

Komputerowe wspomaganie procesu projektowania  
konstrukcji drgających z uwzględnieniem zmęczenia  
materiału

mgr Tomasz Bednarek

18 kwietnia 2007r.

**TOMASZ BEDNAREK**

**Komputerowe wspomaganie procesu  
projektowania konstrukcji drgających  
z uwzględnieniem zmęczenia materiału**

P R A C A D O K T O R S K A

**Promotor :**

Prof. dr hab. inż. WŁODZIMIERZ SOSNOWSKI

WARSZAWA 2008

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>4</b>
1.1	Motywacja i cel pracy . . . . .	4
1.2	Zawartość pracy . . . . .	7
1.3	Przegląd literatury . . . . .	8
1.4	Koncepcja realizacji celu pracy oraz podstawowe założenia . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Metoda Elementów Skończonych w analizie konstrukcji poddawanych obciążeniom zmiennym w czasie</b>	<b>18</b>
2.1	Przygotowanie modelu numerycznego . . . . .	18
2.1.1	Model MES konstrukcji . . . . .	18
2.1.2	Warunki brzegowe . . . . .	24
2.2	Problem zmęczenia materiału w programie MES . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Odpowiedź materiału na obciążenie zmienne w czasie</b>	<b>30</b>
3.1	Mechanizm procesu zniszczenia zmęczeniowego materiałów metalicznych	30
3.2	Metoda oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie koncepcji naprężeń nominalnych . . . . .	31
3.2.1	Uprozczone krzywe Wöhlera . . . . .	32
3.2.2	Wpływ naprężenia średniego na trwałość zmęczeniową konstrukcji	35
3.2.3	Analiza zmęczeniowa konstrukcji przy obciążeniach złożonych .	38
3.2.4	Analiza zmęczeniowa przy obciążeniu zmiennieamplitudowym .	42
3.3	Metoda oceny trwałości zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń	45
3.3.1	Podstawy termodynamiczne . . . . .	45
3.3.2	Proces ewolucji uszkodzenia w zagadnieniu zmęczenia metali z uwzględnieniem plastyczności . . . . .	47
3.3.3	Funkcja utraty wytrzymałości materiału w analizie zmęczeniowej	48

3.4	Implementacja koncepcji naprężeń nominalnych w programie MES . . . . .	51
3.4.1	Algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej . . . . .	51
3.4.2	Zmodyfikowany algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej . . . . .	53
3.5	Implementacja algorytmu analizy zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń w programie MES . . . . .	55
3.5.1	Analiza zmęczeniowa przy stałej amplitudzie obciążenia – algorytm postępowania . . . . .	56
3.5.2	Analiza zmęczeniowa przy zmiennej amplitudzie obciążenia – algorytm postępowania . . . . .	58
3.6	Złożoność obliczeniowa algorytmu analizy zmęczeniowej . . . . .	61
3.7	Przykłady analizy zmęczeniowej konstrukcji za pomocą MES . . . . .	65
3.7.1	Analiza numeryczna procesu zniszczenia próbki z karbem obciążonej osiowo . . . . .	65
3.7.2	Określenie trwałości zmęczeniowej cylindra hydraulicznego za pomocą MES . . . . .	70
3.7.3	Analiza propagacji uszkodzeń zmęczeniowych w cylindrze hydraulicznym . . . . .	76
3.8	Ocena wyników analizy zmęczeniowej konstrukcji za pomocą MES . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Niezawodność konstrukcji narażonych na zniszczenie zmęczeniowe</b>	<b>86</b>
4.1	Wskaźniki niezawodności konstrukcji ze względu na zmęczenie materiału	87
4.1.1	Wskaźnik wyężenia – Factor of Strength ( <i>FOS</i> ) . . . . .	87
4.1.2	Wskaźnik rezerwy zmęczeniowej – Fatigue Reserve Factor ( <i>FRF</i> )	88
4.1.3	Prawdopodobieństwo zniszczenia zmęczeniowego . . . . .	91
4.2	Ocena niezawodności cylindra hydraulicznego . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Schemat numeryczny optymalizacji konstrukcji narażonych na rezonans</b>	<b>96</b>
5.1	Praca w stanie rezonansu . . . . .	97
5.1.1	Drgania wymuszone konstrukcji . . . . .	97
5.2	Drgania swobodne konstrukcji . . . . .	100
5.2.1	Sformułowanie problemu własnego . . . . .	100
5.2.2	Redukcja rozmiaru problemu własnego . . . . .	101
5.3	Wrażliwość wartości własnych na parametr projektowy . . . . .	102

---

5.3.1	Jednokrotne wartości własne . . . . .	102
5.3.2	Redukcja rozmiaru problemu poszukiwania wrażliwości wartości własnych – jednokrotne wartości własne . . . . .	103
5.3.3	Wielokrotne wartości własne . . . . .	104
5.3.4	Redukcja rozmiaru problemu poszukiwania wrażliwości wartości własnych – wielokrotne wartości własne . . . . .	105
<b>6</b>	<b>MES w optymalizacji konstrukcji narażonej na rezonans</b>	<b>107</b>
6.1	Rozwiązanie problemu własnego . . . . .	107
6.2	Implementacja algorytmu obliczającego wrażliwość wartości własnych – jednokrotne wartości własne . . . . .	108
6.3	Implementacja algorytmu obliczającego wrażliwość wartości własnych – wielokrotne wartości własne . . . . .	112
6.4	Złożoność obliczeniowa algorytmu analizy wrażliwości . . . . .	113
6.5	Przykłady optymalizacji konstrukcji ze względu na oddalenie od częstotliwości rezonansowej . . . . .	114
6.5.1	Belka jednostronnie utwierdzona – weryfikacja algorytmu obliczania wrażliwości częstotliwości drgań własnych . . . . .	115
6.5.2	Płyta usztywniona dwoma belkami . . . . .	117
6.5.3	Optymalizacja wału turbiny energetycznej . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Program Metody Elementów Skończonych FEAP</b>	<b>132</b>
	<b>Spis ważniejszych oznaczeń</b>	<b>145</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>149</b>

# Rozdział 1

## Wstęp

### 1.1 Motywacja i cel pracy

Konstrukcje, części maszyn i inne wytwory techniki, w przeważającej większości, narażone są na obciążenia zmienne w czasie. W przypadku gdy zmiany te są powolne, np. obciążenie konstrukcji stropu w budynkach, zmiana ciśnienia w kotle, wówczas możemy pominąć siły bezwładności i potraktować taki proces jako quasi-statyczny. W analizie tych przypadków wystarczająca jest znajomość zagadnień statyki. Jeśli natomiast obciążenie jest szybkozmienne, oprócz naprężeń wywołanych wymuszeniem zewnętrznym, elementy konstrukcji oddziałują na siebie z siłami bezwładności, których nie można pominąć. W szczególnie niekorzystnych przypadkach siły bezwładności mogą wielokrotnie przewyższać wartość obciążenia zewnętrznego.

Wzajemne oddziaływania elementów ustroju powodowane przyspieszeniami mogą okresowo zwiększać lub zmniejszać amplitudę drgań, a co za tym idzie naprężenia wewnątrz ustroju. W szczególnych przypadkach niedostosowania ustroju do warunków pracy, amplituda drgań oraz naprężeń wzrasta do wartości, które znacznie przewyższają założenia projektowe. W takim przypadku awaria jest nieuchronna, mimo spełnienia z nadwyżką wymagań, wynikających z samych obciążeń statycznych. Jednym z najbardziej spektakularnych tego przykładów była katastrofa mostu *Tacoma Narrows* w USA. Wiejący wiatr wprawiał most w oscylacje o takiej amplitudzie, że po niespełna sześciu miesiącach od oddania do użytku most się zawalił.

Projektowanie konstrukcji lub części maszyn narażonych na obciążenie zmienne w czasie stawia przed konstruktorem trudne zadanie dostosowania ich do przyszłych warunków pracy. Z punktu widzenia efektywności redukcji niepożądanych drgań najlepiej jest zlikwidować źródło lub zmienić przyczyny wibracji, czyli prowadzić zabiegi minimalizacyjne w źródle drgań. Chodzi tu nie tylko o spełnienie warunków wytrzymałościowych, lecz także o takie zaprojektowanie układu, aby jego drgania były jak najmniejsze lub najmniej znaczące. Jedną z dróg unikania niepożądanych wibracji jest

optymalizacja konstrukcji ze względu na częstotliwości drgań własnych.

Projektant w dużej mierze musi polegać na własnym doświadczeniu i wyczuciu. W klasycznym podejściu konstruktor, po zapoznaniu się z ograniczeniami, projektuje dany element. Następnie wykonuje niezbędne obliczenia wytrzymałościowe oraz, w razie potrzeby, dokonuje analizy drgań. Jeśli którekolwiek z kryteriów nie jest spełnione, projekt jest poprawiany. Dużą rolę odgrywa doświadczenie projektanta. Aby wspomóc mniej doświadczonych konstruktorów oraz oderwać się od utartych i rutynowych schematów myślowych w niniejszej pracy zaproponowano analizę wrażliwości częstości drgań własnych układu jako narzędzie wspomagające proces projektowania i optymalizacji konstrukcji mechanicznych.

Na rynku brak jest narzędzi do optymalizacji struktur drgających. Zaproponowany oraz zaimplementowany przez autora w programie Metody Elementów Skończonych FEAP (autorstwa prof. Taylora [124]) algorytm analizy wrażliwości konstrukcji ze względu na częstotliwości drgań własnych również nie jest narzędziem uniwersalnym. W rękach biegłego konstruktora znającego jego możliwości może jednak stać się pomocnym i użytecznym narzędziem wspomagającym proces projektowania [17].

Innym aspektem projektowania konstrukcji jest określenie, jak reaguje sam materiał na działanie obciążeń zmiennych w czasie. Należy zauważyć, że zmęczenie materiału może występować również przy obciążeniu konstrukcji stałą siłą. Zmienność naprężeń może być spowodowana zmianą położenia elementu. Takim przypadkiem jest np. wirujący wał, obciążony jedynie siłami masowymi.

Stwierdzonym doświadczalnie faktem jest to, że przy działaniu naprężeń zmiennych w czasie pęknięcie elementu (zniszczenie) może nastąpić przy działaniu naprężeń znacznie mniejszych od dopuszczalnych, a nawet poniżej granicy plastyczności. Szacuje się, że w czasach współczesnych ok. 80% ogółu awarii spowodowanych jest zniszczeniem zmęczeniowym. Ukazuje to skalę praktycznego znaczenia problemu zmęczenia materiału, dokładnego oszacowania trwałości zmęczeniowej nowych elementów oraz określenia stopnia zużycia konstrukcji już pracujących [41, 129].

Dotychczas przewidywanie trwałości zmęczeniowej części i elementów maszyn oraz innych konstrukcji inżynierskich sprowadza się do znalezienia tych stref, w których konstrukcja jest tak wytężona, że mogą wystąpić pęknięcia zmęczeniowe. Zwykle są to karby, geometryczne nieciągłości prowadzące do spiętrzenia naprężeń. W tych słabych punktach powinna być wykonana szczegółowa analiza naprężeń lub/i odkształceń. Ponieważ analiza naprężeń skomplikowanych układów (różne, nietypowe kształty karbów) jest dość trudna i pracochłonna, inżynier posiłkuje się skatalogowanymi wartościami współczynników koncentracji naprężeń. Katalog zawiera tylko wybrane rodzaje karbów, co sprawia, że niezbędne okazują się dość znaczne uproszczenia modelu obliczeniowego. Dość oczywistym rozwiązaniem problemu analizy naprężeń skomplikowanych konstrukcji jest zastosowanie Metody Elementów Skończonych (MES). Autorzy europejskiej normy EN 13445 [4] wskazują, że wykorzystanie MES w badaniach zmęczenia

materiału jest jeszcze niezadowalające.

Synteza stosowanych w praktyce teorii zniszczenia zmęczeniowego i trwałości zmęczeniowej oraz ich implementacja w programie MES są jednymi z celów rozprawy. W wielu przypadkach konstrukcja jest tak słaba jak jej najsłabsze ogniwo i pęknięcie zmęczeniowe w najsłabszym punkcie niszczy całą konstrukcję. Stochastyczny charakter trwałości zmęczeniowej wymaga jednak analizy wszystkich punktów konstrukcji narażonych na zniszczenie zmęczeniowe, również tych mniej wyteżonych.

W pracy zaproponowane zostały dwa odmienne podejścia do problemu oceny trwałości zmęczeniowej skomplikowanych konstrukcji przy użyciu aparatu MES.

Pierwsze z nich opiera się na stosowanej szeroko przez inżynierów metodzie prognozowania trwałości zmęczeniowej na podstawie wykresów S–N (naprężenie – ilość cykli) Wöhlera. Autor rozprawy zmodyfikował metodę poprzez wykorzystanie analizy MES, co spowodowało wyeliminowanie potrzeby stosowania tzw. współczynnika koncentracji naprężeń. Dostosowanie otrzymanych na drodze analizy MES wartości naprężenia do wykresów S–N realizowane jest poprzez wprowadzenie zastępczej amplitudy naprężenia. Pozwala to w szybki i stosunkowo prosty sposób prognozować trwałość dowolnie skomplikowanych konstrukcji.

Drugim proponowanym, odmiennym, podejściem przewidywania czasu pracy elementów konstrukcji jest metoda mechaniki uszkodzeń, której podwaliny stworzyli m.in. Chaboche i Lemaitre [29, 32, 33, 77, 78]. W tej metodzie wprowadzony zostaje izotropowy parametr uszkodzenia materiału. Degradację materiału, a co za tym idzie wartość współczynnika uszkodzenia w odniesieniu do ilości cykli (naprężenie – odprężenie), wyznacza powierzchnia zależna m.in. od wartości rzeczywistego naprężenia, parametrów plastyczności, itp. Prezentowane podejście pozwala nie tylko przewidywać trwałość zmęczeniową konstrukcji (nawet dla losowych, nieregularnych zmian naprężenia), lecz także śledzić miejsce, kierunek oraz prędkość propagacji szczeliny zmęczeniowej.

Obydwie, alternatywne, metody oceny trwałości zmęczeniowej zostały zaimplementowane do programu metody elementów skończonych FEAP. Stworzone zostało efektywne narzędzie dla inżyniera konstruktora pozwalające dokładniej oszacować trwałość zmęczeniową (metoda oparta o wykres S–N) oraz, jeśli to konieczne, śledzić kierunek propagacji pęknięcia zmęczeniowego (metoda mechaniki uszkodzeń) w celu dalszej poprawy (lub optymalizacji) kształtu elementu konstrukcji.

Niniejsza praca dotyczy zagadnień eliminacji niepożądanych drgań i wibracji poprzez optymalizację konstrukcji drgających, bez zastosowania tłumików zewnętrznych. Opracowane algorytmy pozwalają przewidywać trwałość zmęczeniową dowolnych konstrukcji z wykorzystaniem aparatu MES.

**Tezę pracy** można sformułować następująco:

- **Zastosowanie Metody Elementów Skończonych w analizie zmęczenio-**



wej konstrukcji pozwala dostosować znane algorytmy analizy zmęczeniowej do współczesnych wyzwań inżynierii – precyzyjnego oszacowania trwałości zmęczeniowej części maszyn o skomplikowanych kształtach na których spoczywa duża odpowiedzialność (np. przemysł lotniczy).

- Analiza zmęczeniowa konstrukcji za pomocą mechaniki uszkodzeń i MES pozwala oszacować przewidywany czas pracy układu nawet przy zmiennych obciążeniach dynamicznych i uwzględnieniu sił bezwładności. Dodatkowo, dzięki znajomości lokalizacji i kierunku propagacji pęknięcia umożliwia efektywną optymalizację elementów narażonych na pękanie zmęczeniowe. Możliwość uwzględnienia interakcji sprężystej i plastycznej natury odpowiedzi konstrukcji pozwala znacząco powiększyć klasę rozwiązywanych zadań analizy zmęczeniowej.
- Analiza wrażliwości wartości własnych konstrukcji drgających pozwala na precyzyjne wyselekcjonowanie parametrów konstrukcji, które mają największy wpływ na pracę urządzenia w niekorzystnych warunkach. Wykorzystanie aparatu MES pozwala na analizę wrażliwości konstrukcji o dowolnie skomplikowanym kształcie oraz warunkach brzegowych.

Optymalizacja konstrukcji ze względu na uniknięcie rezonansu umożliwia wyeliminowanie niepożądanych drgań, wibracji i hałasu wywoływanych przez elementy konstrukcji. Ponadto optymalizacja ze względu na oddalenie się od częstotliwości rezonansu prowadzi do zmniejszenia naprężeń w konstrukcji i zwiększenia jej trwałości zmęczeniowej.

Część badań została wykonana w ramach dwóch bardzo dużych projektów badawczych:

- PROHIPP - New Design and Manufacturing Processes for High Pressure Fluid Power Products - finansowanym przez Unię Europejską oraz
- DIADYN - Zintegrowany, Dynamiczny System Oceny Ryzyka, Diagnostyki oraz Sterownia dla Obiektów i Procesów Technicznych, PBZ - KBN – 105/T10/2003, koordynowany przez IMP PAN w Gdańsku.

## 1.2 Zawartość pracy

W pracy analizowane są dowolne konstrukcje poddane obciążeniom zmiennym w czasie. Badana była zarówno reakcja materiału użytego w konstrukcji na zmienny stan naprężenia, jak i odpowiedź konstrukcji – jej drgania.

Praca składa się z siedmiu rozdziałów i jednego dodatku.

Rozdział 2. zawiera podstawowe informacje o metodzie elementów skończonych. Podane zostały wytyczne, dotyczące budowy modelu numerycznego, jego kształtu i warunków brzegowych. Przedstawiony został problem analizy zmęczeniowej konstrukcji w odniesieniu do MES.

Rozdział 3. dotyczy problematyki zmęczenia materiału. Przedstawiono w nim mechanizm inicjacji i rozwoju pęknięcia zmęczeniowego. Omówione zostały dwie rozpatrywane w pracy metody analizy zmęczeniowej: Koncepcję Naprężeń Nominalnych i metodę opartą na mechanice uszkodzeń. Przedstawiono sposoby uwzględnienia w analizie zmęczeniowej naprężenia średniego oraz omówiono analizę zmęczeniową konstrukcji przy złożonym stanie naprężenia. Podano warunki oraz definicję powierzchni zniszczenia zmęczeniowego oraz przedstawiono funkcję utraty nośności materiału. Omówiono implementacje numeryczne (algorytmy) dla koncepcji naprężeń nominalnych oraz analizy zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń w programie FEAP. Przedstawiono przykłady oceny trwałości zmęczeniowej cylindra hydraulicznego oraz analizę rozwoju pęknięć zmęczeniowych.

Rozdział 4. przedstawia najczęściej stosowane w praktyce wskaźniki niezawodności konstrukcji, narażonych na zmęczenie materiału. Omówione zostały wskaźniki otrzymane na podstawie wykresu Goodmana. Wykonano analizę niezawodności cylindra hydraulicznego.

Rozdział 5. poświęcony jest algorytmom analizy wrażliwości i optymalizacji ze względu na częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Omówiono zjawisko rezonansu i niebezpieczeństwa jakie ze sobą niesie. Wyprowadzono analityczne wzory pozwalające na analizę wrażliwości wartości własnych konstrukcji na dowolny parametr projektowy. Uwzględniono przypadki konstrukcji charakteryzujące się wielokrotnymi wartościami własnymi. Omówiono odpowiednie algorytmy numeryczne.

W rozdziale 6. przedstawiono algorytm analizy wrażliwości oraz sposób jego implementacji w programie FEAP. Zaproponowano funkcje celu jako oddalenie częstości drgań własnych konstrukcji od częstości wymuszenia. Przedstawiono przykłady optymalizacji płyty usztywnionej oraz wału turbiny energetycznej. Wyniki zostały zbadane pod kątem wpływu optymalizacji na trwałość zmęczeniową konstrukcji.

Rozprawę kończy podsumowanie zawierające wnioski oraz perspektywy dalszej pracy.

Dodatek A zawiera krótki opis programu FEAP oraz wprowadzone przez autora nowe komendy języka makr FEAP.

## 1.3 Przegląd literatury

Niniejsza praca obejmuje problematykę analizy i projektowania konstrukcji obciążonych siłami zmiennymi w czasie. Metoda Elementów Skończonych (MES) jest

szeroko stosowaną metodą analizy konstrukcji zarówno w zagadnieniach inżynierskich jak i laboratoryjnych. Metoda opisana została w wielu wybitnych pracach np. [8, 49, 63, 64, 122, 133]. W pracy autor wykorzystał do analizy i optymalizacji konstrukcji program Metody Elementów Skończonych FEAP.

Zmienne pole naprężeń ma dwojaki wpływ na konstrukcję: wprowadza ją w drgania oraz niszczy materiał, z którego ustrój jest wykonany.

Zjawisko zmęczenia materiału zauważono już na początku XIX wieku [37], a jednym z pierwszych, który podjął próby zrozumienia i przewidywania zniszczenia zmęczeniowego był niemiecki inżynier kolejowy August Wöhler [127]. Zauważył on, że konstrukcje i części maszyn mogą ulec zniszczeniu przy naprężeniach znacznie mniejszych od wytrzymałości materiału lub nawet granicy plastyczności. Wysnuł hipotezę, że powodem utraty nośności jest cykliczne obciążanie i odciążanie konstrukcji. Zbudował maszynę, która cyklicznie obciążała i odciążała próbki materiału z możliwością obliczenia ilości cykli. Dzięki tej maszynie zbudował eksperymentalny wykres uzależniający wytrzymałość elementu (w tym przypadki próbki) od liczby cykli obciążenia. Krzywe Wöhlera pozwalają na prognozowanie czasu pracy konstrukcji już w fazie jej projektowania.

Idea krzywych S–N Wöhlera jest z powodzeniem stosowana przez inżynierów do dnia dzisiejszego. Główną zaletą tej metody jest łatwość jej stosowania. Wystarczy obliczyć wartość naprężenia nominalnego oraz określić współczynnik koncentracji naprężeń  $K_f$ . Nie zachodzi potrzeba wykonywania skomplikowanych obliczeń naprężenia w dnie karbu. Charakterystyki zmęczeniowe oraz współczynniki  $K_f$  są skatalogowane dla różnych kształtów karbów, sposobów obróbki materiału, itp. Ponieważ metoda S–N jest oparta o testy eksperymentalne, obliczona trwałość zmęczeniowa prostych konstrukcji jest bliska rzeczywistej trwałości zmęczeniowej. Sposoby obliczenia trwałości zmęczeniowej i współczynniki wpływające na zmęczenie materiału zostały opisane w szeregu Polskich Norm: PN-84/H-04334, PN-EN 1993-1-9:2007, PN-ISO 6336-2:2000, PN-74/H-04327, PN-76/H-04325, PN-84/H-04662, PN-76/H-04326, PN-EN 1999-1-3:2007, PN-EN ISO 14324:2004 oraz w Europejskich Normach, np. [4, 21, 22, 40] i innych. W Europejskiej Normie, dotyczącej obliczeń zmęczeniowych EN 13445 [4], wskazane są braki, dotyczące właściwego połączenia nowoczesnej, z inżynierskiego punktu widzenia, metody analizy naprężeń metodą elementów skończonych z obliczeniami zmęczeniowymi. Metoda jest stosowana również w analizie konstrukcji obciążonej siłami zmiennieamplitudowymi [108, 119].

Druga grupa metod analizy zmęczeniowej jest oparta o Koncepcję Odkształceń Lokalnych (KOL). U podstaw metody leży założenie o zamkniętych pętłach histerezy na płaszczyźnie naprężenie – odkształcenie. Zakłada się, że pętle histerezy są takie same zarówno w przypadku gładkich próbek, jak i w przypadku konstrukcji z karbem. Skoro tak, to trwałość zmęczeniowa w obu przypadkach, przy takich samych odkształceniach jest taka sama. Otrzymany czas pracy konstrukcji traktowany jest jako czas

do inicjacji pęknięcia. Czas propagacji pęknięcia zmęczeniowego jest znacząco krótszy i zwykle, ze względów bezpieczeństwa, pomijany w szacowaniu trwałości zmęczeniowej elementu.

Aby ocenić trwałość elementu za pomocą tej metody niezbędne jest także obliczenie, oprócz naprężeń, odkształceń w miejscu narażonym na pękanie zmęczeniowe. Naprężenie w dnie karbu jest często wyższe niż granica plastyczności materiału, co dodatkowo komplikuje obliczenia. Dla potrzeb analizy zmęczeniowej szeroko stosowane są uproszczone metody określania naprężenia i odkształcenia, np. zaproponowane przez Neubera [95] lub przez Molskego [90] i Ładogę [72].

W początkowym okresie badań, ze względu na konieczność zliczania pętli histerezy, koncepcja Odkształceń Lokalnych była stosowana tylko w przypadkach zmęczenia niskocyklowego [35] i dla materiałów ciągliwych. Późniejsze badania, między innymi Morrowa [91], rozszerzyły zakres stosowania metody również o problem zmęczenia wysokocyklowego.

Główną zaletą metody odkształceń lokalnych jest możliwość stosowania tych samych zależności odkształcenie – trwałość zmęczeniowa zarówno do gładkich próbek laboratoryjnych, jak i skomplikowanych konstrukcji rzeczywistych. Wadą metody jest duża złożoność obliczeniowa w przypadkach, gdy naprężenie w dnie karbu przekracza wartość granicy plastyczności.

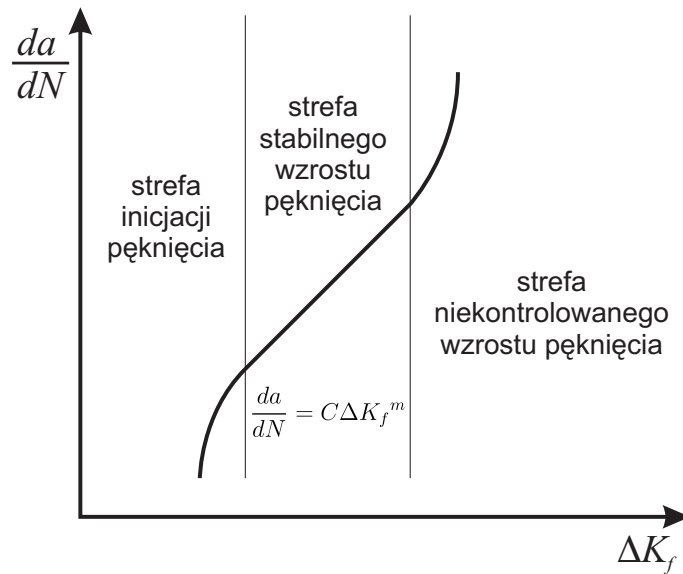
Trzecią ważną grupą koncepcji oceny trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcji są metody oparte na mechanice pękania. Większość tych metod wykorzystuje liniowo-sprężystą teorię mechaniki pękania. W odniesieniu do trwałości zmęczeniowej istnieje wiele wariantów tej koncepcji [24, 36, 96, 103, 107, 109]. Najczęściej stosowany jest wzór zaproponowany przez Parisa [101]

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K_f^m \quad (1.1)$$

gdzie  $\frac{da}{dN}$  jest przyrostem długości pęknięcia na cykl naprężenia,  $C$  oraz  $m$  są stałymi materiałowymi zaś  $K_f$  jest współczynnikiem intensywności naprężeń. Koncepcja Parisa opisuje jedynie przedział stałej prędkości wzrostu szczeliny (por. rysunek 1.1). Wzór 1.1 jest szeroko stosowany ze względu na prostotę oraz stosunkowo dużą ilość dostępnych danych.

Określenie trwałości zmęczeniowej za pomocą koncepcji mechaniki pękania sprowadza się do całkowania wzoru 1.1 i sumowania przyrostów długości szczeliny do czasu osiągnięcia przez  $\frac{da}{dN}$  wartości krytycznej. Powyżej tej granicy pęknięcie rośnie niestabilnie aż do nagłego zniszczenia konstrukcji. Otrzymana wartość  $N$  traktowana jest jako ilość cykli naprężenie – odprężenie.

W przypadku konstrukcji rzeczywistych głównym problemem analizy zmęczeniowej za pomocą mechaniki pękania jest modelowanie szczeliny (pęknięcia zmęczeniowego). Dotyczy to zarówno doboru odpowiedniej geometrii badanej konstrukcji,



Rysunek 1.1: Krzywa rozwoju pęknięcia zmęczeniowego wg teorii Parisa.

modelu szczeliny, jak i sposobu jej obciążania (ze względu na złożony stan naprężenia i odpowiadające im współczynniki intensywności naprężeń  $K_f$ ) [52]. Wiele różnych typów szczelin modelowych, które mogą służyć jako zastępcze, zostało zaproponowanych w [94] oraz [113].

Koncepcja mechaniki pękania w praktyce pozwala otrzymać trwałość zmęczeniową elementów jedynie w przypadku zmęczenia niskocyklowego. Dobór modelu mechaniki pękania oraz obliczenia trwałości zmęczeniowej napotykają na liczne trudności. Głównie jest to złożoność obliczeniowa oraz niedokładność szacowania trwałości zmęczeniowej powodowana pominięciem okresu inicjacji szczeliny. W przypadku zmęczenia wysokocyklowego okres inicjacji pęknięcia jest stosunkowo długi i determinuje ostateczną trwałość zmęczeniową konstrukcji. Inne trudności wynikają w trakcie stosowania koncepcji mechaniki pękania z wykorzystaniem trójwymiarowych elementów skończonych.

Czwartą grupą metod oceny trwałości zmęczeniowej jest mechanika uszkodzeń. Chaboche w 1974 roku [29] oraz w swoich późniejszych pracach [30–33] zaproponował wykorzystanie warunków termodynamiki materiału sprężysto-plastycznego do opracowania nieliniowego ciągłego modelu materiału z parametrem uszkodzenia. Efektem prac Chaboche'a jest funkcja degradacji materiału otrzymana na bazie eksperymentalnych krzywych zmęczeniowych S–N. Inny teoretyczny model materiału z uszkodzeniem został opracowany przez Lemaitre [77, 78]. W swojej monografii łączy zalety koncepcji mechaniki pękania z klasycznym (zaproponowanym przez Chaboche'a) modelem materiału z uszkodzeniem. Badania Chaboche'a oraz Lemaitre znalazły wielu naśladowców, m.in. Xiao [130], Oller [97, 98] i inni.

W roku 2005 Oller i inni [98] opracowali model konstytutywny materiału z degra-

dacją zmęczeniową na podstawie prac Chaboche'a. Zaproponowali postać analityczną krzywych zmęczeniowych S–N oraz funkcji redukcji nośności materiału. Teoria została zaimplementowana w kodzie źródłowym programu metody elementów skończonych COMET [28].

Niniejsza praca stanowi kontynuację i rozwinięcie prac nad modelem materiału z uszkodzeniem zmęczeniowym. Zaproponowana została modyfikacja praw konstytutywnych, opracowanych przez Chaboche'a [32, 33] oraz Ollera [97, 98], która ma na celu wprowadzenie pełnej zgodności metody analizy zmęczeniowej opartej o mechanikę uszkodzeń z metodą S–N włączając, m.in. wpływ naprężeń średnich. Opracowany algorytm został zaimplementowany do programu metody elementów skończonych FEAP, a otrzymane wyniki zostały porównane z trwałością zmęczeniową obliczoną metodą S–N oraz wynikami eksperymentów zmęczeniowych. Należy podkreślić, że wynikiem analizy zmęczeniowej metodą mechaniki uszkodzeń jest nie tylko przewidywany czas pracy konstrukcji, ale również przewidywany kierunek propagacji szczeliny zmęczeniowej. Ma to niebagatelne znaczenie przy optymalizacji i próbach wydłużenia trwałości zmęczeniowej układu.

Szybki rozwój techniki spowodował wzrost znaczenia niezamierzonych efektów, które towarzyszą każdemu procesowi wytwórczemu: drgań i hałasu. Jak zauważyli Cempel [27] oraz Inman [51] najskuteczniejszą metodą eliminacji bądź zmniejszenia niepożądanych skutków drgań jest ingerencja w źródło drgań. Jako źródło drgań w niniejszej pracy traktowane jest rzeczywiste źródło drgań (np. silnik) wraz z jego konstrukcją nośną oraz ruchome części maszyn.

Szczegóły analizy drgań układów mechanicznych można znaleźć w wielu pozycjach książkowych, np. [44, 51, 59]. Podręczniki te zawierają szczegółową analizę różnych rodzajów drgań konstrukcji mechanicznych.

Również problematyka zmniejszenia uciążliwości drgań i hałasu nie jest nowa. Została poruszona, m.in. w pracach [27, 50, 51, 110, 126, 128]. W wymienionych pozycjach problem redukcji drgań i hałasu rozwiązany zostaje różnymi metodami.

Jednym ze sposobów zmniejszania drgań i hałasu jest optymalizacja źródła drgań pod kątem jego częstotliwości drgań własnych. Projektowanie konstrukcji optymalnych ze względu na częstości drgań własnych jest przedmiotem wielu prac, m.in. [45, 102, 126, 128].

Gradientowe metody optymalizacyjne, opisane w pracach m.in. [7, 43, 65] uważane są za jedne z najefektywniejszych. Historia analizy wrażliwości drgań własnych konstrukcji sięga lat sześćdziesiątych i prac Lancastera [73]. Lancaster zauważył, że w przypadku macierzy posiadających wielokrotne wartości własne, odpowiadające im wektory własne są liniowo zależne. Osobliwość macierzy wektorów własnych powoduje niemożliwość jednoznacznego rozwiązania problemu własnego. Podobna trudność spotykana jest przy różniczkowaniu wartości własnych macierzy, posiadającej wielokrotne wartości własne. Rozwiązanie problemów powodowanych przez osobli-

wość macierzy wektorów własnych konstrukcji opublikowane zostało m.in. w pracach [5, 34, 47, 75, 86, 93, 131].

W późniejszym okresie wydanych zostało wiele prac traktujących na temat wrażliwości drgań swobodnych konstrukcji przy jednokrotnych wartościach własnych np. prace [46, 126, 128] oraz uwzględniając wielokrotne wartości własne, np. prace [38, 45, 48, 66, 74, 76, 79, 88, 92, 110, 112].

W niniejszej rozprawie została dokonana synteza dotychczasowych osiągnięć w dziedzinie analizy wrażliwości drgań własnych konstrukcji. Program metody elementów skończonych FEAP został wzbogacony o możliwość wykonania analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji na dowolny parametr projektowy. Przedstawiono przykład optymalizacji konstrukcji, w której funkcja celu ma za zadanie oddalenie częstości własnych konstrukcji od częstości wymuszenia.

## 1.4 Koncepcja realizacji celu pracy oraz podstawowe założenia

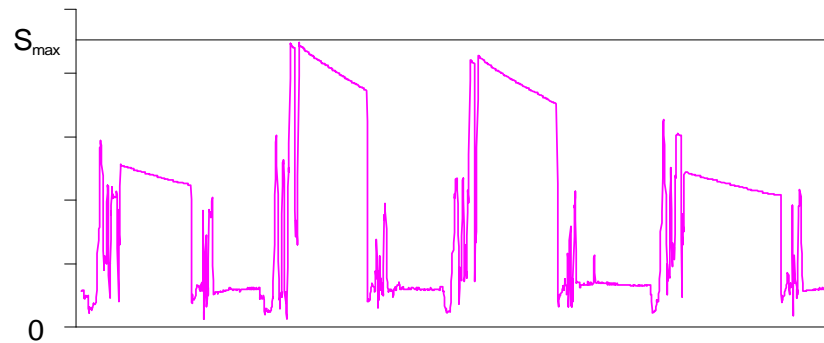
Problem projektowania konstrukcji drgających jest bardzo szeroki, znacznie wykraczający poza zakres niniejszej pracy. Wyróżnione zostały dwa rodzaje reakcji ustroju na zmienne pole naprężenia: zmęczeniowa degradacja materiału oraz drgania mechaniczne konstrukcji.

Metoda oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie stanu naprężenia jest szeroko stosowana przez inżynierów po dziś dzień. Jest to niewątpliwie zasługą prostoty koncepcji oraz ogromnej ilości badań eksperymentalnych, prowadzonych na potrzeby metody. Otrzymane krzywe S-N zostały skatalogowane.

Głównym problemem jest obliczenie rzeczywistych wartości naprężeń, działających na elementy konstrukcyjne. W tym celu stosuje się skatalogowane dla różnych, typowych, kształtów współczynniki koncentracji naprężeń  $K_f$ . Analiza konstrukcji nietypowych wprowadza konieczność stosowania daleko idących uproszczeń rzeczywistego kształtu elementu konstrukcji tak, aby dopasować go do istniejących skatalogowanych kształtów typowych. Prowadzi to do szeregu błędów, zarówno niedoszacowania jak i, co gorsze, przeszacowania dopuszczalnego czasu pracy konstrukcji.

Metoda Elementów Skończonych (MES) pozwala na obliczenie pól naprężeń dla dowolnie skomplikowanych konstrukcji. Autor zaproponował metodologię analizy zmęczeniowej z wykorzystaniem MES.

Stochastyczny charakter trwałości zmęczeniowej konstrukcji mechanicznych pociąga za sobą konieczność określenia niezawodności konstrukcji, a także wyznaczenia terminów napraw i wymiany poprawnnie pracujących ale już zużytych zmęczeniowo elementów konstrukcji. Ma to ekonomiczne uzasadnienie, ponieważ ewentualne nieprze-



Rysunek 1.2: Wykres ciśnienia oleju w cylindrze hydraulicznym koparki.

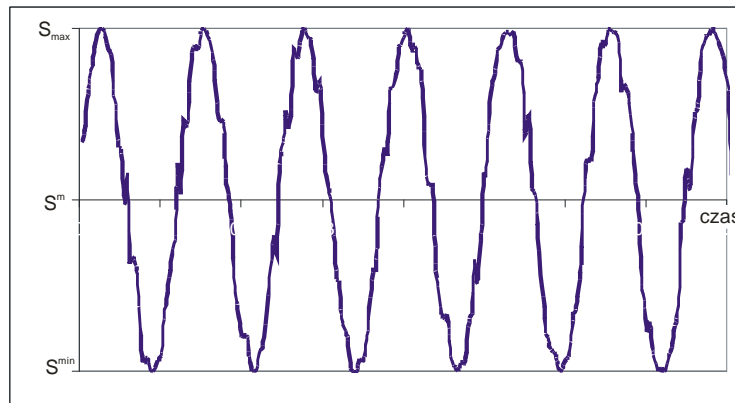
widziane awarie mogą przynosić znaczne straty, wielokrotnie przewyższające koszty profilaktycznej wymiany zużytych części.

W niniejszej rozprawie analiza drgań mechanicznych konstrukcji została sprostowana do analizy jej drgań własnych. Przedstawiono zjawisko rezonansu i niebezpieczeństwo jakie z sobą niesie. Zaproponowano algorytm analizy wrażliwości, który pozwala na efektywniejszą optymalizację konstrukcji narażonych na drgania mechaniczne.

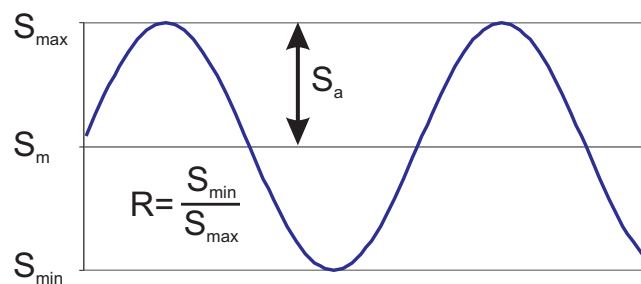
Przyjęto następujące założenia:

1. Funkcja opisująca przebieg obciążenia jest ciągła, nie występują nagle skoki wartości sił, uderzenia, itp.
2. Wykres rzeczywistego przebiegu ciśnienia płynu w cylindrze hydraulicznym przedstawia rysunek 1.2. Bardzo rzadko można odnaleźć analityczną postać rzeczywistego przebiegu obciążenia. Zwykle rzeczywista historia obciążenia jest podana w sposób dyskretny jako wynik ciągu pomiarów. Ogólnie można przyjąć, że dla dowolnej konstrukcji wykres przebiegu obciążenia przyjmuje charakter stochastyczny. Niezbędne są daleko idące uproszczenia i parametryzacja obciążenia.
  - Przyjmujemy, że w danym cyklu obciążenia ważne są jedynie skrajne wartości lokalnego minimum i lokalnego maksimum. Sposób przejścia od lokalnego minimum do lokalnego maksimum jest pomijany, o ile jest on ciągły i monotoniczny.
  - Jeśli przebieg obciążenia w czasie wykazuje dużą zmienność amplitudy, należy zliczyć poszczególne cykle obciążenia, np. metodą rainflow (por. rozdział 3.2.4). Metoda rainflow zamienia funkcję obciążenia w czasie na schodkową funkcję obciążenia w dziedzinie ilości cykli. Wykonując tą operację tracimy informację o kolejności następujących po sobie cykli oraz uśredniamy wartość amplitudy obciążenia w danym poziomie obciążenia.



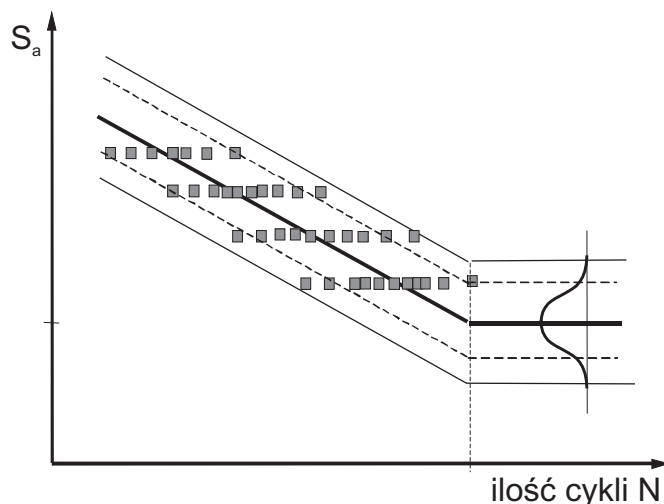


Rysunek 1.3: Przykładowy przebieg naprężenia w wale obrotowym.



Rysunek 1.4: Wielkości charakterystyczne dla cyklu obciążenia (naprężenia).

- W przypadku gdy konstrukcja pracuje w stanie ustalonym, np. wał turbiny pracujący ze stałą prędkością obrotową, wykres przebiegu obciążenia w czasie charakteryzuje stała amplituda drgań wraz z nałożonym szumem, rysunek 1.3. W takim przypadku można przyjąć obciążenie zastępcze jako oscylujące pomiędzy naprężeniem maksymalnym  $S_{max}$  oraz minimalnym  $S_{min}$  bez uwzględnienia szumu.
  - Pojedynczy cykl jest charakteryzowany przez dwie wielkości: amplitudę naprężenia  $S_a$  i naprężenie średnie  $S_m$  lub amplitudę naprężenia  $S_a$  i współczynnik asymetrii cyklu  $R$  (por. rysunek 1.4).
  - Niektóre metody analizy zmęczeniowej, np. metoda analizy w oparciu o mechanikę uszkodzeń (rozdział 3.3), nie wymagają uproszczenia i parametryzacji historii obciążenia. Jednak koszt obliczeniowy takiej analizy jest akceptowalny jedynie dla bardzo prostych konstrukcji (próbek).
3. Materiał konstrukcyjny, wykonany nawet wg najnowocześniejszych technologii, charakteryzuje się pewną stochastyczną zmiennością swoich właściwości w różnych punktach konstrukcji. Dotyczy to szczególnie połączeń pomiędzy dwoma elementami konstrukcji, np. spawów, zgrzewań, itp. W niniejszej pracy autor przyjmuje deterministyczne wartości stałych materiałowych w każdym punkcie



Rysunek 1.5: Stochastyczny obraz zmęczeniowej krzywej S–N.

konstrukcji.

4. Eksperymentalne wykresy zmęczeniowe S–N przedstawiają dyskretne wartości trwałości zmęczeniowej elementu przy danej wartości obciążenia. Nawet w przypadku takiej samej wartości obciążenia trwałość próbek wykonanych z tego samego materiału i o takim samym kształcie może się znacząco różnić. Powoduje to, iż mamy do czynienia z pękiem krzywych zmęczeniowych (rysunek 1.5), które określają niezawodność konstrukcji. W niniejszej rozprawie korzystano z uproszczonych krzywych zmęczeniowych. Stosowany wykres zmęczeniowy S–N przedstawia średnią trwałość zmęczeniowa przy danej wartości obciążenia. Więcej informacji na temat przyjętych krzywych zmęczeniowych zamieszczono w rozdziale 3.2.1.
5. Kształt oraz sposób obciążenia rzeczywistych konstrukcji i części maszyn powoduje, że analiza naprężeń daje w rezultacie złożony stan naprężenia. W niniejszej pracy złożony stan naprężenia zostaje sprowadzony do odpowiadającej mu wartości skalarnej – naprężenia zredukowanego  $S_{red}$ , a analiza zmęczeniowa przyjmuje charakter jednowymiarowy. Metody oraz zasady obliczania naprężenia zredukowanego zostały opisane w rozdziale 3.2.3.
6. Analiza zmęczeniowa oraz parametry zmęczeniowe elementów konstrukcyjnych zostały ograniczone do stali konstrukcyjnych. Prezentowane metody analizy zmęczeniowej umożliwiają ocenę trwałości elementów wykonanych z innych materiałów (stali narzędziowych lub innych stopów metali nieżelaznych), jednak wymagają dostosowania stałych materiałowych i innych parametrów zmęczeniowych.
7. Ocenę niezawodności konstrukcji narażonej na zniszczenie zmęczeniowe wykonano na podstawie empirycznych wskaźników niezawodności. Szczegółowa analiza

niezawodności konstrukcji jest zagadnieniem złożonym i wykracza poza cel pracy.

8. Inżynier mający przeprowadzić analizę drgań projektowanej konstrukcji musi wziąć pod uwagę wiele aspektów, m.in. niebezpieczeństwo pracy konstrukcji w warunkach rezonansu lub bliskich rezonansu. W niniejszej pracy analizę drgań konstrukcji ograniczono jedynie do analizy jej drgań swobodnych.
9. W rozwiązaniu problemu własnego pominięto tłumienie oraz, w przypadku wałów obrotowych, efekty żyroskopowe. Pominięto także problem nieliniowych drgań własnych, np. w sytuacji gdy zachodzi okresowy kontakt.
10. Uwzględniono możliwość analizy wrażliwości konstrukcji z wielokrotnymi wartościami własnymi, np. konstrukcji symetrycznych lub wykonanych z powtarzających się modułów.
11. W przypadku analizy wałów obrotowych pominięto sztywności i siły wzdłużne.
12. Analiza zmęczeniowa obrotowych wałów stopniowanych poddanych optymalizacji ze względu na oddalenie się od częstotliwości rezonansu została wykonana bez uwzględnienia koncentracji naprężeń na stopniach wału. Założono, że wał wykonany jest zgodnie ze sztuką inżynierską i wykonane są niezbędne podtoczenia i fazy relaksujące koncentrację naprężeń.
13. W procesie optymalizacji konstrukcji, ze względu na częstotliwości drgań własnych, funkcję celu zdefiniowano jako różnicę pomiędzy częstotliwością wymuszenia, a najbliższą częstotliwością drgań własnych. W ogólnym przypadku pominięta jest informacja niesiona przez wektor własny odpowiadający rozpatrywanej wartości własnej konstrukcji. W przypadku gdy kierunek obciążenia zewnętrznego jest prostopadły do kierunku deformacji konstrukcji opisanej przez wektor własny możliwość pracy w warunkach rezonansu, z teoretycznego punktu widzenia, jest niemożliwa. W rzeczywistych konstrukcjach niedokładności wykonania oraz inne imperfekcje mogą doprowadzić do rezonansowego wzbudzenia drgań o dużych amplitudach nawet w przypadku, gdy kierunek obciążenia jest prostopadły do kierunku deformacji.
14. W przypadku analizy i optymalizacji wałów obrotowych opracowano specjalny rodzaj elementu skończonego wału, w którym wyeliminowane zostały postaci drgań wzdłużnych i skrętnych. Analizowane były tylko giętne postaci i wartości własne wałów.

# Rozdział 2

## Metoda Elementów Skończonych w analizie konstrukcji poddawanych obciążeniom zmiennym w czasie

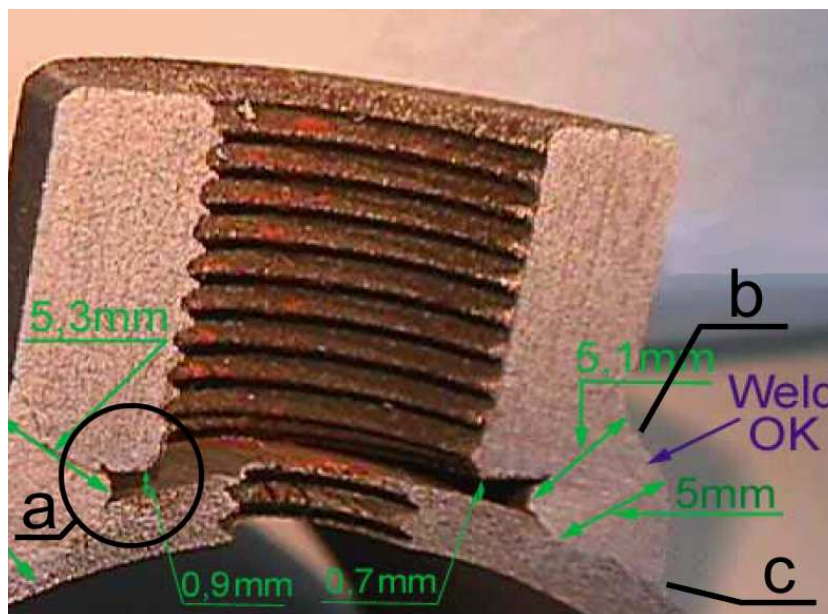
### 2.1 Przygotowanie modelu numerycznego

Prognozowanie trwałości zmęczeniowej konstrukcji prezentowanymi metodami wymaga szczegółowej i dokładnej analizy naprężeń. Metoda elementów skończonych (MES) jest narzędziem pozwalającym na badanie odpowiedzi dowolnie skomplikowanych konstrukcji na równie złożone rodzaje obciążeń. W literaturze zwraca się jednak uwagę na przybliżony charakter metody. W szczególnie wrażliwym zakresie wysokocyklowym analizy zmęczeniowej, blisko granicy zmęczeniowej, naprężenia obarczone błędem rzędu 5% mogą powodować błąd oceny trwałości konstrukcji rzędu 400% [10, 11, 19, 53].

#### 2.1.1 Model MES konstrukcji

Pęknięcia zmęczeniowe znajdują zwykle swój początek we wszelkiego rodzaju krawach, nieciągłościach czy uskokach geometrycznych. Modelowanie właśnie tych elementów konstrukcji ma decydujące znaczenie dla poprawności prognozowania czasu pracy konstrukcji.

Jeśli zmiana przekroju elementu jest spowodowana obróbką skrawaniem (np. toczeniem) lub obróbką plastyczną (np. kuciem) to odwzorowanie rzeczywistego kształtu elementu konstrukcji w modelu MES jest stosunkowo proste. W takich przypadkach nie spotyka się ostrych krawów, które w modelu numerycznym są źródłem osobliwości i błędów. Inaczej jest gdy nieciągłość geometryczna powstaje w skutek stałego łączenia dwóch różnych elementów. Z doświadczeń wynika, że spoiny powstałe w skutek spa-



Rysunek 2.1: Przekrój cylindra hydraulicznego, spoina portu olejowego: a) miejsce niedostatecznego przetopu portu olejowego i rury cylindra, b, c) prawidłowy przetop [56].

wania lub zgrzewania są jednymi z najbardziej wrażliwych miejsc w których powstają pęknięcia zmęczeniowe.

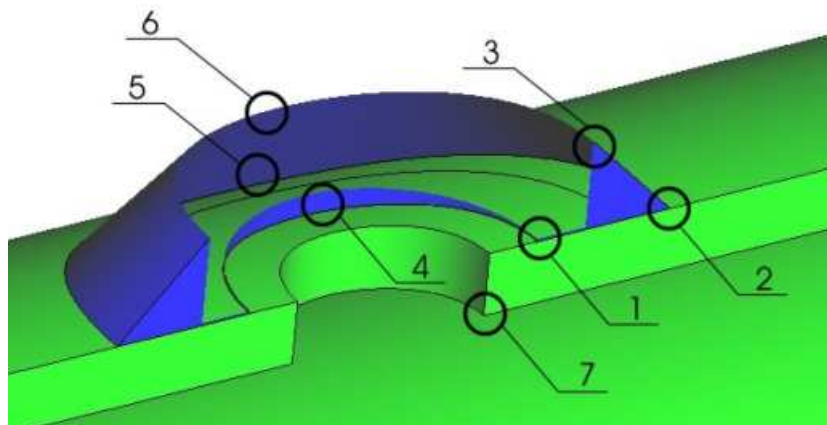
Zasadniczym celem wykorzystania MES w analizie zmęczeniowej jest wyeliminowanie empirycznych współczynników modyfikujących krzywą zmęczeniową, takich jak, np. współczynnik koncentracji naprężeń  $K_f$ . Naturalnym wynikiem analizy MES są pola naprężeń z konkretnymi wartościami naprężeń w każdym punkcie konstrukcji, nawet na dnie karbu.

Uwagi odnośnie modelowania połączeń spawanych ze względu na analizę zmęczeniową zostaną przedstawione na przykładzie siłowników hydraulicznych.

Na poprawność procesu spawania, a co za tym idzie na jakość spoiny, wpływa wiele czynników zależnych oraz niezależnych od spawacza: atmosfera spawania, temperatura spawania, wady materiałowe elementów spawanych, wtrącenia, skoki natężenia prądu spawania, niedoskonałości drutu spawalniczego oraz błędy samego spawacza. Czynniki te sprawiają, że nie sposób wykonać dwie identyczne spoiny. Zwykle istnieją miejsca w których przetop materiału jest niewystarczający. Pojawiają się tam wąskie szczeliny które zwykle są inicjatorami pęknięć zmęczeniowych.

Wady spoin spawanych oraz brak ich powtarzalności jest problemem, który należy rozwiązać w trakcie budowy modelu MES cylindra hydraulicznego.

Przekrój przez spoinę łączącą port olejowy z rurą cylindra hydraulicznego przedstawiony jest na rysunku 2.1. Widzimy, że wewnątrz portu olejowego, gdzie nie było możliwości dojścia elektrodą spawarki, istnieją miejsca w których elementy spawane



Rysunek 2.2: Strefa portu olejowego cylindra hydraulicznego, miejsca narażone na pękanie zmęczeniowe.

nie uległy dostatecznemu przetopieniu. W punkcie a) wskazano miejsce w którym tworzą się stosunkowo długie, ostro zakończone rozwarstwienia pomiędzy spoiną i portem olejowym oraz pomiędzy spoiną i rurą cylindra. Punkt c) (rysunek 2.1) również narażony jest na niedoskonałości spoiny. Ewentualne niedoskonałości spoiny zwykle spowodowane są błędami spawacza. Gdy błędy widoczne są tylko od wewnętrznej strony konstrukcji (np. wewnątrz cylindra hydraulicznego) bardzo trudno jest je wykryć i naprawić.

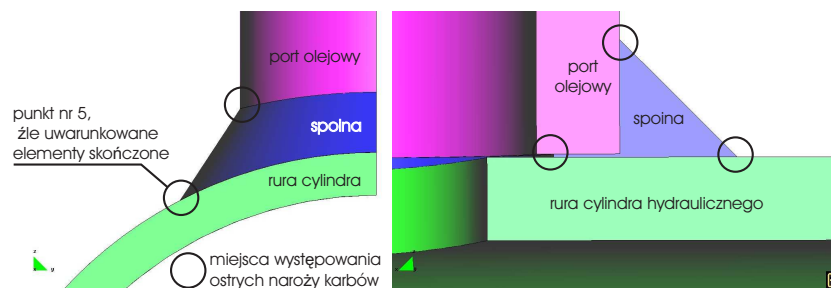
Stochastyczny charakter spoin spawanych wprowadza konieczność stosowania wielu uproszczeń podczas budowy modelu numerycznego. Zwykle modeluje się spoinę idealną (bez pęknięć). Jednak nierzadko, np. w przypadku cylindra hydraulicznego, wady spoiny powtarzają się na tyle często, że istnieje konieczność ich uwzględnienia w modelu numerycznym.

Prognozowanie trwałości zmęczeniowej konstrukcji wymaga w pierwszym rzędzie określenia miejsc narażonych na pękanie zmęczeniowe. Są to najczęściej różnego rodzaju karby, nieciągłości lub spoiny - koncentratory naprężeń. Strefy podatne na zniszczenie zmęczeniowe powinny być wyjątkowo starannie modelowane. Z punktu widzenia numerycznego niedopuszczalne są wszelkiego rodzaju ostre karby i naroża. Powodują one powstawanie osobliwości oraz znacznych błędów numerycznych, zarówno przeszacowania jak i niedoszacowania.

Przeprowadzono eksperyment numeryczny mający na celu zbadanie jaki jest wpływ niedoskonałości siatki elementów skończonych na wynik analizy naprężeń cylindra hydraulicznego. Dla uproszczenia badano jedynie okolice portu olejowego.

W okolicach portu olejowego cylindra hydraulicznego wyselekcjonowano 7 punktów (rysunek 2.2) w którym może zostać zainicjowane pęknięcie zmęczeniowe.

Pierwszym etapem eksperymentu było stworzenie modelu numerycznego cylin-



Rysunek 2.3: Niedoskonałości modelu numerycznego cylindra hydraulicznego.

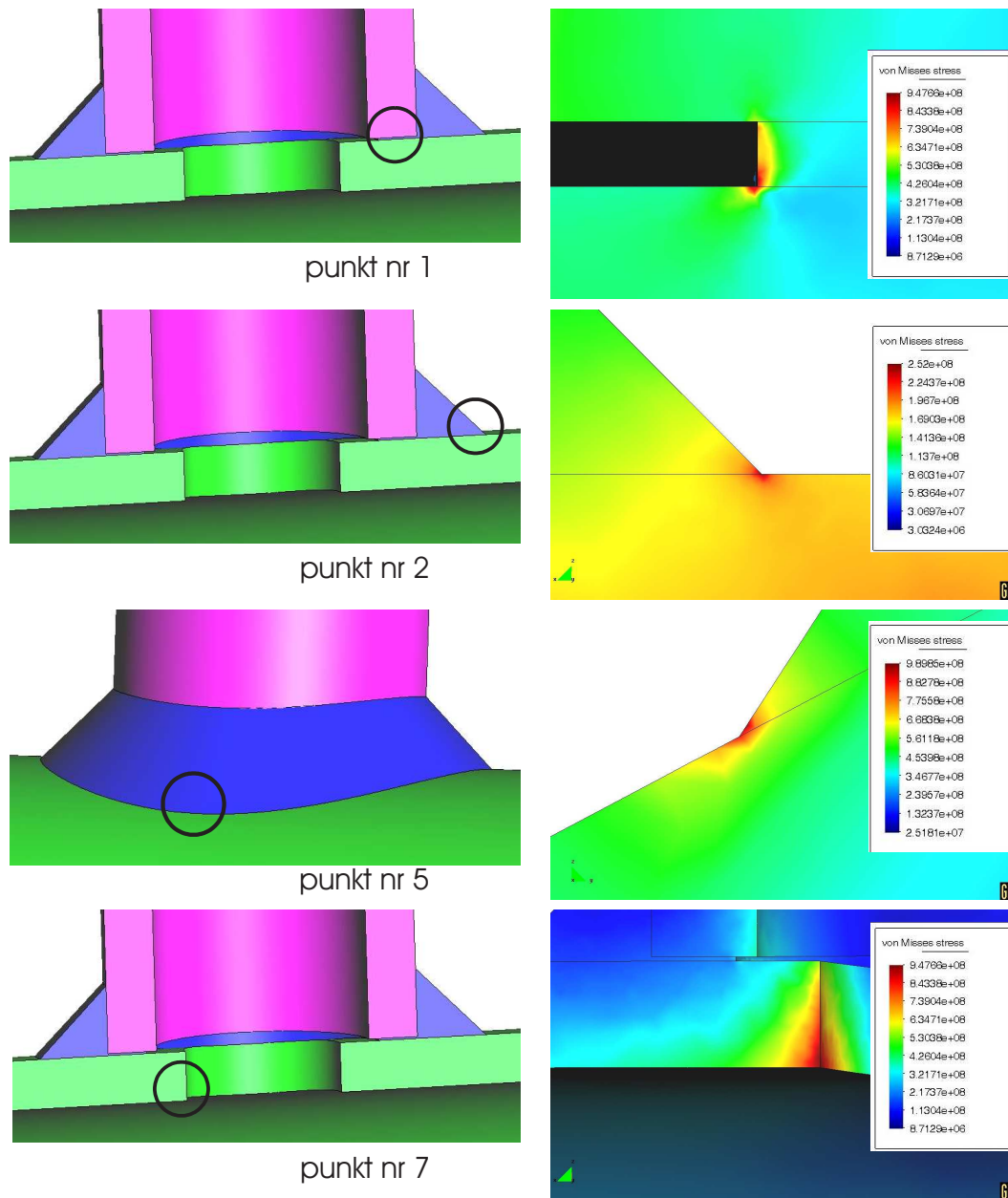
dra hydraulicznego w którym wszystkie karby zostały zamodelowane jako ostre naroża. Sposób modelowania został przedstawiony na rysunku 2.3. Port olejowy, spoina oraz rura cylindra zostały stworzone jako niezależne obiekty ze wspólnymi powierzchniami. Skutkuje to tym, że nie ma możliwości penetracji elementów jednego elementu wewnątrz drugiego. Wobec czego w punkcie nr 5 (rysunek 2.2) istnieje niebezpieczeństwo powstawania wydłużonych elementów skończonych o złym uwarunkowaniu.

Pola naprężeń zredukowanych von Misesa w krytycznych punktach przedstawia rysunek 2.4. W miejscach występowania ostrych naroży obserwujemy znaczne gradienty naprężenia. Różnica wartości naprężeń w sąsiadujących elementach skończonych sięga 50%. Taka sytuacja spowodowana jest osobliwościami numerycznymi w ostrych karbach. Wartości naprężeń obliczane są w punktach Gaussa, natomiast wartość naprężenia w węźle na dnie karbu obliczana jest na zasadzie ekstrapolacji. Jeśli sąsiedni element posiada znacząco niższą wartość naprężenia ekstrapolowana wartość naprężenia w węźle zwykle odbiega od wartości rzeczywistej.

Na rysunku 2.5 przedstawiono wykres zależności naprężenia w danym punkcie od wielkości zastosowanego elementu skończonego. Widzimy, że błędnemu modelowi numerycznemu nie można poprawić poprzez zagęszczenie siatki elementów skończonych. We wszystkich oznaczonych karbach, oprócz punktu nr 7, wartość naprężenia w punkcie, jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości stosowanego elementu skończonego. W takiej sytuacji dalsze zmniejszanie rozmiaru elementów skończonych prowadzi do znacznego rozrostu rozmiaru zadania bez poprawy wyników (a nawet z pogorszeniem) a w dalszej konsekwencji do powstawania numerycznych błędów obcięcia i zaokrąglenia.

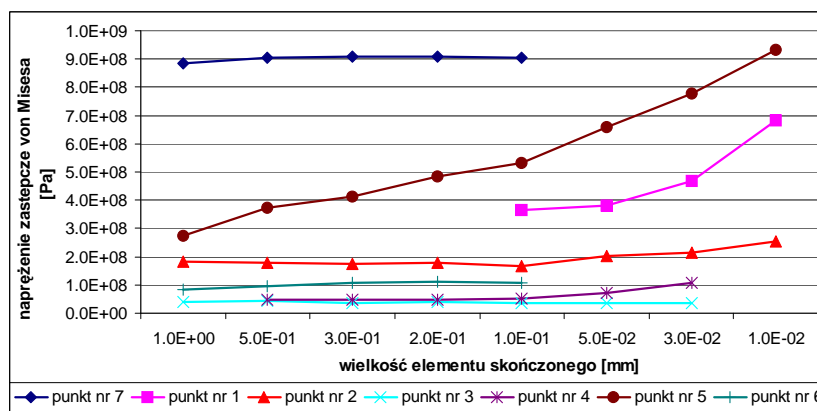
Odmienna sytuacja panuje w punkcie nr 7. Jest to kołowy otwór w rurze cylindra hydraulicznego. W tym miejscu nie ma ostrego naroża karbu. Na rysunku 2.6 przedstawiony został pełny obraz ilustrujący pole naprężeń wokół otworu w rurze cylindra.

Modyfikacja błędnego modelu numerycznego cylindra hydraulicznego polegała na wyeliminowaniu wszystkich ostrych naroży, czyli osobliwości numerycznych. W praktyce wiązało się to z budową od podstaw nowego modelu numerycznego cylindra hydraulicznego. Wszelkie gwałtowne zmiany przekroju zostały zamodelowane pewnymi fazami przejściowymi – łukami. Nawet gdy szerokość szczeliny jest bardzo mała, pomiędzy portem olejowym a rurą cylindra przyjęto odległość 0.1 mm, na końcu szczeliny

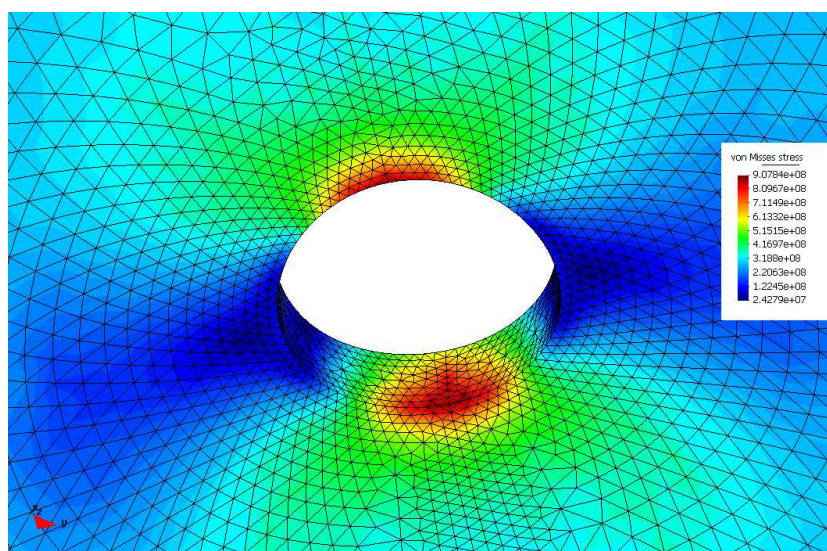


Rysunek 2.4: Pola naprężeń zredukowanych von Misesa w krytycznych punktach cylindra hydraulicznego.





Rysunek 2.5: Wykres przedstawiający zależność naprężenia otrzymanego w punktach narażonych na zniszczenie zmęczeniowe od wielkości zastosowanego elementu.

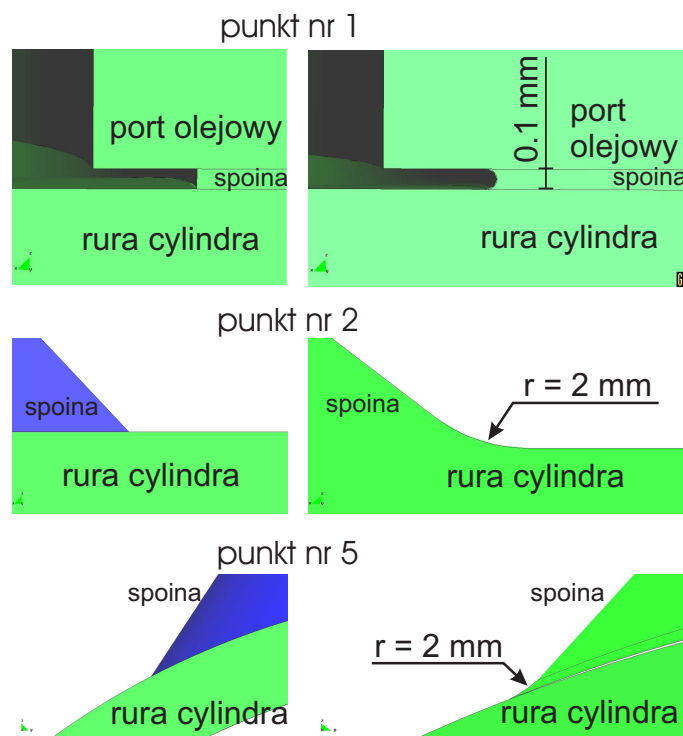


Rysunek 2.6: Pole naprężeń von Misesa wokół otworu w rurze cylindra, punkt nr 7. Widok z wewnątrz rury, wzdłuż osi cylindra.

nie mogło się pojawić ostre naroże. Sposób modelowania szczegółów konstrukcyjnych przedstawiono na rysunku 2.7.

Pola naprężeń w wybranych punktach krytycznych przedstawiono na rysunku 2.8. W przeciwieństwie do pól naprężeń otrzymanych dla pierwotnego modelu cylindra hydraulicznego prezentowanego na rysunku 2.4 po wyeliminowaniu osobliwości numerycznych gradienty naprężenia znacząco się zmniejszyły. Maksymalna różnica wartości naprężenia zredukowanego sąsiadujących elementów nie przekracza 20%. Poza tym maksymalne naprężenie w danym punkcie nie jest skupione w pojedynczym węźle lecz rozkłada się równomiernie na kilka elementów skończonych.

Na rysunku 2.9 przedstawiono wykres ukazujący zależność otrzymanego naprężenia w punktach krytycznych od wielkości elementu skończonego. Można zaobserwo-



Rysunek 2.7: Wprowadzone modyfikacje modelu numerycznego.

wać, że dalsze zagęszczenie siatki elementów skończonych nie zmienia znacząco wyniku obliczeń. Wraz z zagęszczeniem siatki elementów skończonych wartość naprężenia w krawędziach asymptotycznie dąży do pewnej, rzeczywistej wartości.

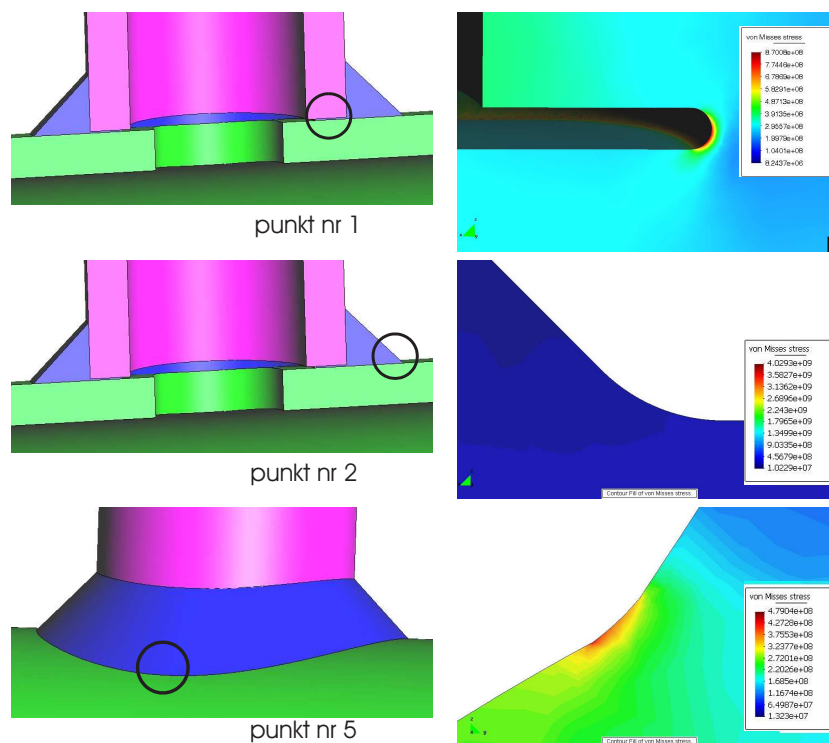
### 2.1.2 Warunki brzegowe

Kolejnym ważnym elementem modelu MES są warunki brzegowe. Pod tą nazwą rozumie się podparcie, obciążenie zewnętrzne oraz inne rodzaje wymuszeń działające na badaną konstrukcję. Podobnie jak kształt geometryczny modelu, również warunki brzegowe mogą generować spiętrzenia naprężeń. Także ten element modelu MES może prowadzić do błędów w analizie naprężeń.

W analizie naprężeń konstrukcji warunki brzegowe ograniczają się jedynie do dwóch rodzajów: podparcia oraz skupionych sił zewnętrznych. Inne ograniczenia, np. warunki kontaktu, ograniczenia co do wartości przemieszczenia nie będą tutaj omawiane.

W rzeczywistych warunkach pracy konstrukcji nie istnieje sztywne podparcie. Każda podpora ma pewną podatność. Odebranie stopnia swobody w modelu MES (poprzez wyeliminowanie wybranej składowej przemieszczenia danej składowej, zastosowanie funkcji kary bądź innymi metodami) stanowi pewne uproszczenie.

W pewnych przypadkach sztywne podparcie może być źródłem osobliwości nu-

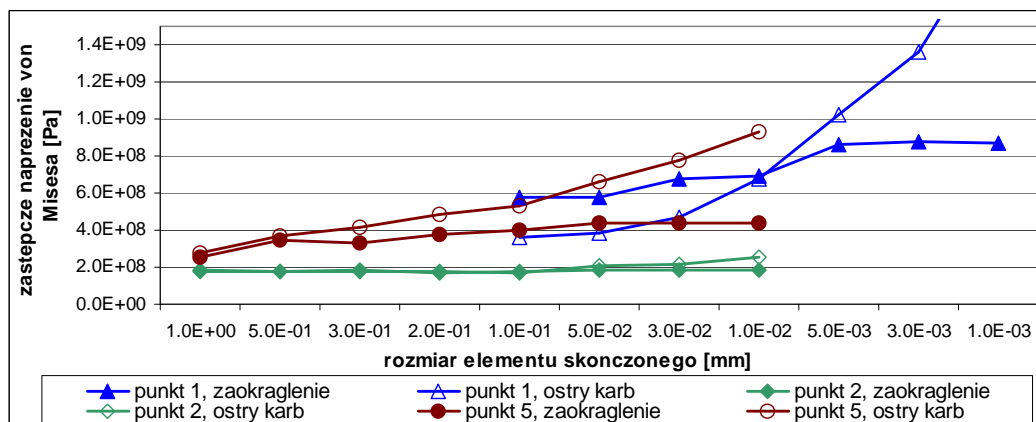


Rysunek 2.8: Pole naprężeń von Misesa w punktach narażonych na powstawanie pęknięć zmęczeniowych.

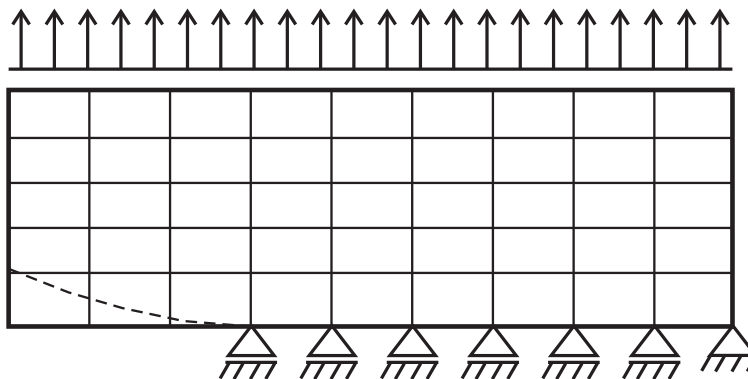
merycznych. Przykład, w którym podparcie tworzy osobliwość numeryczną zamieszczony jest na rysunku 2.10. Na przykładzie widać, że w układzie po odkształceniu tworzy się ostro zakończona szczelina (symetria względem osi poziomej). Osobliwość numeryczna spowodowana sztywnym podparciem (mimo braku ostrych korbów w kształcie modelu MES) powoduje złą interpolację naprężeń w węźle znajdującym się w ostrzu szczeliny. Naprężenia uzyskane w tym węźle będą zależne od gęstości dyskretyzacji. Im mniejsze będą zastosowane elementy skończone tym większa będzie wartość otrzymanego naprężenia.

Jednym ze sposobów eliminacji osobliwości numerycznych powodowanych przez warunki brzegowe lub obciążenie zewnętrzne jest stosowanie specjalnych rodzajów elementów oraz warunków brzegowych np. stosowanych w środowisku Abaqus. Zastosowanie specjalnych elementów skończonych nie powoduje spiętrzenia naprężenia mimo np. przyłożenia sił skupionych. Jest to jednak sposób trudny w implementacji oraz cechujący się brakiem uniwersalności.

Osobliwości numeryczne spowodowane warunkami brzegowymi mogą być również wyeliminowane poprzez modyfikację kształtu geometrycznego modelu MES. Należy przyjąć zasadę, że warunki brzegowe (obciążenie jak i podparcie) nie powinny być przykładane punktowo, lecz zawsze na całej odpowiednio zdefiniowanej powierzchni w modelu 3D lub linii w modelu 2D.



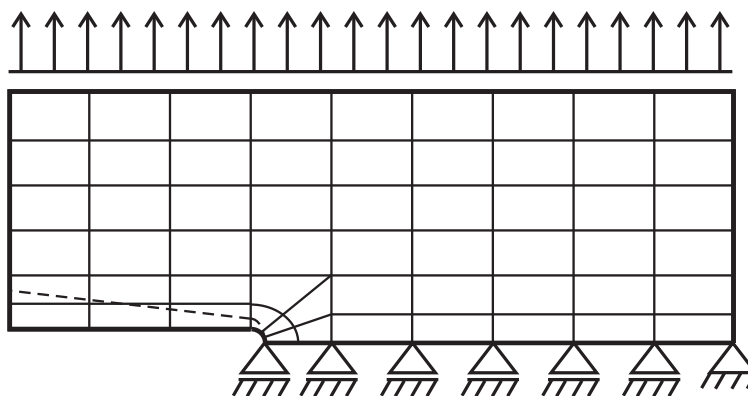
Rysunek 2.9: Wykres przedstawiający zależność naprężenia w punktach narażonych na pękanie zmęczeniowe od wielkości zastosowanego elementu. Zestawienie wyników analizy naprężeń otrzymanych na podstawie pierwotnego i zmodyfikowanego modelu numerycznego cylindra pozbawionego osobliwości numerycznych.



Rysunek 2.10: Przykład podparcia powodującego osobliwość i błędy w oszacowaniu poziomu naprężenia.

Powierzchnia, na której przykładane są warunki brzegowe, powinna być należycie zdefiniowana. Po odkształceniu konstrukcji, uwzględniając wszystkie symetrie, nie powinny powstawać ostre szczeliny. Innymi słowy, jeśli dana część konstrukcji ma być utwierdzona to utwierdzenie powinno być przyłożone we wszystkich punktach tej płaszczyzny, a przejście do innych płaszczyzn powinno mieć kształt zapobiegający koncentracji naprężeń w pojedynczym węzle. Przykład prawidłowo podpartej konstrukcji przedstawiony jest na rysunku 2.11 (por. z przypadkiem nieprawidłowego podparcia, rysunek 2.10).

W przypadku, gdy kształt geometryczny i specyficzny sposób podparcia nie pozwalają na przyłożenie warunków brzegowych na całej odpowiedniej powierzchni (rysunek 2.10) należy zmodyfikować kształt modelu MES. Powierzchnia z przyłożonymi warunkami brzegowymi powinna być wyraźnie oddzielona od innych powierzchni układu.



Rysunek 2.11: Przykład prawidłowego podparcia konstrukcji.

Powyższe uwagi mają zastosowanie również do warunków symetrii realizowanych za pomocą specyficznych warunków brzegowych.

Reasumując, kształt geometryczny oraz warunki brzegowe modelu MES powinny być należycie zdefiniowane, bez osobliwości numerycznych. Ewentualne niewielkie błędy w oszacowaniu poziomu naprężenia w konstrukcji skutkują dużymi błędami w analizie zmęczeniowej. Dla każdego modelu MES powinna być przeprowadzona analiza wpływu wielkości zastosowanego elementu skończonego na wartość naprężenia. Jeśli brak jest asymptotycznej zbieżności wyniku obliczeń względem wielkości elementu skończonego przyjęty model MES jest nieprawidłowy (por. wykresy w rozdziale 2.1.1).

## 2.2 Problem zmęczenia materiału w programie MES

Stworzone zostało efektywne narzędzie pozwalające na analizę zmęczeniową konstrukcji o dowolnym stopniu skomplikowania. Ponadto możliwe jest śledzenie prędkości oraz kierunku propagacji pęknięcia zmęczeniowego. Jest to istotna informacja dla inżyniera projektanta. Pozwala na bardziej efektywną optymalizację konstrukcji pod kątem trwałości zmęczeniowej.

Analiza zmęczeniowa konstrukcji metodą Wöhlera sprowadza się do wykonania następujących kroków:

- obliczenie naprężeń nominalnych w elementach składowych konstrukcji,
- obliczenia lub odczytania z tabel współczynnika koncentracji naprężeń  $K_f$  i innych współczynników dotyczących np. sposobu obróbki powierzchni elementu, efektu skali itp,

- modyfikacji standardowej krzywej zmęczeniowej poprzez wyżej wymienione współczynniki,
- odczytanie lub obliczenie trwałości zmęczeniowej poprzez porównanie wartości naprężeń nominalnych ze zmodyfikowanym wykresem zmęczeniowym S–N.

W podejściu tym jedynie ostatni krok, porównanie wartości naprężenia nominalnego z krzywą S–N, jest jednoznacznie i jasno zdefiniowany.

Naprężenie nominalne  $S_{nom}$  definiowane jest jako wynik działania sił wewnętrznych w odpowiednim przekroju elementu z pominięciem spiętrzeń naprężeń spowodowanych np. korbami [52, 120]. Mimo dość prostej definicji naprężenia nominalnego często w praktycznych zagadnieniach bardzo trudno jest jednoznacznie określić jego wartość. W niektórych przypadkach określenie wartości naprężenia nominalnego w ogóle nie jest możliwe [52]. Z tego względu wprowadzono pojęcie naprężeń konstrukcyjnych (geometrycznych), m.in. przez Szalę w pracach [119, 120]. Nie rozwiązało to jednak problemu jednoznaczności obliczenia wartości naprężeń, wprowadzono jedynie inną metodę ich obliczania.

Założmy, że naprężenia nominalne zostały obliczone jednoznacznie i prawidłowo. Drugim "słabym ogniwem" koncepcji naprężeń nominalnych jest sposób określenia współczynnika koncentracji naprężeń  $K_f$ . Z definicji wartość współczynnika  $K_f$  obliczana jest ze stosunku

$$K_f = \frac{S_{real}}{S_{nom}} \quad (2.1)$$

gdzie,  $S_{real}$  jest naprężeniem rzeczywistym występującym w elemencie konstrukcji natomiast  $S_{nom}$  jest naprężeniem nominalnym. Analityczne obliczenie współczynnika  $K_f$  jest trudne i czasochłonne. Z tego powodu wartości współczynników  $K_f$  są skatalogowane dla wielu różnych typowych kształtów korbów występujących w elementach konstrukcyjnych. Nie jest jednak możliwe skatalogowanie wszystkich rodzajów nieciągłości geometrycznych. Zmusza to inżyniera do stosowania daleko idących uproszczeń kształtu geometrycznego skomplikowanych konstrukcji oraz intuicyjnego szacowania współczynnika koncentracji naprężeń w przypadku konstrukcji nietypowych.

Powyższe krytyczne uwagi pod adresem koncepcji naprężeń nominalnych dotyczą w zasadzie jednego: obliczenia wartości rzeczywistego naprężenia  $S_{real}$  w dowolnym punkcie konstrukcji, także w dnie karbu. Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest analityczne wyznaczenie naprężenia w miejscach prawdopodobnej inicjacji pęknięcia zmęczeniowego, np. metodą energetyczną [111]. Obliczenia analityczne wymagają od inżyniera projektanta sporych umiejętności matematycznych oraz dogłębnej znajomości mechaniki teoretycznej. Natomiast z ekonomicznego punktu widzenia nakład pracy poświęcony na analityczne obliczenia wytrzymałościowe rzeczywistych konstrukcji jest nie do przyjęcia.

Jednym ze sposobów na obliczenie rzeczywistych pól naprężeń w konstrukcji

jest zastosowanie metod numerycznych. Jedną z najszerszej stosowanych metod jest metoda elementów skończonych. Czas analizy nawet bardzo skomplikowanych części maszyn bądź konstrukcji jest ekonomicznie akceptowalny, a klasa rozwiązywanych zagadnień, w porównaniu do metod analitycznych, nieporównywalnie szersza. Obliczenia wytrzymałościowe metodą elementów skończonych wymagają od inżyniera wysokich kwalifikacji i doświadczenia w posługiwaniu się metodą. Konstruktor musi zdawać sobie sprawę z zalet, a przede wszystkim wad metody oraz potrafić oszacować błąd numeryczny metody [64, 122, 133]. Uwagi dotyczące modelowania MES zostały szerzej omówione w rozdziale 2.1.

Przy wykorzystaniu MES w analizie wytrzymałościowej traci sens konieczność stosowania współczynnika koncentracji naprężeń  $K_f$  w jego pierwotnym znaczeniu. Mylna staje się także nazwa: koncepcja naprężeń nominalnych. Skoro dysponujemy wartością naprężenia w dnie karbu, nazwę należałoby zmienić na koncepcję naprężeń lokalnych. Analiza naprężeń za pomocą MES w odniesieniu do zmęczenia materiału ma również wady. Brak jest możliwości uwzględnienia w analizie wytrzymałościowej naprężeń wstępnych w elemencie konstrukcji (np. specjalna obróbka powierzchni, połączenia spawane), środowiska pracy itd. Całkowite wyeliminowanie empirycznego współczynnika  $K_f$  nie jest możliwe, jednak jego znaczenie zostało znacznie ograniczone.

W toku badań autor opracował szczegółowy algorytm umożliwiającą analizę zmęczeniową na podstawie koncepcji naprężeń nominalnych (lokalnych) w wykorzystaniu nowoczesnych metod numerycznych [13, 82, 123]. Algorytm ten pozwala w efektywny i częściowo zautomatyzowany sposób oszacować trwałość zmęczeniową konstrukcji o dowolnym kształcie geometrycznym. Możliwa jest analiza zmęczeniowa konstrukcji nie tylko pod działaniem obciążenia harmonicznego, stałoamplitudowego, lecz również pod działaniem obciążeń eksploatacyjnych, zmiennoodamplitudowych. Poprzez wstępną modyfikację krzywej zmęczeniowej S-N możliwe jest także uwzględnienie takich czynników wpływających na trwałość zmęczeniową jak: stan powierzchni i rodzaj jej obróbki, naprężenia resztkowe pozostałe po procesach cieplnych bądź łączeniu (np. spawanie, zgrzewanie), wpływ atmosfery pracy i innych.

## Rozdział 3

# Odpowiedź materiału na obciążenie zmienne w czasie

Jak wiadomo przy działaniu obciążeń zmiennych następuje stopniowe osłabienie materiałów (szczególnie metali). Proces zmęczenia materiału, mimo iż znany i obserwowany już w XIX wieku, jest nadal podmiotem wielu badań i prac naukowych.

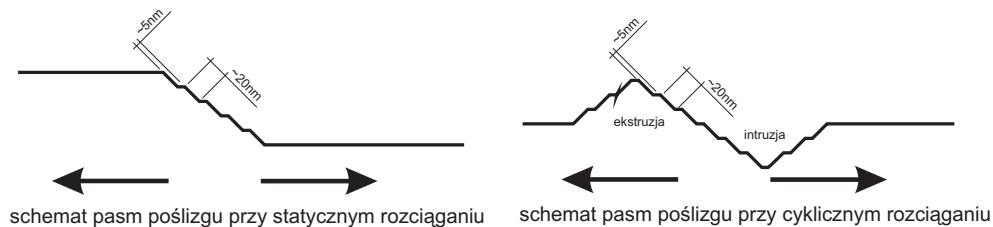
W warunkach zmiennego obciążenia metal jest odporny na działanie sił zewnętrznych tylko przez pewien okres czasu. Na dodatek pobieżna weryfikacja części konstrukcyjnej nie daje oznak uszkodzenia elementu. W miarę upływu czasu (kolejnych cykli obciążenie – odciążenie) powstają mikropęknięcia, które następnie, w relatywnie krótkim odstępie czasowym, rozrastają się do makropęknięć. Gdy długość szczeliny osiągnie wartość krytyczną następuje nagłe zniszczenie elementu.

### 3.1 Mechanizm procesu zniszczenia zmęczeniowego materiałów metalicznych

Nawet w przypadku metali ciągliwych złom zmęczeniowy przypomina kruche zniszczenie elementu. Początkowo sądzono, że w dnie szczeliny następuje rekrytalizacja i utwardzenie materiału co powoduje inicjację pęknięć [20]. W późniejszych badaniach tezę tę odrzucono. Inicjacja pęknięć i ich dalsza propagacja związana z cyklicznym obciążaniem i odciążaniem powodowana jest przez powstające lokalnie pasma poślizgu [41, 69, 70]. Różnica zachowania się metali ciągliwych pod obciążeniem statycznym i zmiennym leży w sposobie propagacji pęknięcia zmęczeniowego. Przyrost długości szczeliny w trakcie pojedynczego cyklu jest bardzo mały (w fazie inicjacji i początkowej propagacji szczeliny). Wobec powyższego nie obserwuje się wpływu odkształceń plastycznych istniejących w spękanym obszarze.

Fizyczna interpretacja zjawiska zmęczenia materiału zależy od przyjętej skali





Rysunek 3.1: Schemat pasma poślizgu dla statycznego i cyklicznego rozciągania.

obserwacji. Przy badaniach materiału nie wykazującego widocznych oznak zmęczenia, ale poddanemu pewnej ilości cykli naprężenia w skali mikro, rzuca się w oczy niejednorodność metalu spowodowana chaotycznym ułożeniem ziaren. Statyczne obciążenie elementu, powyżej granicy plastyczności, objawia się w skali mikro powstawaniem wąskich (ok. 20 nm) pasm poślizgu. W przypadku cyklicznych obciążeń zmęczeniowych, nawet poniżej granicy plastyczności, w dnie karbu powstają wzajemnie nakładające się wąskie pasma poślizgu tworzące intruzje i ekstruzje (szerokie bruzdy), por. rysunek 3.1. W przypadku gdy głębokość bruzdy osiągnie granicę ziarna, może dojść do jej przelamania. Wówczas pęknięcie zmęczeniowe zwykle propaguje się wzdłuż granic pomiędzy ziarnami, aż do osiągnięcia długości krytycznej i zniszczenia elementu [69,132].

Okazuje się, że trwałość zmęczeniową niektórych elementów można znacząco wydłużyć poprzez wykonywanie co pewien określony czas profilaktycznych napraw serwisowych [41]. Naprawy te polegają na zdjęciu cienkiej (zeszlifowaniu) warstwy materiału zawierającej powstałe w trakcie eksploatacji konstrukcji intruzje i ekstruzje. Zabieg taki powoduje nieznaczne zmniejszenie przekroju poprzecznego oraz niewielkie zwiększenie naprężeń wewnątrz elementu. Powierzchnia konstrukcji zostaje wyrównana, a co za tym idzie proces inicjacji i stabilnej propagacji pęknięć zmęczeniowych będzie realizowany od nowa. Naprawa przeprowadzona w taki sposób powoduje, że element może być traktowany jak nowy, tak jak gdyby jego trwałość zmęczeniowa nie została zmniejszona przez poprzednią eksploatację.

## 3.2 Metoda oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie koncepcji naprężeń nominalnych

W ramach badań opisywanych w tej rozprawie opracowano bardzo efektywną metodę oceny wytrzymałości zmęczeniowej rzeczywistych konstrukcji. Algorytm postępowania stanowi syntezę znanych metod, ale wykorzystanie obliczeń numerycznych pozwala uzyskać nową jakość. Problem wykorzystania nowoczesnych metod komputerowych w analizie zmęczeniowej został zauważony przez autorów europejskiej normy EN 13445 [4]. Zaproponowany przez autora algorytm analizy zmęczeniowej jest syntezą następujących elementów [12, 13, 82]:

- wiedzy teoretycznej dotyczącej wzajemnej zależności krzywych Wöhlera oraz warunków wytrzymałości zmęczeniowej zależnych od podstawowych parametrów wytężenia elementów konstrukcji poddanej obciążeniom zmiennym w czasie: naprężenia średniego  $S_m$  i amplitudy naprężenia  $S_a$ ,
- obliczeń numerycznych z wykorzystaniem MES oraz
- hipotez kumulacji uszkodzeń w przypadku obciążeń zmiennoodprężeniowych.

Proponowany algorytm stanowi istotne rozszerzenie metody oceny trwałości zmęczeniowej opartej na koncepcji naprężeń nominalnych. Algorytm został zaimplementowany w programie metody elementów skończonych FEAP [124]. Inżynier konstruktor otrzymuje więc efektywne narzędzie pozwalające na bardzo szybką i częściowo zautomatyzowaną analizę zmęczeniową rzeczywistych konstrukcji zarówno przy obciążeniach harmonicznym jak i rzeczywistym (zmiennoodprężeniowym).

### 3.2.1 Uprozczone krzywe Wöhlera

Z inżynierskiego punktu widzenia główną czynnością w procesie przewidywania trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcyjnego wg koncepcji naprężeń nominalnych jest dobór charakterystyki zmęczeniowej - krzywej Wöhlera dla rozpatrywanego szczegółu konstrukcyjnego podatnego na pękanie zmęczeniowe. Doboru charakterystyki zmęczeniowej dokonuje się uwzględniając kształt elementu, rodzaj obciążenia oraz pękania zmęczeniowego elementu. Typowe kształty karbów, rodzaje obróbki powierzchni oraz inne procesy technologiczne zostały skatalogowane oraz przypisano im odpowiednie wartości współczynników modyfikujących krzywą zmęczeniową.

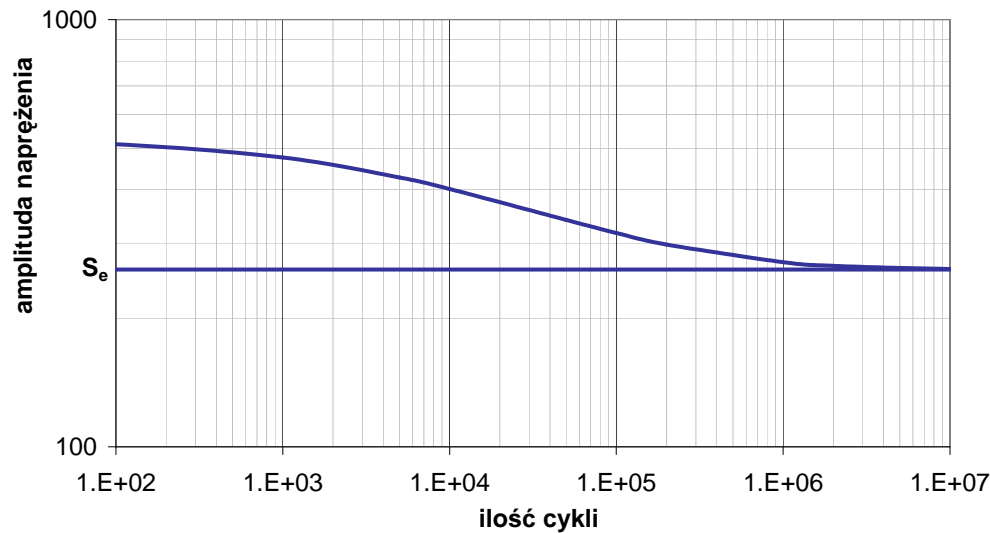
Standardową krzywą S-N modyfikuje się przez wprowadzenie współczynnika koncentracji naprężeń  $K_f$ , współczynnika wrażliwości materiału na działanie karbu  $\eta_f$ , współczynnika chropowatości powierzchni  $K_s$ , itp. Zmodyfikowana krzywa S-N uwzględnia więc wszystkie własności mające wpływ na wytrzymałość zmęczeniową i charakterystyczne dla danego elementu konstrukcji.

Ocenę trwałości zmęczeniowej mierzoną ilością cykli do zniszczenia określa się porównując naprężenia nominalne w elemencie ze zmodyfikowaną krzywą S-N. Naprężenie nominalne  $S_{nom}$  oblicza się w punkcie narażonym na pękanie zmęczeniowe, na podstawie sił wewnętrznych w odpowiednim przekroju elementu bez uwzględnienia koncentracji naprężeń (została ona już uwzględniona w zmodyfikowanym wykresie S-N).

Standardowy wykres Wöhlera zamieszczony jest na rysunku 3.2.

Przyjmijmy, że obciążenie oscyluje pomiędzy naprężeniem maksymalnym  $S_{max}$  oraz minimalnym  $S_{min}$ . Naprężenie średnie  $S_m$  oraz amplitudę naprężenia  $S_a$  można

Standardowy wykres S-N dla stali St-52

Rysunek 3.2: Standardowy wykres Wöhlera otrzymany dla stali St52 oraz symetrycznego schematu obciążenia ( $R = -1$ )

obliczyć ze wzorów:

$$S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2}, \quad S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} \quad (3.1)$$

W praktyce inżynierskiej istnieją dwa sposoby uproszczonego charakteryzowania krzywych zmęczeniowych.

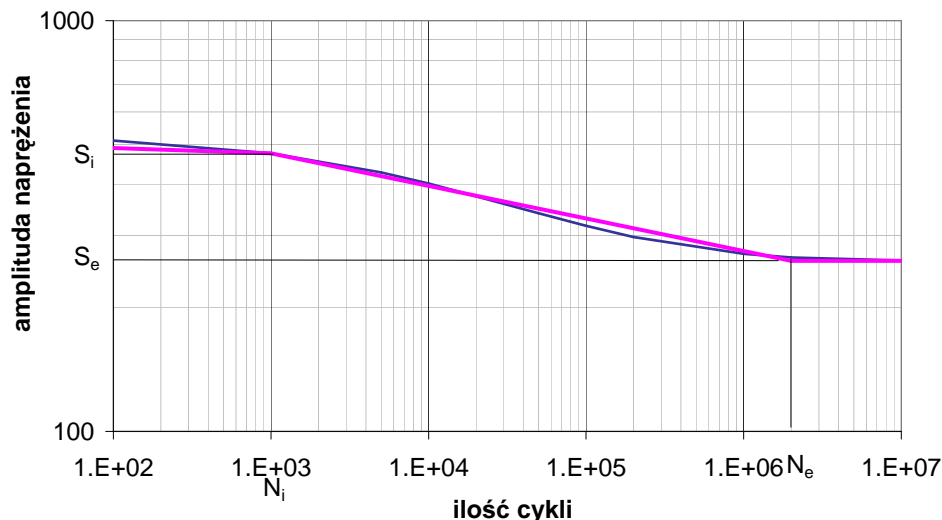
Pierwszy sposób polega na podaniu granicy zmęczeniowej  $S_e$  (dla stali przyjmuje się, że konstrukcja nie pęka jeśli wytrzyma  $N_e = 2000000$  cykli) oraz punktu charakterystycznego początku zmęczenia wysokocyklowego o współrzędnych  $S_i$  oraz  $N_i$ . W przypadku braku danych zmęczeniowych dla danego rodzaju stali konstrukcyjnych można oszacować wartości  $S_i$  oraz  $S_e$  [41]

$$\begin{aligned} N_i &= 1000 & N_e &= 2000000 \\ S_i &= 0.9S_u & S_e &= 0.5S_u \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie  $S_u$  jest wytrzymałością stali na rozciąganie. Do powyższych wartości należy podchodzić z pewną ostrożnością, mając świadomość umownego charakteru zdefiniowanych punktów wykresu S-N.

Mając dwa punkty charakterystyczne wykresu S-N oraz przyjmując układ współrzędnych  $\log[S_a] - \log[N]$ , zastępujemy krzywą ograniczonej trwałości zmęczeniowej odcinkiem łączącym punkty charakterystyczne A i B (rys. 3.4). Linię ograniczonej trwałości zmęczeniowej można określić jako prostą przechodzącą przez punkty A i B.

Standardowy wykres S-N dla stali St-52



Rysunek 3.3: Liniowa aproksymacja (w skali log-log) krzywej S-N.

W skali log – log prosta przechodząca przez punkty A i B będzie więc dana wzorem

$$\frac{[\log(S_i) - \log(S_e)] [\log(N_z) - \log(N_e)]}{[\log(N_i) - \log(N_e)] [\log(S_a) - \log(S_e)]} = 0 \quad (3.3)$$

Wobec tego ilość cykli do planowanego zniszczenia zmęczeniowego wynosi

$$N_z = 10^{\frac{\log(S_a) \log(N_i) - \log(S_a) \log(N_t) + \log(S_i) \log(N_t) - \log(S_t) \log(N_i)}{\log(S_i) - \log(S_t)}} \quad \begin{matrix} \text{dla } S_e < S_a \\ \text{dla } S_e > S_a \end{matrix} \quad (3.4)$$

$$N_z = \infty$$

gdzie  $S_a$  jest amplitudą naprężenia nominalnego.

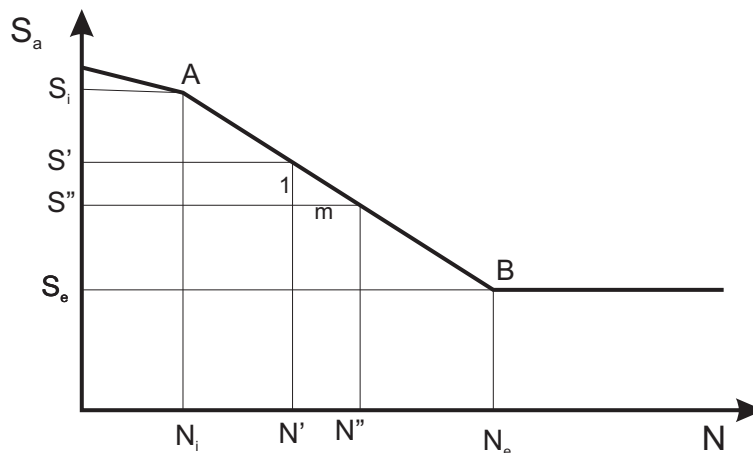
Drugi sposób przedstawienia krzywej zmęczeniowej polega na podaniu punktu granicy zmęczeniowej ( $S_e$  i  $N_e$ ) oraz wskaźnika kąta nachylenia krzywej ograniczonej trwałości zmęczeniowej  $m$  (por. rysunek 3.4)

$$m = \frac{\log(\frac{N'_i}{N''_i})}{\log(\frac{S'_i}{S''_i})} \quad \text{lub} \quad m = \frac{\log(\frac{N_i}{N_e})}{\log(\frac{S_e}{S_i})} \quad (3.5)$$

W tym przypadku ilość cykli do zmęczenia wynosi

$$N_z = 10^{m \cdot \log(\frac{S_e}{S_a}) + \log(N_e)} \quad \begin{matrix} \text{dla } S_e < S_a \\ \text{dla } S_e > S_a \end{matrix} \quad (3.6)$$

$$N_z = \infty$$



Rysunek 3.4: Interpretacja graficzna wskaźnika nachylenia krzywej ograniczonej trwałości zmęczeniowej.

### 3.2.2 Wpływ naprężenia średniego na trwałość zmęczeniową konstrukcji

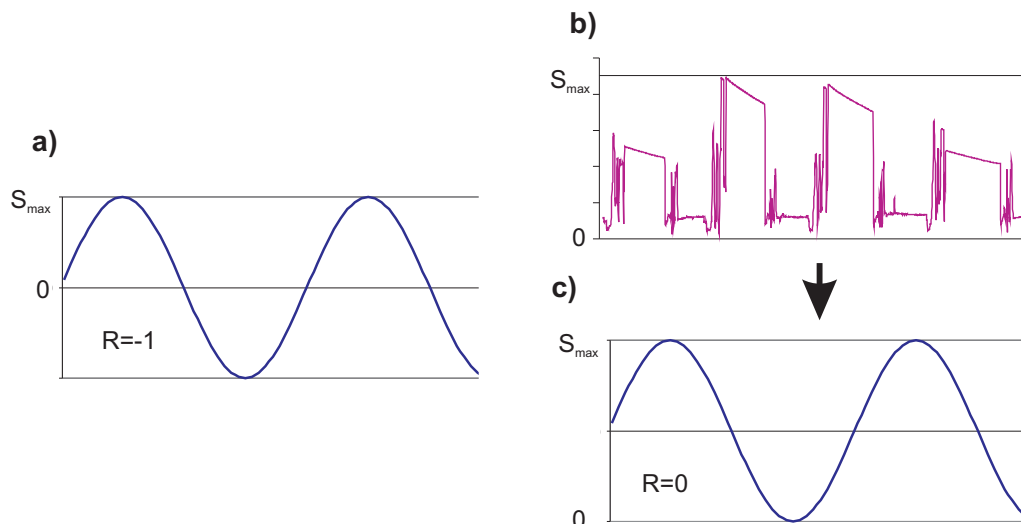
W standardowych testach zmęczeniowych obciążenie zwykle jest symetryczne z zerowym naprężeniem średnim  $S_m$  i zmienia się od wartości  $-S_{max}$  do  $S_{max}$ . Wyniki testów są skatalogowane. W celu uwzględnienia naprężenia średniego wprowadzono współczynnik asymetrii cyklu

$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}} \quad (3.7)$$

gdzie wartość  $S_{min}$  nie jest związana z wartością  $S_{max}$ . Jeśli  $S_{min} = -S_{max}$ ,  $R = -1$ . Należy zauważyć, że przy  $R = -1$  amplituda naprężenia  $S_a = S_{max}$  oraz naprężenie średnie  $S_m = 0$ . W rzeczywistych konstrukcjach rzadko mamy do czynienia z takim charakterem obciążenia. Na rysunku 3.5 zamieszczono schemat obciążenia typowy dla testów zmęczeniowych, rzeczywisty przebieg ciśnienia w cylindrze hydraulicznym oraz przybliżenie rzeczywistego przebiegu ciśnienia cyklem harmonicznym.

Z doświadczeń wynika, że wartość naprężenia średniego  $S_m$  ma wpływ na czas pracy konstrukcji. Niezbędne jest więc uwzględnienie go w badanych układach gdy  $R \neq -1$ . Zachodzi potrzeba wprowadzenia zastępczego naprężenia, które byłoby porównywane z klasycznymi wykresami S-N a uwzględniałoby skutki niezerowego naprężenia średniego.

Istnieje wiele metod uwzględniania naprężenia średniego w analizie zmęczeniowej. Jednymi z najpopularniejszych w praktyce inżynierskiej są metody oparte o wykres w przestrzeni  $S_m - S_a$ . Jednym z pierwszych, który sporządził taki wykres doświadczalnie był Haigh [20]. Konieczność przygotowywania kolejnych żmudnych prób zmęczeniowych spowodowała, że metoda nie jest szeroko stosowana. Kolejnymi uczonymi, którzy próbowali przybliżyć wzorem analitycznym wpływ naprężenia średniego na czas pracy konstrukcji byli: Gerber, Soderberg, Morrow oraz Goodman [41,70,129,132].



Rysunek 3.5: Typowy schemat obciążenia dla testów zmęczeniowych (a), rzeczywisty przebieg ciśnienia oleju w cylindrze hydraulicznym (b) oraz cykl harmoniczny jako przybliżenie rzeczywistego przebiegu obciążenia.

Różnice w poszczególnych podejściach prezentowane są na rysunku 3.6 oraz dane zależności

$$\text{Gerber : } \frac{S_a}{S_{ae}} + \left( \frac{S_m}{S_u} \right)^2 = 1 \quad \text{przy } S_m \geq 0$$

$$\text{Morrow : } \frac{S_a}{S_{ae}} + \frac{S_m}{S'_f} = 1$$

$$\text{Soderberg : } \frac{S_a}{S_{ae}} + \frac{S_m}{S_y} = 1$$

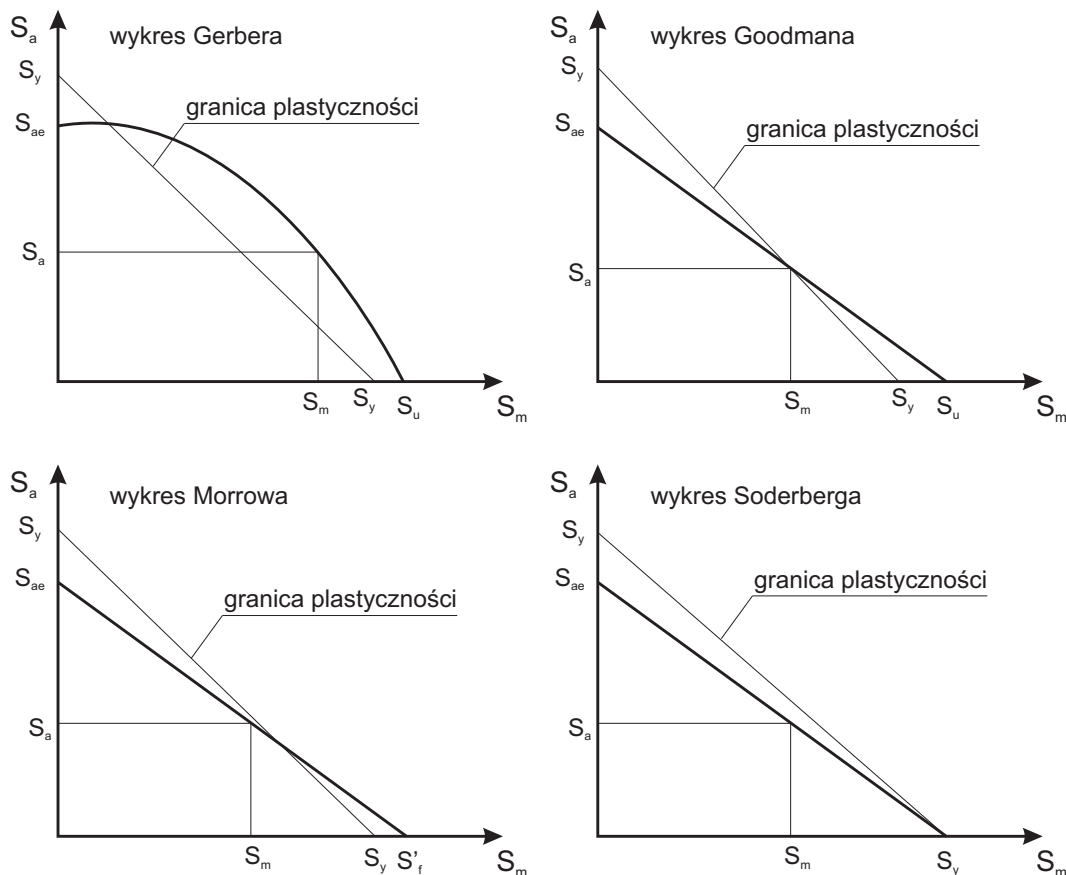
$$\text{Goodman : } \frac{S_a}{S_{ae}} + \frac{S_m}{S_u} = 1 \quad (3.8)$$

gdzie  $S_a$  jest amplitudą naprężenia w danym cyklu,  $S_m$  jest naprężeniem średnim,  $S_u$  – wytrzymałość materiału,  $S_y$  – granica plastyczności oraz  $S'_f$  – niszcząca amplituda naprężenia. Doświadczenie podpowiada, że najlepsze wyniki dla materiałów ciągłych uzyskuje się stosując równanie Gerbera, natomiast dla materiałów o niskiej ciągliwości - stosując równanie Goodmana. Materiały kruche, jak np. żeliwo, wymagają stosowania innych metod. Z tego też powodu dokonano modyfikacji równania Goodmana, wprowadzając dodatkowy parametr  $n$  określający ciągliwość materiału [41].

$$\frac{S_a}{S_{ae}} + \left( \frac{S_m}{S_u} \right)^n = 1 \quad (3.9)$$

Przekształcając powyższą równość otrzymujemy wzór pozwalający obliczyć zastępczą amplitudę naprężenia  $S_{ae}$ , którą można porównywać z klasycznymi wykresami S-N i uwzględniającą wpływ naprężenia średniego

$$S_{ae} = \frac{S_a}{1 - \left( \frac{S_m}{S_u} \right)^n} \quad (3.10)$$



Rysunek 3.6: Wykresy  $S_a$ - $S_m$  pozwalające uwzględnić naprężenie średnie w analizie zmęczeniowej.

W analogiczny sposób można modyfikować krzywe S-N. Jest to odwrotna metoda, w której wpływ naprężenia średniego jest uwzględniony w wykresie Wöhlera. Przykład wzajemnej zależności krzywej Wöhlera i Goodmana oraz krzywe S-N dla różnych współczynników  $R$  zamieszczono na rysunku 3.7. Na osi rzędnych można odkładać w obu przypadkach amplitudę naprężenia  $S_a$  lub (zamiennie) naprężenie maksymalne  $S_{max}$ .

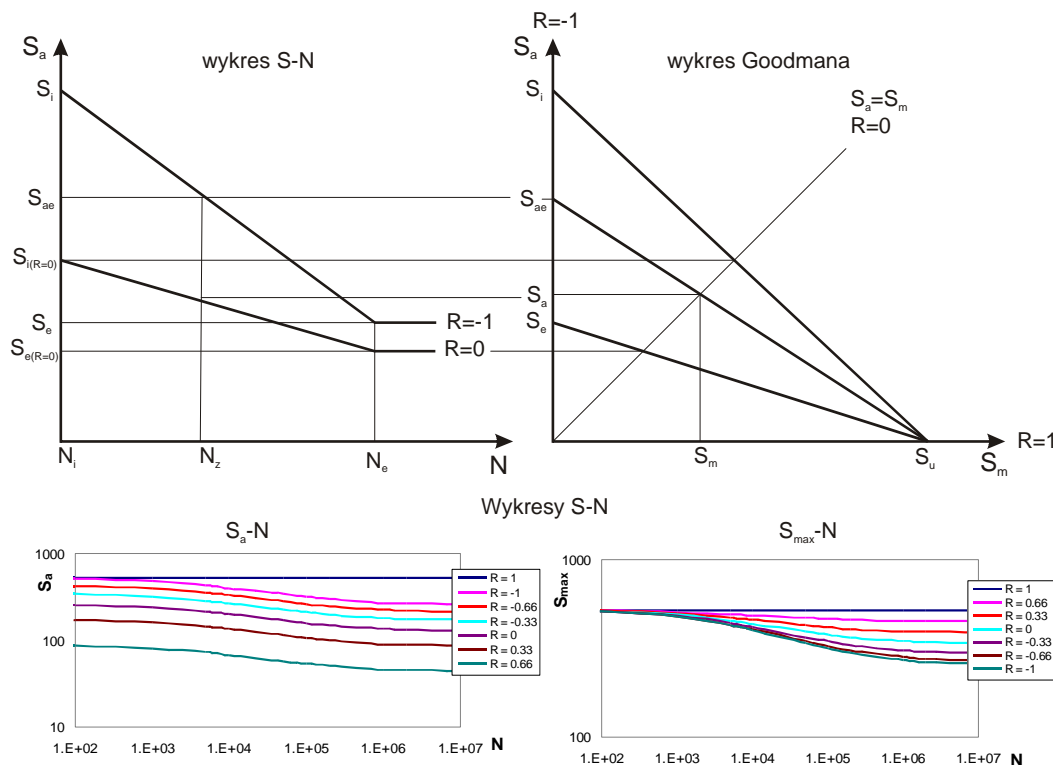
Rezultatem typowej analizy metodą elementów skończonych jest naprężenie maksymalne  $S_{max}$  w najbardziej wyłożonym punkcie konstrukcji. Naprężenie średnie można obliczyć, znając współczynnik asymetrii cyklu, z zależności:

$$S_m = \frac{S_{max}(1 + R)}{2} \quad (3.11)$$

Amplituda naprężenia wynosi:

$$S_a = S_{max} - S_m \quad \text{lub} \quad S_a = \frac{S_{max}(1 - R)}{2} \quad (3.12)$$

Wartości  $S_a$  oraz  $S_m$  mogą być następnie podstawione do wzoru 3.10. W efekcie



Rysunek 3.7: Wzajemna zależność wykresu Wöhlera i krzywej Goodmana oraz wykresy S-N dla różnych wartości  $R$  w przestrzeni  $S_a - N$  (po lewej) oraz  $S_{max} - N$  (po prawej).

otrzymujemy zastępczą amplitudę naprężenia  $S_{ae}$  dla danego  $S_{max}$  przy  $R \neq -1$ :

$$S_{ae} = \frac{\frac{1}{2} S_{max} (1 - R)}{1 - \left[ \frac{1}{2} (R + 1) \frac{S_{max}}{S_u} \right]^n} \quad (3.13)$$

W przypadku, gdy wykładnik  $n = 1$  równanie 3.13 przybiera prostszą postać

$$S_{ae} = \frac{S_{max} (1 - R) S_u}{2 S_u - S_{max} (R - 1)} \quad (3.14)$$

Zastępcza amplituda naprężenia  $S_{ae}$  pozwala obliczyć ilość cykli (czas pracy) do zniszczenia konstrukcji poddanej obciążeniom zmiennym o współczynniku asymetrii cyklu  $R \neq -1$  (patrz rysunek 3.7) w przypadku, gdy dane eksperymentalne (krzywe S-N) są wyznaczone tylko dla przypadku  $R = -1$ .

### 3.2.3 Analiza zmęczeniowa konstrukcji przy obciążeniach złożonych

Analiza zmęczeniowa w warunkach działania obciążenia złożonego jest omawiana w wielu pracach. Nie została jednak dotychczas opracowana uniwersalna metoda oceny



trwałości zmęczeniowej konstrukcji poddawanych obciążeniem złożonym.

Wyniki badań eksperymentalnych wykazały możliwość obliczeń zmęczeniowych pod warunkiem, że wybrana zostanie odpowiednia hipoteza wyężenia [70, 119, 121]. Należy również wziąć pod uwagę wpływ naprężeń średnich obciążenia na amplitudy naprężeń granicznych. Średnie naprężenie rozciągające  $S_{m\sigma}$  obniża granice zmęczenia przy zmiennym rozciąganiu i skręcaniu, natomiast jeśli  $S_{m\sigma}$  jest naprężeniem ściskającym to czas pracy konstrukcji się wydłuża. Z kolei średnie naprężenie tnące  $S_{m\tau}$  (pochodzące od sił skręcających) nie wywiera praktycznie żadnego wpływu na wytrzymałość zmęczeniową przy zmiennym skręcaniu i rozciąganiu.

Spośród wielu hipotez wytrzymałościowych najszerszej stosowane są dwie: Hubera–Misesa–Hencky’ego w przypadku materiałów w stanie elastoplastycznym oraz Guesta–Mohra dla elementów z ostrymi karami i kruchych [20, 41, 70].

Zgodnie z hipotezą Hubera–Misesa–Hencky’ego, o wyężeniu próbki decyduje nie ta część energii, która idzie na odkształcenie objętościowe, lecz jedynie ta, która idzie na odkształcenie postaci. Wyężenia w dwu różnych stanach naprężenia są równe jeśli energie odkształcenia postaciowego w tych stanach są równe. W prostym rozciąganiu energia odkształcenia postaciowego jest równa

$$\Phi_f = \frac{1 + \nu}{6E} \sigma_0^2 \quad (3.15)$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga,  $\nu$  współczynnikiem Poissona, a  $\sigma_0$  naprężeniem rozciągającym w stanie jednoosiowym.

W złożonym stanie naprężenia energia odkształcenia postaciowego jest równa

$$\Phi_f = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{32}^2 + \tau_{13}^2)] \quad (3.16)$$

Porównując równanie 3.15 z 3.16 przypiszemy złożonemu stanowi naprężenia stan jednoosiowy scharakteryzowany naprężeniem "zredukowanym" równoważnym w sensie przyjętej hipotezy

$$S_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{32}^2 + \tau_{13}^2)]} \quad (3.17)$$

dla dowolnego tensora naprężenia oraz

$$S_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_{II})^2]} \quad (3.18)$$

w przypadku naprężeń głównych, gdzie  $S_{red}$ , jest skalarną miarą złożonego stanu naprężenia wg hipotezy Hubera–Misesa–Hencky’ego, a  $\sigma_{ab}$  są składowymi tensora naprężenia.

W płaskim stanie naprężenia przyjmijmy, że na ciało działają naprężenia normalne  $S_n$  oraz styczne  $S_s$  leżące w jednej płaszczyźnie (jednoczesne zginanie i skręcanie).

Wtedy dla  $\sigma_{II} = 0$

$$\sigma_I = \frac{S_n}{2} + \sqrt{\frac{S_n^2}{4} + S_s^2} \quad \text{oraz} \quad \sigma_{III} = \frac{S_n}{2} - \sqrt{\frac{S_n^2}{4} + S_s^2} \quad (3.19)$$

Powierzchnia plastyczności dana jest wzorem

$$S_{red} - R_e = 0 \quad (3.20)$$

gdzie  $R_e$  jest granicą plastyczności dla czystego rozciągania-ściskania. Po podstawieniu wzoru 3.19 do zależności 3.18 oraz przechodząc na powierzchnię plastyczności dana wzorem 3.20 otrzymujemy

$$R_e = \sqrt{S_n^2 + 3S_s^2} \quad (3.21)$$

Natomiast na granicy plastyczności dla czystego ścinania, gdy  $S_n = 0$  i  $S_s = R_{es}$ , stosunek granic plastyczności będzie równy

$$\frac{R_e^2}{R_{es}^2} = 3 \quad (3.22)$$

Wstawiając powyższy stosunek granic plastyczności do wzoru 3.21 otrzymujemy warunek plastyczności reprezentowany przez elipsę

$$\frac{S_n^2}{R_e^2} + \frac{S_s^2}{R_{es}^2} = 1 \quad (3.23)$$

Zależność 3.23 może być bezpośrednio zastosowana w analizie zmęczeniowej po zastąpieniu naprężeń amplitudą naprężenia oraz granic plastyczności granicami zmęczenia [70, 132].

$$\frac{S_{an}^2}{S_e^2} + \frac{S_{as}^2}{S_{es}^2} = 1 \quad (3.24)$$

gdzie  $S_{an}$  oraz  $S_{as}$  są amplitudami odpowiednio naprężeń normalnych oraz stycznych,  $S_{es}$  jest granicą zmęczenia dla naprężeń stycznych.

W układach 3D powierzchnia reprezentująca warunek wytrzymałości zmęczeniowej przyjmuje postać walca kołowego współosiowego do trójsiecznej przestrzeni oktaedrycznej. Zerowa wartość któregokolwiek z naprężeń głównych redukuje ten warunek do elipsy opisanej wzorem 3.24.

Podstawiając wyrażenie 3.17 do wzorów 3.12 oraz 3.11 otrzymujemy zredukowaną amplitudę naprężenia oraz zredukowane naprężenia średnie

$$\begin{aligned} S_{ared} &= \frac{1+R}{2\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{32}^2 + \tau_{13}^2)]} \\ S_{mred} &= \frac{1-R}{2\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{32}^2 + \tau_{13}^2)]} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hipoteza Guesta–Mohra oddaje, jak już wspomniano, lepiej zachowanie materiałów kruchych i z ostrymi krawędziami. Hipotezę tę można zapisać (dla naprężeń głównych, przy zachowaniu  $\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}$ ) w postaci [41, 70]

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2R_{es} - \lambda(\sigma_I - \sigma_{III}) \quad (3.26)$$

przy czym warunek plastyczności przybiera postać

$$\sigma_I - \left( \frac{R_e}{R_{es}} - 1 \right) \sigma_{III} = R_e \quad (3.27)$$

Warunek plastyczności 3.27 wynika z warunku jednoosiowego rozciągania w którym  $\sigma_I = R_e$ ,  $\sigma_{II} = 0$ ,  $\sigma_{III} = 0$ . Przekształcając wzór 3.26 otrzymujemy

$$\lambda = \frac{2R_{es}}{R_e} - 1 \quad (3.28)$$

Współczynnik  $\lambda$  nazywany jest współczynnikiem wpływu naprężeń normalnych. Jeśli przyjąć kryterium maksymalnych naprężeń stycznych przyjmuje wartość  $\lambda = 0$ , natomiast w przypadku kryterium maksymalnych naprężeń normalnych  $\lambda = 1$ . Z doświadczeń wynika, że dla materiałów o dużej wytrzymałości przyjmuje on wartości  $\lambda = 0.5 \div 0.65$  [70].

W przypadku płaskiego stanu naprężenia podstawiając wartości naprężeń głównych obliczone według wzoru 3.19 do wzoru 3.27 otrzymujemy

$$\left( \frac{S_n}{R_e} \right)^2 \left( \frac{R_e}{R_{es}} - 1 \right) + \frac{S_n}{R_e} \left( 2 - \frac{R_e}{R_{es}} \right) + \left( \frac{S_s}{R_{es}} \right)^2 = 1 \quad (3.29)$$

Należy zwrócić uwagę, że jeśli uwzględnimy stosunek  $\frac{R_e}{R_{es}} = 2$  otrzymamy wzór 3.24 i pełną zgodność z hipotezą Hubera.

Zastępując wartości naprężenia amplitudą naprężeń oraz granicę plastyczności granicą zmęczeniową wzór 3.27 można bezpośrednio użyć w analizie zmęczeniowej konstrukcji poddawanych złożonym obciążeniom zmęczeniowym. Wzór 3.27 przyjmuje postać

$$\left( \frac{S_{an}}{S_e} \right)^2 \left( \frac{S_e}{S_{es}} - 1 \right) + \frac{S_{an}}{S_e} \left( 2 - \frac{S_e}{S_{es}} \right) + \left( \frac{S_{as}}{S_{es}} \right)^2 = 1 \quad (3.30)$$

W odróżnieniu od hipotezy Hubera–Misesa–Hencky’ego w tym przypadku nie możemy mówić o naprężeniu zastępczym. Należy obliczyć naprężenia główne w badanym punkcie konstrukcji oraz przyrównać do równania 3.30.

Inne podejście w stosunku do zastępczego naprężenia średniego  $S_{mred}$  prezentują autorzy prac [42, 114, 132]. Mając na uwadze różny wpływ naprężenia średniego, w zależności od tego czy jest to naprężenie ściskające czy rozciągające, Sines [114], a później Fuchs i Zahavi [42, 132] proponują aby wartości zredukowanego naprężenia

średniego były zależne jedynie od ciśnienia hydrostatycznego. U podstaw niniejszej hipotezy stoją wyniki doświadczeń, które wskazują, że średnie ciśnienie hydrostatyczne ma znacząco większy wpływ niż średnie naprężenia tnące (np. w przypadku skręcanego wału naprężenie średnie ma niewielki wpływ na trwałość zmęczeniową [132]). Zgodnie z tą hipotezą wzór na naprężenia średnie przyjmuje prostszą postać dając jednocześnie lepsze wyniki [132]

$$S_{mred} = a(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (3.31)$$

gdzie  $a$  jest współczynnikiem empirycznym. Fuchs i Stephens ustalili w swoich badaniach, że w pewnych przypadkach można przyjąć, że  $a = 1$  [42]. Wzór 3.31 przyjmuje więc postać

$$S_{mred} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (3.32)$$

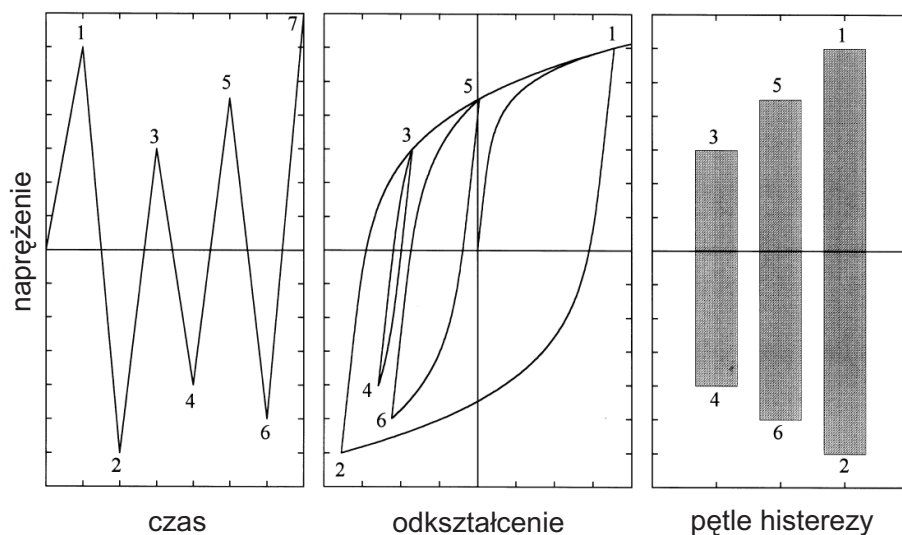
Amplituda naprężenia nadal może być obliczana wg wzoru 3.25. Trzeba jednak zauważyć, że w tym przypadku  $S_{max} \neq S_{mred} + S_{ared}$ .

### 3.2.4 Analiza zmęczeniowa przy obciążeniu zmiennoamplitudowym

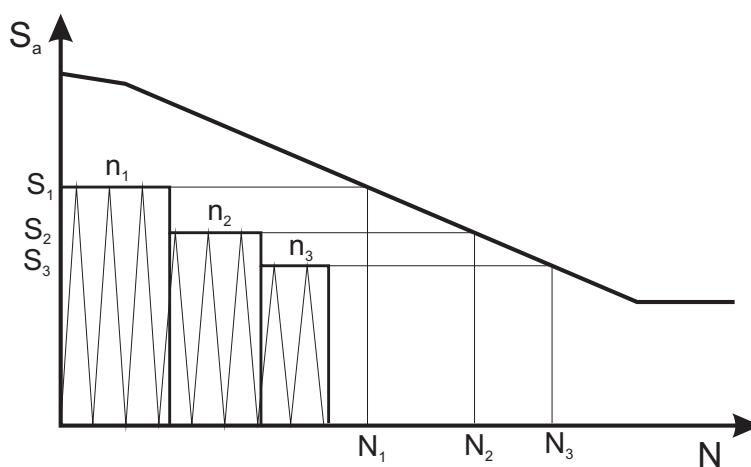
Rzeczywisty przebieg naprężenia w pracujących konstrukcjach bardzo rzadko można opisać stałą amplitudą naprężenia  $S_a$  oraz naprężeniem średnim  $S_m$ . Z drobnymi wyjątkami, np. wirujący wał, przebieg naprężenia w układzie przy obciążeniach eksploatacyjnych jest zmiennoamplitudowy (por. rysunek 3.5). Przybliżenie rzeczywistego przebiegu naprężenia cyklem harmonicznym jest daleko idącym uproszczeniem. Z jednej strony, gdy założymy, że amplituda naprężenia  $S_a$  cyklu harmonicznego jest równa maksymalnej amplitudzie naprężenia w przebiegu rzeczywistym otrzymamy wynik bezpieczny (oszacowany czas pracy konstrukcji będzie krótszy od rzeczywistego), ale zwykle daleki od rzeczywistej trwałości zmęczeniowej. Jeśli natomiast  $S_a$  dla cyklu harmonicznego przyjmimy mniejsze niż maksymalna amplituda naprężenia w przebiegu rzeczywistym, nie można być pewnym, że przewidywana trwałość zmęczeniowa konstrukcji jest określona z "bezpiecznej" strony.

Endo i Matsuishi w 1968r. opracowali metodę zliczania cykli naprężenia przy zmiennym obciążeniu [87]. Metoda następnie była rozwijana, m.in. w pracach [6, 39, 57, 105, 106]. Algorytm zliczający cykle doczekał się standaryzacji [3].

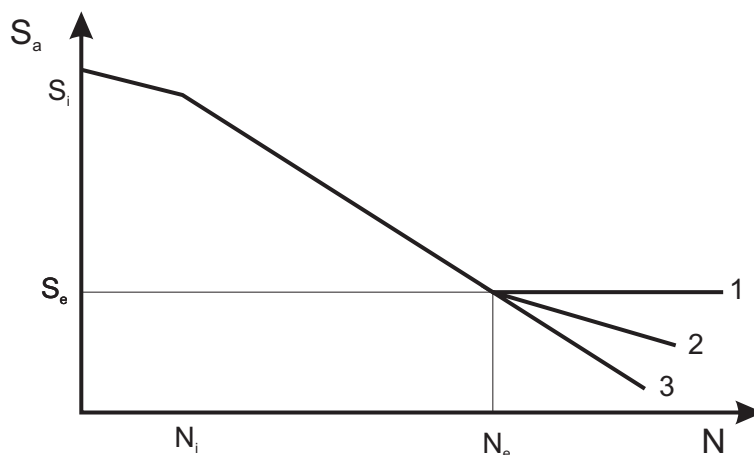
Algorytm zliczający cykle "rainflow" polega na zliczaniu zamkniętych pętli histerezy. Rysunek 3.8 przedstawia graficzną interpretację zasady zliczania cykli. Pojedynczy cykl charakteryzowany jest amplitudą naprężenia  $S_a$  oraz naprężeniem średnim  $S_m$ . Stosując wzór 3.10 dla każdego pojedynczego cyklu otrzymujemy przebieg naprężenia w którym każdy pojedynczy cykl ma współczynnik  $R = -1$ . Odpowiednio grupując kolejne cykle otrzymujemy schodkową funkcję amplitudy naprężenia (rysunek 3.9).



Rysunek 3.8: Ilustracja metody zamiany cykli zmiennoamplitudowych na pętle histerezy oraz ich zliczanie [6].



Rysunek 3.9: Usystematyzowana postać zmiennoamplitudowych cykli naprężenia.



Rysunek 3.10: Różne propozycje modyfikacji krzywej S–N do obliczeń trwałości zmęczeniowej przy obciążeniu zmiennoamplitudowym - 2, 3. Krzywa S–N dla obciążenia stałoamplitudowego - 1.

Metoda zliczania cykli nie jest przedmiotem niniejszej rozprawy, jest jedynie wykorzystywana jako narzędzie. Autor w przykładach obliczeniowych wykorzystał występującą w systemie Matlab metodę "rainflow" [2, 12].

Najszerzej praktycznie stosowaną metodą oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie zmiennoamplitudowych cykli naprężenia jest hipoteza liniowej kumulacji uszkodzeń Palmgrena–Minera [89, 100]. Hipoteza ta głosi, że jeśli mamy  $p$  poziomów amplitud naprężenia,  $r = 1..p$ , w każdym poziomie jest  $n_r$  cykli, a liczba cykli do zniszczenia przy danej amplitudzie wynosi  $N_r$  to uszkodzenie spowodowane przez dany blok obciążenia wynosi (por. rysunek 3.9)

$$d = \sum \frac{n_r}{N_r} \quad (3.33)$$

Zniszczenie elementu nastąpi, gdy

$$BLK = \frac{D}{d} = \frac{D}{\sum \frac{n_r}{N_r}} \quad (3.34)$$

$BLK$  oznacza trwałość zmęczeniową jako ilość powtórzeń bloku obciążenia,  $D$  jest krytyczną wartością uszkodzenia. Zwykle przyjmuje się  $D = 1$ , choć badania wskazują, że zniszczenie elementu może nastąpić przy znacznie niższych wartościach parametru  $D$  [119, 121].

Przyjmując, że czas trwania jednego bloku obciążenia wynosi  $t$ , szacowany czas pracy konstrukcji wynosi

$$T = BLK \cdot t \quad (3.35)$$

W obliczeniach zmęczeniowych rzeczywistych konstrukcji poddawanych stochastycznym obciążeniom (np. zawieszenie samochodu) obserwuje się interakcję wielu

składowych obciążeń. Zjawisko to polega na tym, że w zmiennoamplitudowej historii obciążenia rzeczywisty czas pracy konstrukcji nie jest równy obliczonemu za pomocą hipotezy Palmgrena–Minera. Interakcja może przyjmować charakter korzystny, gdy rzeczywisty czas pracy jest dłuższy od obliczonego lub, częściej, niekorzystny. Okazuje się, że przy obciążeniu zmiennoamplitudowym cykle z amplitudą naprężenia  $S_a$  mniejszą od granicy zmęczenia  $S_e$  również mają wpływ na trwałość zmęczeniową. Przy obciążeniu stałoamplitudowym gdy  $S_a < S_e$  nie obserwujemy zmęczeniowej degradacji materiału. Zjawisko to tłumaczy się tym, że w realistycznych, nieregularnych historiach obciążenia w materiale powstają mikropęknięcia, w których koncentracja naprężeń jest na tyle duża, że nawet cykle dla których  $S_a < S_e$  powodują degradację materiału. Ponieważ hipoteza Palmgrena–Minera nie zakłada efektu interakcji obciążeń, można ją uwzględnić modyfikując krzywą S–N. Zakres ograniczonej trwałości zmęczeniowej ( $S_i - S_e$ ) zostaje przedłużony powyżej umownej liczby cykli  $N_e$  przy której w przypadku obciążenia stałoamplitudowego zjawisko zmęczenia nie występuje. Zakres ograniczonej trwałości zmęczeniowej może być przedłużony przez prostą o tym samym kącie nachylenia lub zmodyfikowanym (rysunek 3.10). Poprawa oceny trwałości przy zmiennych amplitudach naprężenia za pomocą modyfikacji krzywej S–N jest możliwa tylko przy niekorzystnych efektach interakcji obciążenia.

### 3.3 Metoda oceny trwałości zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń

Teoria mechaniki ośrodków ciągłych z parametrem uszkodzenia wywodzi się z termodynamiki ośrodków ciągłych i musi uwzględniać nieodwracalność procesu degradacji materiału. W ogólności parametr uszkodzenia  $\mathbf{d}$  jest tensorem czwartego rzędu [26]. Gdy założymy izotropową naturę uszkodzenia tensor uszkodzenia sprowadza się do wartości skalarnej  $d$  [25, 26]. Mimo znacznego uproszczenia natury postępującej degradacji materiału, która często wykazuje anizotropowy charakter (np. pęknięcie) skalarna miara uszkodzenia jest szeroko stosowana [78, 80]. W niniejszej pracy prezentowany jest model konstytutywny materiału z izotropowym parametrem uszkodzenia.

#### 3.3.1 Podstawy termodynamiczne

Energia swobodna Helmholtza  $\Psi$  może być rozdzielona na dwie niezależne części: część związaną ze sprężystym zachowaniem materiału  $\Psi^e$  oraz część  $\Psi^p$  odpowiadającą plastycznemu odkształceniu materiału.

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e, \alpha, \beta) = \Psi^e(\varepsilon_{ij}^e, \beta) + \Psi^p(\alpha) \quad (3.36)$$

gdzie  $\varepsilon_{ij}^e$  jest sprężystą częścią tensora odkształceń, zaś  $\alpha$  i  $\beta$  są wewnętrznymi parametrami odpowiednio dotyczącymi plastyczności i sprężystości.

Sprężysta część energii swobodnej, przy założeniu nieskończenie małych odkształceń oraz stałej temperatury, może być zapisana jako

$$\Psi^e (\varepsilon_{ij}^e, \beta) = \frac{1}{2\rho} [\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^d (\beta) \varepsilon_{kl}^e] \quad (3.37)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością materiału, natomiast  $C_{ijkl}^d(\beta)$  jest tensorem konstytutywnym czwartego rzędu który uwzględnienia ewolucję wewnętrznych parametrów  $\beta$  [31, 78]. W ogólności

$$C_{ijkl}^d = f(\beta) C_{ijkl}^0 \quad (3.38)$$

gdzie  $C_{ijkl}^0$  jest tensorem konstytutywnym materiału rodzimego, bez uwzględnienia ewolucji parametrów  $\beta$ , natomiast  $f(\beta)$  jest skalarną funkcją transformacji (w ogólności argumentu tensorowego) tensora materiału rodzimego. Jako pierwszy funkcję  $f(\cdot)$  powiązał z degradacją materiału Kachanov ( $\beta \equiv d$ ) [58]. Wykorzystał empiryczną liniową zależność

$$f(d) = D - d \Rightarrow C_{ijkl}^d = (D - d) C_{ijkl}^0 \quad (3.39)$$

gdzie  $D$  jest krytyczną wartością uszkodzenia, natomiast  $d$  określa stopień degradacji materiału rodzimego. Gdy  $d = 0$ , mamy do czynienia z materiałem rodzimym, natomiast gdy  $d = D$  materiał uległ całkowitemu zniszczeniu. Zwykle przyjmuje się  $D = 1$ , choć badania wskazują, że zniszczenie elementu może nastąpić przy znacznie niższych wartościach parametru  $D$  [119]. W niniejszej pracy przyjęto  $D = 1$ .

Wstawiając zależność 3.39 do wzoru 3.37 otrzymujemy wyrażenie pozwalające określić sprężystą część energii swobodnej z uwzględnieniem uszkodzenia materiału

$$\Psi^e = (1 - d) \Psi^{e0} = \frac{1 - d}{2\rho} [\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^0 (\beta) \varepsilon_{kl}^e] \quad (3.40)$$

gdzie  $\Psi^{e0}$  jest częścią sprężystą energii swobodnej przy braku uszkodzeń.

Nierówność Clausiusa-Duhema w formie energetycznej może być zapisana w następujący sposób

$$\Gamma = \rho \left( -\dot{\Psi} - \eta \dot{\theta} \right) + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{\theta} q_i \nabla \theta \geq 0 \quad (3.41)$$

Zachodzi przy tym [80, 115]

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad \text{oraz} \quad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (3.42)$$

gdzie  $\eta$  jest entropią,  $\theta$  miarą temperatury, wektor  $\mathbf{q}_i$  strumieniem ciepła. Pochodna materialna energii swobodnej Helmholtza (powstała z różniczkowania wzorów 3.36 i 3.37) przyjmuje postać

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \Psi^e}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (3.43)$$

Podstawienie do wzoru 3.41 równania 3.43 daje w rezultacie

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \rho \frac{\partial \Psi^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \rho \frac{\partial \Psi^e}{\partial d} \dot{d} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} \dot{\alpha} - \rho \eta \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} q_i \nabla \theta \geq 0 \quad (3.44)$$



Naprężenie w uszkodzonym elemencie można obliczyć podstawiając zróżniczkowany wzór 3.40 do równania 3.42

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = (1 - d) C_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p),$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (3.45)$$

lub

$$\sigma_{ij} = (1 - d) \sigma_{ij}^0 \quad (3.46)$$

gdzie  $\sigma_{ij}^0$  jest naprężeniem w rodzimym, nieuszkodzonym materiale.

Wzory 3.45 oraz 3.46 są bezpośrednio wykorzystywane w analizie zmęczeniowej. Zostały one zaimplementowane w programie metody elementów skończonych FE-AP rozszerzonym o możliwość analizy zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń. Równanie 3.45 określa rzeczywista wartość naprężenia (przenoszonych sił wewnętrznych) w uszkodzonym elemencie.

### 3.3.2 Proces ewolucji uszkodzenia w zagadnieniu zmęczenia metali z uwzględnieniem plastyczności

Granica sprężystości jest określona warunkiem uplastycznienia

$$F(\sigma_{ij}, \alpha) = f(\sigma_{ij}) - K(\sigma_{ij}, \alpha) \leq 0 \quad (3.47)$$

Teoria plastycznego płynięcia zakłada istnienie potencjału plastycznego. Istnieje skalarna funkcja  $G(\boldsymbol{\sigma})$ , która spełnia rolę potencjału dla  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ . Prawo płynięcia przyjmuje postać [99, 115]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \text{gdzie } \lambda > 0 \quad (3.48)$$

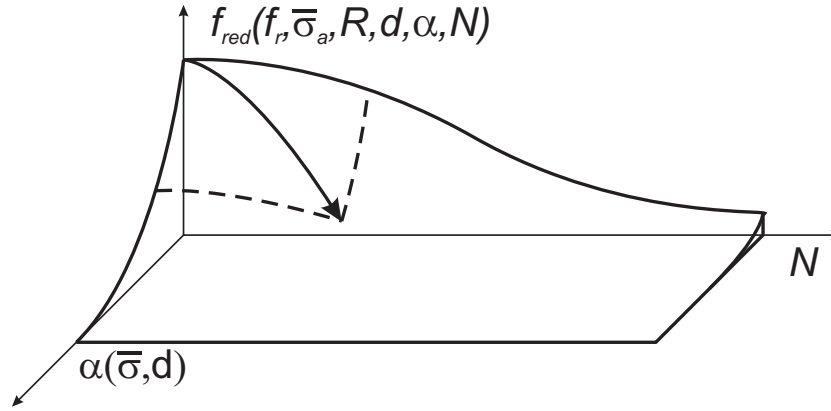
gdzie  $\lambda$  jest funkcją skalarną. Zakładając, że potencjał plastyczny  $G$  utożsamiamy z funkcją płynięcia  $f$ , równość 3.48 przyjmuje postać stowarzyszonego prawa płynięcia

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \text{gdzie } \lambda > 0 \quad (3.49)$$

Analogicznie można zbudować granicę wytrzymałości materiału, powyżej której postępuje stopniowa degradacja materiału.

$$F^D(\sigma_{ij}, d, \alpha, R) = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}, d, \alpha) - f_r(R) \cdot f_{red}(N, \bar{\sigma}_a, R, d) \leq 0, \quad (3.50)$$

gdzie  $\bar{\sigma}$  jest skalarną miarą naprężenia w uszkodzonym elemencie (np. wyliczaną według hipotezy Hubera–Misesa),  $f_r$  jest skalarną postacią granicy początku propagacji uszkodzenia, natomiast  $f_{red}$  jest funkcją redukcji wytrzymałości materiału rodzimego



Rysunek 3.11: Płaszczyzna utraty wytrzymałości materiału.

zależną od ilości przepracowanych cykli  $N$ , amplitudy skalarnej miary naprężenia oraz współczynnika asymetrii cyklu naprężenia  $R$ .

Podobnie jak w przypadku teorii plastyczności ewolucja parametru uszkodzenia dana jest wzorem [78, 80, 98]

$$\dot{d} = \mu \frac{\partial F^D}{\partial \bar{\sigma}}, \quad \dot{d} \geq 0 \quad (3.51)$$

gdzie  $\mu$  wykazuje podobnie właściwości jak  $\lambda$ .

Opisane procesy deformacji i degradacji materiału spowodowanej zmęczeniem pozwalają na określenie powierzchni utraty właściwości wytrzymałościowych w funkcji ilości cykli i ewolucji parametrów określających plastyczność materiału. Schematyczny obraz takiej powierzchni zaprezentowany jest na rysunku 3.11.

### 3.3.3 Funkcja utraty wytrzymałości materiału w analizie zmęczeniowej

Autor proponuje analityczną postać trwałości zmęczeniowej materiału jako funkcji ilości cykli naprężenia  $N$  i współczynnika asymetrii cyklu  $R$  [18, 82, 116]. Rozprawa jest kontynuacją i rozwinięciem prac m.in. [31, 80, 98].

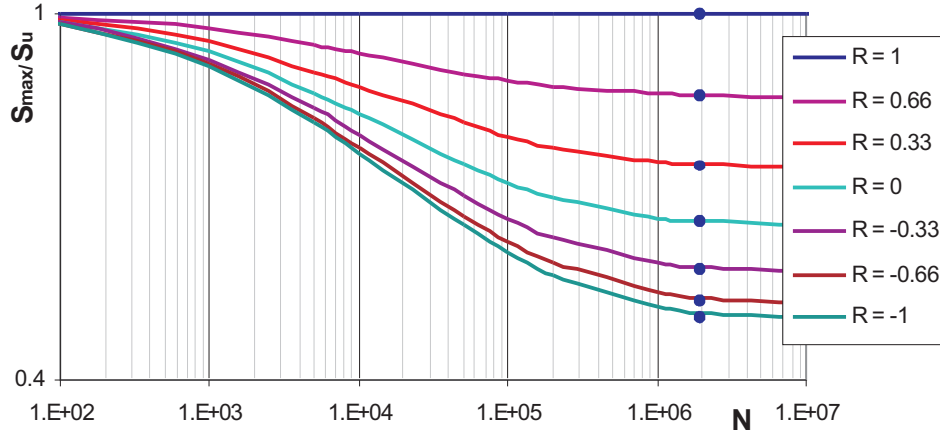
W roku 2005 grupa naukowców z CIMNE w Barcelonie pod kierownictwem prof. E. Onate zaproponowała analityczną postać krzywej zmęczeniowej S-N [98] w postaci

$$SN(R, N) = S_{th}(R) + [S_u - S_{th}(R)] \cdot \exp[-\alpha_t(R) \cdot \log_{10}(N)^\beta] \quad (3.52)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} S_{th}(R) &= S_e + (S_u - S_e) \cdot (0.5 + 0.5R)^\gamma \\ \alpha_t(R) &= \alpha + (0.5 + 0.5R) \cdot \delta \end{aligned} \right\} \text{ dla } |R| \leq 1$$

$$\left. \begin{aligned} S_{th}(R) &= S_e + (S_u - S_e) \cdot (0.5 + \frac{1}{2R})^\gamma \\ \alpha_t(R) &= \alpha + (0.5 + \frac{1}{2R}) \cdot \delta \end{aligned} \right\} \text{ dla } |R| > 1 \quad (3.53)$$



Rysunek 3.12: Proponowana krzywa S-N dla różnych wartości współczynnika asymetrii cyklu  $R$ .

W powyższych wzorach  $S_u$  jest wytrzymałością materiału na rozciąganie,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  są parametrami materiałowymi natomiast  $S_{th}$  jest funkcją granicy zmęczeniowej  $S_e$  zależną od współczynnika asymetrii cyklu  $R$ .

Autor zaproponował modyfikację wzoru 3.52 [18, 116].

$$SN(R, N) = S_{th}(R) + [S_u - S_{th}(R)] \cdot 10^{[-\alpha_t(R) \cdot \log(N)^\beta]} \quad (3.54)$$

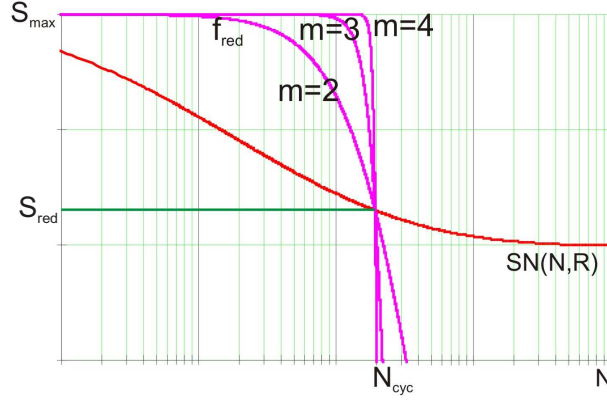
Zastosowana modyfikacja wzoru 3.52 ma na celu wprowadzenie pełnej zgodności z klasycznymi metodami oceny trwałości zmęczeniowej, np. koncepcją naprężeń nominalnych. Wprowadzona poprawka uwzględnia wpływ naprężenia średniego  $S_m$  i współczynnika asymetrii cyklu  $R$  wg koncepcji Goodmana zapisanej wzorem 3.13 [82]. Na rysunku 3.12 została przedstawiona proponowana krzywa S-N (wg wzoru 3.54) z uwzględnieniem różnych wartości współczynnika asymetrii cyklu  $R$ . Niebieskie punkty oznaczają wartości krzywej zmęczeniowej otrzymane za pomocą transformacji Goodmana [82].

Przekształcając wzór 3.54 oraz podstawiając wynik analizy naprężeń (np. za pomocą MES [82]), jako  $S_{red} \equiv SN(N, R)$  otrzymujemy trwałość zmęczeniową wyrażoną w ilości cykli naprężenia do przewidywanego zniszczenia

$$N_{cyc}(R, S_{red}) = 10 \left[ \left( \frac{\log\left(\frac{S_u - S_{th}(R)}{S_{red} - S_{th}(R)}\right)}{\alpha_t(R)} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \quad (3.55)$$

Proponowana analityczna postać krzywej zmęczeniowej S-N pozwala na określenie trwałości zmęczeniowej konstrukcji, wg wzoru 3.55, przy założonym obciążeniu zmiennym o stałej amplitudzie i danym współczynniku asymetrii cyklu  $R$ .

Z obserwacji wynika, że w miarę wzrostu pęknięcia zmęczeniowego, zniszczeniu (rozdzieleniu) ulegają kolejne punkty materialne wzdłuż pęknięcia. W celu opisu



Rysunek 3.13: Proponowana funkcja redukcji wytrzymałości materiału  $f_{red}$  dla różnych wartości parametru  $m$ .

procesu rozwoju pęknięcia zmęczeniowego Oller i inni wprowadzili funkcję redukcji wytrzymałości (degradacji) materiału  $f_{red}(S_{red}, R, N) \equiv 1 - d$  [98]

$$f_{red}(S_{red}, R, N) = 10^{\frac{\log\left(\frac{S_{red}}{S_u}\right)}{\log(N_{cyc})^\beta} \cdot \log(N)^\beta} \quad (3.56)$$

W toku badań autora została opracowana modyfikacja wzoru 3.56 [18, 116]. Poprawka polega na wprowadzeniu parametru  $m$  jako miary kruchości materiału. Proponowana funkcja degradacji materiału przyjmuje postać

$$f_{red}(S_{red}, R, N) = 10^{\frac{\log\left(\frac{S_{red}}{S_u}\right)}{\log(N_{cyc})^{\beta m}} \cdot \log(N)^{\beta m}} \quad (3.57)$$

Parametr  $m$  wykazuje podobne właściwości jak wykładnik występujący w prawie Parisa (wzór 1.1). Na rysunku 3.13 zaprezentowane są funkcja degradacji materiału dla różnych wartości parametru  $m$ .

Funkcja redukcji naprężenia jest utożsamiana z wartością uszkodzenia punktu materialnego  $f_{red}(S_{red}, R, N) \equiv 1 - d$ , wobec czego wzory 3.39 oraz 3.45, bezpośrednio wykorzystane w programie metody elementów skończonych, mogą być zapisane w postaci

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^d &= f_{red}(S_{red}, R, N) C_{ijkl}^0 \\ \sigma_{ij} &= f_{red}(S_{red}, R, N) \sigma_{ij}^o \end{aligned} \quad (3.58)$$

ponadto

$$S_{ud} = f_{red}(S_{red}, R, N) S_u \quad (3.59)$$

gdzie  $S_{ud}$  jest wytrzymałością uszkodzonego materiału.

Istotną wielkością jest przyrost uszkodzenia po przebyciu jednego cyklu obciążenia. Różniczkując wzór 3.57 względem  $N$  otrzymujemy jednostkowy przyrost uszko-

dzenia

$$\frac{\partial f_{red}(S_{red}, R, N)}{\partial N} = f_{red}(S_{red}, R, N) \frac{\beta^m \cdot \log\left(\frac{S_{red}}{S_u}\right) \cdot \log(N)^{\beta^m - 1}}{N \cdot \log(N_{cyc})^{\beta^m}} \quad (3.60)$$

Wzór 3.60 jest wykorzystywany w analizie zmęczeniowej z uwzględnieniem niesprężystego zachowania się materiału, gdy przyjęty schemat obciążenie jest zmienn-amplitudowy lub gdy uwzględnienia wymagają siły bezwładności. We wszystkich tych przypadkach przebieg naprężenia w czasie, w punkcie narażonym na pękanie zmęczeniowe charakteryzuje się zmienną amplitudą naprężenia. W takiej sytuacji aby ocenić trwałość zmęczeniową należy sumować uszkodzenia spowodowane przez kolejne cykle naprężenia - odprężenia (lub wiele cykli – blok cykli) wg wzoru

$$f_{red}^{(t+1)}(S_{red}, R, N) = f_{red}^{(t)}(S_{red}, R, N) + N_{blk} \frac{\partial f_{red}(S_{red}, R, N)}{\partial N} \quad (3.61)$$

gdzie  $N_{blk}$  oznacza ilość cykli w bloku oraz górny indeks  $(\cdot)$  oznacza numer iteracji. Należy zauważyć, że drugi wyraz z prawej strony równania 3.61 przyjmuje wartości ujemne ponieważ

$$\frac{\partial f_{red}(S_{red}, R, N)}{\partial N} \leq 0 \quad (3.62)$$

## 3.4 Implementacja koncepcji naprężeń nominalnych w programie MES

Metody analizy zmęczeniowej opisane w rozdziale 3.2 zostały zaimplementowane w kodzie źródłowym programu metody elementów skończonych FEAP. Zaproponowane zostały algorytmy pozwalające oszacować trwałość zmęczeniową konstrukcji z wykorzystaniem MES.

### 3.4.1 Algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej

Ogólny sposób działania prowadzący do obliczenia trwałości zmęczeniowej został przedstawiony na wydruku 3.1.

Przyjmujemy, że konstrukcja poddawana jest obciążeniom eksploatacyjnym (zmienn-amplitudowym), a materiał z którego wykonana jest konstrukcja może zachowywać się plastycznie. Występujące siły bezwładności również mogą oddziaływać na trwałość zmęczeniową układu.

Pierwszą czynnością (punkt 1, wydruk 3.1) jest określenie funkcji obciążenia w czasie  $F(t)$ . Najczęściej funkcja obciążenia podana jest w sposób dyskretny, jako wynik pomiarów eksploatacyjnych, rzadziej jako funkcja analityczna. W przypadku funkcji

Wydruk 3.1: Algorytm obliczenia trwałości zmęczeniowej konstrukcji przy założeniu nieliniowego zachowania się materiału i uwzględnieniu sił bezwładności.

1. Akwizycja rzeczywistego przebiegu obciążenia konstrukcji.
2. Analiza konstrukcji metodą elementów skończonych. W zagadnieniach gdzie znaczącą rolę odgrywają siły bezwładności niezbędną jest analiza dynamiczna. Jeśli stosowana teoria zmęczeniowa uwzględnia wpływ odkształceń plastycznych analiza MES musi je uwzględniać.
3. Zliczanie cykli naprężenia w konstrukcji metodą rainflow.
4. Obliczenie dla każdego cyklu zastępczej amplitudy naprężenia  $S_{ae}$  danej wzorem 3.10.
5. Grupowanie cykli - tworzenie funkcji schodkowej cykli naprężenia.
6. Obliczanie trwałości zmęczeniowej dla każdego poziomu naprężenia pogrupowanych cykli.
7. Obliczenie stopnia degradacji materiału  $d_{(i)}$  spowodowanej ( $i$ -tym) poziomem naprężenia.
8. Powtarzaj kroki 6 i 7 dla każdego poziomu naprężenia schodkowej funkcji naprężenia.
9. Obliczenie stopnia degradacji materiału  $d$  spowodowanej badanym przebiegiem obciążenia danej wzorem 3.33.
10. Obliczenie przewidywanego czasu pracy konstrukcji wg wzoru 3.34.

obciążenia podanej w sposób dyskretny znaczenie mają jedynie punkty zwrotne, lokalne wartości minimalne i maksymalne obciążenia [20].

Drugą czynnością (punkt 2, wydruk 3.1) jest analiza MES przy danej funkcji obciążenia. Na tym etapie może być uwzględniona plastyczność materiału (zgodnie z wybraną teorią). Obliczenia dynamiczne pozwalają uwzględnić siły bezwładności. Wynikiem jest funkcja naprężenia względem czasu w badanym punkcie konstrukcji. Analiza MES konstrukcji jest najtrudniejszą czynnością przy analizie zmęczeniowej. Uwagi do modelowania MES w zagadnieniach zmęczenia materiałów zostały zamieszczone w rozdziale 2.1

Kolejną czynnością (punkt 3, wydruk 3.1) jest policzenie ilości cykli naprężenia. Autor użył w tym celu funkcje *rainflow* oraz *rfmatrix* będące integralną częścią Matlab Wave Analysis Toolbox [2]. Jest to implementacja algorytmu zliczającego rainflow opisanego w rozdziale 3.2.4. Funkcje *rainflow* oraz *rfmatrix* przekształcają funkcję

naprężenia w macierz  $\mathbf{C}$  składającą się z 3 kolumn i  $n$  wierszy. W kolumnach zapisywane są kolejno: amplituda naprężenia  $S_a$ , wartość średnia  $S_m$  oraz ilość cykli (0.5 lub 1). W kolejnych wierszach zapisanych jest  $n$  zidentyfikowanych cykli.

Ponieważ na ogół dla każdego pojedynczego cyklu wartość średnia  $S_m \neq -1$ , należy dla każdego cyklu obliczyć zastępczą amplitudę naprężenia korzystając ze wzoru 3.10.

Następną czynnością (punkt 5, wydruk 3.1) jest grupowanie zliczonych metodą rainflow cykli naprężenia tak aby uzyskać schodkową funkcję naprężenia (por. rysunek 3.9). Schodkową funkcję naprężenia otrzymuje się kwalifikując poszczególne cykle do poszczególnych poziomów naprężenia. Wynikiem tej operacji jest przekształcenie macierzy  $\mathbf{C}$  w macierz dwukolumnową. Pierwsza kolumna zawiera średnie wartości amplitudy naprężenia, natomiast druga - ilość cykli przy danej amplitudzie. Macierz zawiera  $m$  wierszy - poziomów naprężenia.

Kolejnym krokiem analizy zmęczeniowej jest obliczenie trwałości zmęczeniowej dla każdego poziomu naprężenia. Na tej podstawie można obliczyć wartość parametru uszkodzenia materiału  $d$  spowodowaną przez poszczególne poziomy naprężenia. Zakres obciążenia eksploatacyjnego określa wzór 3.33. Dane obciążenie eksploatacyjne  $F(t)$  powinno być reprezentatywne, tj. zawierać w sobie elementy całej historii obciążenia konstrukcji. Stosując to założenie możemy obliczyć przewidywany czas pracy konstrukcji dany wzorem 3.35.

### 3.4.2 Zmodyfikowany algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej

Jeśli zadana funkcja obciążenia  $F(t)$  nie powoduje przekroczenia granicy plastyczności materiału, a sam materiał zachowuje się liniowo sprężysto oraz nie występują siły bezwładności (lub są pomijalnie małe) algorytm postępowania przedstawiony na wydruku 3.1 można zmodyfikować i uprościć. W takim przypadku nie jest konieczna szczegółowa analiza MES dla całej funkcji obciążenia.

Zmodyfikowany algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej konstrukcji zamieszczony jest w wydruku 3.2.

Modyfikacja polega na tym, że policzenie ilości cykli metodą rainflow nie jest prowadzone dla funkcji naprężenia w punkcie konstrukcji lecz dla funkcji obciążenia  $F(t)$ . W analogiczny sposób jak w przypadku zliczania cykli naprężenia powstaje funkcja schodkowa wartości obciążenia.

Aby obliczyć wartość naprężenia maksymalnego  $S_{max}$  w punkcie podejrzanym o możliwość rozwoju pęknięcia zmęczeniowego należy wykonać statyczną analizę MES przyjmując za obciążenie wartość maksymalnego obciążenia funkcji schodkowej. Przyjmując założenie, że materiał zachowuje się liniowo sprężysto wartości naprężenia spo-

Wydruk 3.2: Zmodyfikowany algorytm obliczenia trwałości zmęczeniowej konstrukcji przy założeniu liniowego zachowania się materiału.

1. Akwizycja rzeczywistego przebiegu obciążenia konstrukcji.
2. Zliczanie cykli obciążenie - odciążenie w konstrukcji metodą rainflow.
3. Obliczenie dla każdego cyklu zastępczej amplitudy obciążenie wg stosowanej wcześniej zależności 3.10.
4. Grupowanie cykli - tworzenie funkcji schodkowej cykli obciążenia.
5. Analiza konstrukcji metodą elementów skończonych dla pierwszego poziomu obciążenia. Dla kolejnych wartości amplitudy obciążenia wartość naprężenia w konstrukcji można obliczyć na podstawie wzoru 3.63.
6. Obliczanie trwałości zmęczeniowej dla każdego poziomu naprężenia pogrupowanych cykli.
7. Obliczenie stopnia degradacji materiału  $d_{(i)}$  spowodowanej ( $i$ -tym) poziomem naprężenia.
8. Powtarzaj kroki 6 i 7 dla każdego poziomu naprężenia schodkowej funkcji naprężenia.
9. Obliczenie stopnia degradacji materiału  $d$  spowodowanej badanym przebiegiem obciążenia danej wzorem 3.33.
10. Obliczenie przewidywanego czasu pracy konstrukcji wg wzoru 3.34.

wodowane przez pozostałe poziomy obciążenia można obliczyć z zależności

$$S_{max}^{(i)} = \frac{S_{max}^{(1)} \cdot F^{(i)}}{F^{(1)}} \quad (3.63)$$

gdzie indeks  $(i)$  oznacza kolejny poziom w schodkowej funkcji obciążenia, natomiast  $(1)$  oznacza pierwszy poziom w schodkowej funkcji obciążenia dla którego została przeprowadzona analiza MES. Niniejsze założenie znacząco obniża koszt obliczeniowy algorytmu.

Podobnie jak w przypadku algorytmu prezentowanego na wydruku 3.1 wartości parametru uszkodzenia materiału  $d$  oraz przewidywanego czasu pracy konstrukcji  $T$  obliczamy stosując wzory 3.33 oraz 3.35.

Autor zaimplementował algorytm analizy zmęczeniowej na podstawie koncepcji



naprężeń nominalnych w programie metody elementów skończonych FEAP autorstwa R.L. Taylora [124]. Doświadczalna krzywa zmęczeniowa S–N została wprowadzona do programu jako dana materiałowa. Przewidziano dwa różne sposoby wprowadzania krzywej S–N: podając dwa punkty charakterystyczne (wartości  $S_i$  i  $N_i$  oraz  $S_e$  i  $N_e$ ) lub granicę zmęczeniową ( $S_e$  i  $N_e$ ) oraz wykładnik  $m$ . Obydwa sposoby wprowadzania krzywej S–N są sobie równoważne i mogą być stosowane zamiennie.

Podczas analizy wytrzymałościowej dowolnej konstrukcji z karbem otrzymujemy złożony stan naprężenia. Metody przejścia z sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń do stanu jednowymiarowego zostały omówione w rozdziale 3.2.3. Autor wprowadził w programie FEAP na potrzeby analizy zmęczeniowej możliwość obliczenia naprężeń zredukowanych wg hipotezy Hubera–Misesa. Naprężenia te mogą być obliczane w węzłach lub w punktach Gaussa.

Algorytm obliczający ilość cykli naprężeń do zniszczenia konstrukcji wymagał napisania nowej odrębnej procedury oraz stworzenia nowej komendy języka makr zawartego w FEAPie. Wpływ naprężenia średniego na wytrzymałość zmęczeniową został uwzględniony za pomocą współczynnika asymetrii cyklu  $R$  oraz założeń zawartych w rozdziale 3.2.2. Wartość zastępczej amplitudy naprężenia  $S_{ae}$  została obliczona za pomocą wzoru 3.13. Ilość cykli do przewidywanego zniszczenia konstrukcji obliczono posługując się wzorem 3.4.

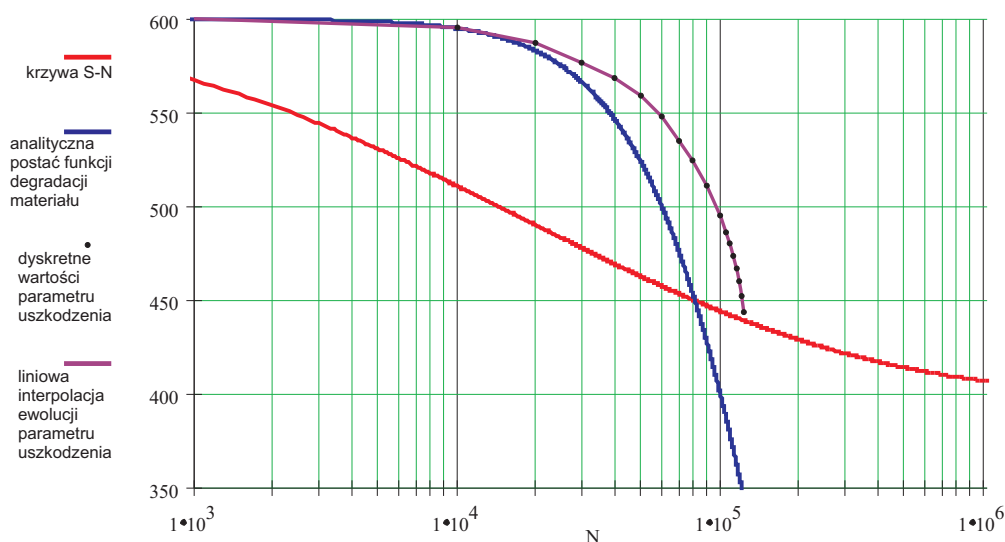
W celu łatwego przygotowywania danych obliczeniowych (modelu FE) oraz późniejszej przejrzystej prezentacji wyników program FEAP został wzbogacony przez autora o możliwość współpracy ze znanym pre- oraz postprocesorem GID [1].

Lista oraz składnia nowych poleceń języka makr FEAP została zamieszczona w dodatku A.

## **3.5 Implementacja algorytmu analizy zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń w programie MES**

Analiza zmęczeniowa konstrukcji za pomocą mechaniki uszkodzeń charakteryzuje się znacząco wyższym kosztem obliczeniowym w porównaniu do wcześniej omówionej Koncepcji Naprężeń Nominalnych. Wysoka złożoność obliczeniowa jest spowodowana przez obligatoryjną dyskretyzację w dziedzinie ilości cykli. Z tego powodu, analiza zmęczeniowa za pomocą mechaniki uszkodzeń bardziej przypomina badanie dynamicznej odpowiedzi konstrukcji (z uwzględnieniem sił bezwładności) niż analizę statyczną jak miało to miejsce w przypadku koncepcji naprężeń nominalnych (lokalnych).

Należy również wyróżnić dwa podstawowe rodzaje analizy zmęczeniowej ze



Rysunek 3.14: Graficzna interpretacja ewolucji parametru uszkodzenia z uwzględnieniem dyskretyzacji w dziedzinie ilości cykli.

względem na rodzaj obciążenia:

- przy założeniu uproszczonego obciążenia harmonicznego ze stałą amplitudą,
- z obciążeniem zmiennoodamplitudowym (bliskim rzeczywistemu).

W opisie implementacji pominięte zostaną szczegóły wprowadzania i wczytywania do programu danych materiałowych.

### 3.5.1 Analiza zmęczeniowa przy stałej amplitudzie obciążenia – algorytm postępowania

Algorytm postępowania w celu obliczenia trwałości zmęczeniowej konstrukcji za pomocą mechaniki uszkodzeń jest zamieszczony w wydruku 3.3.

Rozważmy przypadek, gdy konstrukcja obciążona jest siłą harmoniczną o stałej amplitudzie. Jeśli materiał wykazuje jedynie cechy sprężyste oraz pominięte zostaną siły bezwładności również przebieg naprężenia w konstrukcji będzie sinusoidalnie zmienny o stałej amplitudzie. Należy zauważyć, że sprężyste zachowanie się materiału może być nieliniowe.

Ilość cykli w bloku (dyskretyzacja w dziedzinie ilości cykli) powinna być odpowiednio dobrana. Graficzna interpretacja analizy zmęczeniowej z uwzględnieniem dyskretyzacji w dziedzinie ilości cykli przedstawiono na rysunku 3.14.

Wydruk 3.3: Algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń bez uwzględnienia plastycznego zachowania się materiału i przy założeniu stałej amplitudy obciążenia.

1. Analiza konstrukcji nieuszkodzonej metodą elementów skończonych. W przypadku, gdy występują naprężenia złożone obliczenie pola naprężeń zredukowanych, np. wg wzoru 3.25.
2. Wprowadzenie parametru uszkodzenia dla każdego elementu skończonego (w szczególności dla każdego punktu Gaussa).
3. Określenie kroku czasowego, ilości cykli naprężenia w danym bloku obciążenia.
4. Analiza konstrukcji za pomocą MES z uwzględnieniem uszkodzenia materiału.
5. Obliczenie przyrostu uszkodzenia po przebyciu danego bloku obciążenia.
6. Uaktualnienie wartości parametru uszkodzenia dla każdego elementu skończonego.
7. Powtarzaj kroki od 4 do 6 aż zniszczenia konstrukcji.

Długość bloku, czyli ilość cykli w jednym kroku analizy degradacji materiału, powinna być kompromisem pomiędzy dokładnością obliczeń a złożonością obliczeniową. W chwili obecnej ilość cykli w bloku dobierana jest na podstawie wpływu zmiany długości bloku na wynik końcowy. Jeśli dalsze zmniejszanie ilości cykli w bloku nie powoduje, założonej jako tolerancja, zmiany wyniku analizy przyjmuje się, że długość bloku została dobrana poprawnie.

Pierwszą czynnością jest analiza konstrukcji metodą elementów skończonych. Tworzone są macierze sztywności dla każdego elementu skończonego. Zachowana jest tutaj hipoteza małych odkształceń, wobec tego macierze gradientów funkcji kształtu pozostają niezmienione. Aktualna wartość parametru uszkodzenia ma wpływ jedynie na stałe materiałowe. Poszczególne elementowe macierze sztywności modyfikowane są poprzez odpowiadającą danemu elementowi wartość funkcji degradacji materiału. Następnie z lokalnych macierzy sztywności składana jest macierz globalna i rozwiązywany jest główny układ równań liniowych.

Prezentowana analiza zmęczeniowa za pomocą mechaniki uszkodzeń pozwala wyznaczyć wartość parametru uszkodzenia na podstawie wartości naprężenia w elemencie (w punkcie Gaussa). W przypadku zagadnień w których występują wyłącznie obciążenia osiowe lub tnące nie ma problemu z wyznaczeniem wartości naprężenia po-

wodującego zmęczeniową degradację materiału. Inaczej jest gdy wynikiem analizy są złożone pola naprężeń. Takie pola uzyskujemy w wyniku analizy konstrukcji metodą elementów skończonych. W niniejszej pracy ograniczamy się do jednowymiarowej, z uwagi na stan naprężenia, analizy zmęczeniowej konstrukcji. Złożony stan naprężenia zastępowany jest skalarną wartością naprężenia zredukowanego. Sposoby obliczania naprężenia zredukowanego zostały przedstawione w rozdziale 3.2.3. W programie wartości zastępczej amplitudy naprężenia  $S_{ared}$  oraz naprężenia średniego  $S_{mred}$  obliczane są za pomocą wzorów 3.25. Stopień wytwężenia jest obliczany dla każdego elementu skończonego.

Kolejną czynnością jest obliczenie przyrostu parametru uszkodzenia – stopniowej utraty nośności konstrukcji. Na początku analizy zmęczeniowej parametr uszkodzenia dla każdego elementu równy jest  $f_{red} = 1$ . Parametr ten jest stopniowo zmniejszany. Kolejne przyrosty uszkodzenia zmęczeniowego traktowane są jako utrata nośności (przenoszenia obciążeń) danego elementu skończonego. Wartość funkcji redukcji wytrzymałości materiału na każdym kroku oblicza się z zależności 3.61. W chwili gdy wytrzymałość uszkodzonego materiału osiągnie wartość  $S_{ud} = S_{ared} + S_{mred}$  dany element skończony uznaje się za całkowicie uszkodzony.

Ważnym elementem programu jest modyfikacja elementowych macierzy sztywności. Stałe materiałowe modyfikowane są poprzez funkcję redukcji nośności materiału  $f_{red}$  zgodnie ze wzorem 3.58.

W programie nie ma jasno zdefiniowanego kryterium globalnego zniszczenia konstrukcji. Całkowite uszkodzenie elementu skończonego niekoniecznie musi skutkować globalnym zniszczeniem. Globalnym kryterium zniszczenia konstrukcji może być np. ograniczenie nałożone na wartość deformacji uszkodzonej konstrukcji bądź na głębokość penetracji pęknięcia zmęczeniowego.

### 3.5.2 Analiza zmęczeniowa przy zmiennej amplitudzie obciążenia – algorytm postępowania

Algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej konstrukcji za pomocą metody opartej o mechanikę uszkodzeń przy założeniu przebiegu naprężenia o zmiennej amplitudzie przedstawia wydruk 3.4.

Ogromna większość konstrukcji mechanicznych narażonych na pękanie zmęczeniowe obciążona jest siłą o zmiennej amplitudzie. Zmiennoamplitudowy przebieg naprężenia w konstrukcji może zachodzić również przy obciążeniu o stałej amplitudzie. Efekt ten może być spowodowany przez występujące odkształcenia plastyczne elementów składowych konstrukcji, por. rozdział 3.7.1. Aby ocenić rzeczywisty czas pracy konstrukcji ze względu na zniszczenie zmęczeniowe należy w analizie uwzględnić historię obciążenia.

Wydruk 3.4: Algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń z uwzględnienia plastycznego zachowania się materiału oraz założeniu dynamicznej analizy MES.

1. Akwizycja rzeczywistego przebiegu obciążenia konstrukcji.
2. Określenie kroku czasowego.
3. Wprowadzenie parametru uszkodzenia dla każdego punktu Gaussa.
4. Tworzenie macierzy sztywności, zakładamy brak ubytku masy.
5. Analiza MES na danym kroku czasowym, obliczenie zredukowanych wartości naprężenia.
6. Zbadanie czy naprężenie w danym elemencie skończonym zwiększyło bądź zmniejszyło swoją wartość.
7. Powtarzaj kroki 5 i 6 aż do wykrycia lokalnego maksimum i minimum naprężenia ( $S_{min}$  oraz  $S_{max}$ );
8. Obliczenie amplitudy naprężenia  $S_a$  oraz współczynnika asymetrii cyklu  $R$ , wzory 3.7 i 3.12.
9. Określenie przyrostu uszkodzenia zmęczeniowego w elemencie (wzór 3.60).
10. Uaktualnienie parametru uszkodzenia.
11. Powtarzaj kroki 4 do 10 aż do globalnego zniszczenia konstrukcji.

W rozdziale 3.2.4 została przedstawiona metoda analizy zmęczeniowej konstrukcji poddanej obciążeniom o zmiennej amplitudzie. Opisana metoda rainflow pozwala na usystematyzowanie i zliczenie cykli obciążenie – odciążenie. Główną wadą metody rainflow jest to, że tracona jest informacja o kolejności następujących po sobie cyklach obciążenia.

Pozbawiona tej wady jest metoda analizy zmęczeniowej oparta na mechanice uszkodzeń. Proponuje się, że pęknięcie powstaje w trakcie obciążania konstrukcji a jego długość zależy od amplitudy naprężenia oraz naprężenia średniego w danym elemencie. Innymi słowy metoda zakłada obliczenie przyrostu uszkodzenia zmęczeniowego w każdym badanym cyklu obciążenia.

Algorytm prezentowany na wydruku 3.4 umożliwia analizę zmęczeniową konstrukcji obciążonej siłą o zmiennej amplitudzie z uwzględnieniem sił bezwładności, tłumienia oraz plastycznego zachowania się materiału. Teoretycznie pozwala na dy-

Wydruk 3.5: Algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej konstrukcji poddanej obciążeniu o zmiennej amplitudzie bez uwzględnienia sił bezwładności i uplastycznienia się materiału.

1. Akwizycja rzeczywistego przebiegu obciążenia konstrukcji.
2. Zliczanie cykli obciążenie - odciążenie w konstrukcji metodą rainflow, opisana w rozdziale 3.2.4.
3. Obliczenie dla każdego cyklu zastępczej amplitudy obciążenie wg stosowanej wcześniej zależności 3.10.
4. Grupowanie cykli - tworzenie funkcji schodkowej cykli obciążenia.
5. Analiza konstrukcji metodą elementów skończonych dla danego poziomu obciążenia.
6. Obliczenie wzrostu parametru uszkodzenia spowodowanego przez dany blok obciążenia ( $N^{(i)}$  cykli o amplitudzie  $S_a^{(i)}$ ).
7. Powtarzaj kroki 5 i 6 dla każdego poziomu naprężenia schodkowej funkcji naprężenia.
8. Obliczenie stopnia degradacji materiału  $d$  spowodowanej badanym przebiegiem obciążenia danej wzorem.

dynamiczną analizę konstrukcji z obciążeniem losowym aż do zniszczenia konstrukcji. Taki przypadek, choć możliwy, jest nie do przyjęcia ze względu na ogromny koszt obliczeniowy (miliony kroków całkowania po czasie). Dynamiczna analiza konstrukcji metodami modalnymi w tym przypadku nie przyspiesza obliczeń, a może je nawet znacząco wydłużyć. Wraz z postępowaniem uszkodzenia zmęczeniowego modyfikacji ulega macierz sztywności konstrukcji. Wymaga to za każdym razem rozwiązywania problemu własnego dla nowej, zmodyfikowanej macierzy sztywności.

Praktycznym zastosowaniem tej metody może być analiza zmęczeniowa ograniczona jedynie do pewnych etapów pracy konstrukcji. Jednym z takich przykładów może być analiza zmęczeniowa wahacza zawieszenia pojazdu. Czas akwizycji sił działających na wahacz może być ograniczony przejazdem na odcinku 1 km. Określenie przyrostu wartości parametru uszkodzenia przez przejechanie 1 km pozwala na oszacowanie trwałości elementu wyrażonego w kilometrach.

Jeśli materiał konstrukcji nie ulega uplastycznieniu oraz siły bezwładności są pomijalnie małe, algorytm analizy zmęczeniowej uprości się do postaci zaprezentowanej na wydruku 3.5.

Algorytm na wydruku 3.5 może być zastosowany jedynie przy spełnieniu wa-

runków o pomijalnie małych siłach bezwładności oraz braku plastycznego płynięcia materiału. Jest on znacząco szybszy w porównaniu do algorytmu prezentowanego na wydruku 3.4. Przyczyną zmniejszenia złożoności obliczeniowej jest w tym przypadku brak konieczności analizy dynamicznej konstrukcji. Wadą tego podejścia jest utrata informacji o kolejności następujących po sobie cykli obciążenia.

## 3.6 Złożoność obliczeniowa algorytmu analizy zmęczeniowej

Analiza naprężeń i odkształceń rzeczywistych konstrukcji za pomocą MES wymaga budowania skomplikowanych modeli numerycznych charakteryzujących się bardzo dużą ilością stopni swobody. Dodatkowo duża wrażliwość procesu szacowania trwałości zmęczeniowej na błędy analizy naprężeń powoduje konieczność wielokrotnego powtarzania obliczeń i poprawiania modelu numerycznego aż do uzyskania zadowalających rezultatów. Określenie złożoności obliczeniowej proponowanych algorytmów analizy zmęczeniowej konstrukcji pozwala ustalić zakres praktycznej stosowalności prezentowanego podejścia. Dodatkowo umożliwia znalezienie potencjalnych słabych punktów algorytmu, które charakteryzują się znacznym kosztem obliczeniowym.

Aby oszacować koszt rozwiązania problemu oceny trwałości zmęczeniowej obliczamy ile działań arytmetycznych wymagają poszczególne etapy algorytmu. Ponieważ czas wykonania mnożenia i dzielenia jest podobny, ale dłuższy od dodawania i odejmowania przyjęło się mierzyć koszt obliczeń ilością długich działań (oznaczonych jako *op*) czyli par mnożenie – dodawanie [62].

Proces analizy zmęczeniowej konstrukcji z wykorzystaniem metody elementów skończonych, podobnie jak sama metodę elementów skończonych, można podzielić na trzy zasadnicze części:

- Preprocesor - przygotowanie modelu do obliczeń, wczytanie współrzędnych węzłów, wczytanie tablicy koneksji elementów, danych materiałowych, określenie warunków brzegowych: podparcia i obciążenia.
- Procesor - zasadnicza część programu: obliczenie macierzy sztywności dla każdego elementu, złożenie macierzy sztywności, wprowadzenie warunków brzegowych, rozwiązanie układu równań, obliczenie dodatkowych wielkości (np. pól naprężeń) oraz analiza zmęczeniowa konstrukcji.
- Postprocesor - graficzna prezentacja wyników obliczeń.

W dalszych rozważaniach nad kosztem obliczeniowym programu obliczającego trwałość zmęczeniową konstrukcji ograniczone zostaną jedynie do jego zasadniczej części – procesora. Pomijamy koszt tworzenia siatki elementów skończonych oraz jej wpro-

wadzenia do programu komputerowego oraz koszt obliczeniowy prezentacji wyników. W analizie kosztu obliczeniowego algorytmu zawartego w wydruku 3.4 uwzględnione zostaną jedynie koszty tworzenia układu równań, rozwiązania układu równań oraz obliczenia wielkości niezbędnych do oszacowania trwałości zmęczeniowej.

Ocena złożoności obliczeniowej samego aparatu MES jest skomplikowana. Nie jest też przedmiotem rozprawy. Różnorodność stosowanych elementów skończonych oraz różne rodzaje analizy układów mechanicznych powodują, że złożoność obliczeniowa może być bardzo różna dla zagadnień pozornie podobnych do siebie np. analiza dynamiczna metodą Newmarka i analiza modalna.

Najbardziej kosztownymi częściami podstawowego typu analizy konstrukcji metodą elementów skończonych (liniowa sprężystość) są przygotowanie układu równań liniowych i jego rozwiązanie.

Przygotowanie układu równań łączy się z utworzeniem macierzy sztywności dla każdego elementu skończonego oraz ze scaleniem ich w globalną macierz sztywności.

Rozpatrzmy problem analizy liniowo – sprężystej konstrukcji wykonanych z elementów belkowych. Oznaczmy jako  $np$  ilość węzłów układu,  $el$  ilość elementów skończonych,  $nst$  ilość stopni swobody w węźle.

Złożoność obliczeniowa programu MES zostanie wyznaczona dla analizy konstrukcji belkowej. Macierz sztywności elementu belkowego dwuwęzłowego jest macierzą symetryczną o wymiarze  $12 \times 12$ . Pomijając pola zerowe wymaga obliczenia 78 pól. Założenie izotropowej charakterystyki materiału powoduje konieczność obliczenia jedynie 11 wartości. Do obliczenia każdego unikalnego pola wykorzystywanych jest 5 operacji długich (mnożeń). Zatem wykonanych zostaje 55 operacji obliczających unikalne wartości macierzy sztywności elementu belkowego. Przyjmując, że operacja przypisania to jedna operacja długa, na utworzenie macierzy sztywności potrzebujemy 133 operacji. Transformacja do globalnego układu współrzędnych wymaga dodatkowo min. 225 operacji. Dodanie lokalnej macierzy (dla pojedynczego elementu) do globalnej wymaga przeprowadzenia dalszych 144 operacji. Reasumując, utworzenie  $el$  lokalnych macierzy sztywności i stworzenie z nich globalnej macierzy sztywności wymaga przeprowadzenia minimum następującej ilości operacji

$$A_{szt}(el) = el(133 + 225 + 144) = 502 \cdot el = O(el) \quad (3.64)$$

Można przyjąć, że oczekiwany koszt obliczeniowy utworzenia globalnej macierzy sztywności  $A_{szt}$  jest liniowy wobec  $el$ .

Głównym obciążeniem dla procesora komputera w analizie MES jest jednak rozwiązanie układu równań liniowych. W programie FEAP, wykorzystanym przez autora, układ równań jest rozwiązywany metodą LU [124]. W metodzie tej macierz sztywności  $\mathbf{K}$  rozkładana jest na dwie podmacierze  $\mathbf{L}$  oraz  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (3.65)$$



gdzie  $\mathbf{L}$  jest macierzą poddiagonalną z jedynkami na diagonalu, natomiast  $\mathbf{U}$  jest macierzą trójkątną górną. Taki rozkład pozwala na rozwiązanie dwóch podukładów prostych metodą podstawiania, odpowiednio, wprzód oraz wstecz [62].

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{U}\mathbf{u} = \mathbf{x} \quad (3.66)$$

Rozkład macierzy  $\mathbf{K}$  na podmacierze  $\mathbf{L}$  oraz  $\mathbf{U}$  wymaga przeprowadzenia przynajmniej  $\frac{1}{3}(np \cdot nst)^3 + \frac{1}{2}(np \cdot nst)^2$  operacji długich [62]. Rozwiązanie dwóch podukładów równań (wzór 3.66) wymaga wykonania  $(np \cdot nst)^2$  operacji [62].

Zatem złożoność obliczeniowa rozwiązania problemu metodą elementów skończonych jest rzędu co najmniej

$$A_{mes} = A_{szt} + A_{ukl} = O(el) + \frac{1}{3}(np \cdot nst)^3 + \frac{3}{2}(np \cdot nst)^2 \approx O(el) + O[(np \cdot nst)^3] \quad (3.67)$$

Jednoznaczne określenie kosztu obliczeniowego algorytmu 3.4, podrozdział 3.5.2, nie jest możliwe. Autor podejmuje próbę oceny złożoności obliczeniowej w przypadku sparametryzowanej analizy MES.

Założmy, że dysponujemy reprezentatywną historią obciążenia składającą się z *ob* danych dyskretnych. Przyjmujemy, że konstrukcja wymaga analizy dynamicznej oraz odpowiedź materiału jest nieliniowa (dochodzi do miejscowego uplastycznienia konstrukcji).

Koszt obliczeniowy analizy nieliniowej konstrukcji jest zależny od stopnia nieliniowości odpowiedzi konstrukcji na zadane obciążenie. W trakcie obliczeń na danym kroku czasowym program MES realizuje algorytm nieliniowej odpowiedzi materiału. Polega on na cyklicznym rozwiązywaniu układu równań i jego odpowiedniej modyfikacji aż do uzyskania zbieżności. Zmienną *it* oznaczono ilość iteracji konieczną do poprawnego rozwiązania zadania nieliniowego, założono przy tym, że ilość ta będzie równa dla każdego kroku czasowego.

Koszt obliczeniowy analiza dynamicznej konstrukcji metodą bezpośredniego całkowania (np. Newmarka) jest liniowo zależny od ilości danych w historii obciążenia.

Zatem koszt analizy dynamicznej z uwzględnieniem nieliniowej odpowiedzi materiału wynosić będzie

$$A_{nlin} = O(el) + it \cdot ob(Oa(np \cdot nst)^3 + O(np \cdot nst)^2) \approx O(el) + O(it \cdot ob(np \cdot nst)^3) \quad (3.68)$$

Analizę zmęczeniową z uwzględnieniem dynamicznej odpowiedzi konstrukcji należy rozpocząć od zachowania dyskretnych wartości sił zewnętrznych działających na

konstrukcję (wydruk 3.4 punkt 1). Koszt zachowania historii obciążenia będzie proporcjonalny do ilości przedziałów czasowych  $ob$ , czyli

$$A_{akw} = O(ob) \quad (3.69)$$

Kolejną czasochłonną operacją jest wprowadzenie dla każdego punktu Gaussa parametru uszkodzenia. Zakładając, że konstrukcja została dyskretyzowana za pomocą elementów skończonych posiadających jeden punkt Gaussa (np. czworościany) koszt tej operacji (wydruk 3.4, punkt 3) będzie liniowo zależny od ilości elementów  $el$

$$A_{par\_uszk} = O(el) \quad (3.70)$$

Punkty 5 do 7 (wydruk 3.4) można potraktować całościowo. Ilość lokalnych minimów i maksimów nie zależy jedynie od złożoności funkcji obciążenia. Równie ważna jest geometria i cechy materiałowe konstrukcji. Ilość lokalnych minimów i maksimów nie może być większa niż ilość kroków czasowych, a więc  $ob$ . Dodatkowo dla każdego kroku czasowego wykonana jest raz analiza MES. Koszt obliczeniowy kroków 5 do 7 wynosi

$$A_{nlin} = O(el) + O(it \cdot ob(np \cdot nst)^3) \quad (3.71)$$

Koszt obliczenia amplitudy oraz współczynnika asymetrii  $R$  oraz obliczenie przyrostu uszkodzenia dla pojedynczego zidentyfikowanego cyklu naprężenia (wydruk 3.4, punkty 7 oraz 9) jest stały. Zatem wykonanie tych operacji dla każdego elementu skończonego w każdym kroku czasowym jest liniowo zależne od  $el$ , czyli

$$A_d = O(ob) \cdot O(el) \quad (3.72)$$

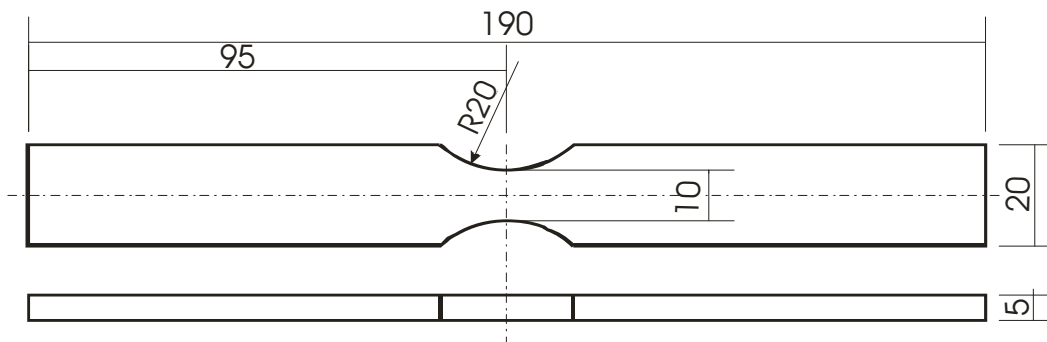
Całkowity koszt obliczeniowy dynamicznej analizy zmęczeniowej jest sumą czasów wykonania poszczególnych operacji z uwzględnieniem pętli zawartej w punkcie 11, wydruk 3.4

$$A = A_{akw} + A_{par\_uszk} + A_{nlin} + A_d = O(ob) + O(el) + ob(O(el) + O(it \cdot (np \cdot nst)^3)) + O(ob) \cdot O(el) \quad (3.73)$$

Ponieważ  $ob$  jest zawsze większe od 1

$$A = O[ob(el + it \cdot (np \cdot nst)^3)] \quad (3.74)$$

Z przeprowadzonej analizy złożoności obliczeniowej algorytmu szacowania trwałości zmęczeniowej konstrukcji wynika, że najbardziej kosztowną częścią algorytmu jest analiza MES. Wobec tego, analiza zmęczeniowa konstrukcji, za pomocą prezentowanych algorytmów obliczeniowych, ma swoje ekonomiczne uzasadnienie dla problemów, które dają się rozwiązać za pomocą aparatu MES w rozsądnym czasie. Określenie trwałości zmęczeniowej konstrukcji z wyłączeniem analizy MES charakteryzuje się liniową złożonością obliczeniową względem ilości elementów  $el$ .



Rysunek 3.15: Próbką z karbem.

## 3.7 Przykłady analizy zmęczeniowej konstrukcji za pomocą MES

Metody i algorytmy szacowania trwałości zmęczeniowej z wykorzystaniem MES zostały zilustrowane na przykładzie analizy zmęczeniowej próbki z karbem rozciąganej osiowo oraz cylindra hydraulicznego. Ponadto wykonano symulację propagacji zmęczeniowej degradacji materiału aż do całkowitego zniszczenia.

### 3.7.1 Analiza numeryczna procesu zniszczenia próbki z karbem obciążonej osiowo

Celem przykładu numerycznego jest weryfikacja algorytmu obliczania szacowanej ilości cykli do zniszczenia. Wyniki numeryczne porównane zostały z wynikami eksperymentu prezentowanego w pracy [67].

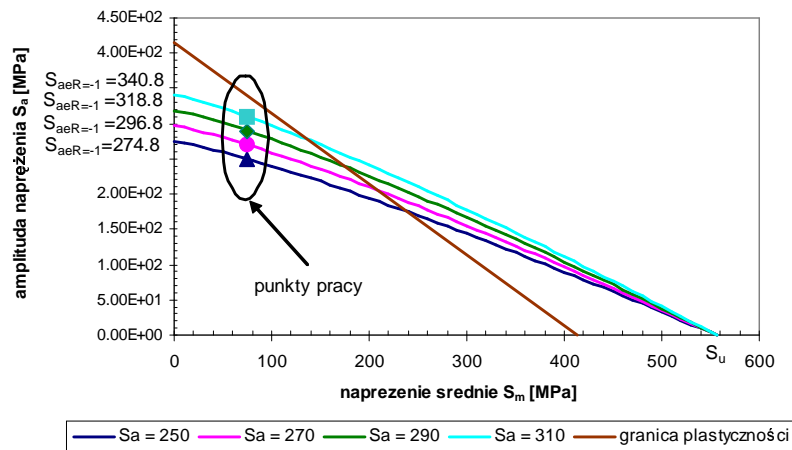
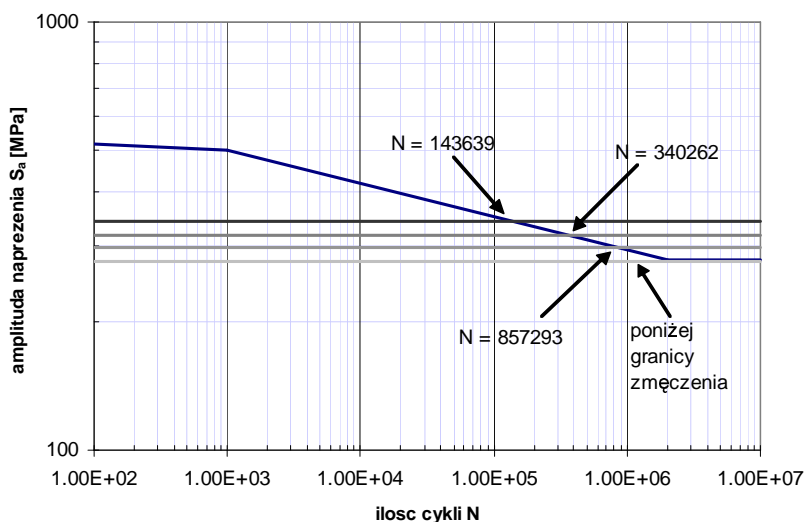
Kształt i wymiary próbki pokazano na rysunku 3.15. Długość próbki wynosi 19 mm. Próbką wykonana jest ze stali 10HNAP o następujących właściwościach materiałowych: gęstość  $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$ , moduł Younga  $E = 210 GPa$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ , naprężenie plastycznego płynięcia  $S_y = 414 MPa$ , wytrzymałość materiału  $S_u = 556 MPa$ . W równaniu 3.9 przyjęto wartość współczynnika  $n = 1.2$ . Rozpatrywano trzy przypadki poziomu wartości naprężenia średniego  $S_m$  równe 75, 150 i 225 MPa.

**Przypadek pierwszy:**  $S_m = 75 MPa$ .

W pierwszym przypadku rozpatrywano cztery wartości amplitudy naprężenia  $S_a$  równe 250, 270, 290 i 310 MPa. Naprężenia maksymalne i naprężenia minimalne ( $S_{max}, S_{min}$ ) dla czterech wartości amplitudy naprężenia wynosiły odpowiednio: (325, -175), (345, -195), (365, -215) oraz (385, -235). Na rysunku 3.16 pokazano punkty pracy i zastępcze amplitudy naprężenia dla  $R = -1$ . W tabelicy 3.1 i na rysun-

$S_m$ [MPa]	$S_a$ [MPa]	$R$	ilość cykli do zniszczenia	
			eksperyment [67]	obliczenia
75	250	-0.54	439 000 402 500 >2 000 000	>2 000 000
75	270	-0.57	358 200 854 700 318 700	857 294
75	290	-0.59	252 300 376 300 379 700	340 262
75	310	-0.61	54 800 123 400 45 000	143 639
150	270	-0.29	172 100 121 500 233 100	143 963
150	290	-0.32	124 300 41 900 60 500	57 139
225	230	-0.59	413 900 204 900 545 200	125 280

Tabela 3.1: Ilość cykli do zmęczenia, eksperyment oraz obliczenia numeryczne.

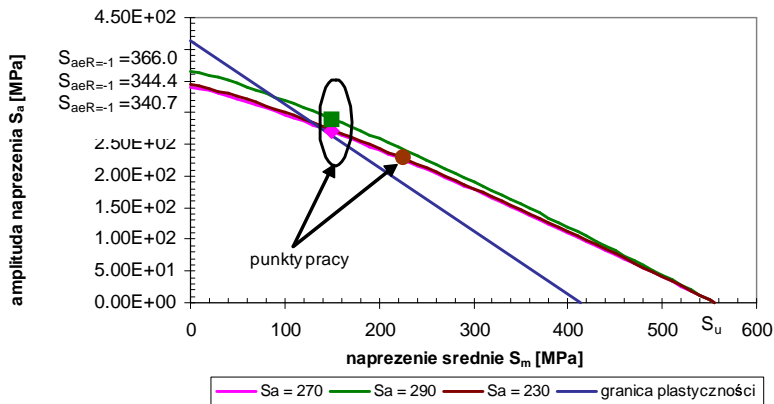
Rysunek 3.16: Wykresy Goodmana oraz punkty pracy dla  $S_m = 75$  MPa.Rysunek 3.17: Krzywa S-N oraz zastępcze amplitudy naprężeń  $S_{ae}$  dla  $S_m = 75$  MPa.

ku 3.17 przedstawiono liczbę cykli do zniszczenia  $N_z$  uzyskanych z równania 3.4.

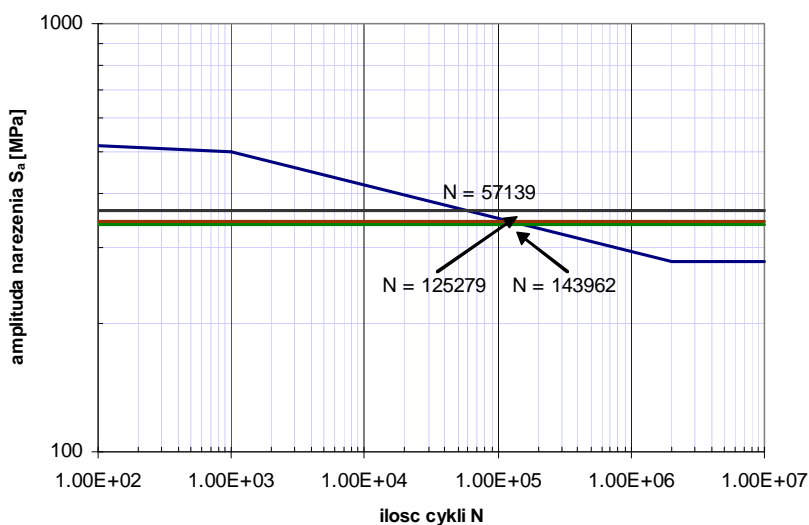
Prezentowane w pracy [67] wyniki trzech różnych eksperymentów dla tej samej próbki i tych samych wartości naprężenia są rozbieżne (porównaj tabela 3.1 kolumna 4). Uzyskane wyniki obliczeń numerycznych przewidywanego zniszczenia zmęczeniowego mieszczą się w zakresie trwałości eksperymentalnych.

### Przypadek drugi i trzeci: $S_m = 150$ MPa oraz $S_m = 225$ MPa

W drugim przypadku rozpatrywano trzy wartości amplitudy naprężenia  $S_a$ . Dla  $S_m = 150$  MPa  $S_a$  równe 270 i 290 MPa. Dla  $S_m = 225$  MPa amplituda naprężenia wynosi  $S_a = 310$  MPa. Naprężenia maksymalne i minimalne ( $S_{max}, S_{min}$ ) wynosiły odpowiednio (420, -120), (440, -140) oraz (455, -5). Na rysunku 3.18 pokazano punkty



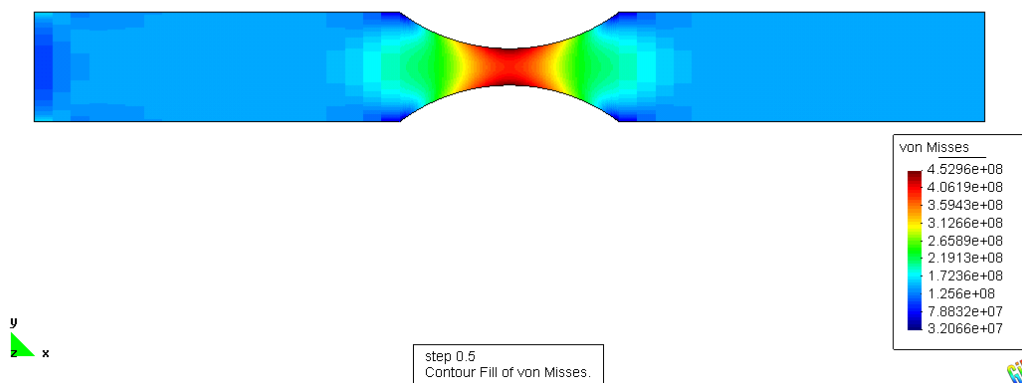
Rysunek 3.18: Wykresy Goodmana oraz punkty pracy dla  $S_m = 150$  MPa oraz  $S_m = 225$  MPa.



Rysunek 3.19: Krzywa S-N oraz zastępcze amplitudy naprężeń  $S_{ae}$  dla  $S_m = 150$  MPa oraz  $S_m = 225$  MPa.

pracy i zastępcze amplitudy naprężenia dla współczynnika asymetrii cyklu  $R = -1$ . W tabelicy 3.1 i na rysunku 3.19 przedstawiono liczbę cykli do zniszczenia  $N$  uzyskanych z równania 3.4.

Uzyskane wyniki obliczeń numerycznych przewidywanej ilości cykli do zniszczenia dla  $S_m = 150$  MPa zbliżone są do wyników uzyskanych w eksperymencie. W przypadku  $S_m = 225$  MPa wyniki obliczeń numerycznych różnią się od wyników eksperymentalnych. W odróżnieniu od wcześniejszych schematów obciążenia, w tym przypadku w procesie niszczenia materiału decydującą rolę odgrywają odkształcenia plastyczne. W przypadku występowania odkształceń plastycznych analiza zmęczeniowa konstrukcji realizowana w oparciu o koncepcję naprężeń nominalnych (lokalnych) nie daje zadowalających wyników.



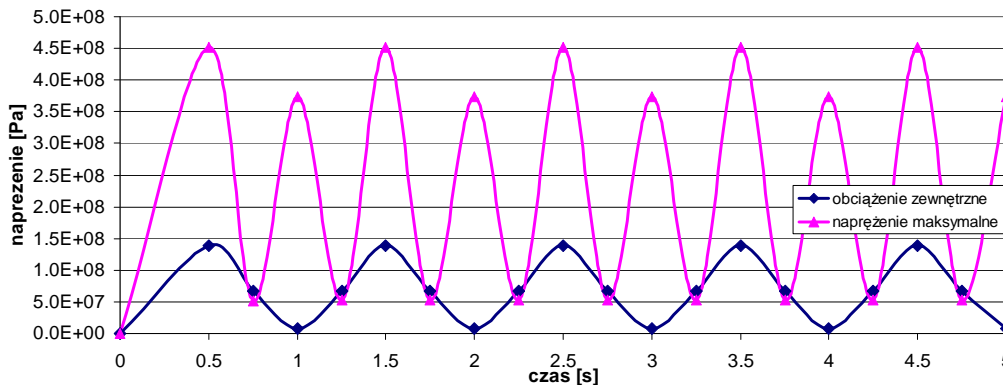
Rysunek 3.20: Pole naprężeń zastępczych von Misesa w obciążonej próbce z karbem.

### Analiza zmęczeniowa próbki z karbem za pomocą mechaniki uszkodzeń

Przeprowadzono analizę zmęczeniową próbki z karbem za pomocą mechaniki uszkodzeń. Metoda ta daje możliwość uwzględnienia odkształceń plastycznych w analizie zmęczeniowej. Jako schemat obciążenia przyjęto sinusoidalnie zmienną w czasie siłę, której wartość średnia wynosi  $Q_m = 11.25 \text{ kN}$  oraz amplituda naprężenia wynosi  $Q_a = 11.5 \text{ kN}$ . Naprężenie maksymalne powodowane siłą rozciągającą wynosi  $455 \text{ MPa}$ . Pole naprężeń przy działaniu maksymalnej działającej siły przedstawione jest na rysunku 3.20.

Wykonano pełną analizę zmęczeniową próbki z uwzględnieniem historii obciążenia. Występujące odkształcenia plastyczne powodują, że brak jest liniowej zależności pomiędzy wartością obciążenia a naprężeniem w próbce (por. rysunek 3.21). Opracowany algorytm 3.4 pozwala na uwzględnienie rzeczywistej, zmiennoaamplitudowej, z uwzględnieniem odkształceń plastycznych oraz sił bezwładności, itp., historii obciążenia. Wykres przebiegu naprężenia w próbce oraz wartości obciążenia w funkcji czasu prezentowany jest na rysunku 3.21. Wykresy przebiegu obciążenia i naprężenia w próbce są przesunięte w fazie. Podczas odciążania próbki występuje skok naprężenia. Niezerowe naprężenie w chwili odciążenia próbki spowodowane jest powstawaniem stref odkształceń plastycznych w momencie pełnego obciążenia próbki. W chwili odciążenia próbki w strefach występowania odkształceń plastycznych powstają naprężenia ściskające.

Na rysunku 3.22 pokazano kolejne etapy przyrostu pęknięcia zmęczeniowego.



Rysunek 3.21: Przebieg obciążenia zewnętrznego oraz naprężenia maksymalnego w czasie.

Widzimy, że kierunek propagacji uszkodzenia jest równoległy do kierunku maksymalnych naprężeń stycznych. Kierunek propagacji pęknięcia zmęczeniowego jest zgodny z obserwacjami innych złomów zmęczeniowych np. [20,41]. Całkowite zniszczenie próbki, rozerwanie, następuje po ok. 130 000 cykli obciążenia.

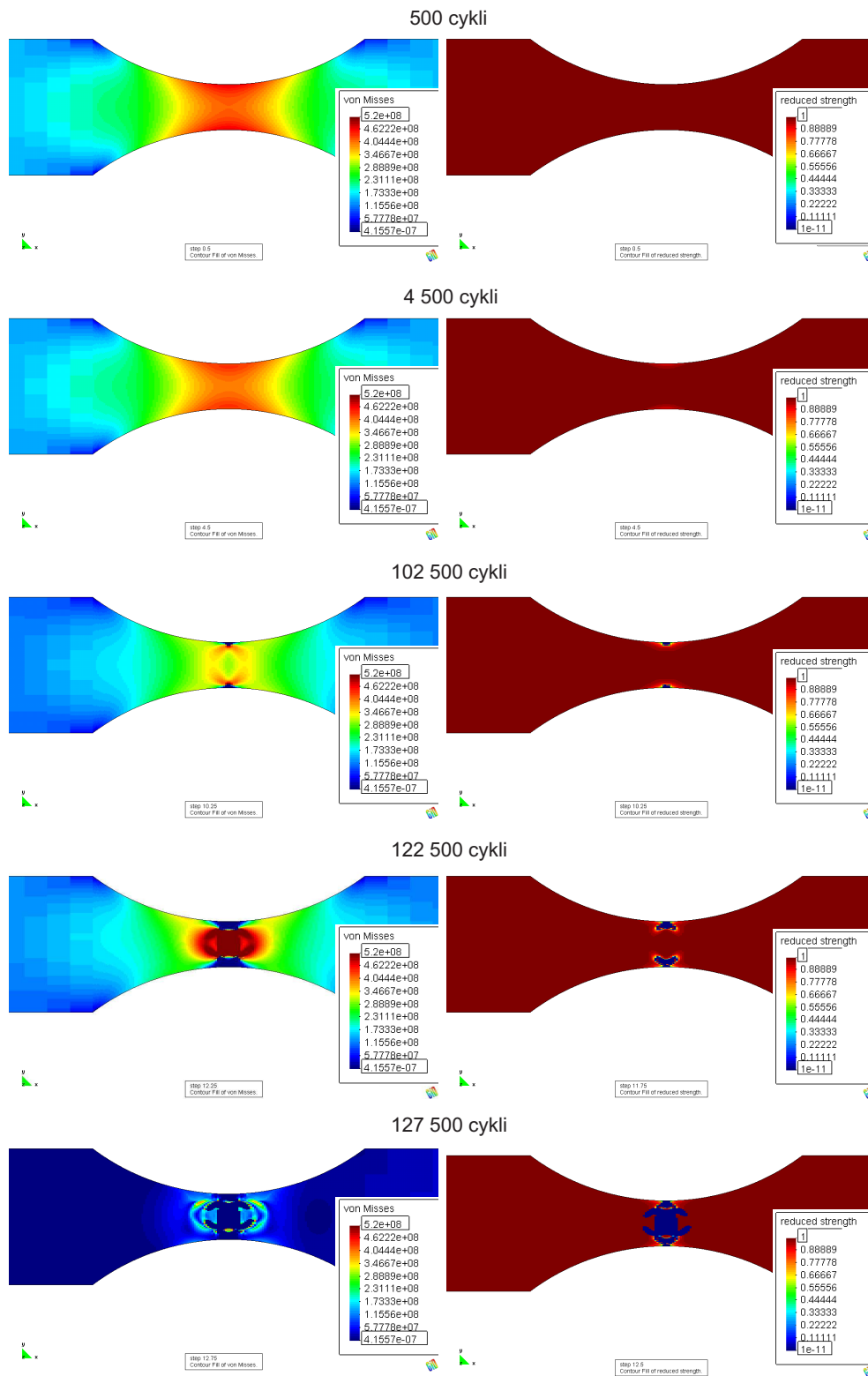
### 3.7.2 Określenie trwałości zmęczeniowej cylindra hydraulicznego za pomocą MES

W ramach projektu PROHIPP autor przeprowadził zmęczeniową analizę numeryczną cylindra hydraulicznego pokazanego na rysunku 3.23 [14]. Cylinder posiada dwa porty olejowe. Wykonany jest ze stali St52 o następujących własnościach materiałowych: gęstość  $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$ , moduł Younga  $E = 210 GPa$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ , naprężenie plastycznego płynięcia  $S_y = 350 MPa$ , wytrzymałość materiału  $S_u = 600 MPa$ .

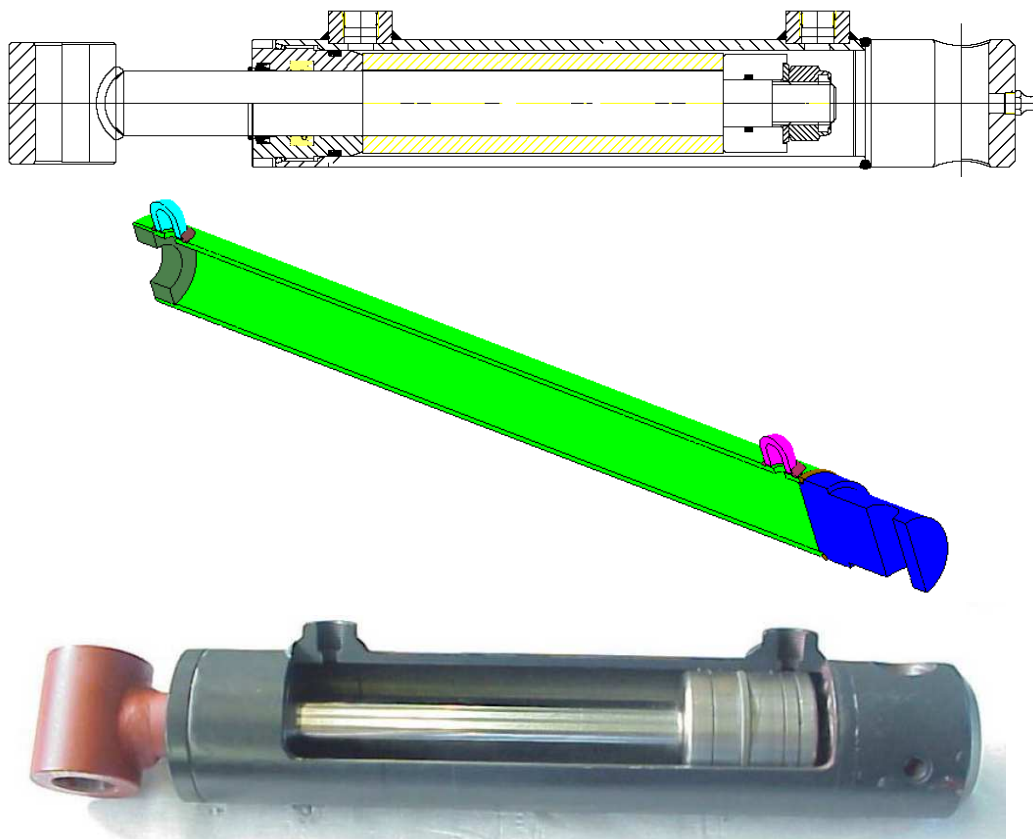
Analiza zmęczeniowa cylindra była przeprowadzona przy obciążeniu testowym. Obciążenie testowe nie odzwierciedla rzeczywistych warunków pracy cylindra hydraulicznego. Zostało ono opracowane przez firmę Pedro Roquet S.A. w celu wykonania eksperymentów zmęczeniowych cylindrów hydraulicznych, które byłyby najtańsze z ekonomicznego i czasowego punktu widzenia. Fotografie testowanych cylindrów hydraulicznych przedstawiono na rysunku 3.24.

Obciążenie testowe zostało tak dobrane, aby jednocześnie testować jak największą ilość miejsc narażonych na powstawanie pęknięć zmęczeniowych. Cylinder był przytworzony do stanowiska testowego za pomocą dwóch taśm łączących (patrz rysunek 3.24). Tłok cylindra hydraulicznego był zablokowany w środkowym jego położeniu oraz wymontowane jest wewnętrzne uszczelnienie tłoka. Konfiguracja taka zapewnia swobodny przepływ oleju pomiędzy dwoma stronami tłoczyska. Jeden z portów zostaje zasklepiony a drugim doprowadzany jest olej hydrauliczny pod ciśnieniem. Schemat

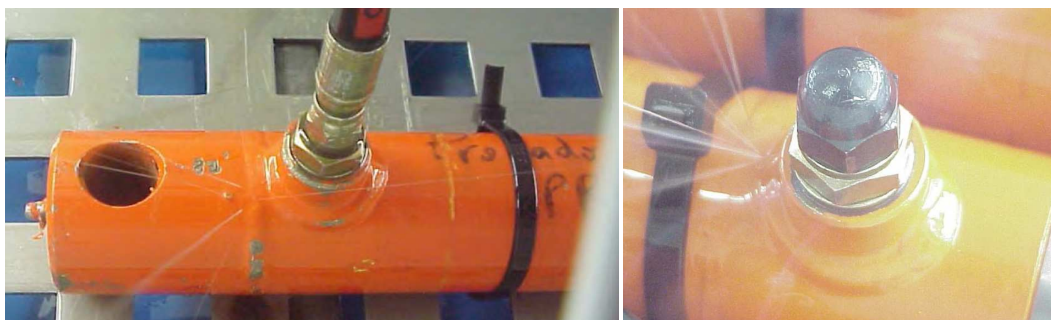




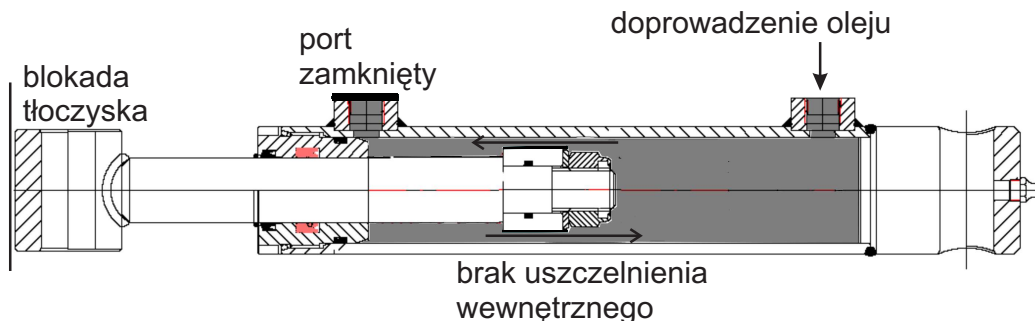
Rysunek 3.22: Kolejne fazy przyrostu pęknięcia zmęczeniowego oraz zmiany w polu naprężeń zastępczych.



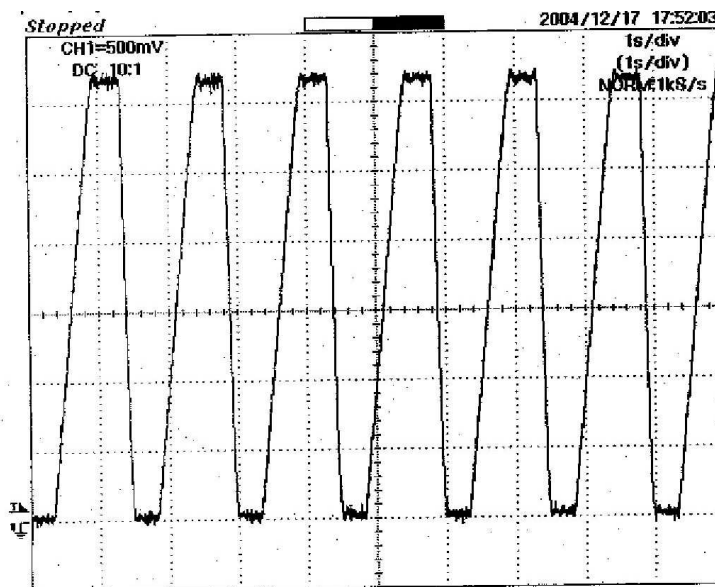
Rysunek 3.23: Rysunek techniczny, model oraz przekrój rzeczywistego cylindra hydraulicznego [23].



Rysunek 3.24: Fotografie testowanych cylindrów hydraulicznych [55].



Rysunek 3.25: Szkic stanowiska testowego z przekrojem testowanego cylindra hydraulicznego.



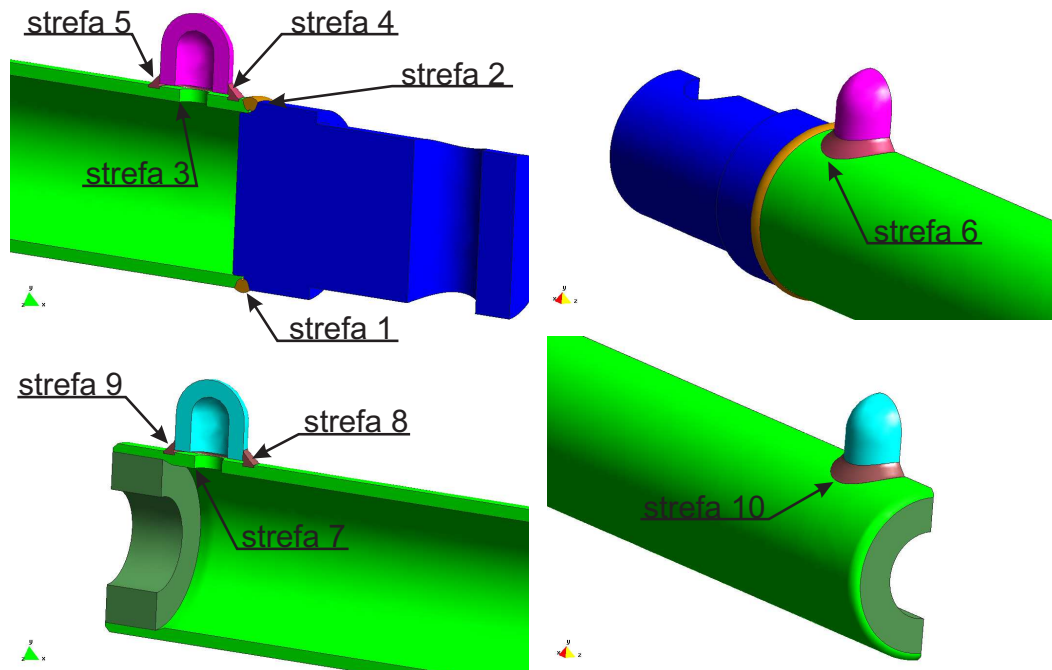
Rysunek 3.26: Oscyloskopowy wykres ciśnienia oleju wewnątrz cylindra [55].

tyczny szkic stanowiska testowego z przekrojem testowanego cylindra hydraulicznego prezentowany jest na rysunku 3.25.

Ciśnienie oleju wewnątrz cylindra zmienia się od wartości 0 bar do 306 bar z dokładnością  $\pm 2$  bar (0 – 30.6 MPa,  $\pm 0.2$  MPa). Wykres z oscyloskopu ciśnienia oleju wewnątrz cylindra został przedstawiony na rysunku 3.26. W teście numerycznym przyjęto wartość ciśnienia 30.8 MPa oraz współczynnik asymetrii cyklu  $R = 0$ .

Przyjęto następujące parametry zmęczeniowe stali z której wykonany został cylinder hydrauliczny: wytrzymałość materiału  $S_u = 600$  MPa, naprężenie plastycznego płynięcia  $S_y = 350$  MPa, granica zmęczeniowa (poniżej której przy  $R = -1$  nie obserwujemy rozwoju pęknięć zmęczeniowych)  $S_e = 200$  MPa, współczynniki określające krzywą zmęczeniową  $\alpha = 0.00085$ ,  $\beta = 3.5$ ,  $\gamma = 3.0$ ,  $\delta = -0.0004$  oraz wykładnik  $m = 2$ .

Wyznaczono 10 stref krytycznych, szczególnie narażonych na pękanie zmęczeniowe.



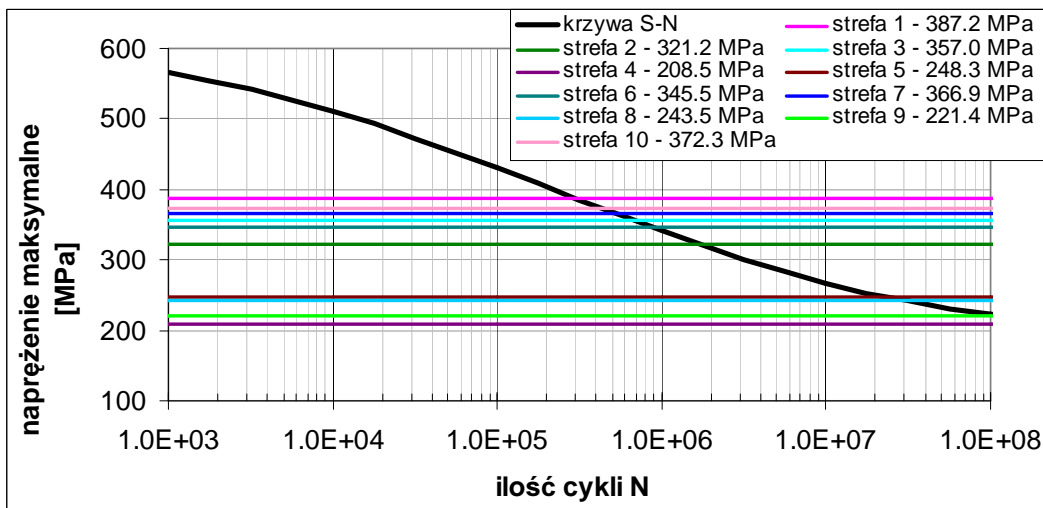
Rysunek 3.27: Strefy krytyczne narażone na pękanie zmęczeniowe.

niowe. Strefy krytyczne zostały wskazane na rysunku 3.27. Strefy nr 1 oraz 2 związane są z połączeniem spawanym pomiędzy rurą a uchwytem cylindra, strefa nr 3 do 6 dotyczą portu olejowego bliższego uchwytem cylindra, natomiast strefy nr 7 do 10 związane są z portem olejowym od strony tłoczyska. Wykonano analizę naprężeń za pomocą programu metody elementów skończonych FEAP. Wartości naprężenia zredukowanego von Misesa w strefach krytycznych kształtują się następująco: strefa 1 - 387.2 MPa, strefa 2 - 321.2 MPa, strefa 3 - 357.0 MPa, strefa 4 - 208.5 MPa, strefa 5 - 248.3 MPa, strefa 6 - 345.5 MPa, strefa 7 - 366.9 MPa, strefa 8 - 243.5 MPa, strefa 9 - 221.4 MPa oraz strefa 10 - 372.3 MPa.

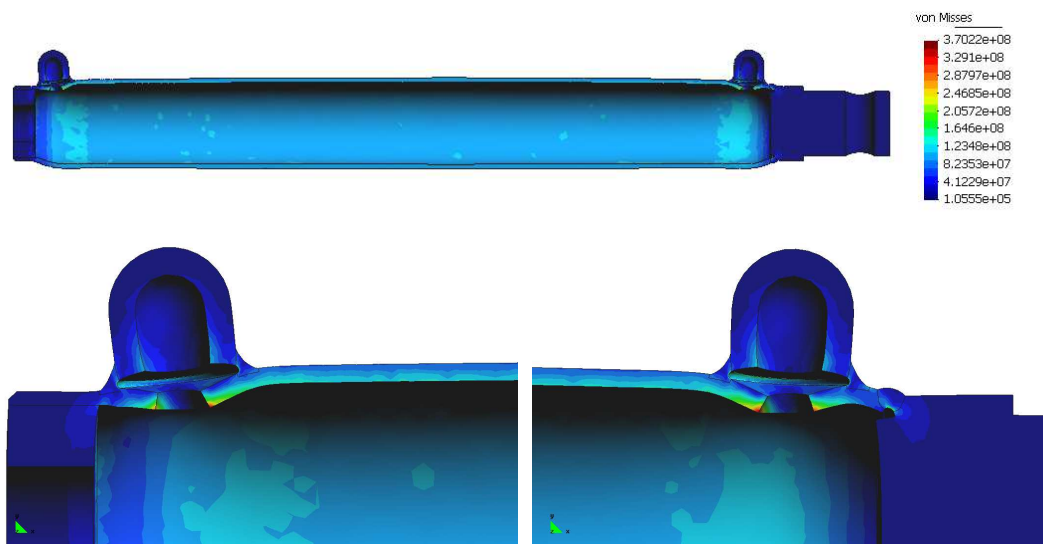
Liczba cykli do zmęczenia określona została jako punkt przecięcia krzywej amplitudy naprężenia z krzywą zmęczeniową S-N. Na rysunku 3.28 pokazano krzywą zmęczeniową z naniesionymi amplitudami naprężenia w strefach krytycznych.

Na rysunku 3.29 pokazano pole odkształceń i naprężeń w strefach narażonych na pękanie zmęczeniowe.

W tabelicy 3.2 przedstawiono wartości naprężenia maksymalnego oraz ilość cykli do zmęczenia w każdej z pięciu stref krytycznych. Ponadto w tabelicy 3.2 zestawiono wyniki analizy numerycznej z rzeczywistą trwałością cylindra uzyskaną w eksperymencie. Z uwagi na silnie stochastyczny charakter trwałości zmęczeniowej konstrukcji wyniki eksperymentu cechuje dość znaczna rozbieżność trwałości zmęczeniowej poszczególnych części cylindra hydraulicznego. Można jednak zauważyć, że obliczona za pomocą MES szacowana trwałość zmęczeniowa porównywalna jest z wynikami ekspe-



Rysunek 3.28: Krzywa zmęczeniowa S-N z naniesionymi wartościami naprężenia maksymalnego w strefach krytycznych cylindra hydraulicznego.



Rysunek 3.29: Pole naprężeń zredukowanych von Misesa w odkształconym cylindrze hydraulicznym. Współczynnik skali odkształcenia 500.

Strefa krytyczna		Wartość naprężenia maksymalnego [MPa]	Trwałość zmęczeniowa, obliczenia [ilość cykli]	Trwałość zmęczeniowa, eksperyment [ilość cykli]
strefa łączenia uchwytu cylindra	1	387.2	309 719	384 000
	2	321.2	1 774 879	352 249
strefa portu olejowego I	3	357.0	672 740	350 395
	4	208.5	>5 000 000	675 891
	5	248.3	>5 000 000	581 900
	6	345.5	911 011	740 698
strefa portu olejowego II	7	366.9	520 395	763 187
	8	243.5	>5 000 000	436 887
	9	221.4	>5 000 000	598 798
	10	372.3	452 944	347 427

Tabela 3.2: Zestawienie prognozowanej trwałości zmęczeniowej stref krytycznych cylindra hydraulicznego z wynikiem eksperymentów zmęczeniowych.

rymentów.

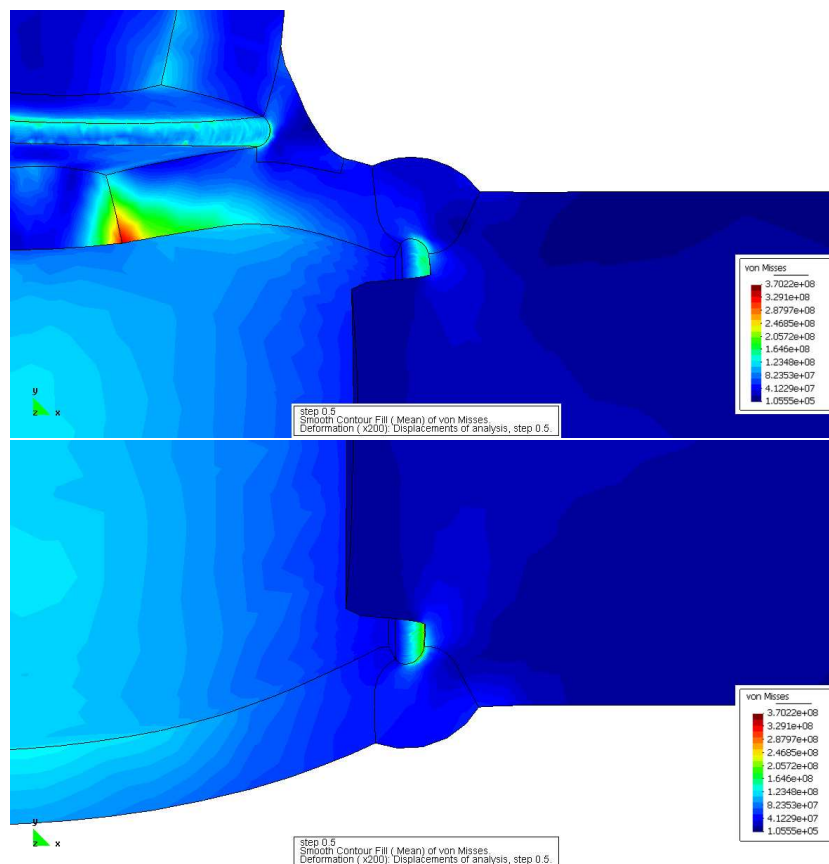
### 3.7.3 Analiza propagacji uszkodzeń zmęczeniowych w cylindrze hydraulicznym

Wykonano analizę zmęczeniową cylindra hydraulicznego za pomocą mechaniki uszkodzeń. Metoda ta pozwala na określenie miejsc inicjacji pęknięć zmęczeniowych. Dodatkowo istnieje możliwość śledzenia kierunku oraz prędkości propagacji uszkodzenia zmęczeniowego.

Analizowany rodzaj cylindra hydraulicznego został poddany eksperymentom zmęczeniowym w ramach projektu PROHIP. Złomy zmęczeniowe poddane zostały wnikliwej analizie (por. rysunki 3.33 oraz 3.37). Każdy testowany cylinder został rozcięty, aby możliwy był pomiar pęknięć. Analizowane były także pęknięcia nie powodujące rozszczelnienia się cylindra.

#### Analiza strefy połączenia uchwytu u rurą cylindra.

Strefa połączenia uchwytu z rurą cylindra została poddana analizie inicjacji i propagacji pęknięcia zmęczeniowego. Cylinder hydrauliczny obciążony został ciśnieniem wewnętrznym o wartości 30.8 MPa. Pole naprężeń i odkształceń w strefie spoiny łączącej uchwyt z rurą cylindra zostały przedstawione na rysunku 3.30.



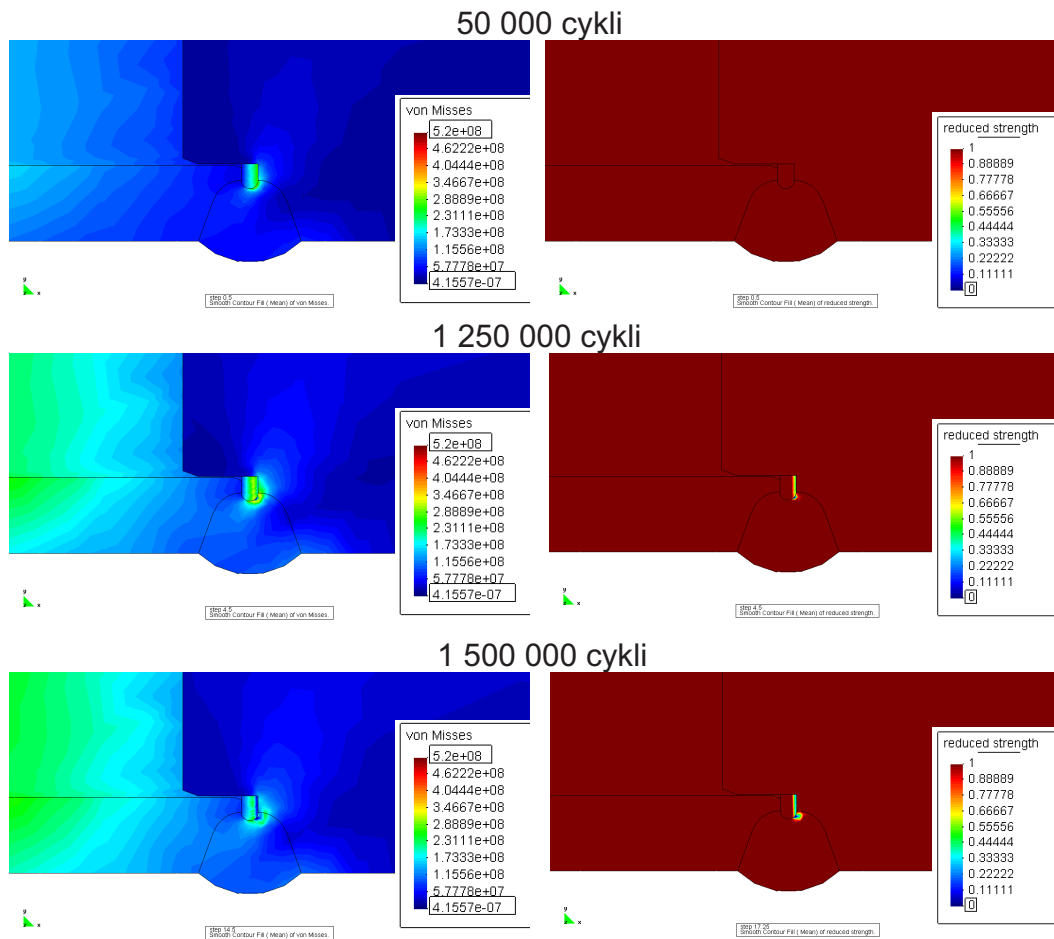
Rysunek 3.30: Pole naprężeń zredukowanych von Misesa w odkształconym cylindrze hydraulicznym – strefa łączenia uchwytu z rurą cylindra. Współczynnik skali odkształcenia 200.

Na rysunku 3.31 przedstawiono kolejne fazy rozwoju pęknięcia zmęczeniowego w strefie krytycznej 1. Strefa krytyczna nr 1 jest stosunkowo słabo narażona na rozwój pęknięcia zmęczeniowego. Z uwagi na to, iż w innych miejscach stopień uszkodzenia cylindra hydraulicznego doprowadził do przerwania ciągłości modelu, dalsza analiza wzrostu pęknięcia zmęczeniowego w strefie krytycznej nr 1 jest niemożliwa.

Na rysunku 3.32 przedstawiono rozwój pęknięcia zmęczeniowego w strefie krytycznej nr 2.

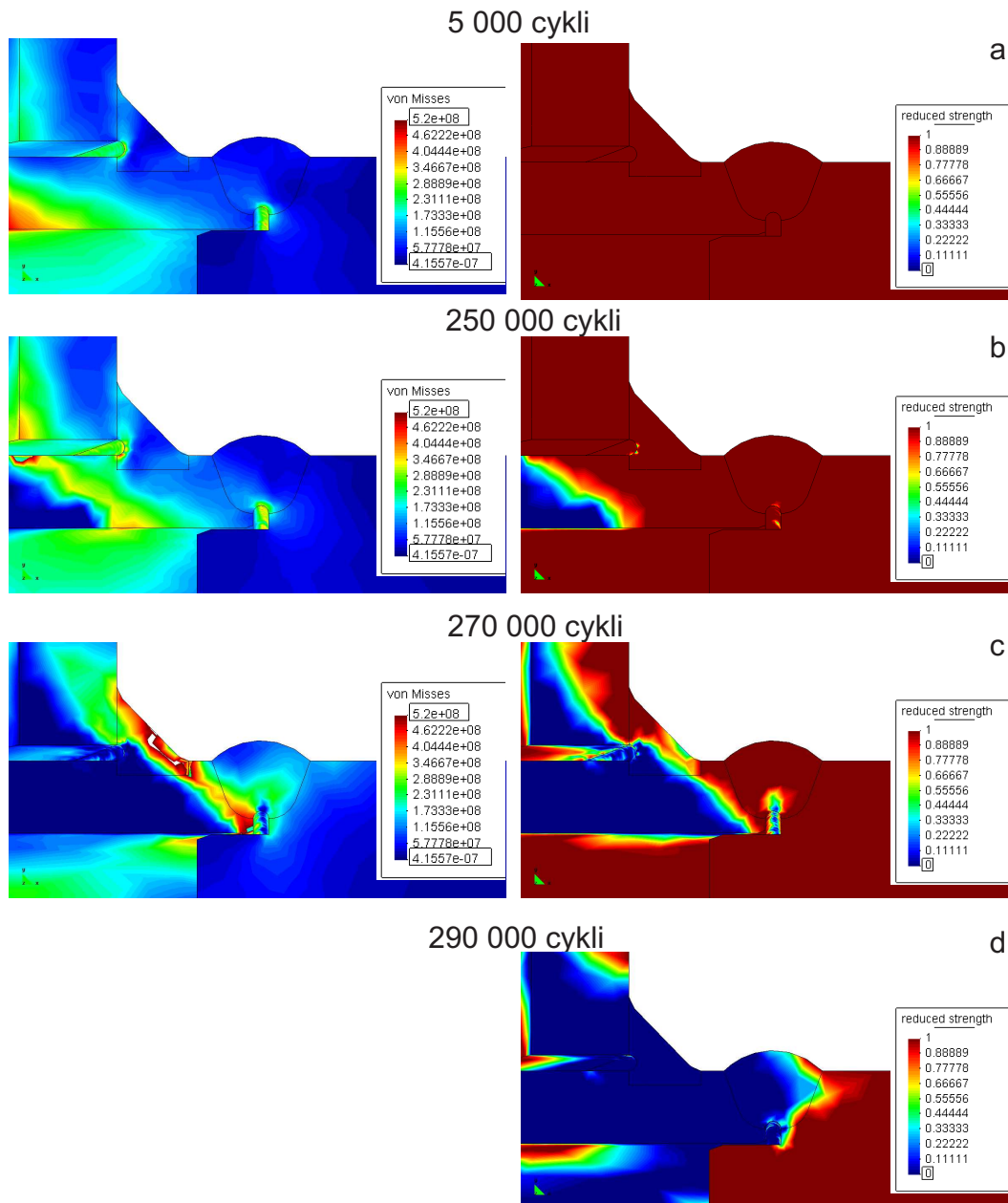
Analiza pola wartości parametru uszkodzenia (funkcji  $f_{red}$  podanej w rozdziale 3.3.3, wzór 3.61) w strefie krytycznej nr 2, rysunek 3.32, prowadzi do wniosku, że oprócz pęknięcia zmęczeniowego w spoinie łączącej uchwyt z rurą cylindra rozwijają się inne uszkodzenia zmęczeniowe. Ostatecznie pęknięcie, które wzięło swój początek w okolicach portu olejowego powoduje przerwanie ciągłości ścianki cylindra hydraulicznego.

Na rysunku 3.33 przedstawiono przekroje rzeczywistych cylindrów hydraulicznych po testach zmęczeniowych. Awaria cylindra nastąpiła przez jego rozszczelnienie w strefie połączenia rury z uchwytem cylindra. Zielonymi strzałkami (rysunek 3.33)

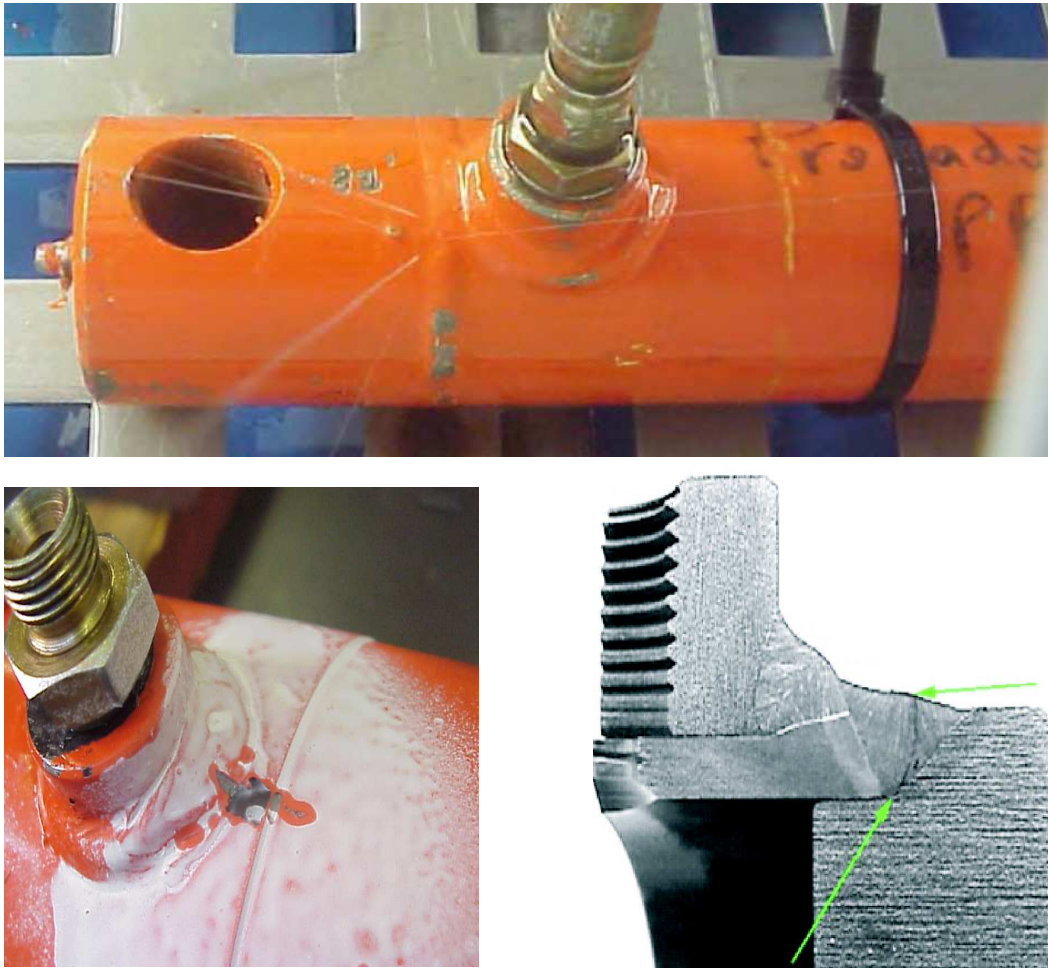


Rysunek 3.31: Ewolucja pola naprężeń von Misesa (po lewej) oraz pola wartości parametru zniszczenia  $f_{red}$  (po prawej). Strefa łączenia rury z uchwytem cylindra.





Rysunek 3.32: Ewolucja pola naprężeń von Misesa (po lewej) oraz pola wartości parametru zniszczenia  $f_{red}$  (po prawej). Strefa łączenia rury z uchwytem cylindra.



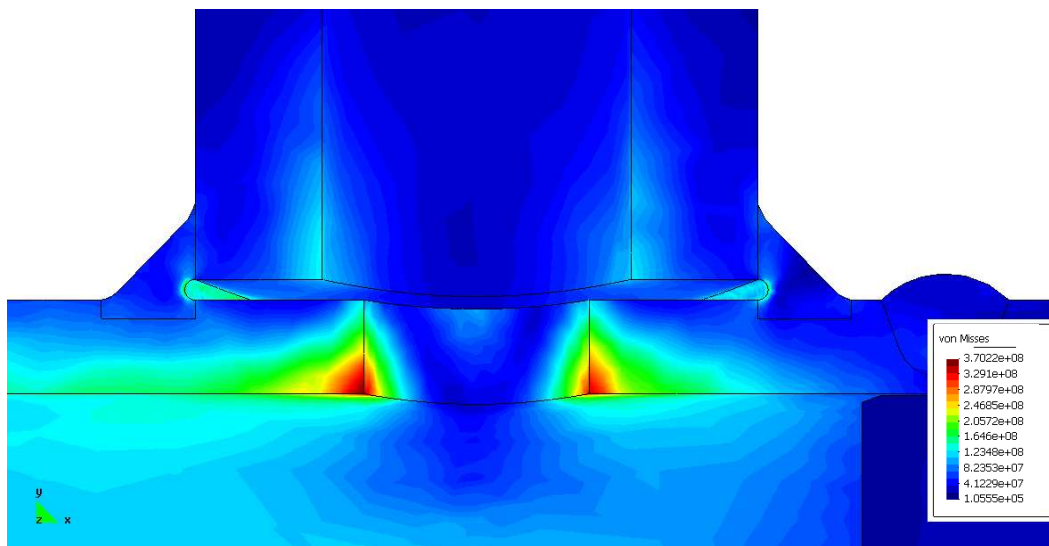
Rysunek 3.33: Fotografie cylindrów hydraulicznych podczas testów zmęczeniowych oraz przekrój zużytego cylindra. Zielone strzałki wskazują początek oraz koniec pęknięcia zmęczeniowego. [23]

oznaczono miejsce inicjacji pęknięcia zmęczeniowego oraz miejsce przzerwania szczelności spoiny. Podobny charakter jednej z faz rozwoju pęknięcia zmęczeniowego otrzymano na drodze obliczeń numerycznych. Numerycznie wyznaczone miejsce inicjacji pęknięcia zmęczeniowego w strefie łączenia rury z uchwytem cylindra pokrywa się z wnioskami z analizy rzeczywistych złomów zmęczeniowych (por. rysunki 3.32 i 3.33).

#### **Analiza strefy portu olejowego.**

Drugim elementem cylindra hydraulicznego wrażliwym na powstawanie pęknięć zmęczeniowych jest port olejowy. Pole naprężeń zastępczych von Misesa strefy portu olejowego przedstawia rysunek 3.34.

Na rysunkach 3.35 oraz 3.36 przedstawiono kolejne fazy wzrostu pęknięć zmęczeniowych w rejonie portu olejowego cylindra. Można zauważyć, iż w płaszczyźnie



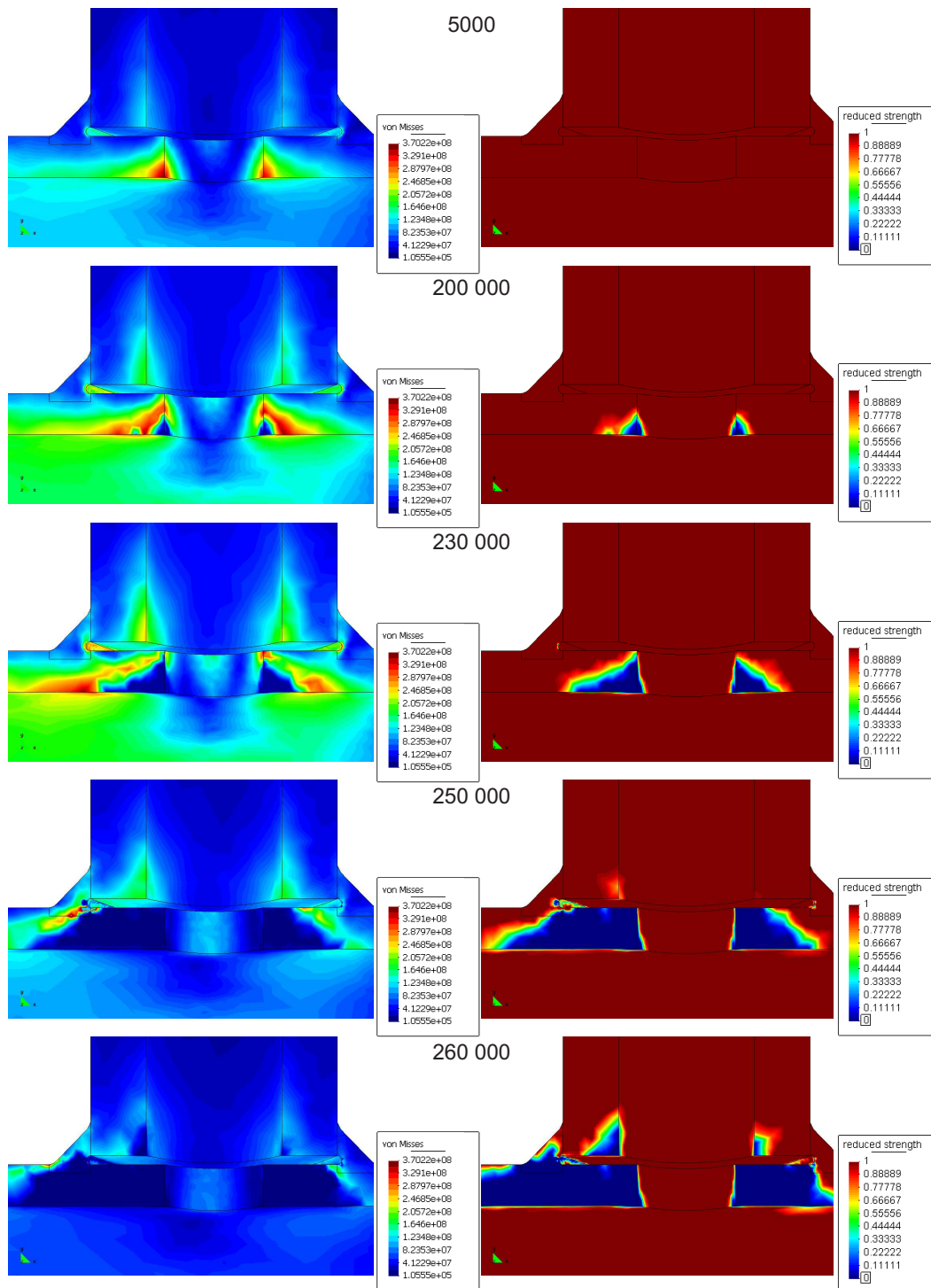
Rysunek 3.34: Pole naprężeń zredukowanych von Misesa w cylindrze hydraulicznym – strefa portu olejowego.

równoległej do osi cylindra (rysunek 3.35) uszkodzenie zmęczeniowe inicjuje się po wewnętrznej stronie cylindra hydraulicznego. Dalej propaguje się na zewnątrz cylindra. Inny charakter ma propagacja szczeliny zmęczeniowej w płaszczyźnie prostopadłej do osi cylindra, rysunek 3.36. W tym przypadku pęknięcie zmęczeniowe ma swój początek na zewnętrznej powierzchni cylindra i propaguje się do wewnątrz. Taki sposób ewolucji zniszczenia zmęczeniowego znajduje swoje potwierdzenie w analizie rzeczywistych złomów zmęczeniowych. Fotografie rozciętych cylindrów hydraulicznych poddanych eksperymentom zmęczeniowym zamieszczono na rysunku 3.37.

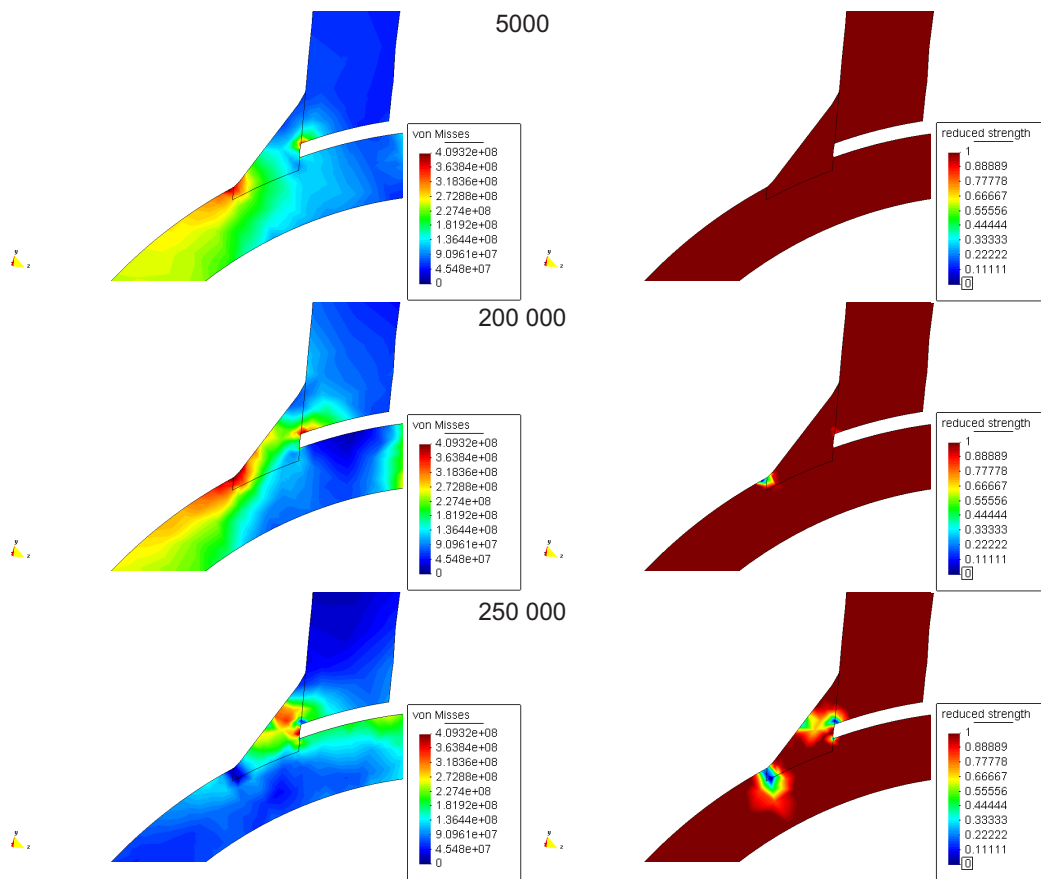
Wyniki badań wykorzystano w trakcie realizacji projektu Komisji Europejskiej PROHIPP "New Design and Manufacturing Processes for High Pressure Fluid Power Products" koordynowanym przez firmę Pedro Roquet SA.

### 3.8 Ocena wyników analizy zmęczeniowej konstrukcji za pomocą MES

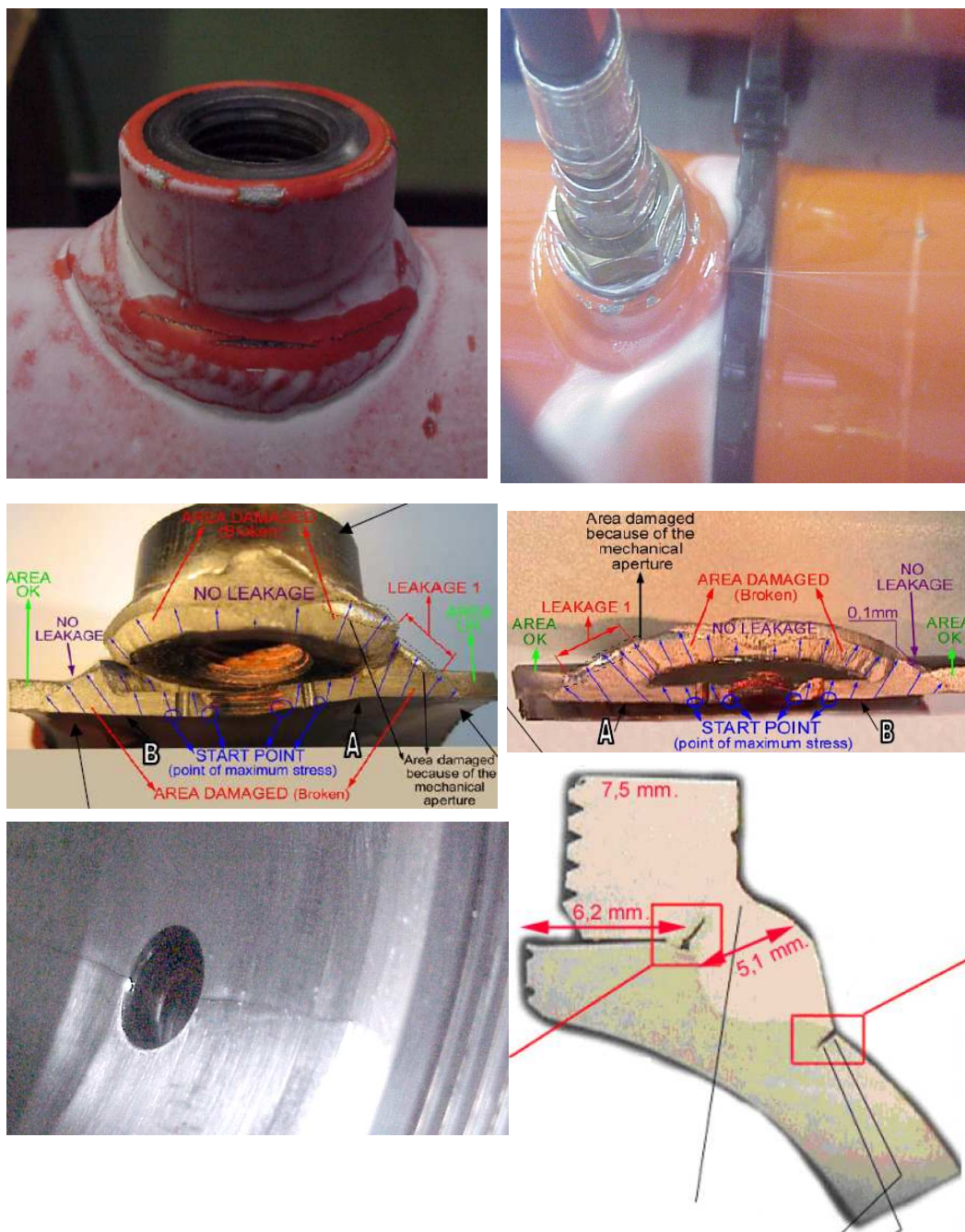
- Obecny stan zaawansowania prac nad nowoczesnymi metodami numerycznymi w analizie konstrukcji mechanicznych pozwala na znaczne udoskonalenie stosowanych dotychczas metod analizy zmęczeniowej konstrukcji. Zwiększona została dokładność i jednoznaczność szacowanej trwałości zmęczeniowej. Dzięki wykorzystaniu MES możliwa jest analiza zmęczeniowa konstrukcji o dowolnym stopniu skomplikowania.
- Dokonano syntezy istniejących teorii szacowania trwałości zmęczeniowej konstrukcji na podstawie stanu naprężenia. Zaproponowano wykorzystanie zastęp-



Rysunek 3.35: Ewolucja pola naprężeń von Misesa (po lewej) oraz pola wartości parametru zniszczenia (po prawej), płaszczyzna równoległa do osi cylindra.



Rysunek 3.36: Ewolucja pola naprężeń von Misesa (po lewej) oraz pola wartości parametru zniszczenia (po prawej), płaszczyzna prostopadła do osi cylindra.



Rysunek 3.37: Fotografie cylindrów hydraulicznych podczas testów zmęczeniowych oraz przekrój zużytego cylindra [23, 55].

czej amplitudy naprężenia  $S_{ae}$  w analizie zmęczeniowej rzeczywistych konstrukcji w przypadku gdy, zmęczeniowe dane eksperymentalne dostępne są jedynie dla typowych, prostych próbek.

- Zmodyfikowano oraz rozwinięto teorię symulacji procesu zniszczenia zmęczeniowego za pomocą mechaniki uszkodzeń zaproponowaną przez Ollera i innych [97, 98].
- Opracowano algorytmy symulacji procesu inicjacji oraz propagacji pęknięcia zmęczeniowego za pomocą mechaniki uszkodzeń.
- Opracowano algorytmy szacowania trwałości zmęczeniowej konstrukcji dla dowolnej historii obciążenia, również z uwzględnieniem plastycznego płynięcia materiału i uwzględnieniem występujących sił bezwładności.
- Analiza zmęczeniowa za pomocą mechaniki uszkodzeń pozwala na badanie konstrukcji przy obciążeniach rzeczywistych: o zmiennej amplitudzie, z uwzględnieniem plastycznej odpowiedzi materiału oraz z uwzględnieniem sił bezwładności. Pozwala to np. ocenić trwałość zmęczeniową zawieszenia samolotu podczas startu i lądowania czy innych części samolotu obciążonych rzeczywistymi siłami. Niestety analiza cechuje się dużą złożonością obliczeniową, zarówno czasową jak i pamięciową.
- Wykorzystując opracowane podstawy teoretyczne opracowano algorytmy obliczania trwałości zmęczeniowej dla różnych typów analizy, w tym dla dynamicznej (z uwzględnieniem sił bezwładności) analizy zmęczeniowej. Algorytmy te zostały następnie zaimplementowane w programie metody elementów skończonych FEAP.
- Opracowane metody analizy zmęczeniowej są bardzo wrażliwe na błędy analizy naprężeń konstrukcji za pomocą MES. Stosunkowo niewielkie błędy w obliczeniach pola naprężeń, np. rzędu 5% mogą w szczególnie niekorzystnych przypadkach dawać błędy rzędu 400% w oszacowaniu trwałości zmęczeniowej. Wytrzymałość zmęczeniowa może być zarówno niedoszacowana jak i przeszacowana. W rozdziale 2.1 przedstawiono wytyczne do budowy modelu MES.
- Uzyskane wartości trwałości zmęczeniowej konstrukcji za pomocą prezentowanych narzędzi są nadal teoretyczne. Mimo pierwszych porównań, nadal wymagają kalibracji i zestawienia z większą ilością danych eksperymentalnych.

## Rozdział 4

# Niezawodność konstrukcji narażonych na zniszczenie zmęczeniowe

Nieodłączną cechą rzeczywistych elementów konstrukcyjnych są niejednorodności materiałowe oraz niedoskonałości odwzorowania kształtu spowodowane niedoskonałościami obróbki. Powodują one znaczne rozbieżności trwałości zmęczeniowej podobnych elementów. Analiza zmęczeniowa przeprowadzona dla podobnych próbek (różnica pomiędzy poszczególnymi próbkami jest mniejsza niż założone tolerancje materiałowe i wykonania) powoduje powstanie znacznej rozbieżności trwałości zmęczeniowej pomiędzy najwytrzymalszą i najsłabszą próbką. Różnica ta może dochodzić do kilku rzędów wielkości [52]. Rozrzut trwałości zmęczeniowych podobnych próbek ma miejsce niezależnie od stosowanych modeli oraz teorii oceny trwałości zmęczeniowych. Mimo iż analizowane konstrukcje są jedynie modelami rzeczywistych elementów i ich zachowań zmęczeniowych jako główną przyczynę rozrzutu trwałości zmęczeniowych upatruje się niepewność danych materiałowych, geometrycznych i obciążenia. Ów rozrzut znajduje potwierdzenie w badaniach eksperymentalnych.

Rozrzut trwałości elementów konstrukcyjnych jest również obserwowany w przypadku rzeczywistych maszyn i urządzeń. Jest to zjawisko naturalne i jest spowodowane zmiennością: obciążeń eksploatacyjnych, charakterystyk zmęczeniowych oraz cech geometrycznych uzyskanych w procesie technologicznym wytwarzania elementu. Zatem do podstawowej analizy zmęczeniowej "wyidealizowanej" konstrukcji przy idealnym obciążeniu powinna zostać załączona analiza wpływu zmian geometrycznych, materiałowych i obciążenia konstrukcji na jej trwałość zmęczeniową [52].



## 4.1 Wskaźniki niezawodności konstrukcji ze względu na zmęczenie materiału

W niniejszej rozprawie przyjęto deterministyczny sposób oceny trwałości zmęczeniowej konstrukcji. W takim podejściu wymagane jest aby przewidywana trwałość zmęczeniowa konstrukcji była wyższa od zakładanego czasu jej pracy. Nadwyżka trwałości określa zapas bezpieczeństwa który może zostać określony różnymi współczynnikami. Zostaną przedstawione stosowane w praktyce inżynierskiej wskaźniki niezawodności konstrukcji ze względu na zmęczenie materiału.

### 4.1.1 Wskaźnik wyężenia – Factor of Strength (*FOS*)

Wskaźnik wyężenia materiału pokazuje w jakim stopniu materiał konstrukcji jest wyężony, tj. jak duży jest zapas wytrzymałości materiału z stosunku do rzeczywistych obciążeń i planowanej trwałości konstrukcji. Wskaźnik *FOS* obliczany jest na podstawie wykresu Goodmana. Na rysunku 4.1 przedstawiono wykres Goodmana z naniesionym punktem pracy  $A(S_m, S_a)$ . Wskaźnik wyężenia materiału *FOS* dany jest następującym, prostym wzorem

$$FOS = \frac{OB}{OA} \quad (4.1)$$

gdzie  $S_a$  i  $S_m$  są odpowiednio amplitudą i naprężeniem średnim,  $S_u$  jest wytrzymałością materiału, natomiast  $S_{ekspl}$  jest wartością amplitudy naprężenia dla której wytrzymałość zmęczeniowa konstrukcji jest równa planowanej. W przypadku gdy wartości naprężeń obliczane są w klasyczny sposób jako naprężenia nominalne, istnieje konieczność ich modyfikacji przez współczynnik koncentracji naprężeń  $K_f$ .

Założono, że wykładnik  $n$  we wzorze 3.9 będącym analityczną postacią wykresu Goodmana wynosi  $n = 1$ . W takim przypadku wykres Goodmana jest linią prostą (rysunek 4.1).

Rozważmy linię  $CD$  równoległą do krzywej Goodmana przedstawioną na rysunku 4.1. Odległość  $OD$  wynosi

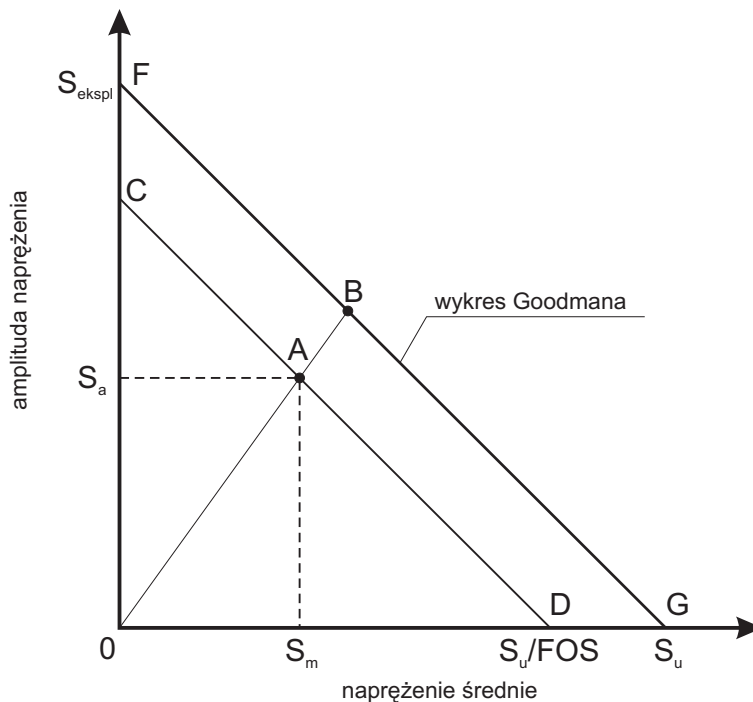
$$OD = \frac{S_u}{FOS} \quad (4.2)$$

Z podobieństwa trójkątów otrzymujemy zależność

$$\frac{S_a}{S_{ekspl}} = \frac{\frac{S_u}{FOS} - S_m}{S_u} \quad (4.3)$$

Przekształcając wzór 4.3 otrzymujemy zależność pozwalającą na obliczenie wskaźnika wyężenia materiału konstrukcji *FOS*

$$FOS = \frac{S_u S_{ekspl}}{S_m S_{ekspl} + S_a S_u} \quad (4.4)$$



Rysunek 4.1: Wskaźnik wyęczenia materiału na podstawie wykresu Goodmana.

Wskaźnik wyęczenia  $FOS$  może być również obliczony na podstawie wykresu Soderberga, przedstawionego w rozdziale 3.2.2. Krzywa Soderberga z naniesionym punktem pracy  $A(S_m, S_a)$  została przedstawiona na rysunku 4.2. W takim przypadku wzór 4.4 może zostać przekształcony do postaci

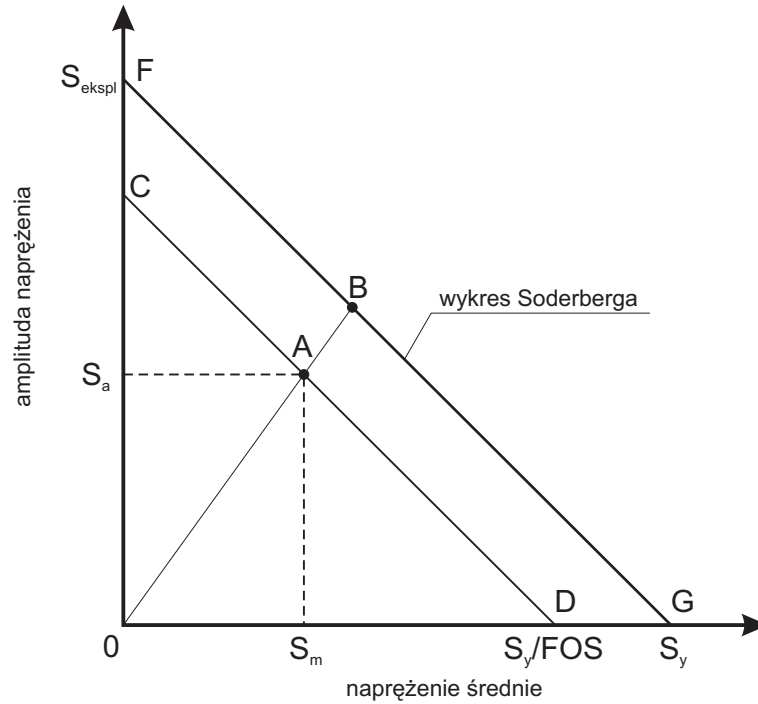
$$FOS = \frac{S_y S_{eksp}}{S_m S_{eksp} + S_a S_y} \quad (4.5)$$

Wskaźnik  $FOS$  otrzymany na podstawie wykresu Soderberga uwzględnia granicę plastyczności  $S_y$ .

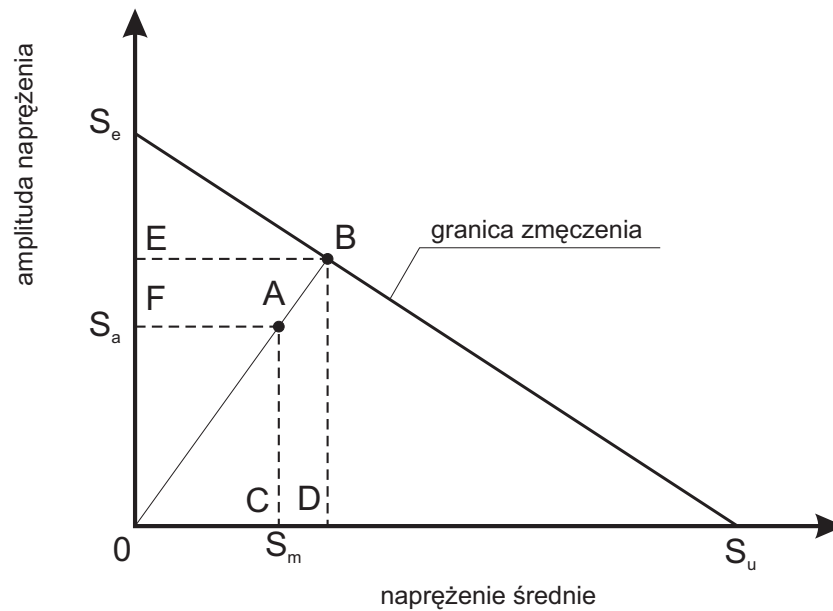
Jak łatwo zauważyć, w przypadku gdy trwałość zmęczeniowa konstrukcji jest mniejsza niż planowana to wskaźnik  $FOS < 1$ . W przeciwnym przypadku, gdy trwałość zmęczeniowa konstrukcji jest większa od trwałości planowanej to wskaźnik  $FOS > 1$ .

#### 4.1.2 Wskaźnik rezerwy zmęczeniowej – Fatigue Reserve Factor (FRF)

Wskaźnik rezerwy zmęczeniowej ( $FRF$ ) jest współczynnikiem otrzymanym na podstawie wykresu Goodmana określającym ryzyko wystąpienia zniszczenia zmęczeniowego. Graficzną interpretację współczynnika  $FRF$  przedstawiono na rysunku 4.3.



Rysunek 4.2: Wskaźnik wyczerpania materiału na podstawie wykresu Soderberga.



Rysunek 4.3: Graficzna interpretacja wskaźnika rezerwy zmęczeniowej FRF.

Wskaźnik rezerwy zmęczeniowej  $FRF$  dany jest wzorem (rysunek 4.3)

$$FRF = \frac{OA}{OB} \quad (4.6)$$

Wyróżnia się dodatkowo dwie modyfikacje wskaźnika rezerwy zmęczeniowej: dla stałej amplitudy oraz dla stałego naprężenia średniego. Opisują niezawodność konstrukcji w przypadku gdy obciążenie zewnętrzne charakteryzuje się zmiennym naprężeniem średnim bądź przy przypadku gdy względnie stałym naprężeniu średnim zmienia się amplituda naprężenia. Wskaźniki rezerwy zmęczeniowej przy stałej amplitudzie oraz stałym naprężeniu średniemu dane są wzorami

$$\begin{aligned} FRF_m &= \frac{OD}{OC} \\ FRF_a &= \frac{OE}{OF} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Jeśli wykładnik  $n$  we wzorze Goodmana 3.9 jest równy 1 to wskaźnik rezerwy zmęczeniowej  $FRF$  oblicza się za pomocą wzoru

$$FRF = \frac{S_u S_e}{S_m S_e + S_a S_u} \quad (4.8)$$

Z podobieństwa trójkątów wynika, że  $FRF_m = FRF_a = FRF$ .

W przypadku gdy założymy, że wykładnik  $n$  we wzorze 3.9 jest dowolną liczbą większą od 1 (ma to miejsce gdy obserwujemy nieliniowy wpływ naprężenia średniego na trwałość zmęczeniową, rysunek 4.4) współczynniki  $FRF_m = FRF_a \neq FRF$ . Aby obliczyć współczynnik  $FRF$  niezbędne jest obliczenie pierwiastków równania

$$S_e S_m G^n + S_a S_u^n G - S_e S_m S_u^n = 0 \quad (4.9)$$

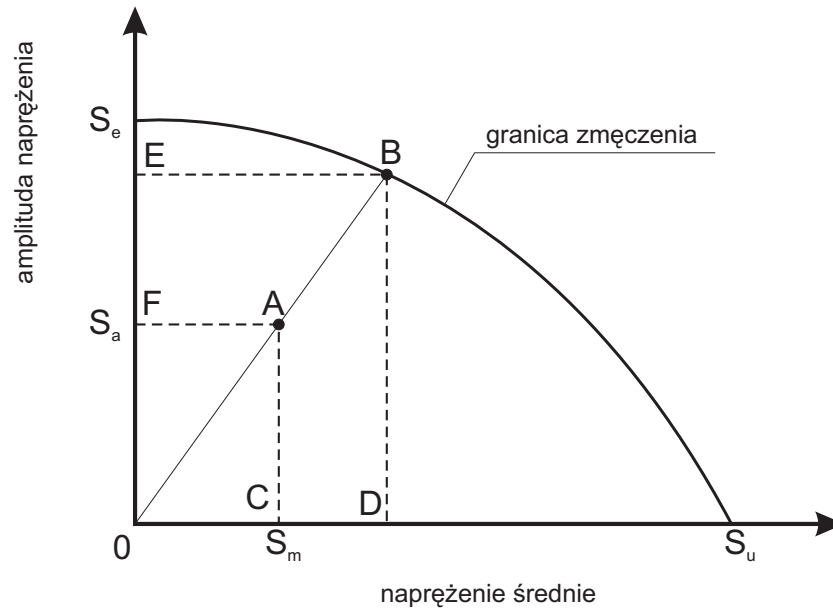
Rozwiązaniem problemu jest rzeczywisty pierwiastek  $G > 0$ . W takim przypadku wskaźnik  $FRF$  przyjmuje postać

$$FRF = \sqrt{\frac{\left(\frac{S_a}{S_m} G\right)^2 + G^2}{S_a^2 + S_m^2}} \quad (4.10)$$

natomiast wskaźniki  $FRF_m$  oraz  $FRF_a$  wynoszą

$$FRF_m = FRF_a = \frac{G}{S_m} \quad (4.11)$$

Jeśli krzywa wpływu naprężenia średniego na trwałość zmęczeniową jest otrzymana na drodze eksperymentów, np. dla materiałów o nietypowych właściwościach zmęczeniowych może zaistnieć sytuacja, że  $FRF_m \neq FRF_a$ .



Rysunek 4.4: Wskaźnik rezerwy zmęczeniowej w przypadku nieliniowej zależności pomiędzy naprężeniem średnim a trwałością zmęczeniową.

Jeśli założymy  $n = 2$  dodatnim pierwiastkiem równania 4.9 będzie

$$G = \frac{-S_a S_u^2 + \sqrt{S_a^2 S_u^4 + 4S_e^2 S_m^2 S_u^2}}{2S_e S_m} \quad (4.12)$$

w przypadku innych, dowolnych wartości wykładnika  $n$  w celu obliczenia wartości punktu  $G$  stosuje się przybliżone metody numeryczne.

Wskaźnik rezerwy zmęczeniowej  $FRF$  określa, jakie jest niebezpieczeństwo wystąpienia zjawiska zmęczenia danej konstrukcji przy założonym obciążeniu. W przypadku gdy  $FRF > 1$  szacuje się, że przyjęte obciążenie nie powinno powodować zmęczenia materiału.

### 4.1.3 Prawdopodobieństwo zniszczenia zmęczeniowego

Określenie prawdopodobieństwa zniszczenia zmęczeniowego konstrukcji dla danego ustalonego czasu pracy wymaga badań statystycznych parametrów materiałowych, kształtu i dokładności wykonania elementu oraz zastosowanego obciążenia. Procentowy wskaźnik niezawodności jest jedną z najważniejszych informacji przy ustalaniu czasu pracy urządzeń pomiędzy zapobiegawczymi czynnościami serwisowymi bądź naprawami głównymi.

Analizowana niezawodność jest rozważana jako bezawaryjność, a procentowe ujęcie bezawaryjności wymaga wprowadzenie losowości do parametrów opisujących model, zarówno geometrycznych, materiałowych jak i dotyczących warunków brzegowych. Zakłada się istnienie tylko dwóch stanów: awaria bądź prawidłowa praca.

Zakładając  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in \chi$  jako wektor parametrów charakteryzujących się losowością, kryterium awarii  $g(\mathbf{x})$  można opisać następująco

$$g(\mathbf{x}) = 1 - \frac{N(\mathbf{x})}{N_{proj}} \quad (4.13)$$

gdzie  $N(\mathbf{x})$  jest trwałością zmęczeniową dla danych losowych parametrów  $\mathbf{x}$  oraz  $N_{proj}$  jest zakładaną (projektową) trwałością zmęczeniową konstrukcji. W tym przypadku [68, 118]

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0} : && \text{obszar awarii} \\ g(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} : && \text{powierzchnia graniczna} \\ g(\mathbf{x}) &\geq \mathbf{0} : && \text{obszar bezpieczny} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Zatem prawdopodobieństwo wystąpienia awarii jest sumą wszystkich wartości należących do losowego wektora parametrów  $\mathbf{x}$ . Prawdopodobieństwo awarii wyraża  $n$ -wymiarowa całka [68]

$$P(\mathbf{x}) = \int_{\chi} N(f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) dx \quad (4.15)$$

gdzie  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jest funkcją łącznej gęstości prawdopodobieństwa zmiennych  $\mathbf{x}$ .

Rozwiązanie tak postawionego zadania proponują w swoich pracach R. Stocki oraz J. Knabel [68, 118].

## 4.2 Ocena niezawodności cylindra hydraulicznego

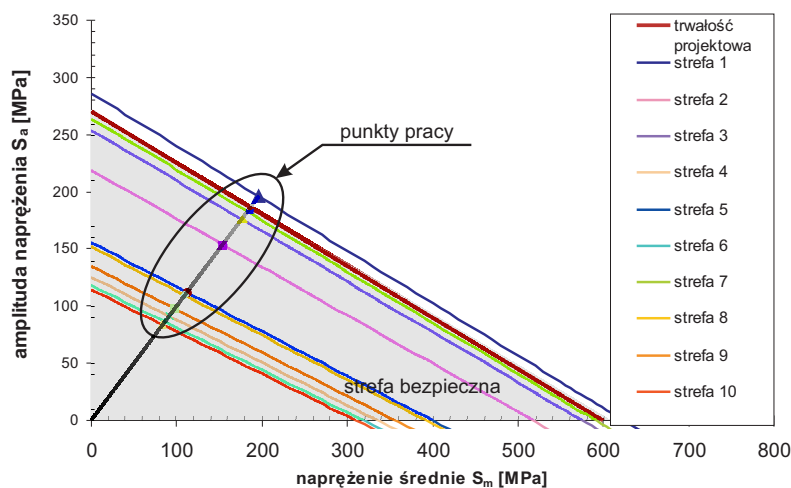
Wykonano analizę niezawodności cylindra hydraulicznego, którego trwałość zmęczeniowa określona została w rozdziale 3.7.2. Założono, że zmęczeniowa trwałość projektowa cylindra wynosić będzie 300 000 cykli oraz 200 000 cykli. Wyniki analizy zmęczeniowej zamieszczono w tabeli 4.1.

Na rysunku 4.5 zamieszczono graficzną interpretację współczynnika  $FOS$  dla trwałości projektowej 300 000 cykli. Widzimy, że wyteżenie materiału w strefie 1 jest większe niż zakładane obciążenie projektowe. Ponadto strefy 3 oraz 7 charakteryzują się współczynnikiem  $FOS$  większym, lecz bliskim jedności. Oznacza to, że strefy 3 oraz 7 cylindra hydraulicznego spełniają wymagania odnośnie trwałości zmęczeniowej lecz cechują się małą niezawodnością.

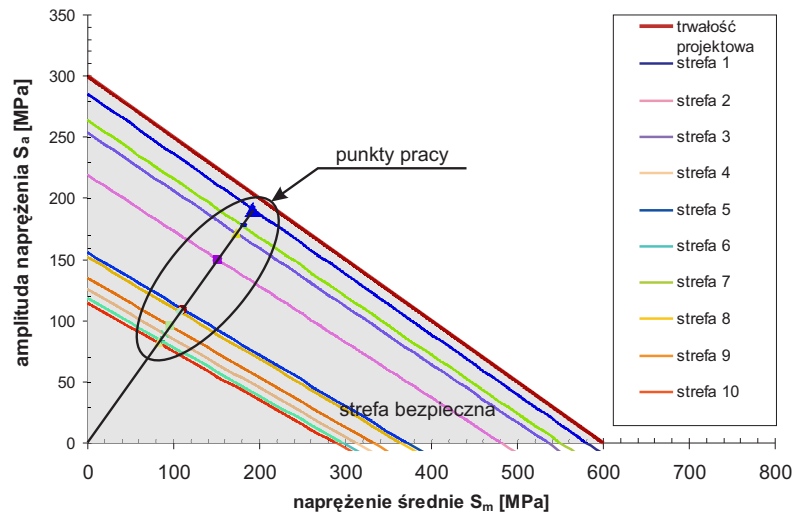
Z uwagi na małą niezawodność rozpatrywanego cylindra przy planowanym czasie pracy 300 000 cykli zmniejszono interwał pomiędzy wymianami siłownika do 200 000 cykli. Rysunek 4.6 przedstawia graficzną interpretację współczynnika  $FOS$  dla trwałości projektowej cylindra 200 000 cykli. W tym przypadku wyteżenie materiału we

Strefa krytyczna		$S_a$ [MPa]	$S_m$ [MPa]	$FOS$ 300 000 cykli	$FOS$ 200 000 cykli	$FRF$
strefa łączenia uchwyty cylindra	1	193.6	193.6	0.962	1.033	0.775
	2	160.6	160.6	1.159	1.245	0.934
strefa portu olejowego I	3	178.5	178.5	1.043	1.120	0.840
	4	104.3	104.3	1.786	1.918	1.438
	5	124.2	124.2	1.500	1.611	1.208
	6	99.2	99.2	1.877	2.016	1.512
strefa portu olejowego II	7	183.5	183.5	1.015	1.090	0.818
	8	121.8	121.8	1.529	1.643	1.232
	9	110.7	110.7	1.682	1.807	1.355
	10	96.4	96.4	1.932	2.075	1.556

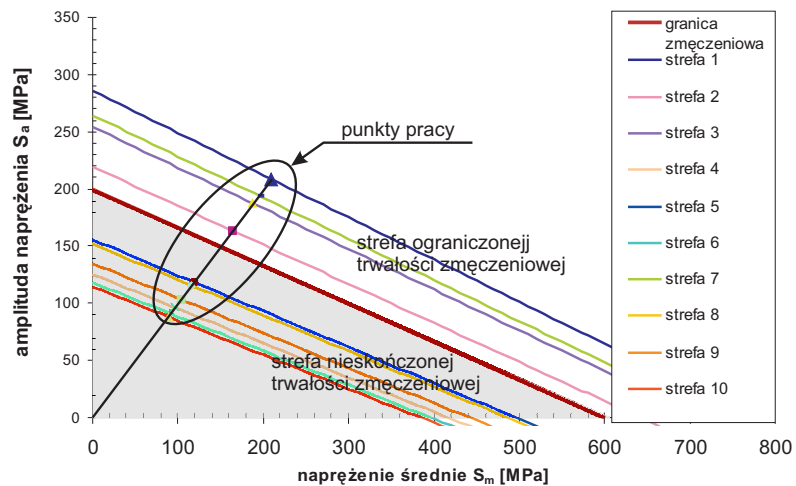
Tabela 4.1: Wskaźniki niezawodności cylindra hydraulicznego w poszczególnych strefach krytycznych.



Rysunek 4.5: Graficzna ilustracja współczynnika  $FOS$  dla cylindra hydraulicznego. Trwałość projektowa 300 000 cykli.



Rysunek 4.6: Graficzna ilustracja współczynnika  $FOS$  dla cylindra hydraulicznego. Trwałość projektowa 200 000 cykli.



Rysunek 4.7: Graficzna ilustracja współczynnika  $FRF$  dla cylindra hydraulicznego.



wszystkich strefach narażonych na pęknięcia zmęczeniowe jest poniżej zakładanej granicy. Najmniejszą niezawodnością charakteryzuje się strefa 1 (por. rysunek 4.6 oraz tabela 4.1).

Na rysunku 4.7 przedstawiono zestawienie współczynników rezerwy zmęczeniowej  $FRF$  dla poszczególnych stref cylindra hydraulicznego. Z wykresu wynika (por. tabela 4.1), że narażone na zniszczenie zmęczeniowe są strefy: 1, 2, 3 oraz 7. Pozostałe strefy cylindra wrażliwe na powstawanie pęknięć zmęczeniowych są znacznie oddalone od granicy zmęczeniowej, cechują się wysoką niezawodnością.

## Rozdział 5

# Schemat numeryczny optymalizacji konstrukcji narażonych na rezonans

Ważnym aspektem analizy układów pod wpływem obciążenia zmiennego w czasie jest odpowiedź samej konstrukcji – jej drgania mechaniczne. Szczególnie niebezpiecznym stanem jest rezonans. Ma on miejsce wtedy, gdy jedna z częstotliwości drgań swobodnych pokrywa się (lub jest bliska) częstotliwości wymuszenia. Teoretycznie, zakładając brak tłumienia wewnętrznego, taki stan prowadzi do nieskończonej wielkości odkształceń. W praktyce istniejące tłumienie sprawia, że maksymalne odkształcenia są skończone, jednak na tyle duże, że mogą być powodem wielu, często spektakularnych awarii np. katastrofy mostów spowodowane wiejącym wiatrem.

Projektowanie konstrukcji narażonych na pracę w stanie rezonansu nie jest problemem trywialnym. Mimo istnienia wielu programów wspomagających projektowanie, analizę wytrzymałościową, analizę drgań itp. inżynier projektujący układ obciążony siłami zmiennymi w czasie zwykle musi polegać na własnym doświadczeniu. Taki stan rzeczy powoduje że, z obawy przed awarią, wiele tego typu konstrukcji jest znacznie przesztywnionych a przez to droższych i często trudniejszych w produkcji.

W niniejszym rozdziale zaproponowane będzie narzędzie pozwalające określić, który element lub właściwość konstrukcji ma największy wpływ na pracę układu w warunkach rezonansu lub jemu bliskich. Analiza wrażliwości ze względu na częstości drgań własnych pozwala znaleźć optymalne wartości parametrów projektowych konstrukcji bez konieczności wykonywania wielu czasochłonych i kosztochłonych eksperymentów, numerycznych bądź rzeczywistych. Prezentowany algorytm poparty został kilkoma przykładami optymalizacji konstrukcji mechanicznych.

## 5.1 Praca w stanie rezonansu

Duże amplitudy oraz siły wewnętrzne, charakterystyczne dla drgań konstrukcji zachodzących w pobliżu lub w stanie rezonansu, mogą powodować uszkodzenia samych maszyn oraz emitować do otoczenia silne drgania i hałas. Powodują one utratę precyzji działania urządzeń i narażają ludzi będących pod wpływem drgań na utratę zdrowia.

Naprężenia towarzyszące drganiom przy częstotliwościach rezonansowych lub w ich pobliżu zwykle są wystarczające do spowodowania zniszczenia zmęczeniowego i/lub do utraty stateczności konstrukcji [81]. Nawet jeśli naprężenia dynamiczne nie są niebezpieczne, to praca maszyny w pobliżu punktu rezonansu połączona jest na ogół ze znacznymi amplitudami drgań i hałasem o natężeniu męczącym dla personelu obsługującego. Hałas i drgania wytwarzane przez maszynę mają także negatywny wpływ na znalezienie na nią nabywcy.

Szkodliwy wpływ silnych drgań na pracę i wydajność maszyny powoduje, iż wyznaczenie jej częstości drgań własnych (rezonansowych) jest jednym z zadań konstruktora – projektanta. Maszyna powinna być zaprojektowana tak, aby częstotliwość drgań przez nią wzbudzanych była możliwie daleka od częstotliwości rezonansowych urządzenia. Z uwagi na to, iż charakterystyki drgań w pobliżu rezonansu charakteryzują się stosunkowo dużymi gradientami, odstęp pomiędzy częstościami sił wymuszających a częstościami własnymi urządzenia powinien być jak największy. Stosunek najbliższej częstości drgań własnych urządzenia  $\omega$  do częstości wymuszenia  $\omega_b$  powinien wynosić  $\omega/\omega_b < 0.5$  lub  $\omega/\omega_b > 2$  [59, 81].

### 5.1.1 Drgania wymuszone konstrukcji

Drgania wymuszone konstrukcji analizowanej za pomocą MES oblicza się różniczkując równanie ruchu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \quad (5.1)$$

gdzie  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  są odpowiednio macierzami mas, tłumienia oraz sztywności,  $\mathbf{u}$  oznacza wektor kolumnowy przemieszczeń uogólnionych oraz  $\mathbf{P}(t)$  jest wektorem wymuszeń uogólnionych zależnych od czasu  $t$ . Zakładamy wymuszenie harmoniczne posiadające częstość  $\Omega$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}e^{i\Omega t} \quad (5.2)$$

gdzie  $\mathbf{p}$  jest wektorem kolumnowym amplitud wymuszenia. Ponadto zakładamy analizę drgań ustalonych. Wektor przemieszczeń uogólnionych ma postać [59, 81]

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{i\Omega t} \quad (5.3)$$

Wektor  $\mathbf{A}$  zawiera amplitudy drgań ustalonych w postaci zespolonej (z uwzględnieniem przesunięcia fazowego odpowiedzi układu). Po podstawieniu zróżniczkowanego

wyrażenia 5.3 oraz równania 5.2 do równania ruchu 5.1 otrzymujemy związek

$$-\Omega \mathbf{M} \mathbf{A} e^{i\Omega t} + i\Omega \mathbf{C} \mathbf{A} e^{i\Omega t} + \mathbf{K} \mathbf{A} e^{i\Omega t} = \mathbf{p} e^{i\Omega t} \quad (5.4)$$

po podzieleniu stronami przez  $e^{i\Omega t}$  równanie 5.4 przyjmuje postać

$$(-\Omega \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{A} = \mathbf{p} \quad (5.5)$$

gdzie wyrażenie

$$-\Omega \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K} = \mathbf{G}(\Omega) \quad (5.6)$$

nazywane jest macierzą sztywności dynamicznej [71].

Szczególnym przypadkiem równania 5.1 jest równanie opisujące jednowymiarowy ruch punktu materialnego

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (5.7)$$

gdzie  $m$ ,  $c$  i  $k$  są odpowiednio skalarnymi miarami masy, tłumienia i sztywności,  $u$  jest przemieszczeniem uogólnionym natomiast  $p(t) = pe^{i\Omega t}$  jest obciążeniem zewnętrznym zależnym od czasu  $t$ . Oznaczamy  $h$  i  $\omega$  jako względny współczynnik tłumienia i częstość drgań własnych nietłumionych.

$$h = \frac{c}{2m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.8)$$

stąd równanie 5.7 przyjmuje postać

$$\ddot{u} + 2h\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p}{m} e^{i\Omega t} \quad (5.9)$$

Założono rozwiązanie równania 5.9 w postaci [71]

$$u = A e^{i\Omega t} \quad (5.10)$$

Po zróżniczkowaniu równania 5.10 oraz podstawieniu do równania 5.9 otrzymujemy

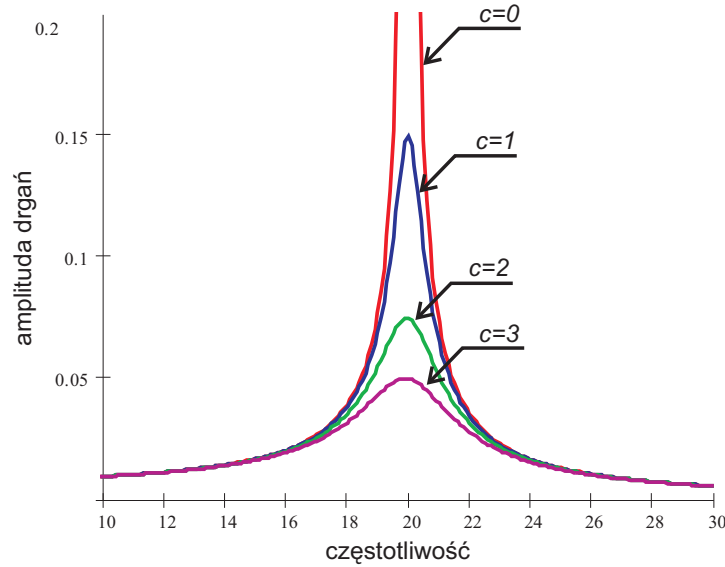
$$-\Omega^2 A e^{i\Omega t} + i2h\Omega A e^{i\Omega t} + \omega^2 A e^{i\Omega t} = \frac{p}{m} e^{i\Omega t} \quad (5.11)$$

lub po przekształceniu

$$(\omega^2 - \Omega^2 + i2h\Omega) A e^{i\Omega t} = \frac{p}{m} e^{i\Omega t} \quad (5.12)$$

Amplituda ruchu  $A$  w równaniu 5.12 jest wartością zespoloną. Część urojona  $A$  odpowiada za przesunięcie fazowe odpowiedzi układu w stosunku do jego wymuszenia. Przekształcenie równania 5.12 pozwala na obliczenie amplitudy  $A$  [71]

$$A = |A| e^{i\phi} = \frac{p}{m(\omega^2 - \Omega^2 + i2h\Omega)} \quad (5.13)$$



Rysunek 5.1: Charakterystyka amplitudowo – częstotliwościowa konstrukcji.

lub

$$A = |A| e^{i\phi} = \frac{p}{m(-m\Omega^2 + ic\Omega + k)} \quad (5.14)$$

Jeżeli we wzorze 5.13 przyjmiemy jako zmienną niezależną częstotliwość wymuszenia  $\Omega$ , to rzeczywistą amplitudę  $\tilde{A}$  i fazę drgań  $\phi$  w zależności od częstotliwości wymuszenia określają wzory

$$\tilde{A} = \frac{p}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2h\Omega)^2}}, \quad \phi = -\arctan\left(\frac{2h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) \quad (5.15)$$

Analizując równanie 5.15 można wyciągnąć wniosek, że dla pewnych wartości częstotliwości wymuszenia funkcja osiąga maksimum dane wzorem

$$\Omega_{rez} = \omega \sqrt{1 - 2\left(\frac{h}{\omega}\right)^2} \quad (5.16)$$

W przypadku konstrukcji mechanicznych maksymalne amplitudy drgań mechanicznych zwykle są niepożądane. Mogą doprowadzić do uszkodzeń i awarii urządzeń. Konstrukcje i części maszyn powinny być projektowane tak, aby pracowały w stanie ustalonym poza strefą rezonansu. Na rysunku 5.1 przedstawiono przykładową charakterystykę amplitudowo – częstotliwościową. Pokazuje ona w jakim zakresie częstotliwości wymuszenie dopuszczalna jest ustalona praca konstrukcji poddanej obciążeniu harmonicznemu.

## 5.2 Drgania swobodne konstrukcji

### 5.2.1 Sformułowanie problemu własnego

Drgania swobodne konstrukcji opisane są równaniem ruchu z pominięciem tłumienia oraz obciążenia zewnętrznego [46, 133]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

gdzie  $\mathbf{M}$  jest macierzą mas,  $\mathbf{K}$  jest macierzą sztywności natomiast  $\mathbf{u}$  jest wektorem przemieszczeń uogólnionych, '·' oznacza pochodną po czasie.

Zakłada się ogólne rozwiązanie równania 5.17 w postaci

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{q} \sin[\omega(t - t_0)] \quad (5.18)$$

gdzie  $\omega$  jest częstością oraz  $\mathbf{q}$  jest  $N$  wymiarowym znormalizowanym wektorem postaci własnej,  $t$  jest czasem. Po zróżniczkowaniu  $\mathbf{u}(t)$ , podstawieniu do równania 5.17 oraz transformacji do globalnego układu współrzędnych otrzymujemy problem własny, który pozwala na obliczenie częstotliwości oraz postaci drgań własnych badanej konstrukcji. Problem własny przyjmuje postać

$$(\mathbf{K} - \Lambda\mathbf{M})\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

$\Lambda$  jest macierzą diagonalną kwadratów częstości własnych  $\omega$  natomiast  $\mathbf{Q}$  jest macierzą powstałą poprzez agregację poszczególnych wektorów własnych  $\mathbf{q}$ .

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_{(1)} \quad \mathbf{q}_{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{q}_{(N)}] = \begin{bmatrix} q_{1(1)} & q_{1(2)} & \dots & q_{1(N)} \\ q_{2(1)} & q_{2(2)} & \dots & q_{2(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N(1)} & q_{N(2)} & \dots & q_{N(N)} \end{bmatrix}$$

Równanie 5.19 nazywane jest równaniem charakterystycznym lub problemem własnym. Aby rozwiązanie tego równania było niezerowe wyznacznik

$$|\mathbf{K} - \Lambda\mathbf{M}| = 0 \quad (5.21)$$

Jeśli macierze sztywności  $\mathbf{K}$  oraz mas  $\mathbf{M}$  są symetryczne oraz dodatnio określone rozwiązanie równania 5.21 dla  $N$  rzeczywistych i różnych wartości własnych  $\lambda = \omega^2$  [46].

Rozwiązanie równania 5.21 nie daje w rezultacie wektorów własnych  $\mathbf{q}$ . Wektory własne są obliczane na podstawie układu równań 5.19 z dokładnością do stałej (są normalizowane). Macierz  $\mathbf{Q}$  jest macierzą ortogonalną i zachodzi [133]

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (5.22)$$

oraz

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \quad (5.23)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową.

Jeśli wprowadzimy zależność macierzy sztywności i macierzy mas od wektora parametrów projektowych  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{K}(\mathbf{h}), \mathbf{M}(\mathbf{h})$  również wartości własne oraz sprzężone z nimi wektory własne będą zależne od wektora parametrów projektowych. Wobec czego równanie 5.19 może być napisane w postaci

$$(\mathbf{K}(\mathbf{h}) - \mathbf{\Lambda}(\mathbf{h})\mathbf{M}(\mathbf{h})) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

### 5.2.2 Redukcja rozmiaru problemu własnego

Ilość wszystkich par własnych, wartość własna – wektor własny, jest nieskończona. Wyznaczenie wszystkich par własnych w układzie dyskretnym (np. metodą elementów skończonych) jest bardzo zasobochłonne, zarówno czasochłonne jak i pamięciochłonne. W przeważającej większości przypadków praktyczne znaczenie w obliczeniach inżynierskich ma jedynie kilka do kilkudziesięciu pierwszych par własnych o najbardziej znaczących postaciach. W [133] została zaproponowana oraz zaimplementowana w programie FEAP metoda redukcji rozmiaru problemu własnego z wykorzystaniem metody iteracji w podprzestrzeni opisanej w rozdziale 6.1 jako metody rozwiązania problemu własnego.

Aby otrzymać zredukowany problem własny zakładamy, że nieznanne  $N$  wektorów  $\mathbf{q}_i$  zastępujemy  $m$ , gdzie  $m \ll N$ , wektorami tymczasowymi  $\mathbf{t}_j$  przemnożonymi przez parametr  $x_j$  [133]. Można to zapisać w postaci

$$\mathbf{Q} = \mathbf{t}_1 x_1 + \mathbf{t}_2 x_2 + \dots + \mathbf{t}_m x_m = \mathbf{T} \mathbf{x} \quad (5.25)$$

Po podstawieniu równania 5.25 do równania 5.19 otrzymujemy

$$\mathbf{K} \mathbf{T} \mathbf{x} - \mathbf{\Lambda} \mathbf{M} \mathbf{T} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

Mnożąc obustronnie z prawej strony przez  $\mathbf{T}^T$  otrzymujemy zredukowany problem własny posiadający jedynie  $m$  par własnych [133].

$$\mathbf{K}^* \mathbf{x} - \mathbf{\Lambda}^* \mathbf{M}^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

gdzie

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (5.28)$$

W równaniu 5.27  $\Lambda^*$  jest macierzą wartości własnych zredukowanego problemu własnego. W przypadku gdy macierz tymczasowa  $\mathbf{T}$  składa się z wektorów własnych rodzimego problemu własnego 5.19 to  $\Lambda^*$  zawiera odpowiadające im wartości własne konstrukcji. W programie FEAP poszukiwania tymczasowej macierzy  $\mathbf{T}$  są prowadzone metodą iteracyjną.

## 5.3 Wrażliwość wartości własnych na parametr projektowy

Problem obliczania wrażliwości wartości własnych na parametr projektowy ma różne sposoby rozwiązania zależne od wyniku obliczenia wartości własnych układu.

W przypadku gdy wartości własne są unikalne (różne od siebie) rozwiązanie problemu sprowadza się do różniczkowania równania 5.24. Następnie po kilku przekształceniach otrzymujemy wzór pozwalający a obliczenie wrażliwości wartości własnych na parametr projektowy. Wzór pozwalający na określenie wrażliwości wartości własnych przedstawiono w rozdziale 5.3.1.

Odmierna sytuacja zachodzi gdy konstrukcja wykazuje cechy symetrii lub posiada powtarzające się elementy. Jak pokazano w [88, 92] w przypadku gdy układ posiada wielokrotne wartości własne, równanie charakterystyczne 5.24 nie może zostać bezpośrednio różniczkowane. Rozwiązanie problemu poszukiwania wrażliwości wartości własnych w przypadku wielokrotnych wartości własnych zostało przedstawione w rozdziale 5.3.3.

### 5.3.1 Jednokrotne wartości własne

Jeśli macierz mas i macierz sztywności są symetryczne i ciągle różniczkowalne względem wektora parametrów projektowych  $\mathbf{h}$  oraz jeśli nie mamy do czynienia z wielokrotnymi wartościami własnymi (warunek jest spełniony gdy macierze  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{M}$  są symetryczne, dodatnio określone oraz gdy dominują wartości na diagonalu [46, 133]) wtedy wartości własne i odpowiadające im wektory własne również są ciągle różniczkowalne względem parametru projektowego [46].

Różniczkując równanie 5.24 otrzymujemy



$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{Q}(\mathbf{h}) + \mathbf{K}(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} - \frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) - \Lambda(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{Q}(\mathbf{h}) + \\ - \Lambda(\mathbf{h}) \mathbf{M}(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Uporządkujmy równanie 5.29 poprzez pozostawienie składnika  $\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}$  po lewej stronie równania oraz przenosząc na prawą stronę równania i porządkując pozostałe składniki.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) = \\ \left( \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} - \Lambda(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) + (\mathbf{K}(\mathbf{h}) - \Lambda(\mathbf{h}) \mathbf{M}(\mathbf{h})) \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Mnożąc stronami z lewej strony przez  $\mathbf{Q}^T$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) \mathbf{M}(\mathbf{h}) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) = \\ \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) \left( \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} - \Lambda(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) + \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) (\mathbf{K}(\mathbf{h}) - \Lambda(\mathbf{h}) \mathbf{M}(\mathbf{h})) \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Uwzględniając ogólny zapis problemu własnego danego wzorem 5.24 drugi składnik po prawej stronie równania 5.31 jest równy  $\mathbf{0}$ . Wyłączając pochodną wartości własnej oraz korzystając z warunku M-ortonormalności danej wzorem 5.22 otrzymujemy równanie, które pozwala na obliczenie wrażliwości wartości własnych na parametr projektowy  $\mathbf{h}$ .

$$\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{I} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) \left( \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} - \Lambda(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) \quad (5.32)$$

### 5.3.2 Redukcja rozmiaru problemu poszukiwania wrażliwości wartości własnych – jednokrotne wartości własne

Rozwiązanie problemu drgań własnych konstrukcji daje nam w rezultacie wartości własne i odpowiadające im wektory własne zredukowanego problemu własnego danego wzorami 5.27 oraz 5.28. Po podstawieniu zastępczych wektorów własnych 5.25 do ogólnego równania wrażliwości wartości własnych 5.32 otrzymujemy

$$\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{I} = \mathbf{x}^T(\mathbf{h}) \mathbf{T}^T(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{T}(\mathbf{h}) \mathbf{x}(\mathbf{h}) - \Lambda(\mathbf{h}) \mathbf{x}^T(\mathbf{h}) \mathbf{T}^T(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{T}(\mathbf{h}) \mathbf{x}(\mathbf{h}) \quad (5.33)$$

Porządkując prawą stronę równania 5.33 otrzymujemy wzór pozwalający obliczyć wrażliwości wartości własnych zredukowanego problemu własnego

$$\left( \frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right)^* \mathbf{I} = \mathbf{x}^T(\mathbf{h}) \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right)^* - \Lambda(\mathbf{h}) \left( \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right)^* \right] \mathbf{x}(\mathbf{h}) \quad (5.34)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}\right)^* &= \mathbf{T}^T(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{T}(\mathbf{h}) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}\right)^* &= \mathbf{T}^T(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{T}(\mathbf{h})\end{aligned}\quad (5.35)$$

$\left(\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}\right)^*$  jest macierzą diagonalną zawierającą wrażliwości wybranej wartości własnej problemu własnego.

### 5.3.3 Wielokrotne wartości własne

W przypadku gdy analizujemy skomplikowaną konstrukcję wykazującą cechy symetrii lub z okresowo powtarzającymi się elementami to z rozwiązania równania 5.24 otrzymujemy  $N$  wartości własnych  $\lambda_i$  które nie są jednak unikalne.

$$\lambda_i = \lambda_j, \quad i, j = m, \dots, n \quad (5.36)$$

Wyznaczenie wrażliwości wartości własnych układu nie może następować poprzez zróżniczkowanie równania 5.24. Na przeszkodzie stoi osobliwość zawarta w macierzy wektorów własnych  $\mathbf{Q}$ . W przypadku gdy  $\lambda_i = \lambda_j$  odpowiadające im wektory własne  $\mathbf{q}_i$  oraz  $\mathbf{q}_j$  są liniowo zależne. Prowadzi to do powstania osobliwej macierzy  $\mathbf{Q}$ .

Rozwiązaniem problemu różniczkowania problemu własnego w przypadku wielokrotnych wartości własnych jest pochodna kierunkowa zaprezentowana m.in. w [88,92]. Wprowadzono zmodyfikowane wektory własne  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  jako liniową kombinację rzeczywistych wektorów własnych. Niech wektory  $\mathbf{a}_i$  spełniają zależność

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{Q} \mathbf{a}_i^T, \quad i = 1, \dots, N \\ \tilde{\mathbf{Q}} &= [\tilde{\mathbf{q}}_1 | \tilde{\mathbf{q}}_2 | \dots | \tilde{\mathbf{q}}_N] \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_N]\end{aligned}\quad (5.37)$$

Podstawiając  $\tilde{\mathbf{Q}}$  zamiast  $\mathbf{Q}$  w równaniu 5.24 otrzymujemy

$$(\mathbf{K} - \Lambda \mathbf{M}) \mathbf{Q} \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (5.38)$$

Warunek ortonormalności problemu własnego ogranicza wybór wektorów własnych do dowolnego zbioru wektorów ortonormalnych względem siebie

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (5.39)$$

Zastępcza macierz wektorów własnych  $\tilde{\mathbf{Q}}$  nie jest macierzą osobliwą. Dopuszcza to różniczkowanie równania 5.38 ze względu na parametr projektowy  $\mathbf{h}$ . Mnożąc zróżniczkowane równanie 5.38 obustronnie z lewej strony przez  $\mathbf{Q}^T$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) (\mathbf{K}(\mathbf{h}) - \Lambda(\mathbf{h})\mathbf{M}(\mathbf{h})) \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} + \\ & \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) \left( \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} - \Lambda(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right) \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{h}) - \\ & \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) \mathbf{M}(\mathbf{h}) \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{h}) \frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Uwzględniając ogólne sformułowanie problemu własnego 5.24 pierwszy składnik po lewej stronie równania 5.40 równy jest  $\mathbf{0}$ . Po podstawieniu zastępczych wektorów własnych  $\tilde{\mathbf{Q}}$ , równanie 5.37, do wzoru 5.40 otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) \left( \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} - \Lambda(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) \mathbf{A} - \\ & \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) \mathbf{M}(\mathbf{h}) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) \mathbf{A} \frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Korzystając z warunku ortonormalności problemu (równanie 5.39) oraz porządkując składniki w równaniu 5.41 uzyskujemy równanie podproblemu własnego

$$\left[ \overline{\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}} - \frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{I} \right] \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (5.42)$$

gdzie  $\overline{\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}}$  jest diagonalną macierzą wrażliwości wartości własnej na parametr projektowy.

Wyrażenie

$$\overline{\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{h}) \left( \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} - \Lambda(\mathbf{h}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right) \mathbf{Q}(\mathbf{h}) \quad (5.43)$$

zostało wcześniej obliczone w równaniu 5.30. W przypadku gdy problem własny nie posiada wielokrotnych wartości własnych składnik 5.43 jest macierzą diagonalną i równą  $\overline{\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}}$ .

### 5.3.4 Redukcja rozmiaru problemu poszukiwania wrażliwości wartości własnych – wielokrotne wartości własne

Zredukowane wektory własne otrzymane w równaniu 5.34 mogą być bezpośrednio podstawione do podproblemu własnego wrażliwości wartości własnych danego równaniem 5.42. W rezultacie otrzymujemy

$$\left\{ \left( \overline{\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}} \right)^* - \left( \frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right)^* \mathbf{I} \right\} \mathbf{A}^* = \mathbf{0} \quad (5.44)$$

gdzie  $\left(\frac{\partial \lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}\right)^*$  jest zredukowaną formą równania 5.43.

Rozwiązanie wyznacznika

$$\left| \left(\frac{\partial \lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}\right)^* - \left(\frac{\partial \Lambda(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}\right)^* \mathbf{I} \right| = 0 \quad (5.45)$$

pozwała obliczyć nieznaną wrażliwość wartości własnej na parametr projektowy. W celu obliczenia wrażliwości wartości własnych może zostać wykorzystany algorytm obliczający wartości własne badanego układu.

Wzór 5.45 jest końcowym równaniem, którego rozwiązaniem są wrażliwości wartości własnej na wektor parametrów projektowych  $\mathbf{h}$  dla dowolnego problemu własnego, zarówno z jednokrotnymi jak i wielokrotnymi wartościami własnymi zredukowanego problemu własnego.

# Rozdział 6

## MES w optymalizacji konstrukcji narażonej na rezonans

Analiza wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy, opisana w rozdziale 5.3, została zaimplementowana w programie elementów skończonych FEAP. Powstało narzędzie wykorzystujące MES i pozwalające na obliczenie wrażliwości wartości własnych konstrukcji. Rezultatem działania programu są pochodne wartości własnych konstrukcji ze względu na parametr projektowy. Wrażliwości te mogą być następnie wykorzystane np. w optymalizacji mającej na celu uniknięcie rezonansu.

### 6.1 Rozwiązanie problemu własnego

Równanie problemu własnego, podane wcześniej w rozdziale 5.2.1 we wzorze 5.19, można przedstawić w sposób następujący

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{MQ}\Lambda \quad (6.1)$$

W programie FEAP problem własny dany równaniem 6.1 rozwiązywany jest za pomocą algorytmu iteracji w podprzestrzeni zaproponowanego przez K. J. Bathe [8,9]. Algorytm zakłada, że spośród wszystkich  $N$  par własnych obliczane jest jedynie  $m$ , gdzie  $m \ll N$ , par własnych z najmniejszymi wartościami własnymi. Załóżmy, że macierz  $\mathbf{X}$  złożona jest z pierwszych  $m$  wektorów własnych

$$\mathbf{X} = [\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \dots, \mathbf{q}^{(m)}] \quad (6.2)$$

W pracy [8] został zaproponowany wzór iteracyjny pozwalający na rozwiązanie problemu własnego

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}_{(k+1)} = \mathbf{M}\mathbf{X}_{(k)} \quad (6.3)$$

gdzie indeks  $(k)$  oznacza numer iteracji natomiast  $\bar{\mathbf{X}}_{(k+1)}$  jest macierzą zmodyfikowanych wektorów własnych takich, że

$$\mathbf{X}_{(\alpha)} = \bar{\mathbf{X}}_{(\alpha)} \mathbf{R}_{(\alpha)} \quad (6.4)$$

gdzie  $\mathbf{R}$  jest diagonalną macierzą zawierającą  $m$  pierwszych wartości własnych.

Zredukowane macierze sztywności i mas obliczane są w następujący sposób

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(k+1)} &= \bar{\mathbf{X}}_{(k+1)}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}_{(k+1)} \\ \mathbf{M}_{(k+1)} &= \bar{\mathbf{X}}_{(k+1)}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{X}}_{(k+1)} \end{aligned} \quad (6.5)$$

W ten sposób otrzymujemy podproblem własny stopnia  $m$

$$(\mathbf{K}_{(k+1)} - \mathbf{R}_{(k+1)} \mathbf{M}_{(k+1)}) \mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

Podproblem własny 6.6 może być rozwiązany dowolną metodą. W programie FEAP do rozwiązania równania 6.6 wykorzystana została zmodyfikowana metoda QR [8,62,124]. Kolejne postacie macierzy  $\mathbf{X}$  obliczane są wg wzoru

$$\mathbf{X}_{(k+1)} = \bar{\mathbf{X}}_{(k+1)}^T \mathbf{X}_{(k+1)} \quad (6.7)$$

Wynikiem działania algorytmu jest diagonalna macierz wartości własnych  $\mathbf{R}$ , która przy  $k \rightarrow \infty$  jest podmacierzą  $\mathbf{\Lambda}$  oraz macierz wektorów własnych  $\mathbf{X}$  która przy  $k \rightarrow \infty$  zawiera  $m$  wektorów własnych rozpatrywanego równania 6.1.

Algorytm rozwiązywania problemu własnego metodą iteracji w podprzestrzeni oraz metody wyboru macierzy  $\mathbf{X}_{(1)}$  jako pierwszego przybliżenia szukanych wektorów własnych przedstawiono m.in. w [8,9].

## 6.2 Implementacja algorytmu obliczającego wrażliwość wartości własnych – jednokrotne wartości własne

W toku badań autor opracował algorytm analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji z wykorzystaniem MES opisany w poprzednich podrozdziałach i zaimplementował go w programie FEAP. Algorytm umożliwia obliczenie wrażliwości konstrukcji na dowolny parametr projektowy [15–17, 54, 85, 117].

W ramach badań na potrzeby projektu DIADYN istniała potrzeba opracowania nowych lub modyfikacja istniejących typów elementów skończonych wykorzystanych w analizie wirujących wałów. Autor opracował na podstawie prac [60,61] i zaimplementował w programie FEAP szereg nowych typów elementów skończonych:

- specjalny element skończony wału z pominięciem sztywności wzdłużnych i skrętnych,
- specjalny element skończony wału z wewnętrznym defektem (pęknięciem),
- jednowęzłowy element skończony wirującego dysku sztywnego oraz
- specjalny element skończony reprezentujący podatne łożysko ślizgowe.

Elementy skończone reprezentujące wał wirnika wzbogacone zostały o możliwość wyznaczania macierzy wrażliwości sztywności oraz mas na wybrane parametry projektowe.

Rozwiązując równanie 5.32, pozwalające na obliczenie wrażliwości wartości własnych układu na parametr projektowy, otrzymujemy macierz wrażliwości na parametr projektowy. W przypadku gdy występują jedynie jednokrotne wartości własne z rozwiązania równania 5.32 otrzymujemy macierz diagonalną. Zatem równanie 5.32 może zostać przepisane do postaci indeksowej

$$\frac{\partial \Lambda_{ii}}{\partial h_n} = \left( \frac{\partial K_{kl}}{\partial h_n} - \Lambda_{ii} \frac{\partial M_{kl}}{\partial h_n} \right) Q_{li} Q_{ki} \quad (6.8)$$

Szczegółowy algorytm obliczania wrażliwości wartości własnych układu został zamieszczony w wydruku 6.1.

Założono, że obliczana jest wrażliwość wartości własnych konstrukcji z pominięciem tłumienia i efektów żyroskopowych. Ponadto założono liniową postać drgań swobodnych.

Pierwszą czynnością w analizie i obliczaniu wrażliwości wartości własnych konstrukcji jest rozwiązanie problemu własnego (wydruk 6.1, punkt 1). Należy obliczyć macierz sztywności  $\mathbf{K}$  oraz macierz mas  $\mathbf{M}$ . Rozwiązanie problemu własnego może zostać wykonane dowolną metodą. W programie FEAP, wykorzystanym przez autora do analizy konstrukcji, zastosowana jest metoda iteracji w podprzestrzeni szerzej opisana w rozdziale 6.1 oraz w [8, 9]. Podczas rozwiązywania problemu własnego konstrukcji należy przechować do dalszych obliczeń, poza diagonalną macierzą wartości własnych  $\Lambda$  i macierzą wyznaczonych wektorów własnych  $\bar{\mathbf{X}}$  (por. wzór 6.7), macierz wektorów powstałą ze zredukowanego problemu własnego  $\mathbf{x}$  (wzory 5.25, 5.27 oraz 6.6).

Kolejną czynnością, wydruk 6.1 punkt 2, jest obliczenie macierzy pochodnych sztywności oraz pochodnych mas dla pojedynczego elementu. Z uwagi na to, iż w większości przypadków obliczany jest wpływ zmian parametrów jedynie fragmentu konstrukcji na cały ustrój (np. zmiana średnicy pewnej sekcji wału stopniowanego), należy uwzględnić tworzenie grup elementów skończonych charakteryzowanych daną grupą parametrów. Autor w swojej implementacji analizy wrażliwości wykorzystał wbudowany w każdy system MES podział na grupy elementów wykonanych z różnych

Wydruk 6.1: Algorytm obliczenia wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy - jednokrotne wartości własne konstrukcji.

1. Rozwiązać problem własny konstrukcji.
2. Obliczyć macierze pochodnych sztywności oraz pochodnych macierzy mas na wybrany parametr projektowy  $h_n$  dla danego elementu skończonego.
3. Zaktualizować globalne macierze pochodnych sztywności  $\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}$  oraz macierzy mas  $\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}$ .
4. Powtarzaj kroki 2 - 3 dla każdego elementu skończonego.
5. Obliczyć korzystając ze wzorów 5.28 zredukowane postaci macierzy  $\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}$  oraz  $\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}$ .
6. Korzystając ze wzoru 6.8 obliczyć wrażliwość wartości własnych na dany parametr projektowy.
7. Powtarzaj kroki 2 do 6 dla każdej składowej parametru projektowego  $\mathbf{h}$ .

rodzajów materiałów. Podczas analizy wybranej grupy elementów, macierze pochodnych elementów nie należącej do danej grupy są macierzami zerowymi (składają się z samych zer).

Obliczanie elementowych macierzy pochodnych sztywności oraz pochodnych macierzy mas może zostać wykonane w dwojaki sposób: poprzez analityczne obliczenie pochodnych oraz z wykorzystaniem metod numerycznych np. metody różnic skończonych.

Pierwsza z metod, metoda bezpośredniego różniczkowania (MBR) [65], wykorzystuje przekształcenia analityczne do obliczania macierzy pochodnych sztywności oraz mas. Metoda jest bardzo dokładna a jej realizacja numeryczna cechuje stosunkowo niski koszt obliczeniowy.

Druga z metod (półanalityczna [65]) wykorzystuje do obliczania pochodnych macierzy sztywności i mas metody numeryczne. W numerycznej implementacji metody półanalitycznej autor wykorzystał metodę różnic skończonych. Pochodne obliczane są poprzez porównanie rozwiązania bazowego i rozwiązania po perturbacji parametru projektowego. Wartość perturbacji została dobrana doświadczalnie [15, 83, 84].

Metoda różnic skończonych w półanalitycznej analizie wrażliwości wartości własnych konstrukcji może zostać wykorzystana na trzech różnych poziomach obliczeń:

- obliczenie pochodnej zredukowanych macierzy sztywności i mas (pomijane są



kroki od 2 do 5, wydruk 6.1),

- obliczenie pochodnej globalnych macierzy sztywności i mas (pomijane są kroki od 2 do 3, wydruk 6.1) oraz
- obliczanie pochodnych macierzy sztywności i mas dla każdego elementu skończonego (krok 2, wydruk 6.1).

Najkorzystniejszy ze względu na dokładność obliczeń jest sposób polegający na obliczaniu pochodnych macierzy sztywności i mas dla każdego elementu skończonego. W ten sposób można wyeliminować potencjalne błędy zaokrążeń i obcięć, które powstają na etapie tworzenia globalnej macierzy sztywności lub/i podczas redukcji jej rozmiaru za pomocą wzorów 5.35.

Kolejną czynnością (punkt 3, wydruk 6.1) jest utworzenie globalnych pochodnych macierzy sztywności i mas. Czynność ta realizowana jest poprzez dodawanie obliczonych macierzy pochodnych do odpowiednich macierzy globalnych (sztywności i mas). Autor wykorzystał wbudowane w program FEAP mechanizmy tworzenia globalnych macierzy sztywności i mas. Czynność ta może zostać pominięta w przypadku stosowania niektórych metod półanalitycznej analizy wrażliwości.

Następnie wykonano redukcję globalnych macierzy pochodnych sztywności oraz mas za pomocą wzorów 5.35. W tym celu wykorzystujemy prostokątną macierz wyznaczonych wektorów własnych  $\bar{\mathbf{X}}$ . W takim przypadku wzory 5.35 przyjmują postać

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial h_n}\right)^* = \bar{\mathbf{X}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial h_n} \bar{\mathbf{X}}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial h_n}\right)^* = \bar{\mathbf{X}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial h_n} \bar{\mathbf{X}} \quad (6.9)$$

Obliczenie wrażliwości wartości własnych konstrukcji na wybrany parametr projektowy  $h_n$  wykonywane jest w kroku 6 (wydruk 6.1). Uwzględniając zredukowaną postać macierzy pochodnych sztywności i mas (wzór 6.9) oraz podstawiając obliczone podczas kroku 1 wartości  $\mathbf{x}$  wzór 6.8 może zostać przepisany jako

$$\frac{\partial \Lambda_{ii}}{\partial h_n} = \left[ \left(\frac{\partial K_{kl}}{\partial h_n}\right)^* - \Lambda_{ii} \left(\frac{\partial M_{kl}}{\partial h_n}\right)^* \right] x_{li} x_{ki} \quad (6.10)$$

W przypadku gdy konstrukcje charakteryzują jednokrotne wartości własne wzór 6.10 pozwala na obliczenie wrażliwości wartości własnych układu na wybrany parametr projektowy  $h_n$ .

Jeśli mamy do czynienia z szeregiem parametrów projektowych  $\mathbf{h} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m]$  to w celu obliczenia wrażliwości konstrukcji na wektor parametrów projektowych  $\mathbf{h}$  należy powtarzać kroki 2 do 6 dla każdej składowej wektora  $\mathbf{h}$ .

Wydruk 6.2: Algorytm obliczenia wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy dla przypadku wielokrotnych wartości własnych konstrukcji.

1. Rozwiązać problem analizy wrażliwości wartości własnych za pomocą algorytmu zamieszczonego w wydruku 6.1 w rozdziale 6.2 dla pojedynczego parametru projektowego  $h_n$  (kroki 1 do 6).
2. Rozwiązać podproblem własny, którego wynikiem jest macierz wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy.
3. Powtarzaj kroki 1 do 2 dla każdej składowej parametru projektowego  $\mathbf{h}$ .

### 6.3 Implementacja algorytmu obliczającego wrażliwość wartości własnych – wielokrotne wartości własne

Jeśli konstrukcja wykazuje cechy symetrii lub wykonana jest z wielu powtarzających się członów to istnieje niebezpieczeństwo, że niektóre wartości własne charakteryzujące układ są wielokrotne. W takim przypadku z rozwiązania równania 5.32 otrzymujemy macierz, która nie jest diagonalna. Problem został szerzej opisany w rozdziale 5.3.3.

Algorytm obliczania wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy dla przypadku wielokrotnych wartości własnych konstrukcji został zamieszczony w wydruku 6.2.

Pierwszym krokiem analizy wrażliwości konstrukcji charakteryzowanej przez wielokrotne częstotliwości drgań własnych jest rozwiązanie problemu dla jednokrotnych wartości własnych (krok 1, wydruk 6.2). W tym przypadku rozwiązaniem równania 6.8 nie jest macierz diagonalna. Należy obliczyć pełną macierz pochodnych dla zadania analizy wrażliwości przy założeniu jednokrotnych wartości własnych. Końcowy wzór 6.10 pozwalający obliczyć wrażliwości ze zredukowanych macierzy pochodnych można zapisać w postaci

$$\overline{\frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial h_n}} = \left[ \left( \frac{\partial K_{kl}}{\partial h_n} \right)^* - \Lambda_{ij} \left( \frac{\partial M_{kl}}{\partial h_n} \right)^* \right] x_{li} x_{kj} \quad (6.11)$$

Kolejną czynnością prowadzącą do obliczenia wartości wrażliwości (krok 2, wydruk 6.2) jest utworzenie i rozwiązanie podproblemu własnego w analizie wrażliwości. Wyprowadzone wcześniej w rozdziale 5.3.3 równanie 5.41 można zapisać jako

$$\left[ \overline{\frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial h_n}} - \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial h_n} \mathbf{I} \right] \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (6.12)$$

Obliczenie wartości własnych podproblemu własnego danego równaniem 6.12 pozwala obliczyć wrażliwości wartości własnych konstrukcji wśród których występują wielokrotne wartości własne. W przypadku gdy rozwiązaniem równania 6.11 jest macierz diagonalna, nie występują wielokrotne wartości własne, rozwiązanie podproblemu własnego 6.12 jest trywialne i daje w rezultacie wynik

$$\frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial h_n} = \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial h_n} \quad (6.13)$$

## 6.4 Złożoność obliczeniowa algorytmu analizy wrażliwości

Podobnie jak w rozdziale 3.6, przy obliczaniu złożoności obliczeniowej algorytmu analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy (wydruk 6.1) pominięte zostały tworzenie i wczytywanie danych wejściowych oraz prezentacja wyników pracy programu. Zmiennymi mającymi wpływ na koszt obliczeń są:  $el$  – ilość elementów skończonych,  $np$  – ilość węzłów,  $nst$  – ilość stopni swobody w węźle oraz  $p$  – ilość obliczanych par własnych problemu własnego.

Koszt wyznaczenia macierzy sztywności obliczony został w rozdziale 3.6 i wynosi

$$A_{szt} = O(el) \quad (6.14)$$

Złożoność obliczeniowa wyznaczenia macierzy mas jest również liniowo zależna od ilości elementów  $el$ .

W programie FEAP, z który stał się bazą do implementacji algorytmu analizy wrażliwości, problem własny rozwiązywany jest metodą iteracji w podprzestrzeni [124]. Koszt obliczeniowy rozwiązania problemu własnego metodą iteracji w podprzestrzeni został podany w [8, 9] i wynosi

$$A_{wl} = O[(np \cdot nst)^3 + 2p \cdot (np \cdot nst)^2] \quad (6.15)$$

Ponieważ  $p \ll np$

$$A_{wl} = O[(np \cdot nst)^3] \quad (6.16)$$

Obliczenie macierzy pochodnych macierzy sztywności oraz macierzy mas odbywa się przy podobnym koszcie obliczeniowym co tworzenie macierzy sztywności i mas, czyli należy wykonać następującą ilość operacji

$$A_{poch} = O(el) \quad (6.17)$$

Redukcja wymiaru macierzy sztywności oraz mas realizowana jest przez wzory 5.35, co okupione jest

$$A_{red} = O[((np \cdot nst) \cdot p) \cdot (np \cdot nst) + p^2 \cdot (np \cdot nst)] \approx O[p \cdot (np \cdot nst)^2] \quad (6.18)$$

ilością operacji.

Wszystkie macierze we wzorze 6.8 mają wymiar  $2p \times 2p$ . Zakładając, że obliczamy jedynie pochodną, rząd kosztu obliczeniowego wyznaczania wartości wrażliwości ze zredukowanych macierzy wynosi

$$A_{wr} = O(p^4) \quad (6.19)$$

Całkowity koszt obliczeniowy analizy wrażliwości konstrukcji z jednokrotnymi wartościami własnymi na pojedynczy parametr projektowy wynosi

$$\begin{aligned} A &= A_{szt} + A_{wl} + A_{poch} + A_{red} + A_{wr} = \\ O(el) + O[(np \cdot nst)^3] + O(el) + O[p \cdot (np \cdot nst)] + o(p^4) &\approx \\ O(el + (np \cdot nst)^3 + p^4) & \end{aligned} \quad (6.20)$$

W przypadku gdy konstrukcja posiada wielokrotne wartości własne ich wrażliwości obliczane są poprzez ponowne rozwiązanie problemu własnego (wzór 6.12). Operacja ta nie powoduje zwiększenia rzędu złożoności obliczeniowej w stosunku do problemu własnego z jednokrotnymi wartościami własnymi.

## 6.5 Przykłady optymalizacji konstrukcji ze względu na oddalenie od częstotliwości rezonansowej

Algorytm analizy wrażliwości wartości własnych wykorzystano w optymalizacji konstrukcji ze względu na niebezpieczeństwo rezonansu. Celem optymalizacji jest oddalenie częstości własnych konstrukcji od częstości zakładanego wymuszenia. Innymi słowy, wektor parametrów projektowych  $\mathbf{h}$  powinien przyjąć taką wartość, aby różnica bezwzględna pomiędzy częstością wymuszenia a najbliższą częstością drgań własnych była maksymalna.

Funkcja celu została sformułowana następująco

$$c(\mathbf{h}) = \max[|\lambda - \lambda_b|] = \min[-|\lambda - \lambda_b|], \quad \lambda \in \Lambda \quad (6.21)$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} h_{\min} &\leq h_1, h_2, \dots, h_n \leq h_{\max} \\ |\mathbf{K}(\mathbf{h}) - \Lambda(\mathbf{h})\mathbf{M}(\mathbf{h})| &= 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

gdzie  $\lambda$  jest wartością własną konstrukcji najbliższą wartości własnej potencjalnego wymuszenia  $\lambda_b$ . Częstotliwość wymuszenia  $f_b$  [Hz] zależy od odpowiadającej jej wartości własnej  $\lambda_b$  następująco

$$\lambda_b = (2\pi f_b)^2 \quad (6.23)$$

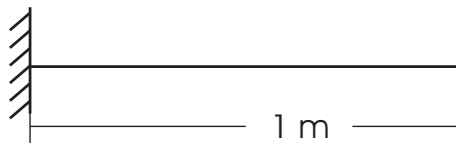
Algorytm optymalizacyjny wykorzystuje w aktualizacji zmiennych projektowych wartości wrażliwości funkcji celu na parametr projektowy. Po zróżniczkowaniu funkcji celu danej wzorem 6.21 otrzymujemy wrażliwość funkcji celu na wybrany parametr projektowy  $h_i$

$$\frac{\partial c(\mathbf{h})}{\partial h_i} = \begin{cases} \frac{\partial \lambda(\mathbf{h})}{\partial h_i} & \text{for } \lambda < \lambda_b \\ -\frac{\partial \lambda(\mathbf{h})}{\partial h_i} & \text{for } \lambda > \lambda_b \end{cases} \quad (6.24)$$

Wrażliwość wartości własnej na parametr projektowy  $\frac{\partial \lambda(\mathbf{h})}{\partial h_i}$  obliczana jest za pomocą zaimplementowanego w programie FEAP algorytmu ścisłej analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji, opisanego w rozdziale 5.3

### 6.5.1 Belka jednostronnie utwierdzona – weryfikacja algorytmu obliczania wrażliwości częstotliwości drgań własnych

W celu sprawdzenia poprawności działania algorytmu obliczającego wrażliwość wartości własnych konstrukcji na wybrany parametr projektowy analizie poddana została jednostronnie utwierdzona belka o przekroju kołowym. Schematyczny szkic belki przedstawiono na rysunku 6.1. Parametry geometryczne oraz materiałowe są następujące: długość belki  $l = 1 \text{ m}$ , moduł Younga  $E = 210 \text{ GPa}$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ , gęstość  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . Średnica przekroju belki  $\phi$  została wybrana jako zmienna projektowa. Przyjęto, że średnica belki nie może być mniejsza niż  $5 \text{ mm}$  oraz większa niż  $15 \text{ mm}$ .



Rysunek 6.1: Belka jednostronnie utwierdzona.

Pierwsza częstotliwość drgań własnych układu oraz jej wrażliwość na średnicę belki – parametr projektowy – została obliczona analitycznie. Następnie ta sama belka została poddana analizie drgań własnych za pomocą programu metody elementów skończonych FEAP z zaimplementowanym algorytmem od obliczania wrażliwości na wybrany parametr projektowy.

Pierwsza częstość (kątowna) drgań własnych belki przedstawionej na rysunku 6.1 może być obliczona ze wzoru

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{3EI}{0.23l^3m}} \quad (6.25)$$

gdzie moment bezwładności  $I$  belki o przekroju kołowym równy jest

$$I = \frac{\pi\phi^4}{64} \quad (6.26)$$

Masa belki  $m$  wynosi

$$m = \frac{\rho\pi\phi^2l}{4} \quad (6.27)$$

Następnie częstość drgań własnych belki wyrażono jako wartość własną  $\tilde{\lambda}$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\omega}^2 \quad (6.28)$$

więc

$$\tilde{\lambda} = \frac{3EI}{0.23l^3m} \quad (6.29)$$

Po podstawieniu równań 6.26 oraz 6.27 do równania 6.29 otrzymujemy zależność pomiędzy pierwszą wartością własną belki a parametrem projektowym  $\phi$

$$\tilde{\lambda}(\phi) = \frac{12E\phi^2}{14.72l^4\rho} \quad (6.30)$$

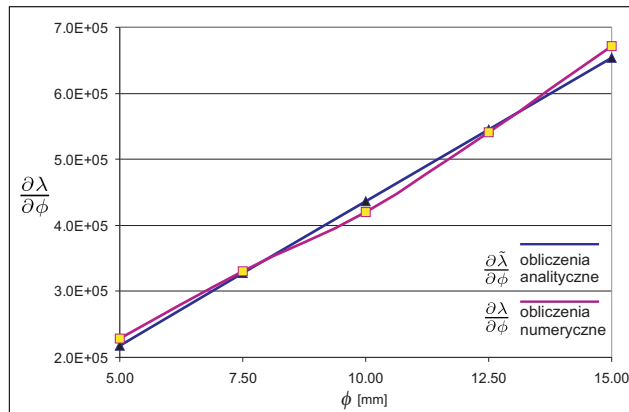
Po zróżniczkowaniu równania 6.30 otrzymujemy analityczną postać funkcji wrażliwości pierwszej wartości własnej belki na średnicę jej przekroju poprzecznego.

$$\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\phi} = \frac{24E\phi}{14.72l^4\rho} \quad (6.31)$$

Porównanie wartości własnych oraz ich wrażliwości otrzymanych na drodze obliczeń analitycznych i numerycznych zawarto w tabeli 6.1 i na rysunku 6.2.

$\phi$ [mm]	Obliczenia analityczne		Obliczenia numeryczne	
	$\tilde{\lambda}$	$\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\phi}$	$\lambda$	$\frac{\partial\lambda}{\partial\phi}$
5.0	$5.452 \cdot 10^2$	$2.181 \cdot 10^5$	$5.167 \cdot 10^2$	$2.283 \cdot 10^5$
7.5	$1.227 \cdot 10^3$	$3.271 \cdot 10^5$	$1.162 \cdot 10^3$	$3.311 \cdot 10^5$
10.0	$2.181 \cdot 10^3$	$4.362 \cdot 10^5$	$2.066 \cdot 10^3$	$4.200 \cdot 10^5$
12.5	$3.408 \cdot 10^3$	$5.452 \cdot 10^5$	$3.229 \cdot 10^3$	$5.407 \cdot 10^5$
15.0	$4.907 \cdot 10^3$	$6.543 \cdot 10^5$	$4.650 \cdot 10^3$	$6.713 \cdot 10^5$

Tabela 6.1: Porównanie wartości własnych oraz ich wrażliwości otrzymanych na drodze obliczeń analitycznych i numerycznych.



Rysunek 6.2: Porównanie wrażliwości wartości własnych otrzymanych na drodze obliczeń analitycznych i numerycznych.

Jak pokazano na rysunku 6.2 oraz w tabeli 6.1 różnica pomiędzy wrażliwościami  $\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \phi}$  otrzymaną na drodze obliczeń analitycznych oraz  $\frac{\partial \lambda}{\partial \phi}$  otrzymaną jako wynik działania algorytmu analizy wrażliwości zaimplementowanego w programie FEAP nie przekracza 5%.

Można więc uznać, że weryfikacja poprawności działania algorytmu obliczającego wrażliwość wartości własnej na parametr projektowy przebiegła pozytywnie.

### 6.5.2 Płyta usztywniona dwoma belkami

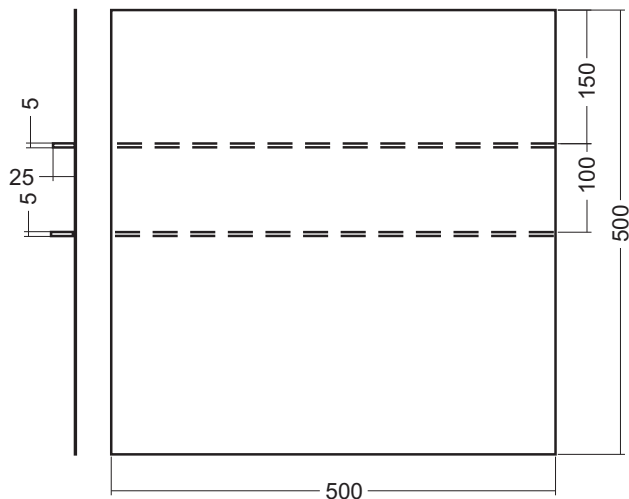
Optymalizacji została poddana płyta usztywniona dwoma belkami pokazana na rysunku 6.3. Płyta jest utwierdzona na wszystkich brzegach. Wszystkie części zostały wykonane z tego samego materiału o następujących właściwościach: moduł Younga  $E = 210 \text{ GPa}$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ , gęstość  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . Grubość płyty wynosi  $2 \text{ mm}$ . Usztywnienie stanowią dwie belki o przekroju prostokątnym. Jako zmienne projektowe zostały wybrane wysokości usztywnień  $\mathbf{h} = [h_1, h_2]$ . Przyjęto, że ze względu na maksymalne ugięcie płyty wysokość belek nie może być mniejsza niż  $15 \text{ mm}$ . Jako górne ograniczenie wysokości usztywnień przyjęto, że suma wysokości obu belek nie może być większa niż  $60 \text{ mm}$ . Szerokość usztywnień jest taka sama i wynosi  $5 \text{ mm}$ . Przyjęto, że początkowa wysokość usztywnień wynosi  $h_1 = h_2 = 25 \text{ mm}$ .

Dla niniejszego przykładu numerycznego funkcja celu może być zapisana w postaci (por. wzór 6.21)

$$c(h_1, h_2) = \max [|\lambda - \lambda_b|] = \min [-|\lambda - \lambda_b|], \quad \lambda \in \mathbf{\Lambda} \quad (6.32)$$

przy ograniczeniach

$$h_{\min} = 15 \leq h_1, h_2 \leq h_{\max} = 45$$



Rysunek 6.3: Płyta usztywniona dwoma belkami.

Częstotliwości drgań własnych [Hz]						
I	II	III	IV	V	VI	VII
178.95	247.10	324.48	349.35	375.03	494.66	514.27

Tabela 6.2: Częstotliwości drgań własnych płyty przed optymalizacją.

$$h_1 + h_2 \leq 60$$

$$|\mathbf{K}(\mathbf{h}) - \lambda(\mathbf{h})\mathbf{M}(\mathbf{h})| = 0 \quad (6.33)$$

gdzie  $\lambda$  jest wartością własną płyty najbliższą w stosunku do wartości własnej odpowiadającej wymuszeniu zewnętrznemu.

Proces optymalizacji wykonano dla dwóch różnych wartości częstotliwości wymuszenia 50 Hz oraz 200 Hz. Częstotliwości drgań własnych płyty przed optymalizacją zostały zamieszczone w tabeli 6.2. Przyjęto, że wysokość usztywnień obliczona zostanie z dokładnością do 0.1 mm.

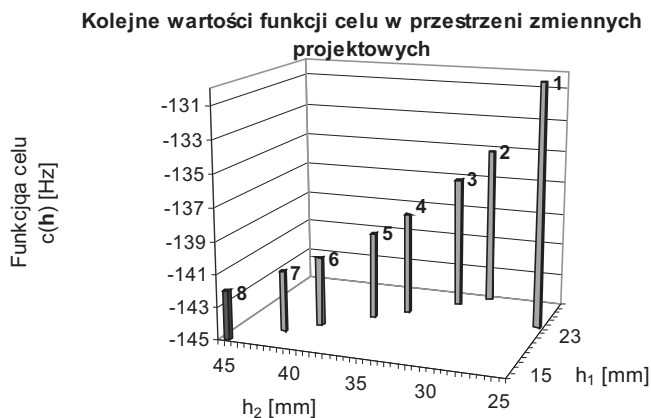
### Częstotliwość wymuszenia 50 Hz

Wartości funkcji celu w kolejnych krokach optymalizacji przedstawiono na rysunku 6.4. Liczby przy kolumnach oznaczają kolejne kroki optymalizacji. Proces optymalizacji zakończył się po ośmiu krokach.

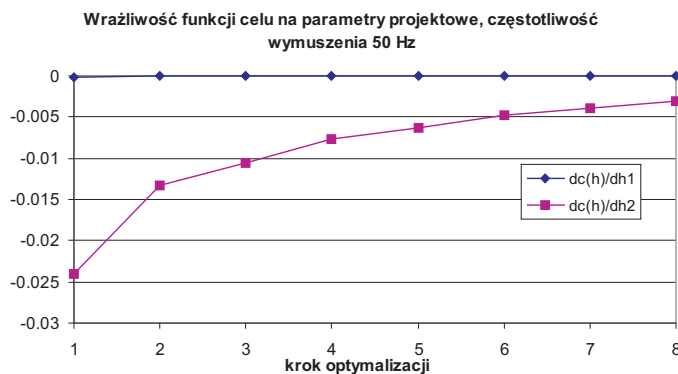
Optymalne wartości wysokości usztywnień wyniosły  $h_1 = 15$  mm oraz  $h_2 = 45$  mm. Wartość funkcji celu w optymalnym punkcie wynosi  $c(h_1, h_2) = -141.96$ . Jak pokazano na rysunku 6.4 wartość funkcji celu została obniżona o ok. 10%. Wykres wrażliwości funkcji celu na parametry projektowe zamieszczono na rysunku 6.5.

Częstotliwość wymuszenia 50 Hz plasuje się poniżej pierwszej częstotliwości

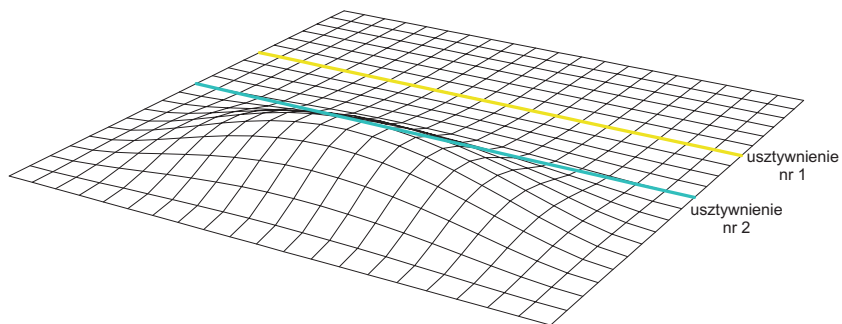




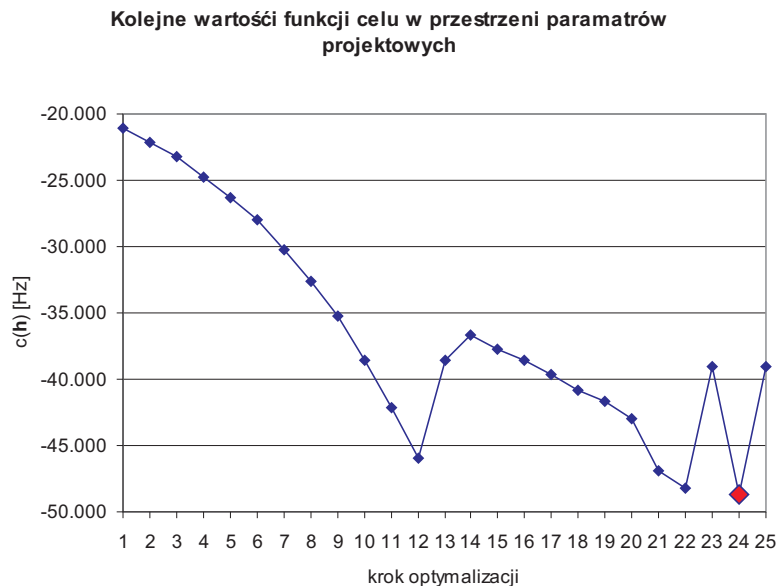
Rysunek 6.4: Kolejne wartości parametrów projektowych oraz wartości funkcji celu, częstotliwość wymuszenia  $50 \text{ Hz}$ . Liczby przy kolumnach oznaczają kolejne kroki optymalizacji.



Rysunek 6.5: Wrażliwość funkcji celu na parametry projektowe, częstotliwość wymuszenia  $50 \text{ Hz}$ .



Rysunek 6.6: Pierwsza postać drgań własnych ( $178.9 \text{ Hz}$ ) płyty usztynnionej.



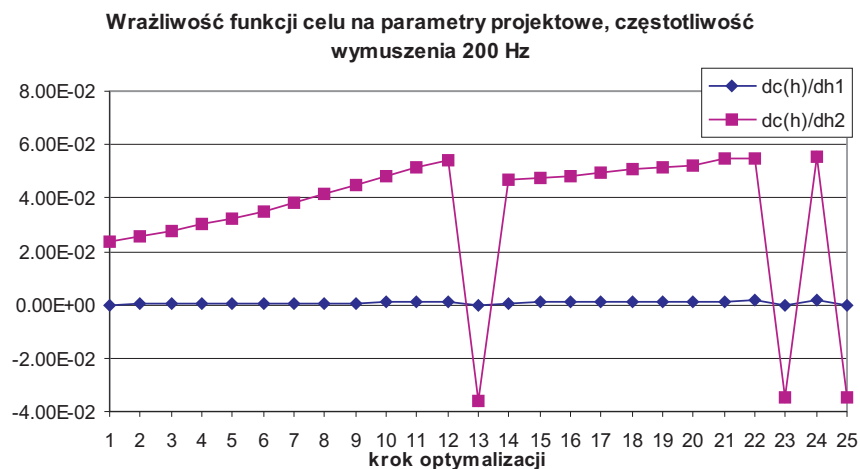
Rysunek 6.7: Kolejne wartości parametrów projektowych oraz wartości funkcji celu, częstotliwość wymuszenia  $200 \text{ Hz}$ . Liczby przy kolumnach oznaczają kolejne kroki optymalizacji.

drgań własnych płyty, por. tabela 6.2. Pierwsza postać drgań własnych pokazana jest na rysunku 6.6. Z rysunków 6.5 oraz 6.6 wynika, że usztywnienie nr 2 ma wyraźnie większy wpływ na pierwszą postać drgań płyty niż usztywnienie nr 1. Mimo że, gradient funkcji celu w kierunku  $h_1$  wskazuje na potrzebę usztywnienia belki nr 1 to ograniczenie na sumę wysokości usztywnień pozwala na osłabienie belki nr 1. Jej kosztem może zostać usztywniona belka nr 2, która ma większy wpływ (wrażliwość) na funkcję celu. Optymalizacja została zakończona poprzez osiągnięcie przez zmienne  $h_1$  oraz  $h_2$  wartości granicznych.

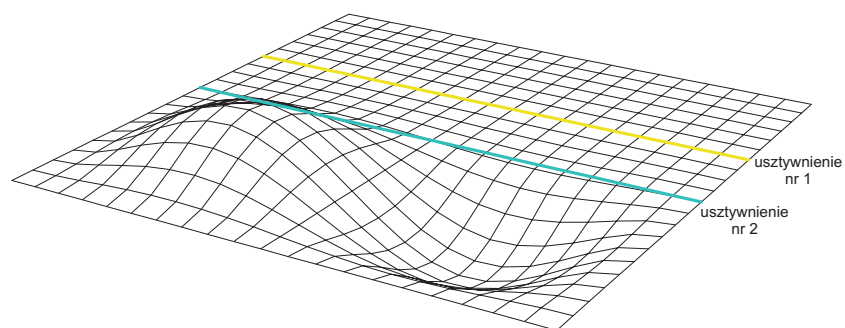
### Częstotliwość wymuszenia $200 \text{ Hz}$

Następnie dokonano optymalizacji płyty usztywnionej obciążonej siłą zmienną w czasie o częstotliwości  $200 \text{ Hz}$ . Wykres słupkowy wartości funkcji celu w kolejnych krokach optymalizacji przedstawiono na rysunku 6.7. Optymalne wartości wysokości usztywnień osiągnięto w 24 kroku optymalizacji. Spełniony został warunek wyjścia, dalsza zmiana parametrów o założony minimalny krok  $0.1 \text{ mm}$  powodowała zwiększenie wartości funkcji celu. Optymalne wartości wysokości usztywnień to  $h_1 = 24.8 \text{ mm}$  oraz  $h_2 = 16 \text{ mm}$ . Osiągnięto wartość funkcji celu wynoszącą  $c(h_1, h_2) = -48.7$ . Funkcja celu została obniżona o około 76%.

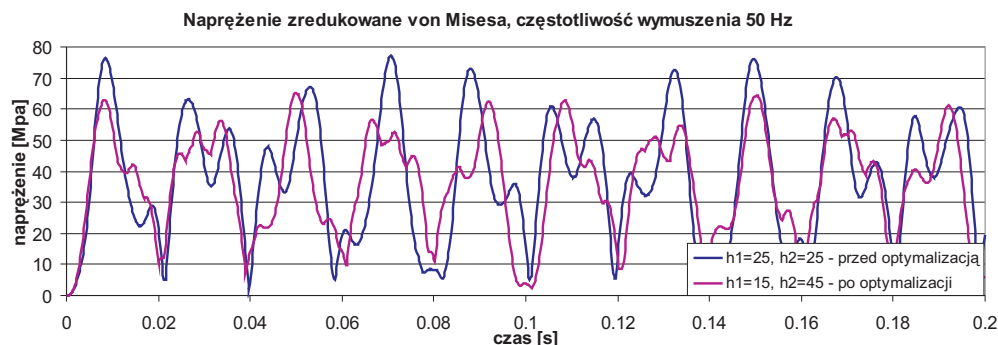
Wykres wrażliwości funkcji celu na parametry projektowe zamieszczono na rysunku 6.8. Gradient funkcji celu w przestrzeni parametrów projektowych nie jest cią-



Rysunek 6.8: Wrażliwość funkcji celu na parametry projektowe, częstotliwość wymuszenia 200  $Hz$ .



Rysunek 6.9: Druga postać drgań własnych (247.1  $Hz$ ) płyty usztywnionej.



Rysunek 6.10: Przebieg naprężenia maksymalnego w płycie usztywnionej przed i po optymalizacji. Obciążenie zmienne z częstotliwością  $50\text{ Hz}$ .

gły. Źródłem nieciągłości jest parametr  $\lambda$  określony jako najbliższa wartość własna do wartości własnej wymuszenia. Częstotliwość wymuszenia  $200\text{ Hz}$  znajduje się pomiędzy pierwszą a drugą częstotliwością drgań własnych płyty. W miarę oddalania się od pierwszej wartości własnej przybliżamy się do drugiej wartości własnej płyty. W momencie gdy druga wartość własna płyty znajduje się bliżej wartości własnej wymuszenia następuje nagle zmiana znaku i wartości wrażliwości, który widoczny jest na rysunku 6.8 w krokach 13, 23 i 25. Optymalna wysokość usztywnień spowodowała, iż częstotliwość wymuszenia  $200\text{ Hz}$  jest równo oddalona od pierwszej jak i drugiej częstotliwości drgań własnych płyty.

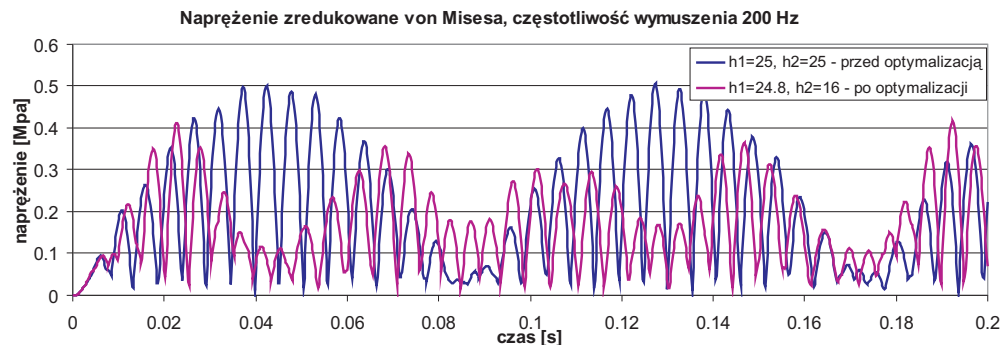
W celu określenia wpływu optymalizacji płyty na warunki jej pracy wykonano analizę naprężeń konstrukcji. Jako obciążenie zewnętrzne przyłożono do powierzchni płyty ciśnienie sinusoidalnie zmienne od wartości  $-1\text{ kN/m}^2$  do  $1\text{ kN/m}^2$  odpowiednio z częstotliwością  $50$  oraz  $200\text{ Hz}$ . Przebieg naprężenia maksymalnego w czasie  $0.2\text{ s}$  przedstawiono na wykresach 6.10 oraz 6.11.

W przypadku optymalizacji przy obciążeniu zmiennym z częstotliwością  $50\text{ Hz}$  można zauważyć spadek maksymalnej wartości naprężenia. Jednak jest on niewielki. Powodem jest relatywnie mała zmiana wartości funkcji celu o ok. 10%, por. rysunek 6.4.

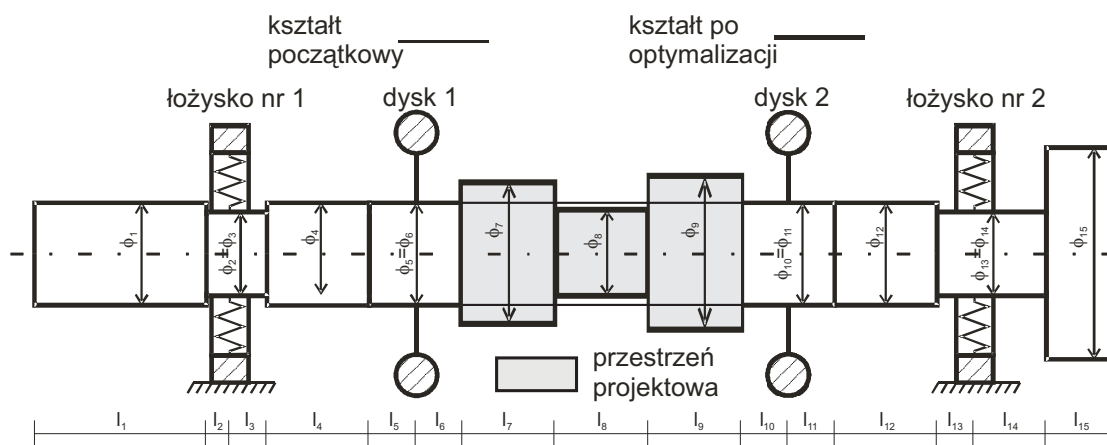
Znacznie większy skutek odniosła optymalizacja przy częstotliwości wymuszenia  $200\text{ Hz}$ , rysunek 6.11. Notowana wartość maksymalna naprężenia jest znacząco niższa po optymalizacji, mimo zmniejszenia przekrojów poprzecznych usztywnień.

### 6.5.3 Optymalizacja wału turbiny energetycznej

Na potrzeby projektu DIADYN optymalizacji poddany został wał turbogenera-tora przedstawiony na rysunku 6.12 [54]. Wał posadowiony jest na dwóch poprzecznych łożyskach ślizgowych oraz zaopatrzony jest w dwa dyski sztywne reprezentujące łopatki generatora. Wymiary poszczególnych sekcji wału kształtują się następująco:



Rysunek 6.11: Przebieg naprężenia maksymalnego w płycie usztywnionej przed i po optymalizacji. Obciążenie zmienne z częstotliwością  $200\text{ Hz}$ .

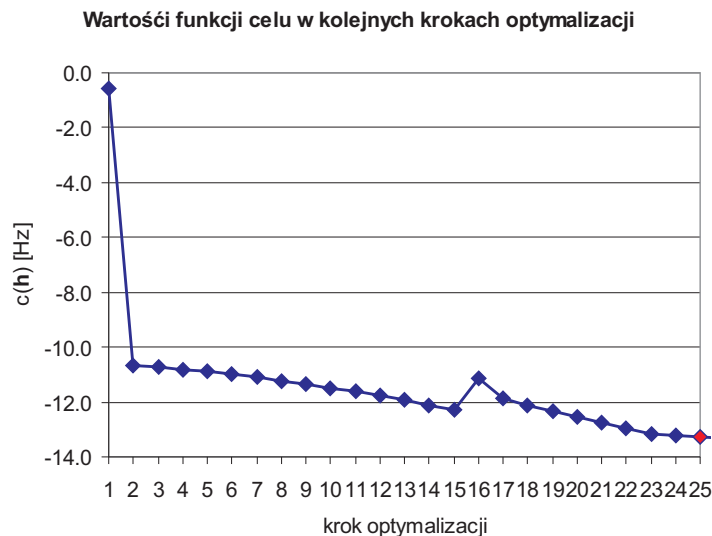


Rysunek 6.12: Początkowy oraz końcowy (po optymalizacji) kształt wału energetycznego.

średnice,  $\phi_1 = 110\text{ mm}$ ,  $\phi_2 = \phi_3 = 80\text{ mm}$ ,  $\phi_4 = 100\text{ mm}$ ,  $\phi_5 = \phi_6 = 130\text{ mm}$ ,  $\phi_7 = \phi_8 = \phi_9 = 80\text{ mm}$ ,  $\phi_{10} = \phi_{11} = 130\text{ mm}$ ,  $\phi_{12} = 100\text{ mm}$ ,  $\phi_{13} = \phi_{14} = 80\text{ mm}$ ,  $\phi_{15} = 152\text{ mm}$  oraz długości poszczególnych części wału,  $l_1 = 370\text{ mm}$ ,  $l_2 = 50\text{ mm}$ ,  $l_3 = 80\text{ mm}$ ,  $l_4 = 220\text{ mm}$ ,  $l_5 = l_6 = 100\text{ mm}$ ,  $l_7 = l_8 = l_9 = 200\text{ mm}$ ,  $l_{10} = l_{11} = 100\text{ mm}$ ,  $l_{12} = 220\text{ mm}$ ,  $l_{13} = 80\text{ mm}$ ,  $l_{14} = 155\text{ mm}$ ,  $l_{15} = 145\text{ mm}$ .

Wał wykonany jest ze stali o następujących parametrach: moduł Younga  $E = 210\text{ GPa}$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$  oraz gęstość  $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$ . Obydwa dyski są tego samego typu o masie  $m_1 = m_2 = 200\text{ kg}$  i masowym momencie bezwładności  $J_1 = J_2 = 3.176\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Również łożyska na których posadowiony jest wał są takie same, sztywności łożysk wynoszą:  $k_{xx} = 3.15 \cdot 10^7\text{ N/m}$ ,  $k_{yy} = -3.15 \cdot 10^7\text{ N/m}$ ,  $k_{xy} = 1.3 \cdot 10^8\text{ N/m}$  oraz  $k_{yx} = -1.3 \cdot 10^8\text{ N/m}$ .

Prezentowany wał rozpatrywany jest w przestrzeni trójwymiarowej. Oś symetrii wału powoduje powstawanie podwójnych, wartości własnych. Wielokrotne wartości własne wału dotyczą postaci giętych rozpatrywanych w płaszczyźnie poziomej oraz pionowej wału.



Rysunek 6.13: Wartości funkcji celu w kolejnych krokach optymalizacji wału.

Jako parametry projektowe wybrane zostały średnice środkowych sekcji wału nr 7, 8 i 9. Jako początkową ich wartość przyjęto  $\phi_7 = \phi_8 = \phi_9 = 80 \text{ mm}$ . Wprowadzono ograniczenia na minimalną i maksymalną średnicę danych sekcji wału. Przyjęto, że ze względu na statyczną sztywność konstrukcji średnice sekcji wału powinny być nie mniejsze niż  $60 \text{ mm}$  oraz ze względu na masę wału i nośność łożysk maksymalna średnica sekcji wału nie może przekroczyć  $180 \text{ mm}$ . Funkcja celu dana równaniem 6.21 może zostać zapisana jako

$$c(\phi) = \max [|\lambda - \lambda_b|] = \min [-|\lambda - \lambda_b|], \quad \lambda \in \Lambda \quad (6.34)$$

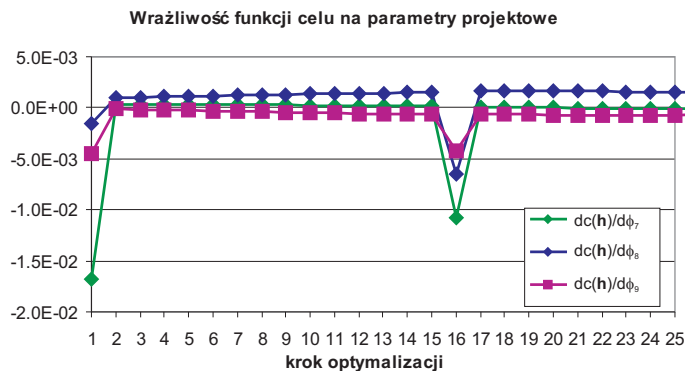
przy ograniczeniach

$$60 \leq \phi_7, \phi_8, \phi_9 \leq 180$$

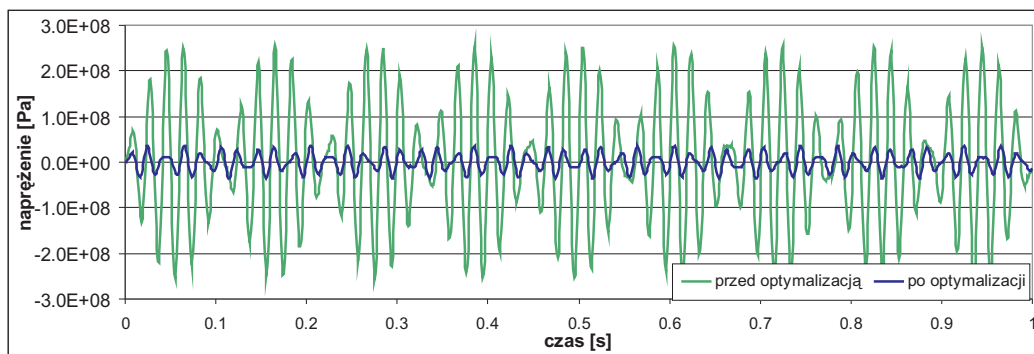
$$|\mathbf{K}(\phi) - \Lambda(\phi)\mathbf{M}(\phi)| = 0 \quad (6.35)$$

Nominalna prędkość obrotowa wału wynosi  $3000 \text{ obr/min}$  co daje w rezultacie zmienne obciążenie wału z częstotliwością  $50 \text{ Hz}$ . Jest to przypadek obciążenia generatorów energetycznych. Kolejne kroki optymalizacji zostały przedstawione na rysunku 6.13. Wrażliwości wartości własnych wału zostały obliczone za pomocą zaimplementowanego w programie FEAP algorytmu analizy wrażliwości. Wykres zmian wartości wrażliwości wartości własnej na parametry projektowe został przedstawiony na rysunku 6.14.

Proces optymalizacji został zakończony po 13 krokach. Końcowe wartości parametrów projektowych wynoszą:  $\phi_7 = 104.8 \text{ mm}$ ,  $\phi_8 = 60.0 \text{ mm}$  oraz  $\phi_9 = 108.1 \text{ mm}$ . Jak pokazano na rysunku 6.13 wartość funkcji celu zmalała o ok.  $14 \text{ Hz}$ .



Rysunek 6.14: Wrażliwości funkcji celu względem parametrów projektowych w kolejnych krokach optymalizacji.



Rysunek 6.15: Przebiegu naprężenia zredukowanego von Misesa w najbardziej wyężonym punkcie wału przed i po optymalizacji.

W celu określenia wpływu optymalizacji na pracę wału został on poddany analizie naprężeń i zmęczeniowej. W analizie naprężeń pominięta została koncentracja naprężeń powstała w skutek stopniowania wału. Założono, że wał ma wykonane odpowiednie podcięcia i fazy redukujące koncentrację naprężeń. Przyjęto prędkość obrotową wału  $3000 \text{ obr}/\text{min}$ , obciążenie stanowi masa własna wału wraz z masą dysków sztywnych. Wykresy przebiegu naprężenia zredukowanego von Misesa w najbardziej wyężonym punkcie wału przed i po optymalizacji przedstawiono na rysunku 6.15.

Wykonano ocenę trwałości zmęczeniowej wału obrotowego metodami opisanymi w rozdziale 3. Przed optymalizacją maksymalne naprężenie w wale dochodziło do  $247.2 \text{ MPa}$ . Trwałość zmęczeniowa takiego wału została oszacowana na ok. 253 godziny pracy. Z punktu widzenia ciągłej pracy generatora jest to wartość niedopuszczalna. Po optymalizacji wartość maksymalnego naprężenia w wale nie przekraczała  $36.2 \text{ MPa}$ . Granica nieskończonej trwałości zmęczeniowej nie została przekroczona. Uznaje się, że zmęczenie materiału nie będzie miało wpływu na czas bezawaryjnej pracy wału.

Wyniki badań wykorzystano w trakcie realizacji Projektu Badawczego Zama-

wianego K117/T10/2005 DIADYN "Zintegrowany dynamiczny system oceny ryzyka, diagnostyki oraz sterowania dla obiektów i procesów technicznych", koordynowanego przez Instytut Maszyn Przepływowych w Gdańsku.



# Rozdział 7

## Podsumowanie

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy było wykorzystanie nowoczesnych metod numerycznych opartych o MES w analizie i optymalizacji konstrukcji mechanicznych narażonych na obciążenia zmienne w czasie. Dokonano oceny i syntezy wielu teorii określania trwałości zmęczeniowej. Opracowano na podstawie programu metody elementów skończonych FEAP system do analizy zmęczeniowej dowolnych konstrukcji mechanicznych.

Wykorzystanie MES w analizie zmęczeniowej jest reakcją na rzeczywiste problemy przemysłu związane z szacowaniem trwałości zmęczeniowej konstrukcji mechanicznych, ponadto odpowiedzią na uwagi autorów normy EN 13445 [4] dotyczące niedostatecznego wykorzystania MES w analizie zmęczeniowej konstrukcji.

Dokonano syntezy oraz opracowano modyfikacje znanych do tej pory metod szacowania trwałości zmęczeniowej konstrukcji za pomocą mechaniki uszkodzeń. Wzbogacono program FEAP o możliwość symulacji procesu starzenia się zmęczeniowego dowolnych konstrukcji mechanicznych.

W wyniku prac autora powstało kompleksowe narzędzie do analizy zmęczeniowej konstrukcji mechanicznych. Do szybkiej oceny trwałości zmęczeniowej układów została wykorzystana koncepcja naprężeń nominalnych (lokalnych). W przypadku gdy zachodzi potrzeba szczegółowego określenia miejsc konstrukcji narażonych na pękanie zmęczeniowe lub śledzenie kierunku i prędkości propagacji zniszczenia zmęczeniowego pomocny jest, zaimplementowany przez autora w programie FEAP, algorytm analizy zmęczeniowej konstrukcji wykorzystujący mechanikę uszkodzeń. Przedstawiono przykłady analizy szczegółowej zmęczeniowej cylindra hydraulicznego.

Stochastyczny charakter trwałości zmęczeniowej konstrukcji mechanicznych powoduje, iż istotnym parametrem konstrukcji jest jej niezawodność zmęczeniowa. W pracy przedstawiono zmęczeniowe wskaźniki niezawodności konstrukcji wykorzystywane w procesie projektowania.

Innym rodzajem odpowiedzi konstrukcji na obciążenia zmienne w czasie są jej

drgania. W pracy analizowano problem drgań swobodnych układu oraz problem projektowania konstrukcji narażonych na pracę w warunkach rezonansu.

Opracowano podstawy teoretyczne analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy. Uwzględniono możliwość analizy konstrukcji posiadających wielokrotne wartości własne np. wykonanych z powtarzających się modułów.

Przedstawiono przykład wykorzystania analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy - optymalizację ze względu na oddalenie się częstotliwości drgań własnych konstrukcji od częstotliwości rezonansu. W toku badań potwierdzono, że optymalizacja ze względu na oddalenie się częstotliwości własnych konstrukcji od częstotliwości rezonansu może znacząco poprawić trwałość zmęczeniową konstrukcji.

W ramach niniejszej rozprawy autor samodzielnie opracował lub zmodyfikował oraz włączył do programu komputerowego metody elementów skończonych FEAP następujące nowe elementy:

- Opracowano kompletną metodologię analizy zmęczeniowej wg koncepcji naprężeń nominalnych (lokalnych) za pomocą MES. Wprowadzono zastępczą amplitudę naprężenia  $S_{ae}$  jako ekwiwalentny stan naprężenia w danym elemencie uwzględniający wartość naprężenia średniego. Zastępcza amplituda naprężenia  $S_{ae}$  może być bezpośrednio porównywana z typowymi doświadczalnymi wykresami zmęczeniowymi Wöhlera. W przypadku obciążeń o zmiennej amplitudzie opracowano algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej z użyciem metody grupowania cykli rainflow.
- Zmodyfikowano podstawy teoretyczne analizy zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń prezentowane przez [32,33,97,98]. Modyfikacja polegała na dostosowaniu zależności zmęczeniowych do znanych i szeroko stosowanych w praktyce inżynierskiej wykresów Goodmana. Wprowadzono także parametr określający kruchość materiału. Dzięki temu opracowano efektywne narzędzie wykorzystujące MES i mechanikę uszkodzeń w analizie zmęczeniowej konstrukcji.
- Analiza zmęczeniowa za pomocą mechaniki uszkodzeń pozwala nie tylko oszacować trwałość zmęczeniową konstrukcji lecz umożliwia również obserwację proces propagacji pęknięcia zmęczeniowego. Dzięki znajomości miejsca i kierunku propagacji pęknięcia zmęczeniowego możliwa jest bardziej efektywna optymalizacja obszarów konstrukcji szczególnie narażonych na pękanie zmęczeniowe.
- Metoda mechaniki uszkodzeń pozwala uwzględnić interakcje sprężystego oraz plastycznego zachowania się materiału z uszkodzeniem spowodowanym zmęczeniem materiału. Możliwość taka pozwala znacząco powiększyć klasę rozwiązywanych zadań.

- Na podstawie opracowanych algorytmów zbudowano program komputerowy do analizy zmęczeniowej konstrukcji mechanicznych. Pozwala on na częściowo zautomatyzowaną analizę zmęczeniową. Mimo wyeliminowania geometrycznego współczynnika koncentracji naprężeń istnieje możliwość uwzględnienia innych współczynników mających wpływ na trwałość zmęczeniową np. chropowatości powierzchni, współczynnika wielkości fragmentu konstrukcji, czy uwzględniające połączenia spawane.
- Na potrzeby analizy naprężeń i zmęczeniowej cylindrów hydraulicznych program FEAP wzbogacono o możliwość obliczania naprężenia zredukowanego  $S_{red}$  oraz o możliwość współpracy z pre- i post- procesorem GID [1].
- Opracowano podstawy teoretyczne analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji na dowolny parametr projektowy z uwzględnieniem wielokrotnych wartości własnych.
- Wykonano implementację w programie FEAP opracowanej metodologii analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji na dowolny parametr projektowy ściśle Metodą Bezpośredniego Różniczkowania oraz metodami przybliżonymi: Metodą Różnic Skończonych i metodą półanalityczną. Stworzone zostało narzędzie umożliwiające efektywną optymalizację konstrukcji drgających.
- Zaimplementowano w programie FEAP nowe rodzaje elementów skończonych: element wału obrotowego z uwzględnieniem jedynie sztywności giętych (sztywności osiowa i skrętna zostały pominięte), jednowęzłowy element zastępczy wirującego dysku sztywnego oraz dwuwęzłowy element zastępczy podatnego łożyska ślizgowego.
- Dokonano analizy złożoności obliczeniowej opracowanych algorytmów analizy zmęczeniowej z wykorzystaniem MES oraz analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji.

Na podstawie rozważań zawartych w pracy oraz doświadczeń numerycznych najsuważą się następujące wnioski:

1. Zastosowanie metody elementów skończonych w analizie zmęczeniowej pozwala na dokładne oszacowanie trwałości zmęczeniowej nawet skomplikowanych konstrukcji. Autorzy europejskiej normy EN 13445 zwracają uwagę na niedostateczne powiązanie metod oceny trwałości zmęczeniowej konstrukcji z nowoczesnymi metodami numerycznymi stosowanymi w inżynierii, np. MES [4]. Stosowanie metody elementów skończonych w analizie zmęczeniowej pozwala na wyeliminowanie bądź znaczne ograniczenie współczynnika koncentracji naprężeń. Wyeliminowana została także konieczność obliczania dyskusyjnej wartości naprężenia nominalnego.

2. Zaproponowana w pracy zastępcza amplituda naprężeń  $S_{ae}$  jest efektywnym narzędziem w analizie zmęczeniowej przy nie symetrycznym schemacie obciążenia ( $R \neq -1$ ) w sytuacji gdy dane materiałowe dostępne są tylko dla symetrycznego rodzaju cyklu ( $R = -1$ ).
3. Analiza zmęczeniowa konstrukcji za pomocą mechaniki uszkodzeń pozwala nie tylko oszacować trwałość zmęczeniową elementu lecz pozwala również obserwować kierunek oraz prędkość propagacji pęknięcia zmęczeniowego.
4. Informacja o miejscu inicjacji i kierunku propagacji pęknięcia zmęczeniowego, jaką można uzyskać wykorzystując mechanikę uszkodzeń, może zostać wykorzystana przez projektanta w celu poprawienia i optymalizacji szczegółów konstrukcyjnych lub zaprojektowania specjalnych tzw. dysypatorów naprężeń [104].
5. Jakość analizy naprężeń konstrukcji ma decydujące znaczenie przy określaniu dokładności oszacowanej trwałości zmęczeniowej konstrukcji. Powoduje to, iż metody analizy zmęczeniowej z wykorzystaniem MES są bardzo czułe na wszelkie niedostatki modelu MES i błędy powstałe w trakcie analizy naprężeń.
6. Dzięki znajomości miejsca i kierunku propagacji pęknięcia zmęczeniowego możliwa jest bardziej efektywna optymalizacja obszarów konstrukcji szczególnie narażonych na pękanie zmęczeniowe.
7. Opracowany algorytm analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy oraz jego implementacja w programie FEAP utworzyły efektywne narzędzie pomocne m.in. przy projektowaniu i optymalizacji konstrukcji narażonych na obciążenie zmienne w czasie.
8. Optymalizacja ze względu na uniknięcie rezonansu jest skutecznym sposobem na zmniejszenie niepożądanych drgań, wibracji i hałasu wywoływanych przez drgające elementy konstrukcji.
9. W niektórych przypadkach optymalizacja ze względu na oddalenie się od częstotliwości rezonansu prowadzi do zmniejszenia naprężeń w konstrukcji pomimo znacznego zmniejszenia pola przekroju elementu. Dodatkowym pozytywnym efektem optymalizacji jest zmniejszenie masy układu.

Niniejsza rozprawa powstała częściowo dzięki udziałowi autora w dwóch projektach naukowych:

- Projekcie Badawczym Zamawianym K117/T10/2005 DIADYN "Zintegrowany dynamiczny system oceny ryzyka, diagnostyki oraz sterowania dla obiektów i procesów technicznych", koordynowanego przez Instytut Maszyn Przepływowych w Gdańsku oraz

- projekcie finansowanym przez Komisję Europejską PROHIPP - New Design and Manufacturing Processes for High Pressure Fluid Power Products, którego koordynatorem była firma Pedro Roquet SA w Hiszpanii.

# Dodatek A

## Program Metody Elementów Skończonych FEAP

### Informacje ogólne

Program Metody Elementów Skończonych FEAP (Finite Element Analysis Program), autorstwa prof. R.L. Taylora [124], został zaprojektowany jako program do analizy konstrukcji mechanicznych w zagadnieniach:

- analizy statycznej konstrukcji z uwzględnieniem nieliniowego i plastycznego zachowania się materiału,
- analizy dynamicznej konstrukcji za pomocą metod całkowania "krok po kroku" oraz analizy modalnej,
- przewodnictwa ciepła i innych.

Demonstracyjna wersja programu w postaci kodu źródłowego oraz skompilowanych plików binarnych jest udostępniona w internecie pod adresem: [www.ce.berkeley.edu/~rlt/feappv](http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feappv). Szczegółowe informacje dotyczące kompilacji kodu źródłowego programu dla różnych systemów operacyjnych zawarte są w [125].

Autor, w toku badań, wzbogacił standardową wersję programu FEAP o następujące elementy:

- możliwość obliczenia naprężenia zredukowanego wg hipotezy Hubera – Misesa w punktach Gaussa lub w węzłach,
- możliwość wyświetlenia na ekranie komputera lub zapisania do pliku w formacie Encapsulated PostScript (eps) pola naprężenia zredukowanego Hubera – Misesa,

- analizę zmęczeniową konstrukcji za pomocą koncepcji naprężeń nominalnych (lokalnych),
- symulację inicjacji i propagacji pęknięcia zmęczeniowego za pomocą mechaniki uszkodzeń,
- nowy typ dwuwęzłowego elementu skończonego pozwalający na analizę wałów obrotowych z uwzględnieniem jedynie odkształceń giętych,
- nowy typ dwuwęzłowego elementu skończonego podatnego łożyska ślizgowego,
- nowy typ jednowęzłowego elementu skończonego dysku sztywnego,
- możliwość analizy wrażliwości wartości własnych konstrukcji na parametr projektowy ścisłą metodą MBR oraz metodami przybliżonymi MRS i półanalitycznymi,
- możliwość współpracy z graficznym postprocesorem GID [1].

## Struktura pliku wejściowego programu FEAP

Plik wejściowy do programu FEAP składa się z następujących części:

1. Nagłówek.
2. Definicja modelu konstrukcji.
3. Komendy dotyczące obliczeń i wizualizacji wyników.
4. Zakończenie zbioru danych.

Przy tworzeniu lub edycji istniejącego pliku wejściowego należy pamiętać o szeregu regułach:

- W nazwie komendy języka makr FEAP znaczące są jedynie 4 pierwsze znaki. Pozostałe znaki są przez program FEAP pomijane (por. wydruk A.1).
- Znakiem oddzielającym część całkowitą liczby od ułamkowej jest "." (kropka).
- W części definicji modelu konstrukcji każda komenda składa się z dwóch pól tekstowych oraz do jedenastu liczbowych, np. ELAS ISOT 10000.0 0.3, por. wydruk A.1.
- W części obliczeniowej każda komenda języka makr składa się z dwóch pól tekstowych i do trzech liczbowych, np. STRE, ,1,5 (drugie pole tekstowe jest puste oraz wykorzystane są dwa pola liczbowe).

- Kolejne pola tekstowe lub liczbowe komendy języka makr powinny być rozdzielane spacją (" ") lub przecinkiem (",");
- Każdy myślowo spójny i zamknięty zbiór danych, np. współrzędne węzłów, definicja materiału itp. powinna być oddzielona od pozostałych elementów linią pustą.

Plik wejściowy do programu FEAP rozpoczyna nagłówek. Powinien znajdować się w pierwszej linii pliku. Nagłówek składa się z komendy **FEAP** oraz opcjonalnego tytułu. Istnieje możliwość wprowadzania komentarzy. Pierwszym znakiem komentarza musi być znak "!" (wykrzyknik).

Druga linia pliku wejściowego rozpoczyna definicję modelu konstrukcji. Pierwszą informacją, podaną w drugiej linii, jest w kolejności: ilość węzłów, elementów, ilość definicji materiałów, wymiar przestrzeni (2D, 3D), maksymalna ilość węzłów w elemencie oraz ilość stopni swobody w węźle.

Następnie należy określić współrzędne węzłów, tablicę koneksji elementów, definicje materiałów oraz warunki brzegowe. Kolejność wprowadzania danych jest dowolna. Zaleca się jednak, aby współrzędne węzłów oraz tablica koneksji elementów były przed definicją warunków brzegowych. Ma to znaczenie w przypadku braku jednoznacznego określenia liczby węzłów i elementów (np. wykorzystanie polecenia **BLOCK** [124]).

Definicję modelu konstrukcji kończy komenda **END**.

Następnie należy określić sposób i rodzaj obliczeń (statyczne, dynamiczne, analiza modalna itp.). Kolejne czynności wykonuje się poprzez wydanie odpowiednich komend, np. utwórz macierz sztywności, rozwiąż układ równań itp.

Sposób i rodzaj obliczeń może zostać określony dwojako: w sposób interaktywny (komenda **INTERactive**) poprzez wpisywanie odpowiednich poleceń podczas wykonywania się programu oraz poprzez utworzenie zbioru komend poleceniem **BATCH**. W przykładzie zaprezentowanym na wydruku A.1 polecenia dotyczące obliczeń zostały ujęte w zbiór. Zbiór komend zakończony jest poleceniem **END**.

Koniec zbioru danych wejściowych do programu FEAP oznaczony jest poleceniem **STOP**. Wszelkie informacje znajdujące się za komendą **STOP** nie zostaną odczytane przez program.

Szczegółowe informacje dotyczące struktury pliku wejściowego FEAP oraz komend i składni języka makr FEAP dostępne są w [124].



Wydruk A.1: Przykładowy plik wejściowy do programu FEAP. Analiza statyczna prostej konstrukcji prętowej.

```
FEAP * * Analiza statyczna kratownicy !nagłówek
4 5 1 2 2 2

COORdinates !współrzędne węzłów
1 0 0.0 0.0
2 0 10.0 0.0
3 0 20.0 0.0
4 0 10.0 10.0

ELEMents !tablica koneksji elementów
1 1 1 1 2
2 1 1 2 3
3 1 1 1 4
4 1 1 4 3
5 1 1 2 4

MATERial 1 !definicja materiału
  TRUSs
    ELAStic ISOTropic 10000.0
    CROSs SECTIon 0.25

BOUNDary restraints !podparcie
1 0 1 1
3 0 0 1

FORCe !obciążenie
4 0 10. 0.

END !koniec definicji modelu

BATCh !komendy dot. obliczeń
TANGent,,1
DISPlacement all
STREss all
END

STOP !zakończenie pliku
```

## Nowe komendy języka makr programu FEAP

W toku badań autor wprowadził szereg nowych komend języka makr programu FEAP stosowanych do uruchomienia nowych procedur wprowadzonych do programu. Opis komend został podzielony na dwie części: dotyczącą definicji modelu konstrukcji oraz prowadzenia obliczeń.

### Definicja modelu konstrukcji

#### Komenda NOTX

Pozwala uruchomić nową procedurę opracowaną w ramach niniejszej rozprawy na potrzeby projektu DIADYN zawierającą dwuwęzłowy element skończony w przestrzeni 3D przystosowany do analizy wałów obrotowych. Każdy węzeł posiada 4 stopnie swobody: 2 translacyjne oraz 2 obrotowe. Pomińnięte zostały wzdłużne oraz skrętne stopnie swobody. Element NOTX można łączyć z innymi elementami posiadającymi 6 stopni swobody. Sposób definiowania parametrów elementu podobny jak w przypadku elementu typu FRAME szczegółowo opisany w [124].

Uwaga! Przy określaniu maksymalnej liczby stopni swobody dla węzła (druga linia pliku wejściowego) należy podać liczbę 6.

Przykładowa definicja elementu NOTX:

#### PARAMeters

```
pi = 3.1415926535897932384626433832795
d = 0.1
```

#### MATERial,1

##### NOTX

```
ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
DENSity MASS 7.85e3
CROSS SECTION pi*d*d/4 pi*d*d*d*d/64 pi*d*d*d*d/64
REFERence VECTor 1 0 0
```

#### Komenda BRNG

Uruchamia procedurę wprowadzającą do programu FEAP dwuwęzłowy element skończony w przestrzeni 3D reprezentujący nieważkie poprzeczne łożysko ślizgowe wału obrotowego. W definicji parametrów elementu należy podać sztywności pionową  $k_{yy}$ , poziomą  $k_{xx}$  oraz ewentualnie skośne  $k_{xy}$  i  $k_{yx}$ . Przy definiowaniu parametrów łożyska należy podać komendą REFERENCE VECTOR kierunek osi wału. Jest to istotne z uwagi na brak możliwości przenoszenia sił wzdłużnych wału przez łożysko poprzeczne.

Przykładowa definicja poprzecznego łożyska ślizgowego:

```
METErIal,2
  BRNG
    STIFfness KXX 3.15e8
    STIFfness KYY -3.15e8
    STIFfness KXY 1.30e3
    STIFfness KYX -1.30e3
    REFERENCE VECTOR 1 0 0
```

### Komenda DISK

Wprowadza jednowęzłowy element skończony reprezentujący wirujący dysk sztywny (np. łopatki turbiny). W definicji elementu należy podać wymiary i gęstość pierścieniowego dysku sztywnego lub masę i obrotowy moment bezwładności.

Przykładowa definicja dysku sztywnego:

```
MATErIal,3
  DISK
    DIAMeters 0.3 0 0.1 !średnica zewnętrzna, wewnętrzna oraz szerokość
    DENSity MASS 3.7e3
```

lub

```
MATErIal,4
  DISK
    MOMD 5.67
    MASS 200
```

### Komenda FATIgue, type, d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7

Komenda **FATIgue** służy do określania parametrów zmęczeniowych trójwymiarowych elementów przestrzennych typu **SOLID**. Zasady definiowania krzywych zmęczeniowych zostały zaprezentowane w rozdziałach 3.2.1 oraz 3.3.3. Krzywa zmęczeniowa może zostać scharakteryzowana trzema sposobami:

- Krzywa zmęczeniowa jako prosta przechodząca przez dwa punkty charakterystyczne  $(N_i, S_i)$  oraz  $(N_e, S_e)$ . Podanie wartości  $N_i$  oraz  $N_e$  jest opcjonalne. W przypadku gdy nie jest podana jawnie ich wartość wynoszą:  $N_1 = 1e3$  oraz  $N_e = 2e6$ . Metoda została opisana w rozdziale 3.2.1.

Przykład definicji trójwymiarowego przestrzennego elementu skończonego:

```

MATERial,5
  SOLId
    ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
    FATIgue 2POInts 486e6 260e6
    FATIgue NCYC 1e3 2e6

```

lub

```

MATERial,6
  SOLId
    ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
    FATIgue 2POInts 486e6 260e6

```

- Krzywa zmęczeniowa jako prosta o zadanym nachyleniu  $m$  i granicy zmęczeniowej ( $N_e, S_e$ ). Metoda została opisana w rozdziale 3.2.1.

Przykład definicji trójwymiarowego przestrzennego elementu skończonego:

```

MATERial,7
  SOLId
    ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
    FATIgue SLOPe 5.2 260e6 2e6

```

- Krzywa zmęczeniowa jako funkcja ciągła obliczana za pomocą wzoru 3.54. Niżej sposób określania parametrów zmęczeniowych stosowany jest w analizie zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń. Metoda została opisana w rozdziale 3.3.3.

Przykład definicji trójwymiarowego przestrzennego elementu skończonego:

```

MATERial,8
  SOLId
    ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
    FATIgue FUNction 550.0e6 260.0e6 0.00075 4.3 1.7 0.00001 2
    !opis parametrów Su Se alfa beta gamma delta m

```

## Komendy dotyczące prowadzonych obliczeń i prezentacji wyników

### Komenda GID

Komenda GID służy do utworzenia plików z wynikami obliczeń kompatybilnych z postprocesorem GID [1]. W realizacji tworzenia plików została wykorzystana biblioteka gidpost dostarczona przez CIMNE – producenta programu GID.

Proces tworzenia plików z wynikami obliczeń dla postprocesora GID przechodzi trzyetapowo:

- Polecenie GID tworzy plik \$nazwa\$.flavia.msh zawierający siatkę elementów skończonych konstrukcji oraz otwiera plik \$nazwa\$.flavia.res z wynikami obliczeń. \$nazwa\$ jest nazwą pliku wejściowego FEAP.
- Kolejną czynnością jest zapisanie wybranych wyników obliczeń w pliku \$nazwa\$.flavia.res np. DISPlacement,GID. W trakcie realizacji celów rozprawy opracowano następujące komendy zapisywania wyników obliczeń w pliku \$nazwa\$.flavia.res:

STREss,GID – zapisanie składowych tensora naprężenia,

STREss,VONMises – obliczenie naprężeń zredukowanych von Misesa w punktach Gaussa oraz, jeśli plik został utworzony, zapisanie pól naprężeń w pliku \$nazwa\$.flavia.res,

STREss,REDUced – obliczenie naprężeń zredukowanych von Misesa w węzłach oraz zapisanie pól naprężeń w pliku postprocesora GID,

DISPlacement,GID – zapisanie uogólnionych przemieszczeń węzłowych,

FATIgue,,R – zapisanie trwałości zmęczeniowych elementów skończonych,  $R$  jest współczynnikiem asymetrii cyklu,

FATIgue,DAMAge – zapisanie trwałości zmęczeniowych elementów skończonych obliczonych za pomocą mechaniki uszkodzeń,

FREDUced – zapisanie wartości uszkodzenia izotropowego dla elementów skończonych.

- Kolejne polecenie GID zamyka plik z wynikami obliczeń \$nazwa\$.flavia.res.

Dotychczas opracowano tworzenie plików dla postprocesora GID dla trójwymiarowych elementów przestrzennych cztero- oraz ośmiowęzłowych.

### Komenda `FATigue`, typ, $R$

Komenda `FATigue` służy do obliczania trwałości zmęczeniowej konstrukcji w każdym elemencie skończonym (punkcie Gaussa). Opracowane zostały dwa typy obliczenia trwałości zmęczeniowej:

- Za pomocą koncepcji naprężeń nominalnych (lokalnych) szerzej opisanej w rozdziale 3.2. Krzywa zmęczeniowa traktowana jest jako liniowa aproksymacja wyników eksperymentów w skali log–log (rozdział 3.2.1). Obliczenia trwałości zmęczeniowej dla danej wartości współczynnika asymetrii cyklu  $R$  realizuje się poprzez wydanie poleceń

```
TANGent, , 1
FATigue, , -1
```

- W przypadku analizy zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń aktualną (z uwzględnieniem już istniejących uszkodzeń zmęczeniowych) trwałość zmęczeniową oblicza się wydając polecenie

```
FATigue, DAMAGE
```

Sposób analizy zmęczeniowej za pomocą mechaniki uszkodzeń został podany przy opisie komendy `FREDuced`.

### Komenda `FREDuced`, $N$

Komenda `FREDuced` służy do obliczania przyrostu parametru uszkodzenia zmęczeniowego w analizie zmęczeniowej metodą mechaniki uszkodzeń.  $N$  jest opcjonalnym parametrem pozwalającym na uwzględnienie  $N$ -krotnej historii obciążenia. W przypadku, gdy parametr  $N$  nie jest podany założono, że  $N = 1$ .

Przykład analizy zmęczeniowej z uwzględnieniem sił bezwładności za pomocą mechaniki uszkodzeń wraz z zapisaniem wyników analizy w pliku postprocesora `GID`:

```
GID
TANGent, , 1
STREss, VONMises
FATigue, DAMAGE
DT, , 0.25
PROPortional, , 1
LOOP, , 1000
```

```

TIME
LOOP,,10
  TANGent,,1
NEXT
STREss,GID
STREss,VONMises
DISPlacement,GID
FREduced,DYNAmic,1e2
NEXT
GID

```

### Komenda DIFFerentiate, typ, wartwl, mat, dh

Komenda `DIFFerentiate` oblicza wartość wrażliwości wybranej wartości własnej na parametr projektowy. Parametry komendy:

- `typ` – wrażliwość wartości własnych konstrukcji może być obliczana trzema sposobami: metodą różnic skończonych (FDM), metodą półanalityczną (SEMI) oraz metodą ścisłą (DDM),
- `warwl` – określa dla której wartości własnej obliczana będzie wrażliwość na parametr projektowy,
- `mat` – określa dla których elementów skończonych (należących do danej grupy charakteryzowanej numerem materiału) obliczana będzie wrażliwość wartości własnych na parametr projektowy. Wrażliwość pozostałych elementów wynosi 0.
- `dh` – wartość perturbacji parametru projektowego.

Obliczanie wrażliwości konstrukcji na wybrany parametr projektowy metodą różnic skończonych oraz metodą półanalityczną przebiega dwuetapowo.

W przypadku metody różnic skończonych należy rozwiązać problem własny konstrukcji oraz dla konstrukcji z perturbacją parametru projektowego. Przykład analizy wrażliwości wału obrotowego na jego średnicę (pominięto definicje węzłów oraz elementów wału):

```

PARAMeters
pi = 3.1415926535897932384626433832795
d  = 0.1
dh = 1e-7
f  = d + dh

```

```

MATERial,1

```

```

NOTX
  ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
  DENSty MASS 7.85e3
  CROSS SECTIon pi*d*d/4 pi*d*d*d*d/64 pi*d*d*d*d/64
  REFERENCE VECTor 1 0 0

END

BATCh
TANGent
MASS
SUBSpace,,100
DIFFerentiate,FDM,50,1
!obliczenie wrażliwości dla wartości własnej najbliższej 50 Hz
!materiał nr 1
MESH !perturbacja parametru projektowego
TANGent
MASS
subs,,100
DIFFerentiate,FDM,50,1,dh

END
MATERial,1
  NOTX
    ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
    DENSty MASS 7.85e3
    CROSS SECTIon pi*f*f/4 pi*f*f*f*f/64 pi*f*f*f*f/64
    REFERENCE VECTor 1 0 0

END

```

Obliczając wrażliwość wartości własnych konstrukcji metodą półanalityczną należy rozwiązać bazowy problem własny oraz wyznaczyć macierze sztywności i mas dla spertubowanych wartości parametru projektowego.

Przykład analizy wrażliwości metodą półanalityczną wału obrotowego na jego średnicę:

```

PARAMeters
pi = 3.1415926535897932384626433832795
d = 0.1
dh = 1e-7
f = d + dh

```



```

MATERial,1
  NOTX
    ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
    DENSity MASS 7.85e3
    CROSs SECTion pi*d*d/4 pi*d*d*d*d/64 pi*d*d*d*d/64
    REFERENCE VECTor 1 0 0

END

BATCh
TANGent
MASS
SUBSpace,,100
DIFFerentiate,SEMI,50,1
!obliczenie wrażliwości dla wartości własnej najbliższej 50 Hz
!materiał nr 1
MESH !perturbacja parametru projektowego
TANGent
MASS
DIFFerentiate,SEMI,50,1,dh

END
MATERial,1
  NOTX
    ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
    DENSity MASS 7.85e3
    CROSs SECTion pi*f*f/4 pi*f*f*f*f/64 pi*f*f*f*f/64
    REFERENCE VECTor 1 0 0

END

```

Analiza wrażliwości Metodą Bezpośredniego Różniczkowania (DDM) wymaga jedynie jednokrotnego wyznaczenia macierzy sztywności i mas oraz rozwiązania problemu własnego. Wartości wrażliwości wybranych elementów skończonych na parametr projektowy otrzymujemy w jednym kroku obliczeń.

Przykład analizy wrażliwości wału obrotowego na jego średnicę metodą ścisłą:

```

PARAMeters
pi = 3.1415926535897932384626433832795
d = 0.1

```

---

```
MATERial,1
  NOTX
    ELAStic ISOTropic 2.1e11 0.3
    DENsity MASS 7.85e3
    CROsS SECTion pi*d*d/4 pi*d*d*d*d/64 pi*d*d*d*d/64
    REFERENCE VECTor 1 0 0

END

BATCh
TANGent
MASS
SUBSpace,,100
DIFFerentiate,DDM,50,1
!obliczenie wrażliwości dla wartości własnej najbliższej 50 Hz
!material nr 1
END
```

# Spis ważniejszych oznaczeń

$a$	długość szczeliny
$\mathbf{a}$	wektor modyfikujący wektory własne
$c$	skalarna miara tłumienia
$c(\mathbf{h})$	funkcja celu
$d$	parametr uszkodzenia; zniszczenie materiału spowodowane jednym blokiem obciążenia
$el$	ilość elementów skończonych
$f_b$	częstotliwość wymuszenia
$f_r$	skalarna miara granicy początku propagacji pęknięcia zmęczeniowego
$f_{red}$	funkcja redukcji wytrzymałości materiału
$f_x$	funkcja łącznej gęstości prawdopodobieństwa
$g(\mathbf{x})$	kryterium awarii
$h$	względny współczynnik tłumienia; parametr projektowy
$\mathbf{h}$	wektor parametrów projektowych
$it$	ilość iteracji
$k$	skalarna miara sztywności; sztywność łożyska ślizgowego
$l$	długość
$m$	wykładnik w prawie Paris'a; miara kruchości materiału; skalarna miara masy
$np$	ilość węzłów problemu MES
$nst$	ilość stopni swobody w węźle
$ob$	ilość danych dyskretnych dotyczących obciążenia
$p$	ilość wyznaczanych par własnych
$\mathbf{p}$	wektor amplitud wymuszenia
$\mathbf{q}$	znormalizowany wektor postaci własnych
$t$	czas; czas trwania pojedynczego bloku obciążenia
$\mathbf{t}$	wektor tymczasowy (pomocniczy)
$\mathbf{u}$	wektor przemieszczeń uogólnionych
$\mathbf{x}$	wektor parametrów; macierz mnożników; macierz wektorów własnych zredukowanego problemu własnego
$A$	złożoność obliczeniowa problemu
$A_{mes}$	złożoność obliczeniowa podstawowej analizy MES

$A_{ukl}$	złożoność obliczeniowa rozwiązania układu równań liniowych
$A_{nlin}$	złożoność obliczeniowa nieliniowej analizy konstrukcji
$A_{akw}$	złożoność obliczeniowa rejestracji historii naprężenia
$A_{par\_uszk}$	złożoność obliczeniowa wprowadzenia parametru uszkodzenia
$A_{szt}$	złożoność obliczeniowa tworzenia macierzy: sztywności, mas
$A_{wl}$	złożoność obliczeniowa rozwiązania problemu własnego
$A_{poch}$	złożoność obliczeniowa tworzenia macierzy pochodnych sztywności oraz mas
$A_{red}$	złożoność obliczeniowa redukcji rozmiaru problemu obliczania wrażliwości wartości własnych
$A_{wr}$	złożoność obliczeniowa wyznaczania wrażliwości pojedynczej wartości własnej na parametr projektowy
<b>A</b>	wektor zespolonych amplitud drgań; macierz modyfikująca macierz wektorów własnych
<b>BLK</b>	trwałość zmęczeniowa jako ilość powtórzeń bloku obciążenia
<b>C</b>	macierz amplitud powstała po analizie sygnału zmiennopłaszczyznowego; macierz tłumienia
$C_{ijkl}^0$	tensor konstytutywny bez uwzględnienia uszkodzenia materiału
$C_{ijkl}^d$	tensor konstytutywny z uwzględnieniem uszkodzenia materiału
$D$	krytyczna wartość parametru uszkodzenia
$E$	moduł Young'a
<b>F</b>	wektor obciążeń zewnętrznych
$F(t)$	obciążenie konstrukcji w funkcji czasu
<b>FOS</b>	wskaźnik wytrzymałości materiału
<b>FRF</b>	wskaźnik rezerwy zmęczeniowej
$FRF_a$	wskaźnik rezerwy zmęczeniowej przy stałym naprężeniu uśrednionym
$FRF_m$	wskaźnik rezerwy zmęczeniowej przy stałej amplitudzie
$I$	moment bezwładności
$J$	masowy moment bezwładności
<b>K</b>	macierz sztywności
<b>K*</b>	zredukowana macierz sztywności
$K_f$	współczynnik intensywności naprężeń; współczynnik koncentracji naprężeń
<b>L</b>	macierz poddiagonalna z jedynkami na diagonalu
$N$	ilość cykli
$N_{cyc}$	ilość cykli do zniszczenia
$N_e$	zakładana ilość cykli dla granicy zmęczenia
$N_{proj}$	projektowa trwałość zmęczeniowa
$N_{BLK}$	ilość cykli w bloku
<b>M</b>	macierz mas
<b>M*</b>	zredukowana macierz mas

$\mathbf{P}(t)$	wymuszenie harmoniczne o danej częstotliwości
$P(\mathbf{x})$	prawdopodobieństwo awarii
$\mathbf{Q}$	macierz wektorów własnych
$R$	współczynnik asymetrii cyklu
$\mathbf{R}$	tymczasowa, przybliżona macierz diagonalna wartości własnych
$R_e$	granica plastyczności dla czystego ściskania – rozciągania
$R_{es}$	granica plastyczności dla czystego ścinania
$S_a$	amplituda naprężenia
$S_{an}$	amplituda naprężenia normalnego
$S_{ae}$	zastępcza amplituda naprężenie dla $R \neq -1$
$S_{ekspl}$	naprężenie eksploatacyjne
$S_{as}$	amplituda naprężeń stycznych
$S_{ared}$	zredukowana amplituda naprężenia
$S_e$	granica zmęczenia dla $R = -1$
$S_{es}$	granica zmęczenia dla naprężeń stycznych
$S_n$	naprężenie normalne
$S_{nom}$	naprężenie nominalne (nie uwzględniające spiętrzenia naprężeń)
$S_m$	naprężenie średnie
$S_{mred}$	zredukowane naprężenie średnie
$S_{max}$	naprężenie maksymalne
$S_{min}$	naprężenie minimalne
$S_{real}$	naprężenie rzeczywiste w danym punkcie konstrukcji, np. w dnie karbu
$S_{red}$	naprężenie zredukowane
$S_s$	naprężenie styczne
$S_{th}$	granica zmęczenia dla $R \neq -1$
$S_u$	wytrzymałość materiału
$S_{ud}$	wytrzymałość uszkodzonego materiału
$S_y$	granica plastyczności
$S'_f$	niszcząca amplituda naprężenia
$T$	przewidywany czas pracy konstrukcji
$\mathbf{T}$	macierz wektorów tymczasowych
$\mathbf{U}$	macierz trójkatna górna
$\mathbf{X}$	tymczasowa prostokątna macierz wybranej liczby wektorów własnych
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	wewnętrzne parametry materiałowe
$\varepsilon_{ij}$	tensor odkształcenia
$\varepsilon_{ij}^e$	część sprężysta tensora odkształcenia
$\varepsilon_{ij}^p$	część plastyczna tensora odkształcenia
$\phi$	faza drgań; średnica
$\lambda$	współczynnik wpływu naprężeń normalnych; wartość własna
$\lambda_b$	wartość własna wymuszenia

---

$\nu$	współczynnik Poisson'a
$\sigma_{ij}$	składowa tensora naprężenia
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	naprężenia główne
$\rho$	gęstość materiału
$\omega$	częstość drgań własnych nietłumionych
$\Phi_f$	energia odkształcenia postaciowego
$\Lambda$	diagonalna macierz wartości własnych
$\Lambda^*$	zredukowana macierz wartości własnych
$\Psi$	energia swobodna Helmholtza
$\Psi^e$	część sprężysta energii swobodnej Helmholtza
$\Psi^p$	część plastyczna energii swobodnej Helmholtza
$\Omega$	częstość wymuszenia
$\Omega_{rez}$	rezonansowa częstość wymuszenia

# Bibliografia

- [1] *GID – The personal pre- and postprocessor, User Manual*. [www.gid.cimne.upc.es](http://www.gid.cimne.upc.es), CIMNE.
- [2] Matlab, Wave Analysis Toolbox. *Matlab Documentation*, 2005.
- [3] Standard practices for cycle counting in fatigue analysis. *ASTM International*, 2005.
- [4] European Norm EN 13445. *Unifired pressure vessels, chapter 18: Detailed assessment of fatigue life*. <http://www.unm.fr/en/general/en13445/default.htm>.
- [5] R. Alam oraz S. Bora. On sensitivity of eigenvalues and eigendecompositions of matrices. *Linear Algebra and its Application*, 396:273–301, 2005.
- [6] R.J. Anthes. Modified rainflow counting keeping the load sequence. *Int. J. Fatigue*, 19(7):529–535, 1997.
- [7] J.S. Arora. *Introduction to optimum design*. McGraw Hill Book Company, 1988.
- [8] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [9] K.-J. Bathe oraz E.L. Wilson. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [10] T. Bednarek. Generation of hydraulic cylinder fem model. Part 1 and 2. Raport, PROHIP/19/080-001, PROHIP/19/081-001, 2007.
- [11] T. Bednarek. Guidelines of finite element modeling of critical points in hydraulic cylinders. Raport, PROHIP/19/054-001, 2007.
- [12] T. Bednarek, I. Marczawska, A. Marczewski, W. Sosnowski. Wysokocyklowa analiza zmęczenia cylindrów hydraulicznych z uwzględnieniem wpływu naprężenia średniego. *Informatyka w Technologii Metali, KomPlasTech*, Szczawnica, 2006.

- [13] T. Bednarek, I. Marczevska, A. Marczewski, W. Sosnowski, H. Jakubczak, J. Rojek. The equivalent amplitude stress as a solution of mean stress effect problem in fatigue analysis. *Physico-Mathematical Modeling and Informational Technologies*, 2, 2005.
- [14] T. Bednarek, I. Marczevska, A. Marczewski, W. Sosnowski, J. Rojek, H. Jakubczak. Fatigue analysis concept, fatigue calculations and oil ports design recommendations. Raport, PROHIP/19/008-003, 2005.
- [15] T. Bednarek oraz W. Sosnowski. Frequency optimization based on semi-analytical and "exact" numerical differentiation methods. *Image Processing Communications*, 11(1):7–17, 2006.
- [16] T. Bednarek oraz W. Sosnowski. Frequency optimization based on "exact" sensitivity and fatigue life estimation. *Computer Methods in Materials Science*, 7(1), 2007.
- [17] T. Bednarek oraz W. Sosnowski. Multiple eigenvalue optimization problem for linear discrete systems using the ddm method. *17th International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Spała, 2007.
- [18] T. Bednarek oraz W. Sosnowski. Sprężysto-plastyczny model materiału z uszkodzeniem w analizie zmęczeniowej metali. *Informatyka w Technologii Metali, KomPlasTech*, Korbielów, 2008.
- [19] T. Bednarek, W. Sosnowski, J. Rojek, H. Jakubczak. Validation of hydraulic cylinders stress analysis using finite element method. Raport, PROHIP/19/053-001, 2006.
- [20] Z. Brzoska. *Wytrzymałość materiałów (Strength of materials)*. PWN, Warsaw, 1983.
- [21] BS5400. *Steel, Concrete and Composite Bridges: Part 10: Code of Practice for Fatigue*. London, 1980.
- [22] BS7608. *Code of Practice for Fatigue Design and Assessment of Steel Structures*. London, 1993.
- [23] M. Carbonell. Update of the crack analysis in fatigue tests for the cylinders. Raport, PROHIP-01-133-001, 2007.
- [24] A. Carpinteri, redaktor. *Handbook of fatigue crack propagation in metallic structures vol. I and II*. Elsevier Science, 1994.
- [25] A. Cauvin oraz R.B. Testa. Damage mechanics: basic variables in continuum theories. *Int J Solids Struct*, 36:747–761, 1999.



- [26] A. Cauvin oraz R.B. Testa. Elastoplastic material with isotropic damage. *Int J Solids Struct*, 36:727–746, 1999.
- [27] C. Cempel. *Wibroakustyka stosowana*. PWN, 1978.
- [28] M. Cervera, C. Agelet de Saracibar, M. Chiumenti. *COMET Coupled Mechanical and Thermal Analysis, Data input manual*. International Center for Numerical Method in Engineering (CIMNE), Barcelona, 2002.
- [29] J. L. Chaboche. Une loi differentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non lineaire. *Revue Francaise de Mecanique*, 50-51:0–0, 1974.
- [30] J. L. Chaboche. Continuum damage mechanics — a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nucl Eng Des*, 64:233–247, 1981.
- [31] J. L. Chaboche. Continuum damage mechanics and its application to structural lifetime prediction. *Rech. Aerosp*, 4:37–54, 1987.
- [32] J. L. Chaboche. Continuum damage mechanics: Part i – general concepts. *J. Appl. Mech.*, 55:59–64, 1988.
- [33] J. L. Chaboche. Continuum damage mechanics: Part ii – damage growth, crack initiation and crack growth. *J. Appl. Mech.*, 55:65–72, 1988.
- [34] K.M. Choi, S.W. CHo, M.G. Ko, I.W. Lee. Higher order eigensensitivity analysis of dumped systems with repeated eigenvalues. *Comput. Struct.*, 82:63–69, 2004.
- [35] L. F. Coffin. A study of cyclic thermal stresses in ductile metal. *ASME Transactions*, 76:931–950, 1954.
- [36] M.B. Cortie oraz G.G. Garrett. On the correlation between the C and m in the Paris equation for fatigue crack propagation. *Engng Fract Mech*, 30:49–58, 1988.
- [37] W. Cui. A state-of-the-art review on fatigue life prediction methods for metal structures. *J. Mar. Sci. Technol.*, 7:43–56, 2002.
- [38] R.L. Dailey. Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues. *AIAA J.*, 27(4):486–491, 1989.
- [39] J.D. Downing oraz O.F. Socie. Simple rainflow counting algorithms. *Int. J. Fatigue*, 4:31–40, 1994.
- [40] ENV1993-1-1. *Eurocode3. Design of Steel Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. European Committee for Standarization, 1992.
- [41] N.E. Frost, K.J. Marsh, L.P. Pook. *Metal fatigue*. Dover publications, INC, Mineola, New York, 1999.

- [42] H.O. Fuchs oraz R.I. Stephens. *Metal Fatigue in Engineering*. New York: John Wiley, 1980.
- [43] R.T. Haftka oraz Z. Gurdal. *Elements of Structural Optimalization*. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [44] C. M. Harris oraz A. G. Piersol, redaktorzy. *Harris' shock and vibration handbook*. McGraw-Hill, 2002.
- [45] E.J. Haug oraz B. Rousset. Design sensitivity analysis in structural mechanics. *J. Struct. Mech.*, 8:161–186, 1980.
- [46] T.D. Hien. *Deterministic and stochastic sensitivity in computational structural mechanics*. Prace IPPT – IFTR Reports 46–1990, Warszawa, December 1990.
- [47] J.B. Hiriart-Urruty oraz D. Ye. Sensitivity analysis of all eigenvalues of a symmetric matrix. *Numerische Mathematik*, 70:45–72, 1995.
- [48] J.W. Hou oraz J.Z. Yuan. Calculation of eigenvalue and eigenvector derivatives for nonlinear beam vibrations. *AIAA J.*, 26(4):872–880, 1988.
- [49] Thomas J. R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. PHI, 1987.
- [50] J. L. Humar. Eigenvalue programs for building structures. *Comput. Struct.*, 8:75–91, 1978.
- [51] D.J. Inman. *Vibration with control*. Wiley, 2006.
- [52] H. Jakubczak. *Niepewność danych w prognozowaniu trwałości zmęczeniowej konstrukcji nośnych maszyn*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2002.
- [53] H. Jakubczak oraz T. Bednarek. Assessment of s-n curves of hydraulic cylinders based on laboratory fatigue tests. Raport, PROHIP/19/041-002, 2006.
- [54] Ł. Jankowski, T. Bednarek, W. Sosnowski. *Part VI Selected topics in identification of dynamics loads in Knowledge Acquisition for Hybrid Systems of Risk Assessment and Critical Machinery Diagnosis*, W. Moczulski, K. Ciupke edits. Publishing House of the Institute for Sustainable Technologies, 2008.
- [55] G. Jiménez. Summary of static fatigue tests. Raport, PROHIP-01-024-001, 2005.
- [56] G. Jiménez. Welding measures of testing cylinders. Raport, PROHIP-01-062-001, 2006.

- [57] P. Johannesson. Rainflow cycles for switching processes with Markov structure. *Propability in the Engineering and Informational Sciences*, 12(2), 1998.
- [58] L.M. Kachanov. Time of the rapture process under creep conditions. *IVZ Akad. Nauk SSR, Otd Tech Nauk*, 8:26–31, 1958.
- [59] S. Kaliski, redaktor. *Drgania i fale*. PWN, 1966.
- [60] J. Kiciński. *Teoria i badania hydrodynamicznych poprzecznych łożysk ślizgowych*. Ossolineum, 1994.
- [61] J. Kiciński, redaktor. *Modelowanie i diagnostyka oddziaływań mechanicznych, aerodynamicznych i magnetycznych w turbozespołach energetycznych*. Wyd. IMP PAN, 2005.
- [62] David Kincaid oraz Ward Chaney. *Analiza numeryczna*. WNT, 2006.
- [63] M. Kleiber. *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice konstrukcji*. PWN, Warszawa, 1985.
- [64] M. Kleiber, redaktor. *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*. PWN, 1995.
- [65] M. Kleiber, H. Antunez, T. D. Hien, P. Kowalczyk. *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*. J. Wiley, 1997.
- [66] M. Kleiber oraz T.D. Hien. Parameter sensitivity of inelastic buckling and post-buckling response. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 145:239–262, 1997.
- [67] K. Kluger oraz T. Ladoga. Fatigue lifetime of 10HNAP steel under random tension - compression with the mean value according to the Dang-Van criterion. *Engineering Machines Problems*, 24, 2004.
- [68] J. Knabel. *Analiza niezawodności konstrukcji sprężysto-plastycznych przy użyciu powierzchni odpowiedzi*. Prace IPPT, Warszawa, 2004.
- [69] Stanisław Kocańda. *Zmęczeniowe pękanie metali*. WNT, 1985.
- [70] Stanisław Kocańda oraz Józef Szala. *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*. PWN, 1997.
- [71] T. Kucharski. *Drgania mechaniczne*. WNT, 2004.
- [72] T. Ladoga oraz E. Macha. Energy approach to fatigue under combined cyclic bending with torsion of smooth and notched specimens. *Physicochemical Mechanics of Materials*, 5:34–42, 1998.
- [73] P. Lancaster. On eigenvalues of matrices dependent on a parameter. *Numerische Mathematik*, 6:377–387, 1964.

- [74] G.M. Lee. Sensitivity of eigenvalues of beam to the change of element correction factors. *J. Sound Vib.*, 267:955–960, 2003.
- [75] I.W. Lee oraz G.H. Jung. An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities - part ii. multiple natural frequencies. *Comput. Struct.*, 62(3):437–443, 1997.
- [76] I.W. Lee, G.H. Jung, J.W. Lee. Numerical method for sensitivity analysis of eigensystems with non-repeated and repeated eigenvalues. *Journal of Sound and Vibration*, 195(1):17–32, 1996.
- [77] J. Lemaitre oraz J. L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990.
- [78] Jean Lemaitre. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [79] Z.S. Liu oraz C.D. Mote. A new discrete approach to eigenvalue sensitivity with respect to constraint locations. *J. Sound Vib.*, 204(4):623–630, 1997.
- [80] B. Luccioni, S. Oller, R. Danesi. Coupled plastic-damaged model. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 129:81–89, 1996.
- [81] J. MacDuFF oraz J. Curreri. *Drgania w technice*. Państwowe Wydawnictwa Techniczne, 1960.
- [82] I. Marczevska, T. Bednarek, A. Marczewski, W. Sosnowski, H. Jakubczak, J. Rojek. Practical fatigue analysis of hydraulic cylinders and some design recommendations. *Int. J. Fatigue*, 28:1739–1751, 2006.
- [83] I. Marczevska, W. Sosnowski, A. Marczewski, T. Bednarek. Topology and sensitivity-based optimization of stiffened plates and shells. C. Cinquini, M. Rovati, P. Venini, R. Nascimbene, redaktorzy, *Short Papers of the Fifth World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization WCSMO5*, strony 271–272, Lido di Jesolo–Venice, Italy, 2003.
- [84] I. Marczevska, W. Sosnowski, A. Marczewski, T. Bednarek. Topology and sensitivity based optimization of stiffened plates and shells. *IV Ukrainian-Polish Conference on Environmental Mechanics, Methods of Computer Science and Simulations*, Lwów, 2004.
- [85] I. Marczevska, W. Sosnowski, A. Marczewski, T. Bednarek. Wieloetapowa optymalizacja topologiczna i parametryczna układów usztywnionych. *Informatyka w Technologii Materiałów*, 1-2:30–41, 2004.
- [86] E.F. Masur oraz Z. Mróz. Singular solutions in structural optimization problems. *Solids Struct.*, 15:503–512, 1979.

- [87] M. Matsuishi oraz T. Endo. Fatigue of metals subjected to varying stresses. *Japan Society of Mechanical Engineers*, 1968.
- [88] W.C. Mills-Curran. Calculation of eigenvector derivatives for structures with repeated eigenvalues. *AIAA J.*, 26(7):867–871, 1988.
- [89] M.A. Miner. Cumulative damage in fatigue. *J. Appl. Mech.*, 67(A159), 1945.
- [90] K. L. Molski oraz G. Glinka. A method of elasto-plastic stress and strain calculation at a notch root. *Material Science and Engineering*, 50:93–100, 1981.
- [91] J. Morrow. *Fatigue Design Handbook, Advances in Engineering*, tom 4. SAE, Warrendale, 1968.
- [92] C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, V.M. Franco Correia. Multiple eigenvalue optimization of composite structures using discrete third order displacement models. *Comput. Struct.*, 38(1-4):99–110, 1997.
- [93] J.E. Mottershead. On the zeros of the structural frequency response functions and their sensitivities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(5):591–597, 1998.
- [94] Y. Murakami. *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon, 1989.
- [95] H. Neuber. Theory of stress concentration for shear strained prismatic bodies with arbitrary non-linear stress – strain law. *J. Appl. Mech.*, 26(4):0–0, 1961.
- [96] J.C. Newman. The merging of fatigue and fracture mechanics concepts: a historical perspective. *Progr Aerospace Sci*, 34:347–390, 1998.
- [97] S. Oller, O. Salomón, E. Onate. Fatigue analysis of materials and structures using continuum damage model. *Int J Forming Processes*, 5, 2002.
- [98] S. Oller, O. Salomón, E. Onate. A continuum mechanics model for mechanical fatigue analysis. *Computational Materials Science*, 32(2):175–195, 2005.
- [99] J. Ostrowska-Maciejewska. *Mechanika ciał odkształcalnych*. PWN Warszawa, 1994.
- [100] A. Palmgren. Die lebensdauer von kugellagern. *Zeitschrift VDI*, 68(14):339–341, 1924.
- [101] P. C. Paris oraz F. Erdogan. A critical analysis of crack propagation laws. *J. Basic Eng.*, 85:0–0, 1963.
- [102] P. Pedersen. Design with several eigenvalue constraints by finite elements and linear programming. *Struct. Mech.*, 10(3):243–271, 1995.

- [103] N. Pugno, P. Cornetti, A. Carpinteri. New unified laws in fatigue: From the Wöhler's to the Paris' regime. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(4):595–601, 2007.
- [104] red. M. Dietrich. *Podstawy Konstrukcji Maszyn*, tom 1-3. WNT, 2007.
- [105] I. Rychlik. A new definition of the rainflow cycle counting method. *Int. J. Fatigue*, 9:119–121, 1987.
- [106] I. Rychlik. Simulation of load sequences from rainflow matrices: Markov method. *Int. J. Fatigue*, 18(7):429–438, 1996.
- [107] W. Schütz. A history of fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, 54(2):263–300, 1996.
- [108] W. Schutz. *Standardized Stress-Time Histories - An Overview. Development of Fatigue Loading Spectra*. ASTM SPT 1006, 1989.
- [109] H.H. Schwalbe. Comparison of several fatigue crack propagation laws with experimental results. *EFM*, (1), 1974.
- [110] O. Sergeyevev oraz Z. Mróz. Sensitivity analysis and optimal design of 3d frame structures for stress and frequency constraints. *Comput. Struct.*, 75:167–185, 2000.
- [111] A. Seweryn. *Metody numeryczne w mechanice pękania*. IPPT PAN, 2003.
- [112] A.P. Seyranian oraz A.A. Mailybaev. Interaction of eigenvalues in multi-parameter problems. *J. Sound Vib.*, 267:1047–1064, 2003.
- [113] G. C. Sih. *Handbook of Stress Intensity Factors*. Bethlehem, 1973.
- [114] G. Sines. *Behaviour of Metals under Complex Static and Alternating Stresses in Metal Fatigue*. McGraw-Hill, 1959.
- [115] W. Sosnowski. *Symulacja numeryczna, analiza wrażliwości i optymalizacja nieliniowych procesów deformacji konstrukcji*. Wydawnictwo Akademii Bydgoskiej, Bydgoszcz, 2003.
- [116] W. Sosnowski, A. Marczewski, I. Marczevska, T. Bednarek. The mean stress effect problem in fatigue analysis of hydraulic cylinders. *35th Solid Mechanics Conference*, Kraków, 2006.
- [117] W. Sosnowski, T. Szolc, T. Bednarek, I. Marczevska, Artur Marczewski. *Chapter 12 Attempts of durability assessment of cracked rotor shafts in Knowledge Acquisition for Hybrid Systems of Risk Assessment and Critical Machinery Diagnosis*, W. Moczulski, K. Ciupke edits. Publishing House of the Institute for Sustainable Technologies, 2008.

- [118] R. Stocki. *Optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji prętowych w zakresie dużych przemieszczeń. Teoria i program komputerowy*. Prace IPPT Nr 13, IPPT Warszawa, 1999.
- [119] J. Szala. *Hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych*. Wydawnictwo Uczelniane ATR Bydgoszcz, 1998.
- [120] J. Szala, redaktor. *Metody doświadczalne w zmęczeniu materiałów i konstrukcji*. Wydawnictwo Uczelniane ATR Bydgoszcz, 2000.
- [121] J. Szala oraz D. Boroński. *Ocena stanu zmęczenia materiału w diagnostyce maszyn i urządzeń*. Wyd. ITE-PIB, 2008.
- [122] J. Szmelter. *Metody komputerowe w mechanice*. PWN, 1980.
- [123] T. Szolc, T. Bednarek, I. Marczewska, A. Marczewski, W. Sosnowski. Fatigue analysis of the cracked rotor by means of the one- and three-dimensional dynamical model. *7th IFToMM - Conference on Rotor Dynamics*, Wiedeń, 2006.
- [124] R. L. Taylor. *FEAP – A Finite Element Analysis Program, User Manual*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2002.
- [125] R. L. Taylor. *FEAP – A Finite Element Analysis Program, Installation Manual*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2003.
- [126] C. Thonon oraz J.C. Golinval. Results obtained by minimising natural frequency and mac-value errors of a beam model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):65–72, 2003.
- [127] A. Wohler. Versuche über die Festigkeit der Eisenbahnwagenachsen. *Zeitschrift für Bauwesen - english summary*, 4:160–161, 1867.
- [128] K.M. Won oraz Y.S. Park. Optimal support positions for a structure to maximize its fundamental natural frequency. *Journal of Sound and Vibrations*, 5:801–812, 1998.
- [129] J.W. Wyrzykowski, E. Pleszakow, J. Sieniawski. *Odkształcenie i pękanie metali*. WNT, 1999.
- [130] Y. C. Xiao, S. Li, Z. Gao. A continuum damage mechanics model for high cycle fatigue. *Int. J. Fatigue*, 20(7):503–508, 1998.
- [131] H. Xie oraz H. Dai. On the sensitivity of multiple eigenvalues of nonsymmetric matrix pencils. *Linear algebra and its applications*, 374:143–158, 2003.

- 
- [132] E. Zahavi oraz V. Torbilo. *Fatigue design. Life expectancy of machine parts*. A Solomon Press Book, Boca Rato, New York, London, Tokyo, 1996.
- [133] O.C. Zienkiewicz oraz R.L. Taylor. *The Finite Element Method; I,II,III*. BH, 2000.