u_\theta \cong \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [-(2\kappa + 1) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2}]$
mod III	mod III
$\sigma_{xz} \cong \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} [-\sin \frac{\theta}{2}]$	$\sigma_{rz} \cong \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} [\sin \frac{\theta}{2}]$
$\sigma_{yz} \cong \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} [\cos \frac{\theta}{2}]$	$\sigma_{\theta z} \cong \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} [\cos \frac{\theta}{2}]$
$u_z \cong \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\sin \frac{\theta}{2}]$	

2.2.2. Dwu-osioowy stan obciążenia

Rozwiązania podane w Tabeli 2.1 nie są dokładne, ponieważ uwzględniają tylko pierwszy, dominujący człon w szeregu (część osobliwa), za pomocą którego możemy przedstawić stan pola naprężenia w sytuacji szczególnej jak na Rys. 2.3.

Jeśli przypomnimy historię rozwoju mechaniki pękania, to pierwszą pracą, która traktowała o koncentracji naprężenia była praca Inglisa z roku 1913 [5]. Dotyczyła ona koncentracji naprężenia wokół otworu eliptycznego. Następnie Griffith w roku 1921 i 1924, [1], [6] użył tego rozwiązania jako rozwiązania bazowego dla rozwoju swojej koncepcji energetycznego wzrostu szczeliny. Następnym milowym krokiem w rozwoju mechaniki pękania były prace Irwina w latach 1957-1960, [107], [10], [11]. Dostrzegł on uniwersalność wyrażeń opisujących rozkład pola naprężenia i odkształcenia w okolicy wierzchołka szczeliny po analizie równań Williamsa. Opierał się również na równaniach Westergaarda. Jednak pierwszą osobą, która dostrzegła istniejącą nieścisłość w tych wyrażeniach był Sih w roku 1966, [12]. Zauważył on brakujący stały element rozwiązania. Później Eftis i Liebowitz w 1972, [13] wykazali, że stałej części rozwiązania brakuje z powodu przeoczenia dokonanego przez MacGregora w roku 1935, [14], z której to pracy korzystał Westergaard, a później Irwin. Pominięcie tego niezależnego od odległości od wierzchołka szczeliny członu może być źródłem błędów, a w przypadku dwu-osioowego obciążenia, Rys. 2.5, "rozwiązanie osobliwe" jest wyraźnie niewystarczające, sugerując, że dwu-osiowe obciążenie nie wpływa na zachowanie szczeliny podczas procesu pękania. Pokazane było to m.in. w cyklu prac Eftisa et al. [15], [16], [17], gdzie wykazano konieczność uwzględnienia dwóch członów: pierwszego osobliwego i drugiego, stałego. Oczywiście możliwe jest uzyskanie pozostałych członów (co zostało przez autora niniejszej pracy, do piątego wyrazu szeregu, dokonane), jednakże traktowane są one jako niefizyczne, ponieważ rosną wraz z oddaleniem się od wierzchołka szczeliny [4]. Należy dodać, iż człony te można wyrazić również za pomocą WIN, co może wydawać się nie tak oczywiste z powodu częstego definiowania WIN w kontekście tylko osobliwego rozwiązania, a zatem traktowania go tylko jako wielkość reprezentująca dominujący człon osobliwy. Pełniejsze określenie pola naprężenia dla dwu-osioowego stanu obciążenia, można spotkać w kilku źródłach (w zależności od pożądanej dokładności rozwiązania η), m.in. w pracy [26], gdzie zgodnie z Rys. 2.5:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} = & \sigma_{\infty}(1 - k) \cos 2\alpha \\
& + \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \left(\frac{r}{2a} \right)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{r}{2a} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right. \\
& + \left. \sum_{\eta=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2a} \right)^{\eta+1/2} C_{\eta} \left[\cos \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \theta - \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \sin \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \theta \right] \right\} \\
& + \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ - \left(\frac{r}{2a} \right)^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{r}{2a} \right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right. \\
& + \left. \sum_{\eta=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2a} \right)^{\eta+1/2} C_{\eta} \left[2 \sin \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \theta + \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \cos \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \theta \right] \right\},
\end{aligned} \tag{2.13}$$



RYSUNEK 2.5. Dwu-osiowe obciążenia szczeliny.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} = & \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \left(\frac{r}{2a} \right)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{r}{2a} \right)^{1/2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right. \\
 & \left. + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2a} \right)^{\eta+1/2} C_{\eta} \left[\cos \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \theta + \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \sin \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \theta \right] \right\} \\
 & + \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \left(\frac{r}{2a} \right)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{2a} \right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
 & \left. - \sum_{\eta=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2a} \right)^{\eta+1/2} C_{\eta} \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \cos \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \theta \right\}, \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} = & \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \left(\frac{r}{2a} \right)^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{2a} \right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
 & \left. - \sum_{\eta=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2a} \right)^{\eta+1/2} C_{\eta} \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \cos \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \theta \right\} \\
 & + \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \left(\frac{r}{2a} \right)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{r}{2a} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right. \\
 & \left. + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2a} \right)^{\eta+1/2} C_{\eta} \left[\cos \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \theta - \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \sin \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \theta \right] \right\}, \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

gdzie

$$C_{\eta} = (-1)^{\eta} \frac{2\eta + 3}{2\eta + 2} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\eta - 1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2\eta)}.$$

Wielu badaczy oraz inżynierów używa nadal tylko pierwszego, osobliwego członu rozwią-

zania. Jednakże tendencja ta w ostatnich latach zmienia się na rzecz obliczeń uwzględniających dwa pierwsze człony. Końcowe równania w takiej postaci, dotyczące pola naprężenia w płaszczyźnie dla dowolnej konfiguracji pojedynczej szczeliny i obciążenia, por. Rys. 2.6, można wyrazić bazując na sformułowaniach z pracy [23]:

$$\sigma'_{xx} \cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) + T, \quad (2.16)$$

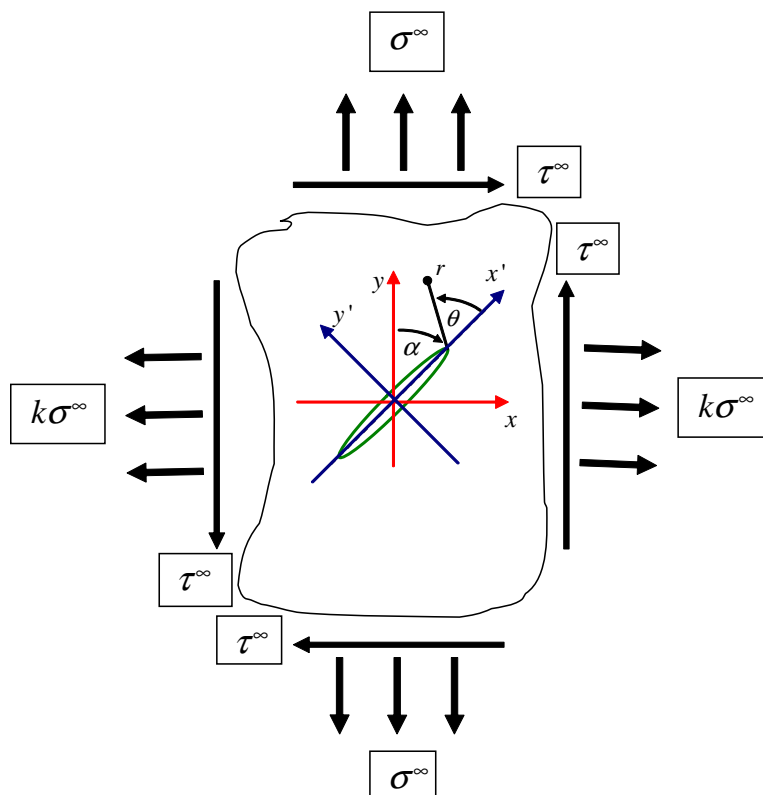
$$\sigma'_{yy} \cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \quad (2.17)$$

$$\sigma'_{xy} \cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \quad (2.18)$$

$$u'_x \cong \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{2}(\kappa - 1) + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{2}(\kappa + 1) + \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) + T \frac{\kappa + 1}{8\mu} (r \cos \theta + a) - M \frac{\kappa + 1}{8\mu} r \sin \theta, \quad (2.19)$$

$$u'_y \cong \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{2}(\kappa + 1) - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{2}(1 - \kappa) + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + T \frac{\kappa - 3}{8\mu} r \sin \theta + M \frac{\kappa + 1}{8\mu} (r \cos \theta + a), \quad (2.20)$$

gdzie przyjmując, że $\sigma_{xx}^\infty = k\sigma^\infty$, $\sigma_{xy}^\infty = \tau^\infty$, $\sigma_{yy}^\infty = \sigma^\infty$:



RYSUNEK 2.6. Ogólny sposób obciążenia szczeliny

$$T \equiv \sigma'_{xx}(\infty) - \sigma'_{yy}(\infty),$$

$$M \equiv 2\sigma'_{xy}(\infty),$$

$$K_I \equiv \sqrt{\pi a} \sigma'_{yy}(\infty),$$

$$K_{II} \equiv \sqrt{\pi a} \sigma'_{xy}(\infty),$$

$$\sigma'_{xx}(\infty) = \sigma_{xx}^{\infty} \sin^2 \alpha + \sigma_{yy}^{\infty} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy}^{\infty} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sigma'_{yy}(\infty) = \sigma_{xx}^{\infty} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy}^{\infty} \sin^2 \alpha - 2\sigma_{xy}^{\infty} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sigma'_{xx}(\infty) = (\sigma_{yy}^{\infty} - \sigma_{xx}^{\infty}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{xy}^{\infty} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha).$$

Należy dodać, iż jak wykazano to w wielu pracach stały człon, T , w wyrażeniach określających pole naprężenia ma duży wpływ na kierunek oraz prędkość wzrostu szczeliny i w zasadzie powinien być uwzględniony w obliczeniach. Po raz pierwszy wpływ tego członu uwzględnił Cotterell w pracach [18], [19], [20]. Zauważył on, że chociaż w przypadku szczeliny będącej pod wpływem jedno-osowego obciążenia, prostopadłego do powierzchni szczeliny, kąt propagacji dla materiału jednorodnego jest zgodny z orientacją szczeliny ($\theta_{pr} = 0$), to w przypadku rzeczywistego materiału może nastąpić pewne małe odchylenie kierunku propagacji ($\theta_{pr} = d\theta$) z powodu obecności przed wierzchołkiem szczeliny pewnej nieregularności materiału. Następnie podzielił on zachowanie szczeliny w tej fazie na dwie klasy: I – gdy szczelina powróci z powrotem do swojego oryginalnego kierunku wzrostu, oraz II – gdy już nigdy kierunek ten nie zostanie osiągnięty. Co ciekawe, zachowanie to zostało związane z wielkością stałego członu T . Tak więc, gdy $T > 0$, ścieżka szczeliny będzie odchyłać się od jej idealnego usytuowania, natomiast gdy $T < 0$ to zaburzenie struktury materiału ma charakter lokalny i kierunek lokalizacji ścieżki wzrostu szczeliny powróci do swojej idealnej orientacji. A więc, dla I modu obciążenia, wzrost szczeliny jest stabilny dla $T < 0$ i niestabilny dla $T > 0$. Człon ten w literaturze angielskojęzycznej występuje jako "T-stress". Larsson i Carlsson [21], pokazali, że człon ten ma również znaczny wpływ przy wyznaczaniu kształtu i wielkości strefy plastycznej, która rozwija się przed wierzchołkiem szczeliny.

W przypadku systemu szczelin, a szczególnie w interesującym nas przypadku rozwijającej się szczeliny, istnieje problem uzyskania parametrów WIN, jak i T . W jednym z następnych rozdziałów zaprezentowana zostanie metoda umożliwiająca uzyskanie wartości tych parametrów dla dowolnie rozwijającej się szczeliny. W przypadku obliczenia wartości parametru T , wykorzystana zostanie niezależność tej wielkości od r i θ . Do tego celu należy wykorzystać wyrażenia (2.16) i (2.17) w następującej postaci, definiującej T :

$$T = (\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}) \Big|_{\theta=0, r \rightarrow 0}. \quad (2.21)$$

2.3. Współczynniki intensywności naprężeń.

Współczynniki intensywności naprężeń (WIN) są podstawowymi parametrami używanymi zarówno w LMP, jak i w analizie zmęczeniowego wzrostu szczeliny. Pozwalają one określić stan naprężenia i odkształcenia w otoczeniu wierzchołka szczeliny. Do obliczenia WIN wykorzystuje się metody analityczne, numeryczne i doświadczalne. Poniżej opisane zostaną jedynie wybrane metody mające pewien związek z zastosowanym w pracy podejściem. Natomiast obszernie omówienie pozostałych metod znaleźć można np. w pracy Seweryna [28] (w szczególności metody numeryczne w mechanice pękania) oraz w pracy Neimitza [4].

2.3.1. Metody analityczne.

Metody analityczne ograniczają się do zagadnień o niezbyt dużej złożoności geometrii [28]. Do metod tych należą m.in.:

- metoda funkcji zmiennej zespolonej (Muskhelishvili [47]),
- metoda transformacji całkowych (Bilby i Eshelby [39]),
- metoda funkcji Greena (Stedman [40]),
- metoda potencjałów (Sneddon [41]),
- metody wariacyjne.

Metoda funkcji Greena została zaproponowana już w roku 1928. Znajduje ona zastosowanie w wielu dziedzinach, m.in. w teorii sprężystości do określenia naprężenia lub odkształcenia w dowolnym punkcie ciała będących reakcją, na przykład, na siłę skupioną przyłożoną w zadanym punkcie ciała. Dla przypadku szczeliny umieszczonej w nieskończonej płaszczyźnie, gdy powierzchnie szczeliny obciążone są przez zrównoważoną parę sił skupionych, por. Rys. 2.7, odpowiedzią układu może być również odpowiednia wartość WIN, określona dla wierzchołka B w następujący sposób:

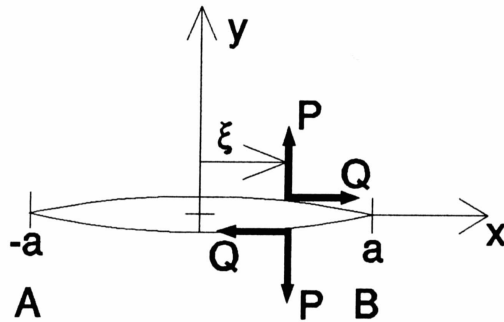
$$\begin{aligned} K_{\text{I}}^{\text{B}} &= \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}, \\ K_{\text{II}}^{\text{B}} &= \frac{Q}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dla wierzchołka A, współrzędne ξ należy zastąpić przez $-\xi$.

Jeśli siły skupione zostaną zastąpione obciążeniem ciągłym wzdłuż powierzchni szczeliny, σ_{yy}^o oraz σ_{xy}^o , to poprzez zsumowanie wpływu obciążeń po długości szczeliny uzyskujemy:

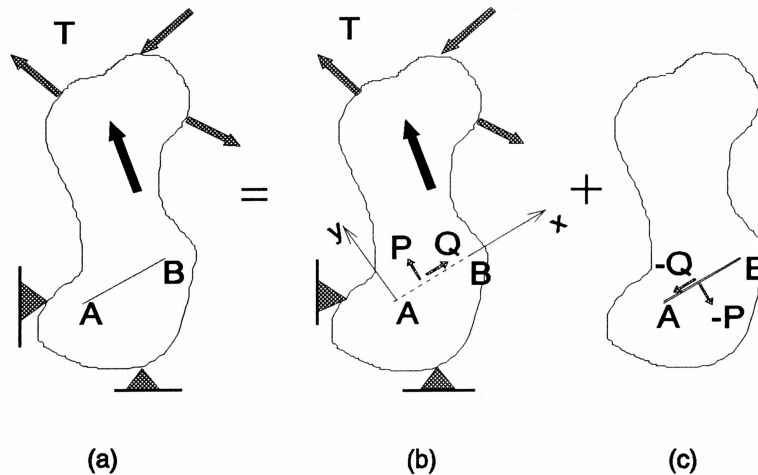
$$\begin{aligned} K_{\text{I}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} \sigma_{yy}^o d\xi, \\ K_{\text{II}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} \sigma_{xy}^o d\xi. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Jest to jedno z możliwych zastosowań rozwiązania (2.22). Jednakże rozwiązanie to można wykorzystać w bardziej ogólnym przypadku, np. do uzyskania WIN dla ciała obciążonego przez siły zewnętrzne. Jest to możliwe przy użyciu *metody Buecknera* [29], a



RYSUNEK 2.7. Szczelina przy zrównoważonej parze sił skupionych [27].

mianowicie: "WIN modu I (K_I) dla szczeliny w ciele obciążonym siłami zewnętrznymi jest identyczny dla podobnej konfiguracji szczeliny, poddanej ciśnieniu wewnętrznemu dla ciała, na które nie działają żadne siły zewnętrzne. Przy czym ciśnienie wewnętrzne oddziałujące na szczelinę jest równe co do wartości naprężeniu normalnemu wzdłuż lokalizacji szczeliny, istniejącemu w ciele bez szczeliny i obciążonemu siłami zewnętrznymi". Analogiczna sytuacja ma miejsce w przypadku naprężenia ścinającego i WIN dla II modu (K_{II}).



RYSUNEK 2.8. Zasada superpozycji Buecknera [27].

Zasada ta jest zilustrowana na Rys. 2.8. Rys. 2.8a przedstawia ciało dowolnego kształtu zawierające szczelinę AB , które poddane jest działaniu sił T . W pierwszej fazie rozwiązania należy znaleźć pole naprężenia w ciele bez szczeliny Rys. 2.8b, a w szczególności wartości składowych naprężenia wzdłuż lokalizacji szczeliny, $P(x)$, $Q(x)$. Następnie należy rozważyć problem przedstawiony na Rys. 2.8c. Jest to to samo ciało, ale bez obciążenia zewnętrznego, a istniejący stan naprężenia jest wynikiem obciążeń przyłożonych na powierzchnię szczeliny. Wartości te otrzymywane są z rozwiązania poprzedniego, ale z przeciwnym zwrotem, $-P(x)$, $-Q(x)$. Rozwiązanie to jest nazywane *rozwiązaniem korekcyjnym*. Suma tych dwóch rozwiązań w przypadku szczeliny całkowicie rozwartej odpowiada problemowi początkowemu, a WIN związany z rozwiązaniem z Rys. 2.8c jest również WIN dla problemu wyjściowego z Rys. 2.8a. Należy podkreślić, że to szczególne

rozwiązanie podane przez wyrażenia (2.22) i (2.23) dotyczy ciał o nieskończonych wymiarach.

2.3.2. Metody numeryczne.

W literaturze można znaleźć wiele metod numerycznych rozwijanych przez licznych badaczy. Mają one duże znaczenie praktyczne, szczególnie w przypadku elementów konstrukcyjnych o złożonych kształtach. W praktyce do metod najczęściej wykorzystywanych należą:

- metoda kolokacji brzegowych (Gross *et al.*, [42]),
- metoda sił masowych (Murakami i Nemat-Naser [43]),
- metoda funkcji wagowych (Bueckner [30], Molski [31]),
- metoda linii dyskretnych (Liskovets [32]),
- metoda różnic skończonych (Liszka i Orkisz [33]),
- metoda funkcji brzegowych (Fleming *et al.* [34]),
- metoda elementów skończonych (Zienkiewicz i Taylor [35]),
- metoda elementów brzegowych (Banerjee i Butterfield [36], Burczyński [37]).

Wśród tych metod *metoda funkcji wagowych* jest numeryczną aplikacją metody funkcji Greena i jest często stosowana. Bazuje na twierdzeniu Bettiego o wzajemności prac i została zaproponowana przez Buecknera [30]. Metoda zakłada, że zarówno WIN dla pewnego szczególnego obciążenia, K_I^* , jak również odpowiadające mu rozwarście szczeliny, $u_y^*(a, x)$, gdzie a jest połową długości szczeliny są znane. Natomiast WIN dla innego obciążenia jest dany w postaci:

$$K_I = \int_0^{2a} \sigma_{yy}(x') H(a, x') dx', \quad (2.24)$$

gdzie $H(a, x')$ jest funkcją wagową, definiowaną jako

$$H(a, x') = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \frac{1}{K_I^*} \frac{\partial u_y^*(a, x')}{\partial a}, \quad (2.25)$$

gdzie $\sigma_{yy}(x')$ jest obciążeniem powierzchniowym wzdłuż lokalizacji szczeliny uzyskanym z rozwiązania bez szczeliny zależnym od nowego obciążenia oraz $x' = x + a$ (dla środka szczeliny $x = 0$). W przypadku szczeliny umieszczonej w płaszczyźnie o nieskończonych wymiarach, jednoosiowo rozciąganej, na podstawie paragrafu 2.2.1

$$K_I^* = \sigma_o \sqrt{\pi a}, \quad u_y^*(a, x') = \frac{\kappa + 1}{4\mu} \sigma_o \sqrt{x'(2a - x')}.$$

Wówczas równanie (2.24) można wyrazić jako:

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{2a} \sigma_{yy}^o(x') \sqrt{\frac{x'}{2a - x'}} dx. \quad (2.26)$$

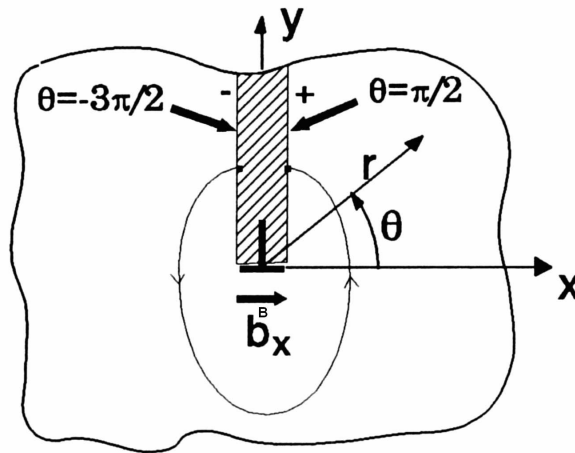
Jeśli x' zastąpione zostanie przez $\xi + a$ otrzymujemy pierwsze z równań (2.23).

2.4. Wprowadzenie do Metody Osobliwych Równań Całkowych typu Cauchy'ego.

Metoda proponowana w niniejszej rozprawie jest specyficznym wykorzystaniem metody Buecknera [29] w modelowaniu szczelin za pomocą dyslokacji krawędziowych, dla których znana jest funkcja Greena. Metoda polega na poszukiwaniu takiego rozkładu dyslokacji wzdłuż linii lokalizacji szczeliny, aby zrównoważyć obciążenie powierzchniowe szczeliny. Wielkość tego obciążenia powierzchniowego wynika z rozwiązania problemu rozkładu naprężenia bez szczeliny wzdłuż jej lokalizacji. Zamiast dyslokacji możliwe jest tu również użycie np. pary sił skupionych. Wynikający z metody układ osobliwych równań całkowych typu Cauchy'ego jest rozwiązywany numerycznie.

2.4.1. Dyslokacje

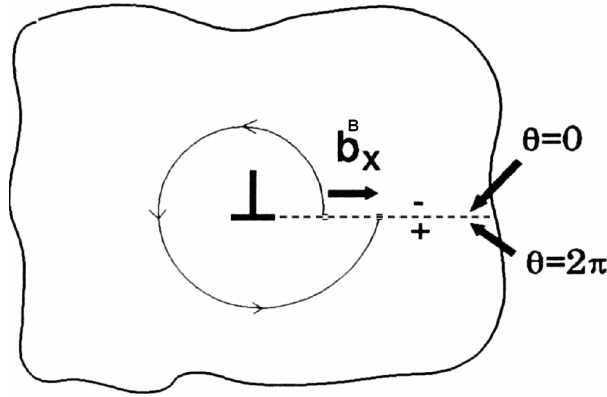
W nieskończonej przestrzeni dwu-wymiarowej dyslokacja może być rozumiana jako nacięcie w materiale. Nacięcie to może przyjmować dowolny kształt, a dyslokacja jest określona za pomocą przemieszczenia pomiędzy sąsiednimi punktami obu stron nacięcia. Względne przemieszczenie punktów po obu stronach nacięcia określa się za pomocą wektora Burgersa. W rozważanych zagadnieniach model jest dwu-wymiarowy, dlatego też dyslokacja, którą będziemy się posługiwać jest dyslokacją krawędziową. Dyslokacja ta leży w jednej płaszczyźnie, a zaburzenie w strukturze materiału jakie wywołuje powoduje powstanie w materiale naprężenia. To pole naprężenia jest niezależne od samego kształtu nacięcia, ale zależne od składowych wektora Burgersa (b_x^B, b_y^B) które go charakteryzują. W literaturze spotyka się dwie wizualizacje przedstawiające dyslokację o składowej wektora Burgersa b_x^B . Przedstawione są one odpowiednio na Rys. 2.9 oraz Rys. 2.10. Na rysun-



RYSUNEK 2.9. Model dyslokacji krawędziowej poprzez otwarte przemieszczenie [27].

kach tych można zauważyć gwałtowny "skok" pomiędzy powierzchniami nacięcia, który w kierunku x można zapisać jako $u_x^+ - u_x^- = b_x^B$.

W pracy rozpatrywane są dwa mody obciążenia szczeliny, I i II, które mogą być modelowane przez dyslokację krawędziową. W przypadku modu III obciążenia szczeliny, konieczne jest modelowanie przy użyciu dyslokacji śrubowej (ang.: screw type), która



RYSUNEK 2.10. Model dyslokacji krawędziowej poprzez styczne przemieszczenie [27].

posiada składową wektora Burgersa b_z^B [38].

Przemieszczenia będące wynikiem obecności dyslokacji jak na Rys. 2.9 i 2.10 można zapisać w następującej postaci [44]:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{b_x^B}{2\pi(\kappa+1)} \left[(\kappa+1)\theta + \frac{2xy}{r^2} \right], \\ u_y &= -\frac{b_x^B}{2\pi(\kappa+1)} \left[(\kappa-1)\log r + \frac{2x^2}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

gdzie, $r^2 = x^2 + y^2$.

W ogólności wektor Burgersa w płaszczyźnie posiada dwie składowe b_x^B i b_y^B . Tak więc pole naprężenia w dowolnym punkcie (x, y) będące wynikiem obecności dyslokacji określonej za pomocą wektora Burgersa o składowych (b_x^B, b_y^B) może być zapisane jako:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \left\{ b_x^B \left[-\frac{y}{r^4}(3x^2 + y^2) \right] + b_y^B \left[\frac{x}{r^4}(x^2 - y^2) \right] \right\}, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \left\{ b_x^B \left[\frac{y}{r^4}(x^2 - y^2) \right] + b_y^B \left[\frac{x}{r^4}(x^2 + 3y^2) \right] \right\}, \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \left\{ b_x^B \left[\frac{x}{r^4}(x^2 - y^2) \right] + b_y^B \left[\frac{y}{r^4}(x^2 - y^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Składową wektora Burgersa b_y^B definiuje się przez analogię do składowej b_x^B .

2.4.2. Sformułowanie problemów

Proponowana w pracy metoda wyjaśniona zostanie na przykładzie zagadnienia prostoliniowej szczeliny o długości $2a$, umieszczonej w nieskończenie dużej płaszczyźnie rozciąganej w nieskończoności obciążeniem $\sigma_{yy}^\infty(x)$ prostopadle do szczeliny, por. Rys. 2.11a. Zgodnie z zasadą Buecknera, zagadnienie to można rozwiązać wykorzystując superpozycję rozwiązań problemów przedstawionych na Rys. 2.11b (problem A) i Rys. 2.11c (problem B). A więc:

- **Zadanie A.** Jakie jest pole naprężenia $\bar{\sigma}(x, y)$, por. Rys. 2.11b, w materiale w przypadku braku szczeliny? A dokładniej, jakie są wartości tego naprężenia wzdłuż linii, gdzie ma znajdować się szczelina ($y = 0$, $|x| < a$)?

- **Zadanie B.** Należy rozważyć problem jak na Rys. 2.11c, bez obciążenia zewnętrznego, gdzie szczelina została zastąpioną ciągłym rozkładem dyslokacji krawędziowych. Są one traktowane jako zaburzenie w strukturze materiału, ale wielkość tego zaburzenia nie jest wcześniej założona. Można ten problem również przedstawić jako umieszczenie dodatkowego materiału w miejscu lokalizacji szczeliny, co generuje dodatkowe, *korekcyjne obciążenie* na powierzchni szczeliny. Jakie wówczas jest to pole naprężenia, $\bar{\sigma}(x, y)$ indukowane w materiale? A w szczególności, jakie są wartości tego naprężenia wzdłuż lokalizacji szczeliny?

Zgodnie z zasadą superpozycji interesujący stan pola naprężenia uzyskuje się poprzez superpozycję tych dwóch problemów:

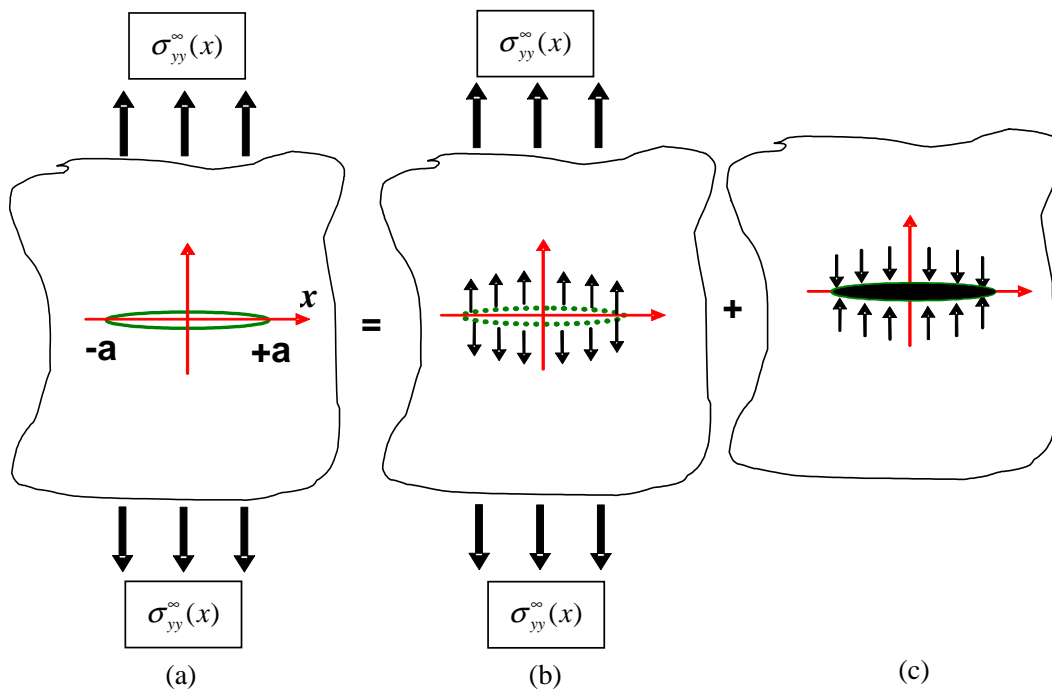
$$\sigma(x, y) = \bar{\sigma}(x, y) + \bar{\bar{\sigma}}(x, y), \quad (2.29)$$

pod warunkiem, że warunki brzegowe są spełnione na wolnych od obciążeń powierzchniach szczeliny oraz w "nieskończoności". W rozważanym przypadku, $\bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = \sigma_{yy}^{\infty}(x)$ oraz $\bar{\sigma}_{xy}(x, 0) = 0$ dla wszystkich wartości y . A więc można sformułować następujące warunki brzegowe:

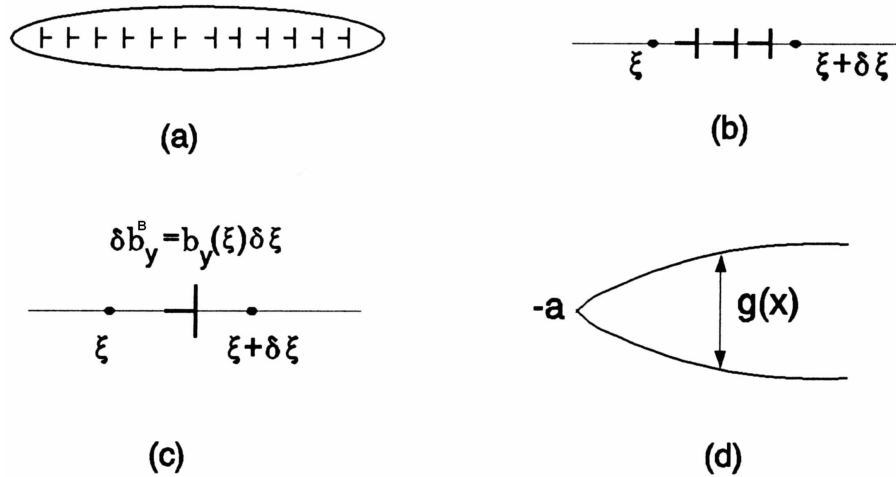
$$\begin{aligned} N(x) \equiv \sigma_{yy}(x, 0) &= \sigma_{yy}^{\infty}(x, 0) + \bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = 0, & |x| < a \\ S(x) \equiv \sigma_{xy}(x, 0) &= \bar{\sigma}_{xy}(x, 0) = 0, & |x| < a \\ \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{xx} &\rightarrow 0, & \text{gdy } x, y \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (2.30)$$

gdzie, $N(x)$ i $S(x)$ są to, odpowiednio, składowe normalne i styczne naprężenia wzdłuż linii szczeliny.

Rozwiązanie korekcyjne. Wartość korekcyjna naprężenia $\bar{\sigma}(x, y)$ może być określona przez ciągły rozkład dyslokacji wzdłuż lokalizacji szczeliny, w tym przypadku



RYSUNEK 2.11. Zastosowanie zasady Buecknera [27].



RYSUNEK 2.12. Modelowanie szczeliny przez dyslokacje.

$|x| < a$, por. Rys. 2.12a. W celu otrzymania naprężenia należy rozważyć najpierw rozkład dyslokacji wzdłuż infinitezimalnego odcinka szczeliny $(\xi, \xi + \delta\xi)$, por. Rys. 2.12b, który traktowany jest jako pojedyncza skoncentrowana dyslokacja charakteryzowana przez infinitezimalny wektor Burgersa $\delta b_y^B = b_y(\xi)\delta\xi$, gdzie $b_y(\xi)$ określa gęstość dyslokacji w punkcie ξ , por. Rys. 2.12c.

Następnie wykorzystuje się wyrażenie (2.28), które określa pole naprężenia będące skutkiem obecności pojedynczej dyslokacji. W szczególnym przypadku (x zastąpione przez $x - \xi$ oraz $y = 0$, $b_x^B = 0$) naprężenie normalne pojawiające się wzdłuż linii, gdzie zlokalizowana ma być szczelina, a powstałe na skutek obecności pojedynczej dyslokacji charakteryzowanej przez wektor Burgersa δb_y^B i umieszczonej w punkcie ξ , może być określone w następujący sposób:

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \frac{\delta b_y^B(\xi)}{x - \xi} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \frac{b_y(\xi)}{x - \xi} \delta\xi. \quad (2.31)$$

Wówczas naprężenie zależne od ciągłego rozkładu dyslokacji wzdłuż lokalizacji szczeliny przyjmuje postać:

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-a}^a \frac{b_y(\xi)}{x - \xi} \delta\xi. \quad (2.32)$$

gdzie $b_y(\xi)$, jest gęstością dyslokacji:

$$b_y(\xi) = \frac{db_y^B(\xi)}{d\xi}. \quad (2.33)$$

Między tą wielkością, a $g(x)$ charakteryzującą rozwarcie szczeliny (2.12) istnieje bezpośrednia relacja:

$$g(x) = - \int_{-a}^x b_y(\xi) d\xi, \quad (2.34)$$

lub

$$b_y(\xi) = - \frac{dg(\xi)}{d\xi}. \quad (2.35)$$

Zauważyć należy, że przy całkowaniu w drugim kierunku, tzn. z a do $-a$, otrzyma się $b_y(\xi) = +dg(\xi)/d\xi$.

Sformułowanie i rozwiązanie równań całkowych. Równania (2.28) oraz fakt, iż $b_x = 0$, pokazują, że drugi i trzeci z warunków brzegowych (2.30) są automatycznie spełnione. Tak więc, posługując się równaniem (2.30) oraz dodatkowo równaniem (2.32), otrzymać można następujące wyrażenie:

$$-\frac{(\kappa + 1)}{2\mu} \sigma_{yy}^\infty(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{b_y(\xi)}{x - \xi} d\xi, \quad |x| < a \quad (2.36)$$

zawierające nieznaną wielkość jaką jest gęstość dyslokacji $b_y(\xi)$. Całka w (2.36) zawiera charakterystyczne jądro typu $(x - \xi)^{-1}$. Całki takie nazywamy całkami typu Cauchy'ego i występują one m.in. w płaskich zagadnieniach brzegowych teorii sprężystości. Bardzo duży udział w rozwoju metody analizy równań całkowych mieli rosyjscy matematycy, przede wszystkim Muscheliszwili i Wekuy. W Polsce metoda równań całkowych w zagadnieniach teorii sprężystości była rozwijana przez takich badaczy jak m.in.: S. Kaliski, W. Nowacki, R. Gutowski, W. Olszak, H. Zorski. Ponadto bardzo obszerną pracą dotyczącą równań całkowych i ich zastosowania jest 4 tomowe dzieło Pogorzelskiego, a w przypadku zastosowań w sprężystości szczególnie tom IV, [22].

Punkt $x = \xi$ w wyrażeniu (2.36) jest punktem osobliwym. Dlatego też tego typu równanie jest nazywane osobliwym równaniem całkowym pierwszego rzędu, ponieważ nieznaną funkcja np. tu b_y , występuje tylko wewnątrz całki. W niniejszej pracy równania tego typu rozwiązywane są z wykorzystaniem metody Gaussa-Chebyszewa rozwiniętej przez Erdogana i Gupta, [54] i opisaną dokładniej w podrozdziale 2.4.3. Jest to rozwiązanie numeryczne, które redukuje równania całkowe do równań liniowych. Istnieje jeszcze kilka innych metod rozwiązywania tego typu równań, np. metoda Lobatto-Chebyszewa rozwinięta przez Theocaris i Ioakimidisa [165]. Metoda ta różni się od metody Gaussa-Chebyszewa tym, że uwzględnia końcowe punkty przedziału całkowania. Pomimo tego, iż przy liczeniu WIN właśnie te punkty są najistotniejsze, to różnica w wynikach z wykorzystaniem współczesnych komputerów jest pomijalnie mała.

Należy dodać, że stosowane tu rozwiązanie wymaga dodatkowego równania. Wykorzystując fakt, że powierzchnie szczeliny są zbieżne na obu jej końcach, a więc, $g(-a) = g(a) = 0$, por. (2.34), formułuje się dodatkowy warunek w postaci:

$$\int_{-a}^a b_y(\xi) d\xi = 0. \quad (2.37)$$

Naprężenie w dowolnym punkcie materiału zawierającego szczelinę. Celem proponowanej metody jest uzyskanie rozkładu naprężenia w materiale zawierającym szczelinę i obciążonym zewnątrz w dowolny sposób. Przykładowo, gdy problem dotyczy szczególnego przypadku jak na Rys. 2.11 i przy założeniu, że rozwiązano wyrażenie (2.36) ze względu na gęstość dyslokacji $b_y(\xi)$, składowe tensora naprężenia wyrazić można jako, por.(2.28):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-a}^a b_y^B(\xi) \frac{x - \xi}{r^4} ((x - \xi)^2 - y^2) d\xi, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-a}^a b_y^B(\xi) \frac{x - \xi}{r^4} ((x - \xi)^2 + 3y^2) d\xi + \sigma_{yy}^\infty(x), \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-a}^a b_y^B(\xi) \frac{y}{r^4} ((x - \xi)^2 - y^2) d\xi, \end{aligned} \quad (2.38)$$

gdzie, $r^2 = (x - \xi)^2 + y^2$.

II mod obciążenia. W przypadku obecności drugiego modu obciążenia szczeliny będącego wynikiem obciążenia na granicy próbki definiowanego jako $\sigma_{xy}^\infty(x)$, to wynikające z tego równania można uzyskać w sposób identyczny jak w poprzednim przykładzie, a mianowicie:

$$-\frac{(\kappa + 1)}{2\mu}\sigma_{xy}^\infty(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{b_x(\xi)}{x - \xi} d\xi, \quad |x| < a. \quad (2.39)$$

Również i przemieszczenie powierzchni szczeliny związane jest z gęstością wektora Burgersa, b_x , zależnością:

$$b_x(\xi) = \frac{db_x^B(\xi)}{d\xi} = -\frac{dh(\xi)}{d\xi}, \quad (2.40)$$

gdzie, $h(\xi)$ oznacza relatywne, styczne przemieszczenie pomiędzy dolną a górną powierzchnią szczeliny definiowane jako:

$$h(x) = u_x(x, 0^+) - u_x(x, 0^-). \quad (2.41)$$

Dodatkowo, podobnie jak dla składowej y , wymagany jest warunek:

$$\int_{-a}^a b_x(\xi) d\xi = 0. \quad (2.42)$$

2.4.3. Numeryczne rozwiązanie równań całkowych osobliwych

W podrozdziale tym przedstawiona zostanie numeryczna metoda rozwiązywania systemu równań całkowych osobliwych typu Cauchy'ego metodą Gaussa-Chebyszewa rozwiniętej przez Erdogana i Gupta [54].

Sformułowanie matematyczne wielu problemów fizycznych, a szczególnie w teorii sprężystości, sprowadza się do systemu osobliwych równań całkowych postaci:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_1^M a_{ij} f_i(t) \frac{dt}{t-w} + \int_{-1}^1 \sum_1^M k_{ij}(w, t) f_i(t) dt = g_i(w), \quad -1 < w < 1, \quad i = 1, \dots, M, \quad (2.43)$$

gdzie $f_i(t)$ są nieznanymi funkcjami, a_{ij} są to stałe nieosobliwe, jądra $k_{ij}(w, t)$ zawierają się w przedziale $-1 \leq (w, t) \leq 1$, a $g_i(w)$ są znanymi funkcjami. Generalnie, w rozważanych w niniejszej pracy problemach, nieznaną funkcją $f_i(t)$ będzie wykazywać osobliwość w obu końcowych punktach przedziału (szczeliny) ± 1 . Możliwa jest również sytuacja, gdy tej osobliwości na jednym z końców szczeliny lub na obu końcach nie będzie. Jednakże w każdym przypadku poszukiwaną funkcję zastępuje się przez wyrażenie:

$$f_i(t) = F_i(t) p_i(t) = \frac{F_i(t)}{(1+t)^{\alpha_i} (1-t)^{\beta_i}}, \quad (2.44)$$

gdzie $p_i(t)$ jest funkcją fundamentalną zależną od zachowania $f_i(t)$ na końcach szczeliny. Wykładniki α_i, β_i określają stopnie osobliwości, a $F_i(t)$ jest nową nieznaną, ciągłą funkcją w przedziale $(-1, 1)$. Jeśli sytuacja dotyczy szczeliny umieszczonej w materiale jednorodnym, to $\alpha_i = \beta_i = 1/2$ oraz

$$f_i(t) = \frac{F_i(t)}{(1-t^2)^{1/2}}. \quad (2.45)$$

Równania całkowe opisujące rzeczywiste problemy doprowadza się do postaci (2.43) poprzez normalizację. Sprowadzając przedział $[a, b]$ do przedziału $[-1, 1]$ relacjami:

$$\begin{aligned} 2\xi &= (b-a)w + (b+a) \\ 2x &= (b-a)t + (b+a) \\ w &= \xi/a, \quad t = x/a. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Jeśli rozważymy następnie równanie

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \frac{dt}{t-w} + \int_{-1}^1 k(w, t) f(t) dt = g(w), \quad -1 < w < 1,$$

to dla pojedynczej szczeliny oraz na podstawie równania (2.44) otrzymujemy

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(t) dt}{(t-w)(1-t^2)^{1/2}} + \int_{-1}^1 k(w, t) \frac{F(t)}{(1-t^2)^{1/2}} dt = g(w).$$

$F(t)$ musi ponadto spełniać warunek

$$\int_{-1}^1 \frac{F(t)}{(1-t^2)^{1/2}} dt = C,$$

gdzie C jest znaną stałą. Należy tu skorzystać z następujących formuł:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(t) dt}{(t-w)(1-t^2)^{1/2}} &\simeq \sum_{k=1}^n \frac{F(t_k)}{n(t_k - w_r)}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{(1-t^2)^{1/2}} &\simeq \sum_{k=1}^n \frac{f(t_k)}{n}, \end{aligned}$$

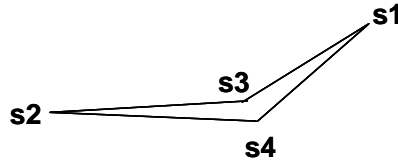
gdzie

$$t_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right), \quad w_r = \cos \frac{\pi r}{n} \quad \text{dla } r = 1, \dots, n-1.$$

W wyniku tego rozważane równania można wyrazić jako system n liniowych równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} F(t_k) \left[\frac{1}{t_k - w_r} + \pi k(w_r, t_k) \right] &= g(w_r), \\ \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} F(t_k) &= C, \end{aligned}$$

z których należy obliczyć $F(t_1), \dots, F(t_n)$.



RYSUNEK 2.13. Przypadek dwóch połączonych szczelin.

Przypadek połączonych szczelin. W sytuacji, gdy rozważana jest pojedyncza szczelina, stopień osobliwości jest typowy tzn. $\alpha_i = \beta_i = \frac{1}{2}$. Jednakże w miejscach, gdzie szczeliny są połączone, por. Rys. 2.13, lub ich wierzchołki mają kontakt z innym materiałem, wykładniki α_i, β_i różnią się od $\frac{1}{2}$ (patrz podrozdział 2.8.2). W sytuacji jak na Rys. 2.13, stopnie osobliwości w punktach $s1$ i $s2$ są równe $\frac{1}{2}$. Natomiast w punktach połączenia głównej szczeliny z odgałęzieniem, $s3, s4$, stopień osobliwości jest $\neq \frac{1}{2}$. Zastosowanie w tym przypadku powyżej prezentowanej metody nie jest możliwe, ponieważ stopnie osobliwości mogą być np. zespolone. Istnieją co prawda metody pozwalające rozwiązać takie nietypowe przypadki, ale wiążą się one z dużą komplikacją obliczeń, co czyni je nieprzydatnymi w przypadku zmęczeniowego wzrostu szczeliny. Rozwiązanie użyte w niniejszej pracy bazuje na pewnym, ogólnie przyjętym i szeroko wykorzystywanym uproszczeniu, które w skali całego procesu zmęczeniowej propagacji szczeliny nie ma istotnego wpływu na końcowe rozwiązanie. Uproszczenie to stosowane było przez wielu autorów już w sytuacji dwóch połączonych szczelin [51], [52]. Polega ono na założeniu, że stopień osobliwości w punkcie $s4$ jest równy $\frac{1}{2}$. Można wówczas zastosować metodę numeryczną przedstawioną powyżej. Należy jednak zauważyć, że założenie takie wymaga wprowadzenia dodatkowego warunku polegającego na tym, że dopóki stopień osobliwości w punkcie $s4$ jest mniejszy niż $\frac{1}{2}$, to wartość funkcji $F(t)$ w miejscu połączenia szczelin przyjmowana jest jako równa zero, np. $F(-1) = 0$. W rezultacie rozwiązanie takie może być zastosowane do systemu N szczelin połączonych ze sobą, co bardzo dobrze odpowiada problemowi zmęczeniowej propagacji szczeliny. Rozwiązanie to również zastosowane będzie w niniejszej pracy do przypadku szczeliny przechodzącej przez interfejs (Rozdział 2.11).

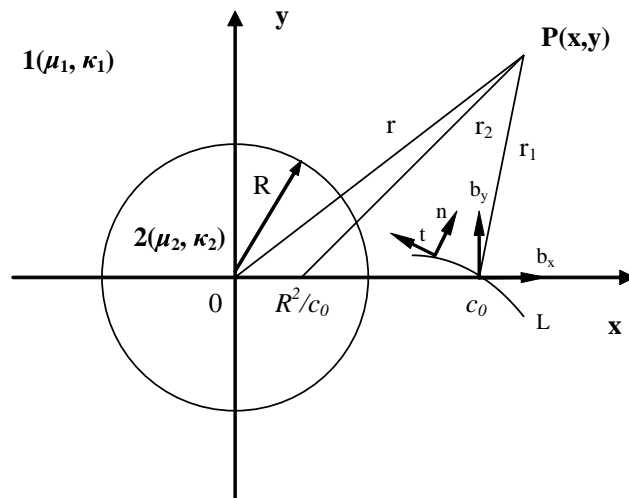
2.5. Funkcje Airy'ego dla pojedynczych dyslokacji

W literaturze można znaleźć wiele przykładów funkcji Airy'ego opisujących pole naprężenia, których źródłem jest dyslokacja krawędziowa. W niniejszej pracy będzie wykorzystane rozwiązanie dla dyslokacji krawędziowej w okolicy sferycznej inkluzji umieszczonej w nieskończonej matrycy [57] oraz dyslokacji umieszczonej w samej inkluzji [58]. Prace te bazują na dwóch artykułach [55] i [56].

2.5.1. Dla sferycznej inkluzji

Używając oznaczeń jak na Rys. 2.14 funkcje Airy'ego dla dyslokacji krawędziowej i inkluzji można zapisać w następującej postaci:

Dyslokacja w matrycy:



RYSUNEK 2.14. Szczelina w sąsiedztwie okrągłej inkluzji.

- dla wektora Burgersa w kierunku x dla dyslokacji w materiale 1 (poza inkluzją)

$$\begin{aligned} \chi_{11}^{x\text{-inc}} = \frac{G_1 b_x^B}{\pi(\kappa_1 + 1)} & \left(-2r_1 \log r_1 \sin \theta_1 + (B + A)(r_2 \log r_2 \sin \theta_2 - r \log r \sin \theta) + \right. \\ & + (B - A)(r_2 \theta_2 \cos \theta_2 - r \theta \cos \theta + \frac{a}{\beta} \theta) - \\ & \left. - A \frac{(\beta^2 - 1)a}{\beta^3} [\sin 2\theta_2 - \frac{(\beta^2 - 1)a \sin \theta_2}{\beta r_2}] - A a^2 \frac{\sin \theta}{r} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\chi_{21}^{y\text{-inc}} = \frac{G_1 b_x^B}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left(- (2 - A - B)r_1 \log r_1 \sin \theta_1 - (B - A)(r_1 \theta_1 \cos \theta_1 + \frac{(\beta^2 - 1)a}{\beta} \theta_1) \right), \quad (2.48)$$

- dla wektora Burgersa w kierunku y dla dyslokacji w materiale 1 (poza inkluzją)

$$\begin{aligned} \chi_{11}^{y\text{-inc}} = \frac{G_1 b_y^B}{\pi(\kappa_1 + 1)} & \left(2r_1 \log r_1 \cos \theta_1 - (B + A)(r_2 \log r_2 \cos \theta_2 - r \log r \cos \theta) + \right. \\ & + (B - A)(r_2 \theta_2 \sin \theta_2 - r \theta \sin \theta) + \\ & + A \frac{(\beta^2 - 1)a}{\beta^3} [2\beta^2 \log r_2 - \cos 2\theta_2 + \frac{(\beta^2 - 1)a \cos \theta_2}{\beta r_2}] - \\ & \left. - [A(2\beta^2 - 1) + M(\kappa_2 + 1) - 1] \frac{a}{\beta} \log r + A a^2 \frac{\cos \theta}{r} \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \chi_{21}^{y\text{-inc}} = \frac{G_1 b_y^B}{\pi(\kappa_1 + 1)} & \left((2 - A - B)r_1 \log r_1 \cos \theta_1 - (B - A)(r_1 \theta_1 \sin \theta_1 + \right. \\ & \left. + \frac{(\beta^2 - 1)a}{\beta} \log r_1) - M \frac{1 - \Gamma}{\beta a} r^2 \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dyslokacja wewnątrz inkluzji:

- dla wektora Burgersa w kierunku x dla dyslokacji w materiale 2 (w inkluzji)

$$\begin{aligned} \chi_{12}^{x\text{-inc}} = & \frac{G_2 b_x^B}{\pi(\kappa_2 + 1)} \left(- [2 - (\bar{B} + \bar{A})] r_1 \log r_1 \sin \theta_1 + \right. \\ & + (\bar{B} - \bar{A}) [-r_1 \theta_1 \cos \theta_1 + \frac{(1 - \beta^2)a}{\beta} \theta_1] + \\ & + [2H - (\bar{B} + \bar{A})] r \log r \sin \theta + (\bar{B} - \bar{A}) (r \theta \cos \theta - \frac{a}{\beta} \theta) + \\ & \left. + (H - \bar{B}) a^2 \frac{\sin \theta}{r} \right), \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \chi_{22}^{x\text{-inc}} = & \frac{G_2 b_x^B}{\pi(\kappa_2 + 1)} \left(- 2r_1 \log r_1 \sin \theta_1 + (\bar{B} + \bar{A}) r_2 \log r_2 \sin \theta_2 + \right. \\ & \left. + (\bar{B} - \bar{A}) r_2 \theta_2 \cos \theta_2 + \bar{A} \frac{(1 - \beta^2)a}{\beta^3} [\sin 2\theta_2 + \frac{(1 - \beta^2)a \sin \theta_2}{\beta r^2}] \right), \end{aligned} \quad (2.52)$$

- dla wektora Burgersa w kierunku y dla dyslokacji w materiale 2 (w inkluzji)

$$\begin{aligned} \chi_{12}^{y\text{-inc}} = & \frac{G_2 b_y^B}{\pi(\kappa_2 + 1)} \left([2 - (\bar{B} + \bar{A})] r_1 \log r_1 \cos \theta_1 + \right. \\ & + (\bar{B} - \bar{A}) [-r_1 \theta_1 \sin \theta_1 + \frac{(1 - \beta^2)a}{\beta} \log r_1] - [2H - (\bar{B} + \bar{A})] r \log r \cos \theta + \\ & \left. + (\bar{B} - \bar{A}) r \theta \sin \theta - \frac{a}{\beta} \log r [\bar{B} - \bar{A} + (1 - \bar{A}) Q \beta^2] - (H - \bar{B}) a^2 \frac{\cos \theta}{r} \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \chi_{22}^{y\text{-inc}} = & \frac{G_2 b_y^B}{\pi(\kappa_2 + 1)} \left(2r_1 \log r_1 \cos \theta_1 - (\bar{B} + \bar{A}) r_2 \log r_2 \cos \theta_2 + (\bar{B} - \bar{A}) r_2 \theta_2 \sin \theta_2 + \right. \\ & \left. + \bar{A} \frac{(1 - \beta^2)a}{\beta^3} [-2\beta^2 \log r_2 + \cos 2\theta_2 + \frac{(1 - \beta^2)a \cos \theta_2}{\beta r^2}] + \bar{A} (1 + Q \beta^2) \frac{1}{\beta a} r^2 \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

gdzie,

$$\beta = \frac{c}{a}, \quad \Gamma = \frac{G_2}{G_1}, \quad A = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma \kappa_2}, \quad B = \frac{\kappa_2 - \Gamma \kappa_1}{\kappa_2 + \Gamma}, \quad M = \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1)}{(\kappa_2 + \Gamma)(\kappa_2 - 1 + 2\Gamma)},$$

$$\bar{A} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma + \kappa_2}, \quad \bar{B} = \frac{\Gamma \kappa_1 - \kappa_2}{\Gamma \kappa_1 + 1}, \quad H = 1 - \frac{\kappa_2 + 1}{\Gamma(\kappa_1 + 1)}, \quad Q = -\frac{2(\Gamma - 1)}{2\Gamma + \kappa_2 - 1} = -\frac{2\bar{A}}{1 + \bar{A}}.$$

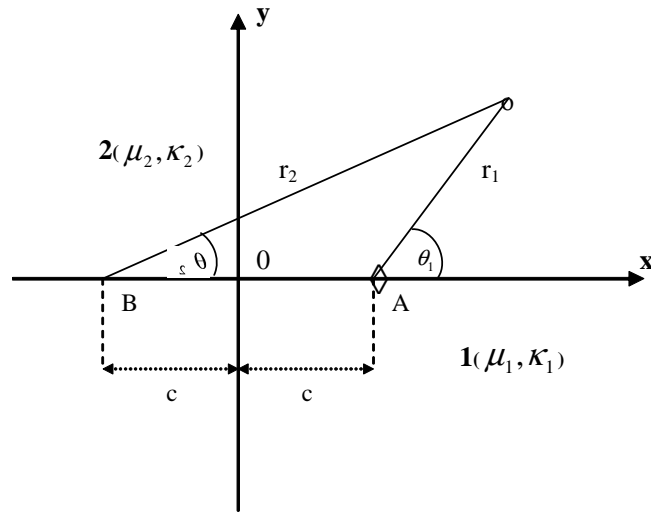
Indeksy 1 i 2 oznaczają odpowiednio obszar 1 i 2.

2.5.2. W okolicy prostoliniowego interfejsu

Używając oznaczeń jak na Rys. 2.15 funkcje Airy'ego dla płaskiego interfejsu i dyslokacji można zapisać następująco:

- dla wektora Burgersa w kierunku x

$$\begin{aligned} \chi_{11}^{x\text{-str}} = & \frac{G_1 b_x^B}{\pi(\kappa + 1)} \left(- 2r_1 \log r_1 \sin \theta_1 + (B + A) r_2 \log r_2 \sin \theta_2 + \right. \\ & \left. + (B - A) r_2 \theta_2 \cos \theta_2 - 2Ac [\sin 2\theta_2 - 2c \frac{\sin \theta_2}{r_2}] \right), \end{aligned} \quad (2.55)$$



RYSUNEK 2.15. Dyslokacja w bimateriale.

$$\chi_{21}^{x\text{-str}} = \frac{G_1 b_x^B}{\pi(\kappa + 1)} \left(-(2 - A - B)r_1 \log r_1 \sin \theta_1 - (B - A)r_1 \theta_1 \cos \theta_1 + 2c\theta_1 \right), \quad (2.56)$$

- dla wektora Burgersa w kierunku y

$$\begin{aligned} \chi_{11}^{y\text{-str}} = \frac{G_1 b_y^B}{\pi(\kappa + 1)} & \left(2r_1 \log r_1 \cos \theta_1 - (B + A)r_2 \log r_2 \cos \theta_2 + \right. \\ & \left. + (B - A)r_2 \theta_2 \sin \theta_2 + 2Ac \left[2 \log r_2 - \cos 2\theta_2 + 2c \frac{\cos \theta_2}{r_2} \right] \right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\chi_{21}^{y\text{-str}} = \frac{G_1 b_y^B}{\pi(\kappa + 1)} \left((2 - A - B)r_1 \log r_1 \cos \theta_1 - (B - A)(r_1 \theta_1 \sin \theta_1 + 2c \log r_1) \right). \quad (2.58)$$

W przypadku, gdy dyslokacja znajduje się w drugim materiale, powyższe funkcje ze względu na symetrię rozwiązania są dalej właściwe pod warunkiem, że zmienimy stałe materiałowe.

Indeksy liczbowe przy nazwie funkcji opisują kolejno materiał, którego dotyczą oraz miejsce lokalizacji dyslokacji.

2.5.3. Dyslokacja w prostoliniowym interfejsie

Używając oznaczeń jak na Rys. 2.16 funkcje Airy'ego dla dyslokacji w interfejsie można zapisać następująco

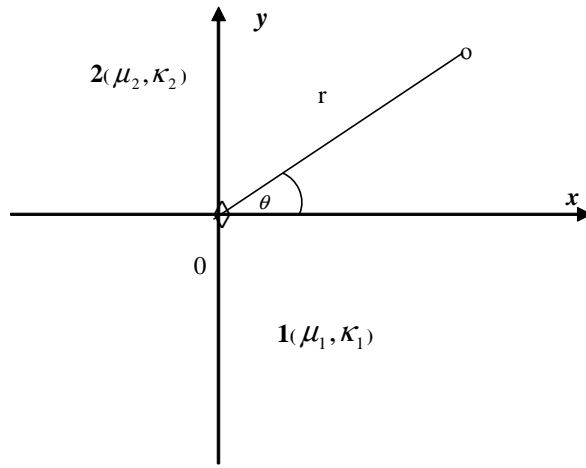
- dla wektora Burgersa w kierunku x

$$\chi_{11}^{x\text{-int}} = -\frac{G_1 b_x^B}{\pi(\kappa + 1)} \left(-(2 - A - B)r \log r \sin \theta - (B - A)r\theta \cos \theta \right), \quad (2.59)$$

$$\chi_{21}^{x\text{-int}} = -\frac{G_1 b_x^B}{\pi(\kappa + 1)} \left(-(2 - A - B)r \log r \sin \theta + (B - A)r\theta \cos \theta \right), \quad (2.60)$$

- dla wektora Burgersa w kierunku y

$$\chi_{21}^{y\text{-int}} = \frac{G_1 b_y^B}{\pi(\kappa + 1)} \left((2 - A - B)r \log r \cos \theta - (B - A)r\theta \sin \theta \right), \quad (2.61)$$



RYSUNEK 2.16. Dyslokacja w interfejsie

$$\chi_1^{y\text{-int}} = \frac{G_1 b_y^B}{\pi(\kappa + 1)} \left((2 - A - B)r \log r \cos \theta + (B - A)r\theta \sin \theta \right). \quad (2.62)$$

2.6. Pole naprężenia od pojedynczej dyslokacji. Funkcje Greena.

Wykorzystując funkcje Airy'ego oraz następujące wyrażenia:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4} \nabla^2 \chi, \quad \nabla^2 \psi = 0, \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= -\frac{\partial \chi}{\partial x} + (\kappa + 1) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ 2Gu_y &= -\frac{\partial \chi}{\partial y} + (\kappa + 1) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (2.65)$$

można uzyskać naprężenie w dowolnym punkcie matrycy zależne od położenia dyslokacji i rodzaju interfejsu.

2.6.1. W sąsiedztwie sferycznej inkluzji

Pole naprężenia w matrycy, którego źródłem jest dyslokacja krawędziowa w sąsiedztwie sferycznej inkluzji można wyrazić w postaci [59]:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_{yy}^{1\text{-inc}}(x, y, c_o) &= h_{yy1}^{\text{inc}}(x, y, c_o) b_x^B + h_{yy2}^{\text{inc}}(x, y, c_o) b_y^B, \\ \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_{xx}^{1\text{-inc}}(x, y, c_o) &= h_{xx1}^{\text{inc}}(x, y, c_o) b_x^B + h_{xx2}^{\text{inc}}(x, y, c_o) b_y^B, \\ \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_{xy}^{1\text{-inc}}(x, y, c_o) &= h_{xy1}^{\text{inc}}(x, y, c_o) b_x^B + h_{xy2}^{\text{inc}}(x, y, c_o) b_y^B, \end{aligned} \quad (2.66)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
h_{yy1}^{\text{inc}} &= -2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} + (3A - B - 4A \frac{x_2^2}{r_2^2}) \frac{y}{r_2^2} - 2A \frac{\beta^2 - 1}{\beta^3} \frac{R}{r_2^2} \left[-\frac{6x_2y}{r_2^2} + \frac{8x_2^3y}{r_2^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \left(1 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \frac{Ry}{r_2^2} \right] + \frac{B - A}{\beta} \frac{2xyR}{r^4} + 2A \left(1 - \frac{4x^2}{r^2}\right) \frac{R^2y}{r^4}, \\
h_{xx1}^{\text{inc}} &= -2\left(1 + \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} + \left[B + A \left(1 + \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \right] \frac{y}{r_2^2} - \left[B + A \left(1 + \frac{4x^2}{r^2}\right) \right] \frac{y}{r^2} - 2 \frac{B - A}{\beta} \frac{xyR}{r^4} - \\
&\quad - 2A \left(1 - \frac{4x^2}{r^2}\right) \frac{R^2y}{r^4} - A \frac{\beta^2 - 1}{\beta^3} \frac{2yR}{r_2^2} \left[\left(1 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \frac{2x_2}{r_2^2} - \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \left(1 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \frac{R}{r_2^2} \right], \\
h_{xy1}^{\text{inc}} &= -2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} + (3A - B - 4A \frac{x_2^2}{r_2^2}) \frac{x_2}{r_2^2} - \\
&\quad - 2A \frac{\beta^2 - 1}{\beta^3} \left[1 - \frac{8x_2^2}{r_2^2} + \frac{8x_2^4}{r_2^4} + \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \left(3 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \frac{Rx_2}{r_2^2} \right] \frac{R}{r_2^2} - \quad (2.67) \\
&\quad - (3A - B - 4A \frac{x^2}{r^2}) \frac{x}{r^2} - (B - A) \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{2x^2}{r^2}\right) \frac{R}{r^2} + 2A \left(3 - \frac{4x^2}{r^2}\right) \frac{R^2x}{r^4}, \\
h_{yy2}^{\text{inc}} &= 2\left(3 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} - (5A + B - 4A \frac{x_2^2}{r_2^2}) \frac{x_2}{r_2^2} + (5A + B - 4A \frac{x^2}{r^2}) \frac{x}{r^2} - \\
&\quad - A \frac{\beta^2 - 1}{\beta^3} \left[2(2 - \beta^2) - 4(5 - \beta^2) \frac{x_2^2}{r_2^2} + 16 \frac{x_2^4}{r_2^4} + 2 \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \left(3 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \frac{Rx_2}{r_2^2} \right] \frac{R}{r_2^2} - \\
&\quad - 2A \left(3 - \frac{4x^2}{r^2}\right) \frac{R^2x}{r^4} - \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{2x^2}{r^2}\right) \frac{R}{r^2} \left[A(2\beta^2 - 1) + M(1 + \kappa_2) - 1 \right], \\
h_{xx2}^{\text{inc}} &= -2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} + \left[B + A \left(1 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \right] \frac{x_2}{r_2^2} - \left[B + A \left(1 - \frac{4x^2}{r^2}\right) \right] \frac{x}{r^2} - \\
&\quad - A \frac{\beta^2 - 1}{\beta^3} \left[2\beta^2 \left(1 - \frac{2x_2^2}{r_2^2}\right) + 4 \left(3 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \frac{x_2^2}{r_2^2} - 2 \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \left(3 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \frac{Rx_2}{r_2^2} \right] \frac{R}{r_2^2} + \\
&\quad + \left[A(2\beta^2 - 1) + M(1 + \kappa_2) - 1 \right] \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{2x^2}{r^2}\right) \frac{R}{r^2} + 2A \left(3 - \frac{4x^2}{r^2}\right) \frac{R^2x}{r^4}, \\
h_{xy2}^{\text{inc}} &= -2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} + \left[B + A \left(1 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \right] \frac{y}{r_2^2} - \left[B + A \left(1 - \frac{4x^2}{r^2}\right) \right] \frac{y}{r^2} + \\
&\quad + 2A \frac{\beta^2 - 1}{\beta^3} \left[\left(2\beta^2 - 4 + \frac{8x_2^2}{r_2^2}\right) \frac{x_2y}{r_2^2} + \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \left(1 - \frac{4x_2^2}{r_2^2}\right) \frac{Ry}{r_2^2} \right] \frac{R}{r_2^2} - \\
&\quad - \left[A(2\beta^2 - 1) + M(1 + \kappa_2) - 1 \right] \frac{1}{\beta} \frac{2xyR}{r^4} + 2A \left(1 - \frac{4x^2}{r^2}\right) \frac{R^2y}{r^4},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\beta = \frac{c_o}{R}, \quad A = \frac{1-m}{1+m\kappa_1}, \quad B = \frac{\kappa_2 - m\kappa_1}{\kappa_2 + m},$$

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad M = \frac{m(1+\kappa_1)}{(m+\kappa_2)(\kappa_2-1+2m)},$$

$$x_1 = x - c_o, \quad x_2 = x - \frac{R^2}{c_o}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

$$r_1^2 = (x - c_o)^2 + y^2, \quad r_2^2 = \left(x - \frac{R^2}{c_o}\right)^2 + y^2.$$

2.6.2. W sąsiedztwie prostoliniowego interfejsu

Pole naprężenia w materiale "1" od dyslokacji zlokalizowanej w tym samym materiale można otrzymać na podstawie [57] w postaci:

$$\frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_{yy}^{1\text{-str}}(x, y, c_o) = h_{yy1}^{\text{str1}}(x, y, c_o) b_x^B + h_{yy2}^{\text{str1}}(x, y, c_o) b_y^B,$$

$$\frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_{xx}^{1\text{-str}}(x, y, c_o) = h_{xx1}^{\text{str1}}(x, y, c_o) b_x^B + h_{xx2}^{\text{str1}}(x, y, c_o) b_y^B, \quad (2.68)$$

$$\frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_{xy}^{1\text{-str}}(x, y, c_o) = h_{xy1}^{\text{str1}}(x, y, c_o) b_x^B + h_{xy2}^{\text{str1}}(x, y, c_o) b_y^B,$$

gdzie

$$h_{yy1}^{\text{str1}} = -2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} + (3A - B - \frac{8Ac^2}{r_2^2}) \frac{y}{r_2^2} + \frac{x_2 y}{r_2^4} \left(-4Ax_2 + 24Ac - 32Ac \frac{x_2^2}{r_2^2} + 32Ac^2 \frac{x_2^2}{r_2^2}\right),$$

$$h_{xx1}^{\text{str1}} = -2\left(1 + \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} + \left(B + A + 4A \frac{x_2^2}{r_2^2} - 8Ac \frac{x_2}{r_2^2} + 32Ac \frac{x_2^3}{r_2^4} + 8Ac^2 \frac{1}{r_2^2} - 32Ac^2 \frac{x_2^2}{r_2^4}\right) \frac{y}{r_2^2},$$

$$h_{xy1}^{\text{str1}} = -2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} + \left(3A - B - 4A \frac{x_2^2}{r_2^2} - 4Ac \frac{1}{x_2} + 32Ac \frac{x_2}{r_2^2} - 32Ac \frac{x_2^3}{r_2^4} - 24Ac^2 \frac{1}{r_2^2} + 32Ac^2 \frac{x_2^2}{r_2^4}\right) \frac{x_2}{r_2^2},$$

$$h_{yy2}^{\text{str1}} = 2\left(3 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} + \left(-5A - B + 4A \frac{x_2^2}{r_2^2} + 32Ac \frac{x_2}{r_2^2} - 32Ac \frac{x_2^3}{r_2^4} - 24Ac^2 \frac{1}{r_2^2} + 32Ac^2 \frac{x_2^2}{r_2^4}\right) \frac{x_2}{r_2^2} - 4A \frac{c}{r_2^2},$$

$$h_{xx2}^{\text{str1}} = -2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} + \left(A + B - 4A \frac{x_2^2}{r_2^2} - 16Ac \frac{x_2}{r_2^2} + 32Ac \frac{x_2^3}{r_2^4} + 24Ac^2 \frac{1}{r_2^2} - 32Ac^2 \frac{x_2^2}{r_2^4}\right) \frac{x_2}{r_2^2} - 4A \frac{c}{x_2},$$

$$h_{xy2}^{\text{str1}} = -2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right)\frac{y}{r_1^2} + \left(A + B - 4A\frac{x_2^2}{r_2^2} + 8Ac\frac{x_2}{r_2^2} - 16Ac\frac{x_2}{r_2^2} + 32Ac\frac{x_2^3}{r_2^4} + \frac{8Ac^2}{r_2^2} - 32Ac^2\frac{x_2^2}{r_2^4}\right)\frac{y}{r_2^2},$$

gdzie $x_1 = x - c_o$, $x_2 = x + c_o$.

W przypadku, gdy dyslokacja pozostaje w materiale "1", to pole naprężenia w sąsiednim materiale "2" można wyrazić jako:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1}\sigma_{yy}^{2-\text{str}}(x, y, c_o) &= h_{yy1}^{\text{str2}}(x, y, c_o)b_x^B + h_{yy2}^{\text{str2}}(x, y, c_o)b_y^B, \\ \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1}\sigma_{xx}^{2-\text{str}}(x, y, c_o) &= h_{xx1}^{\text{str2}}(x, y, c_o)b_x^B + h_{xx2}^{\text{str2}}(x, y, c_o)b_y^B, \\ \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1}\sigma_{xy}^{2-\text{str}}(x, y, c_o) &= h_{xy1}^{\text{str2}}(x, y, c_o)b_x^B + h_{xy2}^{\text{str2}}(x, y, c_o)b_y^B, \end{aligned} \quad (2.69)$$

gdzie

$$\begin{aligned} h_{xx1}^{\text{str2}} &= -(2 - A - B)\left(\frac{y}{r_1^2} + \frac{2x_1^2y}{r_1^4}\right) + (B - A)\frac{2x_1^2y}{r_1^4} - 2c\frac{2x_1y}{r_1^4}, \\ h_{xy1}^{\text{str2}} &= -(2 - A - B)\left(\frac{x_1}{r_1^2} - \frac{2x_1^3}{r_1^4}\right) - (B - A)\left(-\frac{2x_1}{r_1^2} + \frac{2x_1^3}{r_1^4}\right) + 2c\left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{2x_1^2}{r_1^4}\right), \\ h_{yy1}^{\text{str2}} &= -(2 - A - B)\left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{2x_1^2y}{r_1^4}\right) - (B - A)\left(-\frac{2y}{r_1^2} + \frac{2x_1^2y}{r_1^4}\right) + 2c\frac{2x_1y}{r_1^4}, \\ h_{xx2}^{\text{str2}} &= (2 - A - B)\left(-\frac{x_1}{r_1^2} + \frac{2x_1^3}{r_1^4}\right) - (B - A)\left[\frac{2x_1^3}{r_1^4} + 2c\left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{2x_1^2}{r_1^4}\right)\right], \\ h_{xy2}^{\text{str2}} &= (2 - A - B)\left(-\frac{y}{r_1^2} + \frac{2x_1^2y}{r_1^4}\right) - (B - A)\left[\frac{2x_1^2y}{r_1^4} + 2c\frac{2x_1y}{r_1^4}\right], \\ h_{yy2}^{\text{str2}} &= (2 - A - B)\left(\frac{3x_1}{r_1^2} - \frac{2x_1^3}{r_1^4}\right) - (B - A)\left[\frac{2x_1}{r_1^2} - \frac{2x_1^3}{r_1^4} + 2c\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{2x_1^2}{r_1^4}\right)\right]. \end{aligned}$$

W sytuacji gdy dyslokacja znajduje się w materiale "2" równania powyższe są właściwe z zachowaniem uwag z Podrozdziału 2.5.2.

2.6.3. W prostoliniowym interfejsie

Dla dyslokacji w interfejsie pole naprężenia można wyrazić następująco, por. [57]:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1}\sigma_{yy}^{1-\text{int}}(x, y, c_o) &= h_{yy1}^{\text{int}}(x, y, c_o)b_x^B + h_{yy2}^{\text{int}}(x, y, c_o)b_y^B, \\ \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1}\sigma_{xx}^{1-\text{int}}(x, y, c_o) &= h_{xx1}^{\text{int}}(x, y, c_o)b_x^B + h_{xx2}^{\text{int}}(x, y, c_o)b_y^B, \\ \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1}\sigma_{xy}^{1-\text{int}}(x, y, c_o) &= h_{xy1}^{\text{int}}(x, y, c_o)b_x^B + h_{xy2}^{\text{int}}(x, y, c_o)b_y^B, \end{aligned} \quad (2.70)$$

gdzie

$$h_{yy1}^{\text{int}} = -(B - 3A + 2)\frac{y}{r^2} - 4\frac{x^2y}{r^4}\left(A - 1\right),$$

$$\begin{aligned}
h_{xx1}^{int} &= -(2 - A - B) \frac{y}{r^2} - 4 \frac{x^2 y}{r^4} (1 - A), \\
h_{xy1}^{int} &= -(2 - 3A + B) \frac{x}{r^2} + 4 \frac{x^3}{r^4} (1 + A), \\
h_{yy2}^{int} &= (6 - 5A - B) \frac{x}{r^2} + 4 \frac{x^3}{r^4} (A - 1), \\
h_{xx2}^{int} &= (-2 + A + B) \frac{x}{r^2} + 4 \frac{x^3}{r^4} (1 - A), \\
h_{xy2}^{int} &= (-2 + A + B) \frac{y}{r^2} + 4 \frac{x^2 y}{r^4} (1 - A).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

2.7. Zastosowanie metody

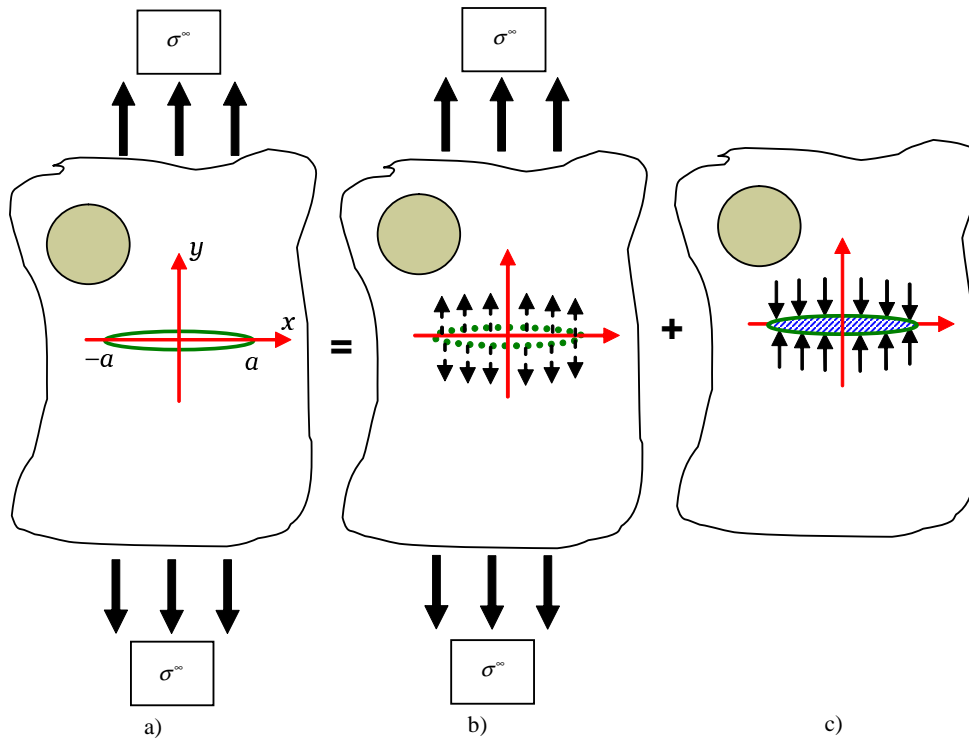
W tym rozdziale będzie zaprezentowane rozwiązanie dla przypadków pojedynczych szczelin umieszczonych w sąsiedztwie dwóch rodzaju interfejsów: prostoliniowego i sferycznej inkluzji. Następnie metoda będzie uogólniona na zagadnienie z dowolną liczbą szczelin oraz możliwością ich łączenia, czego konsekwencją będzie możliwość zastosowania jej do analizy zmęczeniowej propagacji szczeliny. Punktem wyjściowym prezentowanych rozważań jest wprowadzenie z Podrozdziału 2.4.2 oraz praca [59], w której autorzy rozpatrują problem sferycznej inkluzji umieszczonej w nieskończenie dużej matrycy oraz dowolnie zorientowaną szczelinę. Zgodnie z założeniami metody zadanie wymaga rozwiązania kilku problemów, mianowicie:

- **Problem A.** Dotyczy on sferycznego, sprężystego wtrącenia (inkluzji) zatopionego w matrycy bez szczeliny, por. Rys. 2.17.b, w której pole naprężenia wynika z obciążenia zewnętrznego (rozwiązanie podane w [47], patrz Dodatek). Dla rozważanego zagadnienia szczególnie istotne są wartości składowych naprężenia $\bar{\sigma}(x, y)$ wzdłuż linii, gdzie szczelina ma być zlokalizowana ($y = 0, |x| < a$).
- **Problem B.** Należy tu rozważyć problem inkluzji oraz szczeliny bez obciążenia zewnętrznego, por. Rys. 2.17.c. W tym przypadku pole naprężenia w materiale, $\bar{\sigma}(x, y)$, jest rezultatem działania sił na powierzchni szczeliny. Jak wspomniano poprzednio siły te mogą być rozumiane jako rezultat oddziaływania nierzeczywistego, dodatkowego materiału oddzielającego powierzchnie szczeliny. Szczególnie istotne są wartości naprężenia wzdłuż linii szczeliny, $y = 0$.

Zgodnie z zasadą superpozycji (2.29) oraz wyrażeniem (2.30) formułuje się równania początkowe na linii lokalizacji szczeliny:

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(x, 0) &= \bar{\sigma}_{yy}(x, 0) + \bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x, 0) = 0, \quad |x| < a, \\
\sigma_{xy}(x, 0) &= \bar{\sigma}_{xy}(x, 0) + \bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| < a, \\
\bar{\bar{\sigma}}_{yy}, \bar{\bar{\sigma}}_{xy}, \bar{\bar{\sigma}}_{xx} &\rightarrow 0, \quad \text{gdy } x, y \rightarrow \pm\infty,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

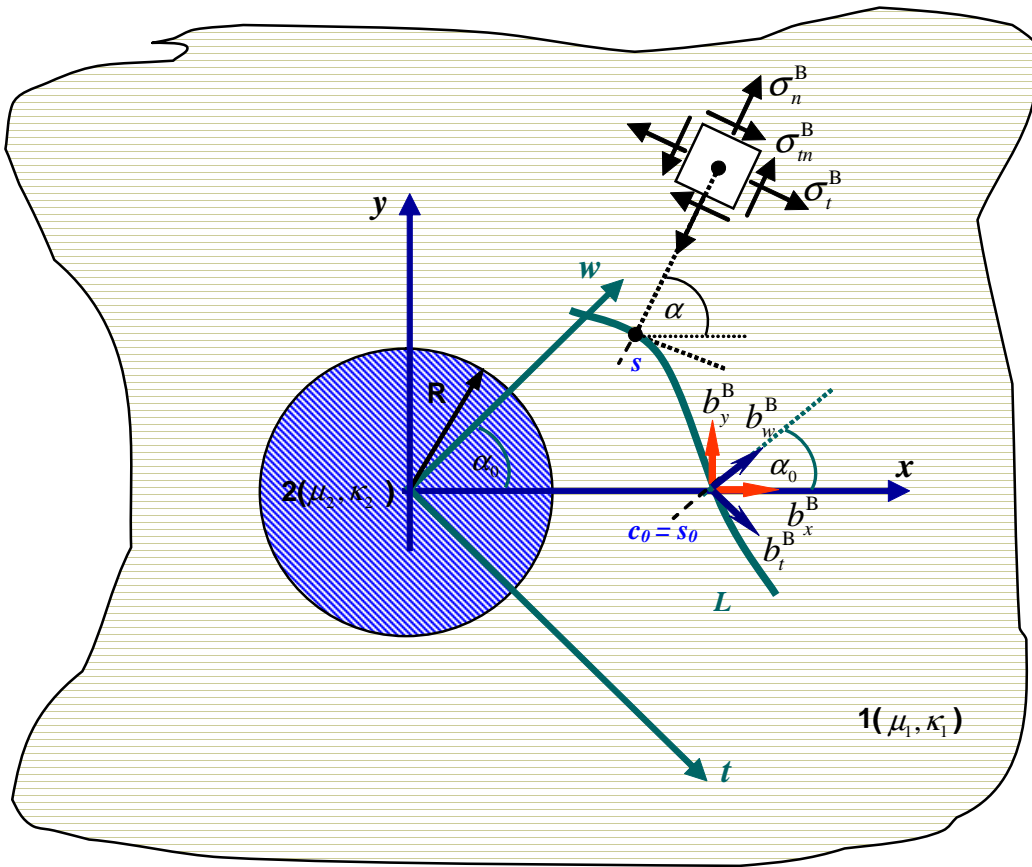
gdzie do rozwiązania problemu B, $\bar{\sigma}(x, y)$, wykorzystuje się model szczeliny reprezentowany przez ciągły rozkład dyslokacji krawędziowych. Do rozwiązania należy wykorzystać odpowiadającą problemowi funkcję Greena zdefiniowaną w podrozdziale 2.6.1. W przypadku czystego rozciągania szczeliny, por. Rys. 2.17, $\bar{\sigma}_{xy}(x, 0) = 0$.



RYSUNEK 2.17. Konfiguracja szczeliny i inkluzji w nieskończonej matrycy. Zasada superpozycji.

Zgodnie z [59] oraz [60] można opisaną powyżej metodę uogólnić tak, aby była możliwość jej zastosowania dla przypadku wielu szczelin. Przyjmujemy wtedy, że matryca zawiera „cięcie” wzdłuż gładkiego łuku L przechodzącego przez punkt $(c_0, 0)$, por. Rys. 2.18. Następnie przyjmijmy $\sigma_n(s)$ i $\sigma_{nt}(s)$ $s \in L$ jako odpowiednio, normalną i styczną, składową wektora naprężenia na L w kompozycie bez cięcia, obie zależne jedynie od obciążenia zewnętrznego (rozwiązanie problemu A, $\bar{\sigma}(x, y)$). Weźmy następnie punkt $(c_0, 0)$ odpowiadający punktowi $s = s_0$ na L (s jest długością mierzoną na linii L) będący lokalizacją dyslokacji charakteryzowanej wektorem Burgersa, b_x^B i b_y^B . Wówczas wykorzystując wyrażenia (2.66) można uzyskać składowe naprężenia w punktach zlokalizowanych na L w kompozycie bez „cięcia”, których jedynym źródłem jest opisywana dyslokacja w nowym układzie współrzędnych (t, w) , gdzie składowe naprężenia zależą od (b_t^B, b_w^B) . Oznaczając $\alpha = \alpha(s)$ jako kąt pomiędzy osią x , a normalną do powierzchni w punkcie s ($\alpha_0 = \alpha(s_0)$) oraz pamiętając, że (2.66) jest ważne dla $x, y \in L$, składowe naprężenia w punkcie s od pojedynczej dyslokacji umieszczonej w punkcie s_0 , $\sigma_n^B(s, s_0)$ i $\sigma_{tn}^B(s, s_0)$, można wyrazić jako:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_n^B(s, s_0) &= h_{n1}(s, s_0) b_t^B + h_{n2}(s, s_0) b_w^B, \\ \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_{tn}^B(s, s_0) &= h_{tn1}(s, s_0) b_t^B + h_{tn2}(s, s_0) b_w^B, \end{aligned} \quad (2.73)$$

RYSUNEK 2.18. Konfiguracja sferycznej inkluzji, pojedynczej dyslokacji i gładkiego łuku L .

gdzie b_t^B, b_w^B są składowymi wektora Burgersa w nowym układzie współrzędnych (t, w) oraz $h_{nv}, h_{tnv}, (v = 1, 2)$ są dane przez:

$$\begin{aligned}
 h_{n1} &= (h_{xx1} \sin \alpha_0 - h_{xx2} \cos \alpha_0) \cos^2 \alpha + (h_{yy1} \sin \alpha_0 - h_{yy2} \cos \alpha_0) \sin^2 \alpha + \\
 &\quad + 2(h_{xy1} \sin \alpha_0 - h_{xy2} \cos \alpha_0) \sin \alpha \cos \alpha, \\
 h_{n2} &= (h_{xx1} \cos \alpha_0 + h_{xx2} \sin \alpha_0) \cos^2 \alpha + (h_{yy1} \cos \alpha_0 + h_{yy2} \sin \alpha_0) \sin^2 \alpha + \\
 &\quad + 2(h_{xy1} \cos \alpha_0 + h_{xy2} \sin \alpha_0) \sin \alpha \cos \alpha, \\
 h_{tn1} &= [(h_{xx1} - h_{yy1}) \sin \alpha_0 - (h_{xx2} - h_{yy2}) \cos \alpha_0] \sin \alpha \cos \alpha + \\
 &\quad + (h_{xy1} \sin \alpha_0 - h_{xy2} \cos \alpha_0)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha), \\
 h_{tn2} &= [(h_{xx1} - h_{yy1}) \cos \alpha_0 + (h_{xx2} - h_{yy2}) \sin \alpha_0] \sin \alpha \cos \alpha + \\
 &\quad + (h_{xy1} \cos \alpha_0 + h_{xy2} \sin \alpha_0)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha).
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Funkcje $h_{xxd}, h_{xyd}, h_{yyd}, (d = 1, 2)$ oznaczają wyrażenia $h_{xxd}^{\text{inc}}, h_{xyd}^{\text{inc}}, h_{yyd}^{\text{inc}}, (d = 1, 2)$ określone przez równania (2.67) i będą tak oznaczane w dalszej części rozdziału. Wyrażenie (2.74) jest konsekwencją transformacji składowych pola naprężenia (zależnej od kąta α) i wektora Burgersa do nowego układu współrzędnych (zależnego od kąta α_0) określonego na L (patrz Dodatek). Jeśli przyjmiemy, że b_t i b_w są ciągłą, nieznaną funkcją (zależną od s_0) na L ($\delta b_t^B = b_t(s_0)\delta s_0, \delta b_w^B = b_w(s_0)\delta s_0$), to rozwiązanie problemu B można sformułować

następująco:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_n(s) &= \int_L \sigma_n^B(s, s_o) ds_o = \int_L \left[h_{n1}(s, s_o) b_t(s_o) + h_{n2}(s, s_o) b_w(s_o) \right] ds_o, \\ \bar{\sigma}_{tn}(s) &= \int_L \sigma_{tn}^B(s, s_o) ds_o = \int_L \left[h_{tn1}(s, s_o) b_t(s_o) + h_{tn2}(s, s_o) b_w(s_o) \right] ds_o.\end{aligned}\quad (2.75)$$

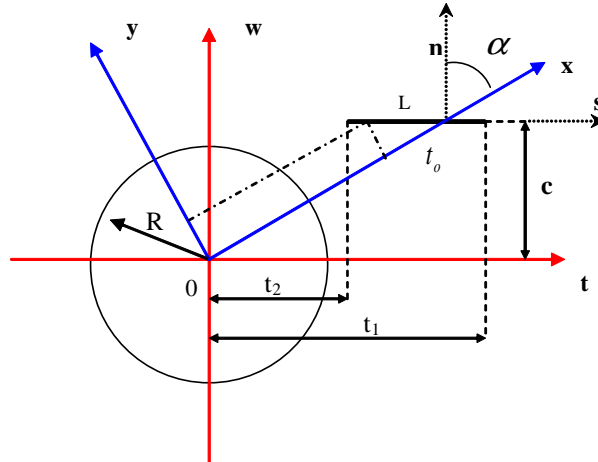
Wykorzystując zasadę superpozycji (2.29) oraz pamiętając, że $\bar{\sigma}_{tn}(s)$ i $\bar{\sigma}_n(s)$ to odpowiednio styczna i normalna składowa naprężenia na linii założonej lokalizacji szczeliny L (wynik rozwiązania problemu A), powstaje układ równań w postaci:

$$\begin{aligned}-\bar{\sigma}_n(s) &= \int_L \sigma_n^B(s, s_o) ds_o = \int_L \left[h_{n1}(s, s_o) b_t(s_o) + h_{n2}(s, s_o) b_w(s_o) \right] ds_o, \\ -\bar{\sigma}_{tn}(s) &= \int_L \sigma_{tn}^B(s, s_o) ds_o = \int_L \left[h_{tn1}(s, s_o) b_t(s_o) + h_{tn2}(s, s_o) b_w(s_o) \right] ds_o.\end{aligned}\quad (2.76)$$

Warunek dla wektora przemieszczenia wymaga, żeby gęstość dyslokacji spełniała warunek:

$$\begin{aligned}\int_L b_t(s_o) ds_o &= 0, \\ \int_L b_w(s_o) ds_o &= 0.\end{aligned}\quad (2.77)$$

Otrzymujemy więc układ równań (2.76) i (2.77) dla dowolnie zorientowanej szczeliny w kształcie łuku umieszczonej w sąsiedztwie sferycznej inkluzji.



RYSUNEK 2.19. Prostoliniowa szczelina w sąsiedztwie okrągłej inkluzji.

2.7.1. Sferyczna inkluzja i dowolnie zorientowana szczelina prostoliniowa

Rozważmy szczególny przypadek pojedynczej, prostoliniowej szczeliny, por. Rys. 2.19. Przyjmijmy (t, w) jako stały układ współrzędnych, przy czym końcowymi punktami szczeliny będą (t_1, c) i (t_2, c) . Zdefiniujemy również prostopadłe i styczne naprężenie wzdłuż

L , którego źródłem jest pojedyncza dyslokacja definiowana wektorem Burgersa b_x^B i b_y^B umieszczona w punkcie t_0 . Ze względu na to, że rozważany problem pojedynczej szczeliny nie wymaga transformowania wektorów b_x^B i b_y^B do układu wynikającego z położenia szczeliny (por. 2.73), wyrażenia (2.74) upraszczają się do postaci:

$$\begin{aligned} h_{n1}^p &= h_{xx1} \cos^2 \alpha + h_{yy1} \sin^2 \alpha + 2h_{xy1} \sin \alpha \cos \alpha, \\ h_{n2}^p &= h_{xx2} \cos^2 \alpha + h_{yy2} \sin^2 \alpha + 2h_{xy2} \sin \alpha \cos \alpha, \\ h_{tn1}^p &= (h_{xx1} - h_{yy1}) \sin \alpha \cos \alpha + h_{xy1} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha), \\ h_{tn2}^p &= (h_{xx2} - h_{yy2}) \sin \alpha \cos \alpha + h_{xy2} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Należy podkreślić, że stosowanie tych uproszczonych równań możliwe jest tylko w przypadku pojedynczej, prostoliniowej szczeliny. W wyniku wspomnianego uproszczenia równanie (2.73) sprowadza się do postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_n^B(s, s_o) &= h_{n1}^p(s, s_o) b_x^B + h_{n2}^p(s, s_o) b_y^B, \\ \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_t^B(s, s_o) &= h_{tn1}^p(s, s_o) b_x^B + h_{tn2}^p(s, s_o) b_y^B. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Natomiast wyrażenie (2.76) zapisujemy jako:

$$\begin{aligned} -\bar{\sigma}_n(s) &= \int_L \sigma_n^B(s, s_o) ds_o = \int_L \left[h_{n1}^p(s, s_o) b_x(s_o) + h_{n2}^p(s, s_o) b_y(s_o) \right] ds_o, \\ -\bar{\sigma}_{tn}(s) &= \int_L \sigma_{tn}^B(s, s_o) ds_o = \int_L \left[h_{tn1}^p(s, s_o) b_x(s_o) + h_{tn2}^p(s, s_o) b_y(s_o) \right] ds_o, \end{aligned} \quad (2.80)$$

a warunek (2.77) formułujemy jako

$$\begin{aligned} \int_L b_x(s_o) ds_o &= 0, \\ \int_L b_y(s_o) ds_o &= 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Tak więc w przypadku szczeliny prostoliniowej możliwe jest wyrażenie relacji i współczynników wymaganych do sformułowania systemu równań całkowych (2.80) w postaci zależnej od t , t_0 oraz b_x^B i b_y^B , czyli:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{t_0}{\sqrt{c^2 + t_0^2}}, & \cos \alpha &= \frac{c}{\sqrt{c^2 + t_0^2}}, \\ x &= t \sin \alpha + c \cos \alpha, & y &= c \sin \alpha - t \cos \alpha, \\ x_1 &= \frac{t_0(t - t_0)}{\sqrt{c^2 + t_0^2}}, & x_2 &= \frac{t_0 t + c^2 - R^2}{\sqrt{c^2 + t_0^2}}, & r^2 &= c^2 + t^2, \\ r_1^2 &= (t_0 - t)^2, & r_2^2 &= \frac{(t_0 t + c^2 - R^2)^2 + c^2(t_0 - t)^2}{c^2 + t_0^2}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Jeśli przyjmiemy naprężenie wzdłuż L otrzymane z rozwiązania bez szczeliny, $\bar{\sigma}(s)$, oraz wykorzystamy oznaczenia wynikające z Rys. 2.19, to definiując:

$$-\sigma_{ww}(t, c) = p_1(t), \quad -\sigma_{wt}(t, c) = p_2(t), \quad (2.83)$$

i

$$b_x(s_o) = -f_1(t_0), \quad b_y(s_o) = -f_2(t_0), \quad (2.84)$$

system równań całkowych (2.80) i warunek (2.81) możemy wyrazić jako:

$$\frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{2\mu_1} p_1(t) = \int_{t_2}^{t_1} \sum_{j=1}^2 K_{ij}^{\text{inc}}(t, t_0) f_j(t_0) dt_0, \quad (i = 1, 2; t_2 < t < t_1), \quad (2.85)$$

$$\int_{t_2}^{t_1} f_i(t) dt = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Jądro $K_{ij}^{\text{inc}}(t, t_0)$ reprezentuje wpływ dyslokacji umieszczonej w punkcie t_0 na punkt t . Można pokazać, że dla $t = t_0$ jądro to zawiera osobliwość typu Cauchy'ego w postaci:

$$\frac{x_1}{r_1^2} = -\left(\frac{t_0}{\sqrt{c^2 + t_0^2}}\right) \frac{1}{t_0 - t}, \quad \frac{y}{r_1^2} = \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 + t_0^2}}\right) \frac{1}{t_0 - t}. \quad (2.86)$$

Osobliwość tego typu można wyodrębnić z jądra równania całkowego wykorzystując transformację (2.78) zastosowaną do części osobliwej równań (2.66) w postaci:

$$\begin{aligned} h_{n1}^{\text{inc}-\sin}/2 &= h_{xx1}^{\text{inc}-\sin} \cos^2 \alpha + h_{yy1}^{\text{inc}-\sin} \sin^2 \alpha + 2h_{xy1}^{\text{inc}-\sin} \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= -\left(1 + \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} \cos^2 \alpha - \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} \sin^2 \alpha - 2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{y}{r_1^2} \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} h_{n2}^{\text{inc}-\sin}/2 &= h_{xx2}^{\text{inc}-\sin} \cos^2 \alpha + h_{yy2}^{\text{inc}-\sin} \sin^2 \alpha + 2h_{xy2}^{\text{inc}-\sin} \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= -\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} \cos^2 \alpha - \left(3 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} \sin^2 \alpha - 2\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{x_1}{r_1^2}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} h_{tn1}^{\text{inc}-\sin}/2 &= (h_{xx1}^{\text{inc}-\sin} - h_{yy1}^{\text{inc}-\sin}) \sin \alpha \cos \alpha + h_{xy1}^{\text{inc}-\sin} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\ &= \left[-\left(1 + \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} + \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2}\right] \sin \alpha \cos \alpha - \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \frac{x_1}{r_1^2}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} h_{tn2}^{\text{inc}-\sin}/2 &= (h_{xx2}^{\text{inc}-\sin} - h_{yy2}^{\text{inc}-\sin}) \sin \alpha \cos \alpha + h_{xy2}^{\text{inc}-\sin} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\ &= \left[-\left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2} - \left(3 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{x_1}{r_1^2}\right] \sin \alpha \cos \alpha - \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_1^2}\right) \frac{y}{r_1^2} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \frac{y}{r_1^2}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Wówczas system równań (2.85) można przekształcić do następującej postaci:

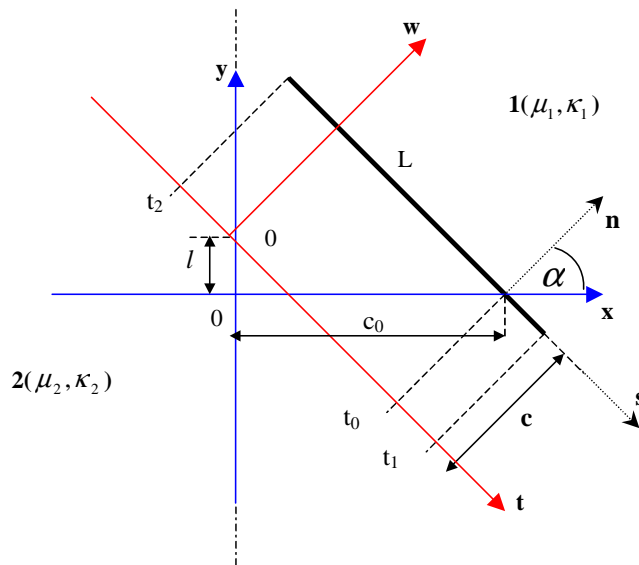
$$\begin{aligned} \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{2\mu_1} p_1(t) &= \int_{t_2}^{t_1} f_1(t_0) \frac{c}{\sqrt{c^2 + t_0^2}} \frac{dt_0}{t_0 - t} + \int_{t_2}^{t_1} k_{11}^{\text{inc}}(t, t_0) f_1(t_0) dt_0 + \\ &\quad \int_{t_2}^{t_1} f_2(t_0) \frac{t_0}{\sqrt{c^2 + t_0^2}} \frac{dt_0}{t_0 - t} + \int_{t_2}^{t_1} k_{12}^{\text{inc}}(t, t_0) f_2(t_0) dt_0, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{2\mu_1} p_2(t) = & \int_{t_2}^{t_1} f_1(t_0) \frac{t_0}{\sqrt{c^2 + t_0^2}} \frac{dt_0}{t_0 - t} + \int_{t_2}^{t_1} k_{21}^{\text{inc}}(t, t_0) f_1(t_0) dt_0, - \\ & \int_{t_2}^{t_1} f_2(t_0) \frac{c}{\sqrt{c^2 + t_0^2}} \frac{dt_0}{t_0 - t} + \int_{t_2}^{t_1} k_{22}^{\text{inc}}(t, t_0) f_2(t_0) dt_0, \end{aligned} \quad (2.92)$$

gdzie $k_{ij}^{\text{inc}}(t, t_0)$ jest jądrem nieosobliwym pozostałym po oddzieleniu części osobliwej (2.87–2.90) z przekształconych wyrażeń (2.66). Równania powyższe rozwiązywane są numerycznie (patrz podrozdział 2.4.3). Rozwiązanie inne niż numeryczne jest bardzo trudne już w przypadku pojedynczej szczeliny, a w docelowo rozważanym problemie pewnej dużej liczby prostoliniowych szczelin praktycznie niemożliwe.

2.7.2. Prostoliniowy interfejs i dowolnie zorientowana szczelina

W przypadku zmiany konfiguracji geometrycznej problemu niezbędne jest wykorzystanie właściwej funkcji Greena odpowiadającej zadanemu problemowi (2.68). Następnie modyfikując podane w poprzednim podrozdziale wyrażenia można uzyskać rozwiązanie dla szczeliny dowolnie zorientowanej w stosunku do prostoliniowego interfejsu. Przyjmijmy



RYSUNEK 2.20. Prostoliniowa szczelina w sąsiedztwie prostoliniowego interfejsu.

więc (t, w) jako stały układ współrzędnych oraz niech końcowymi punktami szczeliny będą (t_1, c) i (t_2, c) . Kąt α , określający pochylenie szczeliny jest w tym przypadku stały, por. Rys. 2.20. Relacje i współczynniki wymagane do wyrażenia systemu równań całkowych (2.75) w postaci zależnej od t , t_0 oraz od b_x^B , b_y^B można zapisać, por. Rys. 2.20,

jako:

$$\begin{aligned} l &= t_0 \cos \alpha - c \sin \alpha, \\ c_0 &= t_0 \sin \alpha + c \cos \alpha, \\ x &= t \sin \alpha + c \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} y &= c \sin \alpha - t \cos \alpha + l = \cos \alpha(t_0 - t), \\ x_1 &= \sin \alpha(t - t_0), \quad r_1^2 = (t - t_0)^2. \end{aligned}$$

Jeśli teraz przyjmiemy naprężenie na L otrzymane z rozwiązania bez szczeliny oraz oznaczenia jak na Rys. 2.20 to definiując

$$-\sigma_{ww}(t, c) = p_1(t), \quad -\sigma_{wt}(t, c) = p_2(t), \quad (2.94)$$

$$b_x(s_o) = -f_1(t_0), \quad b_y(s_o) = -f_2(t_0), \quad (2.95)$$

system równań całkowych (2.80) oraz warunków (2.81) możemy wyrazić jako:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{2\mu_1} p_1(t) &= \int_{t_2}^{t_1} \sum_{j=1}^2 K_{ij}^{\text{str}}(t, t_0) f_j(t_0) dt_0, \quad (i = 1, 2; t_2 < t < t_1) \\ \int_{t_2}^{t_1} f_i(t) dt &= 0, \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Wykorzystując w podobny sposób jak w wyrażeniach (2.87 – 2.90) transformację (2.78) oraz osobliwe części (2.68) można pokazać, że dla $t = t_0$ jądro $K_{ij}^{\text{str}}(t, t_0)$ posiada osobliwość typu Cauchy'ego:

$$\frac{x_1}{r_1^2} = -\sin \alpha \frac{1}{t_0 - t}, \quad \frac{y}{r_1^2} = \cos \alpha \frac{1}{t_0 - t}. \quad (2.97)$$

Postępując podobnie jak w przypadku inkluzji otrzymujemy:

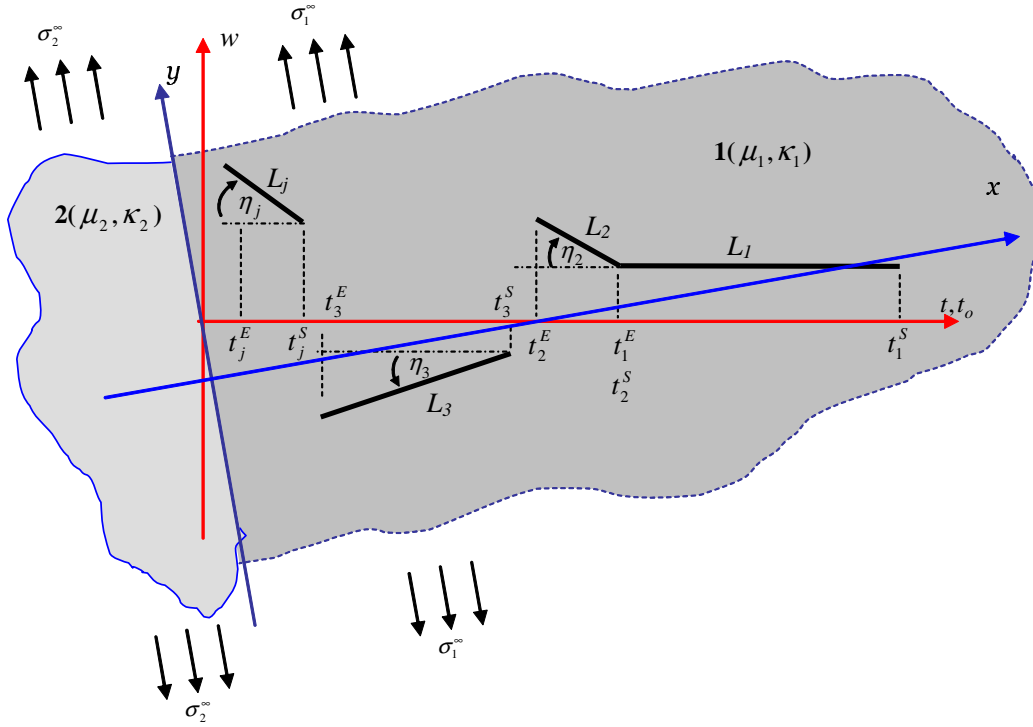
$$\begin{aligned} \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{2\mu_1} p_1(t) &= \int_{t_2}^{t_1} f_1(t_0) \cos \alpha \frac{dt_0}{t_0 - t} + \int_{t_2}^{t_1} k_{11}^{\text{str}}(t, t_0) f_1(t_0) dt_0 + \\ &\int_{t_2}^{t_1} f_2(t_0) \sin \alpha \frac{dt_0}{t_0 - t} + \int_{t_2}^{t_1} k_{12}^{\text{str}}(t, t_0) f_2(t_0) dt_0, \\ \frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{2\mu_1} p_2(t) &= \int_{t_2}^{t_1} f_1(t_0) \sin \alpha \frac{dt_0}{t_0 - t} + \int_{t_2}^{t_1} k_{21}^{\text{str}}(t, t_0) f_1(t_0) dt_0, - \\ &\int_{t_2}^{t_1} f_2(t_0) \cos \alpha \frac{dt_0}{t_0 - t} + \int_{t_2}^{t_1} k_{22}^{\text{str}}(t, t_0) f_2(t_0) dt_0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$(2.99)$$

gdzie $k_{ij}^{\text{str}}(t, t_0)$ jest jądrem nieosobliwym pozostałym po oddzieleniu części osobliwej z transformowanych wyrażań (2.68).

2.7.3. Ogólne sformułowania dla szczelin

Wykorzystując podstawowe rozwiązania podane w poprzednich rozdziałach możemy rozpatrzyć system N prostoliniowych szczelin L_j , por. Rys. 2.21. W tym przypadku wy-



RYSUNEK 2.21. Konfiguracja N – szczelin.

rażenia (2.75) przybierają następującą postać

$$\begin{aligned}
 -\sigma_n(t_j) &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{n1}(t_j, t_{oi})b_{ti}(t_{oi}) + h_{n2}(t_j, t_{oi})b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi}, \\
 -\sigma_{tn}(t_j) &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{tn1}(t_j, t_{oi})b_{ti}(t_{oi}) + h_{tn2}(t_j, t_{oi})b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi},
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

gdzie h_{nv}, h_{tv} , ($v = 1, 2$) są dane przez, por. Rys. 2.18:

$$\begin{aligned}
 h_{n1} &= (h_{xx1} \sin \alpha_{0i} - h_{xx2} \cos \alpha_{0i}) \cos^2 \alpha_j + (h_{yy1} \sin \alpha_{0i} - h_{yy2} \cos \alpha_{0i}) \sin^2 \alpha_j + \\
 &\quad + 2(h_{xy1} \sin \alpha_{0i} - h_{xy2} \cos \alpha_{0i}) \sin \alpha_j \cos \alpha_j, \\
 h_{n2} &= (h_{xx1} \cos \alpha_{0i} + h_{xx2} \sin \alpha_{0i}) \cos^2 \alpha_j + (h_{yy1} \cos \alpha_{0i} + h_{yy2} \sin \alpha_{0i}) \sin^2 \alpha_j + \\
 &\quad + 2(h_{xy1} \cos \alpha_{0i} + h_{xy2} \sin \alpha_{0i}) \sin \alpha_j \cos \alpha_j, \\
 h_{t1} &= [(h_{xx1} - h_{yy1}) \sin \alpha_{0i} - (h_{xx2} - h_{yy2}) \cos \alpha_{0i}] \sin \alpha_j \cos \alpha_j + \\
 &\quad + (h_{xy1} \sin \alpha_{0i} - h_{xy2} \cos \alpha_{0i})(\sin^2 \alpha_j - \cos^2 \alpha_j), \\
 h_{t2} &= [(h_{xx1} - h_{yy1}) \cos \alpha_{0i} + (h_{xx2} - h_{yy2}) \sin \alpha_{0i}] \sin \alpha_j \cos \alpha_j + \\
 &\quad + (h_{xy1} \cos \alpha_{0i} + h_{xy2} \sin \alpha_{0i})(\sin^2 \alpha_j - \cos^2 \alpha_j)
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

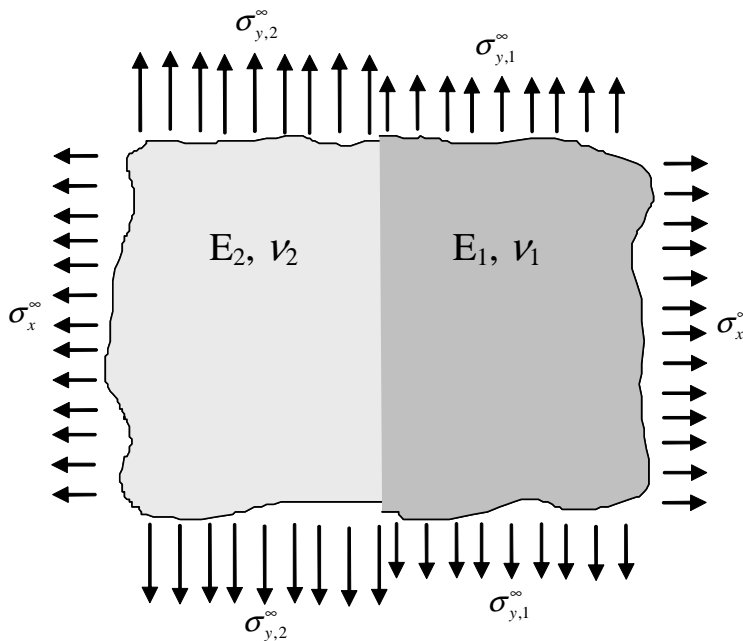
oraz

- $\sigma_n(t_j)$, $\sigma_{tn}(t_j)$ oznaczają normalne i styczne składowe naprężenia dla j -szczeliny (wynikające z rozwiązania problemu (A) - bez szczelin),
- b_{ti} , b_{wi} jest nieznaną, poszukiwaną i ciągłą funkcją (zależną od t_{0i}) właściwą dla i -tej szczeliny,
- η_j jest kątem pomiędzy głównym układem współrzędnych a j -tą szczeliną (dla głównej szczeliny $j = i = 1$, $\eta_1 = 0$).
- Należy zwrócić uwagę, że w przypadku bimediału, ze względu na warunek ciągłości odkształceń na połączeniu dwóch materiałów, naprężenia $\sigma_{y,2}^\infty$ oraz $\sigma_{y,1}^\infty$, por. Rys. 2.22, muszą spełniać następującą relację:

$$\sigma_{y,2}^\infty = \sigma_{y,1}^\infty \frac{E_2}{E_1} - \sigma_x^\infty \left(\nu_1 \frac{E_2}{E_1} - \nu_2 \right) \quad \text{dla płaskiego stanu naprężenia}$$

$$\sigma_{y,2}^\infty = \sigma_{y,1}^\infty \frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_2^2} \frac{E_2}{E_1} - \sigma_x^\infty \left(\frac{\nu_1(1 + \nu_1)}{1 - \nu_2^2} \frac{E_2}{E_1} - \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \right) \quad \text{dla płaskiego stanu odkształcenia,}$$

$$m = 1, \quad \sigma_{y,1}^\infty = \sigma_{y,2}^\infty, \quad \text{dla materiału jednorodnego.}$$



RYSUNEK 2.22. Przykład obciążenia bimediału.

Wprowadzając notację:

$$-\sigma_n(t_j) = p_n(t_j), \quad -\sigma_{tn}(t_j) = p_{tn}(t_j), \quad (2.102)$$

$$b_{wi}(t_{oi}) = -f_{ni}(t_{oi}), \quad b_{ti}(t_{oi}) = -f_{ti}(t_{oi}),$$

oraz oddzielając części osobliwe od nieosobliwych można, używając transformacji (2.101), zapisać równanie (2.100) w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
p_n(t_j) &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} \frac{2\mu_\zeta}{\pi(\kappa_\zeta + 1)} \left(\left[f_{ti}(t_{oi}) \frac{2 \sin \eta_i}{t_{oi} - t_j} + f_{ni}(t_{oi}) \frac{2 \cos \eta_i}{t_{oi} - t_j} + f_{ti}(t_{oi}) k_{ti}^{nj}(t_j, t_{oi}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f_{ni}(t_{oi}) k_{ni}^{nj}(t_j, t_{oi}) \right] \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \left[f_{ti}(t_{oi}) K_{ti}^{nj}(t_j, t_{oi}) + f_{ni}(t_{oi}) K_{ni}^{nj}(t_j, t_{oi}) \right] \right) \frac{dt_{oi}}{\cos \eta_i}, \\
p_{tn}(t_j) &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} \frac{2\mu_\zeta}{\pi(\kappa_\zeta + 1)} \left(\left[f_{ti}(t_{oi}) \frac{2 \cos \eta_i}{t_{oi} - t_j} - f_{ni}(t_{oi}) \frac{2 \sin \eta_i}{t_{oi} - t_j} + f_{ti}(t_{oi}) k_{ti}^{tj}(t_j, t_{oi}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f_{ni}(t_{oi}) k_{ni}^{tj}(t_j, t_{oi}) \right] \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \left[f_{ti}(t_{oi}) K_{ti}^{tj}(t_j, t_{oi}) + f_{ni}(t_{oi}) K_{ni}^{tj}(t_j, t_{oi}) \right] \right) \frac{dt_{oi}}{\cos \eta_i},
\end{aligned} \tag{2.103}$$

gdzie k_{ti}^{nj} , k_{ni}^{nj} , k_{ti}^{tj} , i k_{ni}^{tj} są nieosobliwymi składnikami przetransformowanych funkcji Greena dla punktów na tej samej szczelinie, tj. dla $i = j$. K_{ti}^{nj} , K_{ni}^{nj} , K_{ti}^{tj} , i K_{ni}^{tj} są to nieosobliwe składowe, które określają wpływ dyslokacji na linii L_i na naprężenie w punkcie o współrzędnej $t = t_j$ na linii L_j , czyli dla $i \neq j$. Zauważmy, że osobliwości występują tylko dla $i = j$ i są one typu Cauchy'ego. Wartość indeksu dla $\zeta = 1, 2$ zależy od tego, gdzie znajduje się aktualnie rozpatrywana dyslokacja. Dla dyslokacji w materiale 1 indeks $\zeta = 1$, dla dyslokacji w materiale 2 indeks $\zeta = 2$. Należy dodać, iż w przypadku formułowania równań całkowych dla szczeliny przechodzącej przez interfejs, należy ją traktować jako dwie oddzielne szczeliny, które łączą się w interfejsie. Spowodowane to jest koniecznością rozpatrzenia ze szczególną uwagą punktu przejścia szczeliny przez interfejs.

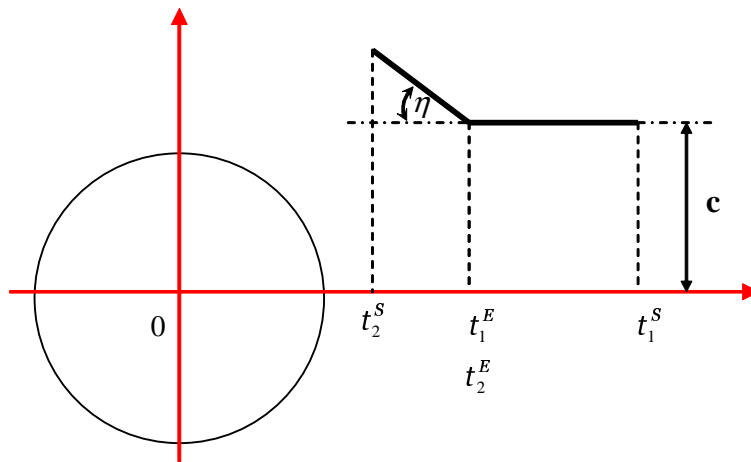
Dodatkowo gęstość dyslokacji musi spełniać warunek:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} \frac{f_{ti}(t_{oi})}{\cos \eta_i} dt_{oi} &= 0, \\
\sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} \frac{f_{ni}(t_{oi})}{\cos \eta_i} dt_{oi} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

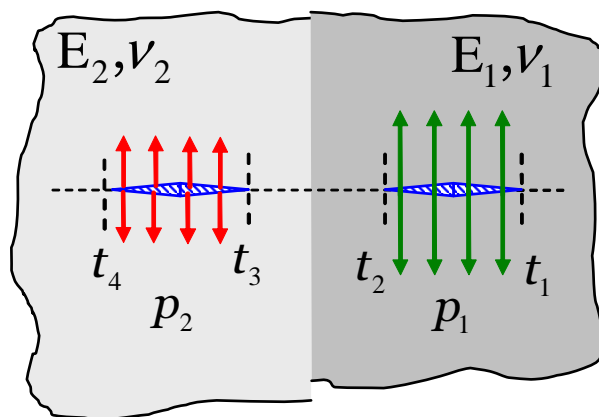
Powyższe równania, dzięki użyciu transformacji (2.101) są ważne również dla systemu szczelin w sąsiedztwie inkluzji. Wówczas należy użyć odpowiednich wyrażeń reprezentujących pole naprężenia od pojedynczej dyslokacji oraz przekształceń opisanych szczegółowo w poprzednich rozdziałach. Tak więc wyrażenia k_{ti}^{nj} , k_{ni}^{nj} , k_{ti}^{tj} , i k_{ni}^{tj} oraz K_{ti}^{nj} , K_{ni}^{nj} , K_{ti}^{tj} , i K_{ni}^{tj} zależne są o od rozwiązywanego problemu, choć zapis równań całkowych (2.103) może być taki sam.

Podstawowym przykładem zastosowania wyrażenia (2.103) jest szczelina z odgałęzieniem umieszczona w sąsiedztwie okrągłego wtrącenia, por. Rys. 2.23. Taki przypadek rozpatrywany był w pracy [60], w której sformułowane równania odpowiadają tym uzyskanym na podstawie (2.103).

W przypadku problemu dotyczącego szczelin w różnych materiałach system równań (2.103) będzie odpowiadał sytuacji jak na Rys. 2.24, która była rozważana w pracy [53].



RYSUNEK 2.23. Szczelina z odgałżeniem w sąsiedztwie inkluzji.



RYSUNEK 2.24. Dwie prostopadłe szczeliny w bimateryale.

2.8. Szczeliny w bimateryale.

2.8.1. Wstęp

Jeśli rozważania dotyczą modelowania dwóch połączonych materiałów, to nie ma możliwości uniknięcia problemu związanego z połączeniem tych komponentów – interfejsu. Wybór modelu interfejsu jest kluczowy, ponieważ determinuje zarówno cechy fizyczne, jak i numeryczne rozwiązanie. Najprostszym modelem połączenia jest założenie, że połączenie jest idealne czyli jest linią łączącą dwa materiały. Jednakże założenie to powoduje brak ciągłości właściwości materiału, a więc i stałych materiałowych. Jak będzie to pokazane, model taki jest źródłem wielu trudności. W przypadku szczeliny, która jest rozwarta (ang.: open crack) i umieszczona w tak zamodelowanym interfejsie otrzymuje się rozwiązanie, które ma charakter nierzeczywisty.

Innym modelem interfejsu jest zastąpienie idealnego połączenia cienką warstwą trzeciego materiału. Jednakże bardziej realistyczną wersją tego modelu wydaje się zastąpienie dodatkowego materiału przez warstwę, w której zmiana stałych sprężystych odbywa się w sposób ciągły. Powoduje to, że materiały tworzące kompozyt przechodzą jeden w drugi w sposób ciągły tworząc interfejs w określonej przestrzeni. Należy wówczas przyjąć "odpowiednią" funkcję opisującą zmianę stałych materiałowych w interfejsie możliwie dokładnie odwzorowującą tę sytuację.

W niniejszym rozdziale opisane zostaną powyższe modele wraz z próbą ich oceny.

Jeśli rozważymy szczelinę, która rozwija się w jednym z materiałów, a jej wierzchołek osiąga interfejs, to wówczas szczelina może:

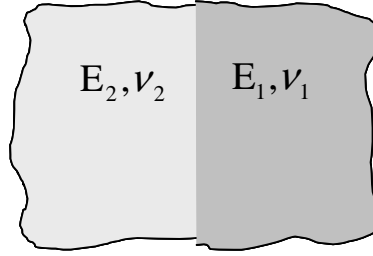
- kontynuować propagację w drugi materiał pod innym kątem propagacji w stosunku do interfejsu niż działo się to przed przejściem przez interfejs lub też kontynuować wzrost bez zmiany wartości kąta
- kontynuować wzrost w interfejsie
- "odbić się" od interfejsu
- zatrzymać się w interfejsie

Istnieje jeszcze możliwość, że początkowa szczelina będzie miała bezpośredni kontakt z interfejsem, np. będzie cała umiejscowiona między komponentami tworzącymi kompozyt. Takie umiejscowienie szczeliny jest bardzo istotne z punktu widzenia wytrzymałości kompozytów. Jest również najczęstszą lokalizacją defektów, a więc i początkowych szczelin, z których rozwija się pęknięcie. W niniejszym rozdziale dokonana zostanie próba przeglądu najważniejszych modeli interfejsu i konsekwencji ich przyjęcia.

Wszystkie te problemy muszą być rozważone, aby można było zaproponować efektywny model propagacji szczeliny w materiałach złożonych.

2.8.2. Idealne połączenie materiałów

Klasyczne rozważania dotyczą zwykle problemu szczeliny, która umieszczona jest w całości w materiale jednorodnym. Pole naprężenia w sąsiedztwie wierzchołka szczeliny można w tym przypadku wyrazić jako $\sigma_{ij} \propto r^{-1/2}$. Jednakże w przypadku szczeliny umieszczonej w interfejsie, rozumianym jako idealne połączenie dwóch różnych materiałów pole naprężenia posiada inny stopień osobliwości tzn.: $\sigma_{ij} \propto r^\lambda$, $\lambda \neq -1/2$.



RYSUNEK 2.25. Bimateriał - przypadek idealnego połączenia dwóch materiałów o różnych modułach sprężystych.

Szczelina rozwarta umieszczona w interfejsie. W tym paragrafie będzie mowa o modelu szczeliny rozwartej, umieszczonej w interfejsie. Historię badań nad tym problemem zapoczątkował Williams, który w roku 1959, [188], określił naturę pól naprężenia i odkształcenia w sąsiedztwie wierzchołka szczeliny umieszczonej w interfejsie. Później England, w roku 1965, [75], podał wyrażenie na pole naprężenia ($y = 0, |x| > a$, Rys. 2.26) w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}(x, 0)}{\sigma_{yy}^{\infty}} &= \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \left\{ \cos(\varepsilon \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|) + 2 \frac{a}{x} \varepsilon \sin(\varepsilon \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|) \right\}, \\ \frac{\sigma_{xy}(x, 0)}{\sigma_{yy}^{\infty}} &= \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \left\{ \sin(\varepsilon \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|) - 2 \frac{a}{x} \varepsilon \cos(\varepsilon \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|) \right\}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

gdzie znak \pm oznacza lewy i prawy wierzchołek szczeliny (w dalszej części rozważany będzie jedynie prawy wierzchołek szczeliny), ε jest stałą bisprężystą definiowaną jako

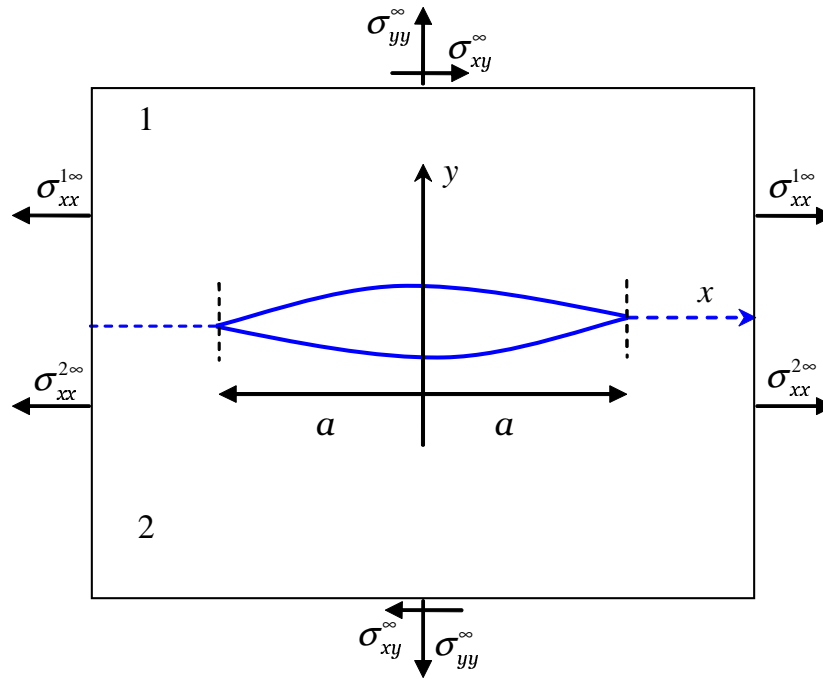
$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right), \quad (2.106)$$

gdzie β jest parametrem Dundursa:

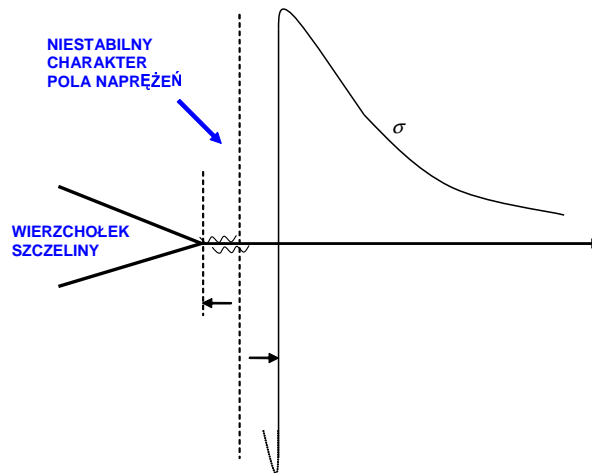
$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu_2(\kappa_1 + 1) - \mu_1(\kappa_2 + 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)}, \\ \beta &= \frac{\mu_2(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa_2 - 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Cechy charakterystyczne wyrażenia na pole naprężenia w przypadku szczeliny w interfejsie lub jego najbliższym sąsiedztwie to:

- Gdy $\beta = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$, wówczas wyrażenie (2.105) opisuje pole naprężenia w materiale jednorodnym.
- Nawet pomimo przyłożenia jedynie obciążenia rozciągającego, pojawia się składowa styczna, por. Rys. 2.26.
- Jeśli rozważymy obszar w najbliższym sąsiedztwie wierzchołka, to gdy $x \rightarrow \pm a$ wówczas $\ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \rightarrow \infty$. A więc dla $|x| - a \rightarrow 0$ trygonometryczna część wyrażenia oscyluje gwałtownie pomiędzy ± 1 , a znak zmienia się nieskończenie często w bezpośrednim sąsiedztwie wierzchołka. Ten obszar niestabilnego charakteru pola naprężenia jest stosunkowo niewielki, [75], przykładowo dla $\varepsilon = 0.1$ jest on równy około $10^{-7}a$ począwszy od wierzchołka szczeliny.



RYSUNEK 2.26. Model rozwartej szczeliny umieszczonej w idealnym interfejsie.



RYSUNEK 2.27. Charakter pól naprężenia w okolicy wierzchołka szczeliny w interfejsie.

- Zauważmy, że wyrażenie w postaci pierwiastka sumy kwadratów stycznej i normalnej składowych naprężenia, por. (2.105), traci charakter oscylacyjny:

$$\frac{\sqrt{\sigma_{yy}^2(x, 0) + \sigma_{xy}^2(x, 0)}}{\sigma_{yy}^{\infty}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{x}\varepsilon\right)^2}. \quad (2.108)$$

To spostrzeżenie będzie bezpośrednio wykorzystane w dalszych częściach pracy, w których użyty będzie współczynnik uwalniania energii, G .

Równanie (2.105) można zapisać również w postaci:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}(x, 0) + i\sigma_{xy}(x, 0) &= \frac{\sigma_{yy}^{\infty}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \left\{ \left(1 - 2i\frac{a}{x}\varepsilon \right) \left[\cos \left(\varepsilon \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \right) + i\sin \left(\varepsilon \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \right) \right] \right\} \\ &= \sigma_{yy}^{\infty} \frac{(x - 2ia\varepsilon)}{\sqrt{x^2 - a^2}} \left| \frac{x+a}{x-a} \right|^{i\varepsilon}.\end{aligned}\quad (2.109)$$

Erdogan [74] rozszerzył powyższe równanie na przypadek obciążenia rozciągającego i ścinającego:

$$\sigma_{yy}(x, 0) + i\sigma_{xy}(x, 0) = [\sigma_{yy}^{\infty} + i\sigma_{xy}^{\infty}] \frac{(x - 2ia\varepsilon)}{\sqrt{x^2 - a^2}} \left| \frac{x+a}{x-a} \right|^{i\varepsilon}.\quad (2.110)$$

W literaturze istnieje kilka definicji WIN dla szczeliny w interfejsie. Jedną z nich jest definicja podana przez Erdogana i Gupta [62], [76], postaci:

$$K = K_1 + iK_2 = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow a} \left\{ (x - a)^{1/2} \left(\frac{x - a}{x + a} \right)^{i\varepsilon} [\sigma_{yy}(x, 0) + i\sigma_{xy}(x, 0)] \right\},\quad (2.111)$$

z którego, wykorzystując równanie (2.110), otrzymujemy:

$$K = K_1 + iK_2 = [\sigma_{yy}^{\infty} + i\sigma_{xy}^{\infty}] \sqrt{\pi a} (1 - 2i\varepsilon).\quad (2.112)$$

Inną, nieznacznie różniącą się definicją jest ta podana przez Rice'a [71], [73] w następującej postaci:

$$k = k_1 + ik_2 = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow a} \{ (x - a)^{1/2} (x - a)^{i\varepsilon} [\sigma_{yy}(x, 0) + i\sigma_{xy}(x, 0)] \},\quad (2.113)$$

z której, wykorzystując również wyrażenie (2.110), otrzymujemy:

$$k = k_1 + ik_2 = [\sigma_{yy}^{\infty} + i\sigma_{xy}^{\infty}] \sqrt{\pi a} (1 - 2i\varepsilon) (2a)^{i\varepsilon},\quad (2.114)$$

lub

$$\begin{aligned}k &= k_1 + ik_2 = \\ &= [\sigma_{yy}^{\infty} + i\sigma_{xy}^{\infty}] \frac{\sqrt{\pi a}}{\cosh(\pi\varepsilon)} \left\{ [\cos(\varepsilon \ln(2a)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(2a))] - i[\sin(\varepsilon \ln(2a)) + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(2a))] \right\}.\end{aligned}\quad (2.115)$$

Wówczas wyrażenie na pole naprężenia, wykorzystując (2.114), można zapisać w ogólnie znanej postaci jako:

$$\left| \sigma_{yy}(x) + i\sigma_{xy}(x) \right|_{\theta=0} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} r^{i\varepsilon}.\quad (2.116)$$

W pracy [80] podano w sposób jednoznaczny wyrażenia na pole naprężenia w opisywanej konfiguracji materiału i szczeliny, a mianowicie:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^j &= \frac{K_1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[A^j f_{11}^1 - \frac{1}{A^j} \cos(\theta - \Theta) \right] - \frac{K_2}{2\sqrt{2\pi r}} \left[A^j f_{11}^2 + \frac{1}{A^j} \sin(\theta - \Theta) \right], \\ \sigma_{yy}^j &= \frac{K_1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[A^j f_{22}^1 + \frac{1}{A^j} \cos(\theta - \Theta) \right] - \frac{K_2}{2\sqrt{2\pi r}} \left[A^j f_{22}^2 - \frac{1}{A^j} \sin(\theta - \Theta) \right], \\ \sigma_{xy}^j &= \frac{K_1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[A^j f_{12}^1 - \frac{1}{A^j} \sin(\theta - \Theta) \right] - \frac{K_2}{2\sqrt{2\pi r}} \left[A^j f_{12}^2 - \frac{1}{A^j} \cos(\theta - \Theta) \right],\end{aligned}\quad (2.117)$$

gdzie,

$$\begin{aligned}
\Theta &= \varepsilon \ln\left(\frac{r}{2a}\right) + \frac{\theta}{2}, \\
A^1 &= e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}, \\
A^2 &= e^{\varepsilon(\pi+\theta)}, \\
f_{11}^1 &= 3\cos\Theta + 2\varepsilon\sin\theta\cos(\theta + \Theta) - \sin\theta\sin(\theta + \Theta), \\
f_{11}^2 &= 3\sin\Theta + 2\varepsilon\sin\theta\sin(\theta + \Theta) + \sin\theta\cos(\theta + \Theta), \\
f_{22}^1 &= \cos\Theta - 2\varepsilon\sin\theta\cos(\theta + \Theta) + \sin\theta\sin(\theta + \Theta), \\
f_{22}^2 &= \sin\Theta - 2\varepsilon\sin\theta\sin(\theta + \Theta) - \sin\theta\cos(\theta + \Theta), \\
f_{12}^1 &= \sin\Theta + 2\varepsilon\sin\theta\sin(\theta + \Theta) + \sin\theta\cos(\theta + \Theta), \\
f_{22}^2 &= -\cos\Theta - 2\varepsilon\theta\cos(\theta + \Theta) + \sin\theta\sin(\theta + \Theta).
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Indeks j oznacza tu jeden z dwóch materiałów tworzących bimatériau, a WIN użyty w powyższych równaniach został określony na podstawie definicji (2.111) oraz funkcji uzyskanej przez Rice'a [71], tzn.:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{\sqrt{\pi a}}{\cosh(\pi\varepsilon)} [\sigma_{yy}^\infty + 2\varepsilon\sigma_{xy}^\infty], \\
K_2 &= \frac{\sqrt{\pi a}}{\cosh(\pi\varepsilon)} [-\sigma_{xy}^\infty + 2\varepsilon\sigma_{yy}^\infty].
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Definicja ta jest zgodna z jednostką WIN [MPa $\sqrt{\text{m}}$] dla materiału jednorodnego. W przypadku definicji (2.115) nie jest to spełnione. Przez wiele lat było to powodem rozbieżności, aż do momentu, gdy Rice [73] zmodyfikował swoją definicję WIN w interfejsie wprowadzając wielkość charakteryzującą skalę, \hat{r} :

$$k^* = k_1^* + ik_2^* = k\hat{r}^{-i\varepsilon} \tag{2.120}$$

w wyniku czego:

$$\left| \sigma_{yy}(x) + i\sigma_{xy}(x) \right|_{\theta=0} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos\left(\varepsilon \ln \frac{r}{\hat{r}}\right) + i\sin\left(\varepsilon \ln \frac{r}{\hat{r}}\right) \right] \tag{2.121}$$

Jednakże rozwiązanie to nie jest jednoznaczne, ponieważ powstaje pytanie: jak dobrać wielkość \hat{r} ? Dodatkowo można zapisać, że:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xy})^2} &= \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\sqrt{2\pi r}}, \\
\arctan\left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xy}}\right) &= \arctan\left(\frac{k_1}{k_2}\right) - \varepsilon \ln\left(\frac{r}{\hat{r}}\right).
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Z równań tych wynika, iż moduł ze składowych naprężenia jest niezależny od wielkości \hat{r} , natomiast argument jest zależny od tej wartości. Rice zasugerował, że wartość \hat{r} może być przyjęta jako np. $1\mu\text{m}$. Jednak dowolność wyboru tej wartości jest źródłem niejednoznacznego określenia pól mechanicznych przed wierzchołkiem szczeliny.

Wielkości K_1 oraz K_2 (lub k_1 oraz k_2) są wprowadzone jako koncepcja zbliżona do sytuacji w materiale jednorodnym. Nie można ich jednak utożsamiać ze współczynnikami

K_I oraz K_{II} . Należy dodać, iż K_1 , K_2 (lub k_1 , k_2) są zależne od obciążenia, podobnie jak WIN dla materiału jednorodnego, oraz charakteryzują pole naprężenia przed wierzchołkiem szczeliny.

Bardzo interesującą wielkością nie posiadającą oscylacyjnego charakteru jest współczynnik uwalniania energii G . Wartość G można zdefiniować jako:

$$G = \frac{1}{2\delta a} \int_0^{\delta a} [\sigma_{yy}(x, a)g(x, a + \delta a) + \sigma_{xy}(x, a)h(x, a + \delta a)]dx = \frac{|K|^2}{4C}, \quad (2.123)$$

gdzie

$$\begin{aligned} g(x) &= u_y(x, 0^+) - u_y(x, 0^-), \\ h(x) &= u_x(x, 0^+) - u_x(x, 0^-), \\ C &= \frac{2\mu_1(1 + \alpha)}{(\kappa_1 + 1)(1 - \beta^2)} = \frac{2\mu_2(1 - \alpha)}{(\kappa_2 + 1)(1 - \beta^2)}, \\ |K| &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

oraz por. [72]

$$g(x) + ih(x) = [\sigma_{yy}^\infty + i\sigma_{xy}^\infty] \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{C\sqrt{1 - \beta^2}} \left| \frac{x + a}{x - a} \right|^{i\epsilon}. \quad (2.125)$$

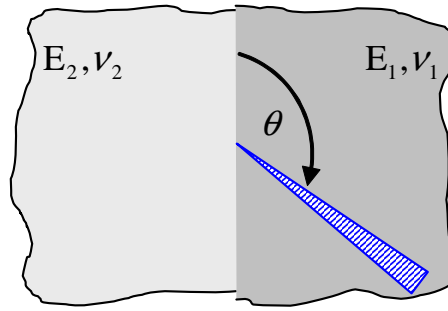
Współczynnik G jest więc parametrem uniwersalnym mogącym charakteryzować proces pęknięcia podobnie jak ma to miejsce w przypadku materiału jednorodnego.

Lokalizacja szczeliny a stopień osobliwości. Jak już wspomniano wyżej typ osobliwości pola naprężenia w okolicy wierzchołka rozwartej szczeliny w interfejsie ma charakter oscylacyjny postaci $\sigma_{ij} \sim r^{-1/2 \pm i\epsilon}$. Innym przypadkiem opisywanym przez wielu autorów jest szczelina, której jedynie jeden z wierzchołków umieszczony jest w idealnym interfejsie, a pozostała jej część leży w jednym z komponentów bimateriału. Stopień osobliwości będzie tu zależny od stałych sprężystych materiałów oraz od kąta szczeliny w stosunku do interfejsu. Stopień osobliwości będzie również odmienny w miejscu połączenia szczelin, czy też ich rozgałęzienia, nawet dla materiału jednorodnego. W tym przypadku stopień osobliwości możemy uzyskać z analizy Williamsa dla materiału jednorodnego. Jednakże w sytuacji bezpośredniej interakcji szczeliny z interfejsem powstaje zupełnie nowy rodzaj osobliwości.

Tak więc punkty osobliwe, które muszą być traktowane ze szczególną uwagą, są tożsame z punktami fizycznych osobliwości i nieciągłości (np. miejsce przecięcia interfejsu przez szczelinę, odgałęzienia szczeliny, czy też samego wierzchołka szczeliny). Określenie więc stopnia osobliwości charakteryzującego rozważany problem jest jednym z kluczowych zadań dla możliwości uzyskania wyrażeń opisujących pole naprężenia.

- **Prostoliniowa szczelina zakończona w interfejsie**

Rozważmy prostoliniową szczelinę nachyloną i dotykającą interfejs pod kątem θ . Punkt, w którym szczelina dotyka idealnego połączenia materiałów jest źródłem fizycznej osobliwości. Naturę tego rodzaju osobliwości pola naprężenia badał Bogy, [109]. Użył on techniki transformat Melliniego do określenia stopnia osobliwości, r^λ . Okazało się, iż λ może być zarówno liczbą rzeczywistą, jak i zespoloną, $\lambda = \text{Re}(\lambda) + i\text{Im}(\lambda)$, przy czym λ jest najmniejszym pierwiastkiem następującego równania:



RYSUNEK 2.28. Szczelina zakończona w idealnym interfejsie.

$$\begin{aligned}
 & [A\beta^2 - (2A - B)\beta + A - B + 1]\alpha^2 + \\
 & + [(-2A + B + C)\beta^3 + (4A - 2B - C + D + 2)\beta^2 - (2A - B + C)\beta + C - D]\alpha + \\
 & + (A - B - C + D + E + 1)\beta^4 - (2A - B - C)\beta^3 + (A + C - D - 2E)\beta^2 - \\
 & - C\beta + E \equiv 0,
 \end{aligned} \tag{2.126}$$

gdzie

$$A(\theta, \lambda) = 4(1 + \lambda)^4 \sin^4 \theta + \sin^2[(1 + \lambda)(2\theta - \pi)],$$

$$B(\theta, \lambda) = 4(1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta + 2 \sin^2[(1 + \lambda)(2\theta - \pi)],$$

$$C(\theta, \lambda) = 4(1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta \left\{ \sin^2[(1 + \lambda)\theta] + \sin^2[(1 + \lambda)(\theta - \pi)] - 1 \right\},$$

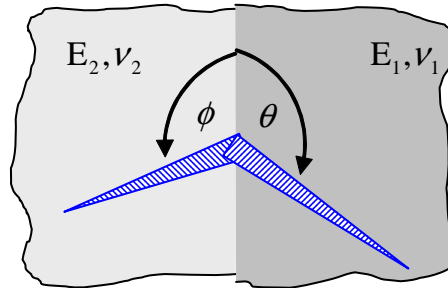
$$D(\theta, \lambda) = 2 \left\{ \sin^2[(1 + \lambda)\theta] + \sin^2[(1 + \lambda)(\theta - \pi)] - 1 \right\},$$

$$E(\theta, \lambda) = \cos^2[\lambda\pi].$$

O wyborze wartości λ decyduje $\text{Re}(\lambda)$ również w przypadku pierwiastka zespolonego. W przypadku, gdy $\theta = 0, \pm 2\pi$ mamy do czynienia ze szczeliną w interfejsie, a λ przyjmuje znaną już postać $\lambda = -1/2 \pm i\epsilon$. Natomiast gdy $\alpha = \beta = 0$ otrzymujemy równanie jak w przypadku materiału jednorodnego, a więc $\lambda = -1/2$.

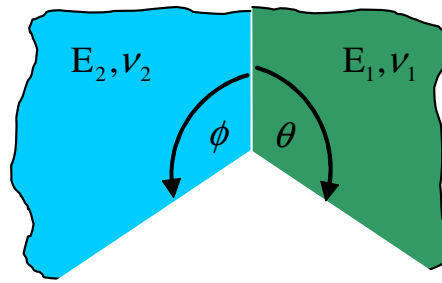
- **Szczelina przechodząca przez interfejs**

Rozważmy szczelinę przechodzącą przez prostoliniowy interfejs, Rys. 2.29. Sytuacja taka jest po-



RYSUNEK 2.29. Szczelina przechodząca przez prostoliniowy interfejs.

dobna do przypadku połączenia dwóch różnych materiałów ze sobą, Rys. 2.30. Stopień osobliwości w obu przypadkach może być uznany za identyczny. Naturę takiego



RYSUNEK 2.30. Dwie połączone ze sobą części różnych materiałów.

rodzaju osobliwości pola naprężenia badał również Bogy, [108]. Podał on równanie, za pomocą którego można określić wartość λ . Jest ona najmniejszym pierwiastkiem następującego równania:

$$A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 + 2D\beta + 2E\alpha + F \equiv 0, \quad (2.127)$$

gdzie

$$A(\theta, \phi, \lambda) = 4M(\theta, \lambda)M(\phi, \lambda),$$

$$B(\theta, \phi, \lambda) = 2(1 + \lambda)^2[\sin^2 \theta M(\phi, \lambda) + \sin^2 \phi M(\theta, \lambda)],$$

$$C(\theta, \phi, \lambda) = 4(1 + \lambda)^2[(1 + \lambda)^2 - 1] \sin^2 \theta \sin^2 \phi + M[(\theta - \phi), \lambda],$$

$$D(\theta, \phi, \lambda) = 2(1 + \lambda)^2 \left\{ \sin^2 \theta \sin^2 [(1 + \lambda)\phi] - \sin^2 \phi \sin^2 [(1 + \lambda)\theta] \right\},$$

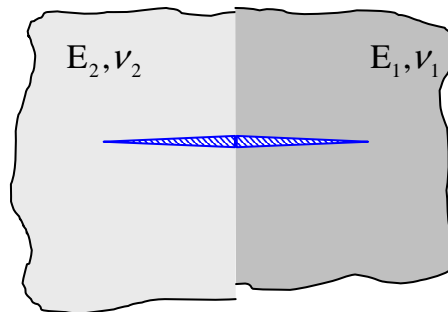
$$E(\theta, \phi, \lambda) = -D(\theta, \phi, \lambda) + M(\phi, \lambda) - M(\theta, \lambda),$$

$$F(\theta, \phi, \lambda) = M[(\theta + \phi), \lambda],$$

przy czym pomocniczo wprowadzona funkcja $M(x, \lambda)$ zdefiniowana jest jako:

$$M(x, \lambda) = \sin^2[(1 + \lambda)x] - (1 + \lambda)^2 \sin^2 x.$$

Gdy $\theta = \phi = \pi$, szczelina powiela się i otrzymujemy geometrię szczeliny w interfejsie. Gdy $\theta = \phi = \pi/2$, problem redukuje się do jednej szczeliny prostopadle przecinającej interfejs. Równanie (2.127) sprowadza się wówczas do postaci:



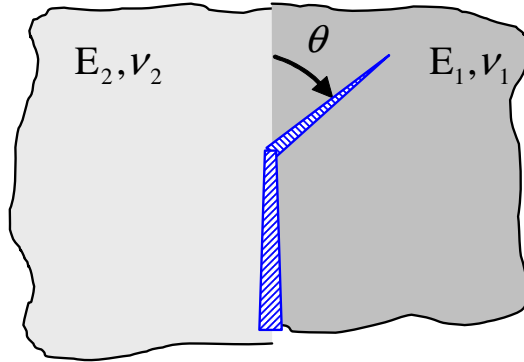
RYSUNEK 2.31. Szczelina prostopadle przecinająca interfejs.

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta)^2(1 + \lambda)^4 + \left\{ 2\beta(\alpha - \beta) \cos^2[\lambda\pi/2] - \alpha^2 \right\} (1 + \lambda)^2 + \\
+ \cos^2[\lambda\pi/2] \left\{ (\beta^2 - 1) \cos^2[\lambda\pi/2] + 1 \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{2.128}$$

Kiedy materiały są identyczne, $\alpha = \beta = 0$, równanie (2.127) redukuje się do przypadku szczeliny z odgałęzieniem w materiale jednorodnym.

• **Szczelina w interfejsie z odgałęzieniem**

Prawdopodobnie najbardziej interesującym przypadkiem jest sytuacja głównej szczeliny umieszczonej w interfejsie i odgałęziającej się w jeden z materiałów w postaci drugiej szczeliny, por. Rys. 2.32. W tym przypadku, przez założenie $\phi = \pi$,



RYSUNEK 2.32. Szczelina w interfejsie wraz z odgałęzieniem.

wyrażenie (2.127) sprowadza się do następującej postaci:

$$A\beta^2 + 2\beta(1 + \alpha)B + C\alpha^2 + 2D\alpha + E \equiv 0, \tag{2.129}$$

gdzie

$$A(\theta, \lambda) = 4 \sin^2(\lambda\pi) \left\{ \sin^2[(1 + \lambda)\theta] - (1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta \right\},$$

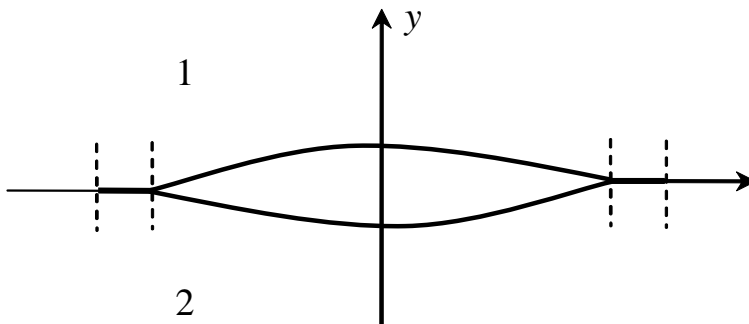
$$B(\theta, \lambda) = 2(1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta \sin^2(\lambda\pi),$$

$$C(\theta, \lambda) = \sin^2[(1 + \lambda)(\theta - \pi)] - (1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta,$$

$$D(\theta, \lambda) = (1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta \cos(2\lambda\pi) + \sin^2(\lambda\pi) - \sin^2[(1 + \lambda)\theta],$$

$$E(\theta, \lambda) = \sin^2[(1 + \lambda)(\theta + \pi)] - (1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta.$$

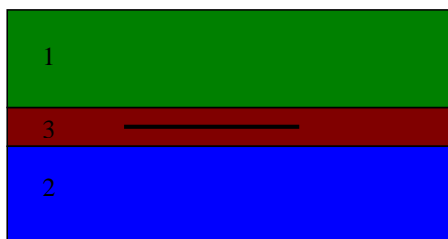
Szczelina częściowo rozwarta Innym interesującym przypadkiem jest nie w pełni rozwarta szczelina umieszczona w interfejsie, por. Rys. 2.33, tzn. jej powierzchnie w strefie przywierzchołkowej stykają się. Przypadek ten zaproponował Comninou [112] opierając się na spostrzeżeniach Englanda [75] oraz Malysheva i Salganika [113]. Zauważyli oni, iż przypadek szczeliny posiadającej oscylacyjną osobliwość powoduje "pomarszczenie" dwóch powierzchni szczeliny oraz efekt przenikania się materiałów. Sugeruje to, iż szczelina w takim przypadku nie jest rozwarta na całej długości, a jej przywierzchołkowa część jest zwarta. W wyniku tego staje się oczywiste, że stopień osobliwości na wierzchołku szczeliny musi się różnić od oscylacyjnego rozwiązania. Jest to więc model rozwiązania, którego natura jest fizycznie akceptowalna.



RYSUNEK 2.33. Model częściowo zwartej szczeliny umieszczonej w interfejsie.

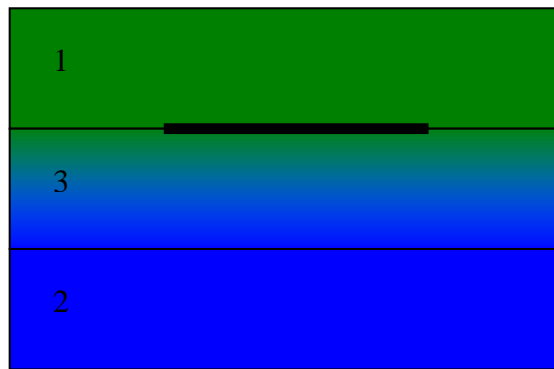
2.8.3. Rzeczywiste połączenie materiałów

W literaturze są obecne propozycje innych modeli interfejsu, dla których problem oscylacyjnej osobliwości pola naprężenia nie istnieje. Do najbardziej znanych propozycji należą dwa modele zaproponowane w 1977 roku przez Atkinsona, [110]. W obu przypadkach interfejs zastąpiony jest przez bardzo cienką warstwę materiału. W pierwszym mo-



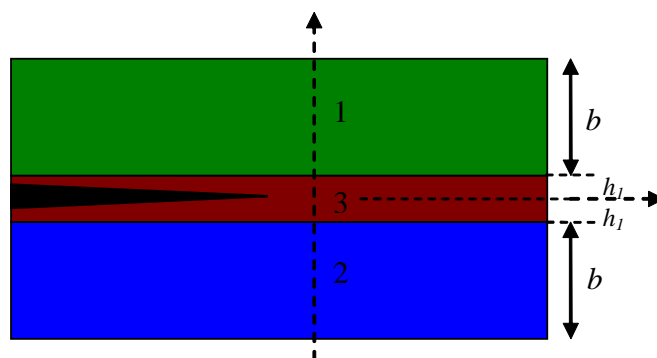
RYSUNEK 2.34. Pierwszy model interfejsu wg Atkinsona. Interfejs to jednorodna warstwa materiału.

delu wprowadzona warstwa zastępująca idealne połączenie ma charakter trzeciego sprężystego i jednorodnego materiału o innych niż pozostałe komponenty stałych materiałowych, por. Rys. 2.34. Szczelina umieszczona jest w tym dodatkowym, jednorodnym materiale. W tym przypadku opisywana powyżej oscylacyjna osobliwość nie pojawia się. Jednakże model ten ma tę wadę, że w miejsce jednego idealnego połączenia są dwa. Z tego powodu jego praktyczne wykorzystanie ograniczone jest tylko do przypadku szczeliny w interfejsie. Drugi model zakłada, że wprowadzona warstwa nie jest już materiałem jednorodnym, a jego stałe materiałowe zmieniają się w sposób ciągły. Zmiana wartości stałych jest określona przez przedział, którego wartości graniczne określone są przez własności materiałów tworzących bimatériau. Szczelina umieszczona jest tu na granicy jednego z materiałów oraz interfejsu, por. Rys. 2.35. Ponieważ moduły zmieniają się w sposób ciągły, nie ma efektu oscylacyjnej osobliwości, a osobliwość pola naprężenia ma zawsze charakter typu $\sigma_{ij} \propto r^{-1/2}$. Model ten wydaje się bardziej realistyczny. Autor dokonał porównania wyników uzyskiwanych dla szczeliny umieszczonej w interfejsie idealnym z wynikami uzyskanymi dla proponowanych w pracy modeli, por. Rys. 2.36 i Rys. 2.37. Porównano wartości współczynników uwalniania energii G dla trzech rozważanych modeli. Wielkość ta jest praktycznie jedynym parametrem, za pomocą którego można porównać rozwiązanie zespolone z rzeczywistym. Okazało się, że rezultaty zależą od stosunku h_1/b (gdzie h_1 jest grubością interfejsu, a b grubością komponentów tworzących bimatériau).

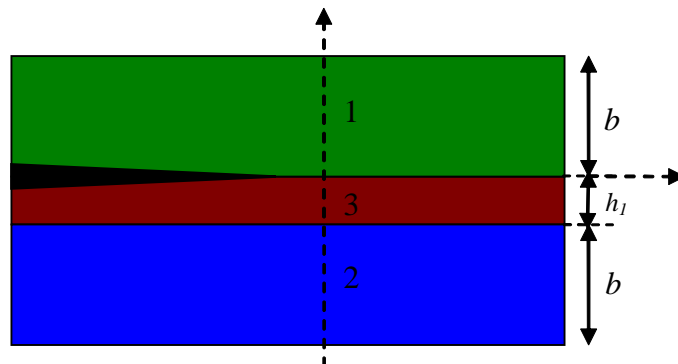


RYSUNEK 2.35. Drugi model interfejsu wg Atkinsona. Warstwa interfejsu posiadająca ciągłą zmianę modułów elastycznych.

W przypadku $h_1 \ll b$ wyniki są zbieżne.



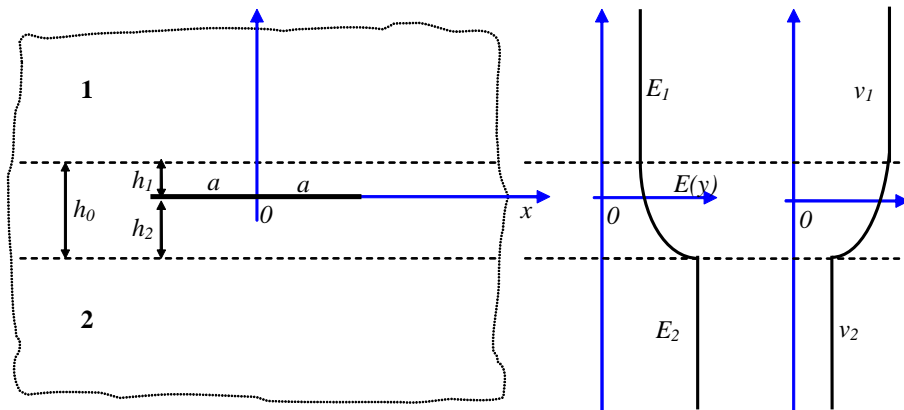
RYSUNEK 2.36. Położenie szczeliny w interfejsie modelowanym przez dodatkowy, jednorodny materiał.



RYSUNEK 2.37. Położenie szczeliny w interfejsie modelowanym przez ciągłą zmianę modułów elastycznych trzeciej fazy materiału.

Jedną z bardziej interesujących prac dotyczących modelowania interfejsu jest praca Delale & Erdogana [111], por. Rys. 2.38. Autorzy rozważają w niej problem szczeliny usytuowanej w interfejsie będącym fazą przejściową między materiałami tworzącymi bimateriał. Podane jest tam rozwiązanie bazujące na identycznej metodzie jak proponowana w niniejszej pracy, ale niestety nie zamieszczono w niej wyrażeń definiujących nieosobliwe jądra równań całkowitych, odwołując się do niedostępnego artykułu. Autorzy, dzięki

otrzymanemu rozwiązaniu, badają wpływ różnego położenia szczeliny w tak założonym interfejsie.



RYSUNEK 2.38. Model interfejsu wg Dalale i Erdogana.

2.9. Wyznaczenie WIN oraz składowej T .

2.9.1. Współczynniki intensywności naprężeń

WIN jest najważniejszym parametrem w linowej mechanice pękania i dlatego jego jak najdokładniejsze obliczenie jest zadaniem niezwykle istotnym. W proponowanej metodzie wielkość ta związana jest z gęstością dyslokacji $b_x(\xi)$, $b_y(\xi)$ (w następnej części tego podrozdziału używany będzie również symbol $f_j(t_0)$, por. (2.102)).

W najprostszym przypadku pojedynczej szczeliny o długości $2a$ umieszczonej w niekończeniu dużej, jednorodnej płaszczyźnie rozciąganej w nieskończoności obciążeniem prostopadłym do szczeliny wykorzystuje się związek pomiędzy WIN, a rozwarciem szczeliny (2.12) w następującej postaci:

$$\frac{dg(r)}{dr} = \frac{(\kappa + 1)}{2\mu} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (2.130)$$

Następnie używa się wyrażenia (2.35), które opisuje relację pomiędzy gęstością dyslokacji, a rozwarciem szczeliny. Tak więc dla prawego wierzchołka szczeliny $b_y(r) = dg(r)/dr$. W wyniku tego

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{dg(r)}{dr} \sqrt{2\pi r} \frac{2\mu}{(\kappa + 1)}. \quad (2.131)$$

Następnie wykorzystując normalizację relacji $r = a - x$, por. (2.46), do postaci $r = a(1 - t)$ WIN definiuje się jako:

$$K_I = \lim_{t \rightarrow 1} b_y(t) \sqrt{2\pi} \sqrt{a(1 - t)} \frac{2\mu}{(\kappa + 1)}. \quad (2.132)$$

W tym momencie należy wykorzystać opisane w podrozdziale 2.4.3 rozwiązanie numeryczne, gdzie funkcję $b_y(t)$ zastępuje się wyrażeniem (2.44): $b_y(t) = \frac{F(t)}{(1+t)^\alpha (1-t)^\beta}$, w którym α, β są stopniami osobliwości i $F(t)$ jest nową nieznaną, ciągłą funkcją w przedziale

$(-1, 1)$. W rozważanym elementarnym przypadku $\alpha = \beta = 1/2$ i dla obu wierzchołków szczeliny

$$K_1(\pm 1) = \pm \sqrt{a\pi} \frac{2\mu}{(\kappa + 1)} F(\pm 1). \quad (2.133)$$

Jednakże w sytuacjach bardziej złożonych niż pojedyncza szczelina w materiale jednorodnym WIN uzyskać można wykorzystując metodę funkcji teoretycznej (ang.: function theoretic method) opisaną przez Muskhelishvilię w [48], czy też w pracach [49] lub [50]. W tym celu należy wprowadzić ponownie funkcję $F_j(t_0)$ (patrz podrozdział 2.4.3), za pomocą której można wyrazić funkcję $f_j(t_0)$, będącą rozwiązaniem równań całkowych jako

$$f_j(t_0) = \frac{F_j(t_0)}{(t_0 - a_j)^{\alpha_j} (b_j - t_0)^{\beta_j}} = \frac{F_j(t_0) e^{\pi\beta_j i}}{(t_0 - a_j)^{\alpha_j} (t_0 - b_j)^{\beta_j}}, \quad (2.134)$$

$$a_j < t_0 < b_j, \quad (j = 1, 2), \quad 0 < \operatorname{Re}(\alpha_j, \beta_j) < 1.$$

Następnie rozważana jest nowa funkcja:

$$\phi_{kj}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} \frac{a_{kj}(t_0) f_j(t_0)}{t_0 - z} dt_0 = \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} \frac{a_{kj}(t_0) F_j(t_0) e^{\pi\beta_j i}}{(t_0 - z)(t_0 - b_j)^{\beta_j} (t_0 - a_j)^{\alpha_j}} dt_0, \quad (k, j = 1, 2) \quad (2.135)$$

gdzie a_{kj} są to znane funkcje powstałe podczas formułowania równań całkowych. Asymptotyczne zachowanie całek Cauchy'ego pozwala nam wyrazić funkcje $\phi_{kj}(z)$, por. [48], Rozdział 4, w postaci:

$$\phi_{kj}(z) = \frac{a_{kj} F_j(a_j) e^{\pi\alpha_j i}}{(b_j - a_j)^{\beta_j} \sin\pi\alpha_j} \frac{1}{(z - a_j)^{\alpha_j}} - \frac{a_{kj} F_j(b_j)}{(b_j - a_j)^{\alpha_j} \sin\pi\beta_j} \frac{1}{(z - b_j)^{\beta_j}} + \phi_{0kj}(z), \quad (2.136)$$

gdzie funkcje $\phi_{0kj}(z)$ są ograniczone z wyjątkiem punktów a_j, b_j w których typ osobliwości jest słabszy niż $(z - a_j)^{-\alpha_j}$ oraz $(z - b_j)^{-\beta_j}$. Wówczas część równania całkowego zawierająca osobliwość typu Cauchy'ego może być wyrażona w następującej postaci ($z = t + ig, g = 0, a_j < t < b_j$):

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} \frac{a_{kj}(t_0) f_j(t_0)}{t_0 - t} dt_0 = \frac{a_{kj} F_j(a_j)}{(b_j - a_j)^{\beta_j}} \operatorname{ctg}\pi\alpha_j \frac{1}{(t - a_j)^{\alpha_j}} - \frac{a_{kj} F_j(b_j)}{(b_j - a_j)^{\alpha_j}} \operatorname{ctg}\pi\beta_j \frac{1}{(b_j - t)^{\beta_j}} + \phi_{1kj}(z). \quad (2.137)$$

Ponieważ

$$\frac{e^{\pi\beta_j i}}{\sin\pi\beta_j} = \frac{(\cos\pi + i\sin\pi)^{\beta_j}}{\sin\beta_j\pi} = \frac{\cos\pi\beta_j}{\sin\pi\beta_j} = \operatorname{ctg}\pi\beta_j,$$

WIN dla systemu prostoliniowych szczelin, których wierzchołki umieszczone są w tym

samym materiale jednorodnym, por. Rys. 2.21, można otrzymać wykorzystując wyrażenia:

$$\begin{aligned}
K_I(t_j^S) &= \lim_{t \rightarrow t_j^S} \sqrt{\frac{2(t - t_j^S)}{\cos \eta_j}} p_n(t_j), \\
K_{II}(t_j^S) &= \lim_{t \rightarrow t_j^S} \sqrt{\frac{2(t - t_j^S)}{\cos \eta_j}} p_{tn}(t_j), \\
K_I(t_j^E) &= \lim_{t \rightarrow t_j^E} \sqrt{\frac{2(t_j^E - t)}{\cos \eta_j}} p_n(t_j), \\
K_{II}(t_j^E) &= \lim_{t \rightarrow t_j^E} \sqrt{\frac{2(t_j^E - t)}{\cos \eta_j}} p_{tn}(t_j),
\end{aligned} \tag{2.138}$$

oraz system równań całkowych (2.103). Następnie, wykorzystując równania (2.136) i (2.137), WIN wyrazić można za pomocą funkcji będącej rozwiązaniem równań całkowych. Należy podkreślić, że do sformułowania końcowych wyrażeń wykorzystywane są jedynie te części równań całkowych, które wnoszą część osobliwą. Części regularne nie są brane pod uwagę. W wyniku tego WIN definiowany jest tu jako:

$$\begin{aligned}
K_I(t_j^S) &= -\frac{1}{\sqrt{L_j/2}} [\sin(\eta_j) F_{t_j}(t_j^S) + \cos(\eta_j) F_{n_j}(t_j^S)], \\
K_{II}(t_j^S) &= -\frac{1}{\sqrt{L_j/2}} [\cos(\eta_j) F_{t_j}(t_j^S) - \sin(\eta_j) F_{n_j}(t_j^S)], \\
K_I(t_j^E) &= \frac{1}{\sqrt{L_j/2}} [\sin(\eta_j) F_{t_j}(t_j^E) + \cos(\eta_j) F_{n_j}(t_j^E)], \\
K_{II}(t_j^E) &= \frac{1}{\sqrt{L_j/2}} [\cos(\eta_j) F_{t_j}(t_j^E) - \sin(\eta_j) F_{n_j}(t_j^E)],
\end{aligned} \tag{2.139}$$

W podobny sposób postępuje się w bardziej skomplikowanych przypadkach, np. prostopadłej szczeliny zakończonej w interfejsie (por. [53]- równanie (31)).

W przypadku pojedynczej szczeliny w materiale jednorodnym, gdzie $\alpha = \beta = 1/2$, $b_1 = t_1$ oraz $a_1 = t_2$, wyrażenia (2.136) i (2.137) przyjmują postać [59]:

$$\begin{aligned}
\phi_{kj}(z) &= ia_{kj}(t_2) F_j(t_2) (t_1 - t_2)^{-1/2} (z - t_2)^{-1/2} \\
&\quad - a_{kj}(t_1) F_j(t_1) (t_1 - t_2)^{-1/2} (z - t_1)^{-1/2} + \phi_{0kj}(z),
\end{aligned} \tag{2.140}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_2}^{t_1} \frac{a_{kj}(t_0) f_j(t_0)}{t_0 - z} dt_0 = \phi_{kj}(x) = \frac{a_{kj}(t_2) F_j(t_2)}{(t_1 - t_2)^{1/2} (t_2 - t)^{1/2}} - \frac{a_{kj}(t_1) F_j(t_1)}{(t_1 - t_2)^{1/2} (t - t_1)^{1/2}} + \phi_{0kj}, \tag{2.141}$$

$$(t < t_2, t > t_1).$$

Przykłady. Przedstawione poniżej przykłady dotyczą dwóch opisanych szczegółowo w poprzednich podrozdziałach konfiguracji pojedynczej szczeliny i interfejsu. Przedstawione wyrażenia wynikają z zastosowania możliwych dla nich uproszczeń, a dodatkowe człony wynikają z istnienia a_{kj} pojawiających się podczas formułowania równań całkowych w określonych konfiguracjach i układach współrzędnych.

- dla inkluzji i równań całkowych (2.91) i (2.92):

$$a_{11} = -a_{22} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + t_0^2}}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{t_0}{\sqrt{c^2 + t_0^2}}, \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} K_I(t_1) &= -\frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{a(c^2 + t_1^2)}} [cF_1(t_1) + t_1F_2(t_1)], \\ K_{II}(t_1) &= -\frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{a(c^2 + t_1^2)}} [t_1F_1(t_1) - cF_2(t_1)], \\ K_I(t_2) &= \frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{a(c^2 + t_2^2)}} [cF_1(t_2) + t_2F_2(t_2)], \\ K_{II}(t_2) &= \frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{a(c^2 + t_2^2)}} [t_2F_1(t_2) - cF_2(t_2)], \end{aligned} \quad (2.143)$$

- dla prostego interfejsu i równań całkowych (2.98) i (2.98):

$$a_{11} = -a_{22} = \cos(\alpha), \quad a_{12} = a_{21} = \sin(\alpha), \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned} K_I(t_1) &= -\frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{a}} [\cos(\alpha)F_1(t_1) + \sin(\alpha)F_2(t_1)], \\ K_{II}(t_1) &= -\frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{a}} [\sin(\alpha)F_1(t_1) - \cos(\alpha)F_2(t_1)], \\ K_I(t_2) &= \frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{a}} [\cos(\alpha)F_1(t_2) + \sin(\alpha)F_2(t_2)], \\ K_{II}(t_2) &= \frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{a}} [\sin(\alpha)F_1(t_2) - \cos(\alpha)F_2(t_2)], \end{aligned} \quad (2.145)$$

przy $a = (t_1 - t_2)/2$.

Podsumowując, uzyskany model umożliwia otrzymanie WIN dla dowolnej orientacji i liczby szczelin prostoliniowych. W dalszej części pracy przedstawiony model będzie wykorzystany do opisu wzrostu szczeliny zmęczeniowej. Należy zauważyć, iż przedstawione podejście może być zastosowane również dla dowolnych konfiguracji szczelin umieszczonych w różnego rodzaju materiałach w zależności od istnienia rozwiązań A i B odpowiadających rozważanym sytuacjom.

2.9.2. Obliczanie składowej T

Jak wspomniano w podrozdziale 2.2.2 oprócz WIN bardzo istotną wielkością w liniowej mechanice pęknięcia jest parametr T . Jest to, podobnie jak WIN, wielkość charakteryzująca konfigurację geometryczną szczeliny i obciążenia, którą, na podstawie wielu prac, wydaje się być koniecznym uwzględnić w przypadku opisu wzrostu szczeliny. Istnieje co najmniej kilka metod uzyskiwania tej wielkości. W najprostszym przypadku pojedynczej szczeliny $T = \sigma_\infty(1 - k) \cos 2\alpha$, por. Rys. 2.5. Jednakże w bardziej złożonych przypadkach, np. szczeliny głównej z odgałęzieniem, problem staje się znacznie bardziej złożony i najczęściej jest pomijany. W literaturze istnieje kilka rozwiązań tego problemu. Jedną z metod jest modelowanie szczeliny za pomocą rozkładu dyslokacji, por. [52], oraz wykorzystaniu Metody Funkcji Wagowych i Kolokacji Brzegowych, por. [77], [78], [79]. W [52]

użyto bardzo zbliżonej metody do tej używanej w niniejszej pracy, gdzie odgałęzienie szczeliny modelowane jest za pomocą ciągłego rozkładu dyslokacji, w wyniku czego autorzy pracy uzyskują system równań całkowych osobliwych. Natomiast w [77], [78] i [79] autorzy wykorzystują funkcje Greena, które uzyskiwane są drogą aproksymacji z wykorzystaniem np. Metody Elementów Skończonych. Należy przypomnieć, że WIN i parametr T opisują pole naprężeń w najbliższym otoczeniu wierzchołka szczeliny, a równania (2.13–2.15) są prawdziwe przy $r \rightarrow 0$. Generalnie, składowa T jest wielkością niezależną od r i θ co pozwala zdefiniować ten parametr w postaci wyrażenia (2.21):

$$T = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \Big|_{\theta=0, r \rightarrow 0}.$$

W celu uzyskania parametru T należy znać w praktyce rozkład naprężeń w całym materiale. Dopiero wówczas możliwe jest uzyskanie składowej T , która najczęściej uzyskiwana jest za pomocą Metody Elementów Skończonych. Wówczas, znając składowe $\sigma_{xx}(x, y), \sigma_{yy}(x, y)$ tensora naprężenia dla rozważanej konfiguracji szczeliny i materiału, a szczególnie ich wartości w najbliższym sąsiedztwie szczeliny, możliwe jest określenie poszukiwanego parametru. W dalszej części rozdziału stosowana w pracy Metoda Osobliwych Równań Całkowych typu Cauchy'ego będzie użyta do uzyskania składowych naprężenia nie tylko przy wierzchołku szczeliny, ale również w pozostałym obszarze materiału dla którego znana jest funkcja Greena opisująca wpływ pojedynczej dyslokacji. Metoda ta umożliwi również rozważanie wielu szczelin, w różnej konfiguracji. Należy podkreślić, że autorowi niniejszej rozprawy nie udało się odszukać w literaturze pracy, która w sposób analityczny formułowałaby równania umożliwiające obliczanie WIN, a w szczególności parametru T , dla wielu szczelin. Wymieniona powyżej praca [52] wykorzystuje podobną metodę, ale rozważa jedynie konfigurację głównej szczeliny i jednego odgałęzienia.

W tym celu koniecznym jest, na podstawie wyrażen (2.38), uzupełnienie równań (2.75) i (2.76), które determinują rozwiązanie B, tzn. $(\bar{\sigma})$, oraz rozwiązanie problemu A, tzn. $(\bar{\sigma})$, o składową działającą wzdłuż powierzchni szczeliny, por. Rys. 2.18, tj. o $\sigma_t(s)$. W przypadku sformułowań dla N szczelin należy uzupełnić równania (2.100) oraz transformację (2.101) w następujący sposób:

$$\bar{\sigma}_t(t_j) = \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{t1}(t_j, t_{oi})b_{ti}(t_{oi}) + h_{t2}(t_j, t_{oi})b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi}, \quad (2.146)$$

gdzie h_{sv} , ($v = 1, 2$) wyrażają dodatkowe transformacje:

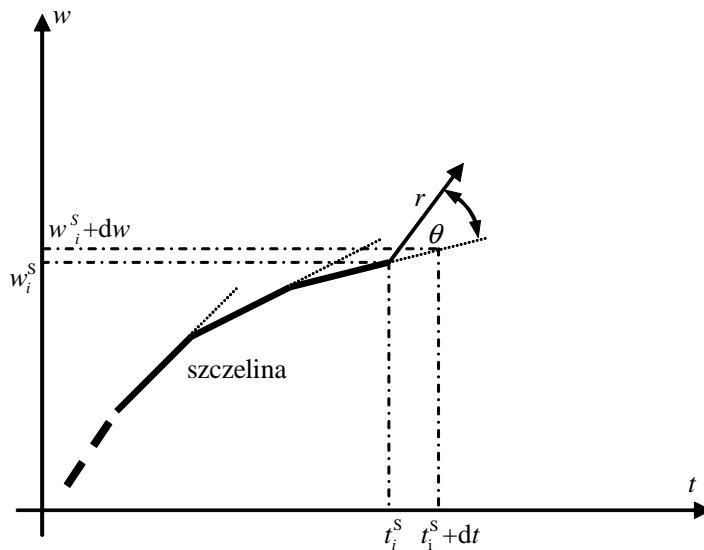
$$\begin{aligned} h_{t1} &= (h_{xx1} \sin \alpha_{0i} - h_{xx2} \cos \alpha_{0i}) \sin^2 \alpha_j + (h_{yy1} \sin \alpha_{0i} - h_{yy2} \cos \alpha_{0i}) \cos^2 \alpha_j - \\ &\quad + 2(h_{xy1} \sin \alpha_{0i} - h_{xy2} \cos \alpha_{0i}) \sin \alpha_j \cos \alpha_j, \\ h_{t2} &= (h_{xx1} \cos \alpha_{0i} + h_{xx2} \sin \alpha_{0i}) \sin^2 \alpha_j + (h_{yy1} \cos \alpha_{0i} + h_{yy2} \sin \alpha_{0i}) \cos^2 \alpha_j - \\ &\quad + 2(h_{xy1} \cos \alpha_{0i} + h_{xy2} \sin \alpha_{0i}) \sin \alpha_j \cos \alpha_j. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Następnie uwzględniając regułę superpozycji oraz rozwiązanie układu równań (2.100),

składowe tensora naprężenia w punkcie (t, w) można uzyskać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 \sigma_t(t, w) &= \bar{\sigma}_t(t, w) + \bar{\sigma}_t(t, w) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{t1}(t, t_{oi}, w)b_{ti}(t_{oi}) + h_{t2}(t, t_{oi}, w)b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi} + \bar{\sigma}_t(t, w), \\
 \sigma_n(t, w) &= \bar{\sigma}_n(t, w) + \bar{\sigma}_n(t, w) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{n1}(t, t_{oi}, w)b_{ti}(t_{oi}) + h_{n2}(t, t_{oi}, w)b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi} + \bar{\sigma}_n(t, w), \\
 \sigma_{tn}(t, w) &= \bar{\sigma}_{tn}(t, w) + \bar{\sigma}_{tn}(t, w) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{tn1}(t, t_{oi}, w)b_{ti}(t_{oi}) + h_{tn2}(t, t_{oi}, w)b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi} + \bar{\sigma}_{tn}(t, w).
 \end{aligned} \tag{2.148}$$

Wówczas dla jednego z wierzchołków szczeliny, wykorzystując równanie (2.16), które jest



RYСУNEK 2.39. Geometra ścieżki szczeliny.

prawdziwe dla $r \rightarrow 0$, $\theta = 0$ oraz wielkości zdefiniowanych na rysunku 2.39, otrzymujemy

równanie określające składową T :

$$\begin{aligned}
 T &= \left(\sigma_t(t, w) - \sigma_n(t, w) \right) \Big|_{w \rightarrow w_i^S + dw, t \rightarrow t_i^S + dt} = \\
 &= \left(\sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{t1}(t, t_{oi}, w) b_{ti}(t_{oi}) + h_{t2}(t, t_{oi}, w) b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi} + \bar{\sigma}_t(t, w) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{n1}(t, t_{oi}, w) b_{ti}(t_{oi}) + h_{n2}(t, t_{oi}, w) b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi} - \bar{\sigma}_n(t, w) \right) \Big|_{w \rightarrow w_i^S + dw, t \rightarrow t_i^S + dt} .
 \end{aligned} \tag{2.149}$$

2.10. Strefa plastyczna w otoczeniu wierzchołka szczeliny

Zgodnie z rozwiązaniem sprężystym przytoczonym w poprzednim rozdziale naprężenie w otoczeniu wierzchołka szczeliny wykazuje osobliwość $\sigma \rightarrow \infty$, gdy $r \rightarrow 0$. Taki wynik jest jednak niefizyczny, bo żadne ciało nie jest zdolne do przeniesienia nieskończenie dużego naprężenia, które pojawiłoby się w najbliższym sąsiedztwie wierzchołka szczeliny, nawet przy bardzo niewielkim obciążeniu. W rzeczywistości materiały wykazują mechanizmy zmierzające do zmniejszenia naprężenia i rozproszenia energii skupionej przed wierzchołkiem szczeliny. W materiałach metalicznych rozwój pęknięcia łączy się ściśle ze strefą odkształcenia plastycznego przed czołem pęknięcia, co ogranicza stosowanie klasycznej liniowej mechaniki pęknięcia (LMP). Wielkość i kształt obszarów plastycznych jest determinowana przez rodzaj materiału, geometrię elementu oraz wielkość naprężenia. Narzędziem do analizy takiego problemu są hipotezy wyteżeniowe teorii plastyczności, z których najczęściej stosowane są hipotezy:

- Hubera–Misesa–Hencky’ego, na podstawie której materiał osiągnie stan plastyczny, gdy drugi niezmiennik dewiatora naprężenia (s_{ij}) osiągnie wartość krytyczną k^2 :

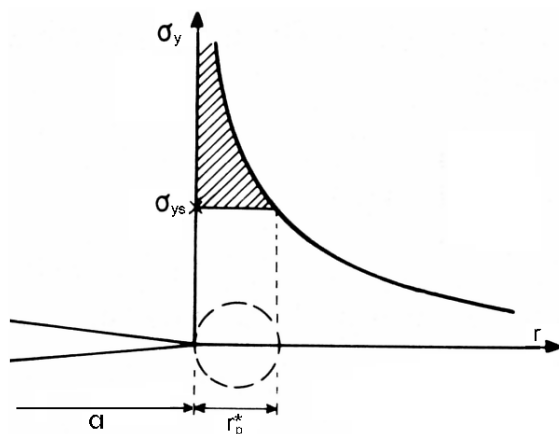
$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = k^2. \quad (2.150)$$

- Tresci, na podstawie której materiał osiągnie stan plastyczny, gdy maksymalne naprężenie styczne osiągnie krytyczną wartość k równą granicy plastyczności przy czystym ścinaniu:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = k, \quad (2.151)$$

gdzie σ_{\max} i σ_{\min} są to największe i najmniejsze naprężenia główne, a τ_{\max} jest maksymalnym naprężeniem stycznym.

Przybliżony kształt strefy plastycznej r_p^* można określić podstawiając wzory na pole naprężenia do wybranej hipotezy wyteżeniowej i wyznaczając $r = r_p^*$, por. Rys. 2.40. Dla



RYSUNEK 2.40. Podstawowy sposób oszacowania wielkość strefy plastycznej

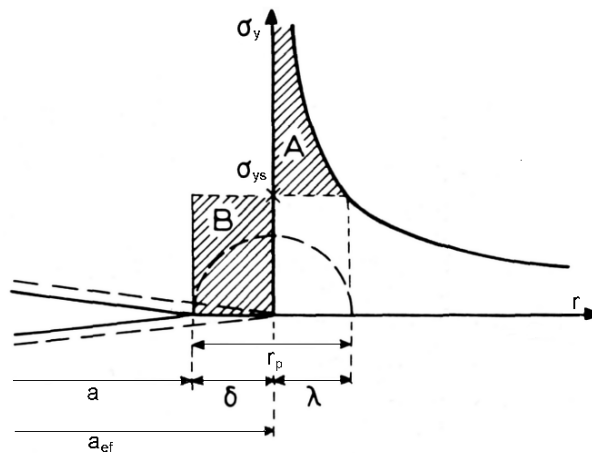
sytuacji z Rys. 2.40 dla $\theta = 0$, wielkość r_p^* można uzyskać w następujący sposób:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}} = \sigma_{ys} \Rightarrow r_p^* = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} = \frac{\sigma^2 a}{2\sigma_{ys}^2}. \quad (2.152)$$

gdzie σ_{ys} jest naprężeniem uplastyczniającym. Jednakże wprowadzenie obszarów plastycznych do rozwiązania sprężystego nie powoduje zmiany tego rozwiązania, ponieważ określa to tylko hipotetyczny zasięg deformacji plastycznych.

2.10.1. Model Irwina

Irwin, 1961 [107], zasugerował, iż plastyczność powoduje, że szczelinę należy traktować jakby była dłuższa od swego fizycznego wymiaru. Plastyczność traktowana jest więc jako czynnik osłabiający materiał, podobnie jak defekt w postaci szczeliny. Dlatego Irwin przesunął wierzchołek szczeliny do wnętrza strefy plastyczności, por. Rys. 2.41, czyli fizyczna długość szczeliny a , została zastąpiona przez efektywną długość szczeliny $a + \delta$. Naprężenie na dodanej długości szczeliny δ zostało ograniczone do naprężenia uplastyczniającego σ_{ys} . Dodana długość szczeliny powinna być wystarczająco duża, aby była zdolna przenieść obciążenie, które zostało "usunięte" na odcinku λ , tzn. w obszarze A, wynikające z rozkładu naprężenia sprężystego. Aby było to spełnione, obszar A musi być równy obszarowi B, determinowanemu przez odcinek δ . Wielkość λ może być oszacowana



RYSUNEK 2.41. Oszacowanie wielkości strefy plastycznej wg Irwina [107]

za pomocą wyrażenia, które jest wynikiem założenia, iż strefa plastyczna zajmuje obszar, w którym $\sigma_y \geq \sigma_{ys}$:

$$\sigma_{ys} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r = \lambda)}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\lambda}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_{ys}^2} = \frac{\sigma^2(a + \delta)}{2\sigma_{ys}^2}, \quad (2.153)$$

gdzie, jeśli przyjęte zostanie, że odcinek δ jest bardzo mały w porównaniu z wymiarem szczeliny, to δ może być pominięte. Wówczas równanie (2.153) będzie identyczne z (2.152) i wtedy $r_p^* = \lambda$.

Ponieważ obszar A ma być równy obszarowi B, to:

$$\delta \sigma_{ys} = \int_0^\lambda \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr - \lambda \sigma_{ys}, \quad (2.154)$$

a rozwiązanie tej całki daje:

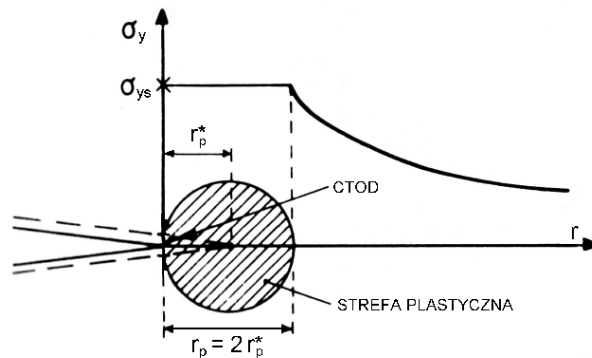
$$\left(\frac{2}{\pi} \lambda\right)^{\frac{1}{2}} K_I = \sigma_{ys}(\lambda + \delta). \quad (2.155)$$

Z wyrażenia (2.153) WIN można zapisać jako $K_I = (2\pi\lambda)^{\frac{1}{2}} \sigma_{ys}$, a wówczas (2.155) przekształca się do postaci:

$$2\lambda\sigma_{ys} = \sigma_{ys}(\lambda + \delta), \quad (2.156)$$

czyli, $2\lambda = \lambda + \delta$. Wynika z tego, że $\lambda = \delta$ i wierzchołek szczeliny powiększonej o jej efektywną część umieszczony jest w centrum strefy plastycznej, por. Rys. 2.42. Natomiast dla pomijalnie małych wartości δ w stosunku do długości szczeliny można przyjąć:

$$r_p = 2r_p^* = \frac{1}{\pi} \left[\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right]^2. \quad (2.157)$$



RYSUNEK 2.42. Wielkość strefy plastycznej wg Irwina [107].

2.10.2. Model Dugdale'a

Inne rozwiązanie, które zakłada wydłużenie efektywnej szczeliny w stosunku do jej fizycznej wielkości spowodowane plastycznością materiału zaproponował Dugdale [8], oraz, niezależnie, Barenblatt [9]. Model Dugdale'a jest wynikiem jego obserwacji, że w cienkich blachach z niskowęglowej stali w obszarze przed wierzchołkiem szczeliny rozwija się wąska i wydłużona strefa plastyczna w kształcie klina. Strefa ta została zastąpiona odcinkiem ρ , o który sztucznie wydłużona jest rzeczywista szczelina. Na odcinek ten działa naprężenie σ_{ys} , które zwiera powierzchnię szczeliny na dodanej długości. Wielkość ρ powinna być tak dobrana, aby naprężenia przed wierzchołkiem szczeliny nie były już osobiwe, czyli miały wartość skończoną. Warunek ten jest spełniony, gdy suma WIN od naprężenia zewnętrznego, K_σ , oraz od naprężenia $-\sigma_{ys}$ na krawędziach szczeliny na dodanym odcinku ρ , K_ρ , kompensują się:

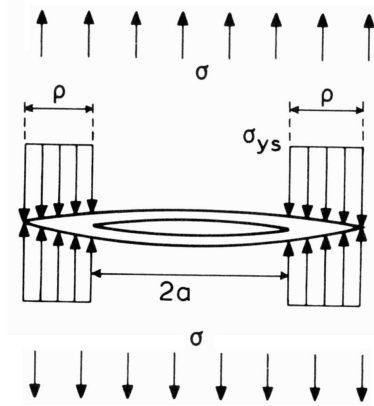
$$K_\sigma = -K_\rho. \quad (2.158)$$

Warunek taki jest wystarczający, gdyż wyrażenia na składowe tensora naprężenia są uniwersalne, inne są jedynie WIN.

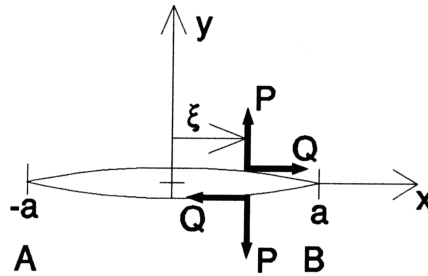
Dla przypadku szczeliny umieszczonej w nieskończonej płaszczyźnie i obciążonej w punkcie przez składową normalną i styczną, P i Q , por. Rys. 2.44, WIN definiuje się jako:

$$K_I^B = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}}, \quad (2.159)$$

$$K_{II}^B = \frac{Q}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}}.$$



RYSUNEK 2.43. Wielkość strefy plastycznej wg Dugdale'a.



RYSUNEK 2.44. Obciążenie na krawędzi szczeliny.

W przypadku, gdy $Q = 0$, to $K_{II} = 0$ i WIN na obu wierzchołkach szczeliny przybierają postać:

$$K_I^A = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a - \xi}{a + \xi}},$$

$$K_I^B = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}}.$$
(2.160)

Wyrażenia te można wykorzystać w sytuacji, gdy obciążenia rozłożone są tylko wzdłuż dodanych długości szczeliny ($[a, a + \rho]$ dla wierzchołka B), przez zsumowanie wpływu ciągłego rozkładu obciążeń na tych odcinkach. Należy zauważyć, że na WIN na jednym z wierzchołków ma również wpływ obciążenie na odcinku dodanym na drugim wierzchołku. A więc:

$$K_\rho = \frac{\sigma_{ys}(\xi)}{\sqrt{\pi a}} \int_a^{a+\rho} \left[\sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} + \sqrt{\frac{a - \xi}{a + \xi}} \right] d\xi = 2\sigma_{ys} \sqrt{\frac{a + \rho}{\pi}} \arccos \frac{a}{a + \rho}.$$
(2.161)

oraz

$$K_\sigma = \sigma \sqrt{\pi(a + \rho)}.$$
(2.162)

Wówczas ρ zgodnie z równaniem (2.158) może być wyrażone jako:

$$\frac{a}{a + \rho} = \cos \frac{\pi \sigma}{2\sigma_{ys}}.$$
(2.163)

Następnie, posługując się rozwinięciem funkcji cosinus w szereg, odrzucając człony wyższego rzędu i pozostawiając jedynie dwa pierwsze człony:

$$\cos \left[\frac{\pi \sigma}{2\sigma_{ys}} \right] = 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\pi \sigma}{2\sigma_{ys}} \right]^2 + \dots, \quad (2.164)$$

uzyskać można przybliżoną długość strefy plastycznej jako:

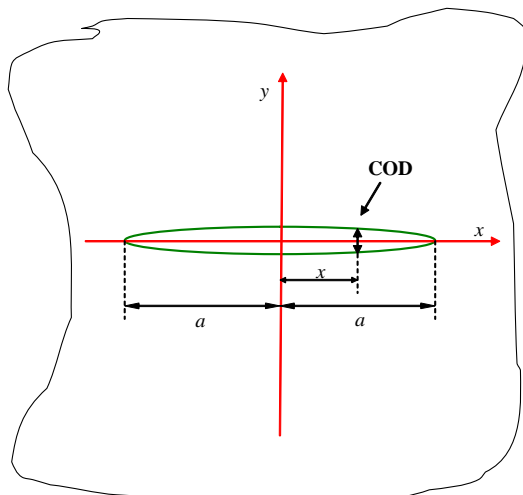
$$\rho = \frac{\pi^2 \sigma^2 a}{8\sigma_{ys}^2} = \frac{\pi}{8} \left[\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right]^2. \quad (2.165)$$

2.10.3. Przemieszczenie wierzchołka szczeliny

Rozwarcie szczeliny (ang.: COD – Crack Opening Displacement) w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia, to odległość między powierzchniami szczeliny, por. Rys. 2.45, czyli:

$$\text{COD} = 2u_y. \quad (2.166)$$

W przypadku wprowadzenia do rozwiązania dodatkowego wydłużenia szczeliny moż-



RYSUNEK 2.45. Wielkość rozwarcia szczeliny

na poprzez zastosowanie jednego z poprzednio opisanych modeli wprowadzających strefę plastyczną, określić *rozwarcie wierzchołka szczeliny* (ang.: CTOD – Crack Tip Opening Displacement). Wielkość tę określa się na granicy rozdzielającej modelową strefę plastyczną i fizyczną szczelinę. Można ją określić z wykorzystaniem wyrażenia (2.166), a więc:

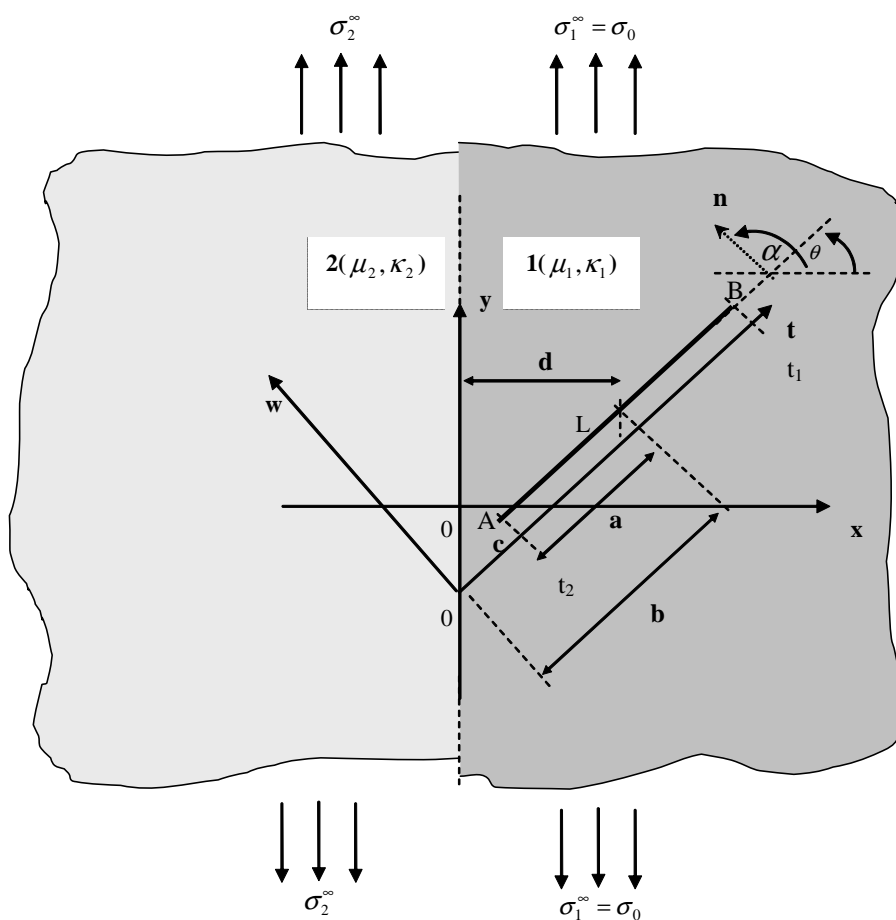
$$\text{CTOD} = 2u_y \Big|_{(r=r_p^*, \theta=\pi)}. \quad (2.167)$$

2.11. Rezultaty dla wybranych konfiguracji szczeliny i interfejsu

W tym rozdziale, w celu weryfikacji proponowanej metody, rozważone będą kilka konfiguracji szczelin umieszczonych zarówno w materiale jednorodnym, jak i w bimateryale. Wyniki będą porównane z wynikami dostępnymi w literaturze. WYN w większości przypadków będą wyrażone w znormalizowanej formie $k_{1,2} = \frac{K_{I,II}}{\sigma_0 \sqrt{a}}$, niezależnej od obciążenia i długości szczeliny.

Pojedyncza szczelina

W przypadku pojedynczej szczeliny dowolnie zorientowanej w stosunku do interfejsu, por. Rys. 2.46, uzyskane wyniki są zgodne z pracą Erdogana *et al.* [66], jak również z pracą [67]. Należy zauważyć, iż wyniki w Tabelach 2.2 i 2.3 dotyczą obciążenia przyłożonego bezpośrednio na powierzchni szczeliny. Natomiast w Tabelach 2.4 i 2.5 wyniki dotyczą obciążenia przyłożonego na granicy próbki.



RYSUNEK 2.46. Konfiguracja szczeliny w sąsiedztwie bimateriału.

TABELA 2.2. Porównanie WIN z wynikami dostępnymi w literaturze, obciążenie na powierzchni szczeliny, $d = 2a$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 23$, $\nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = 0.35$, $p_1^n = -\sigma_0$, $p_1^t = 0$.

$\theta[^\circ]$	k1_B		k1_A		k2_B		k2_A	
	Stos. metoda	Erdogan [66]	Stos. metoda	Erdogan [66]	Stos. metoda	Erdogan [66]	Stos. metoda	Erdogan [66]
0	0,9615	0,9617	0,9349	0,9349	0	0	0	0
20	0,9571	0,9572	0,9306	0,9307	0,0124	0,0125	0,0024	0,0025
40	0,9457	0,9457	0,9217	0,9216	0,0209	0,0209	0	0,00001
60	0,9321	0,9318	0,9149	0,9144	0,0237	0,0237	-0,0071	-0,0071
80	0,9207	0,9206	0,9144	0,9143	0,0214	0,0215	-0,0152	-0,0153
90	0,9168	0,9160	0,9168	0,9160	0,0187	0,0188	-0,0187	-0,0188

TABELA 2.3. Porównanie WIN z wynikami dostępnymi w literaturze, obciążenie na powierzchni szczeliny, $d = 2a$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0.043$, $\nu_2 = 0.35$, $\nu_1 = 0.3$, $p_1^n = -\sigma_0$, $p_1^t = 0$.

$\theta[^\circ]$	k1_B		k1_A		k2_B		k2_A	
	Stos. metoda	Erdogan [66]	Stos. metoda	Erdogan [66]	Stos. metoda	Erdogan [66]	Stos. metoda	Erdogan [66]
0	1,0480	1,0464	1,0813	1,0780	0	0	0	0
20	1,0571	1,0571	1,0930	1,0929	-0,0220	-0,0220	-0,0097	-0,0098
40	1,0809	1,0796	1,1187	1,1165	-0,0377	-0,0377	-0,0078	-0,0077
60	1,1102	1,1091	1,1404	1,1389	-0,0433	-0,0433	0,0061	-0,0062
80	1,1348	1,1344	1,1464	1,1459	-0,0382	-0,0382	0,0242	0,0242
90	1,1426	1,1420	1,1426	1,1420	-0,0320	-0,0321	0,0320	0,0321

TABELA 2.4. WIN dla obciążenia przyłożonego na granicach próbki, $d = 2a$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 23$, $\nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = 0.35$, $p_1^\infty = \sigma_0$, $p_2^\infty = 0$.

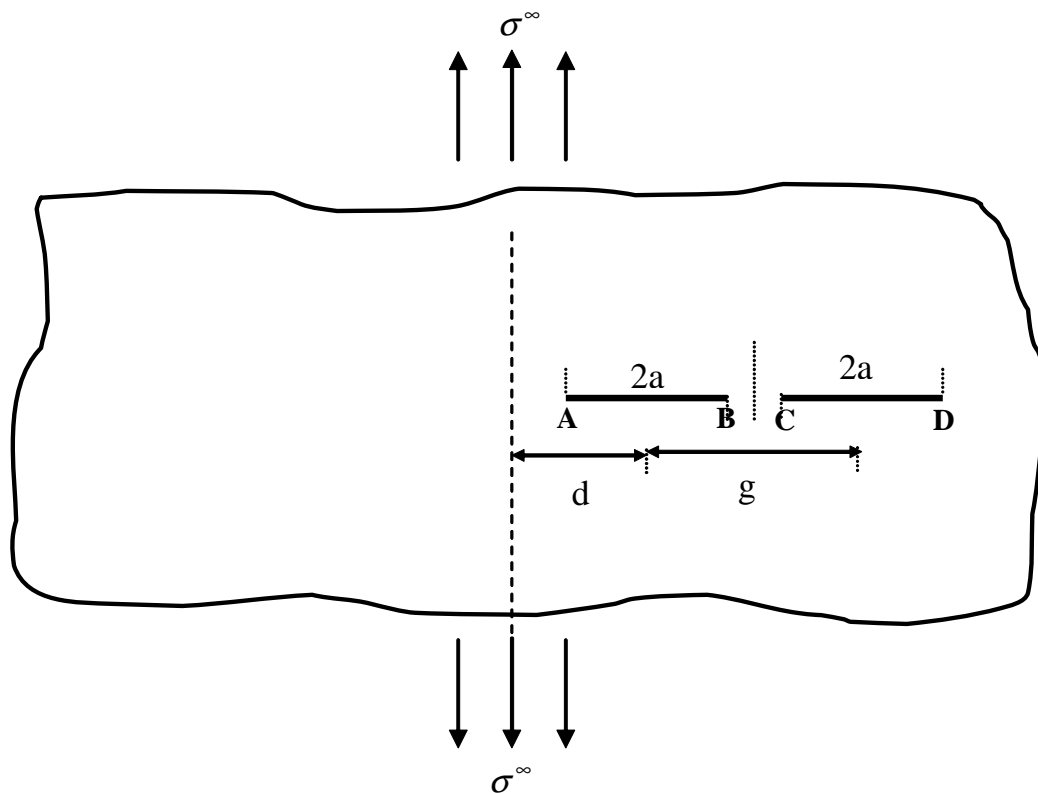
$\theta[^\circ]$	k1_B	k1_A	k2_B	k2_A
0	0,9615	0,9349	0	0
10	0,93167	0,90724	0,1699	0,16071
20	0,84633	0,82876	0,31883	0,30251
30	0,71601	0,70763	0,42851	0,40852
40	0,55695	0,55763	0,48572	0,46588
50	0,38883	0,39633	0,48386	0,46742
60	0,23227	0,24299	0,42369	0,41255
70	0,10622	0,11621	0,31305	0,30743
80	0,025705	0,031641	0,1658	0,16428
90	0	0	0	0

TABELA 2.5. WIN dla obciążenia przyłożonego na granicy próbki, $d = 2a$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0.043$, $\nu_2 = 0.35$, $\nu_1 = 0.3$, $p_1^\infty = \sigma_0$, $p_2^\infty = 0$.

$\theta [^\circ]$	k_{1B}	k_{1A}	k_{2B}	k_{2A}
0	1,0480	1,0813	0	0
10	1,0176	1,0477	0,16812	0,17899
20	0,93051	0,95229	0,31702	0,33685
30	0,79611	0,80623	0,42937	0,45466
40	0,62939	0,6273	0,49157	0,51783
50	0,44943	0,43754	0,49541	0,51817
60	0,27735	0,2605	0,4393	0,45531
70	0,13399	0,11811	0,32879	0,3371
80	0,037289	0,027765	0,17634	0,17861
90	0	0	0	0

Szczeliny oddzielne

Wyniki dla dwóch oddzielnych szczelin



RYSUNEK 2.47. Konfiguracja dwóch szczelin.

Szczególnie interesujące są wyniki uzyskane w przypadku umieszczenia w bimateriale pewnej liczby szczelin. Dotyczy to szczególnie sytuacji, gdy szczeliny te nie znajdują się w tym samym materiale.

Przypadek interakcji między szczelinami umieszczonymi w materiale jednorodnym,

był przedmiotem badań w wielu pracach. Można więc sprawdzić poprawność wyników otrzymywanych za pomocą proponowanej w niniejszej pracy metody poprzez porównanie z wynikami dostępnymi w literaturze. Tabela 2.6 ukazuje bardzo dobrą zbieżność z wynikami opublikowanymi w pracach, np. Erdogana [69] i Lama *et al.* [68]. Wyniki odpowiadają sytuacji z Rys. 2.47.

Rzadko rozważanym przypadkiem bywa natomiast problem interakcji szczelin w materiałach kompozytowych, których przykładem jest bimatériau. W niniejszej pracy rozważono kilka przykładów takiej sytuacji, m.in. dla konfiguracji z Rys. 2.47, lecz dla bimatériau. Uzyskane rezultaty mogą pomóc w ocenie wpływu drugiej szczeliny w materiale kompozytowym. Zmianę wartości WIN w porównaniu z wynikami dla materiału jednorodnego przedstawiono w Tabelach 2.7 i 2.8. Należy zauważyć, iż rezultaty z Tabel 2.7 oraz 2.8 dla $2a/g = 0.05$, a więc sytuacji, gdy szczeliny są dość daleko oddalone od siebie, powinny zmierzać do wyników z Tabel 2.2, 2.3 lub 2.4, 2.5 (pojedyncza szczelina) dla szczególnej sytuacji, gdy $\theta = 0$. Fakt ten potwierdza poprawność stosowanej metody zarówno dla materiału jednorodnego, jak i bimatériau.

TABELA 2.6. Porównanie WIN dla dwóch oddzielnych szczelin w materiale jednorodnym, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$.

	k1_A			k1_B		
$2a/g$	Stosowana metoda	Lam, Phua [68]	Erdogan [69]	Stosowana metoda	Lam, Phua [68]	Erdogan [69]
0.05	1.0002	1,00024	1,00030	1.0002	1,00027	1,00029
0.1	1.0011	1,00120	1,00120	1.0012	1,00130	1,00131
0.2	1.0045	1,00463	1,00462	1.0055	1,00563	1,00566
0.3	1.01	1,01019	1,01016	1.0137	1,01377	1,01383
0.4	1.0177	1,01792	1,01787	1.027	1,02703	1,02717
0.5	1.0278	1,02805	1,02795	1.0478	1,04766	1,04796
0.6	1.0408	1,04110	1,04094	1.0803	1,07979	1,08040
0.7	1.0577	1,05813	1,05786	1.1331	1,13186	1,13326
0.8	1.0809	1,08148	1,08107	1.2287	1,22520	1,22894
0.9	1.1173	1,11809	1,11741	1.4534	1,44071	1,45387

Wyniki dla trzech oddzielnych szczelin

Rysunek 2.48 przedstawia geometrię trzech szczelin, z których dwie umieszczone są symetrycznie po kątem ψ . Uzyskane wyniki ($k1_B$) są zgodne z wynikami publikowanymi w pracy Lam *et al.* [68], co widoczne jest w Tabelach 2.9 oraz 2.10 dla przypadku materiału jednorodnego. Wyniki umieszczenia takiego systemu szczelin w bimatériau zaprezentowano w Tabelach 2.11 oraz 2.12.

TABELA 2.7. WIN dla dwóch oddzielnych szczelin w bimateryale: $d = 2a$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 23$, $\nu_2 = 0,3$, $\nu_1 = 0,35$.

$2a/g$	k_{1A}	k_{1B}	k_{1C}	k_{1D}
0.05	0,9297	0,9587	0,9998	0,9998
0.1	0,9300	0,9591	0,9998	0,9998
0.2	0,9313	0,9613	1,0008	1,0004
0.3	0,9338	0,9667	1,0041	1,0021
0.4	0,9379	0,9769	1,0117	1,0057
0.5	0,9438	0,9942	1,0260	1,0114
0.6	0,9524	1,0225	1,0509	1,0198
0.7	0,9636	1,0700	1,0946	1,0318
0.8	0,9797	1,1573	1,1776	1,0492
0.9	1,0056	1,3641	1,3789	1,0779

TABELA 2.8. WIN dla dwóch oddzielnych szczelin w bimateryale: $d = 2a$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,043$, $\nu_2 = 0,35$, $\nu_1 = 0,3$.

$2a/g$	k_{1A}	k_{1B}	k_{1C}	k_{1D}
0.05	1,0796	1,0471	1,0002	1,0002
0.1	1,0805	1,0483	1,0017	1,0015
0.2	1,0850	1,0543	1,0088	1,0072
0.3	1,0929	1,0653	1,0218	1,0164
0.4	1,1041	1,0822	1,0414	1,0284
0.5	1,1186	1,1072	1,0696	1,0434
0.6	1,1370	1,1447	1,1109	1,0617
0.7	1,1605	1,2042	1,1746	1,0845
0.8	1,1923	1,3100	1,2855	1,1146
0.9	1,2417	1,5564	1,5383	1,1603

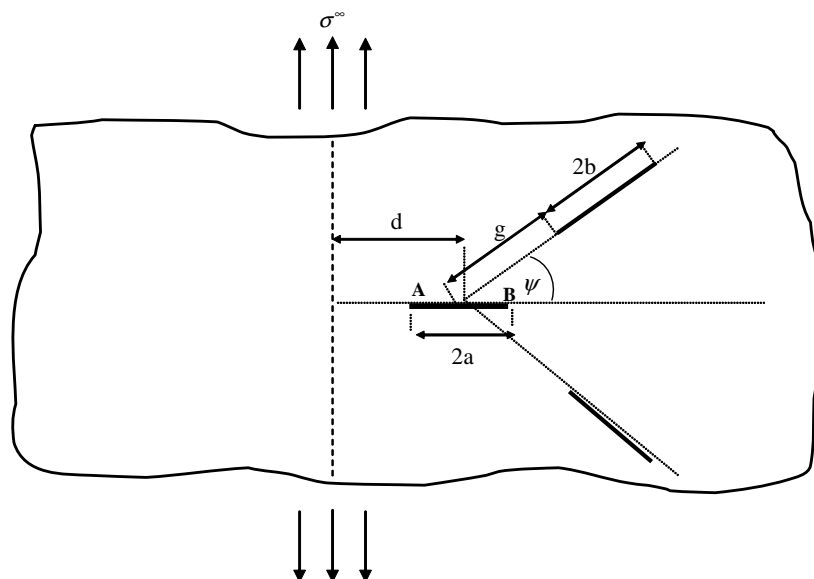
TABELA 2.9. WIN z pracy Lam, Phua [68] dla trzech oddzielnych szczelin w materiale jednorodnym.

b/a	$\psi = 30^\circ$	$\psi = 45^\circ$	$\psi = 60^\circ$	$\psi = 90^\circ$	$\psi = 120^\circ$	$\psi = 135^\circ$	$\psi = 150^\circ$
1	1,3256	1,1134	0,9910	1,0027	1,0899	1,1290	1,1495
1/2	1,1304	1,0248	0,9843	0,9999	1,0295	1,0450	1,0577
1/4	1,0403	1,0010	0,9911	0,9989	1,0076	1,0127	1,0182
1/8	1,0097	0,9979	0,9959	0,9987	1,0011	1,0025	1,0044
1/16	1,0014	0,9982	0,9978	0,9987	0,9993	0,9997	1,0002

Połączone szczeliny

Wyniki dla szczeliny przechodzącej przez interfejs

W przypadku szczeliny przechodzącej przez interfejs wyniki otrzymane przy zastosowaniu metody proponowanej w pracy porównano z rezultatami pracy [53], w której rozważano m.in. sytuację jak na Rys. 2.24 (dla $t_3 = t_2 = 0$). Porównując wyniki zamiesz-



RYSUNEK 2.48. Konfiguracja trzech szczelin: głównej oraz dwóch symetrycznie odchylonych pod kątem ψ .

TABELA 2.10. Wyniki z zastosowaniem wykorzystywanej metody dla trzech oddzielnych szczelin w materiale jednorodnym: $g/a = 1.5$.

b/a	$\psi = 30^\circ$	$\psi = 45^\circ$	$\psi = 60^\circ$	$\psi = 90^\circ$	$\psi = 120^\circ$	$\psi = 135^\circ$	$\psi = 150^\circ$
1	1,3256	1,1146	0,9919	1,0053	1,0892	1,1269	1,1542
1/2	1,1326	1,0307	0,9907	1,0043	1,0298	1,0434	1,0581
1/4	1,0455	1,0118	1,0005	1,0035	1,0089	1,0124	1,0183
1/8	1,0172	1,0095	1,0044	1,0023	1,0026	1,0030	1,0047
1/16	1,0086	1,0022	1,0009	1,0013	1,0007	1,0005	1,0009

TABELA 2.11. Wyniki z zastosowaniem wykorzystywanej metody dla trzech oddzielnych szczelin w bimateriale: $d = 5a$, $g/a = 1,5$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 23$, $\nu_2 = 0,3$, $\nu_1 = 0,35$.

b/a	$\psi = 30^\circ$	$\psi = 45^\circ$	$\psi = 60^\circ$	$\psi = 90^\circ$	$\psi = 120^\circ$	$\psi = 135^\circ$	$\psi = 150^\circ$
1	1,3049	1,0980	0,9796	0,9985	1,0816	1,1136	1,1316
1/2	1,1210	1,0209	0,9823	0,9974	1,0224	1,0342	1,0462
1/4	1,0370	1,0040	0,9930	0,9965	1,0017	1,0047	1,0097
1/8	1,0097	1,0021	0,9972	0,9953	0,9954	0,9957	0,9972
1/16	1,0013	0,9999	0,9967	0,9942	0,9936	0,9933	0,9936

czony w Tabeli 2.13 można zauważyć, że wraz ze zbliżaniem się wierzchołka szczeliny t_1 do interfejsu różnica między wynikami powiększa się. Powodem takiej sytuacji jest użyte w niniejszej pracy uproszczenie, opisywane w podrozdziale 2.4.3. Również w tym przypadku szczelina podzielona zostaje na dwie szczeliny, przy czym punkt graniczny znajduje się w interfejsie, a jego stopień osobliwości, dla uproszczenia zadania, przyjęto równy $1/2$. Jednakże różnice są stosunkowo nieduże. Wydaje się, że są one dopuszczalne w zastosowaniu do głównego problemu – zmęczeniowej propagacji szczeliny.

TABELA 2.12. Wyniki z zastosowaniem wykorzystywanej metody dla trzech oddzielnych szczelin w bimateryale: $d = 5a$, $g/a = 1.5$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0.043$, $\nu_2 = 0,35$, $\nu_1 = 0.3$.

b/a	$\psi = 30^\circ$	$\psi = 45^\circ$	$\psi = 60^\circ$	$\psi = 90^\circ$	$\psi = 120^\circ$	$\psi = 135^\circ$	$\psi = 150^\circ$
1	1,3513	1,1343	1,0067	1,0139	1,0986	1,1417	1,1788
1/2	1,1463	1,0425	1,0009	1,0127	1,0386	1,0539	1,0717
1/4	1,0555	1,0213	1,0095	1,0119	1,0172	1,0212	1,0280
1/8	1,0262	1,0183	1,0130	1,0107	1,0108	1,0114	1,0134
1/16	1,0172	1,0157	1,0123	1,0096	1,0089	1,0088	1,0093

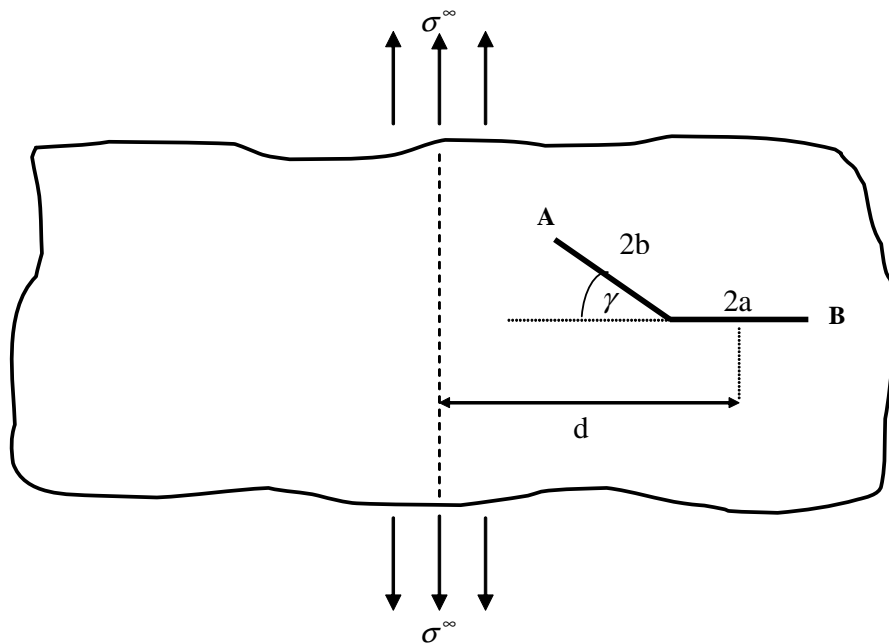
TABELA 2.13. WIN dla szczeliny przechodzącej przez interfejs: $t_4 = \text{const.}$, $l = (t_4 + t_1)/2$, $\frac{E_2}{E_1} = 22.447$, $\nu_2 = 0,3$, $\nu_1 = 0.35$.

t_1/t_4	$k(t_4)/(p_2\sqrt{l})$ [53]	$k(t_4)/(p_2\sqrt{l})$	$k(t_1)/(p_1\sqrt{l})$ [53]	$k(t_1)/(p_1\sqrt{l})$
0.00	1.3552	1.356	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
0.05	1.4037	1.403	4.360	4.272
0.25	1.3324	1.332	2.139	2.091
0.5	1.2378	1.236	1.556	1.521
0.75	1.1588	1.157	1.311	1.301
1	1.0931	1.092	1.178	1.171
1.25	1.0376	1.037	1.096	1.089
1.5	0.9902	0.989	1.042	1.035
1.75	0.9490	0.948	1.004	0.996
2	0.9128	0.912	0.977	0.972

Szczelina główna z odgałęzieniem

Rysunek 2.49 przedstawia szczelinę główną oraz jej odgałęzienie. Dla takiej sytuacji obliczano WIN i T w zależności od kąta nachylenia γ odgałęzionej szczeliny w stosunku do szczeliny głównej i stosunku wielkości d/a . W przypadku materiału jednorodnego uzyskiwane wyniki zaprezentowane w Tabeli 2.14 są zgodne z wieloma rezultatami dostępnymi w literaturze np. [51], [52] dla przypadku jednoosiowego obciążenia. Można również wykazać, że w przypadku dwuosiowego obciążenia wyniki również będą zgodne np. z pracą [52]. Natomiast Tabele 2.15 oraz 2.16 przedstawiają unikalne rezultaty dla tej samej geometrii szczeliny w przypadku umiejscowienia jej w bimateryale.

Wartości składowej T obliczane przy użyciu zaproponowanej metody, są zgodne z wartościami otrzymywanymi analitycznie dla pojedynczej szczeliny ($T = \sigma^\infty(1 - k) \cos 2\alpha$, Rys. 2.5). Jednakże metoda ta umożliwia uzyskanie tego parametru dla dowolnego systemu prostoliniowych szczelin. Niestety, autorowi nie udało się dotrzeć do prac prezentujących wyniki dla bardziej skomplikowanych szczelin niż szczelina z rozgałęzieniem umieszczona w materiale jednorodnym. Jedną z prac prezentującą wyniki, które można bezpośrednio porównać z prezentowaną metodą jest praca [52]. Autorzy pracy rozważają główną szczelinę o długości $2a$ i odgałęzienie oznaczone $2b$, por. Rys. 2.49. Opublikowane są rezultaty dla różnego stosunku $\frac{b}{a}$ i kąta pochylenia odgałęzienia. System szczelin jest tam, m.in. obciążany jednoosiowo, prostopadłe do powierzchni szczeliny głównej. Wyniki otrzymane za pomocą metody proponowanej w niniejszej pracy są zgodne z wynikami w



RYSUNEK 2.49. Konfiguracja szczeliny głównej z odgałęzieniem.

pracy [52], por. Tabele 2.14 oraz 2.17. Inną pracą prezentującą wyniki obliczania parametru T , które można porównać z prezentowaną metodą jest praca [78]. Rezultaty dotyczą m.in. szczeliny krawędziowej o długości a , od której odgałęzia się niewielka szczelina l , stosunek ich długości wynosi $l/a = 1/450$. Szczeliny umieszczono w elemencie o skończonych wymiarach, który został obciążony jak na Rys. 2.50. Ponieważ wymiar odgałęzienia w stosunku do wymiarów próbki jest niewielki, można nie uwzględniać warunków brzegowych jakim są granice próbki. Tak więc posługując się funkcją Greena dla dyslokacji umieszczonej w nieskończenie dużej tarczy można porównać rezultaty uzyskiwane za pomocą Metody Elementów Skończonych z wynikami stosowanej metody. Okazuje się, że rezultaty obu metod są zbieżne.

Podsumowanie

Proponowany sposób obliczania WIN i T wydaje się być dość dobrą alternatywą rozwiązań zaproponowanych przez innych autorów. Umożliwia poszukiwanie WIN i T dla wielu dowolnie zorientowanych szczelin: połączonych lub nie, przechodzących przez interfejs, będących po obu stronach interfejsu, jak i będących w interfejsie (przy użyciu odpowiedniego modelu interfejsu). Daje to więc możliwość rozwiązania problemu propagacji szczeliny zmęczeniowej w bimateriale. Rozwiązanie takie będzie przedstawione w następnej części pracy.

TABELA 2.14. Wyniki z zastosowaniem wykorzystywanej metody dla głównej szczeliny ($\theta = 0$) oraz jej odgałęzienia umieszczonych w materiale jednorodnym: $d = 5a$, $n = 80$.

$b / a = 1$	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,414	0	-1	1,414	0	-1
15	1,3258	-0,38116	-0,87646	1,3971	0,022796	-0,98996
30	1,0828	-0,68052	-0,54082	1,3506	0,032318	-0,9621
45	0,74361	-0,83772	-0,088256	1,2865	0,020638	-0,92257
60	0,38818	-0,82911	0,35225	1,2191	-0,011714	-0,8799
75	0,096268	-0,67258	0,65361	1,1602	-0,056024	-0,84291
$b / a = 0,75$	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,3227	0	-1	1,3227	0	-1
15	1,2415	-0,35265	-0,87588	1,3089	0,023913	-0,99362
30	1,0172	-0,63261	-0,5387	1,271	0,036819	-0,97562
45	0,70187	-0,78635	-0,08414	1,2183	0,031751	-0,94909
60	0,36595	-0,79309	0,35848	1,1625	0,008146	-0,91831
75	0,079302	-0,66879	0,66243	1,1138	-0,028287	-0,88782
$b/a = 0,5$	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,2246	0	-1	1,2246	0	-1
15	1,1518	-0,31781	-0,87299	1,2146	0,022541	-0,99715
30	0,94978	-0,5734	-0,52743	1,1873	0,036996	-0,9889
45	0,66264	-0,72088	-0,05952	1,1488	0,037985	-0,97607
60	0,34985	-0,74207	0,40145	1,1076	0,024453	-0,95984
75	0,069849	-0,64954	0,7304	1,071	-0,000322	-0,94152
$b/a = 0,25$	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,1179	0	-1	1,1179	0	-1
15	1,0566	-0,26938	-0,86199	1,1127	0,016591	-0,9997
30	0,8854	-0,48949	-0,48451	1,0982	0,02869	-0,99887
45	0,63838	-0,62348	0,033395	1,0777	0,033175	-0,99702
60	0,36172	-0,65537	0,55884	1,0552	0,029149	-0,99378
75	0,10149	-0,59216	0,96243	1,0348	0,018051	-0,98892

TABELA 2.15. Wyniki z zastosowaniem wykorzystywanej metody dla głównej szczeliny ($\theta = 0$) oraz jej odgałęzienia umieszczonych w bimateriale: $d = 5a$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 23$, $\nu_2 = 0,3$, $\nu_1 = 0,35$.

b / a = 1	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,322	0	-0,8669	1,3598	0	-0,9766
15	1,2262	-0,4191	-0,77035	1,3454	0,00298	-0,96461
30	0,966	-0,7366	-0,49505	1,306	-0,00377	-0,93214
45	0,61336	-0,88449	-0,09879	1,2513	-0,02537	-0,88852
60	0,25918	-0,84551	0,31107	1,1932	-0,06003	-0,8449
75	-0,0139	-0,65197	0,60868	1,1416	-0,09955	-0,81122
b / a = 0,75	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,2675	0	-0,92142	1,2867	0	-0,98038
15	1,18	-0,38166	-0,81122	1,2743	0,011871	-0,973
30	0,94079	-0,67691	-0,50783	1,2403	0,014834	-0,95256
45	0,61159	-0,826	-0,08969	1,1929	0,00349	-0,9235
60	0,27166	-0,81156	0,32841	1,1425	-0,02206	-0,89147
75	-0,00582	-0,65891	0,62537	1,0983	-0,05641	-0,86181
b/a = 0,5	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,1926	0	-0,95425	1,2018	0	-0,98475
15	1,1158	-0,33682	-0,8347	1,1926	0,016449	-0,98158
30	0,90398	-0,60342	-0,50833	1,1672	0,0259	-0,97251
45	0,60676	-0,74975	-0,06342	1,1314	0,023747	-0,95874
60	0,36235	-0,95092	0,37937	1,3697	0,011544	-0,94186
75	0,012283	-0,64782	0,70061	1,0586	-0,01466	-0,92352
b/a = 0,25	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,1004	0	-0,9743	1,1045	0	-0,98906
15	1,0375	-0,27805	-0,84037	1,0995	0,014535	-0,98885
30	0,86242	-0,50366	-0,47381	1,0858	0,02499	-0,98808
45	0,61118	-0,63806	0,029944	1,0664	0,028526	-0,98638
60	0,33222	-0,66534	0,54263	1,045	0,024326	-0,98333
75	0,073037	-0,59416	0,9389	1,0255	0,013707	-0,97869

TABELA 2.16. Wyniki z zastosowaniem wykorzystywanej metody dla głównej szczeliny ($\theta = 0$) oraz jej odgałęzienia umieszczonych w bimateryale: $d = 5a$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0.043$, $\nu_2 = 0.35$, $\nu_1 = 0.3$.

b / a = 1	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,529	0	-1,1487	1,4819	0	-1,0128
15	1,4442	-0,33682	-0,99967	1,4597	0,049105	-1,004
30	1,2082	-0,61312	-0,60537	1,4005	0,077247	-0,97951
45	0,87258	-0,7758	-0,09468	1,3219	0,073926	-0,94416
60	0,51067	-0,79407	0,38208	1,2426	0,041279	-0,9047
75	0,20049	-0,67269	0,69408	1,1757	-0,00928	-0,8683
b / a = 0,75	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,3895	0	-1,0841	1,3663	0	-1,0132
15	1,3125	-0,3222	-0,94692	1,35	0,038783	-1,0075
30	1,0979	-0,58501	-0,57742	1,3059	0,062951	-0,99142
45	0,79083	-0,74073	-0,0864	1,2455	0,063789	-0,96743
60	0,45562	-0,76537	0,38299	1,1827	0,04102	-0,93895
75	0,1599	-0,66678	0,69742	1,1289	0,001678	-0,90954
b/a = 0,5	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,2624	0	-1,04737 1,2515	0	-1,0114	
15	1,1927	-0,29923	-0,91326	1,2405	0,029676	-1,0088
30	0,99798	-0,54363	-0,54936	1,2104	0,049717	-1,0012
45	0,71804	-0,69112	-0,05871	1,1684	0,053837	-0,98938
60	0,40813	-0,72256	0,42121	1,1236	0,040927	-0,97421
75	0,12464	-0,64631	0,75937	1,0842	0,014841	-0,9566
b/a = 0,25	k_{1A}	k_{2A}	T_A	k_{1B}	k_{2B}	T_B
0	1,1382	0	-1,0258	1,1335	0	-1,0087
15	1,0782	-0,2614	-0,88389	1,1279	0,018931	-1,0084
30	0,91007	-0,47644	-0,49587	1,1125	0,032864	-1,0074
45	0,66615	-0,60993	0,035988	1,0907	0,038348	-1,0055
60	0,39082	-0,64584	0,57435	1,0669	0,034425	-1,0022
75	0,12909	-0,58973	0,98572	1,0453	0,022715	-0,99737

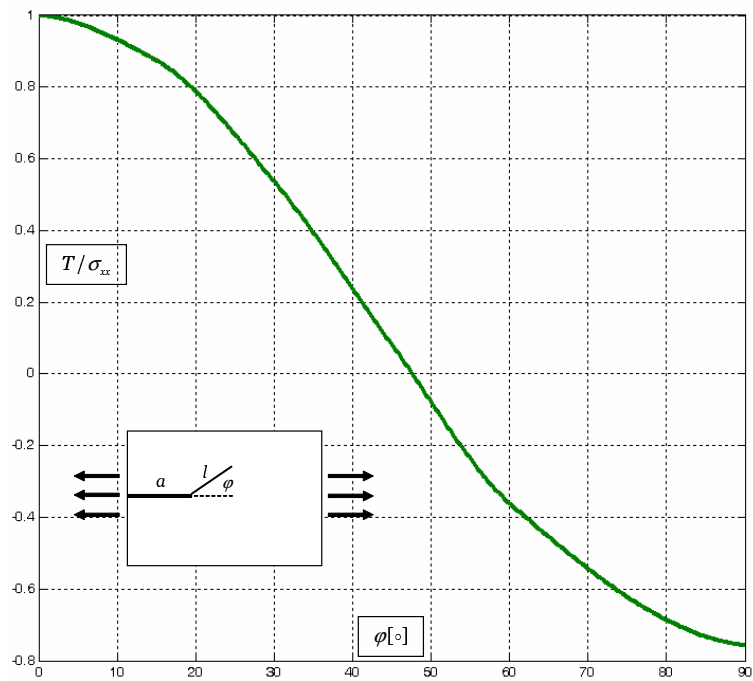
TABELA 2.17. Wyniki dla T zgodnie z konfiguracją Rys. 2.49.

$\frac{2b}{2a}$	γ	T_B	T_A
1.000	0	-1	-1
	10	-0.995	-0.944
	20	-0.982	-0.784
	30	-0.962	-0.541
	40	-0.936	-0.244
	50	-0.908	0.066
	60	-0.879	0.352
	70	-0.854	0.575
	80	-0.833	0.706
	$\rightarrow 90$	-0.819	0.727

$\frac{2b}{2a}$	γ	T_B	T_A
0.500	0	-1	-1
	10	-0.999	-0.943
	20	-0.995	-0.778
	30	-0.988	-0.527
	40	-0.981	-0.221
	50	-0.971	0.101
	60	-0.959	0.401
	70	-0.947	0.642
	80	-0.935	0.794
	$\rightarrow 90$	-0.922	0.842

$\frac{2b}{2a}$	γ	T_B	T_A
0.250	0	-1	-1
	10	-0.999	-0.937
	20	-0.999	-0.758
	30	-0.998	-0.484
	40	-0.997	-0.146
	50	-0.996	0.214
	60	-0.993	0.559
	70	-0.990	0.848
	80	-0.987	1.054
	$\rightarrow 90$	-0.982	1.153

$\frac{2b}{2a}$	γ	T_B	T_A
0.025	0	-1	-1
	10	-1	-0.898
	20	-1.0001	-0.605
	30	-1.0003	-0.151
	40	-1.0004	0.415
	50	-1.0006	1.036
	60	-1.0007	1.650
	70	-1.0007	2.198
	80	-1.0007	2.629
	$\rightarrow 90$	-1.0007	2.898



RYСУNEK 2.50. Stosunek wielkości T do przyłożonego naprężenia σ_{xx} , dla $l/a = 1/450$.

Rozdział 3

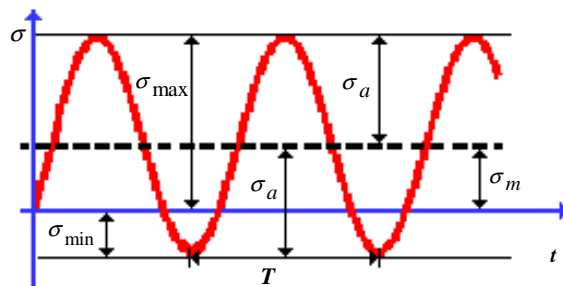
Szczelina zmęczeniowa w złożonym stanie naprężenia.

3.1. Podstawy teorii zmęczenia materiałów

Pod pojęciem *zmęczenie materiału* rozumiemy degradację spójności materiału jako wynik działania czynników zewnętrznych zmiennych w czasie. Czynniki zewnętrzne występują zazwyczaj jako ulegające zmianie obciążenie mechaniczne, ale mogą również występować w innej formie powodowane przez temperaturę lub wilgotność. W przypadku pojawienia się w materiale szczeliny może ona propagować się albo przez szybkie i niestabilne pęknięcie lub przez stabilny, cykliczny wzrost (zmęczenie). Najbardziej obszerna i dostępna literatura na temat zmęczenia dotyczy metali, dlatego też większość podstawowych charakterystyk zaprezentowanych w tym rozdziale dotyczyć będzie właśnie stopów metali.

3.1.1. Naprężenia zmienne

Obciążenia zmienne w czasie mogą być dowolnie złożone zależnie od warunków i źródeł, których są wynikiem. Jednakże istnieją przebiegi obciążeń o powtarzających się wartościach i częstościach występowania. Są to obciążenia okresowo zmienne. Najprostszym przypadkiem takiego obciążenia jest obciążenie sinusoidalnie zmienne, Rys. 3.1. Taki właśnie przypadek przyjęto za podstawę do praktycznego wyznaczania zmęczeniowych właściwości materiałów i parametrów modelowych [3], takich jak



RYSUNEK 3.1. Sinusoidalny przebieg naprężenia.

- *naprężenie średnie cyklu*, σ_m

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad (3.1)$$

- *amplituda cyklu naprężenia* σ_a

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad (3.2)$$

- *naprężenie maksymalne cyklu* σ_{\max}

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad (3.3)$$

- *naprężenie minimalne cyklu* σ_{\min}

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (3.4)$$

Asymetrię cyklu charakteryzuje *współczynnik asymetrii cyklu* R ,

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (3.5)$$

Używa się również *współczynnika stałości obciążenia*, κ

$$\kappa = \frac{\sigma_m}{\sigma_a}, \quad (3.6)$$

przy czym

$$\kappa = \frac{1 + R}{1 - R}, \quad \text{lub} \quad R = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}. \quad (3.7)$$

Ogólne równanie dla przebiegu naprężeń cyklicznych w funkcji czasu można zapisać jako:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a F(t), \quad (3.8)$$

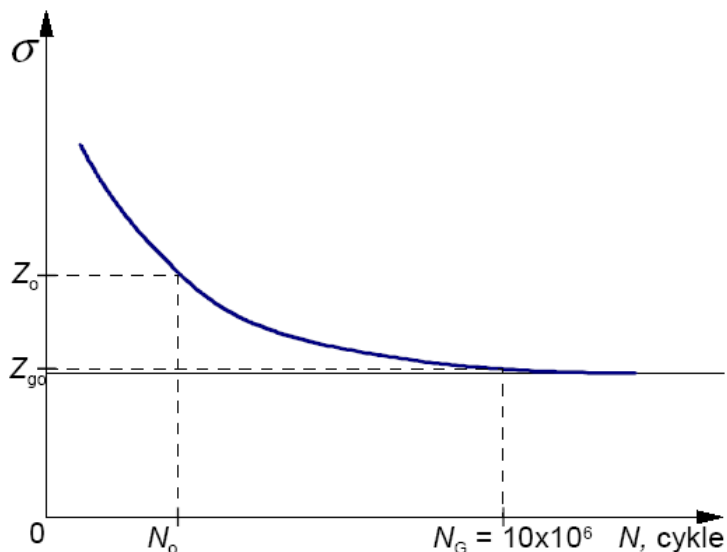
gdzie $F(t)$ określa zmiany amplitudy naprężenia w czasie. W przypadku cykli harmonicznym, gdy naprężenie zmienia się sinusoidalnie

$$F(t) = \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi f, \quad (3.9)$$

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.10)$$

W dziedzinie zmęczenia materiałów podstawowym narzędziem analizy jest wykres Wöhlera, którego historia sięga 1860 roku, kiedy to został użyty po raz pierwszy do określenia wpływu naprężenia na zmęczeniowy czas życia osi wagonów kolejowych. Bada się określoną liczbę próbek wzorcowych obciążonych różnymi wartościami σ_a i σ_m , aż do ich zniszczenia przy liczbie cykli N_c lub do czasu osiągnięcia liczby cykli N_G . Otrzymane wartości nanosi się na wykres w układzie współrzędnych $\sigma - \log N$ (*ang.*: *S-N curve*), uzyskując po ich połączeniu wykres zmęczeniowy Wöhlera, por. Rys. 3.2.

Największą wartość naprężenia okresowo zmiennego σ_{max} (dla określonego cyklu naprężenia), przy której próbki nie ulegają zniszczeniu po przeniesieniu nieograniczonej liczby cykli obciążenia nazywa się *nieograniczoną wytrzymałością zmęczeniową* albo *rzeczywistą*, (fizyczną) granicą zmęczenia. Wartość tę na wykresie Wöhlera wyznacza asymptota.



RYSUNEK 3.2. Wykres zmęczeniowy Wöhlera w układzie $\sigma - \log N$ (wykres przykładowy, dane dla stali).

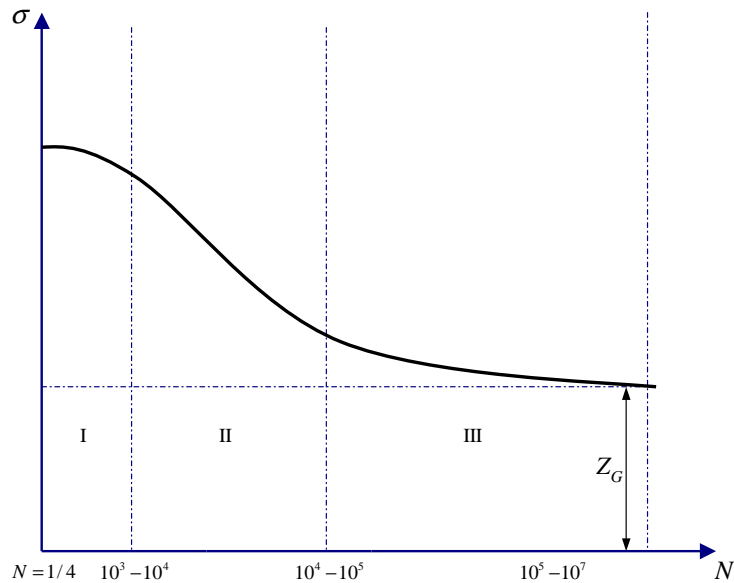
W praktyce za granicę zmęczenia (wytrzymałość zmęczeniową) przyjmuje się (PN-76/H-04325) największą wartość naprężenia okresowo zmiennego σ_{max} (przy danym cyklu), przy której próbki nie ulegają zniszczeniu w ciągu określonej liczby cykli N_G , przyjętej umownie za bazę próby zmęczeniowej. Dla stali konstrukcyjnych przyjmuje się bazę $N_G = 10 \cdot 10^6$ cykli, a dla innych metali i stopów nieżelaznych $N_G = 100 \cdot 10^6$. Wyznaczone w ten sposób granice zmęczenia oznacza się np. dla wahadłowego zginania jako Z_{g0} .

Często wykres Wöhlera nie jest przedstawiany w pełnym zakresie, rozpoczyna się od pewnej liczby cykli. Na pełnym wykresie Wöhlera początek układu odpowiada $\frac{1}{4}$ cyklu. Dla $\frac{1}{4}$ cyklu zakłada się, że naprężenie niszczące jest równe wytrzymałości przy obciążeniu statycznym. W przypadku tak skonstruowanego wykresu możemy wyróżnić kilka obszarów, zależnych od procesów zachodzących w materiale, por. Rys. 3.3. Procesy te zależne są wartości naprężenia. Wykres zmęczeniowy możemy wówczas podzielić na trzy części:

- I. Niszczenie próbek ma charakter statycznego pęknięcia plastycznego. Pęknięcie zachodzi przy granicznym odkształceniu plastycznym. Zgodnie z przebiegiem pęknięcia, obszar ten nazwano obszarem *pęknięcia quasi-statycznego* lub *wytrzymałości quasi-statycznej*.
- II. Pęknięcie zachodzi tu przy wysokich naprężeniach, a więc wyraźnie zaznaczających się odkształceniach plastycznych. Inicjacja szczelin zachodzi w sposób gwałtowny, przez większą część czasu szczelina propaguje, aż do końcowego zniszczenia. Obszar ten nazwano obszarem *niskocyklowego zmęczenia* lub *wytrzymałości niskocyklowej*. Dla tego obszaru Coffin [186] i Manson [185] zaproponowali empiryczny związek, który bazując na dominującym plastycznym odkształceniu, wyraża się następująco:

$$N_f^k \Delta \varepsilon_{pl} = C \quad (3.11)$$

gdzie: N_f jest liczbą cykli do zniszczenia, $\Delta \varepsilon_{pl}$ jest zakresem ustalonego odkształcenia plastycznego, k i C są stałymi materiałowymi. Wykresem tej zależności w układzie logarytmicznym jest linia prosta o pochyleniu k i położeniu określonym



RYSUNEK 3.3. Pełny wykres zmęczeniowy Wöhlera (wykres przykładowy).

stałą C . W praktyce najczęściej używa się tego równania w postaci:

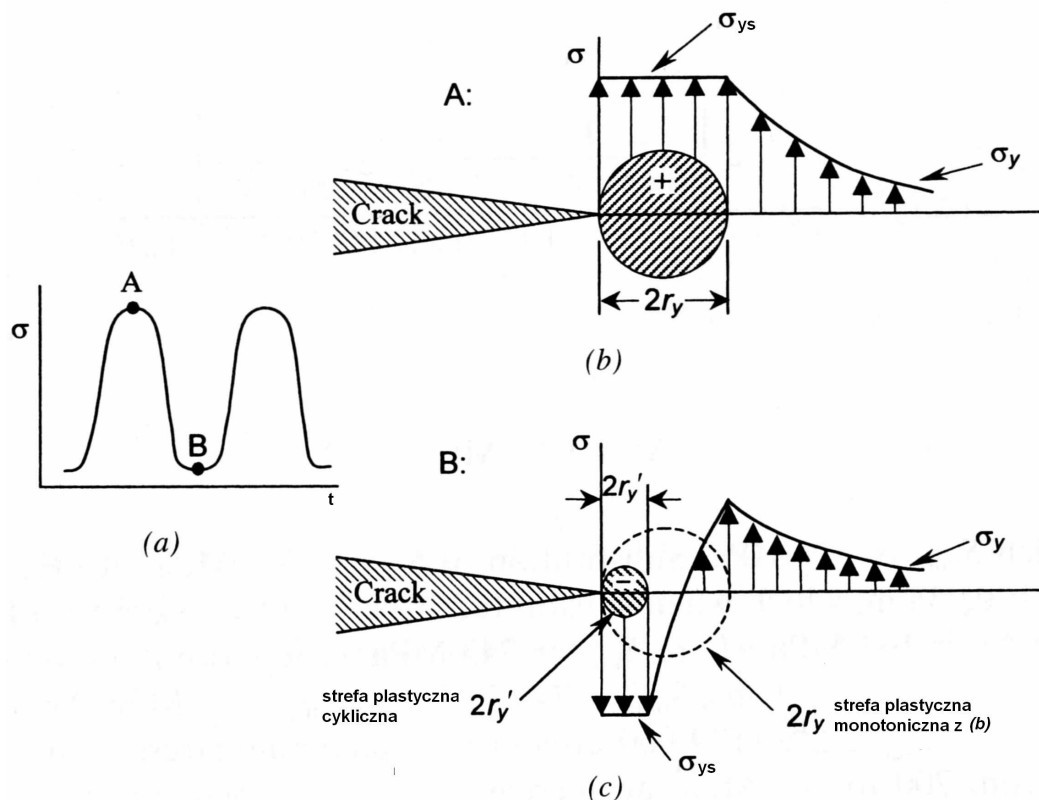
$$\frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} = \varepsilon'_f (2N_G)^c, \quad (3.12)$$

gdzie ε'_f i $c = -k$ są stałymi materiałowymi. Współczynnik ε'_f jest odkształceniem przy zerwaniu w pierwszym nawrocie ($2N_f = 1$), który może być wyznaczony dla monotonicznego rozciągania, oraz c równe jest -0.7 do -0.5 w przypadku większości metali.

- III. Pękanie zachodzi przy małych naprężeniach, ale przy dużej liczbie cykli i małych odkształceniach plastycznych. Większość czasu w tym obszarze zajmuje inicjacji szczelin. Dużą rolę odgrywają tu mikroskopijne defekty materiału, prowadzące do bardzo dużej rozbieżności w określeniu granicznej liczby cykli. Obszar ten nazwano obszarem *wysokocyklowego zmęczenia* lub *wytrzymałości wysokocyklowej*. Pękanie w tym obszarze zbliżone jest do pęknięcia kruchego.

3.1.2. Strefa plastyczna podczas obciążenia cyklicznego

W podrozdziale 2.10.1 podano wyrażenia określające wielkości strefy plastycznej podczas obciążenia monotonicznego. Koncepcja ta została również użyta do określenia strefy plastycznej podczas obciążenia cyklicznego. Rysunek 3.4b przedstawia schemat strefy plastycznej wg Irwina podczas obciążenia odpowiadającego punktowi A, por. Rys. 3.4a. Jednakże obciążenie to jest redukowane podczas odciążenia do wartości z punktu B, dla której wielkość strefy plastycznej równa jest $2r'_y$, Rys. 3.4c. Maksymalna zmiana naprężenia podczas odciążania może więc być równa $2\sigma_{ys}$. Rysunek 3.4c pokazuje rozkład naprężenia podczas odciążania. Zauważyć należy, iż naprężenie wewnątrz strefy plastycznej $2r'_y$, jest ściskające, natomiast na zewnątrz naprężenie to wzrasta, aż stanie się rozciągające. Kluczem do tej idei jest to, że znak naprężenia niesprężystego związanego z cykliczną strefą plastyczną jest przeciwny niż znak wynikający z zastosowanego obciążenia. Wielkość strefy plastycznej zazwyczaj oszacowana jest na podstawie wyrażenia (2.157) przez



RYСУNEK 3.4. Schemat strefy plastycznej: a) wykres obciążenia, b) strefa plastyczna monotoniczna, c) strefa plastyczna cykliczna.

użycie $K \rightarrow \Delta K$ oraz $\sigma_{ys} \rightarrow 2\sigma_{ys}$, co dla płaskiego stanu naprężenia daje [89]

$$2r'_y \approx \frac{1}{\pi} \left[\frac{\Delta K}{2\sigma_{ys}} \right]^2 = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\Delta K}{\sigma_{ys}} \right]^2 \quad (3.13)$$

oraz w przypadku płaskiego stanu odkształcenia dla $R \geq 0$

$$2r'_y \approx \frac{1}{3\pi} \left[\frac{\Delta K}{2\sigma_{ys}} \right]^2 = \frac{1}{12\pi} \left[\frac{\Delta K}{\sigma_{ys}} \right]^2, \quad (3.14)$$

lub też w ogólnej postaci

$$2r'_y \approx H \left[\frac{\Delta K}{\sigma_{ys}} \right]^2. \quad (3.15)$$

Jednakże bardzo często kładzie się również nacisk na największą strefę odkształceń plastycznych związaną z K_{\max} .

3.2. Kryteria określające kierunek wzrostu szczeliny zmęczeniowej

Klasycznie metody szacowania momentu pojawienia się pęknięć lub osiągnięcia trwałych odkształceń opierają się na klasycznych hipotezach wytężeniowych. Hipotezy te zakładają ciągłość ośrodka i wykorzystują takie wielkości jak naprężenie, odkształcenie (za-

kładają one liniową zależność między tymi wielkościami) czy też gęstość energii odkształcenia określane wewnątrz ciała. Hipotezy te nie mogą być bezpośrednio stosowane do analizy wytrzymałości, gdy występują szczeliny lub ostre karby. Jak wspomniano, z rozwiązań liniowej teorii sprężystości wynika, że tuż przed wierzchołkiem szczeliny (karbu) występuje największa koncentracja naprężeń dążąca do wartości nieskończenie dużych, niezależnie od wartości przyłożonego obciążenia. Naprężenia te są zawsze bardzo duże, tak więc porównywanie ich z wielkościami dopuszczalnymi dla danego materiału (np. maksymalne naprężenie rozciągające, σ_c), czy konstrukcji nie jest sensowne i nie można ich bezpośrednio wykorzystać do tworzenia kryteriów zniszczenia. Wówczas do określenia wytrzymałości konstrukcji, w przypadkach dużej koncentracji naprężeń generowanych przez szczeliny (karby), wykorzystuje się zależności mechaniki pęknięcia w postaci kryteriów pęknięcia. W zależności od przyjętych założeń kryteria te można podzielić na lokalne, nielocalne i globalne. Generalnie kryteria te wykorzystuje się również do określenia kierunku wzrostu szczeliny zmęczeniowej i nie ma tu znaczenia jaki rodzaj obciążenia jest stosowany. Tradycyjnie mechanika pęknięcia koncentruje się na szczelinach obciążonych jedynie jednoosiowym naprężeniem rozciągającym, które działa prostopadle do powierzchni szczeliny, a więc skutkuje pierwszym modelem deformacji. Jednakże w rzeczywistej eksploatacji konstrukcji szczeliny poddane są działaniu wszystkich trzech modów deformacji. W ostatnich latach przeprowadzono wiele testów oraz zaproponowano wiele modeli wzrostu szczeliny w złożonym stanie naprężenia. Niestety używa się wielu rodzajów geometrii próbek i obciążeń, w wyniku czego trudne jest wysnucie na ich podstawie jednoznacznych wniosków. W rozdziale tym przedstawione zostaną najbardziej znane, najczęściej stosowane oraz najbardziej interesujące kryteria.

3.2.1. Kryterium maksymalnych naprężenia obwodowych, 1963, (MNO).

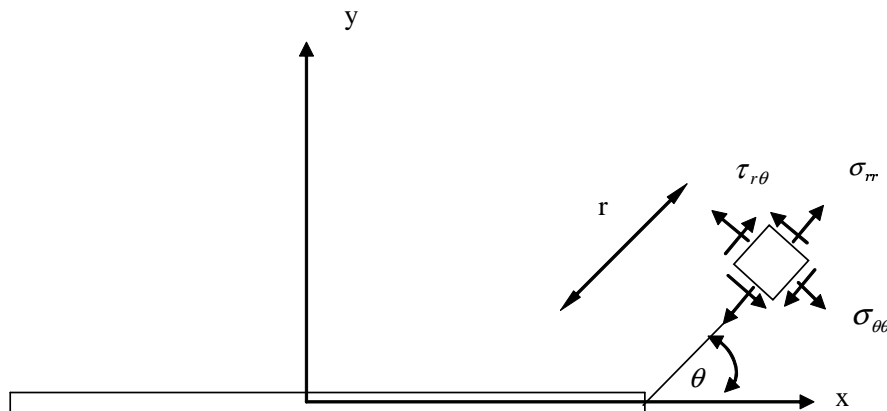
Kryterium to zostało sformułowane przez Erdogan i Sih [131]. Zgodnie z nim szczelina będzie rozwijać się w kierunku, $\theta = \theta_c$, w którym składowa obwodowa tensora naprężenia $\sigma_{\theta\theta}$, osiąga maximum, por. Rys. 3.5, oraz szczelina będzie się dalej rozwijać, gdy maximum $\sigma_{\theta\theta}$, osiągnie krytyczną wartość, σ_c ($\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_c$).

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0. \quad (3.16)$$

Powyższe kryterium można zapisać używając wyrażień na pole naprężenia (osobliwe rozwiązanie) w postaci

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0. \quad (3.17)$$

Kryterium to było i jest bardzo szeroko stosowane z powodu swej prostoty. Jego zastosowanie możemy znaleźć w bardzo wielu pracach, np. Gdoutos [114], Yokobori *et al.* [115]. Jednakże kilka prac, np. Tanaka [119], Royer [125] oraz Abdel Maged & Pandey [127], [126], wskazuje na dość dużą rozbieżność między wynikami uzyskiwanymi na podstawie tego kryterium, a wynikami eksperymentów. Należy dodać, iż w przypadku jedno-osiowego, rozciągającego obciążenia warunek $\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_c$ odpowiada warunkowi $\sigma_I \geq \sigma_c$ lub $(\sigma_I - \sigma_{II}) \geq \sigma_c$ (σ_I, σ_{II} – naprężenia główne). Ostatni warunek odpowiada klasycznemu kryterium Tresci.



RYSUNEK 3.5. Składowe pola naprężenia w biegunowym układzie współrzędnych.

Modyfikacje kryterium.

- Jedną z pierwszych takich prac był artykuł Williamsa i Ewinga, 1972 [132]. Autorzy zwrócili uwagę, iż uwzględnienie jedynie osobliwego członu w szeregu określającym pola naprężenia w okolicy wierzchołka szczeliny może być niewystarczające dla właściwego wyznaczenia kierunku wzrostu szczeliny. Dlatego też, dołączyli do rozwiązania człony nieosobliwe. Praca zawiera dane eksperymentalne oraz porównanie wyników otrzymanych na podstawie zmodyfikowanego kryterium. Autorzy relacjonują zdecydowanie lepszą zbieżność otrzymanego kryterium z rzeczywistością, niż kryterium oryginalne. Dodają również, iż pomijanie drugiego, stałego członu w obliczeniach jest niewłaściwe, natomiast uwzględnienie pozostałych członów nie wykazuje znaczącej poprawy rezultatów.

3.2.2. Kryterium gęstości energii odkształcenia, 1973–1974, (S).

Kryterium zostało sformułowane przez Sih, [134]– [136] i bazuje na lokalnej gęstości energii odkształcenia w otoczeniu wierzchołka szczeliny. Generalnie jest to koncepcja zbliżona do klasycznego kryterium Misesa, które opiera się na części postaciowej gęstości energii odkształcenia. Jednakże to kryterium zawiera sumę obu części gęstości energii odkształcenia: objętościowej i postaciowej.

Zakłada się, że gęstość energii odkształcenia, w , w okolicy wierzchołka szczeliny można przedstawić w postaci:

$$w = \frac{S}{r}, \quad (3.18)$$

gdzie, S jest współczynnikiem gęstości energii odkształcenia. Szczelina według tego kryterium propaguje się w kierunku, wzdłuż którego S osiąga minimum, a wzrost nastąpi w przypadku osiągnięcia przez ten współczynnik wartości krytycznej, S_c . Współczynnik gęstości energii odkształcenia może być zapisany w postaci:

$$S = a_{11}k_I^2 + 2a_{12}k_Ik_{II} + a_{22}k_{II}^2, \quad (3.19)$$

gdzie,

$$k_i = \frac{K_i}{\sqrt{\pi}}, \quad (i = I, II),$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{16}[(1 + \cos\theta)(\kappa - \cos\theta)], \\
a_{12} &= \frac{1}{16}\sin[2\cos\theta - (\kappa - 1)], \\
a_{22} &= \frac{1}{16}[(\kappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)].
\end{aligned}$$

Współczynniki te zależne są od stałych sprężystych: μ i $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ w płaszczyźnie naprężenia lub $\kappa = (3 - 4\nu)$ w płaszczyźnie odkształcenia.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym dla określenia kierunku wzrostu szczeliny, jest więc

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0. \quad (3.20)$$

Wstawiając S z wyrażenia (3.19) do (3.20), można uzyskać

$$\begin{aligned}
(2\cos\theta - (\kappa - 1))\sin\theta k_I^2 + 2(2\cos 2\theta - (\kappa - 1)\cos\theta)k_I k_{II} + \\
+(\kappa - 1 - 6\cos\theta)\sin\theta k_{II}^2 = 0,
\end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
(2\cos 2\theta - (\kappa - 1)\cos\theta)k_I^2 + 2((\kappa - 1)\sin\theta - 8\sin 2\theta)k_I k_{II} + \\
+((\kappa - 1)\cos\theta - 6\cos 2\theta)k_{II}^2 > 0.
\end{aligned} \quad (3.22)$$

Po przekształceniu (3.21), można otrzymać postać:

$$\begin{aligned}
&\sin^4\theta + [2(\kappa - 1)k_I k_{II}(-k_I^2 - k_{II}^2)]\sin^3\theta + \\
&[(k_I^2 - 3k_{II}^2)^2 - (\kappa - 1)^2 k_I^2 k_{II}^2 - \frac{(\kappa - 1)^2}{4}(k_{II}^2 - k_I^2) + 16k_I^2 k_{II}^2]\sin^2\theta + \\
&[-2(\kappa - 1)k_I k_{II}(-2k_{II}^2)]\sin\theta + k_I^2 k_{II}^2((\kappa - 1)^2 - 4) = 0,
\end{aligned} \quad (3.23)$$

z której już w sposób jednoznaczny, otrzymujemy wartości kąta θ , spełniające jednocześnie warunek (3.22).

Kryterium to było eksperymentalnie weryfikowane przez licznych badaczy: Sih [136], Sih&Barthelemy [137], Badaliance [138], Patel&Pandey [153], Gao *et al.* [154], Abdel Maged&Pandey [127], [126]. Jednakże niektórzy badacze kwestionuje teoretyczną podstawę tego kryterium argumentując, że dopóki w jest sumą postaciowej i objętościowej gęstości energii odkształcenia, to te dwa fundamentalnie różne składniki nie powinny być traktowane razem dla określenia kierunku wzrostu szczeliny, ponieważ reprezentują fizycznie odmienne zjawiska. Proponuje się również użycie większej liczby członów rozwinięcia determinującego składowe tensora naprężenia w celu określenia wyrażenia na S , Wong [182].

3.2.3. Kryterium współczynnika uwalniania energii, 1974, (G).

Kryterium to zostało zaproponowane przez Hussiana *et al.* w pracy [141] dla przypadku złożonego stanu obciążenia jako modyfikacja energetycznego warunku propagacji szczeliny Griffitha. Zgodnie z nim współczynnik uwalniania energii G związany z infinitesimalnym wzrostem szczeliny ($\delta l \rightarrow 0$) jest wartością, która może posłużyć do określenia kierunku wzrostu. Przyjęto, że będzie to wartość $\theta = \theta_c$ dla którego G osiąga maksimum. Wzrost szczeliny jest możliwy, gdy G osiągnie wartość krytyczną dla danego materiału, $G_c = \frac{K_{Ic}}{E}$ dla płaskiego stanu naprężenia oraz $G_c = \frac{K_{Ic}(1-\nu^2)}{E}$ dla płaskiego stanu odkształcenia.

3.2.4. J–kryterium, 1975.

Kryterium to zostało zaproponowane przez Hellen i Blackburn [159] w roku 1975. Autorzy próbują zastosować niezależność drogi całkowania do problemu wzrostu szczeliny w złożonym stanie naprężenia. W dwu-wymiarowym problemie wektor \mathbf{J} jest zdefiniowany jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= J_{I\bar{i}} + J_{II\bar{j}}, \\ J_k &= \int_{\Gamma} (wn_k - u_{i,k}T_i)dl, \quad k = I, II, \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdzie Γ is konturem całkowania, w jest gęstością energii odkształcenia, n_k jest k -tą składową normalnego jednostkowego wektora w kierunku zewnętrznym do konturu całkowania, u_i jest przemieszczeniem, T_i jest obciążeniem i dl jest elementem długości łuku całkowanego konturu. Kryterium to zakłada, że szczelina powiększy się w kierunku wektora \mathbf{J} i pęknięcie pojawi się, kiedy wektor \mathbf{J} osiągnie wartość krytyczną.

Kryterium to było użyte przez Dai i Zheng [160] dla próby z pochyloną w stosunku do kierunku jednoosiowego obciążenia szczeliną, umieszczoną w środku badanego elementu. Badacze relacjonują, że rezultaty eksperymentu i opisywanego kryterium są zadowalające. Należy jednak dodać, że dominującym modem obciążenia zastosowanym w eksperymencie był przypadek modu I. Wydaje się to istotne, ponieważ w pracy Gdoutosa [158] dla przypadku dominującego II sposobu obciążenia, przewidywania z użyciem opisywanego kryterium wykazały znaczące różnice w porównaniu do większości wyników eksperymentu.

3.2.5. Kryterium maksymalnego odkształcenia obwodowego, 1981, (MOO).

Kryterium to zostało zaproponowane przez Changa [143] i dotyczyło klasycznej szczeliny, jak i szczeliny w kształcie elipsy. Poniżej kryterium to opisane jest na podstawie pracy Chambersa *et al.* [142], gdzie autorzy wykorzystują je do problematyki zmęczeniowego wzrostu szczeliny. Jest ono konsekwencją mechanizmu wzrostu szczeliny zmęczeniowej, który jest związany z plastycznym obszarem bezpośrednio przed wierzchołkiem szczeliny (w oryginalnej pracy Changa zmęczeniowy wzrost szczeliny nie był rozważony). Obszar ten może charakteryzować obwodowe odkształcenie plastyczne. Kryterium to zakłada, że szczelina będzie propagowała się w kierunku, gdzie odkształcenie to będzie maksymalne, wtedy $\theta = \theta_c$. Konstrukcja kryterium w widoczny sposób opiera się na kryterium MNO. Oczywiście bardzo blisko wierzchołka szczeliny dominuje obszar plastyczny, jednakże w porównaniu z innymi wymiarami jest on niewielki. Zakłada się więc uplastycznienie bliskiego zasięgu, co pozwala skorelować odkształcenie wewnątrz strefy plastycznej z obszarem sprężystym poza nim.

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}[\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}]. \quad (3.25)$$

Używając teraz wyrażeń opisujących składowe tensora naprężenia i uwzględniając tylko osobliwy człon w rozwinięciu, autor uzyskuje:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\theta\theta}\sqrt{2\pi r} &= \frac{1}{E} \left[K_I \cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3K_{II} \cos^2\theta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \nu \left(K_I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + K_{II} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Kryterium **MOO** zapisuje się wówczas w postaci:

$$\frac{\partial \epsilon_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0. \quad (3.27)$$

W pracy pokazano polepszenie zbieżności wyników w porównaniu z kryterium **MNO**, które jest szczególnie wrażliwe na wpływ modu II.

3.2.6. T–kryterium, 1982.

Kryterium to zostało zaproponowane przez Theocarisa oraz Andrianopoulou, [162] i bazuje, podobnie jak **S**–kryterium, na gęstości energii odkształcenia. Autorzy sugerują tu wykorzystanie podziału całkowitej gęstości energii odkształcenia w na jej dwie składowe: objętościową, T_V i postaciową, T_D . Pierwsza składowa (T_V) wspiera proces pęknięcia poprzez mechanizmy dekohezji. Druga składowa (T_D) decyduje o procesach odkształcenia plastycznego i mechanizmach zniszczenia poprzez poślizg. Związek między energią odkształcenia W i gęstością energii odkształcenia w można wyrazić w formie:

$$w = \frac{\partial W}{\partial V} = \frac{S(K_I, K_{II}, \theta)}{r(\theta, c_1, c_2, \dots, c_n)} = \frac{1}{8\mu} (\kappa(\sigma_x + \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2), \quad (3.28)$$

gdzie,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_x(\theta), \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_y(\theta), \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_{xy}(\theta). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Należy zwrócić uwagę, że definiując w , używana jest wielkość r . Wielkość ta określa odległość od wierzchołka szczeliny, ale nie jest już wartością stałą. Zależy od kąta θ oraz innych parametrów, które mogą wpłynąć na położenie granicy strefy plastycznej. Jest to konsekwencją jednego z wniosków z poprzedniej pracy autorów [161], dotyczącej modyfikacji **S**–kryterium. W związku z tym zaproponowano użycie hipotezy Misesa ($T_D = T_{D,0} = \text{const}$) do określenia tej granicy i wówczas $r = r(\theta)$. Otrzymujemy więc (w płaskim stanie naprężenia):

$$\frac{1}{6\mu} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2) = T_{D,0} = \text{const}, \quad (3.30)$$

gdzie, $T_{D,0}$ jest wartością krytyczną gęstości energii postaciowej, która zgodnie z warunkiem Misesa jest stałą materiałową.

Wykorzystując wyrażenia (3.29) oraz (3.30) otrzymać można:

$$r = \frac{(1 + \nu)K_I^2}{6\pi E T_{D,0}} (f_1^2(\theta) + f_2^2(\theta) - f_1(\theta)f_2(\theta)) = r(\theta) \quad (3.31)$$

gdzie

$$f_{1,2}(\theta) = \frac{1}{2} \left[f_x(\theta) + f_y(\theta) \pm \left([f_x(\theta) - f_y(\theta)]^2 + 4f_{xy}(\theta)^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (3.32)$$

Zgodnie z tym kryterium gęstość energii odkształcenia w liczona jest wzdłuż granicy strefy plastycznej określonej na podstawie wyrażenia (3.31). Kąt propagacji θ_c jest wówczas zgodny z kątem, dla którego istnieje maksymalna wartość w . Jednakże poszukiwanie maksymalnej wartości w wzdłuż granicy definiowanej przez warunek Misesa jest równoważne z poszukiwaniem maksymalnej wartości T_V , ponieważ T_D jest stała wzdłuż tej granicy. Tak więc, szczelina rozpocznie propagację wtedy, kiedy objętościowa część energii odkształcenia, T_V , osiągnie krytyczną wartość, T_{V_c} , gdzie

$$T_V = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y)^2. \quad (3.33)$$

Kryterium to można wówczas zapisać w następujący sposób:

$$\frac{\partial T_V}{\partial \theta} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 T_V}{\partial \theta^2} < 0. \quad (3.34)$$

Jeśli materiał wykazuje szczególnie kruchy charakter, wówczas granica definiowana w **T**-kryterium może być przyjęta jako mała i regularna, jak sugeruje to **S**-kryterium. Przy zastosowaniu tych warunków, różnice między tymi dwoma kryteriami są bardzo małe. Istniejące małe różnice pomiędzy tymi kryteriami nie wynikają z zastosowanej idei, ale z lokalizacji, gdzie liczone są wartości mające kontrolować proces wyznaczania kierunku pęknięcia.

Należy również podkreślić, że warunek wzrostu szczeliny $T_V(\theta, r) = T_{V_c}$, nie jest do końca właściwy. Jeżeli będziemy rozpatrywać szczelinę prostopadłą do jedno-osowego obciążenia, uzyskamy dla określonej wartości tego obciążenia pewne wartości r , K oraz T_V . Następnie, gdy zwiększymy obciążenie otrzymamy inne, większe wartości r i K , ale nie T_V , która jest wielkością stałą, niezależną od wartości obciążenia. Dlatego też parametr ten nie może być wielkością, na podstawie której określany jest warunek propagacji. Ale alternatywnym parametrem może być promień r , którego wartość krytyczną r_c , można uzyskać stosując wyrażenie (3.31) dla prostopadłej szczeliny, tzn.:

$$r_c = \frac{(1 + \nu)K_{Ic}^2}{6\pi E T_{D,0}} = \frac{K_{Ic}^2}{2\pi \sigma_{ys}^2}. \quad (3.35)$$

gdzie σ_{ys} jest naprężeniem uplastyczniającym w jedno-osowej próbie rozciągania, a K_{Ic} wartością krytyczną WIN. Spostrzeżenia te dotyczą rozwiązania osobliwego, a przedstawione wyrażenia opisują płaski stan naprężenia. Kryterium to będzie jeszcze rozważane dokładniej w jednym z następnych rozdziałów, w którym opisana idea będzie wykorzystana do sformułowania nowego kryterium.

3.2.7. Det-kryterium, 1987.

Kryterium to zostało zaproponowane przez Papadopoulosa [24], [25]. Opiera się ono na niezmienniku tensora naprężenia, którego wartość maksymalna określa kąt θ_{cr} , pod którym nastąpi propagacja szczeliny. Ten warunek może być wyrażony przez matematyczną relację:

$$\left. \frac{\partial \text{Det}(\sigma_{ij})}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_c} = 0. \quad \left. \frac{\partial^2 \text{Det}(\sigma_{ij})}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_c} < 0. \quad (3.36)$$

Natomiast, warunek krytyczny wzrostu szczeliny to:

$$\text{Det}(\sigma_{ij}) = \text{Det}(\sigma_{ij})_c \quad (3.37)$$

gdzie, $\text{Det.}(\sigma_{ij})_c$ jest stałą materiałową oraz

$$\text{Det.}(\sigma_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} = \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2. \quad (3.38)$$

Modyfikacje kryterium.

- W pracy [26] ten sam autor używając równań (2.13)– (2.15) wprowadza do obliczeń dużą ilość członów szeregu na wyrażenie składowych tensora naprężenia, relacjonując poprawę wyników.

3.2.8. Kryterium maksymalnego współczynnika obwodowego naprężenia i odkształcenia, 1989, (MWON, MWOO).

Kryteria te powinny być w zasadzie przedstawione jako modyfikacja istniejących już kryteriów. Jednakże zostaną przedstawione osobno z powodu sposobu uwzględnienia stałego członu (T) w wyrażeniach na składowe tensora naprężenia. Jest to istotne, ponieważ nie uwzględnienie już tylko tego jednego, stałego członu w dotychczas sformułowanych kryteriach jest źródłem znacznych rozbieżności między ich przewidywaniami, a wynikami eksperymentów. Szczególnie widoczne jest to w przypadku dwu–osiowego obciążenia, gdy $k \geq 2$, por. Rys. 2.6, [117].

Podobnie jak autorzy **T**–kryterium [162], Wu i Li [140] uważają, że promień r , czyli odległość od wierzchołka szczeliny, gdzie liczone są wielkości, na których bazują kryteria, nie jest wartością stałą i należy go określić w zależności od wielu czynników. Wspominają pracę Theocarisa *et al.* [162], która jako pierwsza próbuje uwzględnić plastyczno–sprężystą granicę wokół wierzchołka szczeliny. Wskazują również potrzebę uwzględnienia w budowie kryterium większej liczby członów rozwinięcia na wyrażenie składowych naprężenia. Sami bazując na poprzednich kryteriach i następujących założeniach:

- granica strefy plastycznej powinna jak najwierniej reprezentować rzeczywiste warunki,
- wybrane wielkości fizyczne powinny rzeczywiście kontrolować proces pęknięcia,

modyfikują kilka istniejących kryteriów. Wykorzystują do tego celu dwie wielkości charakteryzujące wytrzymałość materiału:

1. Materiał staje się plastyczny, kiedy naprężenie obwodowe $\sigma_{\theta\theta}$ osiągnie wartość σ_{ys} , czyli naprężenia uplastyczniającego.
2. Materiał staje się plastyczny, kiedy odkształcenie obwodowe ϵ_{θ} osiągnie pewną wartość krytyczną – odkształcenia uplastyczniającego ϵ_{ys} .

Naprężenie uplastyczniające σ_{ys} jest wielkością odpowiadającą wartości uzyskanej podczas jednoosiowej próby. W przypadku odkształcenia uplastyczniającego $\epsilon_{ys} = \sigma_{ys}/E$, gdzie E jest modułem Younga.

Dwie granice strefy plastycznej wokół wierzchołka szczeliny wyznaczone za pomocą wyżej wymienionych warunków na uplastycznienie materiału można zapisać w postaci:

$$[r_{\sigma}(\theta)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_{ys} - T \sin^2\theta} \left\{ K_{\text{I}} \left(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right) - 3K_{\text{II}} \left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \right) \right\}, \quad (3.39)$$

$$[r_\epsilon(\theta)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_{ys} - T(\sin^2\theta - \nu\cos^2\theta)} \left\{ K_I \left((3 - 5\nu)\cos\frac{\theta}{2} + (1 + \nu)\cos\frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \left((3 - 5\nu)\sin\frac{\theta}{2} + 3(1 + \nu)\sin\frac{3\theta}{2} \right) \right\}. \quad (3.40)$$

gdzie

$$T = \sigma(1 - k)\cos 2\beta.$$

W przypadku tworzenia kryterium określającego propagację szczeliny bardzo ważnym zadaniem jest określenie fizycznych wielkości, które determinują taką sytuację. Autorzy zwracają uwagę na naprężenie i odkształcenie obwodowe w okolicy wierzchołka szczeliny. Definiują *współczynnik obwodowego naprężenia* jako $r^{\frac{1}{2}}\sigma_{\theta\theta}$, który oprócz takiego samego wymiaru jak WIN może odzwierciedlić wpływ większej liczby członów szeregu określającego składowe naprężenia. Definiują również *współczynnik obwodowego odkształcenia* jako $r^{\frac{1}{2}}\epsilon_{\theta\theta}$, który również może posłużyć do określenia kierunku propagacji szczeliny.

Autorzy wykorzystując podane wcześniej wyrażenia na określenie granicy strefy plastycznej oraz na pole naprężenia uwzględniające stały człon, modyfikują kilka znanych dotychczas kryteriów. Przykładowo:

- **Kryterium maksymalnego współczynnika naprężenia obwodowego, MWNO.**

Jest to zmodyfikowane kryterium **MNO**, które jest teraz postaci $r^{\frac{1}{2}}\sigma_{\theta\theta}$. Inicjacja wzrostu szczeliny nastąpi, gdy $r^{\frac{1}{2}}\sigma_{\theta\theta}$ liczone na granicy wyznaczonej przez r_ϵ , por. (3.40), osiągnie krytyczną wartość. Po uwzględnieniu proponowanych poprawek można zapisać to kryterium w postaci:

$$r^{\frac{1}{2}}\sigma_{\theta\theta} = A + \sqrt{r}B \quad (3.41)$$

gdzie

$$A = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left\{ K_I \left(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right) - 3K_{II} \left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \right) \right\}, \quad (3.42)$$

$$B = T\sin^2\theta.$$

Wartość maksymalna $r^{\frac{1}{2}}\sigma_{\theta\theta}$ wynika z rozwiązania następującego równania:

$$\frac{\partial(r^{\frac{1}{2}}\sigma_{\theta\theta})}{\partial\theta} = A' + \sqrt{r}B' + \frac{r'}{2\sqrt{r}}B = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2(r^{\frac{1}{2}}\sigma_{\theta\theta})}{\partial^2\theta} = A'' + \sqrt{r}B'' + \frac{r'}{\sqrt{r}}B' + \frac{r''}{2\sqrt{r}}B - \frac{r'r'}{4r\sqrt{r}}B < 0 \quad (3.44)$$

- **MWOO. Kryterium maksymalnego współczynnika odkształcenia obwodowego.** Kryterium to można wyrazić w podobnej formie jak powyższe, a inicjacja wzrostu szczeliny nastąpi, gdy $r^{\frac{1}{2}}\epsilon_{\theta\theta}$ liczone na granicy wyznaczonej poprzez r_σ (3.39) osiągnie krytyczną wartość.
- **mS. Kryterium minimalnego współczynnika gęstości energii odkształcenia.** Kryterium to bazuje bezpośrednio na kryterium **S**, a jego modyfikacja polega na założeniu, że współczynnik ten można teraz wyrazić jako: $r \cdot \partial W / \partial V$. Wówczas mS można zdefiniować jako:

$$mS = A + r^{1/2}B + rD$$

gdzie A, B, D są funkcjami θ , niezależnymi od r .

Zmodyfikowane kryteria potrzebują stałych materiałowych dla określenia inicjacji propagacji. Autorzy proponują uzyskać je przez rozważenie szczeliny pod wpływem czystego rozciągania (mod I). Przedstawione wyniki wykazują poprawę w stosunku do kryteriów bazowych.

3.2.9. Kryterium wektora wierzchołkowego przemieszczenia szczeliny, 1989, ($\overline{\text{CTD}}$).

Kryterium to zaproponowane było przez Li [144], który wykorzystał wyrażenia na wierzchołkowe rozwarcie i poślizg szczeliny (CTOD, CTSD) w dwu-osiowym stanie naprężenia. Wykorzystując te wartości, autor zdefiniował wektor wierzchołkowego przemieszczenia ($\overline{\text{CTD}}$), który ma być skorelowany z mechanizmem zmęczeniowego wzrostu szczeliny. $\overline{\text{CTD}}$ jest wektorem powstałym z sumowania wektorów $\overline{\text{CTOD}}$ i $\overline{\text{CTSD}}_e$, gdzie ten ostatni jest wielkością efektywną. Przyjęto, że szczelina będzie się propagować wzdłuż kierunku tego wektora. Kryterium to zostało zweryfikowane dla przypadku zmęczeniowego wzrostu szczeliny, dla którego wyniki zaczerpnięto z pracy [115], wykazując dobrą zgodność.

3.2.10. Kryterium Nielokalnego Naprężeniowego Kruchego Pęknięcia, 1995, (NNKP).

Autorami kryterium Nielokalnego Naprężeniowego Pęknięcia (NNKP–kryterium), są Seweryn i Mróz [170]. Kryterium zakłada, że pęknięcie powiązane jest z rozwojem pewnej strefy zniszczenia wokół wierzchołka nacięcia. Dokładne wyznaczenie tej strefy jest szczególnie trudne. Dlatego też autorzy przyjmują, że inicjacja lub propagacja szczeliny pojawi się, kiedy wartość średnia funkcji $R_\sigma(\sigma_n, \tau_n)$, na segmencie d_0 , por. Rys. 3.6, osiągnie wartość krytyczną:

$$R_f = \max_{(\vartheta, \mathbf{x}_0)} \bar{R}_\sigma(\sigma_n, \tau_n) = \max_{(\vartheta, \mathbf{x}_0)} \left[\frac{1}{d_0} \int_0^{d_0} R_\sigma(\sigma_n, \tau_n) dr \right] = 1 \quad (3.45)$$

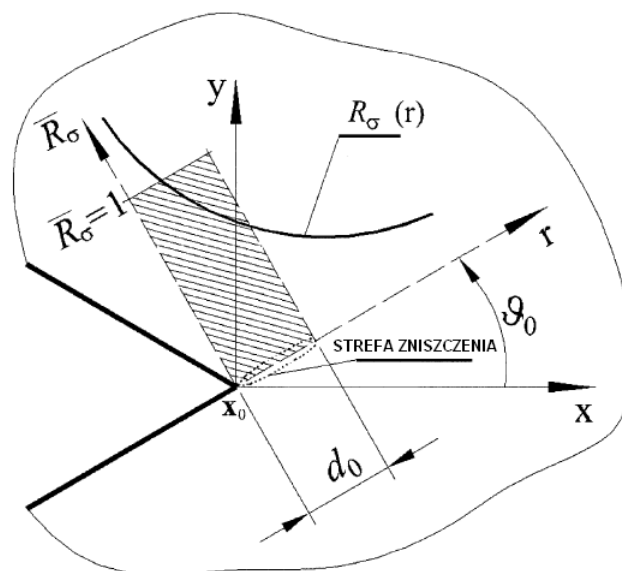
gdzie, R_f – współczynnik naprężenia pęknięcia, $\bar{R}_\sigma(\sigma_n, \tau_n)$ – nielokalna funkcja naprężeniowa pęknięcia, $R_\sigma(\sigma_n, \tau_n)$ – lokalna funkcja pęknięcia materiału, σ_n, τ_n – normalna i tnąca składowa naprężenia na płaszczyźnie fizycznej, \mathbf{x}_0 – początek lokalnego układu współrzędnych biegunowych (r, ϑ) , d_0 – długość strefy zniszczenia. Kryterium to określa wartość krytycznego obciążenia, jak również kierunek propagacji szczeliny. Kąt propagacji wyznacza maksymalna wartość nielokalnej funkcji pęknięcia $\bar{R}_\sigma(\sigma_n, \tau_n)$. W przypadku analizy kruchego pęknięcia elementu z nacięciem w kształcie V będącego pod wpływem obciążenia ścinającego i rozciągającego, wystarczającym jest przyjęcie za lokalną funkcję R_σ prostego warunku wytrzymałości na rozciąganie w postaci:

$$R_\sigma(\sigma_n) = \frac{\sigma_n}{\sigma_c}. \quad (3.46)$$

Wówczas, strefa pęknięcia d_0 może być określona na podstawie analizy wzrostu szczeliny wg modu I i używając kryterium Griffitha-Irwina [173] jako:

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2. \quad (3.47)$$

Powyższy model został potwierdzony eksperymentalnie w pracy [174]. Kryterium to również zastosowano do problemu zmęczeniowego wzrostu szczeliny [176], [177].



RYSUNEK 3.6. Strefa zniszczenia wg NNKP-kryterium oraz wykres funkcji R_σ , [170].

3.2.11. W-kryterium, 2000

Autorami tego kryterium są Gołoś i Wasiluk [180] oraz, w przypadku wykorzystania go w problemie zmęczenia materiałów, Wasiluk i Hoshide [181]. Kryterium zakłada, że szczelina rośnie w kierunku najmniejszej wartości współczynnika W , definiowanego jako

$$W = \frac{r_p(\theta)}{a}, \quad (3.48)$$

gdzie $r_p(\theta)$ jest promieniem strefy plastycznej, natomiast a jest połową długości szczeliny. Kryterium to bazuje na założeniu minimalnej konsumpcji energii na kierunku pęknięcia podczas procesu wzrostu szczeliny w strefie plastycznej. Autorzy wykorzystują podział całkowitej energii procesu pęknięcia na energię kohezji, która jest przyjęta jako wielkość stała na wszystkich kierunkach wokół wierzchołka szczeliny, oraz energię, której ekwiwalentem jest praca mechaniczna podczas propagacji szczeliny w strefie plastycznej. O kierunku pęknięcia decyduje więc ta druga składowa, a kąt pęknięcia określa minimalna wartość współczynnika W , który koresponduje z minimalną wielkością całkowitej energii procesu pęknięcia.

3.2.12. Podsumowanie

W literaturze znaleźć można jeszcze wiele innych kryteriów określających warunki i kierunek wzrostu szczeliny. Są one jednak zdecydowanie mniej popularne niż opisane powyżej. Abdel-Mageed oraz Pandey [127] porównują niektóre z przedstawionych kryteriów do wyników z eksperymentów w przypadku obciążenia monotonicznego i cyklicznego (Tabela 3.1). Podkreślają jednocześnie, że kryteria nie rozróżniają rodzaju obciążenia. Porównanie to wskazuje na dużą rozbieżność pomiędzy wynikami eksperymentów, a stosowaną teorią. Należy tu zauważyć, że w przypadku obciążeń cyklicznych dość dobrą zbieżność kąta propagacji szczeliny wykazuje **T**-kryterium. W przypadku obciążenia monotonicznego żadne kryterium nie daje zadowalających rezultatów. Pomimo to, jak

TABELA 3.1. Wyniki dla kąta inicjacji wzrostu szczeliny podczas statycznego i cyklicznego obciążenia [127].

Nachylenie szczeliny	Kąt inicj. eksper.		Kryteria				
	Obciążenie Cykliczne	Obciążenie Monotoniczne	MNO	MOO $r/a = 0.01$	S $v = 0.3$	T	Det.
15	88	74	66	69.4	72	86.5	97.5
30	70	59	61	59.2	63.5	72.3	82.75
45	58.8	45	53.6	49.2	51	60	63.75
60	37.5	29	43	36.8	40	47	33.33
90	0	0	0	0	0	0	0

wskazują to sami autorzy pracy, rozbieżność ta może być spowodowana zbyt dużą strefą plastyczną przy wierzchołku szczeliny w stosunku do grubości próbki. Niemniej jednak, również inni autorzy relacjonują brak uniwersalności kryteriów, niezwykle wrażliwych na zmiany relacji między wpływem modu I i II. W większości kryteriów wykorzystywane są konwencjonalne parametry wynikające z mechaniki pęknięcia do określenia kierunku wzrostu szczeliny w mieszanym sposobie obciążenia. Zazwyczaj używa się podstawowego parametru wynikającego z mechaniki pęknięcia – współczynnika intensywności naprężenia (WIN). Kryteria, które rozważają szczegółowo koncepcję mechaniki pęknięcia dotyczącą granicy strefy plastycznej nie są jeszcze dostępne. Istnieje również dość ważne zagadnienie związane z różnicą w sposobach obciążenia (monotoniczne lub cykliczne). W zasadzie żadne z kryteriów nie rozróżnia tych dwóch sposobów obciążenia pomimo tego, iż mikromechaniczna inicjacja wzrostu szczeliny jest różna dla tych dwóch typów obciążeń. Podsumowując, żadne kryterium wymienione powyżej nie daje satysfakcjonujących wyników dla wszystkich sposobów obciążenia.

3.3. Prędkość wzrostu szczeliny

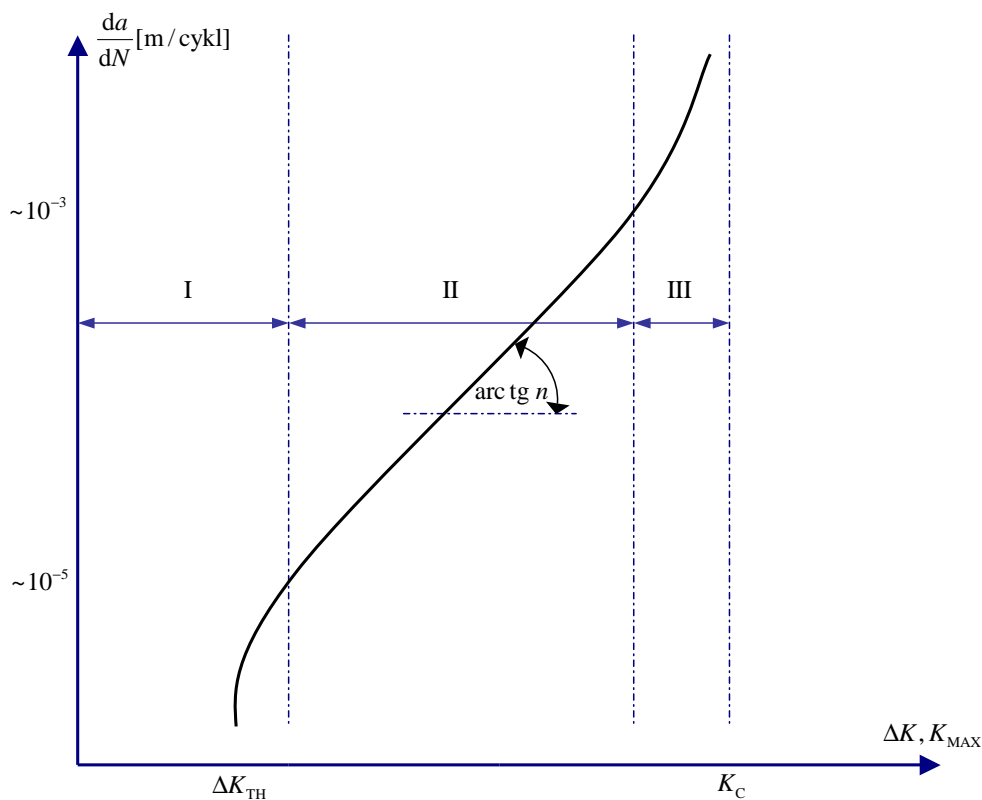
3.3.1. Wstęp

Jak wspomniano, prekursorem badań zmęczeniowych był Wöhler w XIX wieku. Jednakże prawdziwy początek badań nad zmęczeniową propagacją szczeliny miał miejsce dopiero w latach 60 XX wieku, kiedy to do problemu wzrostu szczeliny zmęczeniowej wykorzystano koncepcję Liniowej Mechaniki Pęknięcia (Paris, 1957 [128], Paris *et al.*, 1961 [129], Paris i Erdogan, 1963 [130]). Koncepcja wiązała WIN z prędkością pęknięcia i zakładała, że o rozwoju pęknięcia decydują zmiany WIN, w postaci:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n, \quad (3.49)$$

gdzie $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$, są ekstremalnymi wartościami WIN dla cyklu, C i n są stałymi eksperymentalnymi. Relację (3.49) można przedstawić jako prostą w logarytmicznym układzie współrzędnych, por. Rys. 3.7, będącą częścią wykresu prędkości pęknięcia, który dla metali można umownie podzielić na trzy obszary o dość wyraźnych granicach:

- inicjacja szczeliny,
- wzrost szczeliny,
- końcowe pęknięcie i zniszczenie.



RYSUNEK 3.7. Wykres prędkości pękania

Obszar I, nazywany również obszarem progowym (ang.: threshold region), jest charakteryzowany przez wartość progową ΔK_{TH} , powyżej której dopiero rozwija się pęknięcie. Poniżej tej wartości pomiar wzrostu szczeliny nie jest możliwy. Wzrost jest tu bardzo wrażliwy na mikrostrukturę (bardzo często granice ziaren są przeszkodami dla propagacji w stopach metali [187]), środowisko oraz współczynnik asymetrii cyklu R .

Pozostałe obszary, w tym obszar II, gdzie obowiązuje wzór Parisa (3.49), dla metali są w wysokim stopniu niezależne od mikrostruktury materiału. Strefa plastyczna przy wierzchołku szczeliny obejmuje wówczas kilka ziaren, i powstałe siły są w stanie przewyciężyć przeszkody mikrostrukturalne dla wzrostu szczeliny.

Czynniki wpływające na prędkość wzrostu szczeliny

Na prędkość wzrostu szczeliny ma wpływ bardzo wiele czynników. W niniejszym paragrafie wymienione będzie jedynie kilka najważniejszych z nich.

Asymetria cyklu i naprężenie średnie. Dość zauważalny wpływ na prędkość pękania ma asymetria cyklu R i naprężenia średnie σ_m . Wpływ ten oczywiście zależy od poziomu tych wielkości, zakresu prędkości jak i rodzaju materiału. Najogólniej mówiąc, prędkość pękania powiększa się wraz ze wzrostem wartości tych wielkości. Próby

uwzględnienia wpływu asymetrii cyklu były podejmowane przez wielu autorów. Najczęściej jednak używa się wzoru Formana *et al.* [96], który wzbogacił wyrażenie (3.49) do postaci:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K_I)^m}{(1-R)K_c - \Delta K_I}, \quad (3.50)$$

gdzie, K_c odpowiada odporności na pęknięcie. Zwykle zastępuje się tę wartość przez K_{Ic} .

Natomiast wyrażenie na prędkość wzrostu szczeliny, uwzględniające σ_m zostało zaproponowane, na przykład, przez Roberta *et al.* [97] w następującej postaci:

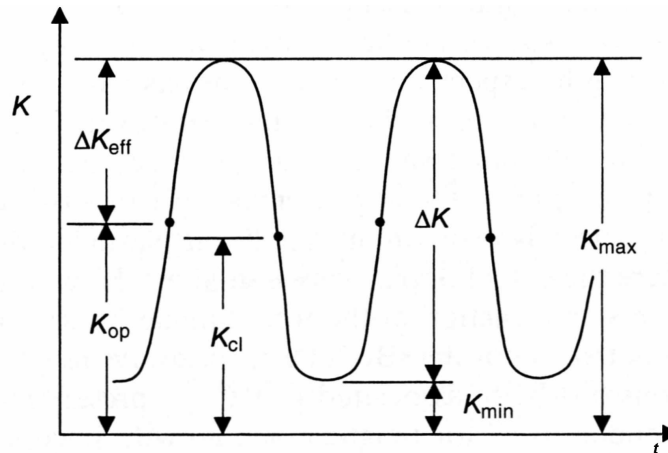
$$\begin{aligned} \frac{da}{dN} &= B(1+\beta)^2(\Delta K')^4, \\ \frac{da}{dN} &= B(K_{\max})^2(\Delta K')^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

gdzie, $\beta = K_m/\Delta K'$, $K_m = 1/2(K_{\max} + K_{\min})$, $\Delta K' = 1/2(K_{\max} - K_{\min})$ oraz B jest stałą materiałową. Wzory te wyprowadzono w oparciu o długość strefy plastycznej przed wierzchołkiem szczeliny.

Domykanie szczeliny. Domykanie szczeliny podczas zmęczeniowego wzrostu szczeliny ma miejsce, gdy w czasie cyklu obciążenia powierzchnie szczeliny stykają się. W wyniku tego podczas początkowej fazy cyklu obciążenia część powierzchni szczeliny jest zwarta, a więc rzeczywisty zakres ΔK nie jest w całości efektywny. Elber [90] był pierwszym badaczem, który zaproponował zmęczeniowy model zamykania szczeliny uwzględniający to zjawisko. Zasugerował, iż powierzchnie szczelin domykają się na skutek obecności własnych naprężeń ściskających w plastycznej strefie pęknięcia. Pęknięcie zostaje więc zatrzymane przy pewnej wartości naprężenia σ_{cl} , a może się dalej rozwijać, jeśli przyłożone zostanie obciążenie zdolne do ponownego otwarcia szczeliny σ_{op} , por. Rys. 3.8. Efektywną wielkość ΔK można więc wyrazić jako:

$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\max} - K_{op}, \quad (3.52)$$

Tak więc część cyklu obciążenia poniżej K_{op} nie ma wpływu na zmęczeniowy wzrost szczeliny. Propozycja ta sprowadza się więc do zdefiniowania efektywnego zakresu współ-



RYСУNEK 3.8. Schemat przedstawiający ΔK_{eff} .

czynnika jako:

$$\Delta K_{\text{eff}} = U(\Delta K), \quad (3.53)$$

gdzie

$$U = \frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{op}}}{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}, \quad (3.54)$$

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{\text{eff}})^m = C(U(\Delta K))^m. \quad (3.55)$$

W rzeczywistości określenie współczynnika K_{eff} zależy od wielu czynników, przede wszystkim od rodzaju materiału, asymetrii cyklu i innych warunków obciążenia.

Należy zwrócić uwagę, że istnieją również inne mechanizmy, które wymienia się jako wpływające na zamykanie się pęknięcia. Adams [91], Purshothaman *et al.* [92] oraz Walker *et al.* [93] wymieniają wpływ nierówności powierzchni szczeliny jako czynnik wpływający na przyspieszone zamykanie się szczeliny. Do innych czynników przyspieszających ten efekt zalicza się również utlenianie powierzchni szczeliny, por. Endo *et al.* [94] oraz Suresh *et al.* [95]. Jednak efekty te dla większości używanych stopów są drugorzędne i w praktyce wykorzystywany jest klasyczny wzór Parisa. Ich wpływ jest bardziej widoczny w przypadku wartości WIN bliskich wartości progowej wzrostu szczeliny.

3.3.2. Złożone pole naprężenia

W rzeczywistej eksploatacji elementy wykonane z różnego rodzaju materiałów są narażone na wieloosiowe obciążenia. Znamienne jest to, że już podczas inicjacji szczeliny, i jej początkowego wzrostu, charakter obciążenia ma istotny wpływ na jej dalszy rozwój, por. Smith i Pascoe [124], Parsons i Pascoe [123]. Należy również zwrócić uwagę, że procesy zmęczeniowe są niezwykle skomplikowane i wpływ na nie ma bardzo wiele czynników. W rozdziale tym omówione będzie kilka najważniejszych z nich wraz z próbą ich wykorzystania do określenia prędkości wzrostu szczeliny. Sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej w warunkach mieszanego obciążenia szczeliny.

W przypadku mieszanego obciążenia badacze używają do badań eksperymentalnych różnych metod w zależności od warunków jakie mają być uzyskane w sąsiedztwie wierzchołka szczeliny. Duża liczba eksperymentów została przeprowadzona dla pochylonej szczeliny umieszczonej centralnie w próbce pod wpływem czystego rozciągania. Erdogan i Sih, 1963 [131] byli pierwszymi, którzy użyli takiej konfiguracji próbki testując idealnie kruchy materiał i sformułowali opisane już kryterium, patrz podrozdział 3.2.1. Iida i Kobayashi, 1969 [116] użyli próbki wykonanej ze stopu aluminium 7075-T6, a więc materiału, który wykazuje właściwości plastyczne. Współczynnik asymetrii cyklu był $R = 0.1$. Wyniki pokazały, iż bardzo trudno jest uzyskać mieszany mechanizm wzrostu szczeliny, gdyż taka szczelina wzrasta natychmiast w kierunku prostopadłym do osi obciążenia, gdzie K_I jest maksymalne. Ponieważ szczelina zmienia orientację, K_I wzrasta gwałtownie do wartości jaką otrzymalibyśmy dla szczeliny prostopadłej do osi obciążenia. Natomiast K_{II} szybko zmniejsza się, aż do całkowitego zaniknięcia. W pracy zauważono również, iż obecność nawet niedużej składowej naprężenia wynikającej z II typu obciążenia, zwiększa prędkość wzrostu szczeliny w znaczny sposób.

Efektywny współczynnik intensywności naprężenia. Jednym z pierwszych autorów, który zmodyfikował konwencjonalny wzór Parisa i Erdogana [130], był Tanaka [119]. Podobnie jak Iida i Kobayashi, [116] badał próbki aluminiowe, w których szcze-

liny pochylone były pod kątami: 30, 45, 72 oraz 90 stopni przy $R = 0.65$ i jedno–osiowym rozciąganiu. Dodatkowo, Tanaka wyznaczył również warunki progowe propagacji szczeliny będącej pod wpływem mieszanego obciążenia. W pracy pokazano, że kierunek propagacji szczeliny wyznaczany za pomocą **MNO** [131], por. (3.16) i (3.17), oraz **S**–kryterium, por. (3.20), wykazuje odchylenie od wyników eksperymentu. Zaproponowano nowe wyrażenie na prędkość propagacji szczeliny opierając się na pracach Weertmana, [120] oraz Lardnera, [121] :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{\text{eff}})^n, \quad (3.56)$$

które daje wyniki zgodne z danymi eksperymentalnymi. Przy czym ΔK_{eff} w złożonym stanie obciążenia wyrażone jest przez:

$$\Delta K_{\text{eff}} = [\Delta K_{\text{I}}^4 + 8\Delta K_{\text{II}}^4]^{\frac{1}{4}}. \quad (3.57)$$

Propozycja ta bazuje na założeniu, że zmęczeniowy wzrost szczeliny pojawi się, gdy suma całkowitej wartości przemieszczenia w obszarze przywierzchołkowym osiągnie wartość krytyczną. W przypadku mieszanego modu deformacji przyjmuje się, że deformacje zależne od modów I i II są niezależne od siebie. W pracy zaproponowano również inne wyrażenia określające ΔK_{eff} . Jednak wyniki eksperymentów są najbardziej zbieżne z wyrażeniem (3.57).

Inna propozycja ΔK_{eff} zaproponowana została przez Yan *et al.* [183] dla szczeliny w złożonym stanie naprężenia:

$$\Delta K_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} [\Delta K_{\text{I}}(1 + \cos \theta_0) - 3\Delta K_{\text{II}} \sin \theta_0] \quad (3.58)$$

gdzie, θ_0 jest kątem wzrostu szczeliny uzyskanym z kryterium maksymalnych naprężeń obwodowych (**MNO**). Jest to wynikiem wykorzystania tego kryterium do określenia prędkości wzrostu szczeliny zmęczeniowej w rozważanych warunkach obciążenia.

Współczynnik gęstości energii odkształcenia. Kryterium to również bazuje na konwencjonalnym wzorze Parisa i Erdogana (3.49) [130]. Jednakże zamiast ΔK użyto zakresu współczynnika gęstości energii odkształcenia ΔS , czyli:

$$\frac{da}{dN} = C_s(\Delta S)^{n_s}, \quad (3.59)$$

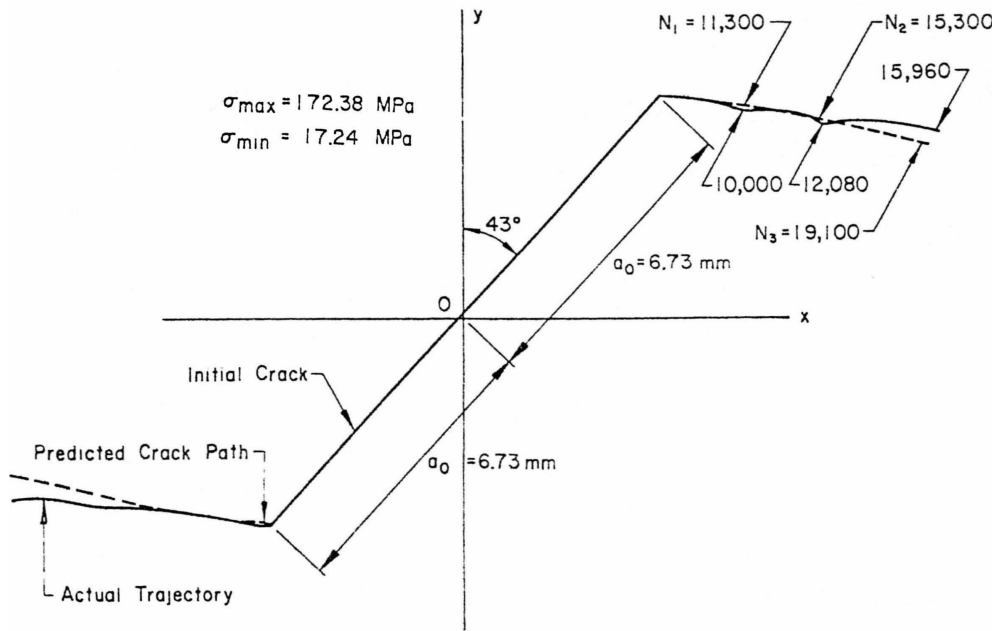
gdzie $\Delta S = S_{\text{max}} - S_{\text{min}}$, a C_s i n_s są stałymi materiałowymi. Równanie to zostało zweryfikowane przez Sih i Barthelemy [137], Badaliance [138] oraz Lam [139] wykazując zgodność z wynikami eksperymentu.

Rozwarcie szczeliny. Jak wspomniano wcześniej, bardzo interesującym parametrem opisującym prędkość wzrostu szczeliny jest wierzchołkowe rozwarcie szczeliny (CTOD). Jest to założenie bazujące na przyjęciu, iż zmęczeniowy przyrost szczeliny w trakcie jednego cyklu δa jest bezpośrednio proporcjonalny do CTOD [100]. Idea ta była i jest dość szeroko wykorzystywana. Znaczna większość prac dotyczy jednakże modelowania wzrostu szczeliny nie będącej w warunkach złożonego stanu naprężenia. Tego bardzo fizycznego parametru używa się łącznie z innymi wielkościami, które mają również wpływ na prędkość wzrostu szczeliny, np. efekt domykania szczeliny [101]. Jedną z prac próbującą wykorzystać rozwarcie szczeliny będącej w złożonym stanie naprężenia była opisywana już praca [144] (3.2.9).

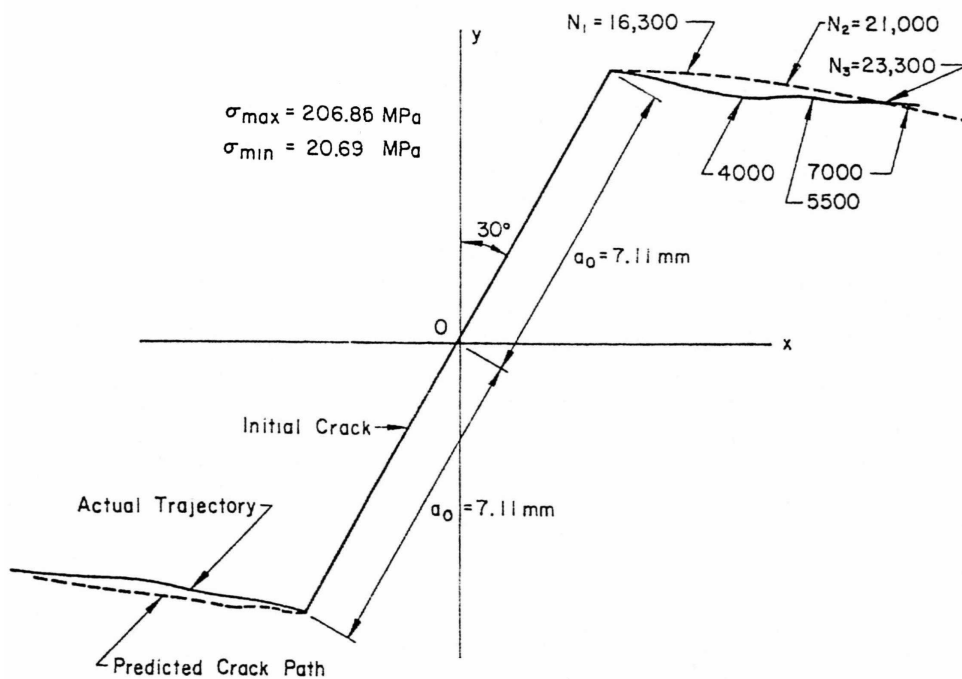
3.4. Propagacja szczeliny zmęczeniowej

Jednym z wniosków z poprzednich paragrafów jest duża rozbieżność pomiędzy wynikami uzyskiwanymi na drodze eksperymentów dla wzrostu szczeliny zmęczeniowej w złożonym stanie naprężenia, a rezultatami uzyskiwanymi teoretycznie (patrz podrozdział 3.2.12). Rozbieżność ta wzrasta, gdy udział modu II wzrostu szczeliny powiększa się. Dzieje się tak np. w przypadku jedno-osiowej próby, gdy kierunek początkowej lokalizacji szczeliny zbliża się do osi obciążenia. Było to zauważone już dla obciążenia monotonicznego, ale w przypadku obciążenia cyklicznego problemem znacznie ważniejszym jest brak ogólnie akceptowanych, prostych w zastosowaniu, a przede wszystkim efektywnych wyrażeń na prędkość wzrostu szczeliny. Doświadczenia pokazują, że nawet niewielka obecność składowej ΔK_{II} skutkuje znacznym wzrostem prędkości. Opisane w poprzednim rozdziale wyrażenia nie zawsze odpowiadają dobrze wynikom eksperymentów, w szczególności gdy udział ΔK_{II} wynikający z konfiguracji i obciążenia szczeliny jest znaczny. Do najczęściej używanych wielkości należą: efektywny współczynnik intensywności naprężenia oraz współczynnik gęstości energii odkształcenia. Należy zaznaczyć, że powstało wiele prac z powodzeniem stosujących owe wyrażenia, ale dotyczą one jedynie wzrostu szczelin w początkowej fazie charakteryzujących się znaczną dominacją ΔK_I . W pracy podjęta zostanie próba modelowania szczeliny wg omawianych poprzednio kryteriów (patrz Rozdziały 3.2 i 3.3.2), a otrzymane wyniki zostaną porównane z wynikami eksperymentu zamieszczonymi w pracy Pustejovskiego [99]. Autor przedstawił w tej pracy wyniki eksperymentu dotyczącego stopu tytanu Ti-6Al-4V, przy $R = 0.1$, w płaskim stanie odkształcenia. Zamieszczone tam rezultaty będą traktowane jako weryfikacja kryteriów proponowanych w niniejszej rozprawie. Należy zwrócić uwagę, iż wyniki zamieszczone w [99] zostały wykorzystane w pracy [137], w której zaproponowano użycie współczynnika gęstości energii odkształcenia do określenia prędkości wzrostu szczeliny. Jak widać na Rys. 3.9 i 3.10 nie osiągnięto zadowalającej zgodności z wynikami eksperymentu, a co gorsze, nawet tendencja dotycząca prędkości wzrostu przy zmianie kierunku orientacji szczeliny początkowej nie została zachowana. Należy jednak wyjaśnić, iż metoda obliczenia WIN w pracy [137] była pewną aproksymacją. Dlatego, na Rys. 3.11 oraz 3.12 użyto identycznego modelu wzrostu szczeliny zmęczeniowej, ale z zastosowaniem metody uzyskiwania WIN z niniejszej pracy. Rezultaty uległy znacznej poprawie, ale ciągle znacznie różniły się od tych uzyskanych eksperymentalnie. Można co prawda użyć pewnej modyfikacji wyrażeń proponowanych w jedno-osiowych próbach uwzględniających czynniki wpływające na prędkość wzrostu szczeliny, opisanych w poprzednim rozdziale, jednakże, mimo wielu prób nie udało się autorowi uzyskać zadowalającej zgodności wyników modelowania, jednocześnie dla obu przypadków wzrostu szczeliny jak w eksperymencie. Podobne niezadowalające wyniki uzyskano w przypadku zastosowania efektywnego współczynnika intensywności naprężenia ΔK_{eff} .

Natomiast, jeżeli chodzi o kierunku wzrostu szczeliny, to okazuje się, że większość autorów nie rozróżnia rodzaju obciążenia i dla zmęczeniowej propagacji szczeliny stosuje się te same kryteria jak i w przypadku obciążenia monotonicznego. Ciekawe jest to, że różnice w kierunku propagacji są czasami bardzo znaczne. Jednakże w większości przypadków zmęczeniowego wzrostu szczeliny kryteria wynikające z obciążenia monotonicznego są wystarczające. Różnice są istotne tylko wtedy gdy udział ΔK_{II} jest duży. Są one znaczące na kilku początkowych cyklach, ponieważ udział ΔK_{II} w rozwiązaniu dość szybko zanika i relatywnie ma nieduży wpływ na ostateczny kierunek propagacji. Niemniej, próba



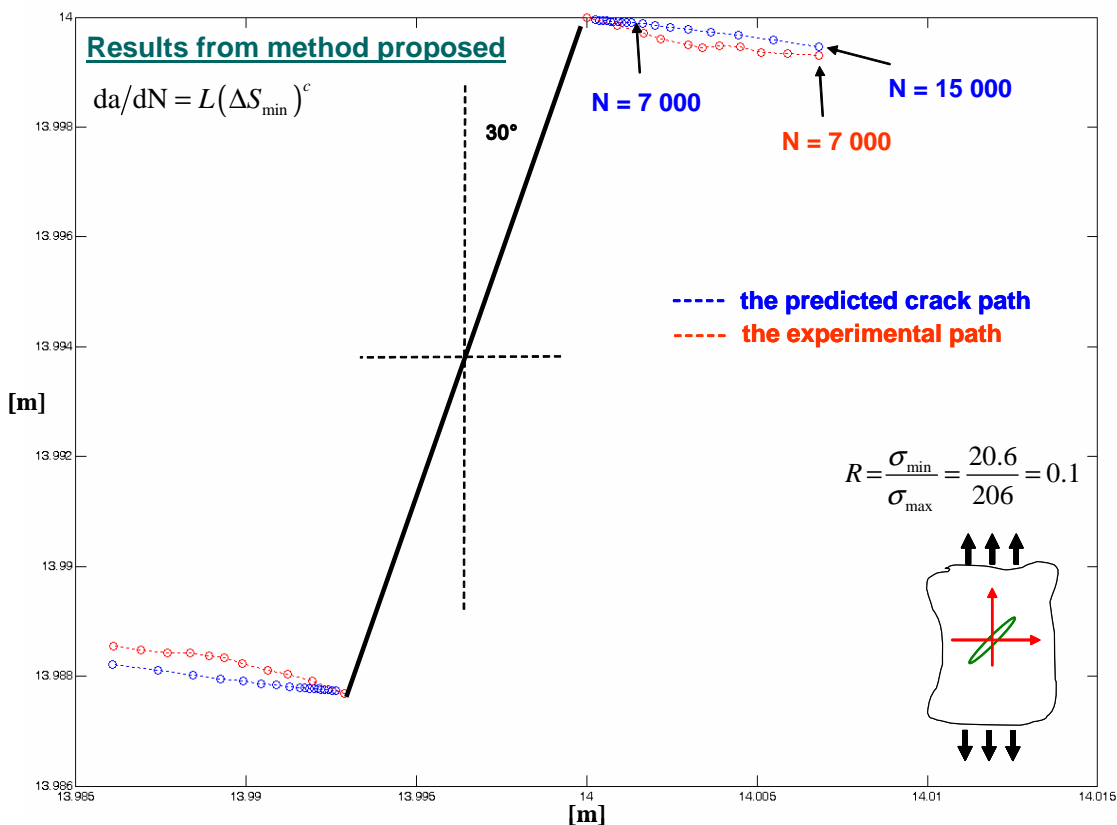
RYSUNEK 3.9. Porównanie wyników eksperymentu z modelem i metodą uzyskiwania WIN w [137].



RYSUNEK 3.10. Porównanie wyników eksperymentu z modelem i metodą uzyskiwania WIN w [137].

odpowiedzi dlaczego takie zjawisko występuje wydaje się bardzo interesująca.

W pierwszym rzędzie istotnym wydaje się próba znalezienia odpowiedzi, co powoduje różnice kierunku wzrostu szczeliny w przypadku obciążenia monotonicznego i obciążenia cyklicznym. Po drugie, co jest może bardziej interesujące i konieczne, to możliwość opisanie w prosty i dogodny sposób (używając wielkości wynikających z Liniowej Mecha-

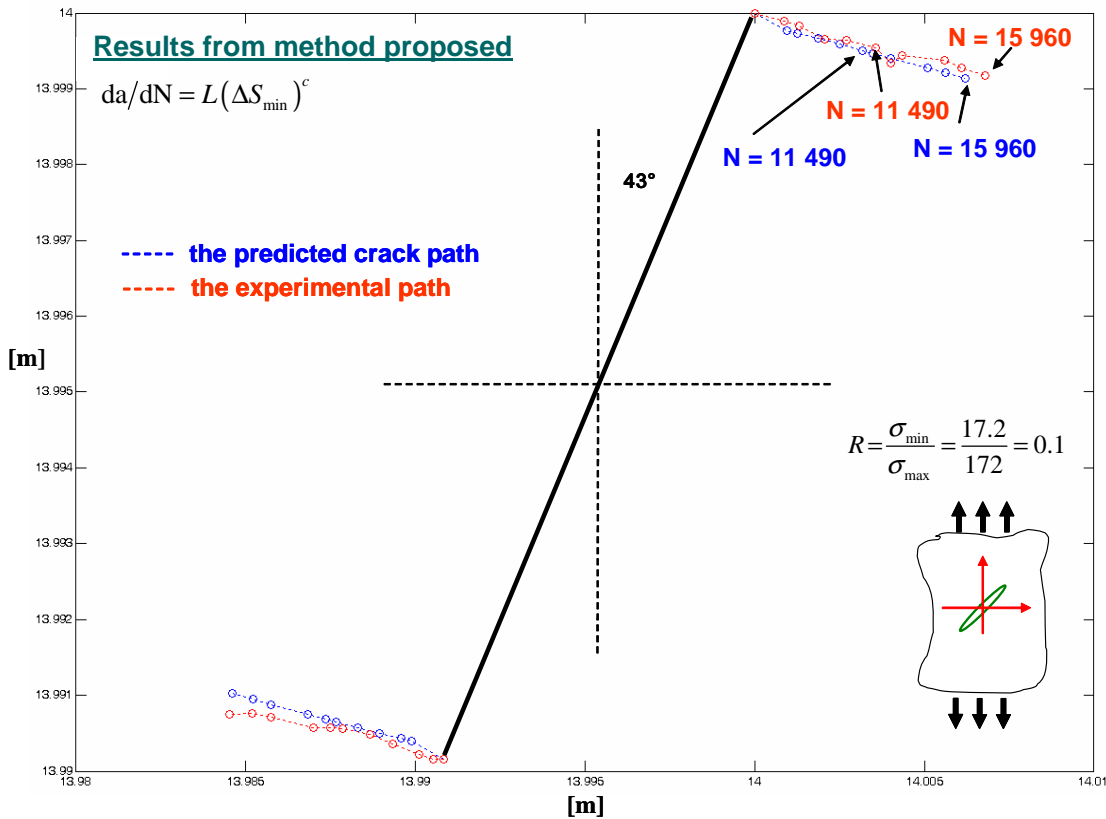


RYSUNEK 3.11. Porównanie wyników eksperymentu z modelem [137] przy użyciu stosowanej w niniejszej pracy metody obliczania WIN.

niki Pękania) prędkości wzrostu szczeliny zmęczeniowej w złożonym stanie naprężenia. W tym celu w niniejszym rozdziale uwzględniony zostanie stały człon w składowych tensora naprężenia, T , jako istotna część rozwiązania pomijana zwykle w obliczeniach kąta propagacji szczeliny, jak i, przede wszystkim, w wyrażeniach na prędkość wzrostu szczeliny. Wszystkie wielkości będą skorelowane z pewnym obszarem deformacji materiału, jakim jest np. strefa plastyczna.

3.5. MK – Kryterium – propozycja

W przypadku materiałów kruchych, czy też wysokocyklowego zmęczenia proces pękania powiązany jest ściśle z rozwojem mikro-szczelin w sąsiedztwie wierzchołka karbu lub początkowej szczeliny, por. Williams [178]. Proces ten może być powiązany również z bardzo małym obszarem plastycznych deformacji. Mikro-szczeliny powodują osłabienie materiału i redystrybucję naprężenia. Ponieważ mechanizmy te są niezwykle złożone, sformułowanie modelu bezpośrednio uwzględniającego te efekty wydaje się trudne. Kryterium, które jako pierwsze zakładało istnienie strefy pękania, w której zachodzi silny rozwój uszkodzeń, było kryterium zaproponowane przez Novožilova [179]. Inicjacja lub propagacja szczeliny nastąpi, gdy uśrednione na pewnym odcinku d_0 naprężenie normalne osiągnie wartość krytyczną σ_{cr} . Tak więc wpływ mikro-szczelin uwzględnia się przez wprowadzenie małej, ekwiwalentnej szczeliny co prowadzi do posługiwania się wartościami uśrednionymi. Pozwala to oszacować pole naprężenia wokół tak przedłużonej szczeliny, albo też używając takich parametrów jak naprężenie lub gęstość energii wyznaczyć pożą-



RYSUNEK 3.12. Porównanie wyników eksperymentu z modelem [137] przy użyciu stosowanej w niniejszej pracy metody obliczania WIN.

dane wielkości w pewnej odległości od wierzchołka karbu (szczeliny) [169]. Rozszerzeniem kryterium Novožilova jest opisywane już kryterium NNKP (3.2.10).

Powróćmy w tym momencie do definicji gęstości energii odkształcenia w , które, jak wspomniano w podrozdziale 3.2.6, składa się z dwóch części: objętościowej, T_V i postaciowej, T_D . Ta pierwsza decyduje o procesie pęknięcia i wspiera mechanizmy dekohezji. Druga zaś decyduje o procesach odkształcenia plastycznego i mechanizmach zniszczenia realizowanych przez poślizgi. Istotną rolę w analizie wszelkiego rodzaju pęknięć odgrywa wzajemna relacja pomiędzy tymi składowymi, por. [4]. Składowe te można wyrazić w następującej postaci:

$$T_V = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2, \quad (3.60)$$

$$T_D = \frac{1 + \nu}{3E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + 3\sigma_{xy}^2), \quad (3.61)$$

gdzie

$$\sigma_{zz} = 0 \quad - \text{dla płaskiego stanu naprężenia,}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad - \text{dla płaskiego stanu odkształcenia.}$$

Wówczas, dla płaskiego stanu naprężenia

$$T_V = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2, \quad (3.62)$$

$$T_D = \frac{1 + \nu}{3E} \left((\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - 3(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2) \right), \quad (3.63)$$

oraz dla płaskiego stanu odkształcenia

$$T_V = \frac{(1 + \nu)^2(1 - 2\nu)}{6E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2, \quad (3.64)$$

$$T_D = \frac{1 + \nu}{3E} \left((\nu^2 - \nu + 1)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - 3(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2) \right). \quad (3.65)$$

Wielkości te wydają się bardzo atrakcyjne w modelowaniu wzrostu szczeliny zarówno pod wpływem obciążenia monotonicznego, jak i cyklicznego. Wykorzystywane były już podczas formułowania **T**-kryterium (patrz podrozdział 3.2.6), gdzie kąt propagacji szczeliny był zgodny z maksymalną wartością T_V ($T_V|_{\max} \rightarrow \theta_{pr}$), liczoną po konturze wyznaczonym przez wielkość $T_D = \text{const}$ dla $r(\theta)$, spełniającego kryterium plastyczności, a więc w pewnej odległości od wierzchołka szczeliny. W tamtym przypadku dogodne było użycie hipotezy Misesa, dla której relacja stałej T_D^{ys} i naprężenia uplastyczniającego σ_{ys} wyraża się następująco:

$$T_D = T_D^{ys} = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_{ys}^2 \quad - \text{ dla płaskiego stanu naprężenia,} \quad (3.66)$$

$$T_D = T_D^{ys} = \frac{(1 + \nu)(\nu^2 - \nu + 1)}{3E} \sigma_{ys}^2 \quad - \text{ dla płaskiego stanu odkształcenia.} \quad (3.67)$$

Wydaje się, że kryterium to można również zaliczyć do grupy kryteriów nielokalnych. Jednakże nie jest ono zbyt właściwe w przypadku materiałów kruchych czy też materiałów, w których strefa plastyczna jest mała w porównaniu z innymi defektami struktury, jakim są np. mikro-szczeliny. W takim przypadku kryterium to zaczyna być zbieżne z kryterium gęstości energii odkształcenia i w zasadzie przestaje być nielokalne z powodu konieczności wyznaczania potrzebnych wielkości zbyt blisko wierzchołka szczeliny. W wyniku tego nie uwzględnienia się niejednorodności materiału, jak i redystrybucji naprężeń, która istnieje również poza obszarem plastycznym wskutek mikropęknięć. Tak więc zgodnie np. z **NNKP**-kryterium, uwzględnienie do obliczeń pewnego obszaru uszkodzeń, których źródłem są procesy dekohezyjne wydaje się konieczne. W następnej części rozdziału podjęto próbę sformułowania nowego kryterium, które wykorzystuje dwu-wymiarowy obszar uszkodzeń.

Idea podzielenia gęstości energii odkształcenia w na jej dwie składowe wydaje się być bardzo atrakcyjna ze względu na wspomnianą już interpretację fizyczną takiego podziału. W przypadku **T**-kryterium umożliwiło to określenie granicy sprężysto-plastycznej, $T_D = \text{const}$, na której poszukiwana była wartość maksymalna gęstości energii odkształcenia, w , co sprowadza się do poszukiwania maksymalnej wartości T_V , związanej z procesami dekohezji. Należy zauważyć, że **S**-kryterium zakłada, iż szczelina będzie propagować w kierunku najmniejszej wartości w . Jednakże wartość ta poszukiwana jest wzdłuż stałej, założonej odległości od wierzchołka szczeliny, czyli wtedy gdy $T_D \neq \text{const}$. Interesujące jest również to, że zwykle płaszczyznę pęknięcia koreluje się z wystąpieniem warunku $T_V > T_D$, co w zasadzie jest słuszne tylko dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Na tę sytuację zwrócono uwagę w pracy [162], podczas formułowania **T**-kryterium, modyfikując ten warunek do postaci poszukiwania maksymalnej wartości ilorazu T_V/T_D , co odpowiada zarówno płaskiemu stanowi odkształcenia, jaki płaskiemu stanowi naprężenia.

Sformułowanie kryterium. Zakładając, że hipoteza oddzielenia składowych gęstości energii odkształcenia podczas poszukiwania kąta propagacji szczeliny jest słuszna (**T**-kryterium), można zastanowić się nad wykorzystaniem tej idei w nieco inny sposób. A w rezultacie do próby sformułowania bardziej uniwersalnego, nielokalnego kryterium. Wiążąc lokalizację płaszczyzny pęknięcia z maksymalną wartością ilorazu ($[T_V/T_D]_{\max} \rightarrow \theta_{\text{pr}}$) można zaproponować, że:

- kąt propagacji szczeliny będzie związany z wartością minimalną $T_D(\theta)$ ($T_D(\theta)|_{\min} \rightarrow \theta_{\text{pr}}$) poszukiwaną po granicy wyznaczonej przez warunek $T_V(\theta) = \text{const} \rightarrow r(\theta)$, odpowiadającej pewnej wartości krytycznej T_V^f .

Sytuacja taka fizycznie może oznaczać, że szczelina będzie propagować w kierunku, gdzie rozpraszanie energii poprzez procesy plastyczne w stosunku do procesów dekohezji jest najmniejsze, a kontur T_V^f może definiować obszar związany z jedną z form mechanizmów zniszczenia jakim jest proces dekohezji ujawniający się w postaci mikro-szczelin. Kryterium to dla potrzeb niniejszej pracy będzie nazywane **MK**-kryterium. Wartość krytyczną T_V^f można uzyskać wykorzystując wytrzymałość na rozciąganie σ_c . Charakterystyczną granicę, na której poszukiwana jest minimalna wartość T_D uzyskujemy wykorzystując wyrażenie (3.60), co prowadzi do następującej zależności:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{\sqrt{T_V^c \cdot \frac{6E}{(1-2\nu)(1+f)^2}} - T}{K_I(C+A) + K_{II}(B-D)}, \quad (3.68)$$

gdzie,

$$\begin{aligned} T_V = T_V^c &= \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_c^2 && \text{– dla płaskiego stanu naprężenia,} \\ T_V = T_V^c &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)^2}{6E} \sigma_c^2 && \text{– dla płaskiego stanu odkształcenia,} \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} f &= \nu, && \text{dla płaskiego stanu odkształcenia,} \\ f &= 0, && \text{dla płaskiego stanu naprężenia} \end{aligned}$$

oraz wyrażenia (2.16–2.18) zapisane w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} A + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} B, \\ \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} C - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} D + T, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} F + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} G, \end{aligned} \quad (3.70)$$

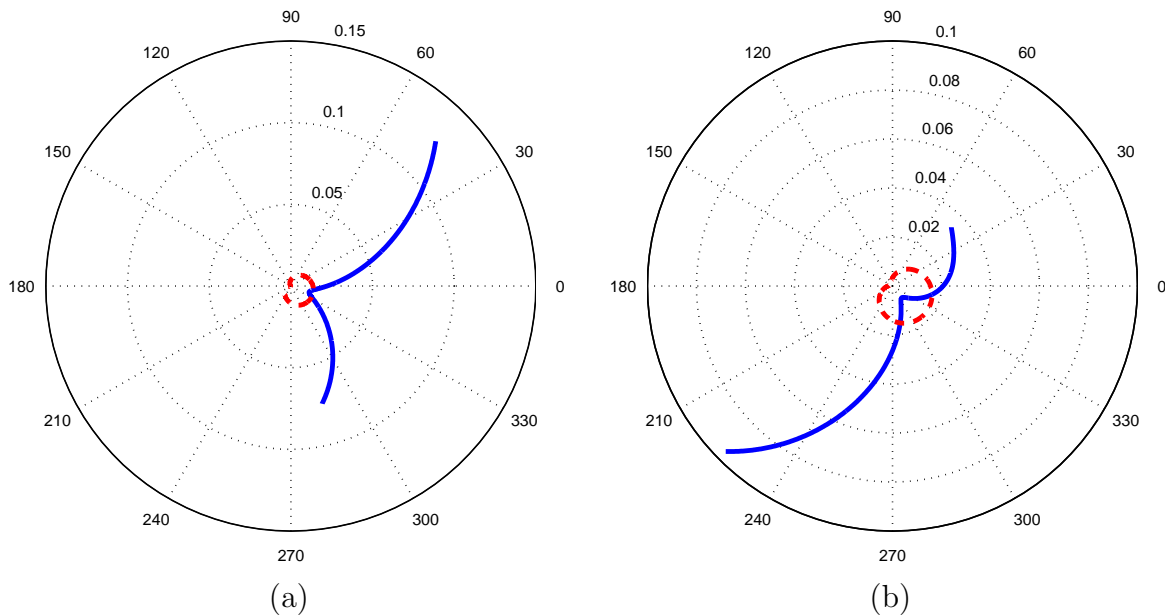
gdzie

$$\begin{aligned}
 A &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\
 B &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\
 C &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\
 D &= \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\
 F &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\
 G &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\
 T &= \sigma(1 - k) \cos 2\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Kryterium to można więc zapisać w następującej sposób

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{T_V}{T_D} \right|_{\max} &\rightarrow \theta_{\text{pr}}, \quad \text{przy } T_V = \text{const.} \\
 T_D \left(r(T_V^{\text{const.}}, \theta) \right) \Big|_{\min} &\rightarrow \theta_{\text{pr}}.
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Wyrażenia te przedstawiono na Rys. (3.13), przy czym naszkicowano jedynie obszar w okolicy kąta propagacji z powodu bardzo dużych wartości T_D przy $r \rightarrow 0$.

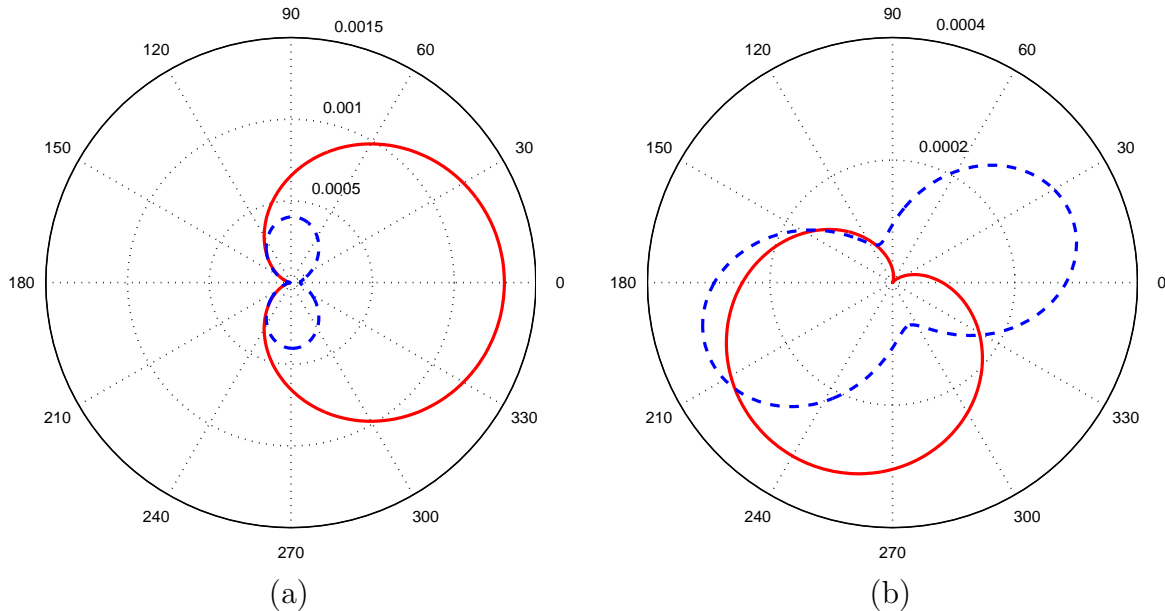


RYSUNEK 3.13. Kontur dla $T_D(r(\theta), T_V^{\text{const.}})$ (linia ciągła, niebieska) oraz kontur dla $r(T_V^{\text{const.}}, \theta)$ (linia czerwona, przerywana). Odpowiednio dla a) i b), $\alpha = 60^\circ, 30^\circ$, płaski stan odkształcenia, rozwiązanie z częścią nieosobliwą, $T \neq 0$.

Przykładowe kształty obszarów wynikające z przekształcenia wyrażenia (3.68) do postaci:

$$r = r_V|_{T_V=\text{const}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I(C+A) + K_{II}(B-D)}{\sqrt{T_V^c \cdot \frac{6E}{(1-2\nu)(1+f)^2} - T}} \right)^2, \quad (3.73)$$

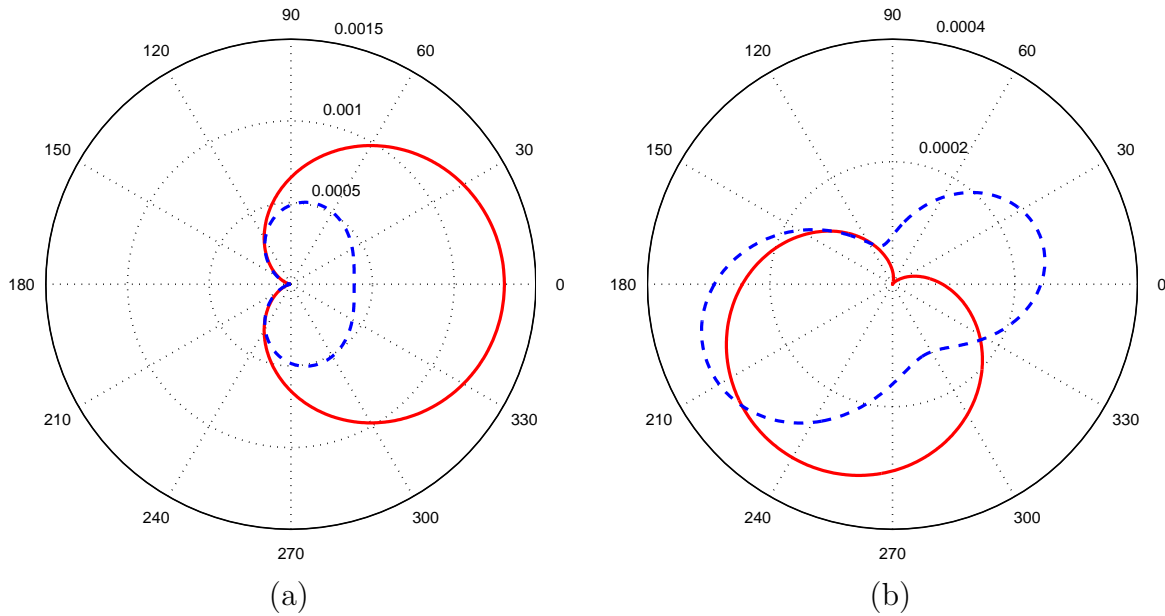
przedstawiono na Rys. (3.14)–(3.15) Dla porównania narysowano tam również granicę sprężysto–plastyczną definiowaną przez **T**-kryterium, $T_D=\text{const} \rightarrow r(\theta)$, por. (3.31). Jak



RYSUNEK 3.14. Kontur dla $T_D = \text{const.}$ (linia przerywana) oraz kontur dla $T_V = \text{const.}$ (linia ciągła). Materiał: Al 7075-T6, $E = 71\text{GPa}$, $\nu=0.33$, $\sigma_{YS}=538\text{ MPa}$, $\sigma_c=586\text{ MPa}$, $K_{TH} \simeq 1$, $K_c = 25\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$, $2a = 20\text{mm}$. Odpowiednio dla a) i b), $\alpha = 90^\circ, 30^\circ$, por. Rys. 2.5 oraz płaskiego stanu odkształcenia. Rozwiązanie osobliwe, $T = 0$.

można zauważyć, szczególnie w przypadku $\alpha = 90^\circ$, obszar definiowany poprzez wyrażenie (3.73), a skorelowany z wielkością maksymalnego naprężenia rozciągającego (σ_c) jest znacznie rozleglejszy niż obszar plastyczny, szczególnie na kierunku pękania. W przypadku materiałów kruchych taki obszar (nazwijmy go obszarem dekohezji), określać może pojawianie się wspomnianych wcześniej mikro–szczelin, a stosunkowo niewielki kontur uzyskiwany przy $T_D=\text{const}$ będzie opisywać towarzyszącą temu procesowi strefę plastyczną. Należy zauważyć, że kąt, który odpowiada maksymalnej długości strefy dekohezji (3.68), nie jest z reguły kątem pod którym rozwijać się będzie szczelina. W przypadku jak na Rys. (3.14)–(3.15) jest to w przybliżeniu kąt, przy którym kontur określający zasięg strefy plastycznej jest najbliższej wierzchołka szczeliny, co częściowo pokrywa się z wnioskami z **W**–kryterium (patrz podrozdział 3.2.11). Dodatkowo, na Rys. 3.16 przedstawiono próbę interpretacji fizycznej trzech obszarów deformacji uzależniając je od gęstości defektów struktury, a mianowicie:

- obszar o największej gęstości defektów jest tu Strefą Zniszczenia, najbliższej wierzchołka szczeliny.
- obszar deformacji plastycznych, określony jest tu przy założeniu $T_D(\sigma_{ys}) = \text{const.}$
- obszar dekohezji, wyznaczono przy założeniu $T_V(\sigma_c) = \text{const.}$



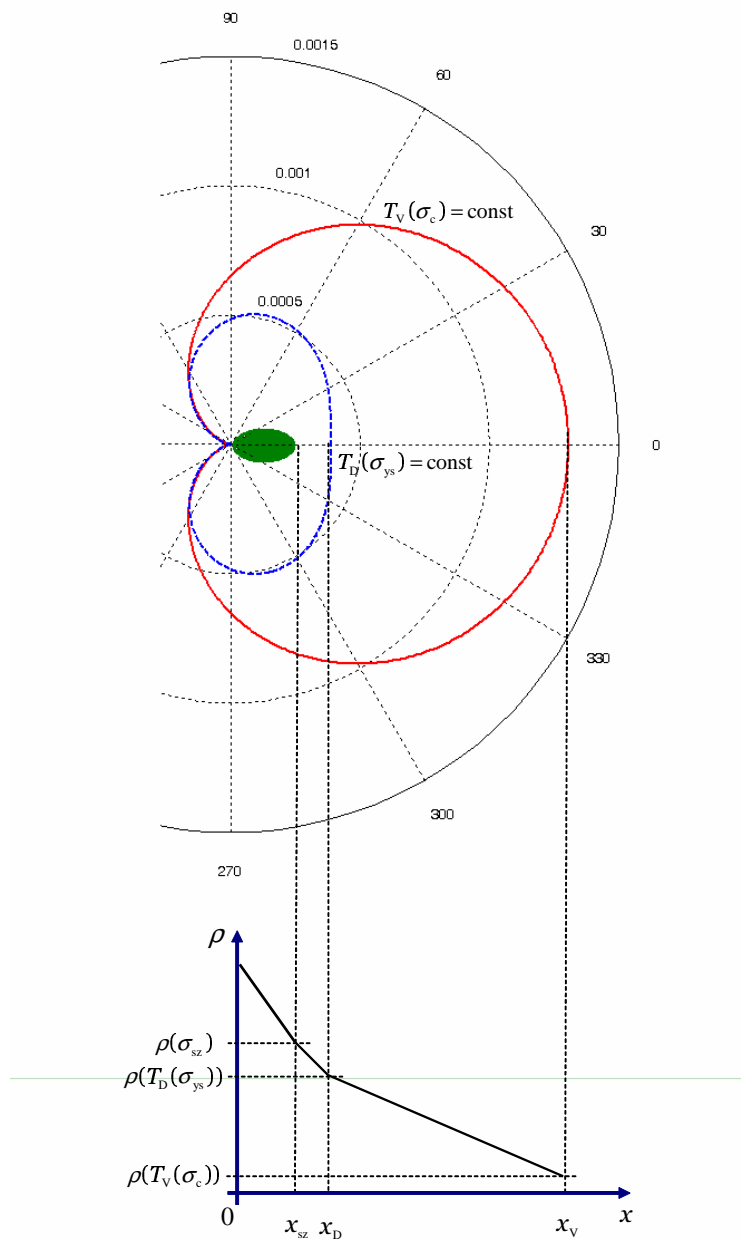
RYSunEK 3.15. Kontur dla $T_D = \text{const.}$ (linia przerywana) oraz kontur dla $T_V = \text{const.}$ (linia ciągła). Materiał: Al 7075-T6, $E = 71\text{GPa}$, $\nu=0.33$, $\sigma_{YS}=538\text{MPa}$, $\sigma_c=586\text{MPa}$, $K_{TH} \simeq 1$, $K_c = 25\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$, $2a = 20\text{mm}$. Odpowiednio dla a) i b), $\alpha = 90^\circ$, 30° , por. Rys. 2.5 oraz płaskiego stanu naprężenia. Rozwiązanie osobliwe, $T = 0$.

Oczywiście relacje pomiędzy tymi obszarami są zależne od rodzaju materiału oraz wielkości obciążenia.

Koniecznie należy zwrócić uwagę na składową T , która uwzględniono w powyższych wyrażeniach. Składowa ta jest często pomijana w rozwiązaniach. Jak wspomniano poprzednio, Larsson i Carlsson [21] zademonstrowali, że człon ten ma znaczny wpływ na kształt i wielkość np. strefy plastycznej, która rozwija się przed wierzchołkiem szczeliny. Sytuacja taka istnieje również w przypadku określenia zasięgu wprowadzonej tu strefy dekohezji określanej wyrażeniem (3.73), por. Rys. 3.17. Co ciekawe, zasięg strefy dekohezji w przypadku $\alpha = 90^\circ$ został zmniejszony przez wprowadzenie członu T , co jest zgodnie z wyrażeniem (3.73), ponieważ mianownik tego wyrażenia w tym przypadku rośnie. Natomiast zwiększył się nieco zasięg strefy plastycznej, przy jednoczesnej korekcie jej kształtu, por. [166].

Wydaje się więc, że próba uwzględnienia tego stałego członu jest konieczna dla właściwego określenia kierunku wzrostu szczeliny, tak w przypadku obciążenia monotonicznego, jak i cyklicznego. Dodatkowo, w przypadku obciążenia cyklicznego, a więc i cyklicznego wzrostu szczeliny umożliwić on będzie sformułowanie dokładniejszego prawa wzrostu szczeliny.

Warunek propagacji szczeliny. W przypadku kryterium pęknięcia należy podać warunek krytyczny, po spełnieniu którego materiał wraz z istniejącą w nim szczeliną, ulegnie zniszczeniu wskutek pęknięcia. Może to być wartość krytyczna zasięgu obszaru dekohezji na kierunku pęknięcia, r_{cr} , lub kierunku propagacji zmęczeniowej w przypadku obciążenia cyklicznego. Do określenia zasięgu obszaru dekohezji wykorzystać można wartości σ_c i K_{cr} , a dla obciążenia cyklicznego σ_{ZG} oraz ΔK_{TH} , czyli

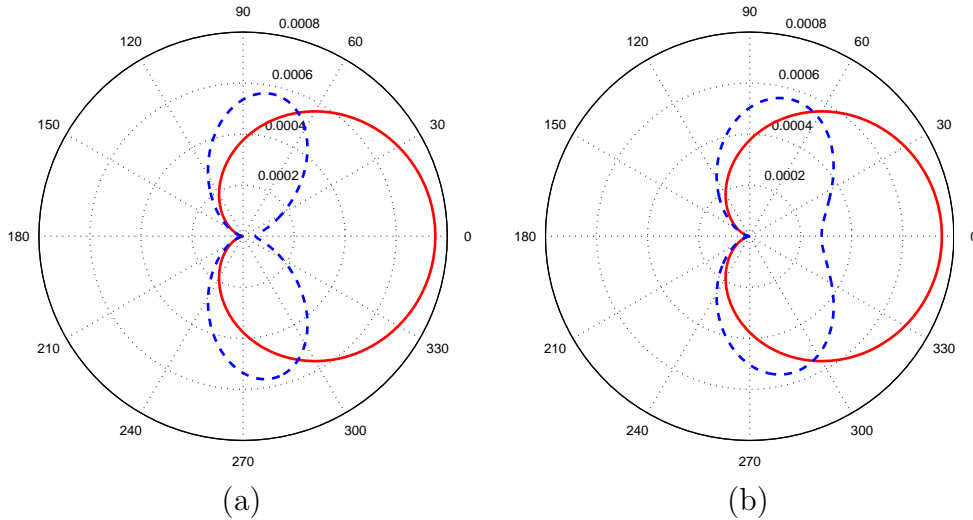


RYSUNEK 3.16. Fazy obszaru zniszczenia, gdzie ρ to gęstość defektów.

$$r|_{\theta=\theta_{pr}} \geq r_{cr}, \quad (3.74)$$

gdzie r_{cr} obliczane jest na podstawie jednoosiowej próby (mod I):

$$r_{cr} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2K_{cr}}{\sqrt{T_V^c \cdot \frac{6E}{(1-2\nu)(1+f)^2} - T}} \right)^2. \quad (3.75)$$



RYSUNEK 3.17. Kontur dla $T_D = \text{const.}$ (linia przerywana) oraz kontur dla $T_V = \text{const.}$ (linia ciągła). Materiał: Al 7075-T6, $E = 71\text{GPa}$, $\nu=0.33$, $\sigma_{YS}=538\text{ MPa}$, $\sigma_c=586\text{ MPa}$, $K_{TH} \simeq 1$, $K_c = 25\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$, $2a = 20\text{mm}$, $\alpha = 90^\circ$. Odpowiednio dla a) i b), płaski stan odkształcenia i naprężenia. Rozwiązanie osobliwe, $T = 0$, obciążenie monotoniczne.

W wyniku tego uzyskujemy dla obciążenia monotonicznego:

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I(C + A) + K_{II}(B - D)}{\sqrt{T_V^c \cdot \frac{6E}{(1-2\nu)(1+f)^2} - T}} \right)^2 \geq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2K_{cr}}{\sqrt{T_V^c \cdot \frac{6E}{(1-2\nu)(1+f)^2} - T}} \right)^2. \quad (3.76)$$

Daje to uproszczony warunek propagacji szczeliny dla obciążenia monotonicznego uzależniony od wartości K_{cr} w następującej postaci:

$$K_I \cos \frac{\theta}{2} - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \geq K_{cr}, \quad (3.77)$$

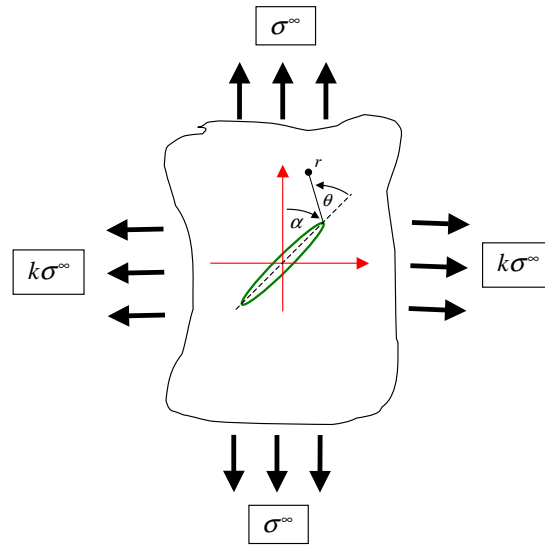
oraz analogicznie dla obciążenia cyklicznego:

$$\Delta K_I \cos \frac{\theta}{2} - \Delta K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \geq \Delta K_{TH}. \quad (3.78)$$

Generalnie, warunek ten, pomimo wykorzystania do jego sformułowania wyrażeń zawierających składową T , jest od niej niezależny. Bazując na LMP fakt ten wydaje się słuszny, bowiem za wielkość krytyczną propagacji przyjmuje się wartość WIN, K_{cr} . Ponieważ WIN definiuje się za pomocą wartości naprężenia i długości szczeliny, obie te wielkości w przypadku propagacji szczeliny są wielkościami krytycznymi. Tak więc jeśli rozważamy czy szczelina będzie propagowała czy też nie parametrem, który to jednoznacznie określa jest właśnie K_{cr} . Należy zaznaczyć, że warunek ten dotyczy szczelin długich. Powodem takiej sytuacji jest w przypadku szczelin krótkich (od pewnej charakterystycznej długości) konieczność przyłożenia obciążenia, przewyższającego naprężenie krytyczne, σ_c dla materiału bez szczeliny, tak aby wartość krytyczna K_{cr} mogła być osiągnięta. Natomiast składową T , a w zasadzie również jej pewną wielkość krytyczną T_{cr} , można traktować jako parametr determinujący zachowanie szczeliny już propagującej, charakteryzującą rodzaj jej propagacji (stabilny lub niestabilny), por. [52] i podrozdział 2.2.2.

3.5.1. Kierunek wzrostu szczeliny. Obciążenie monotoniczne.

Obliczenia kąta propagacji szczeliny dla różnych kątów α , por. Rys. 3.18 i różnego stosunku $\frac{\sigma}{\sigma_c}$ zaprezentowano w Tabeli 3.2 oraz graficznie na Rys. 3.19. Analizując Ta-



RYSUNEK 3.18. Dwu-osiowe obciążenia szczeliny.

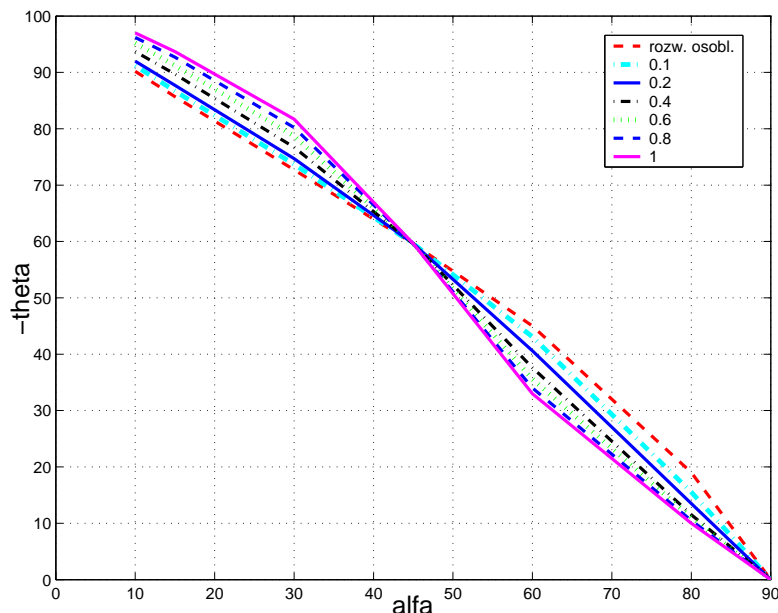
TABELA 3.2. Wartości kąta propagacji θ_{pr} szczeliny wg MK-kryterium w zależności od stosunku obciążenia do wielkości maksymalnego naprężenia rozciągającego ($\frac{\sigma}{\sigma_c}$) dla różnego pochylenia szczeliny (α).

$\frac{\sigma}{\sigma_c}$	α				
	15	30	45	60	80
Rozw. Os.	-85.709	-72.7	-59.6	-45.12	-19.03
0.1	-86.709	-73.7	-59.6	-43.1	-15.53
0.2	-87.709	-74.7	-59.6	-40.6	-13.50
0.4	-89.709	-76.7	-59.6	-37.6	-11.53
0.6	-91.2	-78.7	-59.6	-35.6	-11.02
0.8	-92.7	-80.2	-59.6	-34.1	-10.53
1	-93.7	-81.7	-59.6	-33.1	-10.03

belę 3.2 można zadać pytanie, skąd wynikają różnice kąta propagacji szczeliny wraz ze zmianą wartości obciążenia. Kryterium składa się z dwóch etapów:

- wyznaczenie charakterystycznego konturu na podstawie wyrażenia (3.68) do określenia relacji $r(\theta)$,
- wyrażenia (3.65) lub (3.63) do wyznaczenia kąta propagacji szczeliny.

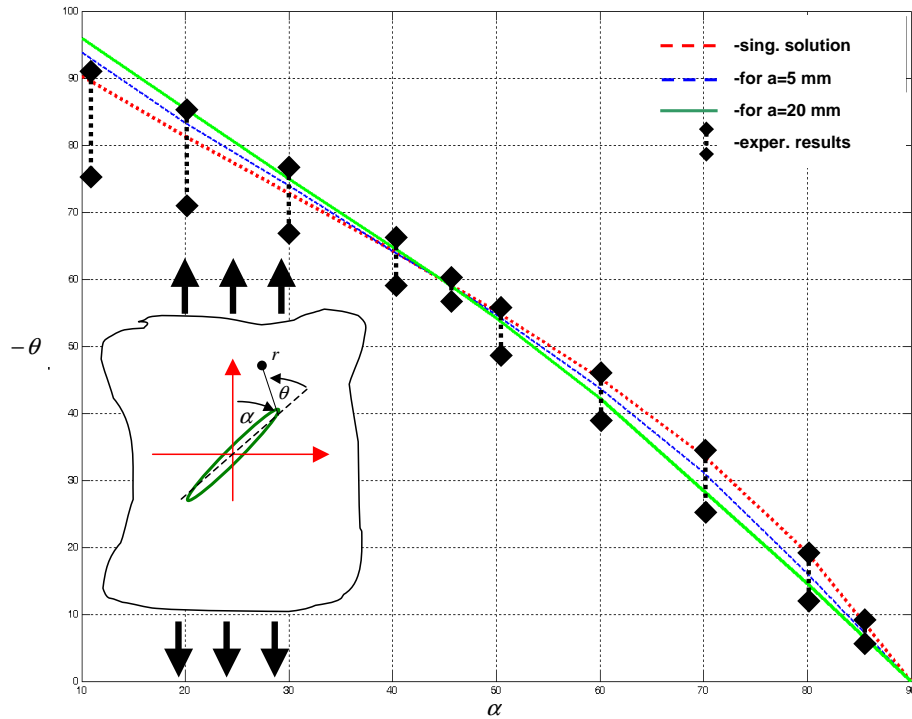
Wielkość $T_D(r, \theta)$ jest bezpośrednio zależna od r , por. (3.68), ponieważ r wyznacza miejsce, gdzie T_D jest liczone. W przypadku rozwiązania osobliwego relacja pomiędzy $\frac{\sigma}{\sigma_c}$ jest nieistotna dla kierunku pękania, gdyż stosunek składowych tensora naprężenia w przypadku różnych poziomów obciążeń pozostaje taki sam, por. (3.70) dla $T = 0$, czyli kąt propagacji dla ustalonej konfiguracji szczeliny jest stały.



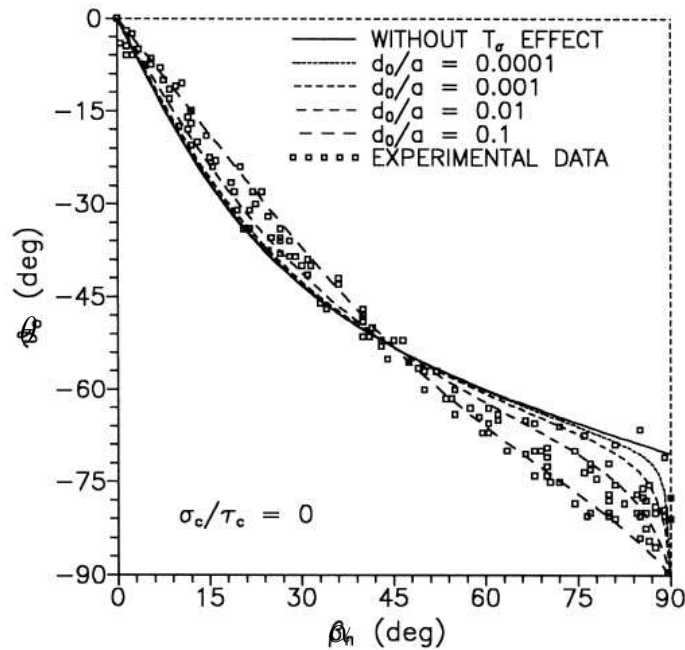
RYSUNEK 3.19. Kąt propagacji θ wg MK–kryterium w zależności od stosunku obciążenia do wielkości maksymalnego naprężenia rozciągającego ($\frac{\sigma}{\sigma_c}$) dla różnego pochylenia szczeliny (α).

Sytuacja jest odmienna podczas rozwiązania z uwzględnieniem T . W tym przypadku zmiana relacji $\frac{\sigma}{\sigma_c}$ powoduje zmianę kąta propagacji szczeliny. Jest to wynikiem wpływu składowej T , która występuje w wyrażeniu na σ_{xx} .

Bardzo ciekawą sytuację przedstawia Rys. 3.20. Zaprezentowano na nim wyniki otrzymane z wykorzystaniem MK–kryterium, dla różnych długości szczeliny, $a = 5, 20$ mm, tak, aby spełniony był warunek krytyczny propagacji szczeliny (3.77) dla PMMA (polymethylmethacrylate). Wyniki te porównano z rezultatami eksperymentów dla tego materiału [132] i [166]. Jak widać długość szczeliny ma wpływ na wartość kąta propagacji. Oczywiście jest to wpływ pośredni, z powodu determinowania wielkości obciążenia przez długość szczeliny, tak aby osiągnąć wartość krytyczną WIN (K_{cr}). Co ciekawe, w pracy [132] przedstawiono wpływ różnych długości szczelin, zaznaczając, że nie jest on znaczący, co nie wydaje się już takie oczywiste po dokładnej analizie wyników. Niestety, rozrzut wyników uzyskiwanych eksperymentalnie jest z reguły duży, co może utrudnić analizę wpływ takiego czynnika jakim jest długość szczeliny, czy też wielkość obciążenia. Dodatkowo autorzy [132] rozpatrują wpływ stosunku wartości krytycznej promienia r_{cr} do długości szczeliny a , ustalając ten iloraz jako stały. Niestety, nie podają fizycznej interpretacji takiego związku. Inną ciekawą propozycją uwzględnienia wpływu składowej T na kierunek pęknięcia jest praca Seweryna [175]. W pracy tej dokonano przeglądu kilku najważniejszych kryteriów pęknięcia z uwzględnieniem efektu " T –stress", również wykorzystując opisywane już poprzednio NNKP–kryterium (nazywane również R –kryterium), w którym to wykorzystuje się długość strefy zniszczenia, d_0 , jako parametru materiałowego. Powiązано tam kierunek pęknięcia ze stosunkiem d_0 i długości szczeliny, przedstawiając wpływ tego ilorazu na kierunek pęknięcia, por. Rys. 3.21. Zauważono, że w przypadku $d_0 \rightarrow 0$ efekt wpływu składowej T zanika. Jednakże, podobnie jak w [132], długość strefy zniszczenia była wcześniej założona, niezależna od konfiguracji szczeliny (kąta pochylenia szczeliny).



RYSUNEK 3.20. Porównanie kąta propagacji θ wg MK-kryterium dla różnego pochylenia szczeliny (α) w PMMA z wynikami eksperymentów na podstawie [132] i [166] dla dwóch długości szczeliny.



RYSUNEK 3.21. Porównanie kąta propagacji θ wg NNKP-kryterium dla różnego pochylenia szczeliny (α) w PMMA [175] z wynikami eksperymentów na podstawie [133].

W przypadku MK-kryterium długość strefy zniszczenia nie jest założona, zmienia się w sposób ciągły i zależy od konfiguracji szczeliny oraz obciążenia. Zwrócić również należy uwagę na porównanie wyników eksperymentu zaprezentowanego na Rys. 3.21, z

wynikami uzyskanymi na podstawie wprowadzonego kryterium, Rys. 3.19, dla różnych wartości $\frac{\sigma}{\sigma_c}$, które wykazuje duże podobieństwo.

Powróćmy teraz do wyników przedstawionych w Tabeli 3.2. W przypadku rozwiązania osobliwego wyniki otrzymane na podstawie **MK**–kryterium są całkowicie zgodne z wynikami, które uzyskuje się na podstawie **T**–kryterium, przy założeniu że $\sigma_c = \sigma_{ys}$. Natomiast w przypadku $\frac{\sigma}{\sigma_c} = 1$ wyniki zaczynają być zbieżne z **Det**–kryterium (patrz podrozdział 3.2.7). Jedną z przyczyn takich rezultatów jest konstrukcja wyrażeń na T_D , por. (3.65) lub (3.63), które można przedstawić w następującej postaci:

$$T_D = \frac{1 + \nu}{3E} \left((T_V^{\text{const}} \frac{6E}{1 - 2\nu})^2 - 3(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2) \right). \quad (3.79)$$

Proponowane kryterium związane jest z poszukiwaniem wartości minimalnej T_D przy $T_V = \text{const}$. Dlatego łatwo można zauważyć, że poszukiwanie minimalnej wartości T_D jest tożsame z poszukiwaniem maksymalnej wartości $\text{Det}(\sigma_{ij})$, podobnie jak w **Det**–kryterium.

3.5.2. Kierunek wzrostu szczeliny. Obciążenie cykliczne.

W tym momencie należy ponownie podkreślić wprowadzenie do rozwiązania wielkości T opisującej w bezpośredni sposób wartość przyłożonego obciążenia. Do tej pory większość opisywanych w niniejszej pracy kryteriów była właściwie niezależna od poziomu naprężenia, a w zasadzie od stosunku aktualnego obciążenia do wielkości charakteryzujących dany materiał. Dla obciążenia monotonicznego w przypadku wprowadzonego kryterium jest to maksymalne naprężenie rozciągające σ_c . W przypadku rozwiązania osobliwego, wartości te nie mają wpływu na kąt propagacji. Mają one jednak wpływ na wielkość strefy plastycznej czy też wielkość wprowadzonej strefy dekohezji. Uwzględnienie T pozwala uwzględnić relację pomiędzy przyłożonym obciążeniem, a wielkością charakteryzującą odporność materiału. Szczególnie zauważalne jest to w przypadku obciążenia cyklicznego. Stosunek między tymi wartościami jest kluczowy. Po pierwsze, determinuje on wielkość obszaru dekohezji, a więc ma olbrzymi wpływ na obliczane na jego krańcu wielkości, które mogą być wykorzystane do określania przyrostu szczeliny, oraz ma pewien wpływ na kąt propagacji szczeliny. Dlatego też, w przypadku wykorzystania **MK**–kryterium dla obciążenia cyklicznego pozostaje zaproponowanie wielkości, z którą powiązane będą wartości krytyczne. Wydaje się, że należy użyć innej wartości krytycznej niż σ_c , związanej z obciążeniem monotonicznym. Proponuje się za taką wartość przyjąć granicę zmęczenia Z_G , która w zależności od materiału i rodzaju obciążenia cyklicznego stanowi kilkadziesiąt procent σ_{ys} (np. dla stopów tytanu, zwykle 50% σ_{ys}). Dla obciążenia cyklicznego wpływ poziomu naprężenia na kierunek propagacji szczeliny wydaje się jeszcze bardziej interesujący, bowiem powoduje pewną rozbieżność w wynikach uzyskiwanych dla kąta wzrostu szczeliny na pojedynczym cyklu. Ponieważ oczywistym jest, że pojedynczy cykl obciążenia przebiega od jego wartości minimalnej do maksymalnej, więc rezultatem użycia **MK**–kryterium byłaby ciągła zmiana wartości kąta wzrostu szczeliny zmęczeniowej podczas jednego cyklu. Takiego zachowania szczeliny nie obserwuje się i dlatego należy przyjąć pewien poziom naprężenia, który będzie odpowiedzialny za determinowanie kierunku wzrostu. Problem ten może mieć kilka rozwiązań, np.:

- szczelina rośnie w kierunku określonym przez wartości ekstremalne, tj. maksymalną wartość, σ_{\max} lub wartość minimalną obciążenia na cyklu, σ_{\min} ,

- szczelina rośnie w kierunku określonym przez pewną wartość pośrednią obciążenia na cyklu, σ_{osz} .

W pierwszym przypadku mogłoby się okazać, iż szczelina niefizycznie oczekuje, aż obciążenie osiągnie wartość maksymalną i dopiero wówczas propaguje. Natomiast wzrost szczeliny przy wartości minimalnej cyklu nie ma miejsca. W drugim przypadku należałoby wybrać wielkość przy której określany byłby kąt wzrostu, która stanowiłaby pewną wartość charakteryzującą np. materiał. Sytuację taką przynajmniej w pewnej mierze można byłoby wytłumaczyć zjawiskiem domykania szczeliny, a wówczas za kąt propagacji szczeliny odpowiedzialne byłoby σ_{op} , lub σ_{min} jeśli $\sigma_{min} > \sigma_{op}$. W niniejszej pracy wartość σ_{op} będzie uznana za naprężenie decydujące o kierunku propagacji szczeliny.

Dla skorygowania tak sformułowanego kryterium na Rys. 3.22.a.b porównano rezultaty eksperymentu z opisywanej już poprzednio pracy [127], por. podrozdział 3.2.12, gdzie zaprezentowano porównanie kątów propagacji w przypadku obciążenia cyklicznego i monotonicznego. W przypadku obciążenia cyklicznego **MK**-kryterium daje zadowalające rezultaty, a dla obciążenia monotonicznego wyniki są raczej negatywne. Jak pokazano to w Tabeli 3.1, żadne z porównywanych w pracy [127] kryteriów nie daje zadowalających rezultatów. Również, żadne nie rozróżnia rodzaju obciążenia. W przypadku **MK**-kryterium, takie rozróżnienie, por. Rys. 3.22.c.d, choć niewielkie, występuje z powodu różnego poziomu obciążenia (wpływ składowej T).

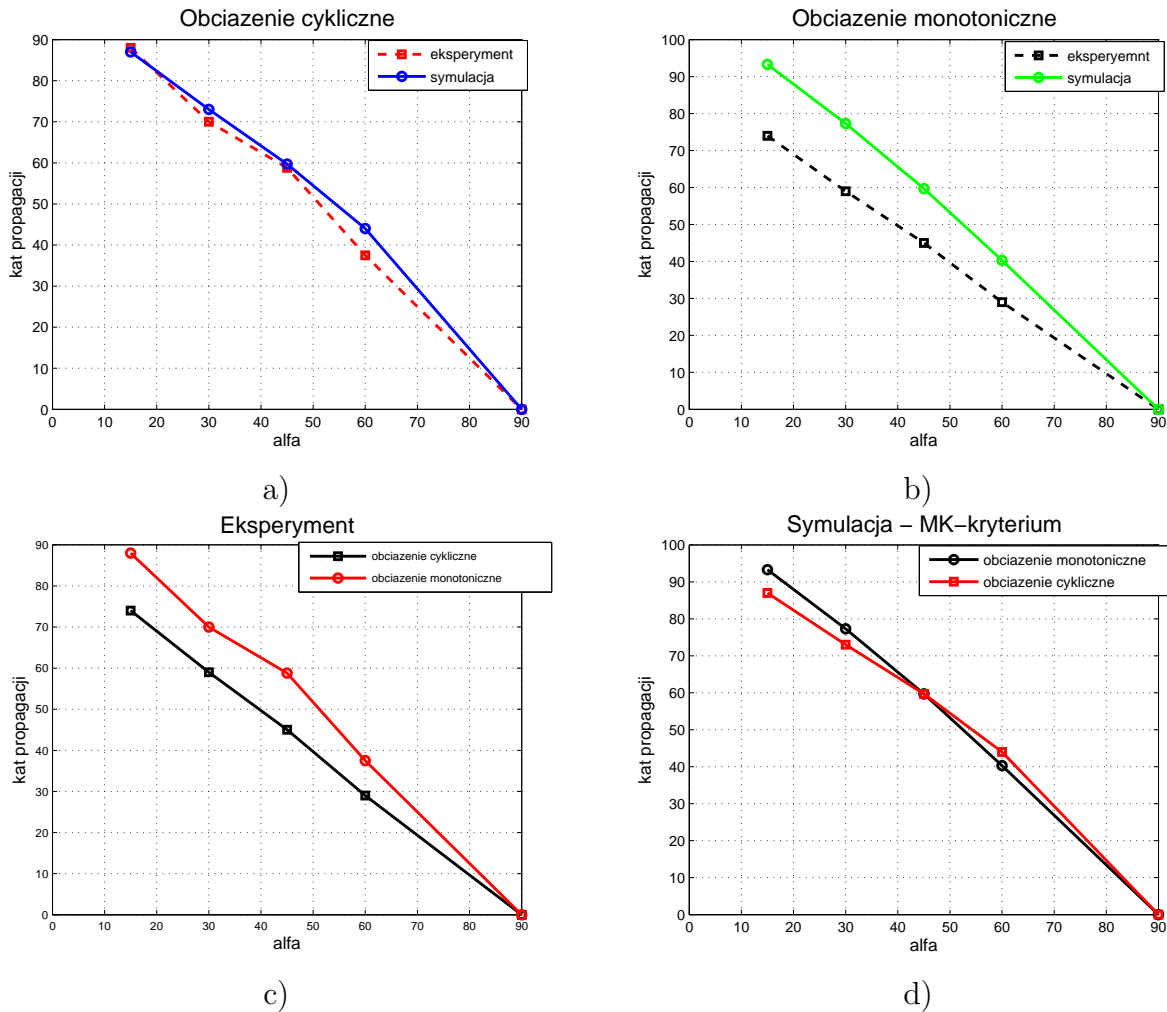
Pomimo, że rezultaty wprowadzonego kryterium na podstawie wyników zaprezentowanych w [127] dla obciążenia monotonicznego wydają się być niezadowalające, to dość istotnym wydaje się spostrzeżenie, że grubość próbki użytej w tymże eksperymencie wynosiła zaledwie 1.27 mm. Co ciekawe, sami autorzy piszą, że powodem tak szczególnie dużej rozbieżności pomiędzy wynikami eksperymentów, a wynikami uzyskanymi na podstawie różnych kryteriów może być zbyt duża strefa plastyczna, w stosunku do grubości płytki. Potwierdzeniem tego może być odwołanie się do licznych eksperymentów dotyczących jedynie obciążenia monotonicznego, gdzie jak pokazano to już poprzednio na Rys. 3.20, wyniki są całkiem zadowalające. Należy również przypomnieć, że jeśli korzystamy z wprowadzonego w niniejszej pracy kryterium ważna staje się relacja pomiędzy grubością próbki, a strefą dekohezji, która w wielu przypadkach jest znacznie większa niż strefa plastyczna.

3.5.3. Prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej.

Propozycja, która będzie zaprezentowana, opiera się na znanym fakcie, że wzrost szczeliny zmęczeniowej powodowany jest przez cykliczne deformacje plastyczne. Deformacje te mogą być reprezentowane przez postaciową część gęstości energii odkształcenia, T_D , liczoną po konturze wyznaczonym przez strefę dekohezji. Proponuje się użycie iloczynu wielkości T_D oraz r liczonych na kierunku propagacji. A więc:

$$\frac{da}{dN} = C[\Delta(T_D \cdot r(T_V^{const.}))]^n, \quad (3.80)$$

gdzie, C, n , to stałe zmęczeniowe uzyskiwane na podstawie testu jednoosiowego, dla $\alpha = 90^\circ$. W przypadku stopu Ti-6Al-4V ustalono, że są to następujące wartości: $C = 3.5$, $n = 1.712$. W tabelach 3.3, 3.4 oraz Rys. 3.23 i 3.24 przedstawiono wyniki bardzo dokładnego porównania eksperymentu [99] z symulacją. W eksperymencie użyto stopu tytanu Ti-6Al-4V, dla $R = 0.1$, dwóch próbek pod różnym obciążeniem, różnej



RYSUNEK 3.22. Kąt propagacji szczeliny pod wpływem obciążenia cyklicznego i monotonicznego, dla różnych wielkości pochylenia szczeliny α . Materiał: Al 2024-T3, $E = 70\text{GPa}$, $\nu=0.33$, $\sigma_{YS}=370\text{MPa}$, $\sigma_c=440\text{MPa}$, $Z_G = 150\text{MPa}$, $R = 0.2$, $K_{TH} \simeq 2.2$, $K_c = 25\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$. Płaski stan odkształcenia, rozwiązanie z uwzględnieniem składowej T . Porównanie rezultatów wg MK-kryterium i danymi eksperymentalnymi z pracy [127].

długości szczeliny i różnym pochyleniu do osi obciążenia (szczegóły na rysunkach). Autor eksperymentu przedstawił dokładne dane dotyczące tak kąta propagacji, jak i prędkości wzrostu szczeliny. W rezultacie wydaje się to być doskonały materiał do weryfikacji jakiegokolwiek kryterium opisującego wzrost szczeliny zmęczeniowy. W tabelach zamieszczono średnie prędkości propagacji uzyskane z symulacji według (3.80). Jak można zauważyć wyniki wydają się być bardzo zbliżone, pomimo że w przypadku szczeliny pochylonej dla $\alpha = 43^\circ$ w jej początkowej fazie rozwoju uwiadcza się dość duża różnica pomiędzy obliczeniami, a eksperymentem. Jednakże wydaje się, że na tę rozbieżność może mieć wpływ pewna niejednorodność materiału w eksperymencie. Potwierdzić to może duża, początkowa rozbieżność pomiędzy przyrostem szczeliny w jej lewym i prawym wierzchołkiem.

Dodatkowo porównano prędkość wzrostu dla materiału jednorodnego, dla kilku kątów pochylenia szczeliny, por. Rys. 3.25 oraz Tabela 3.5). Uzyskane wyniki są zgodne z eksperymentem, cechują się zmniejszaniem się prędkości wraz z wartością kąta pochylenia szczeliny, α .

TABELA 3.3. Porównanie wyników modelowania z wynikami eksperymentu dla $\alpha = 43^\circ$.

Nr	LEWY WIERZCH.			OBLICZENIA			PRAWY WIERZCH.		
	da [10 ⁻³ m]	dN	$\frac{da}{dN}$ [10 ⁻⁷ m]	da [10 ⁻³ m]	dN	$\frac{da}{dN}$ [10 ⁻⁷ m]	da [10 ⁻³ m]	dN	$\frac{da}{dN}$ [10 ⁻⁷ m]
1	0.30	4660	0.64	0.86	2954	2.91	0.86	4660	1.85
2	0.41	1440	2.84	0.43	1377	3.12	0.45	1440	3.12
3	0.81	2150	3.76	0.79	2192	3.60	0.77	2150	3.58
4	0.67	1750	3.82	0.66	1583	4.17	0.65	1750	3.71
5	0.81	1490	5.43	0.835	1698	4.91	0.86	1490	5.77
6	0.37	590	6.27	0.43	765	5.62	0.49	590	8.30
7	0.50	920	5.43	0.43	699	6.15	0.36	920	3.91
8	1.26	1660	7.59	1.255	1720	7.29	1.25	1660	7.53
9	0.55	650	8.46	0.53	617	8.58	0.51	650	7.84
10	0.65	650	10	0.68	706	9.54	0.71	650	10.92
		15960			14319			15960	

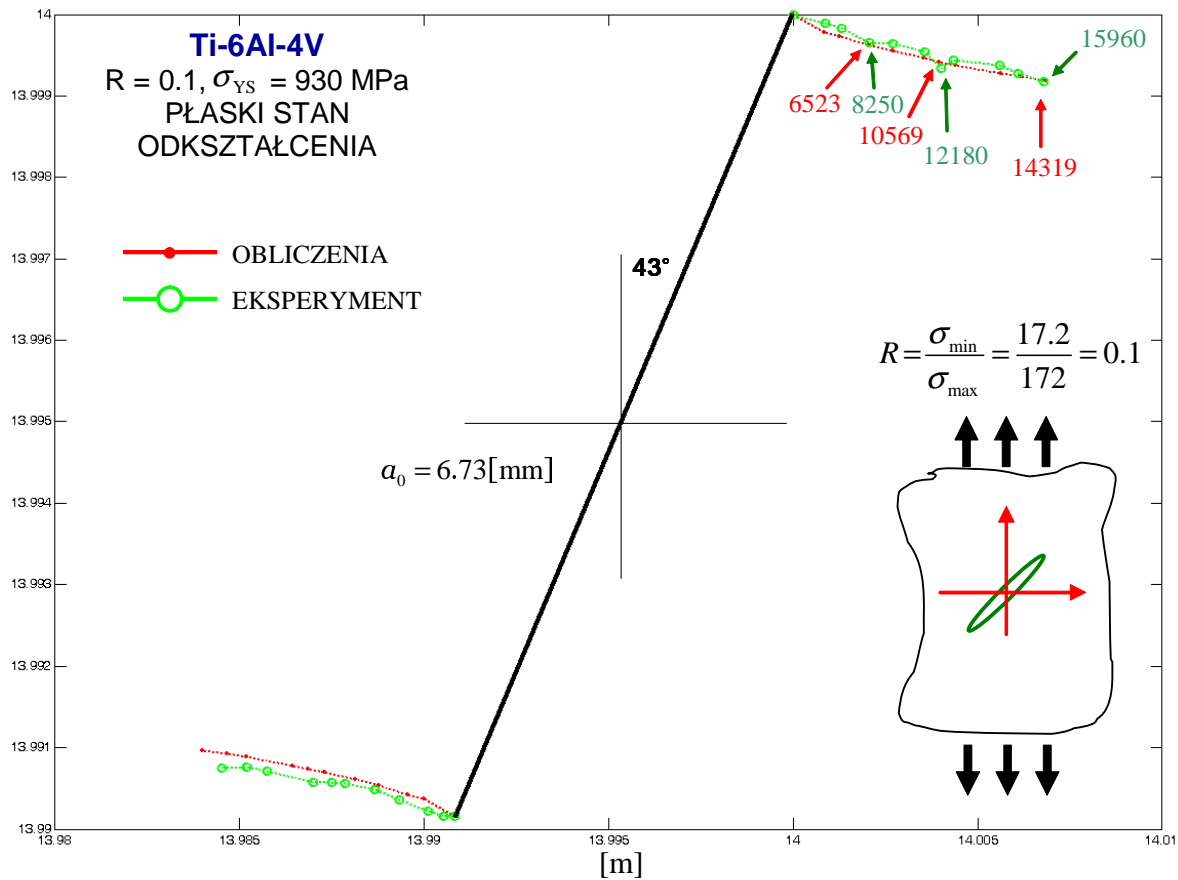
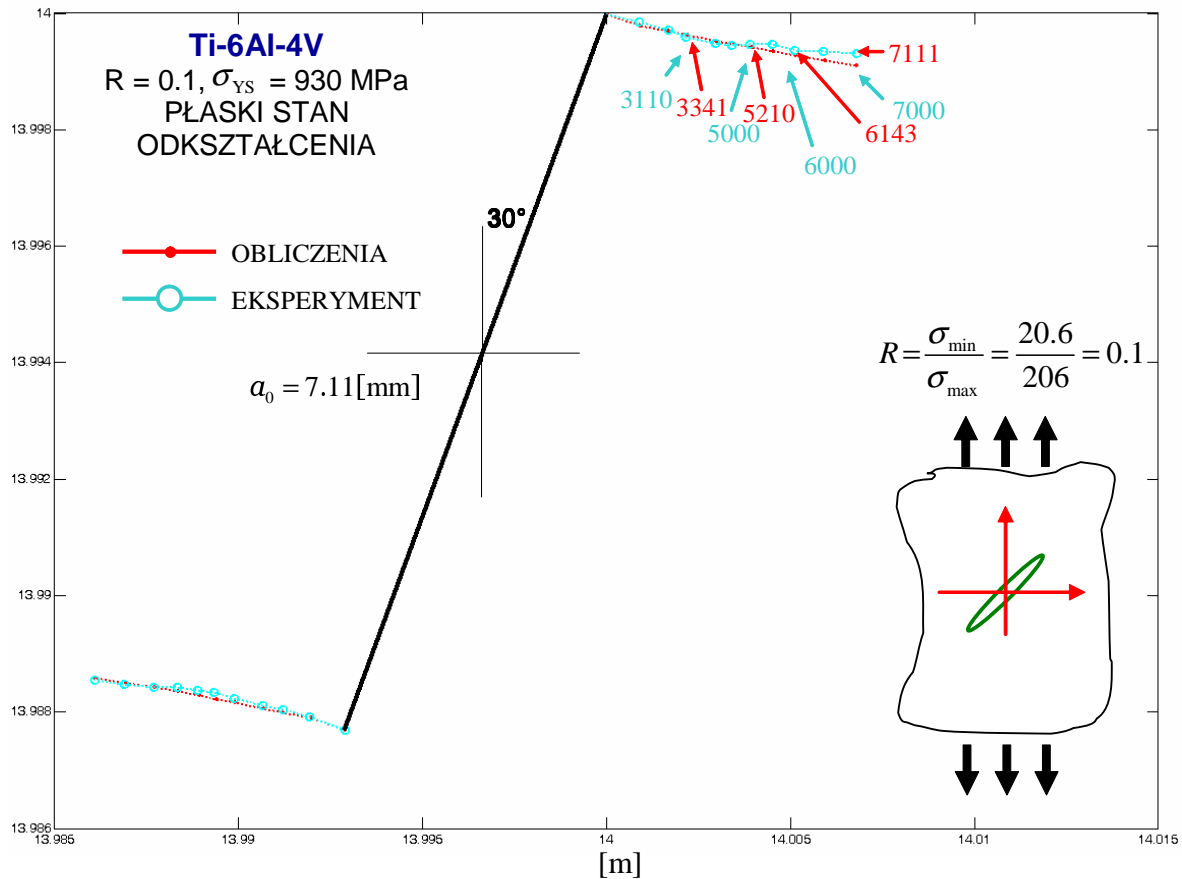
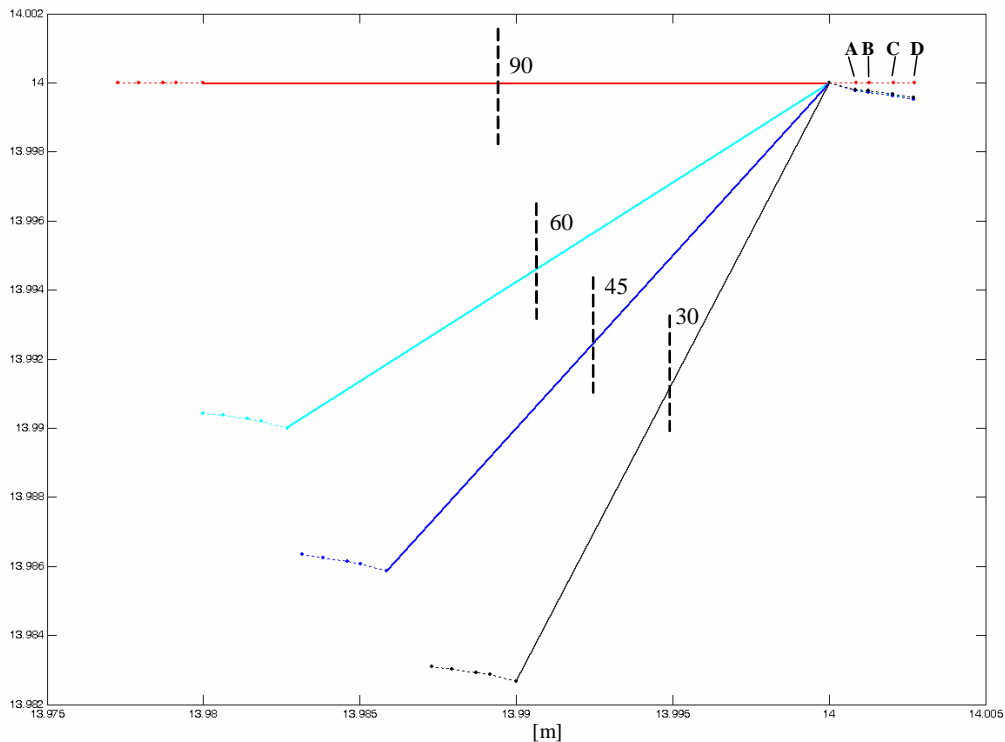
RYSUNEK 3.23. Porównanie ścieżki propagacji szczeliny dla $\alpha = 43^\circ$ z wynikami eksperymentów [99].

TABELA 3.4. Porównanie wyników modelowania z wynikami eksperymentu dla $\alpha = 30^\circ$.

Nr	LEWY WIERZCH.			OBLICZENIA			PRAWY WIERZCH.		
	da [10 ⁻³ m]	dN	$\frac{da}{dN}$ [10 ⁻⁷ m]	da [10 ⁻³ m]	dN	$\frac{da}{dN}$ [10 ⁻⁷ m]	da [10 ⁻³ m]	dN	$\frac{da}{dN}$ [10 ⁻⁷ m]
1	0.98	1390	7.05	0.945	1396	6.77	0.91	1390	6.54
2	0.73	1040	7.01	0.76	1215	6.25	0.79	1040	7.59
3	0.58	680	8.52	0.54	729	7.40	0.50	680	7.35
4	0.76	890	8.53	0.785	920	8.53	0.81	890	9.1
5	0.56	550	10.1	0.5	511	9.78	0.44	550	8.0
6	0.45	450	10	0.475	437	10.86	0.50	450	11.1
7	0.55	500	11	0.575	474	12.14	0.60	500	12
8	0.65	500	13	0.63	459	13.71	0.61	500	12.2
9	0.80	500	16	0.8	507	15.78	0.80	500	16
10	0.80	500	16	0.85	462	18.38	0.90	500	18
		7000			7111			7000	

RYSUNEK 3.24. Porównanie ścieżki propagacji szczeliny dla $\alpha = 30^\circ$ z wynikami eksperymentów [99].



RYSUNEK 3.25. Porównanie początkowej ścieżki wzrostu pochylonej szczeliny dla $\alpha = 30, 45, 60, 90^\circ$. Materiał: Ti-6Al-4V, $R = \frac{20}{200}$ (MPa), $\sigma_{ZG} = 450$ (MPa), $a = 10$ mm. Ilość cykli w poszczególnych punktach zamieszczono w Tabeli 3.5.

TABELA 3.5. Ilość cykli N , potrzebnych do osiągnięcia kolejno punktów A,B,C i D dla różnego pochylenia szczeliny (α), zgodnie z Rys. 3.25.

α [°]	N			
	A	B	C	D
90	350	513	787	995
60	500	815	1222	1532
45	688	994	1534	1962
30	836	1319	2131	2757

3.6. Szczelina zmęczeniowa w bimateryale

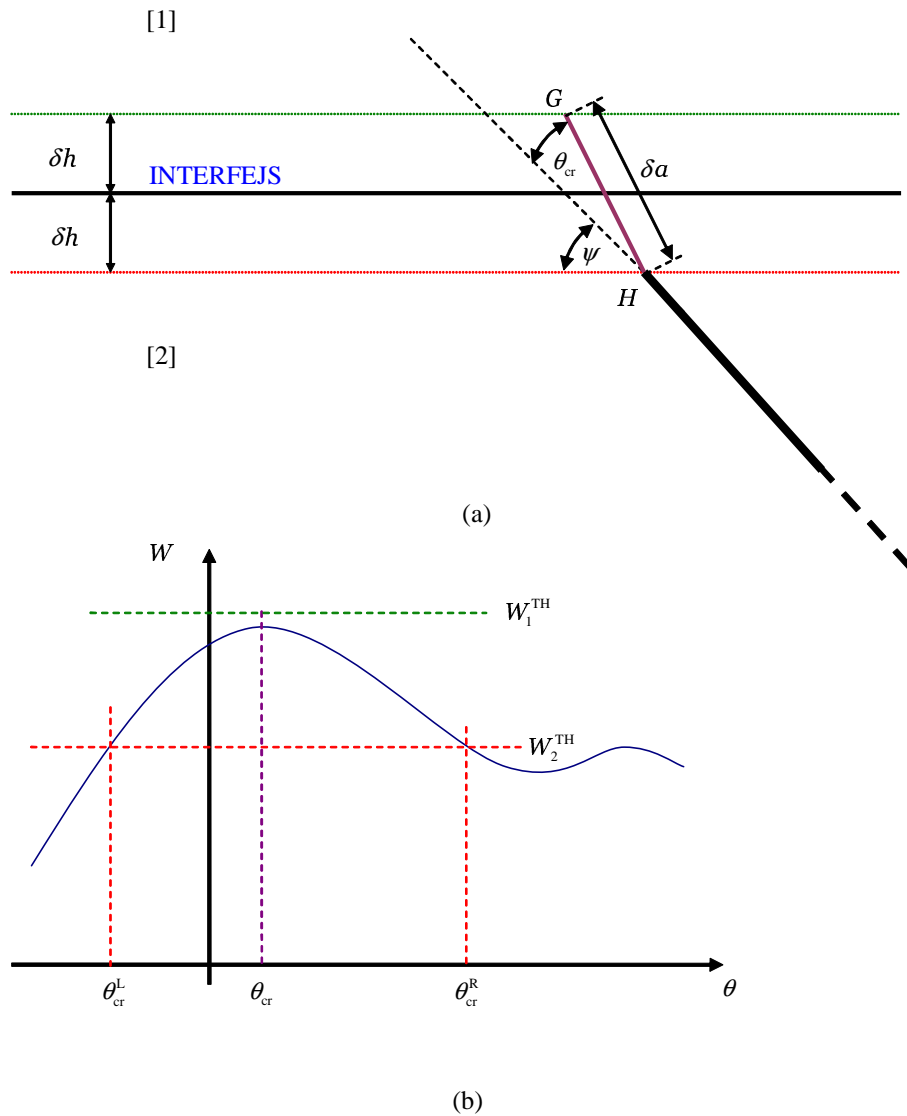
3.6.1. Proponowany model interfejsu

Poprzednio w Rozdziale 2.8, dokonano przeglądu istniejących modeli interfejsu. Jak można zauważyć opisane tam modele wskazują na poważny problem jakim jest próba uwzględnienia interfejsu w materiałach kompozytowych. Należy jednak zauważyć, że jeśli problem dotyczy szczeliny zmęczeniowej, a więc wielu tysięcy cykli, to jest on związany z reguły tylko z jednym cyklem obciążenia szczeliny (pomijając wzrost wzdłuż interfejsu). Dodatkowo jeśli rozważamy materiał i szczelinę, których wymiary są znacznie większe niż szerokość interfejsu, to wpływ samego interfejsu, a więc i przyjętego modelu jest znikomym. Oczywiście zaznaczyć należy, że mowa jest tu tylko o wpływie samego interfejsu, a nie materiałów tworzących kompozyt. Jeśli wybierzemy model interfejsu w postaci fa-

zy ciągłej pomiędzy materiałami tworzącymi bimateriał, można zastosować dwie metody rozwiązania. Pierwszą, wykorzystującą właściwą temu obszarowi funkcję Greena [111], przy jednoczesnym założeniu szerokości interfejsu i funkcji opisującej zmianę modułów sprężystych. Drugą metodą jest użycie podanego już rozwiązania dla dyslokacji w jednym z materiałów, tworzących np. bimateriał. W następnej części podrozdziału zostanie zaproponowany model, który nie będzie ścisłym odwzorowaniem problemu, ale wystarczającym dla analizy zmęczeniowego wzrostu szczeliny. Głównym problemem jest tu uzyskanie w możliwie efektywny sposób wartości kąta propagacji i przyrostu szczeliny, przy uwzględnieniu stałych materiałowych.

Zakłada się więc obecność interfejsu w postaci fazy przejściowej o szerokości pomijalnie małej $2\delta h$ w stosunku do wymiarów elementu. Wyniki dla szczeliny usytuowanej w środku takiego interfejsu będą wówczas bardzo zbliżone do sytuacji szczeliny umieszczonej w pobliżu interfejsu idealnego, w odległości δh . Problemem pozostaje określenie warunków i kąta wzrostu szczeliny z wykorzystaniem dostępnych kryteriów. Założmy więc szczelinę propagującą się w kierunku interfejsu, przy czym jeden z wierzchołków znajduje się w pewnej odległości δh od interfejsu. Powstaje pytanie, jak dalej będzie się propagowała szczelina zmęczeniowa. Dotychczas stosowane kryterium będzie wskazywało pewną wartość kąta dalszej propagacji θ_{cr} , ale czy wartość krytyczna (progowa) symbolicznie nazwana np. ΔW (może to być np. ΔK , ΔS , Δr itp.) determinująca możliwość dalszej propagacji na tym kierunku będzie wystarczająco duża, aby szczelina pokonała jej wartość progową (W_g^{TH} , $g = 1, 2$)? A jeśli nie, to co będzie się wówczas działo ze szczeliną?

Sytuacja będzie do pewnego momentu oczywista, gdy rozwijająca się szczelina będzie w stanie przebić interfejs, a więc można założyć, że będzie to jednoznaczne z warunkiem $W^G > W_1^{TH}$, por. Rys. 3.26. Problemem z tak definiowanym interfejsem i proponowanym rozwiązaniem jest jednak miejsce obliczenia wartości W . W proponowanej metodzie będzie to druga strona interfejsu w odległości δh , a więc rozwiązanie wymaga nierzezywistego przedłużenia szczeliny o wartość δa pod kątem θ_{cr} obliczonym w materiale jeszcze przed przejściem przez interfejs. Po sprawdzeniu możliwości propagacji w drugim materiale, szczelina będzie albo propagowała w tym materiale, albo należy powrócić do kierunku przed przebicciem, uznając kierunek θ_{cr} za niewłaściwy. W tym drugim przypadku sytuacja poważnie się komplikuje, ponieważ $W^G < W_1^{TH}$ i szczelina nie może przebić się przez interfejs, por. Rys. 3.26b, czyli musi pozostać w materiale macierzystym. Nie istnieje efektywne kryterium określające kierunek wzrostu dla takiej szczeliny z powodu wykorzystywania przez kryteria wartości ekstremalnych, które określają w zasadzie tylko jedną możliwość kąta wzrostu. Przez wykorzystanie zaproponowanego modelu interfejsu nie ma możliwości, aby szczelina rozwijała się pod kątem θ_{cr} dalej w materiale macierzystym, ponieważ osiągnęła wartość δh . Rozwiązanie, które proponuje się w tej pracy wykorzystuje wartości progowe W^{TH} i dzięki czemu uzyskuje się dwa dodatkowe kąty wynikające z tejże wartości θ_{CR}^L i θ_{CR}^R pod warunkiem, że $W^H(\theta_{cr}) > W_2^{TH}$. Wówczas zakłada się, że szczelina będzie propagowała pod kątem gdzie $W^H > W_2^{TH}$ liczone w przedziale $(\theta_{CR}^L, \theta_{CR})$ oraz $(\theta_{CR}, \theta_{CR}^R)$, por. Rys. 3.26b, gdzie W^H uzyskuje wartość największą i będzie to kąt, który umożliwi opuszczenie przez szczelinę obszaru δh lub ewentualnie pozwoli na ślizganie się w nim (co w większości przypadków będzie zachodziło). Jeśli żadne powyższe warunki nie będą spełnione, rozwój szczeliny na tym wierzchołku zostanie zatrzymany.



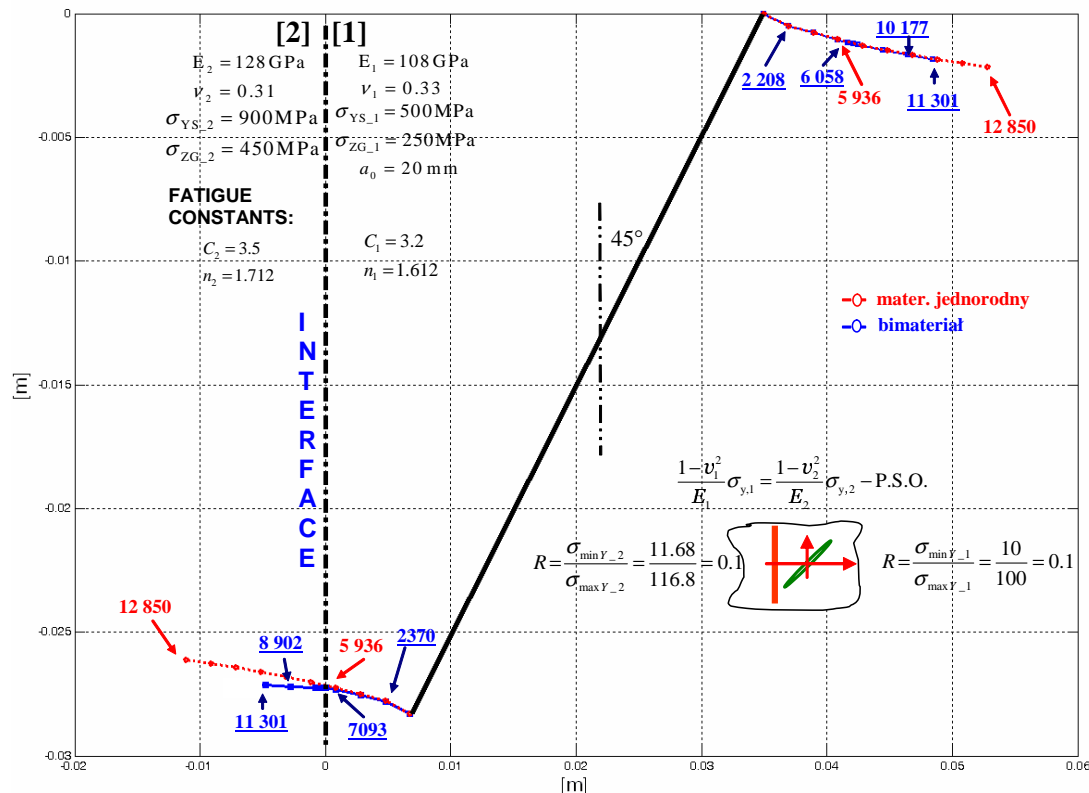
RYСУNEK 3.26. Proponowany model interfejsu i zachowanie szczeliny w jego okolicach.

3.6.2. Rezultaty symulacji numerycznej

W tym podrozdziale przedstawiono wyniki symulacji wzrostu szczeliny pod wpływem obciążenia cyklicznego, umieszczonej w bimateriale z wykorzystaniem proponowanej pracy metody, kryterium **MK** oraz prędkości wzrostu opartej na zakresie zmian iloczynu $\Delta(T_D \cdot r)$. W przypadku przejścia rozwijającej się szczeliny przez interfejs miejsce to traktowane jest ze szczególną uwagą. Należy dodać, iż tak samo jak w przypadku obliczeń WIN dla początkowej szczeliny umieszczonej w obu materiałach (Rozdział 2.11) wprowadzone przedłużenie szczeliny o δa jest również podzielone na dwie części.

Rysunki 3.27 oraz 3.28 przedstawiają sytuację szczeliny umieszczonej w jednym z materiałów, pod kątem 45° do osi obciążenia. Rysunki przedstawiają dwie konfiguracje materiałów i szczeliny. W obu przypadkach szczeliny rozwijają się po obu stronach interfejsu. Można zauważyć, że w przypadku umiejscowienia początkowej szczeliny w materiale o relatywnie mniejszych stałych sprężystych, por. Rys. 3.27, szczelina znacznie zmniejsza prędkość wzrostu w porównaniu do szczeliny umieszczonej w materiale jedno-

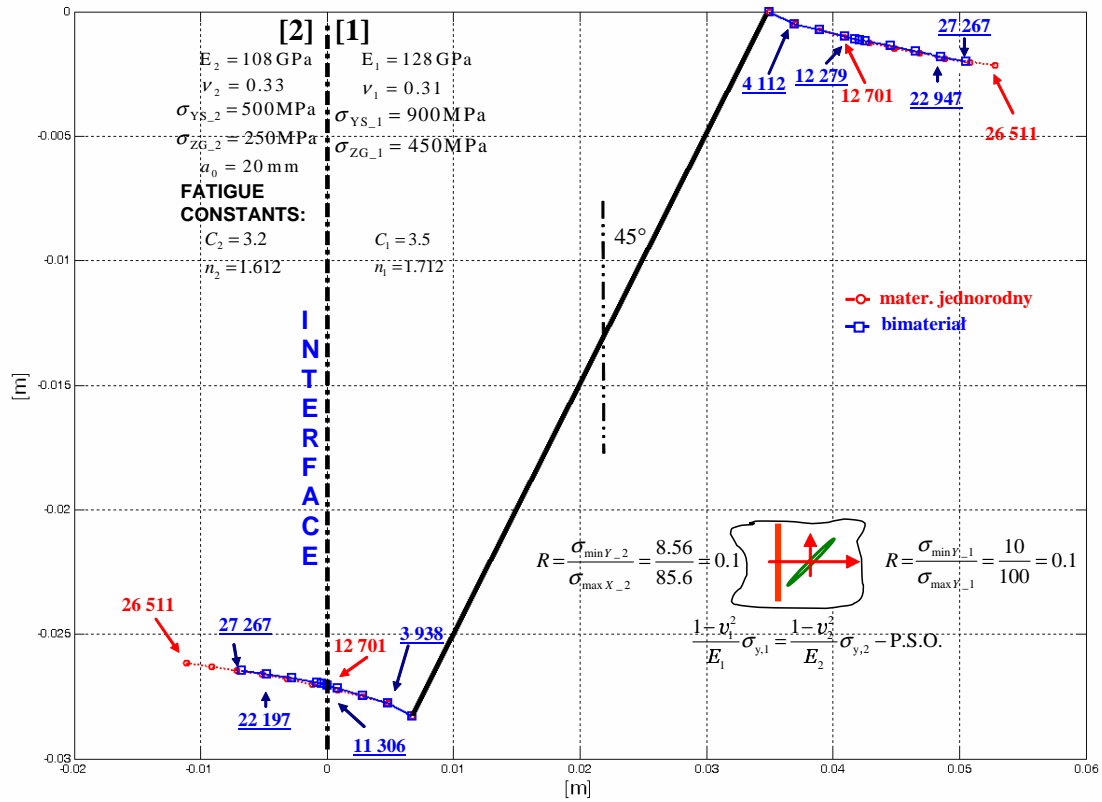
rodnym. Szczególnie widoczne to jest w przypadku zbliżania się szczeliny do interfejsu, kiedy oprócz obniżenia się prędkości następuje odchylenie ścieżki szczeliny od jej nominalnego, jednorodnego stanu. Zjawiska te zależne są od stosunku stałych sprężystych materiałów tworzących bimateryał. Następnie po przejściu szczeliny przez interfejs następuje jeszcze większe odchylenie kierunku jej propagacji w porównaniu do jednorodnego materiału. W przypadku początkowej szczeliny umieszczonej w materiale o relatywnie większych stałych sprężystych następuje wzrost prędkości, ale przy nieznacznej zmianie kierunku pęknięcia. Rysunek 3.29 przedstawia zbliżoną sytuację jak poprzednio. Tu jed-



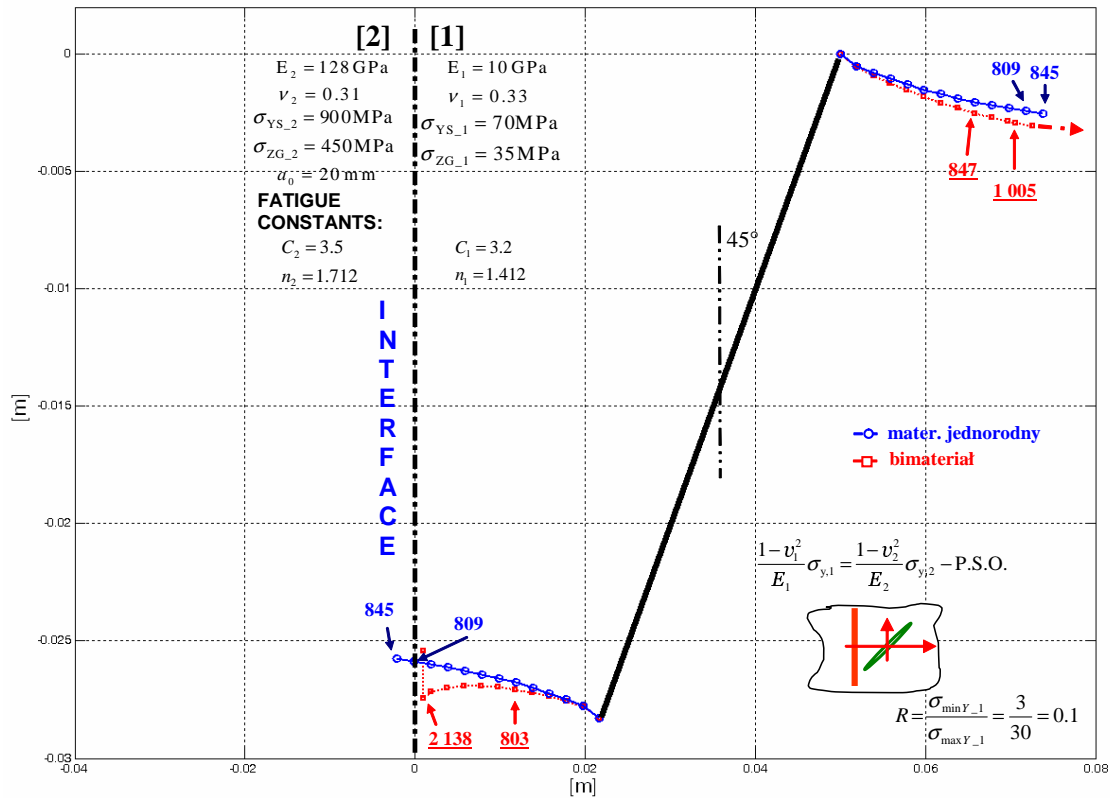
RYSUNEK 3.27. Wzrost szczeliny zmęczeniowej w bimateryale na podstawie MK – kryterium.

nak rozwijająca się szczelina nie może przebić interfejsu. Po dotarciu do niego propaguje się wzdłuż połączenia materiałów nie zmieniając już kierunku. Jednocześnie gwałtownie zmniejszając prędkość jej wzrostu.

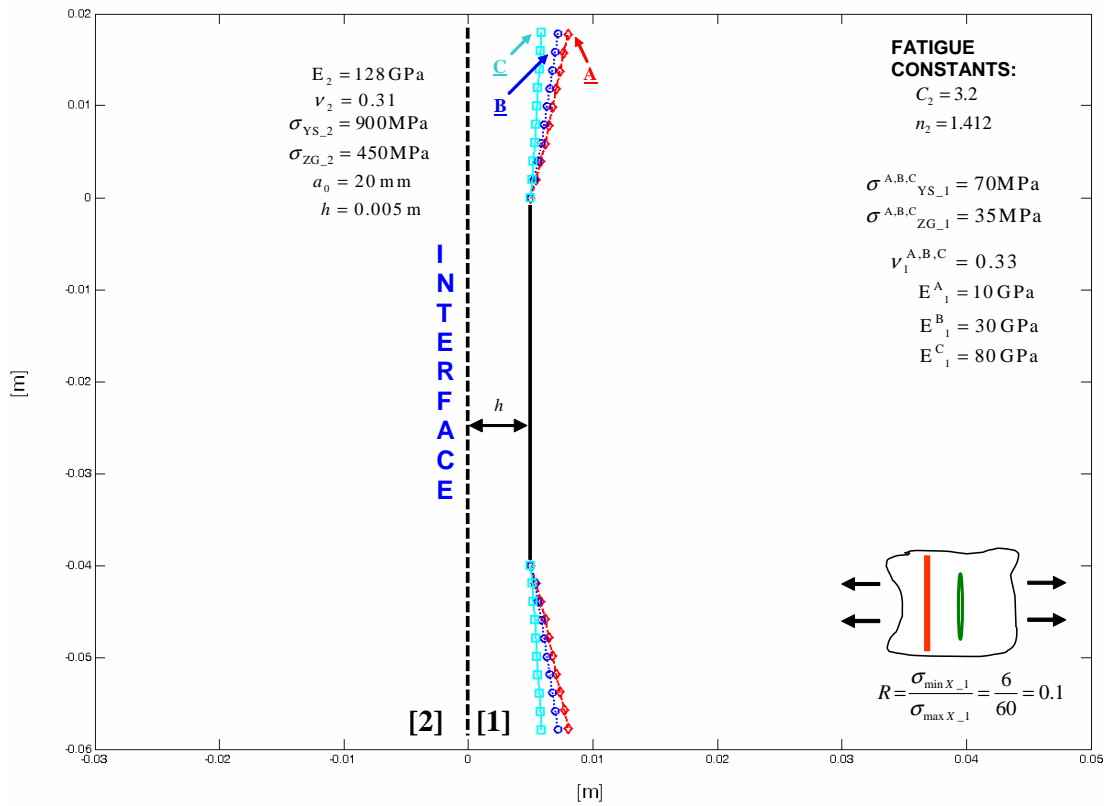
Na Rys. 3.30 przedstawiono wpływ zmiany modułu E na kierunek rozwoju szczeliny umieszczonej równolegle do interfejsu, w odległości h . W przypadku dużej różnicy pomiędzy stałymi, następuje większe odchylenie od początkowej płaszczyzny lokalizacji szczeliny. Rysunek 3.31 przedstawia wpływ odległości równoległej zlokalizowanej szczeliny od interfejsu na kierunek i prędkość wzrostu szczeliny. Co ciekawe prędkość wzrostu szczeliny rośnie wraz ze zbliżaniem się do interfejsu. Można to wyjaśnić wpływem składowej K_{II} . Przy $h \rightarrow 0$ i połączeniu materiałów różniących się znacznie stałymi sprężystymi obliczenia wykazują, że szczelina będzie propagowała z największą intensywnością w kierunku "od interfejsu". Powodem takiej sytuacji jest obecność składowej K_{II} , której udział w rozwiązaniu jest wówczas znaczący. W rzeczywistości jednak interfejs nie jest idealny, charakteryzuje się swoją własną odpornością na pęknięcie, która może być



RYSUNEK 3.28. Wzrost szczeliny zmęczeniowej w bimateryale na podstawie MK – kryterium.

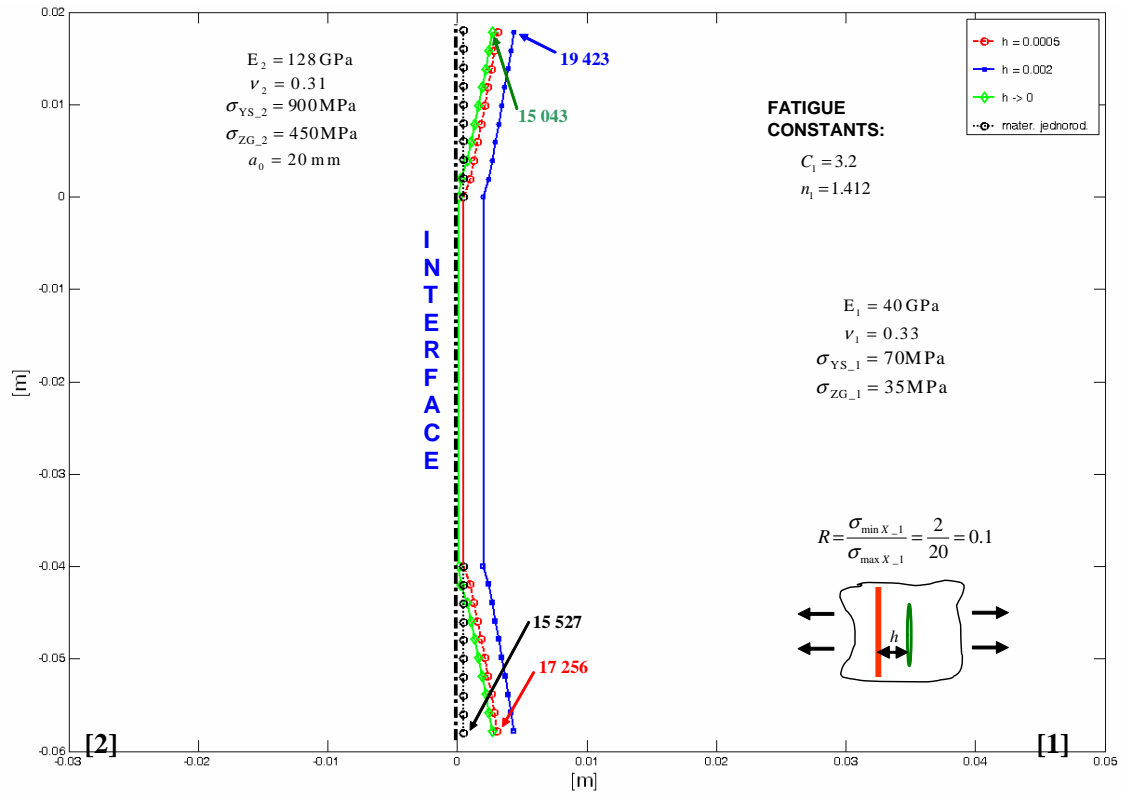


RYSUNEK 3.29. Wzrost szczeliny zmęczeniowej w bimateryale na podstawie MK – kryterium.



RYSUNEK 3.30. Wzrost szczeliny zmęczeniowej w bimateriale na podstawie **MK** – kryterium.

mniejsza niż materiałów, które tworzą kompozyt. W takich przypadkach bardzo często zamiast odchylenia się szczeliny od interfejsu obserwuje się pęknięcie wzdłuż interfejsu. Niniejsza praca nie uwzględnia takiej sytuacji. Byłoby to możliwe przy wprowadzeniu prostej korekty do stosowanego kryterium określającego kierunek pęknięcia uwzględniającego mniejszą odporność na pęknięcie interfejsu. W pracy nie zostanie przedstawiony taki przypadek, gdyż oznaczałoby wprowadzenie nieciągłości w rozwiązaniu, tzn. preferowaną płaszczyznę pęknięcia. W przypadku szczeliny w interfejsie o mniejszej odporności na pęknięcie niż materiały, które łączy, brak w zasadzie konieczności przewidywania kierunku wzrostu szczeliny.



RYSUNEK 3.31. Wzrost szczeliny zmęczeniowej w bimateriale na podstawie MK – kryterium.

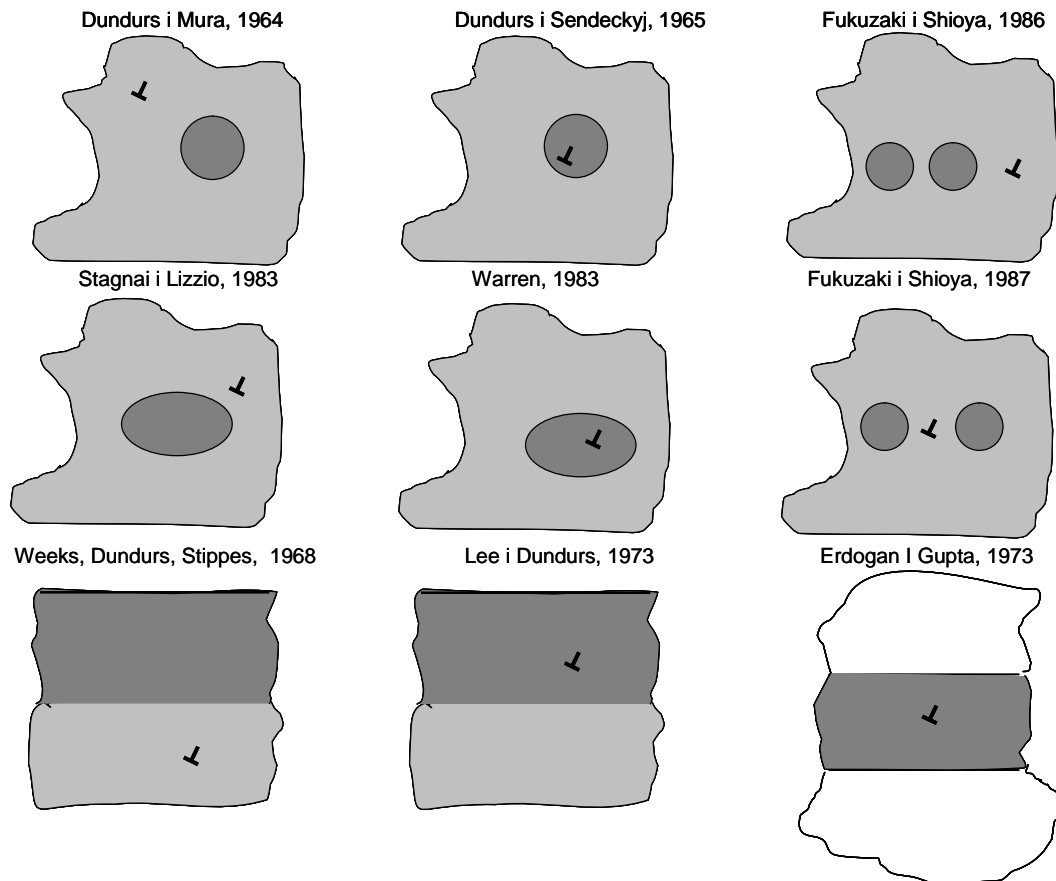
Rozdział 4

Zakończenie.

Praca dotyczy modelowania płaskiego zagadnienia wzrostu szczeliny zmęczeniowej w bi-materiale powstałym na skutek idealnego zespolenia dwóch materiałów sprężystych. Model uwzględnia złożony stan obciążenia i naprężenia, a proponowana metoda oparta jest na technice superpozycji oraz koncepcji szczeliny modelowanej jako ciągły rozkład dyslokacji, których wpływ na pole naprężenia opisywany jest za pomocą odpowiednich funkcji Greena. Wynikający stąd układ osobliwych równań całkowych typu Cauchy’ego rozwiązywany jest numerycznie za pomocą metody Gaussa-Chebysheva. W wyniku tego uzyskiwane są WIN oraz składowa stała naprężenia T w sąsiedztwie wierzchołka szczeliny. Umożliwia to analizę wzrostu szczeliny w złożonym stanie naprężenia, w materiale jednorodnym, jak i dowolnie innym, złożonym kompozycie. Warunkiem jest znajomość odpowiadającej danemu problemowi funkcji Greena oraz informacji o stanie pola naprężenia w kompozycie bez szczeliny. Przykładowe problemy, dla których można znaleźć w literaturze odpowiednie funkcje Greena przedstawiono na Rys. 4.1. Należy podkreślić, iż cały problem sformułowany jest w sposób analityczny, jedynie rozwiązanie jest numeryczne.

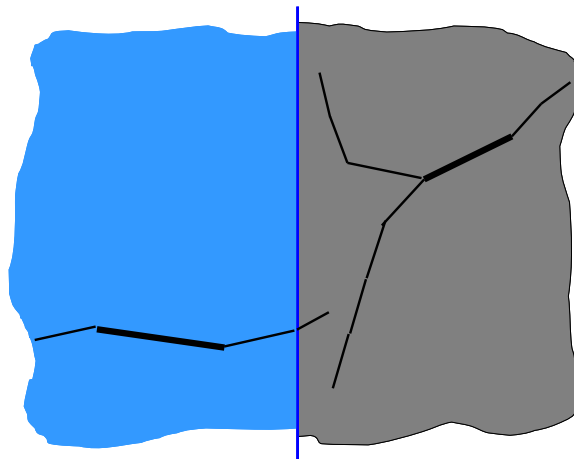
Proponowana metoda okazuje się efektywna w analizie wzrostu szczeliny zmęczeniowej zarówno w materiale jednorodnym, jak i bimateryale. Wyniki numeryczne wykazały bardzo dobrą zgodność zmęczeniowej ścieżki wzrostu szczeliny w porównaniu z wynikami eksperymentu dla materiału jednorodnego. Do tego celu wykorzystano sformułowane w pracy nowe, nielokalne kryterium energetyczne, określające warunek i kierunek propagacji szczeliny pod wpływem monotonicznego oraz cyklicznego obciążenia. Kryterium to nazwano **MK** – kryterium, które jako jedyne, w odróżnieniu od kryteriów dostępnych w literaturze, wykazuje zależność kierunku propagacji szczeliny od wielkości obciążenia, czy też pośrednio od długości szczeliny. Kryterium bazuje na wprowadzonej dwu-wymiarowej strefie dekohezji, której towarzyszy strefa plastyczna. Wyniki porównano z eksperymentami, wykazując zadowalającą zgodność.

Dodatkowo na podstawie tego kryterium sformułowano efektywne prawo przyrostu szczeliny zmęczeniowej, które związane ze zmianami iloczynu długości strefy dekohezji na kierunku pęknięcia r oraz zmianami plastycznymi przed wierzchołkiem szczeliny charakteryzowanymi poprzez postaciową część gęstości energii odkształcenia, T_D . Relację tę porównano z wynikami eksperymentu, wykazując bardzo dobrą zgodność. Sprawdzono również wiele innych proponowanych w literaturze wyrażeń na prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej, jednakże ich zgodność z wynikami eksperymentów pozostawała wiele do życzenia.



RYSUNEK 4.1. Przykłady istniejących rozwiązań funkcji Greena dla dyslokacji.

Należy dodać, że wykorzystywana metoda umożliwia symulację rozwoju wielu osobnych szczelin, jak również ich rozgałęzień, por. Rys. 4.2. Taka możliwość wydaje się być interesująca w przypadku istnienia w interfejsie sieci defektów w postaci szczelin, powstałych podczas tworzenia kompozytu.

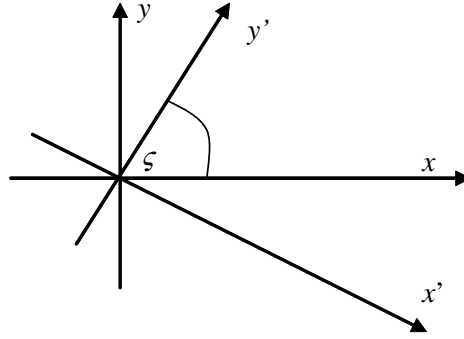


RYSUNEK 4.2. Przykład możliwości metody.

Algorytm wykorzystywany w niniejszej pracy został zaimplementowany w pakiecie MatLab i jego kod źródłowy liczy około 2000 linii.

Dodatek

Transformacja układu współrzędnych i pola naprężenia Zgodnie z Rys. 4.3 można dokonać następujących transformacji:



RYSUNEK 4.3.

$$\begin{cases} x = x' \sin \zeta + y' \cos \zeta \\ y = -x' \cos \zeta + y' \sin \zeta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x \sin \zeta - y \cos \zeta \\ y' = x \cos \zeta + y \sin \zeta \end{cases}$$

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} \sin^2 \zeta + \sigma_{yy} \cos^2 \zeta - 2\sigma_{xy} \sin \zeta \cos \zeta$$

$$\sigma'_{yy} = \sigma_{xx} \cos^2 \zeta + \sigma_{yy} \sin^2 \zeta + 2\sigma_{xy} \sin \zeta \cos \zeta$$

$$\sigma'_{xy} = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \zeta \cos \zeta + \sigma_{xy} (\sin^2 \zeta - \cos^2 \zeta)$$

Pole naprężenia w otoczeniu okrągłej inkluzji i obciążenia zewnętrznego

W przypadku nieskończenie dużej matrycy, w której umieszczono okrągłą inkluzję i zależnej od 1-osioowego rozciągania zadanego w nieskończoności składowe tensora naprężenia wyrażają się w postaci [47]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma_0}{2} \left[1 - \frac{\gamma R^2}{r^2} + \left(1 - \frac{2\beta R^2}{r^2} - \frac{3\delta R^2}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_0}{2} \left[1 + \frac{\gamma R^2}{r^2} - \left(1 - \frac{3\delta R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{\beta R^2}{r^2} + \frac{3\delta R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie

$$\beta = -\frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}, \quad \gamma = \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{2\mu_1 + \mu_2(\kappa_2 - 1)}, \quad \delta = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2},$$

- σ_0 – wartość jednoosiowego naprężenia w nieskończoności,
- R – promień inkluzji,
- r, θ – współrzędne biegunowe,
- μ, κ – stałe sprężyste.

Bibliografia

1. GRIFFITH, A.A., The phenomena of rapture and flow in solids, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, Vol.A221, s.163-198, 1921.
2. KOCAŃDA, S., Zmęczeniowe pękanie metali, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1985.
3. KOCAŃDA, S., SZALA, J., Podstawy obliczeń zmęczeniowych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997.
4. NEIMITZ, A., Mechanika pękania, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1998.
5. INGLIS, C.E., Stresses in plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans. Inst. Nav. Archit.*, Vol.60, s.219-230, 1913.
6. GRIFFITH, A.A., The theory of rapture, *Proc. First Congress of Applied Mechanics*, s.55-63, Delft, 1924.
7. IRWIN, G.R., Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate, *J. Applied Mechanics*, Vol.79, s.361, 1957.
8. DUGDALE, D.S., Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Sol.*, Vol.8, s.100-108, 1960.
9. BARENBLATT, G.I., The mathematical theory of equilibrium of ceacks in brittle fracture, *Advances in Appl. Mech.*, Vol.7, s.55-129, 1962.
10. IRWIN, G.R., Fracture, *Encyklopedia of Physics*, Band VI, Vol.VI, Berlin, 1958.
11. IRWIN, G.R., Fracture mechanics, NY, 1960.
12. SIH, G.C., On the Westergaard method of crack analysis, *Int. J. Fracture Mech.*, Vol.2, s.628, 1966.
13. EFTIS, J., LIEBOWITZ, H., On the modified Westergaard equations for certain plane crack problem, *Int. J. Fracture Mech.*, Vol.8, s.383-392, 1972.
14. MACGREGOR, C.W., The potential function method for the solution of two dimensional stress problems, *Trans. Am. Math. Soc*, Vol.8, s.177-186, 1935.
15. EFTIS, J., SUBRAMONIAN, N., LIEBOWITZ, H., Crack border stress and displacement equations revisited, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.10, s.189-210, 1977.
16. EFTIS, J., SUBRAMONIAN, N., The inclined crack under biaxial load, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.10, s.43-67, 1978.

17. LIEBOWITZ, H., LEE, J.D., EFTIS, J., Biaxial load effects in fracture mechanics, *Engng Fracture Mech.*, Vol.10, s.315-335, 1978.
18. COTTERELL, B., Notes on the path and stability of cracks, *Int. Journal of Fracture Mech.*, Vol.2, s.526-533, 1966.
19. COTTERELL, B., On fracture path stability in the compact tension test, *Int. Journal of Fracture Mech.*, Vol.6, s.189-192, 1970.
20. COTTERELL, B., RICE, J.R., Slightly curved or kinked cracks, *Int. Journal of Fracture Mech.*, Vol.16, s.155-169, 1980.
21. LARSSON, S.G., CARLSSON, A.J., Influence of non-singular stress term and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.21, s.263-278, 1973.
22. POGORZELSKI, W., Równania całkowite i ich zastosowania tom 4, PWN, 1970.
23. HAEFELE, P.M., LEE, J.D., The constant stress term, *Engng Fracture Mech.*, Vol.50, No.5/6, s.869-882, 1995.
24. PAPADOPOULOS, G.A., The stationary value of the third stress invariant as a local fracture parameter. (Det.-criterion), *Engng Fracture Mech.*, Vol.27, s.643-653, 1987.
25. PAPADOPOULOS, G.A., Crack initiation under biaxial loading, *Engng Fracture Mech.*, Vol.29, s.585-598, 1988.
26. PAPADOPOULOS, G.A., PONIRIDIS, P.I., Crack initiation under biaxial loading with higher-order approximation, *Engng Fracture Mech.*, Vol.32, No.3, s.351-360, 1989
27. HILLS, D.A., KELLY, P.A., DAI, D.N., KORSUNSKY, A.M., Solution of Crack Problem. The Distributed Dislocation Technique, Kluwer, 1996.
28. SEWERYN, A., Metody numeryczne w mechanice pękania, Biblioteka Mechaniki Stosowanej, Seria A, Monografie, IPPT PAN, Warszawa, 2003.
29. BUECKNER, H.F., The propagation of cracks and the energy of elastic deformation, *J. Appl. Mech.*, Vol.80, s.1225-1230, 1958.
30. BUECKNER, H.F., A novel principle for the computation of stress intensity factors, *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol.50, s.529-546, 1970.
31. MOLSKI, K.L., Method of stress intensity factor calculation based on the unitary weight function, *Mech. Teor. Stos.*, Vol.32, s.153-161, 1994.
32. LISKOVETS, O.A., The method of lines, *Differential Equations*, Vol.1, s.1308-1323, 1965.
33. LISZKA, T., ORKISZ, J., The finite difference method at arbitrary irregular grids and its applications in applied mechanics, *Comput. Struct.*, Vol.11, s.83-95, 1980.
34. FLEMING, J.F., GUYDISH, J.J., PENTZ, J.R., RUNNION, C.E., ANDERSON, G.P., The finite element method vs edge function method for linear fracture analysis, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.13, s.43-55, 1980.
35. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., The finite element method, Vol.1-2, London, 1989-1991.

36. BANERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R., Boundary elements methods in geomechanics, *Finite Elements in Geomechanics*, London, 1977.
37. BURCZYNSKI, W., Metoda elementów brzegowych w mechanice, *WNT*, 1995.
38. BILBY, B.A., COTTRELL, A.H., SWINDEN, K.H., The spread of plastic yield from a notch, *Proc. Roy. Soc.*, Vol.272, Ser.A, s.304-314, 1963.
39. BILBY, B.A., ESHELBY, J.D., Dislocation and the theory of fracture, *Fracture*, Ed. Liebowitz, Vol.1, s.99-182, 1968.
40. STEDMAN, G.E., Green's Functions, *Contemp. Phys.*, Vol.9, s.49-69, 1968.
41. SNEDDON, I.N., Mixed boundary value problems in potential theory, Amsterdam, 1966.
42. GROSS, B., SRAWLEY, J.E., BROWN, W.F., Stress intensity factors for a single-edge notch tension specimen by boundary collocation of a stress function, NASA TN-D2395, 1964.
43. MURAKAKAMI, Y., NEMAT-NASER, S., Growth and stability of intersecting surface flaws of arbitrary shape, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.17, s.193-210, 1983.
44. DUNDURS, J., Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities, *Mathematical Theory of Dislocations*, Ed. Mura T., s.70-115, 1969.
45. WILLIAMS, M.L., Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension, *J. Appl. Mech.*, Vol.19, s.526-528, 1952.
46. WESTERGAARD, H.M., Bearing pressures and cracks, *J. Appl. Mech.*, Vol.61, s.A49-53, 1939.
47. MUSKHELISHVILI, N.I., Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Moskwa, wyd. rosyjskie, 1966.
48. MUSKHELISHVILI, N.I., Singular integral equations, 1953.
49. ERDOGAN, F., Complex function technique, *Continuum Physics*, Ed. Eringen A.C., Vol.II, s.523-603, New York, 1975.
50. ERDOGAN, F., Mixed boundary-value problems in mechanics, *Mechanics Today*, Ed. Nemat-Nasser, Vol.4, s.1-85, Oxford, 1978.
51. LO, K.K., Analysis of branched cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.45, s.797-802, 1978.
52. SELVARATHINAM, A.S., GOREE, A.S., T-stress based fracture model for cracks in isotropic materials, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.60, No.5-6, s.543-561, 1998.
53. ERDOGAN, F., BIRICIKOGLU, V., Two bonded half planes with a crack going through the interface, *Int. J. Engng Sc.*, Vol.11, s.745-766, 1973.
54. ERDOGAN F., GUPTA G.D., On the numerical solution of singular integral equations, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol.29, s.525-534, 1972.
55. DUNDURS J., HETENYI M., The elastic plane with a circular insert, loaded by a radial force, *Journal of Applied Mechanics*, March, s.103-112, 1961.

56. DUNDURS J., HETENYI M., The elastic plane with a circular insert, loaded by a tangentially directed force, *Journal of Applied Mechanics*, June, s.362-368, 1962.
57. DUNDURS J., MURA T., Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.12, s.177-189, 1964.
58. DUNDURS J., SENDECKYJ, Edge dislocation inside a circular inclusion, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, s.141-147, 1965.
59. ERDOGAN F., GUPTA G.D., RATWANI M., Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack, *Journal of Applied Mechanics*, December, s.1007-1013, 1974.
60. SHENG C.-F., WHEELER, L., Crack path Prediction for a kinked crack in the Neighborhood of a circular inclusion in an infinite medium, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, s.313-319, 1981
61. ERDOGAN F., Bonded dissimilar materials containing cracks parallel to the interface, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.3, s.231-240, 1971.
62. ERDOGAN, F., GUPTA, G., The stress analysis of multi-layered composites with a flaw, *Int. J. Solids Structures*, Vol.7, s.39-61, 1971.
63. ERDOGAN F., GUPTA G.D., Layered composites with an interface flaw, *Int. J. Solids Structures*, Vol.7, s.1089-1107, 1971.
64. COOK T.S., ERDOGAN F., Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, *Int. J. Engng Sci.*, Vol.10, s.677-697, 1972.
65. TOSHIMITSU OTSU, WEN-XUE WANG, TAKAO YOSHIHIRO, Asymmetrical cracks parallel to an interface between dissimilar materials, , Vol.96, s.75-100, 1999.
66. ERDOGAN F., AKSOGAN O., Bonded half planes containig an arbitrarily oriented crack, *Int. J. Solids Structures*, Vol.10, s.569-585, 1974.
67. ASHBAUHG, N., Stress solution for crack at an arbitrary angle to an interface, *Int. Journal of Fracture*, Vol.11, s.205-219, 1975.
68. LAM, K.Y., PHUA, S.P., Multiple crack interaction and its effect on stress intensity factor, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.40, No.3, s.585-592, 1991.
69. ERDOGAN, F., On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary load, *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, s.547-553, 1962.
70. NAO-AKI NODA, KAZUHIRO ODA, Numerical solutions of the singular intergral equations in the crack analysis using the body force method, *Int. Journal of Fracture*, Vol.58, s.285-304, 1992.
71. RICE, J.R., SIH, G.C., Plane problem of cracks in dissimilar media, *J. Appl. Mech.*, Vol.32, s.418-423, 1965.
72. HUTCHINSON, J.W., MEAR, M.E., RICE, J.R., Crack paralleling an interface between dissimilar materials, *J. Appl. Mech.*, Vol.54, s.828-832, 1988.
73. RICE, J.R., Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks, *J. Appl. Mech.*, Vol.55, s.98-103, 1988.

74. ERDOGAN, F., Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks, *J. Appl. Mech.*, Vol.87, s.403-410, 1965.
75. ENGLAND, A.H., A crack between dissimilar media, *J. Appl. Mech.*, Vol.32, s.400-402, 1965.
76. ERDOGAN, F., Fracture problems in composite materials, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.4, s.811-840, 1972.
77. FETT, T., A Green functions for T-stresses in an edge - cracked rectangular plate, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 57, No. 4, pp. 365-373, 1997.
78. FETT, T., RIZZI, G., BAHR, H-A., Green's function for the T-stress of small kink and fork cracks, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.73, s.1426-1435, 2006.
79. FETT, T., RIZZI, G., Weight functions for stress intensity factors and T-stress for oblique cracks in half-space, *Int. J. Fracture*, Vol. 132, , pp.L9-L16, 2005.
80. SUN, C.T., JIH, C.J., On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.28, s.13-20, 1987.
81. DELALE, F., ERDOGAN, F., On the mechanical modeling of the interfacial region in bonded half-planes, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.55, s.317-324, 1988.
82. HE, M.-Y., HUTCHINSON, J.W., Kinking of crack out of an interface, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.56, s.270-278, 1989.
83. MILLER, G.R., STOCK, W.L., Analysis of branched interface cracks between dissimilar anisotropic media, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.56, s.845-849, 1989.
84. MILLER, G.R., MUKAI, D.J., BALLARINI, R., Analysis of branched interface cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.57, s.887-893, 1990.
85. HE, M.-Y., HUTCHINSON, J.W., Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials, *Int. J. Solids Structures*, Vol.25, Nr.9, s.1053-1067, 1989.
86. SHIH, C.F., ASARO, R.J., Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial Interfaces: Part I - small scale yielding, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.55, s.299-316, 1988.
87. SHIH, C.F., ASARO, R.J., Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial Interfaces: Part II - structure of small scale yielding fields, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.56, s.763-779, 1989.
88. SHIH, C.F., ASARO, R.J., O'DOWD, N.P., Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial Interfaces: Part III - large-scale yielding, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.58, s.450-463, 1991.
89. RICE, J.R., Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue, *Fatigue Crack Propagation*, ASTM STP 415, s.247, 1967.
90. ELBER, W., Fatigue crack closure under cyclic tension, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.2, s.37-45, 1970.
91. ADAMS, N.J., Fatigue crack closure at positive stresses, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.4, s.543-554, 1972.

92. PURSHOTHAMAN, S., TIEN, J.K., A fatigue crack growth mechanism for ductile materials, *Scripta Metallurgica*, Vol.9, s.923-926, 1975.
93. WALKER, N., BEEVERS, C.J., A fatigue crack closure mechanism in titanium, *Fatigue of Engng Materials and Structures*, Vol.1, s.135-148, 1979.
94. ENDO, K., KOMAI, K., MATASUDA, Y., Mechanical effects of corrosion products in corrosion fatigue crack growth of a steel, *Bulletin of the JSME*, Vol.24, s.1319-1325, 1981.
95. SURESH, S., ZAMINSKI, G.F., RITCHIE, R.O., Oxide induced crack closure: an explanation for near-threshold corrosion fatigue crack growth behaviour, *Metallurgical Transactions*, Vol.12A, s.1435-1443, 1981.
96. FORMAN, R.G., KEARNEY, V.E., ENGLE, R.M., Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures, *Journal of Basic Engineering*, s.459-564, 1967.
97. ROBERTS, R., ERDOGAN, F., The effect of mean stress on fatigue crack propagation in plates under extension and bending, *Journal of Basic Engineering*, s.885-892, 1967.
98. QIAN, J., FATEMI, A., Mixed mode fatigue crack growth: a literature survey, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.55, Nr 6, s.969-990, 1996.
99. PUSTEJOVSKY, M.A., Fatigue crack propagation in titanium under general in-plane loading – I: Experiments, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.11, s.9-15, 1979.
100. MCEVILY, A.J., *Metal Sci.*, s.274–284, 1979.
101. SHADEMAN, S., SOBOYEJO, A.B.O., KNOTT, J.F., SOBOYEJO, W.O., A physically-based model for the prediction of long fatigue crack growth in Ti-6Al-4V, *Materials Science and Engineering*, Vol.A315, s.1-10, 2001.
102. ERDOGAN, F., AKSOGAN, O., Bonded half planes containing an arbitrarily oriented crack, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.10, s.569-585, 1974.
103. RITCHIE, R.O., CANNON, R.M., DALGLEISH, B.J., DAUSKARDT, R.H., MCNANEY, J.M., Mechanics and mechanisms of crack growth at or near ceramic-metal interfaces: interface engineering strategies for promoting toughness, *Materials Science and Engineering*, Vol.A166, s.221-235, 1993.
104. CANNON, R.M., DALGLEISH, B.J., DAUSKARDT, T.S.OH, RITCHIE, R.O., Cyclic fatigue-crack propagation along ceramic/metal interfaces, *Acta metal. mater.*, Vol.39, Nr 9, s.2145-2156, 1991.
105. MCNANEY, J.M., CANNON, R.M., RITCHIE, R.O., Fracture and fatigue crack growth along aluminum - alumina interfaces, *Acta mater.*, Vol.44, Nr 12, s.4712-4728, 1996.
106. WOELTJEN, C., SHIH, C.F., SURESH, S., Cyclic near-tip fields for fatigue cracks along metal-metal and metal-ceramic interfaces, *Acta metal. mater.*, Vol.41, Nr 8, s.2317-2335, 1993.
107. IRWIN, G.R., Plastic zone near a crack and fracture toughness, *Proceeding of 7th Sagamore Conf.*, Vol.IV, s.61–78, 1961.
108. BOGY, D.B., Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions, *Journal of Applied mechanics*, Vol.38, s.377-386, 1971.

109. BOGY, D.B., On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material Interface, *Journal of Applied Mechanics*, December, s.911-918, 1971.
110. ATKINSON, C., On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics, *Int. Journal Fracture*, Vol.13, s.807-820, 1977.
111. DELALE, F., ERDOGAN, F., On the mechanical modeling of the interfacial region in bonded half-planes, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.55, s.317-324, 1988.
112. COMNINOU, M., The interfaces crack, *J. Appl. Mech.*, Vol.44, s.631-636, 1977.
113. MALYSHEV, B.M., SALGANIK, R.L., The strenght of adhesive joints using the theory of fracture, *Int. Journal of Fracture Mechanics*, Vol.1, s.114-128, 1965.
114. GDOUTOS, E.E., Problems of mixed mode crack propagation, *Martinus Nijhoff Publishers*, The Netherlands, 1984.
115. YOKOBORI, A.T., YOKOBORI, T., SATO, K., SYOJI, K., Fatigue crack growth under mixed modes I III, *Fatigue Fracture Engng Mater. Structures*, Vol.8, s.315-325, 1985.
116. IIDA, S., KOBAYASHI, A.S., Crack propagation rate in 7075-T6 plates under cyclic tensile and transverse shear loadings, *J.bas.Engng, Trans. ASME, ser. D*, Vol.91, s.764-769, 1969.
117. ROBERTS, R., KIBLER, J.J., *J. Engng Ind.*, Vol.92, s.727, 1970.
118. ROBERTS, R., KIBLER, J.J., Mode II fatigue crack propagation, *J. Basic Engng (Trans. ASME)*, Vol.93, s.671-680, 1971.
119. TANAKA, K., Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis, *Engng Fracture Mech.*, Vol.6, s.493-507, 1974.
120. WEERTMAN, J., Rate of growth of fatigue cracks calculated from the theory of infinitesimal dislocations distributed on a plane, *Int. Journal Fracture Mech.*, Vol.2, s.460-467, 1966.
121. LARDNER, R.W., A dislocation model for fatigue crack growth in metals, *Phil. Mag.*, Vol.17, s.71-82, 1968.
122. BOLD, P.E., BROWN, M.W., ALLEN, R.J., A review of fatigue crack growth in steels under mixed mode I and II loading, *Fatigue Fracture Engng Mater.Stryures*, Vol.15, Nr 10, s.965-977, 1992.
123. PARSONS, M.W., PASCOE, K.J., Obserwations of surface deformaton, crack initiation and crack growth in low cycle fatigue under biaxial stress, *Mater. Sci. Engng*, Vol.22, s.31-50, 1976.
124. SMITH, E.W., PASCOE, K.J., The behaviour of fatigue cracks subject to applied biaxial stress: a review of the experimental evidence, *Fatigue Fracture Engng Mater.Stryures*, Vol.6, s.201-224, 1983.
125. ROYER, J., A specimen geometry for plane mode, *Engng Fracture Mech.*, Vol.23, s.763-775, 1986.
126. ABDEL-MAGEED, A.M., PANDEY, R.K., Mixed mode crack growth under static and cyclic loading in Al-alloy sheets, *Engng Fracture Mech.*, Vol.40, s.371-385, 1991.
127. ABDEL-MAGEED, A.M., PANDEY, R.K., Studies on cyclic crack path and the mixed mode crack closure behavior in Al-alloy, *Int.J.Fatigue*, Vol.14, s.21-29, 1992.

128. PARIS, P., A note on the variables effecting the rate of crack growth due to cyclic loading, *The Boeing Company*, Doc. No.D-17867, Addendum N, September 12, 1957.
129. PARIS, P., GOMEZ MP, ANDERSON WE., A rational analytical theory of fatigue, *The Trend of Engineering*, Vol.13, s.9–14, 1961.
130. PARIS, P., ERDOGAN, F., A critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering Trans. ASME*, Vol.85, s.528–534, 1963.
131. ERDOGAN, F., SIH, G.C., On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *Journal of Basic Engineering Trans. ASME*, Vol.85, s. 519–527, 1963.
132. WILLIAMS, J.G., EWING, P.D., Fracture under Complex Stress – The Angled Crack Problem, *International Journal of Fracture*, Vol.8, s.441–446, 1972.
133. KOSAI, M., KOBAYASHI, A. S. AND RAMULU, M., Tear straps in airplane fuselage. In *Durability of Metal Aircraft Structures*, ed. S. N. Alturi, C. E. Harris, A. Hoggard, N. Miller and S. G. Sampath. Atlanta Technology Publications, Atlanta, pp. 443–457, 1993.
134. SIH, G.C., Some basic problems in fracture mechanics and new concepts, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.5, s. 365–377, 1973.
135. SIH, G.C., Energy-density concept in fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.5, s. 1037–1040, 1973.
136. SIH, G.C., Strain-energy density factor applied to mixed-mode crack problems, *International Journal of Fracture*, Vol.10, s.305–321, 1974.
137. SIH, G.C., BARTHELEMY, B.M., Mixed mode fatigue crack growth predictions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.13, s.439–451, 1980.
138. BADALIANCE, R., Application of strain energy density factor to fatigue crack growth analysis, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.13, s.657–666, 1980.
139. LAM, Y.C., Fatigue crack growth under biaxial loading, *Fatigue Fracture Engng Mater. Structures*, Vol.16, s.429–440, 1993.
140. WU, X., LI, X. , Analysis and modification of fracture criteria for mixed mode crack, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.34, s.55–64, 1989.
141. HUSSIAN, S.L., PU, S.L., UNDERWOOD, J., Strain energy release rate for a crack under combined mode-I and -II , *American Society for Testing and Materials*, STP 560, s.2–28, 1974.
142. CHAMBERS, A.C., HYDE, T.H., WEBSTER, J.J., Mixed mode fatigue crack growth at 550° C under plane stress conditions in jethete M152, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.39, s.603–619, 1991.
143. CHANG, K.J., On the maximum strain criterion – a new approach to the angled crack problem, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.14, s.107–114, 1981.
144. LI, C., Vector CTD criterion applied to mixed mode fatigue crack growth, *Fatigue Fracture Engng Mater. Structures*, Vol.12, s.59–65, 1989.
145. OTSUKA, A., MORI, K., MIYATA, T., The condition of fatigue crack growth in mixed mode condition, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.7, s.429–439, 1975.

146. OTSUKA, A., TOHGO, K., MATSUYAMA, H., Fatigue crack initiation and growth under mixed mode loading in aluminum alloys 2017-T3 i 7075-T6, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.28, s.721-732, 1987.
147. SMITH, M.C., Some aspect of mode II fatigue crack growth. Ph.D. thesis, *Churchill College, Department of Engineering*, University of Cambridge, 1984.
148. SMITH, M.C., SMITH, R.A., Towards and understanding of mode II fatigue crack growth, *Basic Questions in Fatigue*, ASTM STP 924, Vol.I, s.260-280, 1988.
149. MAITI, S.K., SMITH, R.A., Comparison of criteria for mixed mode brittle fracture based on the pre-instability stress-strain field, Part I. Slit and elliptical cracks under uniaxial tensile loading, *International Journal of Fracture*, Vol.23, s.281-295, 1983.
150. MAITI, S.K., SMITH, R.A., Comparison of criteria for mixed mode brittle fracture based on the pre-instability stress-strain field, Part II. Pure shear and uniaxial compressive loading, *International Journal of Fracture*, Vol.24, s.5-22, 1984.
151. POOK, L.P., A failure mechanism map for mixed mode I and II fatigue crack growth thresholds, *International Journal of Fracture*, Vol.28, s.R21-23, 1985.
152. HUA, C.T., SOCIE, D.F., Fatigue damage in 1045 steel under constant amplitude biaxial loading, *Fatigue Fracture Engng Mater. Structures*, Vol.7, s.165-179, 1984.
153. PATEL, A.B., PANDEY, P.K., Fatigue crack growth under mixed mode loading, *Fatigue Fracture Engng Mater. Structures*, Vol.4, s.65-77, 1981.
154. GAO, H., BROWN, M.W., MILLER, K.J., Mixed mode fatigue thresholds, *Fatigue Fracture Engng Mater. Structures*, Vol.5, s.1-17, 1982.
155. GAO, H., RIOS, D.L., MILLER, K.J., Mixed mode fracture mechanism near the fatigue threshold of AISI 316 stainless steel, *Fatigue Fracture Engng Mater. Structures*, Vol.6, s.137-147, 1983.
156. SCHIJVE, J., BROEK, D., Fatigue crack growth: effect of sheet thickness, *Aircraft Engineering*, Vol.38, s.31-33, 1966.
157. LIU, A.F., DITTMER, D.F., Effect of multiaxial loading on crack growth, *AFFDL-TR-78-175*, Vols.1,2,3, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson, AFB, 1978.
158. GDOUTOS, E.E., Fracture mechanics criteria and applications, *Kluwer Academic Publishers*, The Netherlands, 1990.
159. HELLEN, T.K., BLACKBURN, W.S., The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading, *International Journal of Fracture*, Vol.11, s.605-617, 1975.
160. DAI, Y., ZHENG, G.H., On fatigue crack growth under mixed mode loading, *Numerical Methods in Fracture Mechanics, Proc. Fourth Int. Conf.*, San Antonio, Texas, U.S.A., 23-27 March, s.659-676, 1987.
161. THEOCARIS, P.S., ANDRIANOPOULOS, N.P., A modified strain-energy density criterion applied to crack propagation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.49, s.81-86, 1982.
162. THEOCARIS, P.S., ANDRIANOPOULOS, N.P., The Mises elastic-plastic boundary as the core region in fracture criteria, *Engng Fracture Mech.*, Vol. 16, s.425-432, 1982.

163. THEOCARIS, P.S., KARDOMATEAS, G.A., ANDRIANOPOULOS, N.P., Experimental study of the T-criterion in ductile fractures, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.17, s.439–447, 1982.
164. THEOCARIS, P.S., ANDRIANOPOULOS, N.P., The T-criterion applied to ductile fracture, *International Journal of Fracture*, Vol.20, s.R125–130, 1982.
165. THEOCARIS, P.S., IOAKIMIDIS, N.I., Numerical integration methods for the solution of sinular integral equations, *Quart. Appl. Math.*, Vol.35, s.173–183, 1977.
166. THEOCARIS, P.S., A higher–order aproximation for the T-criterion of fracture in biaxial fields, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.19, s.975–991, 1984.
167. SEWERYN, A. Asymptotic methods of evaluation of stress intensity factors for V-notches in plane elasticity theory, *Engng Trans.*, Vol.38, s.467–86, 1990.
168. SEWERYN, A., ZWOLIŃSKI, J., Solution for the stress and displacement fields in the vicinity of a V-notch of negative wedge angle in plane problems of elasticity, *Engng Fract. Mech.*, Vol.44, s.275–81, 1993.
169. SEWERYN, A., ŁUKASZEWICZ, A., Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches, *Engng Fract. Mech.*, Vol.69, s.1487–1510, 2002.
170. SEWERYN, A., MRÓZ, Z., A non–local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading, *Engng Fract. Mech.*, Vol.51, s.955–973, 1995.
171. SEWERYN, A., Damage accumulation and fracture of structural elements in complex state loading, Białystok, 1997.
172. MRÓZ, Z., SEWERYN, A., A non–local failure and damage evolution rule: aplication to a dilatant crack model, *Journal Phys.*, Vol.8, s.257–268, 1998.
173. SEWERYN, A., Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Engng Fract. Mech.*, Vol.47, s.673–681, 1994.
174. SEWERYN, A., POSKROBKO, S., MRÓZ, Z., , *Journal of Engng Mech.*, Vol.123, s.535–543, 1997.
175. SEWERYN, A., A non–local stress and strain energy release rate mixed mode fracture initiation and propagation criteria, *Engng Fract. Mech.*, Vol.59, s.737–760, 1998.
176. MOLSKI, K., SEWERYN, A., Fatigue and fracture of plane elements with sharp notches under biaxial loading, w *Macha, E., Będkowski, W., Łagoda, T. Eds Multiaxial fatigue and fracture, Mech. Engng Publ.*, s.13–24, 1999.
177. MRÓZ, Z., SEWERYN, A., TOMCZYK, A. A non-local critical plane model for the analysis of fatigue crack propagation, w: *Benallal, A. Ed. Continuous damage and fracture, Elsevier*, s.373–384, 2000.
178. WILLIAMS, J.G. Fracture Mechanics of Polymers, Chichester, 1984.
179. NOVOZHILOV, V.V. On necessary and sufficient criterion of brittle strength, *Appl. Math. Mech. (Prikl. Mat. Mech.)*, Vol.33, s.212–222, 1969.
180. GOŁOŚ, K., WASILUK, B., Role of plastic zone in crack growth direction criterion under mixed mode loading, *International Journal of Fracture*, Vol.102, s.341–353, 2000.

-
181. WASILUK, B., HOSHIDE, T., The fracture process in elastic–plastic materials under biaxial cyclic loading, *International Journal of Fatigue*, Vol.25, s.221–229, 2003.
 182. WONG, A.K., On the application of the strain density theory in predicting crack initiation and angle of growth, *Engng Fracture Mech.*, Vol.27, s.157–170, 1987.
 183. YAN, X., DU, S., ZHANG, Z., Mixed mode fatigue crack growth prediction in biaxially stretched sheets, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.43, s.471–475, 1992.
 184. SHLYANNIKOV, V.N., BRAUDE, N., A model for predicting crack growth rate for mixed mode fracture under biaxial loads, *Fatigue Fracture Engng Mater. Structures*, Vol.15, No.9, s.825–844, 1992.
 185. MANSON, S.S., Behavior of materials under conditions of thermal stress, TN–2933, *Nationality Advisory Commission on Aeronautics*, 1953.
 186. COFFIN, L.F., A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal, *Trans ASME*, Vol.76, s.931–950, 1954.
 187. SURESH, S., Fatigue of materials, *Cambridge University Press*, 1991.
 188. WILLIAMS, M.L., Stresses around a fault or crack in dissimilar media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.49, s.199–204, 1959.