

Praca doktorska

**Układy dynamiczne
na przestrzeniach jednorodnych
i ich zastosowanie w mechanice
kontinuum**

mgr Ewa Eliza Rożko

Promotor

Profesor dr hab. Jan J. Sławianowski

Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych

Warszawa 2005

Podziękowania

Pragnę podziękować Prof. Janowi J. Sławianowskiemu za jego pomoc i wyrozumiałość. Wskazówki jakie otrzymałam okazały się bezcenne.

Dziękuję również za przyjaźń i pomoc Basi Gołubowskiej, Agnieszce Martens, a szczególnie Vasyłowi Kovalchuk.

Ewa Eliza Rożko

Niniejszą pracę dedykuje mojej córeczce Sabince

Spis treści

Podziękowania	1
Wstęp	5
Rozdział 1. Ciała afinicznie sztywne	11
1.1. Kolektywne i wewnętrzne stopnie swobody	13
1.2. Pojęcia metryczne	17
1.3. Opis kinematyczny	20
1.4. Formalizm hamiltonowski	25
Rozdział 2. Przestrzenie grupowe i jednorodne	28
2.1. Newtonowska i Hamiltonowska przestrzeń stanów	28
2.2. Prędkości i pędy nieholonomiczne	32
2.3. Koneksja teleparalelizmu	35
2.4. Przykład - ciało infinitezymalne	41
2.5. Równania ruchu w quasiprędkościach i quasipędach	42
2.6. Struktura przestrzeni jednorodnych	44
2.7. Tensory metryczne lewo- i prawo-niezmiennicze	47
2.8. Metryka Killinga	48

2.9. Przykłady	51
2.9.1. Ruch na sferze	51
2.9.2. Ruch na pseudosferze	56
Rozdział 3. Ciała afinicznie sztywne o zdegenerowanym wymiarze . . .	60
3.1. Przestrzeń konfiguracyjna i jej grupy przekształceń	61
3.2. Wielkości kinematyczne	64
3.3. Rozkład biegunowy i dwubiegunowy	64
3.4. Stopnie swobody a przestrzeń konfiguracyjna	66
Rozdział 4. Rozkład „biegunowy” i „dwubiegunowy”	70
4.1. Opis analityczny	70
4.2. Formalizm hamiltonowski	72
4.3. Rozkład „biegunowy”	74
4.4. Rozkład „dwubiegunowy”	76
4.5. Rozwiązania szczególne - stacjonarne elipsy	78
4.5.1. Potencjał $V = \frac{k}{2}(\lambda^2 + \mu^2)$	79
4.5.2. Potencjał $V = c\left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2\right) + c\left(\frac{1}{\mu^2} + \mu^2\right)$	80
4.5.3. Potencjał $V = k\left(\frac{1}{\lambda\mu} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}\right)$	81
Rozdział 5. Model z „grubością”	84
5.1. Kinematyka i dynamika modelu	84
5.2. Rozwiązania stacjonarne	90
5.2.1. Potencjał $V = a(\lambda^2 + \mu^2 + \varrho^2) + \frac{b}{\lambda\mu\varrho}$	91
Rozdział 6. Zasada d’Alemberta i ruch pod wpływem sił niepoten-	
 cjalnych	92
6.1. Formalizm Newtonowski	92
6.2. Modele	95
Rozdział 7. Kwantowanie problemu	98
7.1. Kwantyzacja modelu klasycznego	99
7.2. Kwantyzacja rozkładu „dwubiegunowego”	107

7.3. Kwantyzacja modelu „z grubością”	108
Dodatek o zagadnieniu trzech ciał	109
Bibliografia	111

Wstęp

Niniejsza praca poświęcona jest tematyce mechaniki ciała afinicznie sztywnego. Model takiego ciała jest używany w mechanice kontinuum, a także w rozmaitych zagadnieniach dynamiki układów wielocząstkowych. Jest to szczególny przypadek kolektywnych stopni swobody i metod momentowych w zagadnieniu wielu ciał, mechanice ośrodków ciągłych. Model ciał deformowalnych jednorodnie jest związany z klasycznymi procedurami dyskretyzacyjnymi typu Rietza, Galerkina i metodami elementów skończonych dla zwykłego kontinuum. Zagadnienia o nieskończonej liczbie stopni swobody dają się w dobrym przybliżeniu efektywnie opisać w języku skończenie-wymiarowych układów dynamicznych. Samo przejście od układów opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi do modelu opartego na równaniach różniczkowych zwyczajnych jest zawsze wielkim uproszczeniem. W szczególności jeżeli chodzi o analizę jakościową, rachunek przybliżony, jak i techniki numeryczne takie uproszczenie jest bardzo pożądane.

Metody oparte na modach kolektywnych i procedurach momentowych są skuteczne, gdy zjawisko ma na tyle nielokalny charakter, że do jego opisu wystarczy niewielka liczba parametrów zależnych od zmiennych jednocząstkowych. Te nielocalne, „kolektywne” parametry powinny przy tym odprzegać się od pozostałych i spełniać

w dobrym przybliżeniu autonomiczny układ równań różniczkowych zwyczajnych (jako funkcje czasu). Ma to miejsce np. gdy długość fal sprężystych wzbudzanych w ciele jest porównywalna z jego rozmiarami. Występowanie modów kolektywnych wiąże się ściśle z geometrią przestrzeni fazowej i z geometrią innych przestrzeni występujących w opisie kinematyki problemu. Przestrzeń konfiguracyjna zmiennych kolektywnych jest z reguły grupą Liego, związaną ze wspomnianymi strukturami geometrycznymi lub przestrzenią jednorodną grupy Liego. Związek między strukturą teorii fizycznych na fundamentalnym poziomie sprawia, że są to z reguły grupy automorfizmów różnych struktur przestrzennych. Typowym przykładem jest bryła sztywna. Związane z nią pojęciowo układy dynamiczne na grupie ortogonalnej są podstawą dla wszystkich innych uogólnień tego typu. Skrajnym przypadkiem takiego układu dynamicznego wzorowanym na bryle sztywnej jest hydrodynamika idealnej cieczy nieściśliwej [2, 3]. Istnieją również podobne sformułowania dla teorii sprężystości. W podejściu nieskończenie-wymiarowym nie stosujemy dyskretyzacji, natomiast wprowadzamy wielocząstkowe mody efektywne. Jest to prostsze niż mikroskopowy opis układu jako dyskretnego agregatu wielu cząstek, podlegającego prawidłowościom statystycznym. Metody heurystyczne, oparte na analogii z grupami skończenie-wymiarowymi, pozwalają ponadto odgadnąć niektóre typy rozwiązań i następnie sprawdzić je wprost bezpośrednim rachunkiem. Brak efektywnej, dobrze sformułowanej teorii nieskończenie-wymiarowych „grup Liego” powoduje, że tym cenniejsze są opisy pośrednie między bryłą sztywną a pełnym opisem ośrodka ciągłego. Najprostszym modelem jest ciało afinicznie sztywne, tzn. sztywne w sensie geometrii afinicznej. Wszystkie relacje afiniczne pomiędzy jego punktami materialnymi pozostają niezmiennicze, a zatem, np. proste materialne pozostają prostymi, ich równoległość pozostaje zachowana, jak i stosunek odcinków leżących na jednej prostej. Przestrzeń konfiguracyjna modów kolektywnych daje się utożsamić z grupą afiniczną, a raczej z jej przestrzenią jednorodną z trywialnymi grupami izotropii.

Takie „usztywnione” deformacje mają miejsce w makroskopowych ciałach sprężystych, gdy wzbudzone fale mają długość porównywalną z rozmiarami liniowymi ciała.

Również niektóre zagadnienia astrofizyczne wiążą się z zastosowaniem tego rodzaju metod. Ostatni problem ma bardzo długą historię, zapoczątkowaną przez samego Newton, poprzez Riemanna, Kroneckera i Dedekinda, aż do niemal współcześnie Chandrasekhara (współczynniki wirialne, teoria kształtu Ziemi, wibracje i obroty gwiazd)[11]. Dynamika obiektów w mikroskali, jak jądra atomowe i molekuly, również wykorzystuje tego rodzaju obiekty. Dynamika molekuł i różnych struktur nadmolekularnych wiąże się z teorią ośrodków ze strukturą, jak np. kryształy molekularne, a w ciągłej granicy - kontinua ze strukturą, np. mikromorficzne (uogólnienie mikropolarnych) lub mikromorficzne wyższego rzędu. Właśnie tutaj miało miejsce jedno z pierwszych zastosowań afinicznych stopni swobody jako modelu modów wewnętrznych - mikromorficzna teoria Eringen [22, 23, 24, 25]. Później model afiniczny stał się zagadnieniem samym w sobie, chociaż trzeba przyznać, że potrzeby teorii ośrodków strukturalnych dostarczają silnej motywacji dla badań układów dynamicznych opisujących zachowanie pojedynczych ciał afinicznie sztywnych. Zagadnienia te są interesujące nie tylko w 3-ch wymiarach ale i w 2-ch (także w 1-m) wymiarach, jako np. modele powłok (strun) z mikrostrukturą. Z punktu widzenia czystej mechaniki analitycznej, modele te wiążą się silnie z teorią układów całkowalnych oraz zagadnieniami symetrii i degeneracji.

Zastosowania mikroskopowe, w tym na poziomie molekularnym i nadmolekularnym, wymagają użycia modelu kwantowego. Najprostszym z możliwych podejściem jest tu Schrödingerska kwantyzacja w języku funkcji falowych na odpowiedniej grupie (afinicznej, liniowej, ortogonalnej itp.) lub jej przestrzeni jednorodnej. Zagadnienie to wiąże się też z przybliżeniem quasiklasycznym, ze względu na zastosowania w mechanice dużych molekuł, fullerenów, itp., gdzie jednocześnie występują zjawiska klasyczne i kwantowe. Może to wiązać się z bardzo fundamentalnymi problemami, jak dekoherencja i pomiar kwantowy.

Wracając do zagadnień bardziej praktycznych. Model ciała afinicznie sztywnego, jak wspomniano, wiąże się z metodą elementów skończonych i z technikami numerycznymi. W metodzie tej ciało poddane zostaje triangulacji na niewielkie elementy, np. czworościany (sympleksy) deformujące się w przybliżeniu w sposób jednorodny.

Przeprowadzając taką triangulację ciała na niewielkie sympleksy deformowalne jednorodnie możemy ośrodek ciągły opisać jako dyskretny, a właściwie skończony agregat współpracujących ciał afinicznie sztywnych. Umożliwia to zastosowanie budzących zaufanie, wiarygodnych metod łączących w sobie środki analityczne i numeryczne [60].

Model ciała afinicznie sztywnego pojawił się, jak wspomniano, w teorii ośrodków mikromorficznych pochodzących od Eringena i jego szkoły [22, 23, 24, 25]. Jako teoria oparta na geometrii różniczkowej i mechanice Hamiltonowskiej oraz kwantowej był rozwinięty w różnych aspektach przez J. J. Sławianowskiego i współpracowników [29]-[31], [47]-[50], [65]-[92]. Bardzo interesujące aspekty ruchu afinicznego w kontekście hydrodynamiki i astrofizyki były badane przez O. I. Bogojavlenskigo [5, 6]. Zostały użyte bardzo wyrafinowane metody teorii układów dynamicznych. Ścisłe biorąc, nie był to problem więzów nałożonych na równania ruchu lub zasadę wariacyjną (a więc wiążący się z istnieniem sił reakcji - biernych czynników wymuszających więzy), lecz poszukiwanie rozwiązań określonego typu (ruchów afinicznych) dla wyjściowych równań bez więzów. Są to nieco inne zagadnienia, ale związek między nimi, zresztą bardzo interesujący, jest nie dokładnie zbadany. Wyrafinowana analiza matematyczna oparta na jakościowej teorii układów dynamicznych i geometrii symplektycznej była przeprowadzona m. in. przez M. Robertsa i C. Wulff [58, 105]. Matematycznymi aspektami tego problemu zajmowali się również A. S. Burov, D. P. Chevallerier i inni [4, 12]. Pokrywają się one w szczególności z takimi problemami jak położenia równowagi względnej i orbity względnie periodyczne. Wspomnijmy przy okazji, że istnieje interesujące i niespodziewane powiązanie pomiędzy n -wymiarowym modelem ciała afinicznie sztywnego i jedno-wymiarowym problemem n -ciał, w szczególności, w dynamice sieci całkowalnych badanych przez Calogero, Mosera, Sutherlanda i innych [8, 52, 53].

W poniższej pracy zajmować się będziemy mechaniką układów o skończonej liczbie stopni swobody. Rozpatrujemy ze szczególną uwagą model ciała afinicznie sztywnego o wymiarze niższym niż wymiar przestrzeni, w którym jest ono zanurzone. Oczywiście fizycznie najbardziej interesujący jest przypadek ciała dwuwymiarowego w przestrzeni trójwymiarowej (Rozdział 3). Jest on oczywiście ciekawy z punktu widzenia czy-

stej mechaniki analitycznej jako przykład układu z symetriami (z afiniczną symetrią stopni swobody), którego przestrzenią konfiguracyjną jest przestrzeń jednorodna nie będąca jednak grupą. Analiza tego zagadnienia jest możliwa tylko dzięki użyciu nieholonomicznych quasi-prędkości (związanych z grupami symetrii) i sprzężonych do nich quasipędów (Rozdział 2). Model ten może być fizycznie użyteczny w pewnych makroskopowych zagadnieniach sprężystości i w teorii ośrodków z mikrostrukturą. Mamy na myśli ciało składające się z afinicznie deformowalnych „płytek”, podobnie, jak ciekły kryształ składa się z „pałeczek”. Model ten może być też użyteczny w badaniu zjawisk powierzchniowych w ciałach z mikrostrukturą. Ciekawa jest perspektywa zastosowań biomechanicznych i biofizycznych, np. czerwone ciała krwi (erytrocyty) z mechanicznego punktu widzenia mogą być do pewnego stopnia uważane za zanurzone w cieczy (w osoczu) dwuwymiarowe ciała afinicznie sztywne poruszające się w trójwymiarowej przestrzeni.

Wspomnieliśmy o zagadnieniach mikrostrukturalnych. Mamy tu na myśli ośrodki ziarniste, lub kryształy molekularne złożone z płaskich molekuł (np. molekula 3-atomowa jest zawsze idealnie płaska). Często mamy do czynienia z dużymi molekułami o płaskim „kadłubie”, którego stopnie swobody decydują o kierunku i dynamice całej molekuly.

W takich zagadnieniach mikroskopowych i w problemach nanofizyki, gdzie istotna jest dynamika molekuł i małych struktur nadmolekularnych, musimy posługiwać się modelem kwantowym. W rozdziale 7 omówiliśmy w zarysie kwantyzację naszego modelu i wykorzystując analizę harmoniczną na grupach, dokonaliśmy częściowej separacji zmiennych. W zagadnieniach izotropowych pozwala to efektywnie zredukować problem z sześciu do dwóch stopni swobody (niezmienników płaskiej deformacji).

Naszkicowane też zostało sformułowanie dynamiki płaskich ciał afinicznie sztywnych oparte na pojęciach czysto Newtonowskich (Rozdział 6), bez zakładania Lagrangianu lub Hamiltonianu, a więc mogące uwzględnić dyssypację. Wyprowadzenie równań ruchu opiera się wtedy na zasadzie d’Alemberta. Siły reakcji można wyeliminować biorąc momenty zerowego i pierwszego stopnia od wyjściowych równań ruchu układu

wielocząstkowego bez więzów afinicznych. Ogólniej, gdybyśmy założyli, że deformacje opisane są odwzorowaniami wielomianowymi ustalonego stopnia k , musielibyśmy użyć momentów multipolowych również stopnia k .

Oprócz modelu o zdegenerowanym wymiarze (Rozdział 3 i 4), został również zbadany model „z grubością” (Rozdział 5). W obu przypadkach zbadane zostały pewne typy ścisłych rozwiązań równań ruchu. Rzecz w tym, że równania ruchu są na ogół silnie nieliniowe. W związku z tym musimy posługiwać się metodami jakościowymi, pozwalającymi na wyrobienie sobie poglądu o strukturze rozwiązania ogólnego i portretu fazowego lub też odwołać się do technik numerycznych. Rozwiązania te wiążą się z pewnymi klasycznymi zagadnieniami astrofizyki i geofizyki, jak figury równowagowe [11], ustalone elipsoidy, teoria kształtu Ziemi, itp. Posiadają też odpowiedniki w teorii materii jądrowej (jądra z ustaloną deformacją). Metody użyte do ich znalezienia wiążą się z teorią tzw. obrotów stacjonarnych (ustalonych) ciała sztywnego. Stacjonarne elipsoidy pojawiają się również w kolektywnym, kropłowym modelu jądra atomowego.

Nasza analiza szczególnych rozwiązań typu „stacjonarne” elipsy pozwala oczekiwać możliwości zastosowania naszego modelu do analizy zagadnienia trzech ciał.

Rozdział 1

Ciała afinicznie sztywne

Niniejszy rozdział poświęcony jest ogólnemu sformułowaniu zagadnienia ciał afinicznie sztywnych. Zostanie opisany tu dobrze znany aparat mechaniki analitycznej w postaci lagranżowskiej i hamiltonowskiej [3, 27, 28, 96, 97], jak również aparat matematyczny dotyczący ciał deformowalnych jednorodnie [67, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 80, 90, 91, 92]. Jest to krótkie przypomnienie podstawowych pojęć i zagadnień wykorzystywanych w dalszej części pracy.

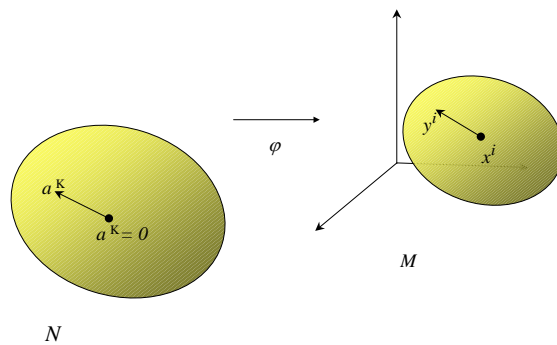
Opisując ciała afinicznie sztywne, tj. deformowalne jednorodnie, zakładamy, że przestrzeń fizyczna, w której znajduje się to ciało ma geometrię afiniczną. Samo ciało afinicznie sztywne jest to układ punktów materialnych (dyskretny lub ciągły), poddany więzom, na mocy których wszystkie relacje afiniczne między punktami ciała pozostają zachowane podczas ruchu. Mianowicie, proste pozostają prostymi, zostaje też zachowana równoległość dwóch prostych i stosunek długości odcinków leżących na

jednej prostej. Dowolne dwie konfiguracje można ze sobą powiązać dokładnie jednym przekształceniem afinicznym.

Ruch afiniczny składa się z translacji przestrzennych, obrotów sztywnych i deformacji jednorodnych. Przemieszczając wszystkie cząstki ośrodka za pomocą tych samych przekształceń afinicznych, dostajemy deformację jednorodną. Punkt materialny o współrzędnych afinicznych a^K ulega w trakcie takiej deformacji przemieszczeniu do punktu o współrzędnych

$$y^i(t, a) = x^i(t) + \varphi^i_K(t)a^K, \quad (1.1)$$

gdzie współczynniki φ^i_K tworzą macierz nieosobliwą. Ruch jest opisany przez zależne od czasu współrzędne x^i (opisujące ruch translacyjny środka masy) i φ^i_K (opisujące stan deformacji, jak również rotacyjne stopnie swobody).



W niniejszej pracy zajmujemy się uproszczonym przypadkiem, w którym nie ma translacyjnych stopni swobody, tzn. $x^i = 0$. Ciało wykonuje tylko obroty afiniczne wokół ustalonego punktu, np. środka masy o współrzędnych odniesienia $a^K = 0$ i deformacje jednorodne. Ze względu na wybór nieruchomego, wyróżnionego punktu, który utożsamiamy z zerem przestrzeni wektorów swobodnych, przestrzeń fizyczną i materialną możemy utożsamić z przestrzeniami wektorowymi. Jako współrzędnych w przestrzeni konfiguracyjnej możemy użyć parametrów deformacji i obrotu φ^i_K . Ciało ma zatem skończoną liczbę stopni swobody.

1.1. Kolektywne i wewnętrzne stopnie swobody

Gdy definiujemy stopnie swobody, na poziomie czystej kinematyki, pojęcie tensora metrycznego jest nam jeszcze zbędne. Przestrzeń fizyczna może być metrycznie amorficzna i wyposażona jedynie w geometrię afiniczną (Talesa). Jak wiadomo, geometria afiniczna, tzn. oparta na pojęciu przeniesienia równoległego, zdaje sprawę z najbardziej elementarnej struktury przestrzeni fizycznej w małej skali. Pojęcia metryczne związane są z wprowadzeniem dodatkowych pojęć, uzupełniających strukturę afiniczną do euklidesowej. Tensor metryczny staje się istotny wówczas, gdy konstruujemy modele dynamiczne. Chociaż jak pokażemy, istnieją również modele pozbawione metryki. Modele takie są interesujące z czysto matematycznego punktu widzenia, aczkolwiek mogą wydawać się względnie egzotyczne od strony fizycznej. Niemniej jednak ich zastosowania fizyczne nie są wykluczone.

Do opisu stopni swobody ciała afinicznego zwyczajowo używa się dwóch logicznie różnych przestrzeni afinicznych: przestrzeni fizycznej M , w której znajduje się ośrodek materialny (współrzędne eulerowskie), i przestrzeni materialnej N czyli zbioru punktów materialnych (współrzędne lagranżowskie). Przestrzenie te wyposażone są w odpowiednie struktury afiniczne (M, V, \rightarrow) , (N, U, \rightarrow) . V i U oznaczają liniowe przestrzenie wektorów swobodnych, tzn. translacji, odpowiednio, w przestrzeni fizycznej M i w przestrzeni materialnej N . Strzałka $\rightarrow: M \times M \rightarrow V$ oznacza odwzorowanie, które dowolnej parze punktów $p, q \in M$ przyporządkowuje wektor $\vec{pq} \in V$ - translację przeprowadzającą punkt p w punkt q . Odpowiednio, dla przestrzeni materialnej używamy tego samego oznaczenia dla operacji wektora wodzącego.

Przestrzeń konfiguracyjna Q ciągłego ciała afinicznie sztywnego utożsamia się z rozmaitością $\text{Aff}(N, M)$ - zbiorem izomorfizmów afinicznych przestrzeni N na M , tzn. odwracalnych odwzorowań afinicznych. Przestrzeń Q jest podzbiorem otwartym w $\text{Aff}(N, M)$ (zbiorze odwzorowań afinicznych przestrzeni N w M) i jego uzupełnienie jest zbiorem miary zero, tzn. składa się z osobliwych (degenerujących wymiar) odwzorowań afinicznych. Ograniczenie przestrzeni $\text{Aff}(N, M)$ do jej podzbioru otwartego

$\text{Aff}(N, M)$ jest istotne w teorii kontinuum poddanego więzom afinicznej sztywności. Jest ono bowiem warunkiem koniecznym i dostatecznym, by konfiguracje "nie zlepiły" punktów materialnych. Ograniczenie to jest jednak zbyt silne i zbędne w mechanice ciał dyskretnych. Odwzorowanie może być bowiem osobliwe i degenerować wymiar, nie "zlepiając" ze sobą punktów układu dyskretnego.

Z uwagi na zastosowania praktyczne interesuje nas tylko ruch wewnętrzny. Aby odzielić od siebie stopnie swobody ruchu postępowego i wewnętrznego, używa się innej reprezentacji przestrzeni konfiguracyjnej. Mianowicie, ustalamy pewien punkt $v \in N$. Punkt ten nazwiemy lagranżowskim środkiem rozkładu masy w ciele. Współtowarzyszący (lagranżowski) rozkład masy jest opisany za pomocą ustalonej, dodatniej miary μ na przestrzeni materialnej N . Miara μ nie zależy od konfiguracji ciała, a tym samym od czasu. Gdy $\mu(N) < \infty$, lagranżowski środek masy jest dobrze określony jako punkt geometryczny $v \in N$ przez

$$\int \vec{v}a d\mu(a) = 0;$$

gdzie $\vec{v}a \in U$ oznacza wektor translacji przenoszący punkt v w a (tych samych oznaczeń używamy w M). Wyróżnienie środka masy prowadzi do wyróżnienia odwzorowania:

$$f_v : \text{Aff}(N, M) \rightarrow M \times \text{LI}(U, V)$$

Jest ono zdefiniowane wzorem

$$f_v(\varphi) = (\varphi(v), L(\varphi))$$

dla każdego $\varphi \in \text{Aff}(N, M)$. W powyższym wzorze $\varphi(v) \in M$ opisuje aktualne położenie ciała jako całości w M , zaś $L(\varphi) \in \text{LI}(U, V)$ opisuje konfigurację wewnętrzną, tzn. układ względnych położenia elementów ciała względem $\varphi(v)$. Jest to właśnie rozkład stopni swobody na część translacyjną i wewnętrzną.

Tak więc przestrzeń konfiguracyjna Q może być utożsamiona z iloczynem kartezjańskim

$$Q = M \times \text{LI}(U, V), \quad (1.2)$$

gdzie $\text{LI}(U, V)$ oznacza zbiór liniowych izomorfizmów U na V , będący oczywiście podzbiorem otwartym w $\text{L}(U, V)$. Dopełnienie $\text{LI}(U, V)$ do pełnego $\text{L}(U, V)$ jest zbiorem miary zero, złożonym z osobliwych odwzorowań liniowych. Od teraz konfiguracja $(x, \varphi) \in M \times \text{LI}(U, V)$ ciała afinicznie sztywnego oznacza, że $x \in M$ jest właśnie chwilowym położeniem środka masy w M i $\varphi \in \text{LI}(U, V)$ opisują konfiguracje ruchu względnego. Zatem, punkt materialny numerowany przez $a \in N$ zajmuje położenie $y \in M$ takie, że $\vec{xy} = \varphi \cdot \vec{va}$.

Gdy ustalone są jakieś współrzędne kartezjańskie w przestrzeni fizycznej i w przestrzeni odniesienia możemy dokonać utożsamienia: $U = V = \mathbb{R}^n$. Jest to procedura wygodna analitycznie, niemniej jednak, może być myląca, jeśli nie będziemy używać opisu gdzie (M, V) i (N, U) są starannie rozróżnione. Przestrzeń konfiguracyjna n -wymiarowego ciała afinicznie sztywnego może być utożsamiona z grupą afiniczną

$$Q = \text{GAf}(n, \mathbb{R}) \simeq \text{GL}(n, \mathbb{R}) \times_s \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

W powyższym iloczynie półprostym czynnik \mathbb{R}^n dotyczy ruchu środka masy, tj. ruchu translacyjnego, podczas gdy $Q_{\text{int}} = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ jest pełną grupą liniową zawierającą wewnętrzne stopnie swobody. W przypadku ciał ciągłych powinno się użyć raczej spójnych składowych jedności w $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, tj. grupy właściwych transformacji liniowych $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ (o dodatnich wyznacznikach). Ten iloczyn kartezjański jest zapisany w odwrotnej kolejności niż we wzorze (1.2). Wiąże się to z tym, że zazwyczaj w teorii grup używa się właśnie takiej konwencji dla iloczynu półprostego. Najpierw stoi grupa automorfizmów a potem ta grupa, w której ona działa. Natomiast w mechanice z wewnętrznymi stopniami swobody bardziej naturalnie jest przyjąć iloczyn kartezjański w postaci (1.2) czyli, najpierw określone jest położenie w przestrzeni a następnie są wewnętrzne stopnie swobody. Chociaż jest to oczywiście kwestia dowolności opisu.

W przestrzeniach wektorowych U, V działają ich grupy automorfizmów, tzn. pełne grupy liniowe $\text{GL}(U), \text{GL}(V)$. Można w naturalny sposób określić działanie tych grup na przestrzeni konfiguracyjnej $Q_{\text{int}} = \text{LI}(U, V)$. Działają one odpowiednio według

reguł:

$$\begin{aligned} A \in \text{GL}(V) & : \text{LI}(U, V) \ni \varphi \mapsto A \circ \varphi \in \text{LI}(U, V), \\ B \in \text{GL}(U) & : \text{LI}(U, V) \ni \varphi \mapsto \varphi \circ B \in \text{LI}(U, V). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Przekształcenia grupy $\text{GL}(V)$ mają sens przekształceń fizycznych (symetrii) działających w fizycznej przestrzeni zawierającej punkty materialne. Działanie grupy $\text{GL}(U)$ na Q_{int} jest transformacją materialną. Jak widać, zdefiniowane w ten sposób działanie grupy $\text{GL}(V)$ na Q_{int} jest lewostronne, zaś $\text{GL}(U)$ - prawostronne. Działają one obie tranzytywnie na wewnętrznej przestrzeni konfiguracyjnej Q_{int} . Ich działanie na $\text{LI}(U, V)$ jest nie tylko tranzytywnie, ale i swobodnie. Oznacza to, że dla każdej pary $\varphi, \phi \in \text{LI}(U, V)$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\xi \in \text{GL}(U)$, dla którego $\phi = \varphi \circ \xi$ oraz dokładnie jedno $\zeta \in \text{GL}(V)$ takie, że $\phi = \zeta \circ \varphi$. Są odpowiednio dane za pomocą wzorów $\xi = \varphi^{-1} \circ \phi$, $\zeta = \phi \circ \varphi^{-1}$. Oczywiście, działania grupy $\text{GL}(U)$ na Q_{int} są przemienne z odpowiednimi działaniami $\text{GL}(V)$.

Wewnętrzna przestrzeń konfiguracyjna Q_{int} jest przestrzenią jednorodną z uwzględnieniem powyższych działań grup $\text{GL}(V)$ i $\text{GL}(U)$. Jej grupy izotropii są trywialne, tj. działanie obu grup jest swobodne. Zwróćmy jednak uwagę, że działanie $\text{GL}(V) \times \text{GL}(U)$, tzn.

$$\varphi \mapsto A\varphi B,$$

jest nie-efektywne, ponieważ podgrupy dylatacji grup liniowych $\text{GL}(V)$ i $\text{GL}(U)$, tj. $[\ell Id_V : \ell \in \mathbb{R} \setminus [0]]$ i $[\ell Id_U : \ell \in \mathbb{R} \setminus [0]]$ działają w ten sam sposób jako grupy transformacji. Zatem jądro nie-efektywności składa się z elementów w postaci $(\ell Id_V, \ell^{-1} Id_U)$, gdzie ℓ przebiega zbiór niezerowych liczb rzeczywistych; Id_V i Id_U są transformacjami tożsamościowymi odpowiednio w V i U . Jeśli mamy do czynienia z ośrodkiem ciągłym to dopuszczamy tylko $\text{GL}^+(V)$ i $\text{GL}^+(U)$, więc ściśle rzecz biorąc, liczba $\ell \in \mathbb{R}^+$ i należałoby wziąć zbiory $[\ell Id_V : \ell \in \mathbb{R}^+]$ i $[\ell Id_U : \ell \in \mathbb{R}^+]$.

1.2. Pojęcia metryczne

Wzięcie pod uwagę struktur metrycznych pozwala na klasyfikację stopni swobody. Przestrzeń materialną N i fizyczną M wyposażymy w odpowiednie struktury euklidesowe, tj. $(N, U, \rightarrow, \eta)$ i (M, V, \rightarrow, g) , gdzie $\eta \in U^* \otimes U^*$ jest tensorem metrycznym przestrzeni materialnej a $g \in V^* \otimes V^*$ tensorem metrycznym przestrzeni fizycznej. Jeśli ciało afinicznie sztywne ma konfigurację $(x, \varphi) \in M \times \text{LI}(U, V)$, to można jej przyporządkować dwa tensory deformacyjne: tensor Greena $G[\varphi] \in U^* \otimes U^*$ i tensor Cauchy'ego $C[\varphi] \in V^* \otimes V^*$. Są one zdefiniowane odpowiednio jako przeniesienie tensorów metrycznych $g \in V^* \otimes V^*$, $\eta \in U^* \otimes U^*$, odpowiednio, do przestrzeni U, V .

$$\begin{aligned} U^* \otimes U^* &\ni G[\varphi] = \varphi^* \cdot g, \\ V^* \otimes V^* &\ni C[\varphi] = (\varphi^{-1})^* \cdot \eta. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Odwzorowanie liniowe φ pozwala cofnąć tensor metryczny g z M do N . W przestrzeni U mamy więc dwa symetryczne, dodatnio określone tensory $G[\varphi]$ oraz η . Różnica między $G[\varphi]$ a η jest miarą deformacji, jaka pojawia się w konfiguracji φ . Tensor $E[\varphi] = \frac{1}{2}(G[\varphi] - \eta)$ jest lagranżowskim tensorem deformacji.

Wzajemna jednoznaczność odwzorowania φ pozwala na przeniesienie tensora metrycznego η w odwrotnym kierunku z N do M . Istnieje wtedy odwzorowanie $\varphi^{-1} : M \rightarrow N$. W przestrzeni V mamy więc również określone dwa tensory $C[\varphi]$ i g . Różnica między nimi jest także miarą deformacji. Eulerowski tensor deformacji ma postać: $e[\varphi] = \frac{1}{2}(g - C[\varphi])$.

Analityczne wyrażenia macierzowe dla tensorów deformacji mają postać:

$$G_{AB} = g_{ij} \varphi^i_A \varphi^j_B, \quad C_{ij} = \eta_{AB} \varphi^{-1A}_i \varphi^{-1B}_j. \quad (1.6)$$

W zastosowaniach ważną rolę odgrywają własności transformacyjne tensorów deformacji względem ruchów sztywnych, tzn. izometrii przestrzeni fizycznej i materialnej.

$$G[\varphi] = G[A \circ \varphi], \quad C[\varphi] = C[\varphi \circ B]$$

dla dowolnego $A \in \mathcal{E}(M, g)$, $B \in \mathcal{E}(N, \eta)$ gdzie $\mathcal{E}(M, g)$ i $\mathcal{E}(N, \eta)$ są odpowiednio grupami izometrii M i N . Tensor deformacji Greena jest nieczuły na transformacje

eulerowskie (fizyczne) generowane przez izometrie M . Natomiast tensor Cauchy'ego jest nieczuły na izometrie przestrzeni materialnej. Izometrie materialne i fizyczne nie wpływają natomiast na niezmienniki deformacji definiowane jako funkcje f o wartościach liczbowych, określone na zbiorze konfiguracji jednorodnych (tzn. odwzorowań afinicznych N na M), tzn.

$$f(A \circ \varphi \circ B) = f(\varphi)$$

dla dowolnych $A \in \mathcal{E}(M, g)$ i $B \in \mathcal{E}(N, \eta)$. Niezmiennikami takimi są niezmienniki tensora Greena $G[\varphi]$ względem metryki materialnej η lub niezmienniki tensora Cauchy'ego $C[\varphi]$ względem metryki przestrzennej g .

Niezmienniki deformacji są rozwiązaniami równań własnych:

$$\det [G_{AB} - \lambda \eta_{AB}] = 0, \quad \det \left[C^{ij} - \frac{1}{\ell} g^{ij} \right] = 0. \quad (1.7)$$

Rozwiązania $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są nieczułe na izometrie materialne $\lambda_m(\varphi \circ B) = \lambda_m(\varphi)$ dla każdego $B \in \mathcal{E}(N, \eta)$ jak i na izometrie przestrzenne $\lambda_m(A \circ \varphi) = \lambda_m(\varphi)$ dla każdego $A \in \mathcal{E}(M, g)$.

W praktyce używa się innego układu niezmienników, podnosząc wskaźnik tensora Greena $G[\varphi]$ za pomocą metryki η :

$$\tilde{G}[\varphi]^A{}_B = \tilde{\eta}^{AC} G[\varphi]_{CB} \quad (1.8)$$

gdzie $\tilde{\eta}^{AC}$ jest macierzą odwrotną do η_{AC} : $\tilde{\eta}^{AC} \eta_{CB} = \delta^A{}_B$. Jeden z możliwych układów niezmienników otrzymujemy w postaci

$$\lambda_m = \text{Tr} \left(\tilde{G}[\varphi]^m \right), \quad m = 1, \dots, n \quad (1.9)$$

gdzie n jest wymiarem przestrzeni.

Tę samą procedurę można przeprowadzić dla pary tensorów $C[\varphi]$, g . Otrzymamy układ niezmienników równoważny powyższemu.

Każdy z tensorów $G[\varphi]$, $C[\varphi]$ może być użyty jako miara odkształcenia towarzyszącego konfiguracji φ . Użycie jednego lub drugiego tensora zależy od względów praktycznych. W mechanice ciała hipersprężystego, bez działania sił zewnętrznych, energia

potencjalna jest niezmiennicza względem transformacji fizycznych, tj. zależy od φ za pośrednictwem $G[\varphi]$. Użyjemy zatem tensora deformacji Greena. Natomiast potencjał izotropowego ciała hipersprężystego jest niezmienniczy względem lagranżowskiego działania grupy izometrii materialnych, tj. zależy od φ za pośrednictwem $C[\varphi]$. W tym wypadku wskazane jest użycie tensora deformacji Cauchy’ego.

Struktura euklidesowa przestrzeni pozwala wydzielić z konfiguracji wewnętrznej $\varphi \in \text{LI}(U, V)$ trzy podukłady stopni swobody. Są nimi:

1. Fikcyjne ciało sztywne w przestrzeni wektorowej U zamocowane w zerze i symbolizowane przez układ osi głównych tensora Greena - żyroskop Greena mający $\frac{1}{2}n(n-1)$ stopni swobody,
2. Żyroskop Cauchy’ego, tzn. fikcyjne ciało sztywne w przestrzeni wektorowej V zamocowane w zerze i symbolizowane przez układ osi głównych tensora Cauchy’ego, mający $\frac{1}{2}n(n-1)$ stopni swobody,
3. niezmienniki deformacji λ . Jest to czysto skalarna miara deformacji. Mówi ona, jakie długości będą miały osie główne elipsoidy otrzymanej w V za pomocą φ z jednostkowej sfery w U .

Lagranżowskie obroty sztywne nie działają na żyroskop Cauchy’ego (związane jest to z jego niezmienniczością względem obrotów materialnych) i skalarną deformację. Działają natomiast na żyroskop Greena. Natomiast tensor Greena jest niezmienniczy względem obrotów przestrzennych. Eulerowskie obroty sztywne kręcą żyroskopem Cauchy’ego, ale nie wpływają na żyroskop Greena i na niezmienniki deformacji. Na jednoczesne obroty lagranżowskie i eulerowskie niewrażliwe są wyłącznie niezmienniki deformacji. Żyroskopy Greena i Cauchy’ego zawierają informację o orientacji deformacji. Opisują, jak ustawione są względem ciała i przestrzeni osie elipsy otrzymanej ze sfery za pomocą odwzorowania φ . Niezmienniki deformacji nie zawierają żadnej informacji na temat orientacji tej elipsy względem przestrzeni i ciała. W kinematyce ciała afinicznie sztywnego układ niezmienników jest odpowiednikiem długości wektora wodzącego, zaś żyroskopy Greena i Cauchy’ego zawierają informację, będącą odpowiednikiem informacji kątowej.

Z każdą konfiguracją wewnętrzną $\varphi \in \text{LI}(U, V)$ można związać liniowe odwzorowanie izometryczne $U[\varphi] : U \rightarrow V$. To odwzorowanie izometryczne występuje w rozkładzie biegunowym odwzorowania φ , tzn.

$$\varphi = U[\varphi] \circ L(\varphi), \quad (1.10)$$

gdzie $L(\varphi) : U \rightarrow U$ jest odwzorowaniem η -symetrycznym i dodatnim. Rozkład ten można zapisać w postaci:

$$\varphi = \Lambda[\varphi] \circ U[\varphi], \quad (1.11)$$

gdzie: $\Lambda[\varphi] : V \rightarrow V$ jest liniowym odwzorowaniem g -symetrycznym i dodatnim.

Oczywiście

$$\Lambda[\varphi] = U[\varphi] \circ L[\varphi] \circ U[\varphi]^{-1}. \quad (1.12)$$

Izometria $U[\varphi]$ wiąże ze sobą tensory deformacyjne Greena i Cauchy'ego.

Jesteśmy w szczególności zainteresowani podwójnie izotropowymi modelami, gdzie potencjał V zależy od φ tylko poprzez niezmienniki deformacji.

1.3. Opis kinematyczny

W mechanice analitycznej ruch układu opisujemy za pomocą dwukrotnie różniczkowalnych krzywych $\rho : \mathbb{R} \rightarrow Q$ w przestrzeni konfiguracyjnej. Iloczynowa struktura przestrzeni $Q = M \times \text{LI}(U, V)$ pozwala oddzielić ruch postępowy i wewnętrzny. W mechanice ciał odkształcalnych jesteśmy głównie zainteresowani właśnie ruchem względem środka masy, tj. ruchem wewnętrznym.

Jeśli ciało ma konfigurację $Q_{\text{int}} = \text{LI}(U, V)$ to można zdefiniować uogólnioną prędkość ruchu wewnętrznego $\xi = \frac{d\varphi}{dt} \in L(U, V)$. Jest ona gradientem lagranżowskiego pola prędkości $\mathcal{Z} : N \rightarrow V$:

$$\mathcal{Z}(a) = \nu + \xi \cdot \vec{v}a \quad (1.13)$$

gdzie $\nu \in N$ jest lagranżowskim środkiem masy, $\nu^i = \frac{dx^i}{dt}$ jest prędkością ruchu postępowego środka masy. We współrzędnych afinicznych

$$\mathcal{Z}^i = \nu^i + \frac{d\varphi^i_K}{dt} a^K. \quad (1.14)$$

Mając prędkości uogólnione $\xi \in L(U, V)$ i konfigurację $\varphi \in \text{LI}(U, V)$ można zdefiniować tak zwane prędkości afiniczne („gyration” Eringenena) odpowiednio w reprezentacji przestrzennej i materialnej

$$\Omega \in L(V) \simeq \text{GL}(V)^\nabla, \quad \widehat{\Omega} \in L(U) \simeq \text{GL}(U)^\nabla. \quad (1.15)$$

gdzie jak zwykle G^∇ jest algebrą Liego grupy Liego G . Te quasi-prędkości, czyli prędkości nieholonomiczne wyróżnione są przez strukturę geometryczną przestrzeni konfiguracyjnej, ściśle mówiąc przez eulerowskie i lagranżowskie działanie grup liniowych $\text{GL}(U)$, $\text{GL}(V)$ na wewnętrzne stopnie swobody. Są to odwzorowania liniowe dane wzorami

$$\Omega = \xi \circ \varphi^{-1}, \quad \widehat{\Omega} = \varphi^{-1} \circ \xi, \quad (1.16)$$

w przedstawieniu macierzowym mamy:

$$\Omega^i_j = \frac{d\varphi^i_A}{dt} \varphi^{-1A}_j, \quad \widehat{\Omega}^A_B = \varphi^{-1A}_i \frac{d\varphi^i_B}{dt}. \quad (1.17)$$

Nieosobliwość odwzorowania φ powoduje iż znajomość prędkości uogólnionej ξ jest równoważna znajomości prędkości afinicznych Ω i $\widehat{\Omega}$ i na odwrót. Wielkości te zależą tylko od wewnętrznego stanu układu. Do opisu ciała możemy używać więc zamiast pary (φ, ξ) alternatywnie pary $(\varphi, \Omega) = \text{LI}(U, V) \times L(V)$ lub pary $(\varphi, \widehat{\Omega}) = \text{LI}(U, V) \times L(U)$.

Nieholonomiczny charakter prędkości afinicznych wiąże się z tym, że nie ma żadnych współrzędnych uogólnionych, ani w przestrzeni fizycznej ani lagranżowskiej, za pomocą których można by wyrazić Ω^i_j i $\widehat{\Omega}^A_B$ jako ich pochodne czasowe. Natomiast jako funkcje liniowe od ξ^i zależą od położenia w przestrzeni konfiguracyjnej, ale nie jako n^2 -wymiarowe gradienty.

Prędkość afiniczna Ω opisuje eulerowskie pole prędkości $\mathcal{E} : M \rightarrow V$ dane wzorem

$$\mathcal{E}(p) = \nu + \Omega \cdot \vec{op}, \quad (1.18)$$

czyli punkt materialny zajmujący położenie $p \in M$ porusza się względem środka masy z prędkością

$$\Omega \cdot \vec{op}.$$

Zapisując analitycznie eulerowskie pole prędkości ma postać:

$$\mathcal{E}^i(p) = \nu^i + \Omega^i_j x^j.$$

Tak więc prędkość afiniczna jest gradientem eulerowskiego pola prędkości $\Omega = \nabla \mathcal{E}$.

Związek pomiędzy Ω i $\hat{\Omega}$ wygląda następująco:

$$\Omega = \varphi \circ \hat{\Omega} \circ \varphi^{-1}, \quad \hat{\Omega} = \varphi^{-1} \circ \Omega \circ \varphi. \quad (1.19)$$

Używając współrzędnych powyższy związek możemy zapisać:

$$\Omega^i_j = \varphi^i_A \hat{\Omega}^A_B \varphi^{-1B}_j, \quad \hat{\Omega}^A_B = \varphi^{-1A}_i \Omega^i_j \varphi^j_B. \quad (1.20)$$

Jak widać jest to reguła przekształcenia za pomocą odwzorowania $\varphi \in \text{LI}(U, V)$ opisującego konfigurację wewnętrzną. Opis stanu wewnętrznego za pomocą pary $(\varphi, \Omega) \in \text{LI}(U, V) \times \text{L}(V)$ jest równoważny opisowi za pomocą pary $(\varphi, \hat{\Omega}) \in \text{LI}(U, V) \times \text{L}(U)$ pod warunkiem, że wielkość Ω jest φ -transformatą wielkości $\hat{\Omega}$.

Prędkości afiniczne (zarówno Ω jak i $\hat{\Omega}$) są niezmiennicze względem translacji materialnych i przestrzennych. Natomiast ich zachowanie pod działaniem eulerowskich i lagranżowskich transformacji generowanych przez grupy $\text{GL}(V)$ i $\text{GL}(U)$ jest następujące:

$$\begin{aligned} A \in \text{GL}(V) & : \text{L}(V) \ni \Omega \mapsto A \circ \Omega \circ A^{-1} \in \text{L}(V), \\ B \in \text{GL}(U) & : \text{L}(U) \ni \hat{\Omega} \mapsto B^{-1} \circ \hat{\Omega} \circ B \in \text{L}(U). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Prędkość afiniczna Ω jest niezmiennicza względem lagranżowskiego (materialnego) działania grupy $\text{GL}(U)$. Natomiast współtowarzysząca prędkość afiniczna $\hat{\Omega}$ ma odwrotne własności transformacyjne. Jest ona niezmiennicza względem transformacji eulerowskich (fizycznych).

Właśnie opis ruchu ciała za pomocą par (φ, Ω) lub $(\varphi, \hat{\Omega})$ zdaje sprawę z kinematycznych symetrii stopni swobody, opisanych przez grupy liniowe: eulerowską $\text{GL}(U)$ i lagranżowską $\text{GL}(V)$. Jak wiadomo $\text{L}(V)$, $\text{L}(U)$ utożsamiają się kanonicznie z algebraami Liego grup $\text{GL}(V)$, $\text{GL}(U)$. Nieholonomiczne prędkości Ω , $\hat{\Omega}$ są więc elementami

algebr Liego grup transformacji działających tranzytywnie i swobodnie na wewnętrznej przestrzeni konfiguracyjnej $Q_{\text{int}} = \text{LI}(U, V)$. Jest to przypadek szczególny procedury stosowanej w mechanice układów, których przestrzeń konfiguracyjna jest grupą Liego lub jej przestrzenią jednorodną, jak w naszym przypadku. Z uwagi na fakt, iż jest to zagadnienie ważne pozwolę sobie ten temat rozwinąć bardziej szczegółowo w Rozdziale 2.

W zwykłych mechanicznych modelach opartych na zasadzie d'Alembert'a efektywna energia kinetyczna jest otrzymywana przez ograniczenie energii kinetycznej układu wielocząstkowego do rozmaitości więzów afinicznych. Wynikające stąd wyrażenie jest kontrolowane przez stałe inercjalne wielkości, tj. całkowitą masę \mathcal{M} i moment drugiego rzędu miary μ względem współrzędnych lagranżowskich:

$$\mathcal{M} = \int d\mu(a), \quad (1.22)$$

$$J^{KL} = \int a^K a^L d\mu(a) = J^{LK}. \quad (1.23)$$

\mathcal{M} charakteryzuje bezwładność w ruchu postępowym i J charakteryzuje wewnętrzne inercjalne własności ciała. Interesujące jest, że ta sama wielkość J opisuje rotacyjną i deformacyjną bezwładność. Zwykły tensor bezwładności znany z mechaniki ciała sztywnego jest liniową funkcją J (i odwrotnie). Oczywiście, $J \in U \otimes U$ jest dwukrotnie kontrawariantnym, symetrycznym, nieosobliwym, dodatnio określonym tensorem w U .

Jeśli $g \in V^* \otimes V^*$ oznacza tensor metryczny przestrzeni fizycznej, wtedy zwykła energia kinetyczna wielu cząstek ruchu afinicznego jest dana przez

$$T = T_{\text{tr}} + T_{\text{int}} = \frac{\mathcal{M}}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{d\varphi^i_A}{dt} \frac{d\varphi^j_B}{dt} J^{AB}, \quad (1.24)$$

gdzie T_{tr} jest oczywiście energią kinetyczną ruchu postępowego i T_{int} odnosi się do wewnętrznego/względego ruchu.

Jeżeli używamy ortonormalnych współrzędnych kartezjańskich, $g_{ij} = \delta_{ij}$ i utożsamiamy $M = N = U = V = \mathbb{R}^n$, $Q_{\text{int}} = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ($\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ w przypadku ośrodków

ciągłych), wtedy wygodny jest poniższy opis macierzowy:

$$\begin{aligned} T = T_{\text{tr}} + T_{\text{int}} &= \frac{\mathcal{M}}{2} \frac{dx^\top}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left(J \frac{d\varphi^\top}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \\ &= \frac{\mathcal{M}}{2} \text{Tr} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx^\top}{dt} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{d\varphi}{dt} J \frac{d\varphi^\top}{dt} \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Należy jeszcze wspomnieć o spinie afinicznym w reprezentacji przestrzennej i współtowarzyszącej. Są to obiekty $\Sigma \in L(V)^* \simeq L(V)$, $\hat{\Sigma} \in L(U)^* \simeq L(U)$ (identyfikowane poprzez wzór na ślad, $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB)$) dobrze zdefiniowane:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \varphi p \quad , \quad \Sigma^i_j = \varphi^i_{AP} p^A_j, \\ \hat{\Sigma} &= p\varphi \quad , \quad \hat{\Sigma}^A_B = p^A_i \varphi^i_B. \end{aligned} \quad (1.26)$$

We wzorach tych $p \in L(V, U) \simeq L(U, V)^*$ (ponownie utożsamienie za pomocą wzoru na ślad) jest pędem kanonicznym sprzężonym do φ .

Składowe Σ^i_j są hamiltonowskimi generatorami $GL(V)$ działania lewostronnego na $LI(U, V)$, i $\hat{\Sigma}^A_B$ są hamiltonowskimi generatorami działań prawostronnych $GL(U)$ na $LI(U, V)$. Jeśli $g \in V^* \otimes V^*$, $\eta \in U^* \otimes U^*$ oznaczają tensory metryczne, odpowiednio, w V i U , wtedy podwojone anty-symetryczne części \mathcal{S} , $\hat{\mathcal{S}}$,

$$\mathcal{S}^i_j := \Sigma^i_j - g^{ik} g_{jl} \Sigma^l_k, \quad (1.27)$$

$$\mathcal{V}^A_B := \hat{\Sigma}^A_B - \eta^{AC} \eta_{BD} \hat{\Sigma}^D_C \quad (1.28)$$

są odpowiednio spinem i wirowością (vorticity). Są one hamiltonowskimi generatorami (odwzorowaniem pędu, „momentum mapping”) właściwych podgrup ortogonalnych $SO(V, g) \subset GL(V)$, $SO(U, \eta) \subset GL(U)$ działań odpowiednio lewych i prawych na $LI(U, V)$.

Wielkości Σ^i_j , p_k są hamiltonowskimi generatorami przestrzennej grupy afinicznej $GAf(M)$. Odpowiednie nawiasy Poissona opierają się na stałych strukturalnych tej grupy

$$\begin{aligned} \{\Sigma^i_j, \Sigma^k_l\} &= \delta^i_l \Sigma^k_j - \delta^k_j \Sigma^i_l, \\ \{p_i, p_j\} &= 0, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}\{\Sigma_j^i + x^i p_j, p_k\} &= \delta^i_k p_j, \\ \{\Sigma_j^i + x^i p_j, \Sigma_l^k + x^k p_l\} &= \delta^i_l (\Sigma_j^k + x^k p_j) - \delta^k_j (\Sigma_l^i + x^i p_l).\end{aligned}$$

Oczywiście,

$$\{\Sigma_j^i, p_k\} = 0. \quad (1.30)$$

Dla materialnego spinu afinicznego mamy:

$$\{\widehat{\Sigma}^A_B, \widehat{\Sigma}^C_D\} = \delta^C_B \widehat{\Sigma}^A_D - \delta^A_D \widehat{\Sigma}^C_B, \quad (1.31)$$

i ponadto

$$\{\Sigma_j^i, \widehat{\Sigma}^A_B\} = 0, \quad (1.32)$$

ponieważ działanie lewostronne $\text{GL}(V)$ komutuje z działaniem prawostronnym $\text{GL}(U)$.

Podobnie, nawiasy Poissona $\mathcal{S}^i_j, \mathcal{V}^A_B$ (1.27), (1.28) wyrażają się przez stałe strukturalne grup $\text{SO}(V, g), \text{SO}(U, \eta)$; nie będziemy ich tu przytaczać.

Dla każdej funkcji F zależnej tylko od konfiguracji (x, φ) , mamy:

$$\begin{aligned}\{\Sigma_j^i, F\} &= -\varphi^i_A \frac{\partial F}{\partial \varphi^j_A}, \\ \{\widehat{\Sigma}^A_B, F\} &= -\varphi^k_B \frac{\partial F}{\partial \varphi^k_A},\end{aligned} \quad (1.33)$$

Przytoczmy również oczywiste nawiasy:

$$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j, \quad \{\varphi^i_A, p^B_j\} = \delta^i_j \delta^B_A. \quad (1.34)$$

Oprócz tego nawiasy Poissona znikają pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi, i również pomiędzy pędami uogólnionymi.

Zależności nawiasów Poissona są bardzo wygodne w przypadku gdy wyprowadzamy równania ruchu. Ten sposób jest dużo prostszy i bardziej efektywny niż bezpośrednio oparty na równaniach Eulera-Lagrange'a.

1.4. Formalizm hamiltonowski

Pojęcie mechanicznej przestrzeni stanów wprowadza się po to, aby móc operować równaniami pierwszego rzędu, zazwyczaj rozwiązanymi względem pochodnych, a więc

układami dynamicznymi. Jak wiadomo newtonowskie równania ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi drugiego rzędu. Tak więc efektywne obniżenie rzędu równań jest bardzo użyteczne. Ponadto język hamiltonowski, pędowy, jest bardzo wygodny przy badaniu symetrii dynamicznych, gdyż zdaje sprawę ze związku między stałymi ruchu a jednoparametrowymi grupami symetrii. Dostarcza też wielu efektywnych metod rachunkowych. Co jest bardzo ważne, hamiltonowskie sformułowanie mechaniki jest niezbędne przy przejściu do teorii kwantowej.

W mechanice analitycznej używa się dwóch typów przestrzeni stanów: newtonowskiej \mathcal{N} i hamiltonowskiej \mathcal{P} . Newtonowska przestrzeń stanów \mathcal{N} , czyli położeń i prędkości jest pojęciem stosowanym do wszystkich układów mechanicznych rządzonych prawami dynamiki Newtona - zarówno zachowawczych, jak i dyssypatywnych. Natomiast Hamiltonowska przestrzeń stanów \mathcal{P} , czyli przestrzeń fazowa, służy wyłącznie do opisu układów rządzonych równaniami Eulera-Lagrange'a, wyprowadzonymi z zasady wariacyjnej. Przestrzeń fazowa powstaje z przestrzeni konfiguracyjnej poprzez dołączenie do układu zmiennych położeńowych pędów kanonicznych, czyli wektorów kowariantnych (ko-wektorów).

W modelach nie-dyssypatywnych bez zewnętrznych magnetycznych lub żyroskopowych sił wyprowadza się równania ruchu z Lagrangianu

$$L = T - V(x, \varphi) \quad (1.35)$$

jako wariacyjne równania Eulera-Lagrange'a. Transformacja Legendre'a

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \quad p^A_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^i_A} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}^i_A}, \quad (1.36)$$

tj.

$$p_i = \mathcal{M} g_{ij} \frac{dx^j}{dt}, \quad p^A_i = g_{ij} \frac{d\varphi^j_B}{dt} J^{BA}. \quad (1.37)$$

umożliwia konstrukcję Hamiltonianu jako funkcji współrzędnych uogólnionych x^i , φ^i_A i kanonicznego pędu uogólnionego p_i , p^A_i , tzn.

$$H = T + V = T_{\text{tr}} + T_{\text{int}} + V = \frac{1}{2\mathcal{M}} g^{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} \tilde{J}_{AB} p^A_i p^B_j g^{ij} + V, \quad (1.38)$$

gdzie $\tilde{J} \in U^* \otimes U^*$ jest tensorem odwrotnym do J (1.23),

$$\tilde{J}_{AC} J^{CB} = \delta_A^B. \quad (1.39)$$

Przestrzenie grupowe i jednorodne

W naszych rozważaniach, tak jak w wielu zagadnieniach mechaniki dużą rolę odgrywają, choć często implicite, tzw. prędkości nieholonomiczne, lub quasiprędkości. Historycznie rzecz biorąc, zostały one wprowadzone przez Boltzmann'a. W wielu zagadnieniach, a typowym przykładem jest tu dynamika bryły sztywnej lub afinicznie sztywnej, są one nieporównywalnie wygodniejsze w użyciu niż powszechnie używane prędkości uogólnione. Klasycznym przykładem są składowe prędkości kątowej bryły sztywnej.

2.1. Newtonowska i Hamiltonowska przestrzeń stanów

Wyobraźmy sobie, że przestrzenią konfiguracyjną jest rozmaitość różniczkowa Q o wymiarze n . Jej lokalne współrzędne, czyli mówiąc językiem mechanicznym współrzędne uogólnione, będziemy oznaczać przez q^i , $i = 1, \dots, n$. Ruchy układu są krzywy-

mi klasy C^2 w Q ; analitycznie opisujemy je zadając q^i jako funkcje czasu t . W kanoniczny sposób krzywe $\rho : \mathbb{R} \rightarrow Q$ podnosimy do wiązki stycznej TQ , czyli Newtonowskiej przestrzeni stanów - przestrzeni położeń i prędkości. Podniesienia te oznaczamy przez $\rho' : \mathbb{R} \rightarrow TQ$. Znajdując się chwilowo (w chwili t) w punkcie $\rho(t) \in Q$ przestrzeni konfiguracyjnej, obiekt ma prędkość chwilową $\rho'(t) \in T_{\rho(t)}Q$ - jest ona wektorem należącym do przestrzeni stycznej w punkcie $\rho(t)$. Współrzędne q^i indukują w $2n$ -wymiarowej rozmaiłości TQ naturalne współrzędne (q^i, v^i) . Rozumiemy to w ten sposób, że dla dowolnego wektora $v \in T_qQ$, v^i są jego składowymi w sensie współrzędnych q^i . Analitycznie, podniesiona do TQ krzywa ρ' ewolucji układu jest opisana przez czasową zależność współrzędnych: $q^i(t), v^i(t)$, przy czym oczywiście przy zadanych funkcjach $t \mapsto q^i(t)$, funkcje $t \mapsto v^i(t)$ nie są już dowolne, lecz są ich pochodnymi czasowymi:

$$v^i(t) = \frac{dq^i}{dt}(t) = \dot{q}^i(t).$$

Uwaga: w mechanice Hamiltonowskiej używamy $\mathcal{P} = T^*Q$ Hamiltonowskiej przestrzeni stanów - wiązki kostycznej, czyli przestrzeni fazowej układu. Jej elementami są kowektory $p \in T_q^*Q$ brane we wszystkich możliwych punktach $q \in Q$; są one po prostu funkcjami liniowymi na przestrzeniach stycznych T_qQ . Oczywiście Hamiltonowska przestrzeń stanów T^*Q też ma wymiar $2n$ i współrzędne q^i indukują w T^*Q współrzędne q^i, p_i . Rozumiemy to tak, że dla każdego $p \in T_q^*Q$, p_i są jego składowymi względem współrzędnych q^i w Q . Rozmaiłość T^*Q jest wyposażona w naturalną strukturę geometryczną. Jej punktem wyjścia jest 1-forma różniczkowa Cartana

$$\Theta = p_i dq^i. \quad (2.1)$$

Powyższa definicja opiera się na użyciu współrzędnych lokalnych q^i , ale jak łatwo sprawdzić, nie zależy od ich wyboru; w nowych współrzędnych $(q^{i'}, p_{i'})$ mamy:

$$p_{i'} dq^{i'} = p_j \frac{\partial q^j}{\partial q^{i'}} \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^k} dq^k = p_j \delta^j_k dq^k = p_i dq^i$$

(użyto reguły transformacyjnej dla różniczek dq^i w jakimś sensie równoważnych prędkościom uogólnionym v^i i dla składowych pędu). Formę Θ można zdefiniować w sposób

„absolutny”, bez użycia współrzędnych, lecz nie będziemy tutaj w to wnikać. W oparciu o Θ definiuje się biformę symplektyczną

$$\gamma = d\Theta, \quad (2.2)$$

jej różniczkę zewnętrzną. Analitycznie: wprowadzając jednolity zapis dla współrzędnych:

$$(\dots, z^a, \dots) = (\dots, q^i, \dots; \dots, p_i, \dots), \quad a = 1, \dots, 2n,$$

mamy

$$\Theta = \Theta_a dz^a \quad (2.3)$$

gdzie składowe $2n$ -wymiarowego pola kowektorów na T^*Q , mają postać:

$$(\dots, \Theta_a, \dots) = (\dots, p_i, \dots; 0, \dots, 0).$$

Analitycznie, nie używając języka absolutnego, γ jest rotacją, tzn.

$$\gamma_{ab} = \partial_a \Theta_b - \partial_b \Theta_a = \Theta_{b,a} - \Theta_{a,b}, \quad (2.4)$$

i odpowiednia macierz dana jest przez

$$[\gamma_{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & -I \\ \dots & \dots & \dots \\ I & \vdots & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

zaznaczone bloki 0 , I są odpowiednio zerową i jednostkową macierzą $n \times n$. Macierz odwrotna $[\gamma^{ab}]$ zdefiniowana warunkiem:

$$\gamma^{ac} \gamma_{cb} = \delta^a_b; \quad (2.6)$$

w przeciwieństwie do kowariantnego tensora γ , określa tensor kontrawariantny $\tilde{\gamma}$, czyli biwektor. Jest on używany w definicji nawiasu Poissona:

$$\{F, G\} = \gamma^{ab} \frac{\partial F}{\partial z^a} \frac{\partial G}{\partial z^b} = \gamma^{ab} F_{,a} G_{,b}. \quad (2.7)$$

Oczywiście:

$$[\gamma^{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Ze względu na antysymetrię formy γ i jej zamkniętość, tzn. $d\gamma = 0$, nawias ten jest antysymetryczny w funkcjach F, G ,

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad \{F, F\} = 0, \quad (2.9)$$

spełnia tożsamość Jacobiego.

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0, \quad (2.10)$$

i określa więc strukturę nieskończenie-wymiarowej algebry Liego w $C^\infty(T^*Q)$, czyli w $C^\infty(\mathcal{P})$.

Oczywiście w zmiennych q^i, p_i nawias Poissona wyraża się zwykłym wzorem:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}. \quad (2.11)$$

Ważną własnością nawiasu Poissona używaną przez nas przy wyprowadzaniu równań ruchu jest:

$$\{F, G(f_1, \dots, f_p)\} = \sum_{k=1}^p \{F, f_k\} G_{,k}(f_1, \dots, f_p), \quad (2.12)$$

gdzie $G_{,k}$ oznacza pochodną funkcji złożonej po k -tej funkcji pośredniej. Powyżej F jest dowolną funkcją gładką na przestrzeni fazowej, podobnie, jak f_1, \dots, f_p . Natomiast G jest gładką funkcją na \mathbb{R}^p i $G(f_1, \dots, f_p)$ jako funkcja złożona jest też gładką funkcją na przestrzeni fazowej \mathcal{P} .

Uwaga: Inaczej, niż w Newtonowskiej przestrzeni stanów, nie ma w przestrzeni fazowej $\mathcal{P} = T^*Q$ żadnej reguły podnoszenia krzywych ρ z Q do T^*Q . Można to zrobić tylko wtedy, gdy zadany jest Lagrangian, a więc model niedyssypatywnej dynamiki,

$$L : TQ \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Wtedy definiujemy przekształcenie Legendre'a: $\mathcal{L} : TQ \rightarrow T^*Q$ w taki sposób, że każdej wirtualnej prędkości $v \in T_qQ$ przypisujemy pęd kanoniczny $p \in T_q^*Q$, mianowicie

$$p := \mathcal{L}(v) = D_v(L|T_qQ). \quad (2.14)$$

Analitycznie:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (2.15)$$

A zatem możemy zgodnie z tą regułą podnieść krzywe ρ z Q do T^*Q . Podnoszenie to jest zależne od dynamiki.

Hamiltonian $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowany jest wzorem:

$$H(\mathcal{L}(v)) = E(v), \quad (2.16)$$

gdzie E jest energią:

$$E(v) = \langle D_v(L|_{T_q Q}), v \rangle - L(v). \quad (2.17)$$

Analitycznie:

$$H(q^i, p_i) = E(q^i, v^i), \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}, \quad (2.18)$$

$$E = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L. \quad (2.19)$$

2.2. Prędkości i pędy nieholonomiczne

Lokalnie rozmaitości TQ , T^*Q dają się po wyborze współrzędnych utożsamić z $Q \times V$, $Q \times V^*$ (V - n -wymiarowa przestrzeń liniowa, V^* - jej dualna przestrzeń funkcji liniowych na V). Ale tylko lokalnie i to w sposób niekanoniczny, zależny od współrzędnych q^i !!!

Pojęcie prędkości nieholonomicznych i ich quasi-pędów sprzężonych pozwala na globalizację tej procedury, oczywiście tylko za cenę wprowadzenia dodatkowych obiektów geometrycznych (które w interesujących przypadkach i tak istnieją w Q).

Wyobraźmy sobie, że w Q zadana jest rodzina form różniczkowych ω^a , $a = 1, \dots, n$,

$$\omega^a = \omega^a_i(q) dq^i. \quad (2.20)$$

Nie zakładamy ich zamkniętości, a więc dopuszczamy

$$d\omega^a \neq 0, \quad \text{czyli} \quad \omega^a_{i,j} - \omega^a_{j,i} \neq 0,$$

natomiast zakładamy nieosobliwość:

$$\det[\omega^a_i] \neq 0.$$

Geometrycznie można powiedzieć, że system obiektów ω^a określa jednoformę różniczkową ω na Q o wartościach w n -wymiarowej przestrzeni liniowej V . Czasem wygodniej jest używać V niż przestrzeni arytmetycznej \mathbb{R}^n .

Obiekty ω pozwalają zamiast prędkości uogólnionych $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$ wprowadzić prędkości nieholonomiczne:

$$\Omega = \omega_i(q) \frac{dq^i}{dt} \in V; \quad (2.21)$$

analitycznie

$$\Omega^a = \omega^a_i(q) \frac{dq^i}{dt} = \omega^a_i(q) \dot{q}^i. \quad (2.22)$$

„Żartobliwie”:

$$,,\Omega^a = \frac{\omega^a}{dt} .$$

Wyrażając się ściśle: ω jest formą różniczkową na Q o wartościach w V ; dla każdego $q \in Q$:

$$\omega_q \in L(T_q Q, V) \simeq V \otimes T_q^* Q. \quad (2.23)$$

Niech $\rho': \mathbb{R} \rightarrow TQ$ będzie podniesieniem $\rho: \mathbb{R} \rightarrow Q$. Wtedy Ω jest ewaluacją ω na ρ' :

$$\Omega(t) = \langle \omega_{\rho'(t)}, \rho'(t) \rangle. \quad (2.24)$$

Uwaga: jeśli ω^a nie są zamknięte,

$$d\omega^a \neq 0, \quad \text{tzn.} \quad \omega^a_{i,j} - \omega^a_{j,i} \neq 0,$$

to Ω są istotnie nieholonomiczne, tzn. nie ma takich współrzędnych Q^i na Q , żeby zachodziło

$$\Omega^i = \frac{dQ^i}{dt}.$$

Zwróćmy uwagę, że jeśli obiekt ω jest w regularny sposób globalnie określony na całym Q , to pozwala na utożsamienie wszystkich przestrzeni stycznych $T_q Q$ ze standardową przestrzenią liniową V . Zatem TQ jest wtedy izomorficzna w kanoniczny sposób (z dokładnością do zadania ω) z rozmaitością $Q \times V$,

$$TQ \simeq Q \times V. \quad (2.25)$$

Stany Newtonowskie są więc parami $(q, \Omega) \in Q \times V$. Oczywiście żądanie istnienia takiego obiektu nakłada pewne ograniczenia topologiczne na rozmaitość Q .

Ciekawe jest, że ω jest równoważna zadaniu na Q koneksji afinicznej teleparalelizmu o znikającym tensorze krzywizny i na ogół nieznikającej torsji (tensorze skręcenia), bo mamy niezależny od drogi przepis na ustalenie izomorfizmu między przestrzeniami stycznymi. Oczywiście przez dualność mamy automatycznie zadane utożsamienie przestrzeni kostycznych T_q^*Q (przestrzeni pędów) ze standardową przestrzenią V^* , a tym samym naturalny dyfeomorfizm:

$$T^*Q \simeq Q \times V^*. \quad (2.26)$$

Opiszmy najpierw tę procedurę analitycznie. Wektorom kowariantnym $p \in T_q^*Q$ będziemy przypisywali elementy $\Sigma \in V^*$ w taki sposób, by zachodziło:

$$\langle \Sigma, \Omega \rangle = \langle p, v \rangle \quad (2.27)$$

dla dowolnego $v \in T_qQ$. Zatem analitycznie:

$$\Sigma_a \Omega^a = p_i v^i. \quad (2.28)$$

Ponieważ

$$\Omega^a = \omega^a{}_i v^i,$$

więc stąd

$$\Sigma_a = p_i \omega^{-1}{}^i{}_a. \quad (2.29)$$

Oznaczmy

$$\sigma^i{}_a := \omega^{-1}{}^i{}_a, \quad \text{tzn.} \quad \Sigma_a = p_i \sigma^i{}_a. \quad (2.30)$$

Możemy na σ_a , $a = 1, \dots, n$, patrzeć jak na układ liniowo niezależnych pól wektorowych na Q . W każdym punkcie $q \in Q$, mamy następujące działanie, które z $p \in T_q^*Q$ „produkuje” $\Sigma \in V^*$:

$$\Sigma = \sigma^* \cdot p = p \circ \sigma_q. \quad (2.31)$$

Przy danym q , σ_q jest tu izomorfizmem liniowym V na T_qQ , a tym samym $p \circ \sigma_q$ jest izomorfizmem liniowym V na \mathbb{R} , czyli elementem \mathbb{R}^* .

2.3. Koneksja teleparalelizmu

Całkowalne utożsamienie parami różnych przestrzeni stycznych między sobą i k stycznymi między sobą pozwala na wprowadzenie koneksji teleparalelizmu. Ma ona zerowy tensor krzywizny i na ogół niezerowy tensor skręcenia. Jest ona analitycznie dana przez:

$$\Gamma^i_{jk} = \sigma^i_a \omega^a_{j,k} = \omega^{-1i}_a \omega^a_{j,k} = \sigma^i_a \sigma^{-1a}_{j,k}. \quad (2.32)$$

Jest ona jednoznacznie zdefiniowana warunkiem

$$\nabla \sigma_a = 0, \quad a = 1, \dots, n, \quad (2.33)$$

czyli pola wektorowe σ_a są względem niej równoległe (kowariantnie stałe). To samo dotyczy pól kowektorowych,

$$\nabla \omega^a = 0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (2.34)$$

Nie jedynym ale bardzo ważnym, szczególnie dla naszych rozważań jest przypadek, gdy rozmaitość Q jest grupą Liego G lub przestrzenią grupową grupy Liego. Wtedy w roli pól σ_a można użyć pól wektorowych generujących lewe translacje regularne (a więc lewo-niezmienniczych), lub też generujących prawe translacje regularne (a więc prawo-niezmienniczych). Odpowiednie ω^a są wtedy odpowiednio dualnymi prawo- lub lewo-niezmiennicznymi formami Maurena-Cartana.

Obejmuje to też możliwość zastosowań, gdy przestrzeń konfiguracyjna jest przestrzenią jednorodną $Q = G/H$ lub $Q = H \setminus G$ grupy Liego.

Istnieją też ciekawe przykłady, np. jak układy mechaniczne z więzami nieholonomicznymi. Najłatwiej jest je opisywać w języku quasiprędkości. Z innym przykładem mamy do czynienia w mechanice infinitezymalnych obiektów ze strukturą (np. sztywnych lub afinicznie sztywnych) w rozmaitości Riemanna o niezerowym tensorze krzywizny.

Nas interesuje głównie przypadek ruchu ciał sztywnych lub afinicznie sztywnych w przestrzeni Euklidesowej. Wprowadzone tu prędkości i spiny afiniczne oraz prędkości i zwykle spiny Ω , Σ , ω , s są tu szczególnym przykładem.

Sprzężone nieholonomiczne pędy jak spin afiniczny Σ lub spin s , są w przypadku grupy Hamiltonowskimi generatorami przestrzennych i materialnych deformacji i obrotów. Ich nawiasy Poissona odzwierciedlają strukturę wspomnianych grup przekształceń i wyrażają się przez ich stałe strukturalne.

W rozważanych przez nas przypadkach grupa Liego G jest zawsze grupą liniową, np. pełną rzeczywistą grupą liniową, jej podgrupą unimodularną lub podgrupą obrotów. Zawsze wtedy elementy grupy są pewnymi macierzami i to samo dotyczy prędkości nieholonomicznych i ich sprzężonych pędów nieholonomicznych. Mamy wtedy dwie konwencje teleparalelizmu. Jeśli ruch opisany jest przez krzywą $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in G$, to mamy do dyspozycji dwa sposoby przenoszenia wektorów stycznych, czyli prędkości uogólnionych $\dot{g}(t) \in T_{g(t)}G$ do jedności grupy.

$$\Omega = \dot{g}(t)g(t)^{-1}, \quad \hat{\Omega} = g(t)^{-1}\dot{g}(t) = g(t)^{-1}\Omega g(t). \quad (2.35)$$

Wszystkie przestrzenie styczne są więc wtedy na dwa sposoby utożsamione z przestrzenią styczną w jedności $e \in G$, czyli z algebrą Liego $\mathfrak{g} = T_eG$. W przypadku pełnej grupy liniowej $GL(n, \mathbb{R})$ otrzymane w ten sposób quasiprędkości wypełniają sobą pełną przestrzeń $L(n, \mathbb{R})$ wszystkich macierzy rzeczywistych. Są to nasze prędkości afiniczne. Jeśli w roli G występuje podgrupa $SL(n, \mathbb{R})$ złożona z macierzy o wyznaczniku równym jedności (nieściśliwe ciało afinicznie sztywne), to $\text{Tr}\Omega = \text{Tr}\hat{\Omega} = 0$, czyli prędkości afiniczne są wtedy bezśladowe. Jeśli G jest podgrupą ortogonalną właściwą $SO(n, \mathbb{R})$, to $\Omega = -\Omega^T$, $\hat{\Omega} = -\hat{\Omega}^T$, czyli quasiprędkości afiniczne są antysymetryczne, a więc są zwykłymi prędkościami kątowymi. W przypadku 3-wymiarowym i tylko w tym, można je utożsamić z wektorami osiowymi:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\omega}_3 & \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 & 0 & -\hat{\omega}_1 \\ -\hat{\omega}_2 & \hat{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Gdy $n = 2$, obiekty ω , $\hat{\omega}$ są sobie równe i mają tylko jedną istotną składową:

$$\Omega = \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Tylko w tym wyjątkowym przypadku ze względu na przemienność grupy $SO(2, \mathbb{R})$, ω , $\hat{\omega}$ są prędkościami holonomicznymi. Jeśli mianowicie sparametryzujemy $SO(2, \mathbb{R})$ w zwykły sposób,

$$g(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

to $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. W fizycznym przypadku trójwymiarowym i w każdym wyższym wymiarze, prędkości kątowe są nieholonomiczne. Nie ma np. na trójwymiarowej grupie obrotów takich współrzędnych Q^i , $i = 1, 2, 3$, by zachodziło $\omega = \frac{dQ^i}{dt}$.

W omawianych tu przypadkach Σ -obiekty, czyli sprzężone pędy nieholonomiczne są też macierzami, odpowiednio ogólnymi, bezśladowymi i antysymetrycznymi. Ten ostatni przypadek to spiny kanoniczne, które dla $n = 3$ również można utożsamić z kowektorami osiowymi. Obiekty Σ jako funkcyjonały działają na quasiprędkości w sensie śladu:

$$\langle \Sigma, \Omega \rangle = \text{Tr}(\Sigma\Omega). \quad (2.37)$$

W przypadku grupy ortogonalnej (ruch sztywny), wygodniej jest używać konwencji

$$\langle \Sigma, \Omega \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Sigma\Omega). \quad (2.38)$$

Wtedy w przypadku trójwymiarowym wygodnie jest położyć

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}_3 & -\hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_3 & 0 & \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 & -\hat{\sigma}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Wtedy

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(\Sigma\Omega) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{\Sigma}\hat{\Omega}) = \sigma_i \omega^i = \hat{\sigma}_i \hat{\omega}^i, \quad (2.40)$$

co zgadza się ze zwykłymi konwencjami w mechanice bryły sztywnej.

W przypadku dwuwymiarowym

$$\Sigma = \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix}$$

i wtedy:

$$\frac{1}{2}\text{Tr}(\Sigma\Omega) = \frac{1}{2}\text{Tr}(\widehat{\Sigma}\widehat{\Omega}) = \sigma\omega.$$

Nawiasy Poissona dla spinów afinicznych dane są wzorami (1.29), (1.30). Ponieważ zwykle spiny (wewnętrzne momenty pędu) są podwojonymi częściami antysymetrycznymi spinów afinicznych, tzn.

$$S_{ij} = \Sigma_{ij} - \Sigma_{ji}, \quad (2.41)$$

to

$$\{S_{ab}, S_{cd}\} = M_{cb}\delta_{ad} - M_{ad}\delta_{cb} + M_{db}\delta_{ac} - M_{ac}\delta_{db}, \quad (2.42)$$

jeśli używać współrzędnych ortonormalnych.

Stąd wynika w szczególności, że dla powyższych wielkości $\sigma_i, \hat{\sigma}_i$, będzie zachodziło:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \varepsilon_{ij}^k \sigma_k, \quad \{\hat{\sigma}_a, \hat{\sigma}_b\} = -\varepsilon_{ab}^c \hat{\sigma}_c, \quad (2.43)$$

$$\{\sigma_i, \hat{\sigma}_a\} = 0.$$

Wróćmy na chwilę do przypadku ogólnego i opiszmy bazowe nawiasy Poissona w przypadku, gdy przestrzeń konfiguracyjna jest grupą Liego (lub, ściślej mówiąc, jej przestrzenią jednorodną z trywialnymi grupami izotropii).

Jak wspomniano, mamy wtedy dwa rodzaje prędkości nieholonomicznych $\Omega, \widehat{\Omega}$ (2.35) i odpowiednio dwa rodzaje sprzężonych do nich quasipędów. Niech $q^a, a = 1, \dots, n$ będą współrzędnymi kanonicznymi 1-go rodzaju w grupie G . Jeśli grupa ta jest liniowa (innych przypadków tu nie rozpatrujemy), to oznacza to, że parametryzacja G ma postać

$$g(q^1, \dots, q^n) = \exp(q^a E_a) \quad (2.44)$$

(sumowanie po $a = 1, \dots, n$), gdzie E_a są bazowymi elementami algebry Liego. Spełniają one związki komutacyjne:

$$[E_a, E_b] = C^c_{ab} E_c \quad (2.45)$$

gdzie C są stałymi strukturalnymi grupy.

Wtedy zachodzi:

$$[\Sigma_a, \Sigma_b] = -C^c{}_{ab}\Sigma_c, \quad [\widehat{\Sigma}_a, \widehat{\Sigma}_b] = C^c{}_{ab}\widehat{\Sigma}_c, \quad (2.46)$$

$$[\Sigma_a, \widehat{\Sigma}_b] = 0.$$

Dla odpowiadających pól wektorowych σ_a mamy wtedy:

$$[\sigma_a, \sigma_b] = -C^c{}_{ab}\sigma_c, \quad [\widehat{\sigma}_a, \widehat{\sigma}_b] = C^c{}_{ab}\widehat{\sigma}_c, \quad (2.47)$$

$$[\sigma_a, \widehat{\sigma}_b] = 0,$$

gdzie nawias kwadratowy oznacza nawias Liego pól wektorowych

$$[X, Y]^i = X^j Y^i{}_{,j} - Y^j X^i{}_{,j}, \quad (2.48)$$

czyli komutator operatorów różniczkowych pierwszego rzędu utożsamianych z polami wektorowymi według wzoru:

$$Xf = X^a f_{,a}. \quad (2.49)$$

Pola wektorowe $\sigma_a, \widehat{\sigma}_a$ traktowane jako operatory różniczkowe 1-go rzędu są generatorami odpowiednio lewostronnych i prawostronnych translacji regularnych. Oznacza to, że dla dowolnej różniczkowalnej funkcji skalarnej F zachodzi:

$$\begin{aligned} (\sigma_a F)(k) &= \left. \frac{\partial}{\partial q^a} F(g(q)k) \right|_{q=0}, \\ (\widehat{\sigma}_a F)(k) &= \left. \frac{\partial}{\partial q^a} F(kg(q)) \right|_{q=0}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

dla dowolnego $k \in G$. Można sprawdzić, że dla dowolnej różniczkowalnej funkcji skalarnej F zależnej tylko od współrzędnych uogólnionych q^a (ale nie od pędów), a więc w istocie funkcji „podniesionej” do T^*G z przestrzeni konfiguracyjnej G , mamy:

$$\{\Sigma_a, F\} = -\sigma_a F, \quad \{\widehat{\Sigma}_a, F\} = -\widehat{\sigma}_a F. \quad (2.51)$$

Oczywiście dla dowolnych funkcji A, B zależnych tylko od q (podniesionych z przestrzeni konfiguracyjnej) zachodzi:

$$\{A, B\} = 0. \quad (2.52)$$

Powyższe bazowe nawiasy Poissona pozwalają na obliczenie nawiasów między dowolnymi funkcjami F, H na przestrzeni fazowej $\mathcal{P} = T^*G$, traktowanymi analitycznie jako funkcje od q^a, Σ_a , lub od $q^a, \hat{\Sigma}_a$. Mamy wtedy:

$$\{F, H\} = \Sigma_l C^l_{uv} \frac{\partial F}{\partial \Sigma_u} \frac{\partial H}{\partial \Sigma_v} - \frac{\partial F}{\partial \Sigma_u} (\sigma_u H) + \frac{\partial H}{\partial \Sigma_u} (\sigma_u F), \quad (2.53)$$

i podobnie

$$\{F, H\} = -\hat{\Sigma}_l C^l_{uv} \frac{\partial F}{\partial \hat{\Sigma}_u} \frac{\partial H}{\partial \hat{\Sigma}_v} - \frac{\partial F}{\partial \hat{\Sigma}_u} (\hat{\sigma}_u H) + \frac{\partial H}{\partial \hat{\Sigma}_u} (\hat{\sigma}_u F). \quad (2.54)$$

Warto przy okazji wspomnieć, że translacje regularne w grupie można wyrazić przy pomocy operacji wykładniczej

$$F(g(q)k) = (\exp(q^a \sigma_a))(k), \quad (2.55)$$

$$F(kg(q)) = (\exp(q^a \hat{\sigma}_a))(k).$$

Wspomnijmy jeszcze, że zachodzi:

$$\sigma_a = \sigma^i_a \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad \hat{\sigma}_a = \hat{\sigma}^i_a \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (2.56)$$

Uwaga: Wzory typu (2.47), np.

$$[\sigma_a, \sigma_b] = Z^c_{ab} \sigma_c$$

zachodzą dla dowolnego teleparalelizmu, czyli dla dowolnego wyboru prędkości nieholonomicznych Ω^a i sprzężonych quasipędów Σ_a . Jednak w ogólnym przypadku Z^c_{ab} są funkcjami na rozmaitości Q . Powyższy formalizm bazowych nawiasów Poissona daje się zastosować i w tym ogólnym przypadku. Ale tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z grupą Liego i prostym przypadkiem (2.35) funkcje strukturalne są stałymi, co znakomicie upraszcza analizę zagadnienia. Warto jednak wspomnieć, że istnieją też ciekawe przypadki quasiprędkości i teleparalelizmów ogólniejszego typu niż powyższe, oparte na strukturze grupy Liego i przestrzeni jednorodnej.

2.4. Przykład - ciało infinitezymalne

Bez wchodzenia w nadmiar szczegółów wspomnijmy tu jeden przykład, jakim jest infinitezymalne ciało afinicznie sztywne lub metrycznie sztywne w przestrzeni Riemanna (M, g) , lub ogólniej - rozmaitości z koneksją afiniczną (M, Γ) . Przestrzeń Riemanna rozumiemy tu jako przypadek szczególny w tym sensie, że koneksja afiniczna jest zbudowana według przepisu Levi-Civity z tensora metrycznego g :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ia} (g_{aj,k} + g_{ak,j} - g_{jk,a}). \quad (2.57)$$

Jest to jak wiadomo jedyna koneksja afiniczna o następujących własnościach:

- jest metryczna, tzn. znika pochodna kowariantna metryki

$$\nabla g = 0,$$

- jest symetryczna,

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

Jeśli tensor krzywizny

$$\mathcal{R}^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{ak}\Gamma^a_{jl} - \Gamma^i_{al}\Gamma^a_{jk} \quad (2.58)$$

jest różny od zera, to wyjąwszy przypadek szczególny, tzn. przestrzeni o stałej krzywiznie sekcijnej, w rozmaitości na ogół nie ma nietrywialnych izometrii ani nietrywialnych przekształceń afinicznych. O ciałach sztywnych lub afinicznie sztywnych można mówić jedynie w sensie infinitezymalnym. Polega to na tym, że rozpatruje się punkty materialne ze strukturą, tzn. doczepioną bazą w przestrzeni stycznej. Baza ta jest ogólna w przypadku infinitezymalnych ciał afinicznie sztywnych, lub g -ortonormalna w przypadku ciał metrycznie sztywnych (infinitezymalnych żyroskopów). Gdy punkt materialny zajmuje położenie $x \in M$, wewnętrzne stopnie swobody są więc reprezentowane przez bazę e_A , $A = 1, \dots, n$ przestrzeni stycznej $T_x M$. Ortonormalność rozumiemy wtedy w sensie tensora metrycznego g w punkcie x , a więc $g_x \in T_x^* M \otimes T_x^* M$,

$$g_x(e_A, e_A) = g(x)_{ij} e^i_A e^j_B = \delta_{AB}. \quad (2.59)$$

Ruch opisujemy przez zależność położenia i konfiguracji wewnętrznej od czasu. Analitycznie: współrzędne chwilowe położenia punktu i współrzędne wektorów doczepionych są funkcjami czasu,

$$x^i(t), \quad e^i_A(t). \quad (2.60)$$

Układ prędkości uogólnionych to pochodne czasowe:

$$\left(\dot{x}^i(t), \dot{e}^i_A(t)\right) = \left(\frac{dx^i}{dt}, \frac{de^i_A}{dt}\right). \quad (2.61)$$

Zwróćmy uwagę, że zwykłe pochodne czasowe de^i_A/dt nie są składowymi wektorów w M . Są nimi natomiast pochodne kowariantne:

$$V^i_A(t) = \frac{De^i_A}{Dt} = \frac{de^i_A}{dt} + \Gamma^i_{jk}(x(t))e^j_A \frac{dx^k}{dt}. \quad (2.62)$$

Ze względów geometrycznych najlepszą miarą prędkości jest więc układ $(n+1)$ wektorów $(v(t), V_A(t))$ o składowych:

$$v^i(t) = \frac{dx^i}{dt}, \quad V^i_A(t) = \frac{De^i_A}{Dt}. \quad (2.63)$$

Otóż są to na ogół quasiprędkości. Stają się one zwykłymi prędkościami holonomicznymi tylko wtedy, gdy (M, Γ) jest przestrzenią płaską, tzn. znika tensor krzywizny i tensor skręcenia,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^i_{jkl} &= 0, \\ \mathcal{S}^i_{jk} &= \frac{1}{2} \left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \right) = 0. \end{aligned}$$

2.5. Równania ruchu w quasiprędkościach i quasipędach

Wróćmy do naszego głównego tematu, jakim jest mechanika na grupach i w przestrzeniach jednorodnych oraz quasiprędkości typu elementów algebr Liego. Zaczniemy od przykładowego opisanie korzyści, jakie daje używanie w równaniach ruchu quasiprędkości i quasipędów tego typu. Dla uproszczenia rozważań skoncentrujemy się na przypadku ciała sztywnego w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej. Przykład ten

odgrywa szczególną rolę w naszych rozważaniach. Jest on ponadto wzorcowy, mianowicie w maksymalnie prosty sposób odzwierciedla on strukturę najogólniejszego nietrywialnego (nie-Abelowego) modelu.

Jeśli użyć oznaczeń jak powyżej (str. 34,35), to energia kinetyczna bąka bez ruchu postępowego dana jest wzorem (wynikającym z (1.9), (1.10)):

$$T = \frac{I_1}{2} (\hat{\omega}^1)^2 + \frac{I_2}{2} (\hat{\omega}^2)^2 + \frac{I_3}{2} (\hat{\omega}^3)^2, \quad (2.64)$$

gdzie I_a są głównymi momentami bezwładności. Wielkości $\hat{\omega}^a$ są wtedy odniesione do układu osi własnych bąka (osi diagonalizujących tensor J w (1.9), (1.10)), a tym samym - diagonalizujących tensor bezwładności. Oczywiście I_a, J są stałe. Nieholonomicznie zapisane przekształcenie Legendre'a ma postać:

$$\hat{\sigma}_a = \frac{\partial T}{\partial \hat{\omega}^a} = I_a \hat{\omega}^a \quad (2.65)$$

(nie sumować po a !). Zatem kinetyczny Hamiltonian dany jest przez:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2I_1} (\hat{\sigma}_1)^2 + \frac{1}{2I_2} (\hat{\sigma}_2)^2 + \frac{1}{2I_3} (\hat{\sigma}_3)^2. \quad (2.66)$$

Gdy istnieje potencjał V , pełny Hamiltonian jest dany przez:

$$H = \mathcal{T} + V, \quad (2.67)$$

gdzie potencjał V zależy tylko od konfiguracji, a więc od zależnej od czasu macierzy ortogonalnej $g(t)$.

Równania ruchu zapisujemy przy pomocy nawiasów Poissona:

$$\frac{d\hat{\sigma}_a}{dt} = \{\hat{\sigma}_a, H\} = \{\hat{\sigma}_a, \mathcal{T}\} + \{\hat{\sigma}_a, V\}, \quad (2.68)$$

korzystając z:

$$\{\hat{\sigma}_a, \hat{\sigma}_b\} = -\varepsilon_{abc} \hat{\sigma}_c \quad (2.69)$$

oraz

$$\{\hat{\sigma}_a, V\} = \mathcal{R}_a V, \quad (2.70)$$

gdzie \mathcal{R}_a jest operatorem różniczkowym 1-go rzędu działającym na zmienne konfiguracyjne. We współrzędnych kanonicznych pierwszego rodzaju jest on dany wzorem (7.15), (7.17), (7.19).

Rozpisując:

$$\{\hat{\sigma}_a, V\} = \frac{\partial V}{\partial \hat{\sigma}_b} \{\hat{\sigma}_a, \hat{\sigma}_b\} \quad (2.71)$$

według wzoru (2.43) dostajemy po skorzystaniu z bazowych związków (2.69):

$$\frac{d\hat{\sigma}_i}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_i^{jk} \left(\frac{1}{I_j} - \frac{1}{I_k} \right) \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k + \hat{N}_i, \quad (2.72)$$

gdzie

$$\hat{N}_i = -\mathcal{R}_i V$$

są współtowarzyszającymi składowymi momentu sił działających na bąka. Wyrażając to przez prędkości kątowe dostajemy:

$$\frac{d\hat{\omega}^i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_i^{jk} \frac{I_j - I_k}{I_i} \hat{\omega}^j \hat{\omega}^k + \frac{\hat{N}_i}{I_i}. \quad (2.73)$$

Są to równania Eulera dla bryły sztywnej. Zwróćmy uwagę, że w przypadku bąka swobodnego, gdy $V = 0$, jest to autonomiczny, niezależny od konfiguracji układ równań na wielkości $\hat{\sigma}_a$ lub $\hat{\omega}^a$. Jest też tak wtedy, gdy momenty \hat{N}_a mają naturę niepotencjalną i zbudowane są z samych prędkości kątowych $\hat{\omega}^a$ (lub spinów $\hat{\sigma}_a$). Jest tak w przypadku tarcia lepkiego, lub oddziaływań żyroskopowych w sprzężonym układzie bąków. Jest to ogromna korzyść w porównaniu z użyciem prędkości uogólnionych holonomicznych.

Gdy momenty sił nie znikają, tło ruchu swobodnego opisywanego równaniami Eulera jest na tyle istotne, że jest punktem wyjścia do analizy przypadku dynamicznego.

2.6. Struktura przestrzeni jednorodnych

Posługiwanie się w powyższych zagadnieniach zwykłymi prędkościami (pochodnymi czasowymi współrzędnych uogólnionych) i sprzężonymi do nich pędami kanonicznymi byłoby bardzo kłopotliwe. Równania ruchu byłyby nieczytelne i niemożliwa byłaby ich jakościowa analiza. Jak widać, użycie prędkości kątowych i spinów kanonicznych taką jakościową analizę umożliwia. Jest to sytuacja typowa dla układów,

których przestrzenie konfiguracyjne dają się utożsamiać z grupami Liego lub ich przestrzeniami jednorodnymi. Ogólniej, procedury tego typu pojawiają się we wszystkich zagadnieniach z symetriami, gdy w przestrzeni konfiguracyjnej działa jakaś wyróżniona grupa przekształceń i Hamiltonian, lub jego wiodąca część cechuje się niezmienniczością względem tej grupy.

Jak wspomniano, w wielu zagadnieniach równania ruchu w formie (2.72) lub (2.73) są autonomiczne względem quasiprędkości lub quasipędów i w zasadzie przynajmniej na ich podstawie można wyznaczyć zależność quasiprędkości $\widehat{\Omega}^a$ (np. prędkości kątowych) od czasu. Jest to pierwszy etap rozwiązywania zagadnienia. Drugi etap polega na wyznaczeniu czasowej zależności współrzędnych uogólnionych q^i , czyli wyrażonej przez nie macierzy φ . Mamy więc wyznaczyć funkcję $\varphi(q(t))$. Związek definicyjny

$$\widehat{\Omega} = \varphi^{-1} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.74)$$

prowadzi do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \varphi \widehat{\Omega}(t). \quad (2.75)$$

Jest to, przy znanych $\widehat{\Omega}(t)$, układ jawnie zależny od czasu. Zatem zagadnienie zostało rozbite na dwa etapy: 1) rozwiązywanie układu równań pierwszego rzędu na funkcje $\widehat{\Omega}(t)$, 2) następnie - układy równań pierwszego rzędu na $\varphi(t)$ (2.75). To rozbicie jest dużym ułatwieniem i nawet jeśli nie pozwala na efektywne rozwiązanie pełnego układu w postaci analitycznej, to wybitnie ułatwia analizę jakościową.

Poświęćmy teraz trochę uwagi przestrzeniom jednorodnym ogólniejszego typu niż grupy. Przypuśćmy, że w zbiorze Q działa grupa przekształceń G . Tymczasem nie zakładamy nawet bogatszej struktury jak różniczkowa, grupy Liego itp. Chwilowo Q jest dowolnym zbiorem, a G dowolną grupą traktowaną czysto algebraicznie. Działanie to zapiszemy dla ustalenia uwagi w konwencji lewostronnej:

$$g \in G : \quad Q \ni q \mapsto g q \in Q,$$

$$(g_1 g_2) q = g_1 (g_2 q).$$

Zakładamy, że działanie to jest efektywne, tzn. że jedność grupy $e \in G$ jest jedynym elementem G spełniającym warunek:

$$e q = q$$

dla dowolnego $q \in Q$. Mówiąc skrótowo, oznacza to, że G jest „prawdziwą” grupą przekształceń, nie zaś jakąś grupą homomorficznie (z nietrywialnym jądrem - tzw. jądrem nieefektywności) odwzorowaną w grupę $\text{Bij}Q$ - bijekcji zbioru Q na siebie. Założymy ponadto, że dla dowolnej pary punktów $q_1, q_2 \in Q$ istnieje przekształcenie $g \in G$ takie, że

$$g q_1 = q_2,$$

tzn. przeprowadzające q_1 w q_2 . Niech $q_0 \in Q$ oznacza dowolny ustalony punkt, zaś $H(q_0) \subset G$ niech będzie jego grupą izotropii, tzn. grupą przekształceń zachowujących q_0 :

$$H(q_0) := \{g \in G : g q_0 = q_0\}. \quad (2.76)$$

Zbiór G daje się wtedy utożsamić ze zbiorem warstw $G/H(q_0)$, tzn. przestrzenią ilorazową. Warstwy są

$$g H(q_0) = \{g h : h \in H(q_0)\}. \quad (2.77)$$

Działanie G na $G/H(q_0)$ jest reprezentowane przez lewe translacje, mianowicie warstwa

$$x H(q_0) = \{x h : h \in H(q_0)\}$$

jest odwzorowywana przez $g \in G$ w warstwę $g x H(q_0)$. Oczywiście wynik nie zależy od wyboru x wewnątrz warstwy, tzn. od zastąpienia x przez xh , $h \in H$.

Można oczywiście za pierwotne pojęcie uznać grupę G i ustalić jakąś podgrupę $H \subset G$. Zbiór G realizujemy jako konstrukcję wtórną - zbiór warstw G/H - przestrzeń ilorazową.

Powstaje pytanie, czy istnieją prawostronne translacje reprezentantów, $x \mapsto xg$ indukujące działanie w G/H . Można łatwo sprawdzić, że na ogół tak jest. Niech

$N(H) \subset G$ będzie największą podgrupą dla której $H \subset N(H)$ jest jej dzielnikiem normalnym:

$$nHn^{-1} = \{nhn^{-1} : h \in H\} = H.$$

Dla każdego $n \in N$ przekształcenie

$$g \mapsto gn$$

przeprowadza warstwy na warstwy, a więc rzutuje się do zbioru lewych warstw G/H .

Istotnie, weźmy warstwę xH . Zachodzi:

$$xHn = xnn^{-1}Hn = xnH,$$

a więc warstwa xH przechodzi w warstwę xnH . W tym sensie można mówić o działaniach prawostronnych w zbiorze warstw lewostronnych. Gdy H jest trywialna, $H = \{e\}$, to oczywiście $N(H) = G$.

Jeśli wychodzimy nie od grupy G i jej podgrupy $H \subset G$ jako pojęć pierwotnych, lecz tak jak poprzednio - od zbioru Q i działającej w nim grupy przekształceń G w sensie konwencji lewostronnej, to utożsamiając Q z $G/H(q_0)$ możemy w oparciu o powyższą konstrukcję otrzymać nową grupę przekształceń \mathcal{K} izomorficzną z grupą ilorazową $N(H(q_0))/H(q_0)$.

Uwaga! Grupa \mathcal{K} nie zależy od wyboru punktu $q_0 \in Q$. Od tego wyboru zależy jedynie swego rodzaju „parametryzacja” \mathcal{K} za pomocą elementów grupy G . Oczywiście w przypadku warstw prawostronnych, tzn. w zbiorze H/G można przeprowadzić identyczne rozumowanie.

2.7. Tensory metryczne lewo- i prawo-niezmiennicze

Wróćmy do przypadku różniczkowych Q i grup Liego G . Niech g będzie tensorem metrycznym na Q . Będziemy zakładali, że jest on niezmienniczy względem działania G . Tak jest we wszystkich rozważanych przez nas przypadkach. Grupa G jest więc podgrupą grupy izometrii przestrzeni Riemanna (Q, g) .

Na ogół „lewo-niezmienniczy” tensor metryczny nie jest „prawo-niezmienniczy” względem działania grupy \mathcal{K} skonstruowanej powyżej. W szczególności, gdy $Q = G$, lewo-niezmienniczy tensor na grupie Liego nie musi być prawo-niezmienniczy. Lewo-niezmienniczy tensor g na G można otrzymać w ten sposób, że zadajemy metrykę Euklidesową Γ jako algebraiczny tensor metryczny w algebrze Liego $\mathfrak{g} = T_e G$ utożsamionej z przestrzenią styczną do grupy w jednoźci e . Następnie, za pomocą operacji lewych translacji regularnych, $G \ni x \mapsto wx \in G$, tensor ten przenosimy do wszystkich możliwych przestrzeni stycznych $T_w G$. Otrzymujemy w ten sposób pole lewo-niezmienniczego tensora metrycznego na G . Analogicznie można budować niezmienniczy względem działania grupy G tensor metryczny na ogólnej przestrzeni jednorodnej Q - przesuując do wszystkich możliwych punktów q ustaloną metrykę algebraiczną Γ w $T_{q_0} Q$ - przestrzeni stycznej w zadanym ustalonym punkcie q_0 . Będzie to metryka na przestrzeni ilorazowej $G/H(q_0)$.

2.8. Metryka Killinga

Ważnym pojęciem jest metryka Killinga na grupie Liego. Wyjdźmy od algebry Liego. W każdej algebrze Liego \mathfrak{u} , niekoniecznie interpretowanej jako algebra Liego jakiejś grupy G , można kanonicznie określić pewną algebraiczną metrykę - formę dwuliniową Γ na \mathfrak{u} . Robi to się przy pomocy następującej konstrukcji:

Niech $u \in \mathfrak{u}$ będzie ustalonym wektorem w algebrze Liego. Zdefiniujemy operację liniową

$$ad_u: \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u} \quad (2.78)$$

daną wzorem:

$$ad_u x = [u, x],$$

gdzie $[u, x]$ oznacza nawias - operację Liego w \mathfrak{u} . Z definicji:

$$\Gamma(u, v) = \text{Tr}(ad_u, ad_v) = \Gamma(v, u). \quad (2.79)$$

Jeśli weźmiemy grupę jednoparametrową $\{k(t): t \in \mathbb{R}\}$ daną przez:

$$g_t x = \exp(t ad_v) x. \quad (2.80)$$

Można sprawdzić, że g_t są izometriami dla Γ :

$$\Gamma(g_t x, g_t y) = \Gamma(x, y).$$

Mówiąc skrótowo, Γ jest niezmiennicza względem, tzw. operacji dołączonych. Γ nazywamy metryką Killinga na algebrze Liego $(\mathfrak{u}, [\cdot, \cdot])$.

Jeśli użyć bazy x_A w \mathfrak{u} i wprowadzić odpowiednie stałe strukturalne: C^K_{LM}

$$[x_L, x_M] = C^K_{LM} x_K,$$

to współczynniki metryczne

$$\Gamma_{KL} := \Gamma(x_K, x_L)$$

są dane przez

$$\Gamma_{KL} = C^A_{BK} C^B_{AL} = \Gamma_{LK}.$$

Jeśli \mathfrak{u} jest algebrą Liego grupy G , $\mathfrak{u} = T_e G$, to wykonując jak powyżej lewe translacje, otrzymamy gładkie pole tensora metrycznego g na G . Jest ono lewo-niezmiennicze na mocy samej konstrukcji. Niezmienniczość względem operacji dołączonych (2.80) sprawia, że jest jednocześnie prawo-niezmiennicze. Pole g nazywamy tensorem Killinga grupy G .

Powstaje pytanie odnośnie lewo-niezmiennicznych tensorów metrycznych na przestrzeni ilorazowej Q . Widzieliśmy, że można je otrzymywać z tensorów algebraicznych zdefiniowanych w ustalonym punkcie q_0 , wykonując operacje grupowe. Często wygodnie jest powiązać także pola z lewo-niezmiennicznymi metrykami na grupie G .

Jeśli G jest półprosta, tzn. jej tensor Killinga jest „dobrym”, (nieosobliwym) tensorem metrycznym,

$$\det[\Gamma_{KL}] \neq 0, \quad \det[g_{ij}] \neq 0,$$

to możemy postąpić w następujący sposób. Dla podgrupy Liego $H \subset G$ budujemy algebrę Liego \mathfrak{h} ; jest ona oczywiście podalgebrą wyjściowej algebry Liego,

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = T_e G.$$

Przestrzeń warstw G/H można zrealizować przy pomocy „reprezentantów” w G . Jeśli $\dim H = m$, to rozmaitość reprezentantów ma ten sam wymiar m .

W dowolnym punkcie $k \in G$ przestrzeń styczna $T_k G$ rozkłada się na sumę prostą:

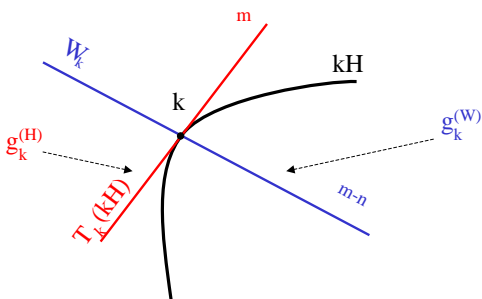
$$T_k G = T_k(kH) \oplus W_k, \quad (2.81)$$

gdzie $T_k(kH)$ jest podprzestrzenią styczną do warstwy kH przechodzącej przez k , zaś W_k jest jej dopełnieniem ortogonalnym do $T_k G$ w sensie metryki Killinga g . Tensor g_k możemy przedstawić jako sumę dwóch tensorów symetrycznych $g^{(H)}_k$ i $g^{(W)}_k$,

$$g_k = g^{(H)}_k + g^{(W)}_k, \quad (2.82)$$

w następującym sensie: na wektorach stycznych do kH w punkcie k tensor $g^{(H)}_k$ pokrywa się z tensorem g_k . Natomiast $g^{(W)}_k$ po ograniczeniu do W_k jest identyczne z ograniczeniem pełnego g_k do tej podprzestrzeni. Ponadto wektory z przestrzeni W_k są osobliwe dla tensora $g^{(H)}_k$, zaś elementy $T_k(kH)$ są osobliwe dla $g^{(W)}_k$. Obydwa tensory $g^{(H)}$, $g^{(W)}$ są niezmiennicze względem operacji:

$$G \ni k \mapsto kh, \quad h \in H.$$



Zatem pole $g^{(W)}$ jest cofnięciem (pull-back) pewnego tensora γ z rozmaitości $Q = G/H$ do G ,

$$g^{(W)} = \pi^* \cdot \gamma,$$

gdzie $\pi: G \rightarrow Q = G/H$ jest kanonicznym rzutowaniem. Tensor γ jest automatycznie symetryczny i nieosobliwy, a więc określa metrykę na rozmaiłości Q .

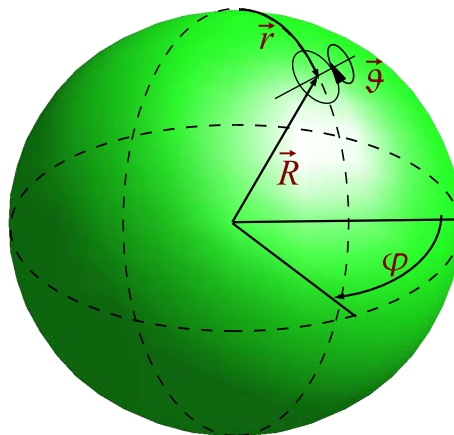
Uwaga! Konstrukcja ta pracuje także wtedy, gdy g jest niekoniecznie tensorem Killinga, ale dowolnym lewo-niezmienniczym tensorem metrycznym na G , cechującym się jednocześnie prawostronną niezmienniczością względem podgrupy H , tzn. względem przekształceń

$$G \ni k \mapsto kh, \quad h \in H. \quad (2.83)$$

2.9. Przykłady

Przytoczmy dwa typowe przykłady jak mechanika punktu materialnego lub infini-tezymalnego płaskiego rotatora poruszającego się po sferze lub pseudosferze, czyli przestrzeni Łobaczewskiego. Mamy na myśli przypadki dwuwymiarowe, kiedy przestrzeń konfiguracyjna daje się utożsamić odpowiednio ze sferą $S^2(0, R) \subset \mathbb{R}^3$ o promieniu R (i skalarnej krzywiznie $2/R^2$) lub pseudosferą, tzn. np. „górną” powłoką hiperboloidy dwupowłokowej $H^{2,2,+}(0, R)$ o pseudopromieniu R (i skalarnej krzywiznie $-2/R^2$).

2.9.1. Ruch na sferze



W pierwszym przypadku, jeśli użyć pochodzącej z \mathbb{R}^3 parametryzacji sferycznej,

$$x = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = R \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = R \cos \vartheta,$$

mamy wzór na element łuku:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2,$$

gdzie $r = R\vartheta$ jest odległością od „bieguna północnego”, mierzoną wzdłuż „południka”. Oczywiście $\vartheta \in [0, \pi]$, $r \in [0, \pi R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Tensor metryczny ma więc postać:

$$g = dr \otimes dr + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi \otimes d\varphi, \quad (2.84)$$

zaś energia kinetyczna punktu materialnego jest dana przez:

$$T = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right). \quad (2.85)$$

$S^2(0, R)$ jest oczywiście przestrzenią jednorodną grupy $SO(3, \mathbb{R})$ obrotów w \mathbb{R}^3 wokół zera tej przestrzeni. W roli ustalonego punktu $S^2(0, R)$ można wybrać np. jej „biegun północny” lub „południowy”: $(x = 0, y = 0, z = \pm R)$. Grupą izotropii H jest wtedy grupa $SO(2, \mathbb{R})$ obrotów w płaszczyźnie x, y , nie ruszających współrzędnej z . Grupę $SO(3, \mathbb{R})$ można parametryzować na różne sposoby, np. używając wektora obrotu \bar{k} , czyli współrzędnych kanonicznych pierwszego rodzaju, lub kątów Eulera φ, θ, ψ . Przypomnijmy, że parametryzacja za pomocą \bar{k} ma postać:

$$U[\bar{k}] = \exp \left(k^j A_j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(k^j A_j \right)^n, \quad (2.86)$$

gdzie macierze A_j rozpinające algebrę Liego przyjmujemy jako:

$$(A_j)_{kl} = -\varepsilon_{jkl}$$

wtedy

$$[A_j, A_k] = \varepsilon_{jk}{}^l A_l.$$

$U[\bar{k}]$ jest obrotem o kąt $k = |\bar{k}|$ wokół osi danej przez wektor $\bar{n} = \frac{\bar{k}}{k}$ z orientacją daną przez regułę śruby prawoskrętnej. Kąty Eulera φ, θ, ψ parametryzują $SO(3, \mathbb{R})$ jak następuje:

$$U(\varphi, \theta, \psi) = U[(0, 0, \varphi)] U[(\theta, 0, 0)] U[(0, 0, \psi)].$$

Element łuku odpowiadający metryce Killinga ma postać:

$$ds^2 = dk^2 + 4 \sin^2 \frac{k}{2} (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2), \quad (2.87)$$

gdzie (k, Θ, Φ) - współrzędne sferyczne w przestrzeni wektora obrotu \bar{k} . Nie należy ich mylić z (r, θ, φ) - współrzędnymi sferycznymi w przestrzeni \mathbb{R}^3 , w której dokonujemy obrotu. Używając kątów Eulera mamy:

$$ds^2 = d\theta^2 + d\varphi^2 + 2 \cos \theta d\varphi d\psi + d\psi^2. \quad (2.88)$$

Używając ścisłej formy iloczynów tensorowych zapisalibyśmy tensor Killinga (ściślej mówiąc zmieniona jest normalizacja, jest to wynik podzielenia przez (-2) tensora Killinga z ogólnej definicji):

$$\begin{aligned} g &= dk \otimes dk + 4 \sin^2 \frac{k}{2} (d\Theta \otimes d\Theta + \sin^2 \Theta d\Phi \otimes d\Phi) = \\ &= d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi + \cos \theta d\varphi \otimes d\psi + \cos \theta d\psi \otimes d\varphi + d\psi \otimes d\psi = \\ &= d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi + (d\psi + \cos \theta d\varphi) \otimes (d\psi + \cos \theta d\varphi). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Wyrażenia te leżą u podstaw wzoru na energię kinetyczną trójwymiarowego bąka kulistego o module bezwładności I , bez uwzględnienia ruchu translacyjnego:

$$\begin{aligned} T &= \frac{I}{2} \left[\left(\frac{dk}{dt} \right)^2 + 4 \sin^2 \frac{k}{2} \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \Theta \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{I}{2} \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2 \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{I}{2} \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt} + \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Każda z przytoczonych postaci ma swoje zalety. Jeśli już posługiwać się tą interpretacją, to dla porządku wypiszmy ogólny wzór na energię kinetyczną ciała sztywnego w \mathbb{R}^3 , bez ruchu translacyjnego:

$$T = \frac{I_1}{2} \hat{\chi}_1^2 + \frac{I_2}{2} \hat{\chi}_2^2 + \frac{I_3}{2} \hat{\chi}_3^2, \quad (2.91)$$

gdzie stałe I_1, I_2, I_3 są głównymi momentami bezwładności, zaś $\widehat{\varkappa}_1, \widehat{\varkappa}_2, \widehat{\varkappa}_3$ są składowymi prędkościami kątovej w reprezentacji współtowarzyszącej:

$$\widehat{\varkappa} = U^{-1} \frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\widehat{\varkappa}_3 & \widehat{\varkappa}_2 \\ \widehat{\varkappa}_3 & 0 & -\widehat{\varkappa}_1 \\ -\widehat{\varkappa}_2 & \widehat{\varkappa}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Można sprawdzić, że:

$$\begin{aligned} \widehat{\varkappa}_1 &= \sin \theta \sin \psi \frac{d\varphi}{dt} + \cos \psi \frac{d\theta}{dt}, \\ \widehat{\varkappa}_2 &= \sin \theta \cos \psi \frac{d\varphi}{dt} - \sin \psi \frac{d\theta}{dt}, \\ \widehat{\varkappa}_3 &= \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

Wyrażenie to jest dosyć zawile, upraszcza się natomiast w przypadku bąka symetrycznego, gdy $I_1 = I_2 = \mathcal{K}$, $I_3 = I$. Mamy wtedy:

$$T = \frac{\mathcal{K}}{2} \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{I}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} + \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (2.94)$$

Odpowiedni tensor metryczny (z włączonymi momentami bezwładności) ma postać:

$$g = \mathcal{K} (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi) + I (d\psi + \cos \vartheta d\varphi) \otimes (d\psi + \cos \theta d\varphi). \quad (2.95)$$

Bąk kulisty i tensor Killinga na $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ odpowiada oczywiście sytuacji $\mathcal{K} = I$.

Zwróćmy uwagę, że tensor metryczny (2.95) na $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ jest lewo-niezmienniczy względem wszystkich translacji grupowych, ale prawo-niezmienniczy tylko względem $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ - obrotów wokół osi z . W ogólnym przypadku $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$ nie ma oczywiście żadnych symetrii względem prawych translacji regularnych.

Zatem do tensora metrycznego (2.95) i jego szczególnego przypadku, jakim jest tensor Killinga, daje się zastosować rozumowanie przedstawione poprzednio.

Sferę $S^2(0, R)$ (w szczególności jednostkową) jako przestrzeń jednorodną grupy obrotów $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ można otrzymać jako ilorazową rozmaitość warstw:

$$S^2(0, R) = \text{SO}(3, \mathbb{R}) / \text{SO}(2, \mathbb{R}),$$

gdzie, jak powiedziano, $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ interpretujemy jako grupę obrotów wokół „osi z ” w \mathbb{R}^3 . Analitycznie gubimy wtedy zmienną ψ i pozostają nam tylko zmienne (θ, φ) lub $(r = R\theta, \varphi)$ parametryzujące sferę $\text{S}^2(0, R)$.

Rozkład (2.82) przyjmuje postać:

$$g = g^{\text{SO}(2, \mathbb{R})} \oplus g^W, \quad (2.96)$$

gdzie, jak poprzednio, w danym punkcie $R \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ W_R jest w przestrzeni stycznej $T_R\text{SO}(3, \mathbb{R})$ podprzestrzenią ortogonalną do $T_R(RH)$. Otóż dla tensora (2.95) mamy:

$$\begin{aligned} g^{\text{SO}(2, \mathbb{R})} &= I (d\psi + \cos \theta d\varphi) \otimes (d\psi + \cos \theta d\varphi), \\ g^W &= \mathcal{K} (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi). \end{aligned} \quad (2.97)$$

I oczywiście, jak widać, z dokładnością do stałego czynnika, g^W jest cofnięciem z $\text{S}^2(0, R)$ do $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ naturalnej metryki (2.84). Patrząc w odwrotnym kierunku, możemy metrykę sfery, jako przestrzeni jednorodnej, uważać za konstrukcję wtórną względem metryki prawo- $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ -niezmienniczej na $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ (w szczególności - metryki killingowskiej, dwustronnie $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ -niezmienniczej). Jest to przykład ilustrujący powyższe rozważania o grupowym opisie dynamiki na przestrzeniach jednorodnych. W przykładzie tym prędkości nieholonomiczne, na przestrzeni jednorodnej oparte są na użyciu pola ko-baz odpowiadającego wielkościom $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2$, ale ponumerowanego w ten sposób, by wektory bazowe były do siebie nie tylko ortogonalne, ale i unormowane do jedności.

Warto zaznaczyć, że jeśli nie wykonywać procedury dzielenia grupy przez podgrupę, lecz pozostać na poziomie $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ i podstawić: $\theta = r/R$, $\mathcal{K} = mR^2$ to dostaniemy dla energii kinetycznej, opartej na metryce (2.95) wyrażenie:

$$T = T_{\text{tr}} + T_{\text{int}} = \quad (2.98)$$

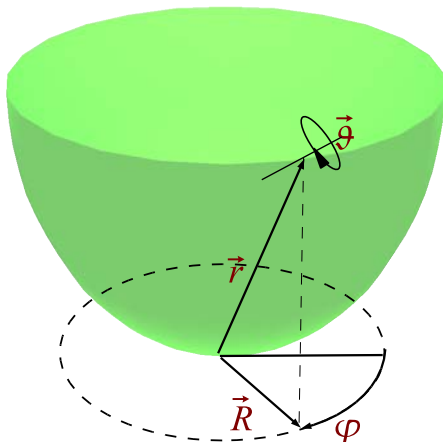
$$= \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) + \frac{I}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} + \cos \frac{r}{R} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \right)^2. \quad (2.99)$$

Jest to energia kinetyczna poruszającego się po sferze infinitezymalnego bąka izotropowego o momencie bezwładności I i masie m . W ten sposób widać, że geometria grupy

G pozwala opisywać obiekty z rządzone przez podgrupę $H \subset G$ wewnętrznymi stopniami swobody i wykonujące ruch postępowy na przestrzeni jednorodnej G/H . Zamrażając wewnętrzne stopnie swobody, np. kładąc w (2.98) $I = 0$, dostajemy ruch czysto translacyjny w przestrzeni Riemanna z metryką generowaną w G/H z grupy G , jak opisano powyżej.

2.9.2. Ruch na pseudosferze

Warto jeszcze dla porównania wspomnieć o przypadku pseudosfery, czyli przestrzeni Łobaczewskiego. Jest to drugi interesujący przykład związku między mechaniką na grupie, jej przestrzeni jednorodnej i z geometrycznymi modelami wewnętrznymi stopni swobody.



Pseudosfera dwuwymiarowa o promieniu R , czyli o ujemnej krzywiznie $\mathfrak{K} = -2/R^2$ jest to powłoka (np. górna) hiperboloidy dwupowłokowej w \mathbb{R}^3 o równaniu:

$$-x^2 - y^2 + z^2 = R^2, \quad z > 0.$$

Oznaczamy ją przez $H^{2,2,+}(0, R)$. Jest to jeden z modeli przestrzeni Łobaczewskiego. Jej „prostymi” geodezyjnymi są przecięcia z płaszczyznami przechodzącymi przez początek (zero) przestrzeni \mathbb{R}^3 . Jej metrykę otrzymujemy przez obcięcie metryki Minkowskiego o elemencie łuku

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

$(dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz)$. Mamy naturalną parametryzację (θ, φ) , lub $(r = R\theta, \varphi)$, gdzie r jest mierzona wzdłuż geodezyjnej odległości od „bieguna północnego” $(0, 0, R)$. Kąt φ ma zwykle znaczenie zmiennej biegunowej. Oczywiście teraz $r, \theta \in [0, \infty]$. Parametryzacja ma postać:

$$x = R \operatorname{sh}\theta \cos \varphi, \quad y = R \operatorname{sh}\theta \sin \varphi, \quad z = R \operatorname{ch}\theta. \quad (2.100)$$

Po prostu funkcje trygonometryczne kąta θ zastępujemy wszędzie funkcjami hiperbolicznymi obecnego „pseudokąta” θ . Uwaga: należy zachować ostrożność - sprawa znaku przy różniczkowaniu funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych.

Element długości ma postać:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{R} d\varphi^2,$$

tzn.

$$g = dr \otimes dr + R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{R} d\varphi \otimes d\varphi. \quad (2.101)$$

Energia kinetyczna punktu o masie m jest więc dana przez:

$$T = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{R} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right). \quad (2.102)$$

Przestrzeń konfiguracyjna $H^{2,2,+}(0, R)$ jest teraz przestrzenią jednorodną grupy Lorentza $SO(1, 2)$,

$$H^{2,2,+}(0, R) = SO(1, 2)/SO(2, \mathbb{R}),$$

gdzie $SO(2, \mathbb{R})$ jest jak poprzednio grupą zwykłych obrotów w zmiennych x, y .

Na $SO(1, 2)$ można wprowadzić wygodną parametryzację za pomocą „pseudokątów Eulera”:

$$SO(1, 2) \ni L(\varphi, \theta, \psi) = U[(0, 0, \varphi)] \Lambda[(\theta, 0, 0)] U[(0, 0, \psi)],$$

gdzie $\Lambda[(\theta, 0, 0)]$ jest przekształceniem Lorentza „przyspieszającym” wzdłuż pierwszej osi („osi x -ów”):

$$\Lambda[(\theta, 0, 0)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ 0 & \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{bmatrix}.$$

Wprowadzamy pseudoprędkości kątowe

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\alpha}_3 & \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 & 0 & \hat{\alpha}_1 \\ -\hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_1 & 0 \end{bmatrix} = L^{-1} \frac{dL}{dt}. \quad (2.103)$$

Można sprawdzić, że

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= \operatorname{sh} \chi \sin \psi \frac{d\varphi}{dt} + \cos \psi \frac{d\chi}{dt}, \\ \hat{\alpha}_2 &= -\operatorname{sh} \chi \cos \psi \frac{d\varphi}{dt} + \sin \psi \frac{d\chi}{dt}, \\ \hat{\alpha}_3 &= \operatorname{ch} \chi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Lewo-nieziennicze energie kinetyczne na grupie Lorentza $SO(1, 2)$ mają postać:

$$T = \frac{I_1}{2} (\hat{\alpha}_1)^2 + \frac{I_2}{2} (\hat{\alpha}_2)^2 + \frac{I_3}{2} (\hat{\alpha}_3)^2, \quad (2.105)$$

gdzie I_a są stałymi bezwładności.

Przez analogię z bąkiem, szczególnie prosty jest przypadek symetryczny, a więc prawo-niezienniczny względem $SO(2, \mathbb{R})$, gdzie $I_1 = I_2 + \mathcal{K}$, $I_3 = I$

$$T = \frac{\mathcal{K}}{2} (\hat{\alpha}_1)^2 + \frac{\mathcal{K}}{2} (\hat{\alpha}_2)^2 + \frac{I}{2} (\hat{\alpha}_3)^2.$$

We współrzędnych:

$$T = \frac{\mathcal{K}}{2} \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \operatorname{sh}^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{I}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} + \operatorname{ch} \theta \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Kładąc $\mathcal{K} = mR^2$, $\theta = r/R$, dostajemy:

$$T = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{R} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{I}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} + \operatorname{ch} \frac{r}{R} \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Można na to patrzeć jak na energię kinetyczną bączka o masie m i momencie bezwładności, ślizgającego się po hiperboloidzie (przestrzeni Łobaczewskiego). Podobnie, jak poprzednio, zamrażając wewnętrzne stopnie swobody, tzn. kładąc $I = 0$, lub wprowadzając więzy nieholonomiczne

$$\hat{\alpha}_3 = 0,$$

dostajemy geodezyjny ruch punktu materialnego na hiperboloidzie. Jest on znowu opisany przy pomocy prędkości nieholonomicznych $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$.

Analogicznie do wzorów (2.97), mamy:

$$\begin{aligned} g^{(\text{SO}(1,2))} &= I(d\psi + \text{ch}\theta d\varphi) \otimes (d\psi + \text{ch}\theta d\varphi), \\ g^{(W)} &= \mathcal{K}(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Uwaga! Pojawia się tu pewna ciekawostka. Jeśli chcemy, by metryka na $\text{SO}(1,2)$ była dwustronnie niezmiennicza (była metryką Killinga), to w związku z niezwartością $\text{SO}(1,2)$ mamy:

$$I = -\mathcal{K}.$$

A więc wkład do energii kinetycznej pochodzącej od wewnętrznych stopni swobody jest ujemny. Jest otwartym pytaniem, interesującym wielu badaczy, czy modele energii kinetycznej nie będące dodatnio określone mogą być użyteczne fizycznie. Są pewne przesłanki by sądzić, że tak jest.

Ciała afinicznie sztywne o zdegenerowanym wymiarze

W tym rozdziale przejdźmy do tematu ciał afinicznie sztywnych o zdegenerowanym wymiarze. Teoria ośrodków ciągłych zajmuje się między innymi takimi obiektami, jak np. membrany, struny, itp. Obiekty te są intensywnie badane w kwantowej teorii pola i teorii cząstek elementarnych. Możemy sformułować niektóre klasyczne a także czysto akademickie kwantowe modele takich obiektów jako nasze ciała afinicznie sztywne o zdegenerowanym wymiarze. Tak więc rozważmy ciało m -wymiarowe afinicznie sztywne poruszające się w n -wymiarowej przestrzeni, przy czym $m < n$. Oczywiście, w standardowych fizycznych zastosowaniach tylko szczególne przypadki $n = 3$, $m = 1, 2$ są bezpośrednio interesujące. I właściwie, poniżej skoncentrujemy się na przypadku $n = 3$, $m = 2$, czyli dwu-wymiarowej afinicznej płytce poruszającej się w zwykłej trój-wymiarowej przestrzeni.

3.1. Przestrzeń konfiguracyjna i jej grupy przekształceń

Przestrzeń materialna i fizyczna są przestrzeniami afinicznymi. Przyjmujemy przestrzeń materialną (N, U) o wymiarze m i przestrzeń fizyczną (M, V) o wymiarze n , przy czym $m < n$. Przestrzeń konfiguracyjna Q ciała afinicznie sztywnego składa się z afinicznych iniekcji (monomorfizmów) z przestrzeni N do M , czyli

$$Q = \text{AfM}(N, M). \quad (3.1)$$

Tak jak poprzednio, Lagranżowski (współtowarzyszący) rozkład masy opisany jest przez ustaloną, niezależną od czasu, dodatnio określoną miarę μ na przestrzeni materialnej N . Środek masy w N , masa całkowita \mathcal{M} i kwadrupol bezwładności $J \in U \otimes U$ są zdefiniowane tak jak w regularnym przypadku (gdy $m = n$). Współrzędne lagranżowskie a^K , $K = 1, \dots, m$, są również wybrane w taki sposób, że $a^K = 0$ dla środka masy w N . Przestrzeń konfiguracyjną możemy utożsamić z

$$Q = M \times Q_{\text{int}} = M \times \text{LM}(U, V), \quad (3.2)$$

gdzie $\text{LM}(U, V)$ jest zbiorem liniowych monomorfizmów (iniekcji) z przestrzeni U do przestrzeni V . Wyrażenie

$$y^i = x^i + \varphi^i_K a^K$$

zachowuje ważność. Macierz $[\varphi^i_K]$ o wymiarze $n \times m$ ma rząd m .

Wszystkie powyższe wyrażenia dla energii kinetycznej, przekształcenia Legendre'a, hamiltonianów, grup przekształceń są formalnie poprawne. Pewne różnice pojawiają się jednakże w strukturze działania grup. Mianowicie, $Q_{\text{int}} = \text{LM}(U, V)$ jest przestrzenią jednorodną działań lewostronnych grupy $\text{GL}(V)$.

$$A \in \text{GL}(V) : \quad \text{LM}(U, V) \ni \varphi \mapsto A\varphi \in \text{LM}(U, V), \quad (3.3)$$

ale przestaje być jednorodna podczas przekształceń materialnych, tj. działania prawostronnego grupy $\text{GL}(U)$:

$$B \in \text{GL}(U) : \quad \text{LM}(U, V) \ni \varphi \mapsto \varphi B \in \text{LM}(U, V). \quad (3.4)$$

Działanie to nie jest tranzytywne. Jego orbita składa się z takich φ , które mają takie same obrazy $\varphi(U) \subset V$.

Analitycznie, gdy kładziemy $V = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$ i przestrzeń konfiguracyjną utożsamiamy z $Q = \mathbb{R}^n \times \text{LM}(m, n)$, powyższe działania prawostronne stają się mnożeniami macierzowymi. W regularnym przypadku były one natomiast po prostu, prawymi i lewymi translacjami regularnymi na $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ lub $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$.

Powyższy układ ma $f = n + mn = n(m + 1)$ stopni swobody, czyli n translacyjnych stopni swobody i mn wewnętrznych (względnych) stopni swobody. Podobnie, jak powyżej nie jesteśmy w szczególności zainteresowani ruchem translacyjnym. Raczej, skoncentrujemy się na φ -tych (wewnętrznych) stopniach swobody, tj. na $Q_{\text{int}} = \text{LM}(m, n)$. Ruch translacyjny w dalszych rozważaniach zostanie pominięty.

Jak wspomnieliśmy, $\text{LM}(U, V)$ jest przestrzenią jednorodną jeśli chodzi o transformacje przestrzenne, tj. działania lewostronne grupy $\text{GL}(V)$. Interesujące jest opisanie tej przestrzeni jako przestrzeni ilorazowej grupy $\text{GL}(V)$ względem niektórych jej podgrup. Ustalmy pewien standardowy liniowy monomorfizm Ψ przestrzeni U w V . Możemy więc powiedzieć, że jeżeli ruch translacyjny został zaniedbany a N i M identyfikują się odpowiednio z U i V , wtedy $\text{LM}(U, V)$ możemy otrzymać z Ψ poprzez lewostronne działanie:

$$\text{LM}(U, V) \ni \Psi \mapsto \varphi = A\Psi \in \text{LM}(U, V), \quad (3.5)$$

gdzie A przebiega $\text{GL}(V)$. Czym jest podgrupa stabilizująca $H[\Psi] \subset \text{GL}(V)$ konfiguracji odniesienia Ψ ? Składa się ona z takich elementów $\text{GL}(V)$, które nie tylko zachowują podprzestrzeń liniową $\Psi(U) \subset V$, ale również zachowują oddzielnie każdy element tej podprzestrzeni.

Zapiszmy ten obiekt analitycznie. Tak więc, kładziemy $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$, i utożsamiamy przestrzeń \mathbb{R}^m z liniową podprzestrzenią \mathbb{R}^n składającą się z wektorów o m dowolnych elementach na m pierwszych miejscach i z zerami na pozostałych $(n - m)$

miejskach, tj. $[a^1, \dots, a^m, 0, \dots, 0]^T$. Zatem

$$\Psi(a^1, \dots, a^m) = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \\ o \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

gdzie o jest $(n - m) \times 1$ wymiarową macierzą zbudowaną z zer. Łatwo zauważyć, że H składa się ze wszystkich macierzy o postaci:

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ O & B \end{bmatrix},$$

gdzie

- I_m $m \times m$ -wymiarowa macierz jednostkowa,
- A $m \times (n - m)$ -wymiarowa macierz,
- B $(n - m) \times (n - m)$ -wymiarowa macierz,
- O $(n - m) \times m$ -wymiarowa macierz zbudowana z zer.

Macierze A i B są dowolne, a bardziej precyzyjnie, podlegają jedynie ograniczeniu, że całkowita macierz jest nieosobliwa. Ale zbiór macierzy A, B naruszający ten warunek jest oczywiście podzbiorem miary zero. Dowolność A jest $m(n - m)$ -wymiarowa, natomiast B $(n - m)^2$ -wymiarowa. Wzięte razem, macierze A i B zawierają $m(n - m) + (n - m)^2 = n(n - m)$ dowolnych parametrów (dowolnych w wyżej wymienionym sensie, należy wykluczyć przypadek osobliwy). Zatem, przestrzeń ilorazowa G/H jest parametryzowana przez $n^2 - n(n - m) = nm$ zasadniczo dowolnych liczb. I faktycznie $\dim LM(m, n) = \dim L(m, n) = mn$. H jest rzeczywiście podgrupą $GL(n, \mathbb{R})$ co można łatwo sprawdzić,

$$\begin{bmatrix} I & A_1 \\ O & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_2 \\ O & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_1 B_2 + A_2 \\ O & B_1 B_2 \end{bmatrix}.$$

3.2. Wielkości kinematyczne

Dla niezdegenerowanych ciał afinicznych, gdy $m = n$, definiuje się prędkości afiniczne („gyration” Eringen’a), odpowiednio w reprezentacji przestrzennej i materialnej $\Omega \in L(V) \simeq GL(V)'$, $\hat{\Omega} \in L(U) \simeq GL(V)'$,

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}\varphi^{-1}, \quad \hat{\Omega} = \varphi^{-1}\frac{d\varphi}{dt}; \quad \Omega = \varphi\hat{\Omega}\varphi^{-1}.$$

W modelach o zdegenerowanym wymiarze prędkości afiniczne nie istnieją. Prawa odwrotność $\rho \in L(V, U)$, tj. spełniająca $\varphi\rho = Id_V$ nie istnieje w ogóle, ponieważ transformacje liniowe nie mogą powiększać wymiaru. Lewe inwersje $\lambda \in L(V, U)$, tj. spełniające $\lambda\varphi = Id_U$ istnieją, ale jest ich nieskończenie dużo; pokrywają się one tylko na podprzestrzeni $\varphi(U) \in V$.

Natomiast momenty afiniczne (hipermomenty, spin afiniczny w przestrzennej i współtowarzyszącej reprezentacji) istnieją. Tak jak w przypadku regularnym, składowe Σ^i_j są hamiltonowskimi generatorami $GL(V)$ działania lewostronnego na $LM(U, V)$, i $\hat{\Sigma}^A_B$ są hamiltonowskimi generatorami $GL(U)$ działań prawostronnych na $LM(U, V)$. Ścisłe mówiąc, pojęcia „laboratoryjny” i „współtowarzyszący” są niezbyt poprawne, ponieważ nie istnieje transformacja podobieństwa ustalającą zależność Σ do $\hat{\Sigma}$.

3.3. Rozkład biegunowy i dwubiegunowy

Dla samego określenia sensownych modeli dynamicznych, a tym bardziej dla obliczeń i analizy jakościowej, właściwy wybór współrzędnych jest bardzo ważny. W mechanice niezdegenerowanych ciał afinicznych jest wygodnie używać dla odwzorowania $\varphi \in GL^+(n, \mathbb{R})$ rozkładu biegunowego

$$\varphi = RL = \Lambda R, \tag{3.7}$$

gdzie $R \in SO(n, \mathbb{R})$ jest obrotem właściwym (macierzą ortogonalną o wyznaczniku +1), L jest symetryczna i dodatnio określona

$$\Lambda = RLR^{-1} = RLR^T.$$

Diagonalizujemy L za pomocą podobieństwa ortogonalnego,

$$L = UDU^{-1} == UDU^T,$$

gdzie $U \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ jest ortogonalna, zaś D - diagonalna i dodatnio określona. Otrzymujemy rozkład dwubiegunowy:

$$\varphi = VDU^{-1} = VDU^T, \quad (3.8)$$

gdzie $V = RU$ jest ortogonalna; $V \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$. W odróżnieniu od rozkładu biegunowego, powyższy dwubiegunowy rozkład nie jest jednoznaczny. Gdy D ma zdegenerowane widmo, tzn. elementy na przekątnej powtarzają się (nawet jednokrotnie), niejednoznaczność ta ma charakter kontynualny - jak niejednoznaczność kątów ϑ i φ we współrzędnych sferycznych gdy $r = 0$. Skrajny przykład to degeneracja, gdy D jest macierzą podobieństwa, tzn. proporcjonalną do jednostkowej,

$$D = \lambda I.$$

Wtedy $\varphi = VDU^{-1} = VU^{-1}D$ i V, U w ogóle nie są z osobna określone. Tylko VU^{-1} jest dobrze zdefiniowane. Zatem sytuacja, gdy D jest zdegenerowane, jest to osobliwość układu współrzędnych.

Jednak nawet w przypadku niezdegenerowanym ma miejsce wieloznaczność, tyle, że dyskretna. Jeśli mianowicie W jest dowolną macierzą ortogonalną, która w każdym wierszu i w każdej kolumnie ma jako jedyny niezerowy element 1 lub -1 , to

$$\varphi = VDU^{-1} = (VW)(W^{-1}DW)(UW)^{-1} = V'D'U'$$

gdzie oczywiście $D' = W^{-1}DW$ jest też macierzą diagonalną, ma te same elementy co D , ale spermutowane. Niemniej jednak, gdy starannie uwzględniona, ta niejednoznaczność nie jest zbyt kłopotliwa.

Diagonalne elementy macierzy D są pierwiastkami kwadratowymi wyżej wspomnianych wartości własnych λ , $D_{aa} = \sqrt{\lambda_a}$, a zatem, są one niezmiennikami deformacji. Jak każde niezmienniki deformacji, są one nieczułe na działanie obrotów przestrzennych i materialnych,

$$\varphi \mapsto A\varphi, \quad \varphi \mapsto \varphi B; \quad A \in \text{O}(V, g), \quad B \in \text{O}(U, \eta).$$

Macierze R, V, U (bardziej poprawnie izometrie) opisują fikcyjne ciała sztywne związane z afinicznymi stopniami swobody. Dla przykładu, V i U opisują orientacje ortogonalnych baz zbudowanych z wektorów własnych powyższych równań własnych.

3.4. Stopnie swobody a przestrzeń konfiguracyjna

Od teraz, niemal wyłącznie opieramy się na opisie analitycznym, tj. kładziemy po prostu $U = \mathbb{R}^m, V = \mathbb{R}^n, \text{LM}(U, V) = \text{LM}(m, n) \subset \text{L}(m, n)$.

Istnieje odpowiednik rozkładu (3.7) w mechanice zdegenerowanych ciał afinicznie sztywnych, gdy $m < n$. Mianowicie, możemy napisać:

$$\varphi = R \begin{bmatrix} L \\ o \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

gdzie $R \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ jest właściwą macierzą ortogonalną, $L \in \text{Sym}(m, \mathbb{R})$ jest symetryczną macierzą $m \times m$ -wymiarową, o jest macierzą $(n - m) \times m$ zbudowaną z zer.

Oczywiście,

$$\begin{aligned} \dim \text{SO}(n, \mathbb{R}) &= \frac{1}{2}n(n - 1), \\ \dim \text{Sym}(m, \mathbb{R}) &= \frac{1}{2}m(m + 1), \end{aligned}$$

tj. R zależy od $\frac{1}{2}n(n - 1)$ a L od $\frac{1}{2}m(m + 1)$ niezależnych parametrów. Jak widać dla ogólnych wielkości m, n całkowita liczba tych parametrów nie jest równa liczbie wewnętrznych (względnych) stopni swobody, tj.

$$\frac{1}{2}(n(n - 1) + m(m + 1)) \neq mn.$$

Jest to za dużo, mamy do czynienia z nadliczbowymi zmiennymi. Przestrzeń konfiguracyjna, w tym wypadku, nie może być utożsamiona z iloczynem kartezjańskim $\text{SO}(n, \mathbb{R}) \times \text{Sym}(m, \mathbb{R})$.

Powód jest mianowicie taki, że podgrupa obrotów $\text{SO}(n - m, \mathbb{R})$ działająca na $(n - m)$ -krotne ostatnie zmienne w \mathbb{R}^n nie działa na macierz $\begin{bmatrix} L & o \end{bmatrix}^T$ gdy mnoży

ją z lewej strony. Mówiąc ściślej, weźmy podgrupę $K \subset \text{SO}(n, \mathbb{R})$ składającą się z następujących macierzy blokowych:

$$R = \begin{bmatrix} I_m & \underline{\varrho}^T \\ \underline{\varrho} & u \end{bmatrix},$$

gdzie

- I_m jest $m \times m$ -wymiarową macierzą jednostkową,
- $\underline{\varrho}$ jest $(n - m) \times m$ -wymiarową macierzą zbudowaną z zer,
- $u \in \text{SO}(n - m, \mathbb{R})$ jest dowolną $(n - m) \times (n - m)$ -wymiarową macierzą obrotu.

Oczywiście, podgrupa K , izomorficzna z $\text{SO}(n - m, \mathbb{R})$ jest $\frac{1}{2}(n - m)(n - m - 1)$ -wymiarowa. Zatem, przestrzeń ilorazowa lewych warstw $\text{SO}(n, \mathbb{R})/K$ opisuje rotacyjne stopnie swobody i ma wymiar

$$\dim(\text{SO}(n, \mathbb{R})/K) = \frac{1}{2}n(n - 1) - \frac{1}{2}(n - m)(n - m - 1) = mn - \frac{m(m + 1)}{2}.$$

Przestrzeń konfiguracyjna wewnętrznych (względnych) stopni swobody Q_{int} jest dyfeomorficzna z $(\text{SO}(n, \mathbb{R})/K) \times \text{Sym}(m, \mathbb{R})$. Istotnie ten iloczyn kartezjański jest (mn) -wymiarową rozmaitością, tak samo jak $Q_{\text{int}} = \text{LM}(m, n, \mathbb{R})$.

Używając bardziej bardziej wyrafinowanego języka moglibyśmy powiedzieć tak. Niech $\Psi \in \text{LM}(U, V)$ będzie konfiguracją odniesienia. Jest to liniowe odwzorowanie z przestrzeni U w przestrzeń V , tak więc jego obraz $\Psi(U) \subset V$ jest m -wymiarową liniową podprzestrzenią. Niech $K(\Psi) \subset \text{SO}(V, g)$ oznacza grupę transformacji liniowych i ortogonalnych zachowujących każdy punkt $\Psi(U)$, więc tym bardziej, zachowujących podprzestrzeń liniową $\Psi(U)$. Będąc izometriami, transformacje te zachowują również ortogonalne dopełnienie $\Psi(U)^\perp$. Podgrupa $K(\Psi)$ działa w sposób trywialny na $\Psi(U)$ i działa jak pełna grupa właściwych obrotów na $\Psi(U)^\perp$,

$$K(\Psi) | \Psi(U) = \{Id_{\Psi(U)}\}, \quad K(\Psi) | \Psi(U)^\perp = \text{SO}(\Psi(U)^\perp, g | \Psi(U)^\perp).$$

Rozmaitość ilorazowa lewych warstw $\text{SO}(V, g)/K(\Psi)$ opisuje obrotowe stopnie swobody. Z powodów estetycznych lepiej jest unikać używania konfiguracji odniesienia Ψ .

Jest to możliwe ponieważ rozmiatość obrotowych stopni swobody może być utożsamiona z $F(V, g; m)$, tzn. rozmiatością wszystkich ortonormalnych uporządkowanych m -krotnych wektorów w V (gdy $m = n$ to staje się po prostu dobrze znaną rozmiatością wszystkich ortonormalnych zbiorów baz w V). Ściśle mówiąc powinno się wziąć spójną składową składającą się ze zgodnie zorientowanych baz. $F(V, g; m)$ jest po prostu dobrze znaną rozmiatością Stiefela. Analitycznie, gdy położymy $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$, $F(V, g; m)$ może być właśnie utożsamiona z $SO(n, \mathbb{R})/SO(n - m, \mathbb{R})$.

Uwaga: Nie można mylić rozmiatości Stiefela i Grassmanna. Ta ostatnia jest zbiorami m -wymiarowych liniowych podprzestrzeni w V , te podprzestrzenie są po prostu powłokami liniowymi wspomnianych zbiorów m baz, a zatem zawierają one mniej informacji. Rozmiatość Grassmanna $\Delta(V, m)$ można utożsamiać z

$$SO(V, g)/SO(\Psi(U)^\perp, g | \Psi(U)^\perp) \times SO(\Psi(U), g | \Psi(U));$$

analitycznie,

$$SO(n, \mathbb{R})/SO(n - m, \mathbb{R}) \times SO(m, \mathbb{R}).$$

Oczywiście, jej wymiar jest równy $m(n - m)$.

Reasumując:

- Rozkład „biegunowy” utożsamia wewnętrzną przestrzeń konfiguracyjną z

$$(SO(n, \mathbb{R})/SO(n - m, \mathbb{R})) \times \text{Sym}(m, \mathbb{R}). \quad (3.10)$$

- Na ogół nie jest łatwo sparametryzować rozmiatość Stiefela w bezpośredni i efektywny sposób. Na szczęście my jesteśmy zainteresowani szczególnym przypadkiem, który jest raczej prosty. Odpowiada on sytuacji gdy $SO(n - m, \mathbb{R})$ jest trywialna; to odnosi się oczywiście do niezdegenerowanego ciała afinicznego.
- Gdy $m = n - 1$,

$$SO(n - m, \mathbb{R}) = SO(1, \mathbb{R}) = \{1\},$$

$$SO(n, \mathbb{R})/SO(n - m, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}).$$

W tym przypadku Q_{int} ma właśnie postać:

$$Q_{\text{int}} \simeq \text{SO}(n, \mathbb{R}) \times \text{Sym}(m, \mathbb{R}). \quad (3.11)$$

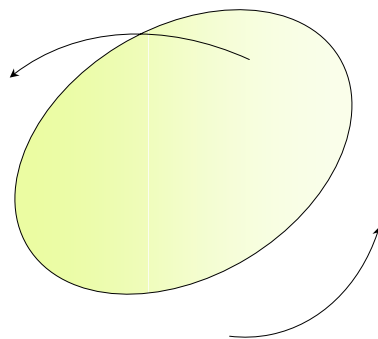
Rozkład „biegunowy” i „dwubiegunowy”

W niniejszym rozdziale rozpatrzemy dwa modele o zdegenerowanym wymiarze w rozkładzie „biegunowym” i „dwubiegunowym”. Przedstawione zostaną explicite szczególne rozwiązania typu „stacjonarnych” elips dla przypadku „dwubiegunowego”. Pomimo, że w przypadku „biegunowym” rozwiązania stacjonarne istnieją nie zostały tu umieszczone z powodu ich zawichości i dużej objętości.

4.1. Opis analityczny

Nasze praktyczne zainteresowanie skupia się na szczególnym przypadku, gdy $n = 3$ i $m = 2$, czyli jednorodnie deformowalnej płaskiej membranie, której przestrzeń konfiguracyjna jest dana przez wzór (3.11):

$$Q_{\text{int}} \simeq \text{SO}(3, \mathbb{R}) \times \text{Sym}(2, \mathbb{R}). \quad (4.1)$$



Jak pamiętamy istnieje odpowiednik rozkładu biegunowego (3.9) w mechanice zdegenerowanych ciał afinicznie sztywnych, gdy $m < n$. Mianowicie:

$$\varphi = R \begin{bmatrix} L \\ o \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

gdzie

- $R \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ właściwa macierz ortogonalna,
- $L \in \text{Sym}(m, \mathbb{R})$ $m \times m$ -wymiarową macierz symetryczną,
- o macierz $(n - m) \times m$ -wymiarowa zbudowana z zer.

Natomiast odpowiednik rozkładu dwubiegunowego (4.10) ma postać :

$$\varphi = V \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} U^{-1}, \quad (4.3)$$

gdzie

- $V \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ z tymi samymi zastrzeżeniami dotyczącymi fikcyjnych stopni swobody $\text{SO}(n - m, \mathbb{R})$,
- $D = \text{diag}(D_1, \dots, D_m)$ -macierz diagonalna $m \times m$ -wymiarowa dodatnio określona,
- o $(n - m) \times m$ -wymiarowa macierz zbudowana z zer,
- $U \in \text{SO}(m, \mathbb{R})$ dowolna $m \times m$ -wymiarowa właściwa macierz ortogonalna.

Jeśli $m = n - 1$, w szczególności, dla sytuacji fizycznej, gdy $n = 3$, $m = 2$ (dysk afinicznie deformowalny), konfiguracje są prawidłowo reprezentowane przez trójkę (V, D, U) z dokładnością do pewnych utożsamień, znanych z mechaniki niezdegenerowanych ciał afinicznych.

W fizycznym przypadku $n = 3$, $m = 2$ rozkłady „biegunowy” i „dwubiegunowy” mają odpowiednio następujące postaci:

$$\varphi = R \begin{bmatrix} \xi & \alpha \\ \alpha & \zeta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\varphi = V \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{-1}(\theta), \quad (4.5)$$

gdzie $R \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$, $U(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in \text{SO}(2, \mathbb{R})$ i (ξ, α, ζ) , (λ, μ) są układami rzeczywistych współrzędnych z uwzględnieniem warunków dodatniej określoności:

$$\xi > 0, \quad \xi\zeta - \alpha^2 > 0, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0. \quad (4.6)$$

Oczywiście, będąc zmienną kątową θ jest brane modulo 2π , podczas gdy (ξ, α, ζ) , (λ, μ) są zmiennymi globalnymi (choć poddanymi więzom jednostronnym). Nawiasem mówiąc, jeśli nasz płaski afiniczny układ punktów materialnych jest dyskretny, lub jeśli afiniczne stopnie swobody są zasadniczo wewnętrzne, wspomniane więzy jednostronne mogą być osłabione lub nawet pominięte.

$R \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ może zostać sparametryzowana przez lokalne współrzędne dobrze znane z mechaniki ciała sztywnego i z geometrii odpowiednich rozmaitości grupowych. Szczególny wybór zależy od struktury użytego modelu dynamicznego.

4.2. Formalizm hamiltonowski

Zakładamy, że potencjał V zależy tylko od konfiguracji, zależy od φ przez tensor deformacji Greena. Innymi słowy zakładamy, że układ jest izotropowy w przestrzeni fizycznej. Tensor deformacji Greena G dany jest przez następujące wyrażenie:

$$G_{AB} = g_{ij} \varphi^i_A \varphi^j_B = \delta_{ij} \varphi^i_A \varphi^j_B. \quad (4.7)$$

W zapisie macierzowym:

$$G = \varphi^T \varphi.$$

Oczywiście, $G^T = G$. Macierz Greena G jak wspomniano wyżej jest nieczuła na lewostronne ortogonalne odwzorowania. Oczywiście, niezmienniki deformacji, tj. pierwiastki charakterystyczne macierzy symetrycznej G , są niezmiennicze względem sztywnych obrotów w obydwu przestrzeniach materialnej i fizycznej.

Potencjał V użyty w rozkładzie „dwubiegunowym” jest funkcją wielkości λ , μ . W rozkładzie „biegunowym” wygodnie jest użyć V jako funkcji α , ξ , ζ . Stąd, w szczególności lagranżian ma postać:

$$L = T - V(\varphi) \quad (4.8)$$

z potencjałem niezależnym od prędkości.

W formalizmie hamiltonowskim wszystkie fizyczne wielkości, w szczególności energia, są wyrażone za pomocą pędów kanonicznych i współrzędnych uogólnionych. Stąd, rozpoczynając od opisu lagranżowskiego opartego na prędkościach musimy odwrócić transformacje Legendre’a i wyrazić prędkości uogólnione poprzez pędy kanoniczne i współrzędne uogólnione. Zapisujemy transformacje Legendre’a w następującej postaci:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad s_i = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = \frac{\partial T}{\partial \omega_i}, \quad (4.9)$$

gdzie p_i są pędami kanonicznymi sprzężonymi ze wszystkimi współrzędnymi uogólnionymi q_i z wyjątkiem tych zawartych w \mathbb{R} , natomiast s_i są spinami kanonicznymi [3].

Po odwróceniu tych wyrażeń, tj. wyrażając \dot{q}_i , ω_i jako funkcje p_i , s_i i wstawiając te funkcje do wzoru na energię kinetyczną otrzymamy energię kinetyczną wyrażoną za pomocą składników kanonicznych.

Hamiltonian (całkowita energia) ma, odpowiednio, w rozkładzie „biegunowym” i „dwubiegunowym” postać:

$$H = T + V(\alpha, \xi, \zeta), \quad (4.10)$$

$$H = T + V(\lambda, \mu), \quad (4.11)$$

gdzie potencjał V jest niezmienniczy względem permutacji jego elementów. Podobnie jak w opisie newtonowskim, kanoniczne równania ruchu prowadzą do zamkniętego podukładu równań nałożonych na parametry q_i, p_i, s_i :

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}, \quad \frac{ds_i}{dt} = \{s_i, H\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}. \quad (4.12)$$

Nawiasy Poisson’a z lewej strony mogą być łatwo policzone jak pamiętamy za pomocą standardowych reguł:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\}, & \{f, F(g)\} &= \{f, g\} \frac{dF}{dg}, \\ \{\{f, g\}, h\} &+ \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Powinniśmy podstawić tutaj następujące podstawowe wyrażenia:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{s_i, s_j\} = -\varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{p_i, s_j\} = 0, \quad \{q_i, s_j\} = 0, \quad (4.14)$$

gdzie ε_{ijk} jest tensorem całkowicie antysymetrycznym i $\varepsilon_{123} = 1$.

4.3. Rozkład „biegunowy”

Używając rozkładu „biegunowego”

$$\varphi = R \begin{bmatrix} L \\ o \end{bmatrix},$$

wykonujemy odpowiednie przekształcenia aby móc otrzymać odpowiednią postać energii kinetycznej. Skorzystamy przy tym z wyrażenia dla współtowarzyszącej prędkości kątowej R -żyroskopu [3], tj.

$$\omega = R^{-1} \dot{R} = R^T \dot{R}, \quad \omega^T = -\omega, \quad \omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Wykonujemy następujące rachunki:

$$\dot{\varphi} = \dot{R} \begin{bmatrix} L \\ o \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \dot{L} \\ o \end{bmatrix} = R\omega \begin{bmatrix} L \\ o \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \dot{L} \\ o \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\dot{\varphi}^T = - \begin{bmatrix} L & o^T \end{bmatrix} \omega R^T + \begin{bmatrix} \dot{L} & o^T \end{bmatrix} R^T. \quad (4.17)$$

Otrzymujemy następującą postać energii kinetycznej:

$$T = -\frac{1}{2}\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} LJJ & o^T \\ o & O_{n-m} \end{bmatrix} \omega^2 \right) + \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} LJ\dot{L} & o^T \\ o & O_{n-m} \end{bmatrix} \omega \right) + \frac{1}{2}\text{Tr}(J\dot{L}^2), \quad (4.18)$$

gdzie O_{n-m} jest $(n-m) \times (n-m)$ -wymiarową macierzą zbudowaną z zer.

To wyrażenie ma interesującą strukturę formalną. Pierwszy człon (4.18) można nazwać T_{rot} , ponieważ ma postać energii kinetycznej bąka ze stopniami swobody opisanymi przez $\text{SO}(n, \mathbb{R})$. Ten człon opisuje sprzężenie pomiędzy prędkością kątową a macierzą deformacji L . Drugi człon, który można nazwać $T_{\text{rot-def}}$, zawiera siły Coriolis'a i opisuje związek pomiędzy prędkością kątową i prędkością deformacji. Trzeci człon, nazwany T_{def} , opisuje energię kinetyczną prawdziwych oscylacji. Ostatecznie otrzymujemy całkowitą postać energii kinetycznej dla takiego przypadku:

$$T = T_{\text{rot}} + T_{\text{rot-def}} + T_{\text{def}}, \quad (4.19)$$

gdzie

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{J_1\alpha^2 + J_2\zeta^2}{2}\omega_1^2 + \frac{J_1\xi^2 + J_2\alpha^2}{2}\omega_2^2 + \\ &+ \frac{J_1\xi^2 + J_2\zeta^2 + (J_1 + J_2)\alpha^2}{2}\omega_3^2 - (J_1\xi + J_2\zeta)\alpha\omega_1\omega_2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$T_{\text{rot-def}} = \left(J_1\alpha\frac{d\xi}{dt} + (J_2\zeta - J_1\xi)\frac{d\alpha}{dt} - J_2\alpha\frac{d\zeta}{dt} \right) \omega_3, \quad (4.21)$$

$$T_{\text{def}} = \frac{J_1}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 + \frac{J_1 + J_2}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2. \quad (4.22)$$

W przypadku „biegunowym” przekształcenie Legendre'a daje:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= (J_1 + J_2)\frac{d\alpha}{dt} - (J_1\xi - J_2\zeta)\omega_3, \\ p_\xi &= J_1 \left(\frac{d\xi}{dt} + \alpha\omega_3 \right), \\ p_\zeta &= J_2 \left(\frac{d\zeta}{dt} - \alpha\omega_3 \right), \\ s_1 &= (J_1\alpha^2 + J_2\zeta^2)\omega_1 - \alpha(J_1\xi + J_2\zeta)\omega_2, \\ s_2 &= -\alpha(J_1\xi + J_2\zeta)\omega_1 + (J_1\xi^2 + J_2\alpha^2)\omega_2, \\ s_3 &= \alpha \left(J_1\frac{d\xi}{dt} - J_2\frac{d\zeta}{dt} \right) - \frac{d\alpha}{dt}(J_1\xi - J_2\zeta) + (J_1\xi^2 + (J_1 + J_2)\alpha^2 + J_2\zeta^2)\omega_3. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Energia kinetyczna w zmiennych współtowarzyszących ma postać:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{J_1(\xi s_1 + \alpha s_2)^2 + J_2(\alpha s_1 + \zeta s_2)^2}{2(\alpha^2 - \xi\zeta)^2 J_1 J_2} + \frac{(\xi^2 J_1 + \zeta^2 J_2) p_\alpha^2}{2(\xi + \zeta)^2 J_1 J_2} + \\
& + \frac{(\alpha^2 J_1 + (\alpha^2 + (\xi + \zeta)^2) J_2) p_\xi^2 + ((\alpha^2 + (\xi + \zeta)^2) J_1 + \alpha^2 J_2) p_\zeta^2}{2(\xi + \zeta)^2 J_1 J_2} + \\
& + \frac{(J_1 + J_2) (s_3 (s_3 - 2\alpha p_\zeta) + 2\alpha p_\xi (s_3 - \alpha p_\zeta))}{2(\xi + \zeta)^2 J_1 J_2} + \\
& + \frac{2(\xi J_1 - \zeta J_2) p_\alpha (\alpha p_\zeta - \alpha p_\xi + s_3)}{2(\xi + \zeta)^2 J_1 J_2}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

W przypadku powyższego rozkładu „biegunowego” kanoniczny moment pędu p_θ jest stałą ruchu. Zmienna θ nie wchodzi do energii kinetycznej. Zakładamy również, że potencjał V nie zależy od θ , stąd, θ jest zmienną cykliczną.

4.4. Rozkład „dwubiegunowy”

Używając rozkładu „dwubiegunowego”:

$$\varphi = V \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} U^{-1}, \tag{4.25}$$

a także używając wyrażenia dla współtowarzyszącej prędkości kątowej R -żyroskopu [3] w rozkładzie „dwubiegunowym”:

$$\chi = V^{-1}\dot{V} = V^T\dot{V}, \quad \chi^T = -\chi, \quad \text{i} \quad \chi = \begin{bmatrix} 0 & \chi_3 & -\chi_2 \\ -\chi_3 & 0 & \chi_1 \\ \chi_2 & -\chi_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

oraz wyrażenia na współtowarzyszącą prędkość kątową U -żyroskopu, tj.:

$$\vartheta = U^{-1}\dot{U} = U^T\dot{U}, \quad \vartheta^T = -\vartheta, \quad \text{i} \quad \vartheta = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

otrzymujemy następujące przekształcenia składników energii kinetycznej:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \dot{V} \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} U^{-1} + V \begin{bmatrix} \dot{D} \\ o \end{bmatrix} U^{-1} + V \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} \dot{U}^{-1} = \\
&= V\chi \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} U^{-1} + V \begin{bmatrix} \dot{D} \\ o \end{bmatrix} U^{-1} - V \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} \vartheta U^{-1}, \\
\dot{\varphi}^T &= -U \begin{bmatrix} D & o^T \end{bmatrix} \chi V^T + U \begin{bmatrix} \dot{D} & o^T \end{bmatrix} V^T + U\vartheta \begin{bmatrix} D & o^T \end{bmatrix} V^T.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

W przypadku rozkładu „dwubiegunowego” również zakładamy, że macierz bezwładności J jest proporcjonalna do macierzy jednostkowej. Ta macierz jest izotropowa w przypadku wysokiej symetrii, gdy układ jest podwójnie izotropowy, tzn. niezmienny względem obu fizycznych i materialnych obrotów sztywnych.

Energia kinetyczna ma postać:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{J}{2} Tr(\dot{\varphi}^T \dot{\varphi}) = J Tr \left(\begin{bmatrix} D & o^T \end{bmatrix} \chi \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} \vartheta \right) + \frac{J}{2} Tr(\dot{D}^2) + \\
&- \frac{J}{2} Tr \left(\begin{bmatrix} D & o^T \end{bmatrix} \chi^2 \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} \right) - \frac{J}{2} Tr \left(\begin{bmatrix} D & o^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} \vartheta^2 \right) = \\
&= \frac{J}{2} (\mu^2 \chi_1^2 + \lambda^2 \chi_2^2 + (\lambda^2 + \mu^2) \chi_3^2) + 2J\lambda\mu\chi_3 \frac{d\theta}{dt} + \\
&+ \frac{J(\lambda^2 + \mu^2)}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{J}{2} \left(\left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Otrzymujemy następujące wyrażenia na przekształcenie Legendre’a:

$$\begin{aligned}
p_\lambda &= J \frac{d\lambda}{dt}, \\
p_\mu &= J \frac{d\mu}{dt}, \\
p_\theta &= J(\lambda^2 + \mu^2) \frac{d\theta}{dt} + 2J\lambda\mu\chi_3, \\
s_1 &= J\mu^2\chi_1, \\
s_2 &= J\lambda^2\chi_2, \\
s_3 &= 2J\lambda\mu \frac{d\theta}{dt} + J(\lambda^2 + \mu^2)\chi_3.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

i po odwróceniu tych wyrażeń, czyli wyrażając \dot{q}_i , ω_i jako funkcje p_i , s_i , wstawiając je do wzoru na energię kinetyczną (4.30) otrzymamy energię kinetyczną wyrażoną za pomocą składników kanonicznych.

Energia kinetyczna w zmiennych współtowarzyszących ma następującą postać:

$$T = \frac{1}{2J}p_\lambda^2 + \frac{1}{2J}p_\mu^2 + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)^2}p_\theta^2 - \frac{2\lambda\mu}{J(\lambda^2 - \mu^2)^2}p_\theta s_3 \quad (4.31)$$

$$+ \frac{1}{2J\mu^2}s_1^2 + \frac{1}{2J\lambda^2}s_2^2 + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)^2}s_3^2.$$

Korzystając z nawiasów Poissona (2.7), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) obliczamy równania ruchu. W przypadku „dwubiegunowym”, w zmiennych kanonicznych, mają one postać:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{p_\lambda}{J}, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \frac{p_\mu}{J}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{(\lambda^2 + \mu^2)p_\theta}{J(\lambda^2 - \mu^2)^2} - \frac{2\lambda\mu p_\theta}{J(\lambda^2 + \mu^2)^2}, \\ \frac{ds_1}{dt} &= \frac{\lambda(2\lambda^3 p_\theta + \lambda(\mu^2 - 3\lambda^2)s_3)s_2}{J(\lambda^3 - \lambda\mu^2)^2}, \\ \frac{ds_2}{dt} &= \frac{\lambda(2\mu^3 p_\theta + \lambda(\lambda^2 - 3\mu^2)s_3)s_1}{J(\mu^3 - \mu\lambda^2)^2}, \\ \frac{ds_3}{dt} &= \frac{(\mu^2 - \lambda^2)s_1 s_2}{J\lambda^2 \mu^2}, \\ \frac{dp_\theta}{dt} &= 0, \\ \frac{dp_\lambda}{dt} &= -\frac{dV}{d\lambda} + \frac{\lambda(\lambda^2 + 3\mu^2)p_\theta^2}{J(\lambda^2 - \mu^2)^3} + \frac{s_2^2}{J\lambda^3} - \frac{2(3\lambda^2\mu + \mu^3)p_\theta s_3}{J(\lambda^2 - \mu^2)^3} + \frac{\lambda(\lambda^2 + 3\mu^2)s_3^2}{J(\lambda^2 - \mu^2)^3}, \\ \frac{dp_\mu}{dt} &= -\frac{dV}{d\mu} - \frac{(3\lambda^2\mu + \mu^2)p_\theta^2}{J(\lambda^2 - \mu^2)^3} + \frac{s_1^2}{J\mu^3} + \frac{2(3\lambda\mu^2 + \lambda^3)p_\theta s_3}{J(\lambda^2 - \mu^2)^3} - \frac{(3\mu\lambda^2 + \mu^3)s_3^2}{J(\lambda^2 - \mu^2)^3}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.5. Rozwiązania szczególne - stacjonarne elipsy

Nasze równania ruchu w obu przypadkach są silnie nieliniowe i, ogólnie, nie ma nadziei na ich analityczne rozwiązanie. Niemniej jednak, istnieją pewne szczególne rozwiązania, tak zwane stacjonarne elipsy. Są one analogiczne do stacjonarnych elipsoid dobrze znanych w astrofizyce i geofizyce jako figury równowagowe, np. w teorii kształtu

Ziemi. Ich cechą szczególną jest to, że tensor deformacji Greena i prędkości kątowe są stałe:

$$\frac{d}{dt}G[\varphi(t)] = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(R^{-1}[\varphi(t)]\dot{R}[\varphi(t)]\right) = 0. \quad (4.33)$$

Stacjonarne rozwiązania wynikają z równań ruchu po podstawieniu pewnych założeń, mianowicie:

$$\lambda = \text{const}, \quad \mu = \text{const}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \text{const}. \quad (4.34)$$

W tym paragrafie badamy rozwiązania odnoszące się do składowych spinów afinicznych s_i w przypadku trzech rodzajów potencjałów. Tylko fizyczne, tzn. rzeczywiste rozwiązania są tu przytaczane. W szczególności, nie podajemy rozwiązań zespolonych naszych równań algebraicznych.

4.5.1. Potencjał $V = \frac{k}{2}(\lambda^2 + \mu^2)$

Jest to potencjał oscylatora harmonicznego w niezmiennikach deformacji. Nieograniczone rozszerzanie się ciała jest zabronione. Mimo że kontrakcja nie jest zakazana, rozwiązania tego rodzaju są wyjątkowe (zbiór miary zero), jako zwykle rozwiązania przechodzące przez położenie równowagi w oscylatorach wielowymiarowych. Natomiast pewnych wymogów makroskopowej sprężystości nie spełniają. Niemniej jednak może to być zastosowane jako uproszczony model.

Podstawmy do powyższych równań następujące założenia: $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = \text{const}$. gdzie tutaj i poniżej symbole A , B oznaczają lewe strony równań ruchu. Równania te mają następujące rozwiązania:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{\lambda(A + k\lambda) - \mu(B + k\mu) \mp \sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)\left((A + k\lambda)^2 - (B + k\mu)^2\right)}}{2J(\lambda^2 - \mu^2)}}, \\ s_3 &= \frac{2J\frac{d\theta}{dt}\left(\mu^3(B + k\mu) - \lambda^3(A + k\lambda) + J(\lambda^4 - \mu^4)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)}{A\mu - B\lambda}. \end{aligned}$$

Gdy kładziemy $A = 0$ i $B = 0$ rozwiązania mają postać:

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{J}}, \quad s_3 = 2J\lambda\mu \frac{d\theta}{dt}.$$

W pierwotnych współrzędnych mamy rozwiązanie:

$$\chi_1 = \pm \sqrt{\frac{BJ\lambda - AJ\mu + k(\lambda^2 - \mu^2) \pm R}{2J(\lambda^2 - \mu^2)}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\chi_3 (BJ\lambda - AJ\mu + k(\lambda^2 - \mu^2) + J(\mu^2 - \lambda^2)\chi_3^2)}{J(A\lambda - B\mu)},$$

gdzie $R = \sqrt{((B^2 - A^2)J^2 + 2kJ(B\lambda - A\mu) + k^2(\lambda^2 - \mu^2))(\lambda^2 - \mu^2)}$

4.5.2. Potencjał $V = c\left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2\right) + c\left(\frac{1}{\mu^2} + \mu^2\right)$

Z tym potencjałem zarówno nieograniczone rozszerzanie jak i kontrakcja są zakazane. Potencjał ten ma minimum w naturalnym niezdeformowanym stanie $\lambda = \mu = 1$. Niemniej jednak, pewnych warunków makroskopowej sprężystości nie spełnia. Mianowicie, nie ma bezpośredniego związku pomiędzy wydłużaniem w jednym kierunku i skracaniem w innym.

Jeśli założyć $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = const$ to rozwiązania stacjonarne mają postać:

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\lambda\mu(\lambda^2\mu^2(A\lambda - B\mu) + 2c(\mu^2(\lambda^4 - 1) - \lambda^2(\mu^4 - 1))) \pm Q}{2J\lambda^2\mu^2(\lambda^2 - \mu^2)}},$$

$$s_3 = \frac{2J\lambda^3\mu^3\frac{d\theta}{dt}\left(\mu^3(B + 2c\mu) - \lambda^3(A + 2c\lambda) + J(\lambda^4 - \mu^4)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)}{\lambda^3\mu^3(A\mu - B\lambda) + 2c(\lambda^4 - \mu^4)}.$$

Tutaj:

$$Q = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\sqrt{(A^2 - B^2)\lambda^6\mu^6 - 4c(B\lambda^6\mu^3(\mu^4 - 1) - A\lambda^3\mu^6(\lambda^4 - 1))} + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\sqrt{4c^2(\mu^6(\lambda^4 - 1)^2 - \lambda^6(\mu^4 - 1)^2)}.$$

Gdy $A = 0$, $B = 0$, rozwiązania mają postać:

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{c\left(\lambda\mu + \lambda^3\mu^3 \mp \sqrt{\lambda^4(2\mu^4 - 1) + \lambda^6\mu^6 - \lambda^2\mu^2 - \mu^4}\right)}{J\lambda^3\mu^3}},$$

$$s_3 = \frac{J\lambda^3\mu^3\frac{d\theta}{dt}\left(-2c + J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)}{c}.$$

W pierwotnych w zmiennych prędkościowych równania ruchu mają szczególne rozwiązania spełniające warunki: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = const$:

$$\chi_3 = \pm \sqrt{\frac{J\lambda^2\mu^2(B\lambda - A\mu) + 2c(-\mu^2 + \lambda^4\mu^2 - \lambda^2(-1 + \mu^4))}{2J\lambda^2\mu^2(\lambda^2 - \mu^2)}}$$

$$\mp \sqrt{\frac{\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)((B^2 - A^2)J^2\lambda^6\mu^6 - 4cJ\lambda^3\mu^3(A\lambda^3(\mu^4 - 1) - (B\mu^3(\lambda^4 - 1))) + E)}}{J2\lambda^3\mu^3(\lambda^2 - \mu^2)}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{(2J\lambda^3\mu^3(A\mu - B\lambda) - 4c\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2 + \lambda^4\mu^2 - \lambda^2\mu^4))\chi_3 + 2J\lambda^3\mu^3(\lambda^2 - \mu^2)\chi_3^3}{J\lambda^3\mu^3(A\lambda - B\mu) - 2c(\lambda^4 - \mu^4)}$$

gdzie $E = 4c^2(\mu^6 - 2\lambda^4\mu^6 + \lambda^8\mu^6 - \lambda^6(\mu^4 - 1)^2)$.

Gdy kładziemy $A = 0$, $B = 0$:

$$\chi_3 = \mp \sqrt{\frac{\frac{c}{J} + \frac{c}{J\lambda^2\mu^2} \pm \sqrt{-c^2J^2\lambda^6\mu^6(\lambda^2 + \mu^2)^2 + (cJ\lambda^4\mu^4 + cJ\lambda^6\mu^6)^2}}{J^2\lambda^6\mu^6}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{J\lambda^3\mu^3\omega_3^3 - 2c(\lambda\mu + \lambda^3\mu^3)\omega_3}{c(\lambda^2 + \mu^2)},$$

4.5.3. Potencjał $V = k\left(\frac{1}{\lambda\mu} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}\right)$

Ten potencjał ma bardzo interesujące właściwości. W zwykłym dwu-wymiarowym przypadku w \mathbb{R}^2 z izotropowym tensorem bezwładności pozwala on na separację zmiennych w równaniu Hamiltona-Jacobiego. Pozwala na rozwiązanie w kwadraturach, tj. otrzymany układ jest całkowicie całkowny. To widać gdy λ i μ zastąpimy przez ich kombinacje

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda + \mu), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda - \mu)$$

i użyjemy współrzędnych biegunowych w płaszczyźnie (x, y) :

$$x = \rho \cos \varepsilon, \quad y = \rho \sin \varepsilon.$$

Oczywiście jest to niemożliwe w przypadku dwu-wymiarowego ciała poruszającego się w trzech przestrzennych wymiarach. Niemniej jednak, jest to zawsze zgodne ze standardowymi wymogami sprężystości nieliniowej. Potencjał ten ma minimum w naturalnym niezdeformowanym stanie $\lambda = \mu = 1$ i powoduje niemożliwość nieograniczonego rozszerzania się ciała i również jego kontrakcji do pojedynczego zero-wymiarowego i

jedno-wymiarowego przypadku. Poza tym, rozszerzaniu w jednym kierunku zawsze towarzyszy zwężanie w innym kierunku. Całkowalność w dwu wymiarach obowiązuje także dla bardziej ogólnych potencjałów w postaci:

$$V(\varrho, \varepsilon) = V_\varrho(\varrho) + \frac{V_\varepsilon(\varepsilon)}{\varrho^2}. \quad (4.35)$$

W tym przypadku równania ruchu mają stacjonarne rozwiązania, gdy założymy $s_1 = 0$, $s_2 = const$, $s_3 = 0$ i stałość deformacyjnych stopni swobody:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{-(\lambda^2 + \mu^2)^2 (B\lambda\mu^2 + k(-1 + \lambda\mu^3))}{J\lambda\mu^3 (3\lambda^4 - 2\lambda^2\mu^2 - \mu^4)}}, \\ s_2 &= \mp \sqrt{\frac{J \left(A\lambda^4\mu - B\lambda\mu^4 + k(-\lambda^2 + \lambda^5\mu + \mu^2 - \lambda\mu^5) + J\lambda\mu(-\lambda^4 + \mu^4) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right)}{\lambda\mu}}. \end{aligned}$$

Gdy $A = 0$, $B = 0$, rozwiązania mają postać:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{-k(\lambda^2 + \mu^2)^2 (-1 + \lambda\mu^3)}{J\lambda\mu^3 (3\lambda^4 - 2\lambda^2\mu^2 - \mu^4)}}, \\ s_2 &= \mp \sqrt{\frac{J \left(k(-\lambda^2 + \lambda^5\mu + \mu^2 - \lambda\mu^5) + J\lambda\mu(-\lambda^4 + \mu^4) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right)}{\lambda\mu}}, \end{aligned}$$

Kolejne rozwiązania stacjonarne równań ruchu w tym przypadku otrzymujemy, gdy założymy $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = const$ i stałość deformacyjnych stopni swobody:

(i)

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{(\lambda - \mu)(\lambda + \mu)(A\lambda - B\mu + k(\lambda - \mu)(\lambda + \mu))}{2J(\lambda^2 - \mu^2)^2}}, \\ &\mp \sqrt{\frac{\sqrt{(\lambda - \mu)^3(\lambda + \mu)^3((A + B)\lambda^2\mu^2 + k(\lambda + \mu)(\lambda^2\mu^2 - 1))W}}{2J\lambda^2\mu^2(\lambda^2 - \mu^2)^2}}, \\ s_3 &= -\frac{2J\lambda\mu \frac{d\theta}{dt} \left(k\lambda^2 - \lambda^4(A + k\lambda)\mu - k\mu^2 + B\lambda\mu^4 + k\lambda\mu^5 + J\mu(\lambda^5 - \lambda\mu^4) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right)}{\lambda^2\mu^2(B\lambda - A\mu) + k(-\lambda^2 + \mu^2)}, \end{aligned}$$

gdzie $W = ((A - B)\lambda^2\mu^2 + k(\lambda - \mu)(1 + \lambda^2\mu^2))$

(ii)

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{-(A\lambda) - k\lambda^2 + B\mu + k\mu^2}{-(J\lambda^2) + J\mu^2}}, \quad s_3 = 2J\lambda\mu \frac{d\theta}{dt},$$

$$A = \frac{B \lambda^3 \mu^2 + k (-\lambda^2 + \mu^2)}{\lambda^2 \mu^3}$$

Gdy $A = 0$ i $B = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{k}{2J} \mp \frac{\sqrt{k^2 (\lambda^4 \mu^4 - 1)}}{2J \lambda^2 \mu^2}}, \\ s_3 &= \frac{2J \lambda \mu \frac{d\theta}{dt} \left(- (k (-1 + \lambda^3 \mu + \lambda \mu^3)) + J \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right)}{k}. \end{aligned}$$

W zmiennych pierwotnych rozwiązania mają postać:

$$\begin{aligned} \chi_3 &= \pm \sqrt{\frac{BJ\lambda + k\lambda^2 - AJ\mu - k\mu^2}{J\lambda^2 - J\mu^2}} \\ &\mp \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2) ((B^2 - A^2) J^2 \lambda^4 \mu^4 + k^2 (\mu^2 - \lambda^2 + \lambda^6 \mu^4 - \lambda^4 \mu^6) - Q)}}{2J \lambda^2 \mu^2 (\lambda^2 - \mu^2)} \right)} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{-2\lambda^2 \mu^2 \chi_3 (- (BJ\lambda) - k\lambda^2 + AJ\mu + k\mu^2 + J (\lambda^2 - \mu^2) \chi_3^2)}{J\lambda^2 \mu^2 (A\lambda - B\mu) + k (-\lambda^2 + \mu^2)} \end{aligned}$$

gdzie $Q = 2Jk\lambda^2\mu^2 (B\mu(1 - \lambda^3\mu) + A\lambda(\lambda\mu^3 - 1))$

Gdy $A = 0$, $B = 0$ mamy:

$$\begin{aligned} \chi_3 &= \pm \sqrt{\frac{k}{2J} \mp \frac{\sqrt{k^2 (\lambda^4 \mu^4 - 1)}}{2J \lambda^2 \mu^2}} \\ \frac{d\theta}{dt} &= - \frac{2 (k \lambda^2 \mu^2 \chi_3 - J \lambda^2 \mu^2 \chi_3^3)}{k} \end{aligned}$$

Model z „grubością”

Głównym przedmiotem tej pracy jest ciało afinicznie sztywne o zdegenerowanym wymiarze, tzn. obiekt o afinicznych stopniach swobody, ale o przestrzeni materialnej mającej niższy wymiar niż przestrzeń fizyczna. Koncentrujemy się na przypadku ciała dwuwymiarowego w przestrzeni trójwymiarowej, ponieważ jest on najbardziej fizyczny. Nasz obiekt był infinitesimalny w jednym wymiarze, miał zerową grubość. Warto jednak poświęcić kilka słów modelowi o niezerowej grubości.

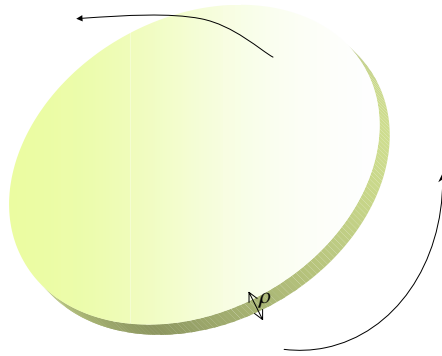
5.1. Kinematyka i dynamika modelu

Ogólna kinematyka i dynamika takiego obiektu o niezerowej grubości to byłby po prostu jeden z przypadków ciała trójwymiarowego (ogólniej - o niezdegenerowanym wymiarze). Nie zajmujemy się tutaj tym zagadnieniem. Można natomiast, pozostając blisko naszego głównego tematu, dopuścić proste sytuacje ze skończoną grubością. Jest

to w jakimś sensie ciało geometrycznie trójwymiarowe, o afinicznych stopniach swobody, ale poddane pewnym więzom. Mianowicie, powierzchnia środkowa ciała zachowuje się jak opisano powyżej, zaś grubość wykonuje jednowymiarowe oscylacje ortogonalne do niej. Grupa przekształceń materialnych ma teraz postać

$$\mathbb{R}^+ \times \text{GL}(2, \mathbb{R}).$$

Przestrzenią materialną jest \mathbb{R}^3 przedstawiona jako iloczyn kartezjański $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, gdzie \mathbb{R}^+ jest mnożącą grupą liczb dodatnich. Dotychczasowe przekształcenia materialne działają w \mathbb{R}^2 tak, jak poprzednio, natomiast \mathbb{R} jest grupą dylatacji w trzecim wymiarze.



Konfigurację możemy utożsamić z parą ϱ, φ , gdzie φ opisuje włożenie powierzchni środkowej w przestrzeń fizyczną i ma to samo znaczenie, co przedtem; analitycznie reprezentowane jest przez macierz $[\varphi^i_A]$ o wymiarze 3×2 . Element $(k, B) \in \mathbb{R}^+ \times \text{GL}(2, \mathbb{R})$ działa na (ϱ, φ) jak następuje:

$$(k, B): \quad (\varrho, \varphi) \mapsto (k\varrho, \varphi B).$$

Możemy też reprezentować konfigurację wprost za pomocą macierzy $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Zachowanie ortogonalności kierunku, „wzdłuż bocznej krawędzi” do podstawy sprawia, że macierz Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi^1_1 & \Phi^1_2 & \Phi^1_3 \\ \Phi^2_1 & \Phi^2_2 & \Phi^2_3 \\ \Phi^3_1 & \Phi^3_2 & \Phi^3_3 \end{bmatrix}$$

ma szczególną postać. Mianowicie trzecia kolumna musi być proporcjonalna do iloczynu wektorowego dwóch pierwszych. Jeśli traktować $\Phi^a_1, \Phi^b_1, a, b = 1, 2, 3$ jako niezależne i dowolne, to:

$$\Phi_3^a = \ell \varepsilon^a_{bc} \Phi_1^b \Phi_1^c,$$

gdzie ℓ jest parametrem „grubościowym” - dodatkowym stopniem swobody; jest on tożsamy ze zmienną ϱ , ε_{abc} jest zupełnie antysymetrycznym symbolem Ricciego, zaś przesuwanie indeksów rozumiemy w trywialnym sensie „delty” Kroneckera, bo pracujemy we współrzędnych ortonormalnych. Ortogonalność „bocznej krawędzi” do powierzchni środkowej znana jest w teorii płyt i powłok jako warunek Kirchoffa-Love’a.

Uwaga: Przy tym warunku, grupa afiniczna 3-wymiarowej przestrzeni fizycznej nie działa już na przestrzeni konfiguracyjnej płaskiego ciała afinicznie sztywnego „z grubością”. Jeśli pomijamy translacyjne stopnie swobody, to tym samym pełna grupa liniowa w 3-wymiarowej przestrzeni translacji nie działa na przestrzeni konfiguracyjnej wewnętrznych stopni swobody. Istotnie, przekształcenia te na ogół naruszają założoną powyżej ortogonalność. Natomiast dobrze określone jest działanie w przestrzeni konfiguracyjnej grupy Weyla, tzn. grupy obrotów złożonych z dylatacjami (jedne i drugie w sensie przestrzeni fizycznej). Względem działania tej grupy nasza przestrzeń konfiguracyjna nie jest przestrzenią jednorodną (bo obroty i dylatacje fizyczne nie są w stanie zdeformować ciała w jego płaszczyźnie). Natomiast nadal przestrzeń konfiguracyjna jest przestrzenią jednorodną dla pełnej grupy generowanej przez $\mathbb{R}^+GL(3, \mathbb{R})$ - obroty i dylatacje w przestrzeni fizycznej - oraz $GL(2, \mathbb{R})$ - obroty i przekształcenia jednorodne \mathbb{R}^2 , działające na konfiguracje od lewej strony (w przestrzeni materialnej).

Energię kinetyczną zakładamy w zwykłej postaci:

$$T = \frac{1}{2} \text{Tr} (\dot{\Phi}^T \dot{\Phi} J), \quad (5.1)$$

należy tylko podstawić więzy.

Rozkład dwubiegunowy zapisujemy w nieco zmodyfikowanej postaci, w której używamy samych macierzy 3×3 :

$$\Phi(\bar{k}, \lambda, \mu, \varrho, \theta) = R(\bar{k})DU(\theta)^{-1} = R(\bar{k}) \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{bmatrix} U(\theta)^{-1} = \quad (5.2)$$

$$= R(\bar{k}) \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Obecna macierz $U(\theta)$ powstaje z poprzedniej macierzy 2×2 włączając ją jako swój górny blok. Trzecim blokiem jest jedynka.

Skorzystamy z wyrażenia dla współtowarzyszącej prędkości kątowej R -żyroskopu [3], tj.:

$$\omega = R^{-1}\dot{R} = R^T\dot{R}, \quad \omega^T = -\omega, \quad \text{i} \quad \omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Jak również skorzystamy z wyrażenia dla współtowarzyszącej prędkości kątowej U -żyroskopu

$$\vartheta = U^{-1}\dot{U} = U^T\dot{U}, \quad \vartheta^T = -\vartheta, \quad \text{i} \quad \hat{\vartheta} = \dot{\vartheta} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

wykonujemy odpowiednie przekształcenia wielkości Φ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= R\hat{\omega}DU^{-1} + R\dot{D}U^{-1} - RD\hat{\vartheta}U^{-1}, \\ \dot{\Phi}^T &= -UD^T\hat{\omega}R^T + U\dot{D}^TR^T + U\hat{\vartheta}D^TR^T \end{aligned} \quad (5.6)$$

Wyrażenia wyglądają w miarę prosto, gdy rozpatrujemy przypadek izotropowy w „płaskich” wymiarach, tzn. gdy:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

przyjmuje postać $J_1 = J_2$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

Energia kinetyczna (5.1) wyraża się, po dokonaniu przekształceń, jak następuje:

$$\begin{aligned} T &= \frac{J_1}{2} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 + \frac{J_3}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} (J_1\mu^2 + J_2\lambda^2) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \lambda\mu\omega_3 (J_1 + J_2) \frac{d\vartheta}{dt} \\ &+ \frac{1}{2} \left((J_2\mu^2 + J_3\rho^2) \omega_1^2 + (J_1\lambda^2 + J_3\rho^2) \omega_2^2 + (J_1\lambda^2 + J_2\mu^2) \omega_3^2 \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Natomiast w przypadku izotropowym gdy $J_1 = J_2$, mamy:

$$\begin{aligned} T &= \frac{J_1}{2} \left(\left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 \right) + \frac{J_2}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 \\ &+ \frac{J_1}{2} (\mu^2 + \lambda^2) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + 2J_1\lambda\mu\omega_3 \frac{d\vartheta}{dt} \\ &+ \frac{1}{2} \left((J_1\mu^2 + J_2\rho^2) \omega_1^2 + (J_1\lambda^2 + J_2\rho^2) \omega_2^2 + J_1 (\lambda^2 + \mu^2) \omega_3^2 \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aby przejść do zmiennych współtowarzyszących wykonujemy przekształcenia Legendre’a:

$$\begin{aligned} p_\lambda &= J_1 \frac{d\lambda}{dt}, \\ p_\mu &= J_2 \frac{d\mu}{dt}, \\ p_\rho &= J_3 \frac{d\rho}{dt}, \\ p_\vartheta &= J_2 \left(\lambda\mu\omega_3 + \lambda^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right), \\ s_1 &= (J_2\mu^2 + J_3\rho^2) \omega_1, \\ s_2 &= (J_1\lambda^2 + J_3\rho^2) \omega_2, \\ s_3 &= (J_1\lambda^2 + J_2\mu^2) \omega_3 + \lambda\mu (J_1 + J_2) \frac{d\vartheta}{dt}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

Wyrażając \dot{q}_i , ω_i jako funkcje p_i , s_i i wstawiając te funkcje do wzoru na energię kinetyczną otrzymamy energię kinetyczną wyrażoną za pomocą składników kanonicznych.

W zmiennych kanonicznych energia kinetyczna przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{p_\lambda^2}{2J_1} + \frac{p_\mu^2}{2J_2} + \frac{p_\varrho^2}{2J_3} + \frac{(J_1\lambda^2 + J_2\mu^2)p_\vartheta^2}{2J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^2} \\
&+ \frac{s_1^2}{2(J_2\mu^2 + J_3\varrho^2)} + \frac{s_2^2}{2(J_1\lambda^2 + J_3\varrho^2)} + \\
&- \frac{\lambda\mu(J_1 + J_2)p_\vartheta s_3}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^2} + \frac{(J_1\mu^2 + J_2\lambda^2)s_3^2}{2J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^2}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Natomiast w przypadku izotropowym gdy $J_1 = J_2$, energia kinetyczna przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{p_\lambda^2}{2J_1} + \frac{p_\mu^2}{2J_1} + \frac{p_\varrho^2}{2J_2} + \frac{(\lambda^2 + \mu^2)p_\vartheta^2}{2J_1(\lambda^2 - \mu^2)^2} \\
&+ \frac{s_1^2}{2(J_1\mu^2 + J_2\varrho^2)} + \frac{s_2^2}{2(J_1\lambda^2 + J_2\varrho^2)} + \\
&- \frac{2\lambda\mu p_\vartheta s_3}{J_1(\lambda^2 - \mu^2)^2} + \frac{(\mu^2 + \lambda^2)s_3^2}{2J_1(\lambda^2 - \mu^2)^2}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Jak widać, w energii kinetycznej prędkości uogólnione odpowiadające współrzędnym λ , μ i pozostałym współrzędnym ruchu „w płaszczyźnie” są odseparowane od prędkości $\dot{\varrho}$, z jaką oscyluje grubość ϱ . To samo dotyczy wyrażenia w zmiennych w zmiennych kanonicznych. Pęd p_ϱ sprzężony z ϱ jest ortogonalny (w sensie metryki zakodowanej w energii kinetycznej) do pozostałych pędów kanonicznych. Zatem szczególnie proste będą modele dynamiczne, w których także potencjał izotropowy będzie miał rozseparowaną postać:

$$V(\varrho, \lambda, \mu) = V_\varrho(\varrho) + V_{\lambda,\mu}(\lambda, \mu). \tag{5.12}$$

Jako modelowego fenomenologicznego potencjału dla grubości można użyć np.:

$$V_\varrho = \frac{k}{\varrho} + \frac{k}{2}\varrho^2,$$

opisującego drgania nieliniowe. Pierwszy człon zapobiega nieograniczonemu zgniataniu ciała, zaś drugi ogranicza ruch dla dużych wartości ϱ , zapobiega więc niefizycznemu, nieograniczonemu rozciąganiu ciała.

Przyjmując potencjał w postaci (5.12) mamy równania ruchu w postaci:

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{p_\lambda}{J_1}, & \frac{d\mu}{dt} &= \frac{p_\mu}{J_2}, & \frac{d\rho}{dt} &= \frac{p_\rho}{J_3}, \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{(J_1\lambda^2 + J_2\mu^2)p_\theta}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^2} - \frac{\lambda\mu(J_1 + J_2)s_3}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^2}, \\
\frac{ds_1}{dt} &= -\frac{s_1s_3}{J_2\mu^2 + J_3\rho^2} + \frac{(J_1\mu^2 + J_2\lambda^2)s_2s_3}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^2} - \frac{\lambda\mu(J_1 + J_2)p_\theta s_2}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^2}, \\
\frac{ds_2}{dt} &= \frac{s_1s_3}{J_2\mu^2 + J_3\rho^2} - \frac{(J_1\mu^2 + J_2\lambda^2)s_1s_3}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^2} + \frac{\lambda\mu(J_1 + J_2)p_\theta s_1}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^2}, \\
\frac{ds_3}{dt} &= \frac{(J_1\lambda^2 - \mu^2J_2)s_1s_2}{(J_1\lambda^2 + J_3\rho^2)(J_2\mu^2 + J_3\rho^2)}, \\
\frac{dp_\theta}{dt} &= 0, \\
\frac{dp_\lambda}{dt} &= -\frac{dV}{d\lambda} + \frac{\lambda(J_1(\lambda^2 + \mu^2) + 2J_2\mu^2)p_\theta^2}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^3} + \frac{\mu(3\lambda^2 + \mu^2)(J_1 + J_2)p_\theta s_3}{J_1J_2(\mu^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad + \frac{J_1\lambda s_2^2}{(J_1\lambda^2 + J_3\rho^2)^2} + \frac{\lambda(2J_1\mu^2 + J_2(\lambda^2 + \mu^2))s_3^2}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^3}, \\
\frac{dp_\mu}{dt} &= -\frac{dV}{d\mu} - \frac{\mu(J_2(\lambda^2 + \mu^2) + 2J_1\lambda^2)p_\theta^2}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^3} + \frac{\lambda(\lambda^2 + 3\mu^2)(J_1 + J_2)p_\theta s_3}{J_1J_2(\lambda^2 - \mu^2)^3} \\
&\quad + \frac{J_2\mu s_1^2}{(J_2\mu^2 + J_3\rho^2)^2} - \frac{\mu(2J_2\lambda^2 + J_1(\lambda^2 + \mu^2))s_3^2}{(\lambda^2 - \mu^2)^3 J_1J_2}, \\
\frac{dp_\rho}{dt} &= -\frac{dV}{d\rho} + \frac{k}{\rho^2} - k\rho + \frac{J_3\rho s_1^2}{(J_2\mu^2 + J_3\rho^2)^2} + \frac{J_3\rho s_2^2}{(J_1\lambda^2 + J_3\rho^2)^2},
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Ze struktury powyższych równań widać, że nawet w prostym przypadku rozseparowanego potencjału, struktura energii kinetycznej wyrażonej w powyższych zmiennych prowadzi do dynamicznego sprzężenia między parametrem grubości a zmiennymi w „płaszczyźnie środkowej”. Równania są więc bardzo skomplikowane nawet przy prostych potencjałach i możliwa jest tylko analiza jakościowa lub numeryczna. Inną drogą do wyrobienia sobie pewnego wyobrażenia o portrecie fazowym układu jest poszukiwanie prostych rozwiązań szczególnych typu stacjonarnych elips (z ustaloną lub być może pulsującą grubością).

5.2. Rozwiązania stacjonarne

Nasze równania ruchu silnie nieliniowe i, w ogólności, nie ma nadziei na ich analityczne rozwiązanie. Niemniej jednak, jak pamiętamy istnieją pewne szczególne roz-

wiązania - stacjonarne elipsy. Są one analogiczne do stacjonarnych elipsoid dobrze znanych w astrofizyce i geofizyce jako figury równowagowe. Ich cechą szczególną jest to, że tensor deformacji Greena i prędkości kątowe są stałe:

$$\frac{d}{dt}G[\varphi(t)] = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(R^{-1}[\varphi(t)]\dot{R}[\varphi(t)]\right) = 0. \quad (5.14)$$

Stacjonarne rozwiązania wynikają z równań ruchu po podstawieniu pewnych założeń, mianowicie:

$$\lambda = const, \quad \mu = const, \quad \varrho = const, \quad \frac{d\theta}{dt} = const. \quad (5.15)$$

W tym paragrafie badamy rozwiązania odnoszące się do składowych spinów afinicznych s_i . Tylko fizyczne, tzn. rzeczywiste rozwiązania są tu przytaczane. W szczególności, nie podajemy rozwiązań zespolonych naszych równań algebraicznych.

5.2.1. Potencjał $V = a(\lambda^2 + \mu^2 + \varrho^2) + \frac{b}{\lambda\mu\varrho}$

Jest to potencjał typu (4.35), taki jak w przypadku „dwubiegunowym”. W tym przypadku równania ruchu mają stacjonarne rozwiązania, gdy założymy $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = const$:

$$s_3 = -\frac{2J_1\lambda\mu P \frac{d\theta}{dt}}{\lambda^4 + 6\lambda^2\mu^2 + \mu^4} - \frac{2J_1\lambda^2\mu^2(\lambda^2 + \mu^2)\rho \frac{d\theta}{dt} \left(2a(\lambda^2 - \mu^2)^2 + J_1P\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)}{b(\lambda^4 + 6\lambda^2\mu^2 + \mu^4)},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\mp \frac{1}{b^2P} \left(\pm ab^2 J_1 K + \sqrt{(a^2 b^2 (-2P\varrho^4 (3b^2 + 2a^2(\lambda^4 + \mu^4)\varrho^6) + b^2 K^2) J_1^2)} \right)}.$$

gdzie $P = 3\lambda^4 + 2\lambda^2\mu^2 + 3\mu^4$ i $K = ((\lambda - \mu)^2 + 4\varrho^2(\mu^2 + \lambda^2))^2$.

W tym przypadku, z uwagi na silnie nieliniowe równania ruchu, policzenie ścisłych rozwiązań typu stacjonarnych elips wymaga odpowiednich rachunków numerycznych i odpowiednio dużej zdolności obliczeniowej komputera. Niemniej jednak można takie rozwiązania znaleźć, jak widać powyżej, w przypadku powyższego prostego potencjału.

Zasada d'Alemberta i ruch pod wpływem sił niepotencjalnych

W tej pracy główny nacisk kładziemy na metody mechaniki Hamiltonowskiej. Warto jednak poświęcić parę słów ogólnemu sformułowaniu problemu, stosującemu się także do sytuacji, gdy równania ruchu nie są wyprowadzalne z zasady wariacyjnej.

6.1. Formalizm Newtonowski

Dla skończonego układu punktów materialnych wyjściowy układ równań Newtona ma postać:

$$m_A \frac{d^2 \bar{r}_A}{dt^2} = \bar{F}_A \left(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N; \frac{d\bar{r}_1}{dt}, \dots, \frac{d\bar{r}_N}{dt}, t \right), \quad A = 1, \dots, N. \quad (6.1)$$

Dla układu ciągłego mamy odpowiednio:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}(t, a)}{\partial t^2} = \bar{\Phi} \left[\bar{x}(\cdot, \cdot), \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}(\cdot, \cdot), t \right] \quad (6.2)$$

gdzie $\bar{\Phi}$ jest gęstością sił na jednostkę masy.

Gęstość sił na jednostkę objętości $\bar{\Psi}$ przy ciągłym rozkładzie masy w ciele ma postać:

$$\bar{\Psi} = \varrho \bar{\Phi},$$

tzn. równanie ruchu kontinuum można zapisać w postaci:

$$\varrho \frac{\partial^2 \bar{x}(t, a)}{\partial t^2} = \bar{\Psi} \left[\bar{x}(\cdot, \cdot), \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}(\cdot, \cdot), t \right]. \quad (6.3)$$

Założmy teraz, że ruch jest afiniczny, tzn.

$$x^i(t, a) = r^i(t) + \varphi^i_K a^K, \quad (6.4)$$

gdzie $r^i(t)$ są współrzędnymi środka masy. W przypadku kontinuum oznacza to, że uwikłana postać równań więzów może być zapisana jak następuje:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial a^K \partial a^L} = 0$$

x^i są wielomianami pierwszego stopnia od współrzędnych lagranżowskich, a więc ich drugie pochodne znikają. Założenia kinematycznego (6.4) nie można wprost podstawić do równań ruchu; dostalibyśmy z reguły sprzeczność. Warto wspomnieć, że istnieją zagadnienia, w których do wyjściowego układu równań ruchu podstawiamy wprost powyższe założenia i szukamy szczególnych rozwiązań o postaci (6.4). Tak np. postępował Bogojawlensky w swojej teorii dynamiki obłoków materii międzygwiazdowej. Jest to jednak inne zagadnienie. My zajmujemy się problemem ruchu z więzami afinicznymi, nie zaś poszukiwaniem szczególnych rozwiązań dla równań bez więzów. Zatem musimy wprowadzić siły reakcji odpowiedzialne za więzy. W przypadku układu dyskretnego będziemy więc mieli:

$$m_A \frac{d^2 \bar{r}_A}{dt^2} = \bar{F}_A \left(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N; \frac{d\bar{r}_1}{dt}, \dots, \frac{d\bar{r}_N}{dt}, t \right) + \bar{F}_{r_A} \left(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N; \frac{d\bar{r}_1}{dt}, \dots, \frac{d\bar{r}_N}{dt}, t \right), \quad (6.5)$$

gdzie \bar{F}_r jest siłą reakcji więzów działającą na A -ty punkt. Odpowiednio dla układu ciągłego mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{x}(t, a)}{\partial t^2} &= \bar{\Phi} \left[\bar{x}(\cdot, \cdot), \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}(\cdot, \cdot), t \right] \\ &+ \bar{\Phi}_r \left[\bar{x}(\cdot, \cdot), \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}(\cdot, \cdot), t \right], \end{aligned} \quad (6.6)$$

gdzie $\bar{\Phi}_r$ jest masową gęstością sił reakcji. Odpowiednia objętościowa gęstość jest oczywiście dana przez

$$\bar{\Psi}_r = \varrho \bar{\Phi}_r.$$

Aby otrzymać efektywny układ równań ruchu musimy skorzystać jednocześnie z dwóch związków:

- założenia kinematycznego (6.4)
- zasady idealności więzów, tzn. zasady d'Alemberta.

Otrzymuje się wtedy spójny układ równań. Natomiast podstawiając wprost więzy do wyjściowego układu równań dostaje się nadokreślony układ dla współrzędnych uogólnionych, z reguły sprzeczny.

Zasada d'Alemberta stwierdza, że siły reakcji nie wykonują pracy na przemieszczeniach zgodnych z więzami.

Niech dodatnia miara μ opisuje rozkład masy w przestrzeni materialnej. Nie jest istotne, czy rozkład ten jest dyskretny czy ciągły. Dla dowolnego wirtualnego pola prędkości $\bar{\xi}(\cdot)$ zgodnego z więzami musi zachodzić:

$$\int \bar{\Phi}_r \left[\bar{x}(\cdot, \cdot), \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}(\cdot, \cdot), \bar{a} \right] \cdot \bar{v}(\bar{a}) d\mu(\bar{a}) = 0, \quad (6.7)$$

a we współrzędnych

$$g_{ij} \int \Phi_r^i v^j d\mu = 0.$$

Pola prędkości zgodne z więzami mają postać:

$$v^i(t, a) = v^i + \xi^i_K a^K; \quad (6.8)$$

wynika to ze zrózniczkowania po czasie wyrażenia (6.4). Parametry v^i , ξ^i_K są całkowicie dowolne i odnoszą się do prędkości translacyjnej i wewnętrznej. Musi więc zachodzić:

$$g_{ij} \int \Phi_r^i \left(v^j + \xi^j_K a^K \right) d\mu(a)$$

$$= v^j g_{ji} \int \Phi_r^i d\mu(a) + \xi^j_K g_{ji} \int \Phi_r^i a^K d\mu(a),$$

dla dowolnych wartości parametrów v^j , ξ^j_K . Zatem:

$$\int \Phi_r^i d\mu(a) = 0$$

$$\int \Phi_r^i a^K d\mu(a) = 0.$$

Inaczej mówiąc, znika pełna siła reakcji, czyli monopol lagranżowski rozkładu sił oraz moment dipolowy względem współrzędnych Lagranżowskich. Daje się to oczywiście przetłumaczyć na warunek znikania momentu względem współrzędnych przestrzennych (eulerowskich)

$$\int \Phi_r^i x^j d\mu_{(r,\varphi)}(a) = 0,$$

gdzie $\mu_{(r,\varphi)}$ jest transportem miary μ do przestrzeni fizycznej.

Zatem dla wyeliminowania sił reakcji należy obliczyć moment monopolowy i dipolowy równań ruchu (6.5), (6.6), podstawiając tam jednocześnie warunek kinetyczny (6.4).

Otrzymamy wtedy wolny od sił reakcji efektywny układ równań:

$$m \frac{d^2 r^i}{dt^2} = F^i, \quad \frac{d^2 \varphi^i_B}{dt^2} J^{BA} = \mathfrak{N}^{iA}, \quad (6.9)$$

gdzie $\mathfrak{N}^{iA} = \int \Phi^i(a)^A d\mu(a)$, $F^i = \int \Phi^i(a) d\mu(a)$ (pełny moment dipolowy - materialny sił i pełna siła). Po wykonaniu całkowań \mathfrak{N}^{iA} jest funkcją od φ , $\frac{d\varphi}{dt}$, dostajemy więc zamknięty układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu na czasową zależność zmiennych φ^i_K .

W praktyce \mathfrak{N}^{iA} będzie z reguły postulowana na podstawie jakiś założeń modelowych.

6.2. Modele

Równania ruchu w postaci (6.9) obejmują zarówno przypadek hamiltonowski, jak i dyssypatywny. Np. siły oporu lepkiego opisuje wielkość typu:

$$\mathfrak{N}^{iA} = -\mathcal{V}^i_j \frac{d\varphi^j_B}{dt} \mathcal{K}^{BA}, \quad (6.10)$$

gdzie stałe parametry \mathcal{V}^i_j charakteryzują lepki opór ośrodka, zaś \mathcal{K}^{BA} jest odpowiednim tensorem materialnym, np. η^{AB} .

W przypadku ośrodka ciągłego, gdy objętościowa gęstość sił dana jest przez dywergencję tensora naprężeń Kirchhoffa pierwszego rodzaju,

$$\Psi^i = T^{iA},_{A}, \quad (6.11)$$

łatwo wykazać, że:

$$\mathfrak{N}^{iA} = - \int T^{iA} d\mu(a), \quad (6.12)$$

całkowanie jest rozciągnięte na całe ciało, lub formalnie na całą przestrzeń (wtedy T^{iA} będzie zniknęło poza obszarem faktycznie zajmowanym przez ciało). Zatem \mathfrak{N}^{iA} jest wtedy proporcjonalne do do średniej wartości tensora Kirchhoffa.

Powyższe równania są słuszne ogólnie zarówno dla przypadku zdegenerowanego jak i niezdegenerowanego wymiaru ciała.

Jeśli wymiar jest niezdegenerowany, to można powyższe równania zapisać w języku czysto eulerowskim, bez użycia indeksów materialnych. Mamy wtedy:

$$\varphi^i_{,A} J^{AB} \frac{d^2}{dt^2} \varphi^j_{,B} = N^{ij}, \quad (6.13)$$

gdzie

$$N^{ij} = \mathfrak{N}^{iA} \varphi^j_{,A}. \quad (6.14)$$

Jak łatwo można pokazać,

$$N^{ij} = \int \Phi^i(a) x^j(a) d\mu(a), \quad (6.15)$$

Jeśli mamy do czynienia z ośrodkiem ciągłym gdy

$$\Psi^i = \sigma^{ij},_{j},$$

gdzie σ^{ij} jest tensorem naprężeń Cauchy'ego, to, jak łatwo pokazać przez całkowanie przez części,

$$N^{ij} = - \int \sigma^{ij}, \quad (6.16)$$

tn. N jest proporcjonalne do średniej wartości tensora Cauchy'ego.

W przypadku zdegenerowanego wymiaru opis oparty na wzorach (6.13), (6.14), (6.15), (6.16) nie jest możliwy, gdyż nie istnieje odwzorowanie odwrotne do φ .

Kwantowanie problemu

Nie jedyną, ale jedną z ważniejszych motywacji dla rozwijania mechaniki ciał afinicznie sztywnych o zdegenerowanym wymiarze są zagadnienia mikrostruktury i teorii ośrodków w nanoskali. Zauważmy, że przypadek regularny, jak trójwymiarowe ciało afinicznie sztywne w trójwymiarowej przestrzeni również pojawił się w teorii ośrodków strukturalnych właśnie w takim kontekście, jako opis wyodrębnionego elementu strukturalnego na tyle niewielkiego i na tyle silnie związanego, że mody afiniczne są dominujące. Tak właśnie jest w Eringenowskiej teorii Cosseratów. Ośrodek Cosseratów jest z matematycznego punktu widzenia kontinuum infinitezymalnych żyroskopów; podobnie ośrodek mikromorficzny jest kontinuum infinitezymalnych ciał afinicznie sztywnych. Tego rodzaju modele pojawiają się w długofalowej, kontynualnej granicy dynamiki kryształów molekularnych, lub innych ciał z elementami strukturalnymi.

Obiekty o zdegenerowanym wymiarze jako elementy struktury znane są w teorii materii skondensowanej. Wspomnijmy choćby ciekłe kryształy i ich jednowymiaro-

we elementy strukturalne. Przypadek ten jest dobrze rozpracowany teoretycznie i ma bardzo ważne znaczenie doświadczalne.

Model dwuwymiarowego ciała w trzech wymiarach może mieć zastosowanie np. w sytuacjach, gdy mamy doczynienia z ciałami zbudowanymi z płaskich molekuł trójwymiarowych (np. trójatomowe H_2O , S_3 , CO_2 , ozon, lub czteroatomowe BCl_2 , BF_3 , BBr_3) lub molekuł o płaskim kadłubie decydującym o wiodących, kolektywnych stopniach swobody. W przeciwieństwie do elementów strukturalnych o strukturze „dipolowej”, przypadek płaskich elementów struktury nie jest dobrze zbadany. Zastosowania na poziomie mikro- i nano- wymagają oczywiście zastosowania modelu kwantowego, lub jednocześnie kwantowego i klasycznego.

7.1. Kwantyzacja modelu klasycznego

Przestrzenią konfiguracyjną jest iloczyn kartezjański trójwymiarowej przestrzeni fizycznej i zbioru iniekcji dwuwymiarowej liniowej przestrzeni materialnej w trójwymiarową liniową przestrzeń fizyczną. Zatem analitycznie możemy ją utożsamić z podzbiorem otwartym iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R}^3 \times L(2, 3) \simeq \mathbb{R}^9$. W poniższej analizie nie interesujemy się ruchem środka masy, więc w roli przestrzeni konfiguracyjnej użyjemy podzbioru otwartego $LI(2, 3) \subset L(2, 3) \simeq \mathbb{R}^6$. W dalszym ciągu skupimy się na zagadnieniach całkowicie izotropowych, gdy pracuje rozkład „dwu-biegunowy”, a raczej jego modyfikacja dostosowana do modelu „2 wymiary w 3 wymiarach”.

Wróćmy do klasycznego wzoru na energię kinetyczną (4.29) wyrażonego przez prędkości kątowe, niezmienniki deformacji i ich pochodne czasowe, a następnie formę kanoniczną tego wzoru wyrażoną przez współtowarzyszące spiny kanoniczne s_i , $i = 1, 2, 3$, niezmienniki deformacji λ, μ i sprzężone do nich pędy kanoniczne p_λ, p_μ i spin kanoniczny obrotu „w tarczy” p_θ .

Kwantowy operator energii kinetycznej \mathbf{T} ma postać

$$\mathbf{T} = -\frac{\hbar^2}{2J}\Delta, \quad (7.1)$$

gdzie J jest, jak powyżej, skalarnym momentem bezwładności izotropowej tarczy, zaś Δ

jest operatorem Laplace'a-Beltramiego odpowiadającego metryce Γ leżącej u podstaw klasycznej energii kinetycznej $T = \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu}(Q)\frac{dQ^\mu}{dt}\frac{dQ^\nu}{dt}$. Dosłowne obliczenie Δ w języku współrzędnych lokalnych jest trudne, a otrzymane wyrażenie nieczytelne.

Operator Laplace'a-Beltramiego dany jest wzorem:

$$\Delta\Psi = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}} \frac{\partial}{\partial Q^\mu} \left(\sqrt{|\Gamma|} \Gamma^{\mu\nu} \frac{\partial\Psi}{\partial Q^\nu} \right), \quad (7.2)$$

gdzie stosujemy oznaczenie:

$$|\Gamma| = \det[\Gamma_{\mu\nu}].$$

W bardziej geometrycznym zapisie:

$$\Delta\Psi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi, \quad (7.3)$$

gdzie ∇ jest operacją różniczkowania kowariantnego w sensie Levi-Civity. W naszym zagadnieniu z 6 stopniami swobody i dość zawilej postaci energii kinetycznej jawny rachunek byłby bardzo kłopotliwy, a wynik i tak nieczytelny.

Można jednak udowodnić, że istnieje proste wyrażenie oparte na teorio-grupowej strukturze problemu. Mianowicie wystarczy zastąpić klasyczne s_a ich kwantowymi operatorami \mathbf{S}_a generującymi prawe obroty („materialne”) wielkości R - lewego członu w rozkładzie dwubiegunowym,

$$\Psi(R(I + \varepsilon)) = f(R) + \varepsilon^i \mathcal{R}_i f(R) = f(R) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{S}_i f(R) + \hbar o(\varepsilon) \quad (7.4)$$

gdzie \mathcal{R}_i są generatorami, \hbar kreślona stałą Plancka, $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix}$, zaś

kwantowe operatory spinu \mathbf{S}_i spełniają następujące relacje w kwantowych nawiasach Poissona:

$$\frac{1}{\hbar i} [\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_b] = -\varepsilon_{abc} \mathbf{S}_c; \quad (7.5)$$

zaś i jest jednostką urojona.

Klasyczna wielkość p_θ jest zastąpiona przez operator

$$\mathbf{p}_\theta = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (7.6)$$

Można pokazać, że operator $\mathbf{T} = -\frac{\hbar^2}{2J}\Delta$ wyraża się jak następuje

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{S}_1^2}{2J\mu^2} + \frac{\mathbf{S}_2^2}{2J\lambda^2} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)}\mathbf{S}_3^2 + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)}\mathbf{P}\theta^2 - \frac{2\lambda\mu}{J(\lambda^2 - \mu^2)^2}\mathbf{P}\theta\mathbf{S}_3 \\ &- \frac{\hbar^2}{2J} \frac{1}{\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2)} \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\mu}\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial\mu} \right] \\ &= \frac{\mathbf{S}_1^2}{2J\mu^2} + \frac{\mathbf{S}_2^2}{2J\lambda^2} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)}\mathbf{S}_3^2 + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)}\mathbf{P}\theta^2 - \frac{2\lambda\mu}{J(\lambda^2 - \mu^2)^2}\mathbf{P}\theta\mathbf{S}_3 \\ &- \frac{\hbar^2}{2J} \frac{1}{\mathcal{P}} \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{P} \frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\mu}\mathcal{P} \frac{\partial}{\partial\mu} \right], \end{aligned} \quad (7.7)$$

gdzie $\mathcal{P} = \lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2)$. Gdy rozpiszemy jawnie część różniczkową względem λ , μ to dostaniemy następującą postać powyższego wyrażenia

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{S}_1^2}{2J\mu^2} + \frac{\mathbf{S}_2^2}{2J\lambda^2} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)}\mathbf{S}_3^2 + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)}\mathbf{P}\theta^2 - \frac{2\lambda\mu}{J(\lambda^2 - \mu^2)^2}\mathbf{P}\theta\mathbf{S}_3 \\ &- \frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} - \frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial \ln \mathcal{P}}{\partial\lambda} \frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - \frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial \ln \mathcal{P}}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial\mu}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Funkcje falowe są elementami przestrzeni $L^2(Q, \nu)$, gdzie Q jest przestrzenią konfiguracyjną ruchu wewnętrznego, $Q = \text{LI}(2, 3; \mathbb{R})$ (rozmaitość liniowych iniekcji z \mathbb{R}^2 w \mathbb{R}^3 , będąca podzbiorem otwartym w $L(2, 3; \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^6)$, zaś ν jest miarą Lebesguea w przestrzeni $L(2, 3; \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^6$, tzn.:

$$d\nu(\varphi) = d\varphi^1_1 \dots d\varphi^3_2. \quad (7.9)$$

Jak wspomniano, zmienne φ^i_A wygodne w ogólnym sformułowaniu stają się nieefektywne w analizie zagadnień dynamicznych zwłaszcza interesujących nas modeli dwustronnie izotopowych (w przestrzeni i materiale). W zagadnieniach tych używaliśmy rozkładu dwubiegunowego.

$$\varphi = V \begin{bmatrix} D \\ o \end{bmatrix} U^{-1}. \quad (7.10)$$

Elementy $V \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ w zastosowaniach parametryzuje się przy pomocy jakiś naturalnych współrzędnych na grupie obrotów 3-wymiarowych, jak wektor obrotu, zmienne sferyczne w przestrzeni wektora obrotu, lub kąty Eulera. Parametrami dla D są niezmienniki deformacji λ , μ zaś dla U - kąt obrotu θ .

Można sprawdzić, że w języku czynników rozkładu dwubiegunowego miara ν wyraża się jak następuje:

$$d\nu(\varphi) = d\nu(V, \lambda, \mu, U(\theta)) = \mathcal{P}(\lambda, \mu) d\kappa(V) d\theta. \quad (7.11)$$

gdzie κ jest miarą Haara (miarą niezmienniczą względem translacji regularnych) na grupie $SO(3, \mathbb{R})$, $d\theta$ jest faktycznie elementem miary Haara na grupie $SO(2, \mathbb{R})$, zaś czynnik wagowy \mathcal{P} zależy tylko od niezmienników deformacji i dany jest wzorem:

$$\mathcal{P}(\lambda, \mu) = \lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \quad (7.12)$$

Jest to właśnie wyrażenie występujące w operatorze \mathbf{T} , dokładniej - w jego części będącej operatorem różniczkowym względem niezmienników deformacji λ, μ .

W tej pracy interesują nas głównie modele dwustronnie izotropowe, gdy nie tylko energia kinetyczna jest niezmiennicza względem obrotów przestrzennych i materialnych (a więc $J = I\delta^{AB}$), ale to samo dotyczy energii potencjalnej, tzn. jest ona wyłącznie funkcją od niezmienników λ, μ . Rozkład dwu-biegunowy jest wtedy najdogodniejszą parametryzacją przestrzeni konfiguracyjnej.

Równanie Schrödingera daje się wtedy zaalgebraizować względem zmiennych V, θ , dzięki przeprowadzeniu analizy Fourierowskiej na zwartych grupach obrotów $SO(3, \mathbb{R})$, $SO(2, \mathbb{R})$. Jeśli chodzi o grupę $SO(2, \mathbb{R})$, jest to zwykle rozwinięcie na szereg Fouriera na okręgu, tzn. na funkcje $e^{ik\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$. Zależność od V rozwijana jest na szereg względem elementów macierzowych reprezentacji nieprzywiedlnych grupy $SO(3, \mathbb{R})$, w oparciu o twierdzenie Petera-Weyla. Funkcje te są tradycyjnie oznaczane przez $\mathfrak{D}_{mm'}^j$, gdzie $j = 0, 1, 2, \dots$ (zbiór nieujemnych liczb całkowitych), zaś $mm' = -j, -j + 1, -j + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, j - 1, j$ (tzn. liczby całkowite od $-j$ do j). Warto przy okazji nadmienić, że może mieć sens rozpatrywanie problemów z połówkowym momentem pędu, a więc z j przebiegającym zakres nieujemnych wielokrotności liczby $\frac{1}{2}$, czyli $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$. Liczby kwantowe m, m' przebiegają wtedy również zakres od $-j$ do j , z jednostkowymi skokami. W obydwu przypadkach m, m' przebiegają $(2j + 1)$ wartości. W tym miejscu nie będziemy się jednak tą sprawą zajmowali.

Grupę $SO(3, \mathbb{R})$ wygodnie jest parametryzować (na poziomie rozważań ogólnych) za pomocą wektora obrotu \bar{k} , czyli współrzędnych kanonicznych pierwszego rodzaju:

$$V(\bar{k}) = \exp(k^a E_a), \quad (7.13)$$

gdzie E_a , $a = 1, 2, 3$ są bazowymi macierzami antysymetrycznymi,

$$(E_a)^b{}_c = -\varepsilon_a{}^b{}_c.$$

ε jest tutaj symbolem zupełnie antysymetrycznym Ricciego, zaś przesuwanie indeksów jest rozumiane w trywialnym, kosmetycznym sensie „delty” Kroneckera δ_{ab} . Długość wektora \bar{k} , skalar $k = \sqrt{\bar{k} \cdot \bar{k}}$ jest kątem obrotu, zaś wektor $\bar{n} = \frac{\bar{k}}{k}$ jego osią zorientowaną zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej. Skalar k przebiega zakres $[0, \pi]$ i oczywiście

$$V(\pi\bar{n}) = V(-\pi\bar{n}), \quad \bar{n} \cdot \bar{n} = 1.$$

Można sprawdzić, że :

$$V(\bar{k}) \cdot \bar{u} = \cos k \bar{u} + \frac{1 - \cos k}{k^2} (\bar{k} \cdot \bar{u}) \bar{k} + \frac{\sin k}{k} \bar{k} \times \bar{u},$$

tzn.:

$$V(\bar{k})^a{}_b = \cos k \delta^a{}_b + (1 - \cos k) \frac{k^a k_b}{k} + \sin k \varepsilon^a{}_{bc} \frac{k^c}{k}.$$

Macierzowe odwzorowanie wykładnicze jest oczywiście rozumiane w zwykłym sensie:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Gdybyśmy chcieli dopuścić „spin połówkowy”, zamiast grupy $SO(3, \mathbb{R})$ użylibyśmy grupy $SU(2)$ (macierze unitarne, unimodularne 2×2 , zespolone). Wtedy:

$$SU(2) \ni u(\bar{k}) = \exp(k^a e_a) = \cos \frac{k}{2} I_2 - \frac{k^a}{k} \sin \frac{k}{2} i\sigma_a,$$

gdzie σ_a są macierzami Pauliego, $e_a = \frac{1}{2i}\sigma_a$ i „kąt obrotu” przebiega zakres $[0, 2\pi]$ dwukrotnie większy. Dla dowolnego wektora \bar{n} ($\bar{n} \cdot \bar{n} = 1$), mamy wtedy: $u(2\pi\bar{n}) = -I_2$ gdzie I_2 - macierz jednostkowa 2×2 .

W wielu zagadnieniach wygodnie jest używać współrzędnych sferycznych w przestrzeni wektora obrotu, (k, θ, ϕ) ; oczywiście wiążą się one z \bar{k} jak następuje:

$$k^1 = k \sin \theta \cos \phi$$

$$k^2 = k \sin \theta \sin \phi$$

$$k^3 = k \cos \theta.$$

Kąty Eulera $(\varphi, \vartheta, \psi)$ parametryzują grupy $SU(2)$, $SO(3, \mathbb{R})$ jak następuje:

$$V[\varphi, \vartheta, \psi] = V((0, 0, \varphi)) V((\vartheta, 0, 0)) V((0, 0, \psi)).$$

Macierze reprezentacji nieprzywiedlnych \mathfrak{D}^j można zapisać w postaci:

$$\mathfrak{D}^j(\bar{k}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} K^a S_a^j\right), \quad (7.14)$$

gdzie S_a^j są to macierze Wignera dla momentu pędu o niezmienniczej liczbie kwantowej j , czyli o kwadracie modułu równym $\hbar^2 j(j+1)$. Są to oczywiście macierze hermitowskie $(2j+1) \times (2j+1)$. Tym samym \mathfrak{D}^j są rzeczywiście macierzami unitarnymi $(2j+1) \times (2j+1)$.

Przypomnijmy definicję generatorów lewych i prawych translacji regularnych na grupie $SO(3, \mathbb{R})$, lub $SU(2)$ odpowiednio \mathcal{L}_i , \mathcal{R}_i .

Dla dowolnej funkcji różniczkowej f na tych grupach mamy: —

$$\begin{aligned} f(V(\bar{k}), V(\bar{\epsilon})) &= f(V(\bar{k})) + \epsilon^i \mathcal{R}_i f(V(\bar{k})) + o(\epsilon), \\ f(V(\bar{\epsilon}), V(\bar{k})) &= f(V(\bar{k})) + \epsilon^i \mathcal{L}_i f(V(\bar{k})) + o(\epsilon), \end{aligned} \quad (7.15)$$

gdzie $\bar{\epsilon}$ jest „małe”, a dokładniej $o(\epsilon)$ jest małą wyższego rzędu względem ϵ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0.$$

Wprowadźmy operatory:

$$\mathfrak{S}_a = \frac{\hbar}{i} \mathcal{L}_a, \quad \mathfrak{s}_a = \frac{\hbar}{i} \mathcal{R}_a. \quad (7.16)$$

Są one formalnie samosprężone w sensie $L^2(\text{SO}(3, \mathbb{R}), \kappa)$ lub $L^2(\text{SO}(2), \kappa)$, a tym samym dla funkcji $\Psi(\varphi) = \Psi(V, U, \lambda, \mu)$ - w sensie $L^2(Q, \nu)$.

Przez formalną samosprężoność operatora A rozumiemy oczywiście, że:

$$\langle \Psi | A\varphi \rangle = - \langle A\Psi | \varphi \rangle$$

dla dowolnych Ψ , φ z jakiejś gęstej dziedziny (w naszym wypadku - funkcje gładkie o zwartych nośnikach).

W zmiennych wektora wodzącego \bar{k} operatory te wyrażają się jawnie jak następuje.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a &= \frac{k}{2} \text{ctg} \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial k^a} + \left(1 - \frac{k}{2} \text{ctg} \frac{k}{2}\right) \frac{k_a k^b}{k} \frac{\partial}{\partial k^b} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^c \frac{\partial}{\partial k^c}, \\ \mathcal{R}_a &= \frac{k}{2} \text{ctg} \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial k^a} + \left(1 - \frac{k}{2} \text{ctg} \frac{k}{2}\right) \frac{k_a k^b}{k} \frac{\partial}{\partial k^b} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^c \frac{\partial}{\partial k^c}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Używając operatora

$$\mathcal{D}_a = \mathcal{L}_a - \mathcal{R}_a \quad (7.18)$$

(generator obrotów wektora obrotu, czyli automorfizmów wewnętrznych w grupie), możemy to zapisać w następującej sugestywnej postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a &= \frac{k_a}{2} \frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^c k^b \mathcal{D}_c + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a, \\ \mathcal{R}_a &= \frac{k_a}{2} \frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^c k^b \mathcal{D}_c - \frac{1}{2} \mathcal{D}_a. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Niezmiennik Casimira ma postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 = \mathcal{R}^2 &= \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2 = \mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2 + \mathcal{R}_3^2 = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial k^2} + \text{ctg} \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial k} \right) + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{k}{2}} \mathcal{D}^2, \end{aligned} \quad (7.20)$$

gdzie

$$\mathcal{D}^2 = \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2 + \mathcal{D}_3^2$$

jest niezmiennikiem Casimira dla układu \mathcal{D}_a .

Ta struktura operatorów \mathcal{L}_a , \mathcal{R}_a jest pouczająca i ciekawa sama w sobie. Jak wspomniano, dzięki rozwijaniu funkcji falowych na funkcje Wignera, używanie jawnej postaci operatorów nie jest jednak niezbędne.

Wspomnijmy jeszcze, że miara Haara wyraża się przez współrzędne kanoniczne pierwszego rodzaju jak następuje:

$$\partial\kappa(\bar{k}) = \frac{4}{k^2} \sin^2 \frac{k}{2} d_3\bar{k} = 4 \sin^2 \frac{k}{2} \sin\theta dk d\theta d\varphi, \quad (7.21)$$

gdzie k, θ, φ są zmiennymi sferycznymi w przestrzeni wektora \bar{k} .

Miara jest jedyna z dokładnością do unormowania. Na grupie zwartej, jak w naszym wypadku, można ją unormować do jedności, tzn. tak by:

$$\mu(\text{SO}(3, \mathbf{R})) = 1.$$

\mathcal{L}_a są generatorami lewych obrotów przestrzennych

$$\varphi \mapsto R\varphi, \quad R \in \text{SO}(3, \mathbf{R}).$$

Tym samym \mathfrak{S}_a są operatorami wewnętrznego momentu pędu (spinu) w reprezentacji laboratoryjnej, zaś \mathfrak{s}_a pomocniczymi operatorami - składowymi tego spinu w układzie osi związanych z V-bąkiem. Mają miejsce następujące lewostronne nawiasy Poissona:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar i} [\mathfrak{S}_a, \mathfrak{S}_b] &= \varepsilon_{ab}{}^c \mathfrak{S}_c, \\ \frac{1}{\hbar i} [\mathfrak{s}_a, \mathfrak{s}_b] &= -\varepsilon_{ab}{}^c \mathfrak{s}_c. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Odzwierciedla to relacje komutacyjne grup $\text{SO}(3, \mathbb{R}), \text{SU}(2)$:

$$[E_a, E_b] = \varepsilon_{ab}{}^c E_c, \quad [e_a, e_b] = \varepsilon_{ab}{}^c e_c$$

Oczywiście

$$\mathfrak{S}^2 = \sum_a (\mathfrak{S}_a)^2 = \mathfrak{s}^2 = \sum_a (\mathfrak{s}_a)^2$$

Jest też oczywiste, że:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_a \mathcal{D}^j &= \mathfrak{S}_a^j \mathcal{D}^j, \\ \mathfrak{s}_a \mathcal{D}^j &= \mathcal{D}^j \mathfrak{S}_a^j, \\ \mathfrak{S}^2 \mathcal{D}^j &= \mathfrak{s}^2 \mathcal{D}^j = \hbar^2 j(j+1) \mathcal{D}^j, \\ \mathfrak{S}_3 \mathcal{D}_{m m'}^j &= \hbar m \mathcal{D}_{m m'}^j, \\ \mathfrak{s}_3 \mathcal{D}_{m m'}^j &= \hbar m' \mathcal{D}_{m m'}^j. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Oczywiście operatory \mathfrak{S}_a , \mathbf{S}_a , \mathbf{p}_θ , $\mathbf{H} = \mathbf{T} + V(\lambda, \mu)$, gdzie \mathbf{T} dane przez (7.7), (7.8) są formalnie samosprężone.

7.2. Kwantyzacja rozkładu „dwubiegunowego”

Dokonajmy teraz zapowiadanego rozwinięcia:

$$\Psi(V; \lambda, \mu; \theta) = \sum_{j,m,m',k} f_{m',m}^{j,k}(\lambda, \mu) \mathfrak{D}_{m m'}^j(V) e^{ik\theta}. \quad (7.24)$$

Można to zapisać w zwartej postaci macierzowej:

$$\Psi(V; \lambda, \mu; \theta) = \sum_{j,k} \text{Tr} \left(f^{j,k}(\lambda, \mu) \mathfrak{D}^j(V) \right) e^{ik\theta} \quad (7.25)$$

Jest oczywiste, że w działaniu na tak wyrażoną funkcję Ψ operatory \mathbf{S}_a , \mathbf{p}_θ algebraizują się.

Działając operatorem \mathbf{S}_a na Ψ sprawiamy, że zredukowane amplitudy $f_{m',m}^{j,k}$ traktowane przy ustalonych j, k jako macierze $(2j+1) \times (2j+1)$ względem indeksów m', m , przekształcają się jak następuje:

$$f^{j,k} \mapsto S_a^j f^{j,k}. \quad (7.26)$$

Podobnie \mathfrak{S}_a , spiny działając na Ψ powodują, że $f^{j,k}$ przekształca się, jak następuje:

$$f^{j,k} \mapsto f^{j,k} S_a^j. \quad (7.27)$$

I oczywiście \mathbf{p}_θ działając na Ψ również nie zmienia jej ogólnej postaci tylko zastępuje macierz $f^{j,k}$ jak następuje:

$$f^{j,k} \mapsto \hbar k f^{j,k}. \quad (7.28)$$

Jeśli więc mamy Hamiltonian

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} + V(\lambda, \mu) \quad (7.29)$$

\mathbf{T} dane jak powyżej, stacjonarne równanie Schrödingera

$$\mathbf{H}\Psi = E\Psi \quad (7.30)$$

sprowadza się do rodziny niezależnych równań na amplitudy macierzone $f^{j,k}(\lambda, \mu)$:

$$H^{j,k} f^{j,k} = E^{j,k} f^{j,k} \quad (7.31)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} H^{j,k} f^{j,k} &= \frac{S_1^{j^2}}{2J\mu^2} f^{j,k} + \frac{S_2^{j^2}}{2J\lambda^2} f^{j,k} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)^2} S_3^{j^2} f^{j,k} \\ &+ \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J(\lambda^2 - \mu^2)^2} \hbar^2 k^2 f^{j,k} - \frac{2\lambda\mu}{J(\lambda^2 - \mu^2)^2} S_3^{j^2} \hbar k f^{j,k} \\ &- \frac{\hbar^2}{2J} \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\mathcal{P} \frac{\partial}{\partial \lambda} f^{j,k} \right) - \frac{\hbar^2}{2J} \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mathcal{P} \frac{\partial}{\partial \mu} f^{j,k} \right) + V f^{j,k}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób zredukowane równanie Schrödingera na układ amplitud $f^{j,k}(\lambda, \mu)$ zależnych od niezmienników deformacji. Dalsza separacja nie jest możliwa i problem trzeba rozwiązać metodami wariacyjnymi lub numerycznymi.

7.3. Kwantyzacja modelu „z grubością”

Także w zagadnieniu kwantowym można rozpatrywać model „z grubością”.

Różnica jest taka, że do operatora energii kinetycznej doda się człon odpowiadający drganiom w grubości

$$\mathbf{T}_{\text{gr}} = -\frac{\hbar^2}{2J_3} \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2}, \quad (7.33)$$

a ponadto, w pozostałych wyrażeniach dla \mathbf{T} , zawierających operatory \mathbf{S}_1^2 , \mathbf{S}_2^2 , \mathbf{S}_3^2 pojawi się zmienna ϱ . Wyrażenia te mają tę samą postać, co w przypadku klasycznym, we wzorze (5.7); jedyna różnica polega na tym, że klasyczne zmienne s_a zastępuje się formalnie operatorami \mathbf{S}_a wprowadzonymi powyżej.

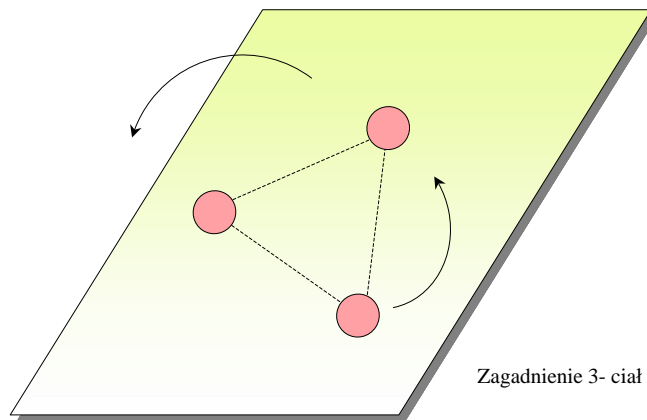
Można pokazać, że operator \mathbf{T} wyraża się jak następuje

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{S}_1^2}{2(J_1\mu^2 + J_2\varrho^2)} + \frac{\mathbf{S}_2^2}{2(J_1\lambda^2 + J_2\varrho^2)} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J_1(\lambda^2 - \mu^2)} \mathbf{S}_3^2 \\ &+ \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2J_1(\lambda^2 - \mu^2)} \mathbf{p}_\theta^2 - \frac{2\lambda\mu}{J_1(\lambda^2 - \mu^2)^2} \mathbf{p}_\theta \mathbf{S}_3 \\ &- \frac{\hbar^2}{2J_1} \frac{1}{\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu} \lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] - \frac{\hbar^2}{2J_3} \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Parametry inercyjne J_1 , J_2 , J_3 mają ten sam sens, co przedtem.

Dodatek o zagadnieniu trzech ciał

Istnieje możliwość, że powyższy model i opracowany formalizm, w tym rozwiązania typu „stacjonarnych elips”, mogą znaleźć zastosowanie w zagadnieniu trzech ciał.



Jak wiadomo, grawitacyjny (Coulombowski) problem trzech ciał nie rozwiązuje się w postaci analitycznej. Możliwa jest tylko jakościowa analiza, rozwiązania w postaci skomplikowanych szeregów oraz nieliczne ścisłe rozwiązania szczególne. Zwróćmy uwagę, że układ trzech punktów materialnych ma dokładnie stopnie swobody płaskie-

go ciała afinicznie sztywnego w trzech wymiarach (pomijamy tu translacyjne stopnie swobody). A zatem, używając binarnego potencjału grawitacyjnego

$$V_{ab} = -\frac{k m_a m_b}{r_{ab}},$$

dla każdej pary ciał (k - stała grawitacyjna, m_a - masy, r_{ab} - odległości wzajemne) i wyrażając pełny potencjał

$$V = \frac{1}{2} \sum_{a,b} V_{ab}$$

przez wprowadzone powyżej współrzędne uogólnione, możemy np. w oparciu o wzory na ustalone elipsy poszukiwać rozwiązań szczególnych dla zagadnienia 3-ch ciał.

Bibliografia

- [1] Abbott E., *Flatlandia czyli kraina płaszczaków. Powieść o wielu wymiarach.*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk, 1997.
- [2] Abraham R., Marsden J. E., *Foundations of Mechanics* (wyd. 2), The Benjamin-Cummings Publishing Company, 1978.
- [3] Arnold W. I., *Metody Matematyczne Mechaniki Klasycznej*, PWN, Warszawa, 1981.
- [4] Burov A. O., Chevallier D. P., *On Routh Reduction and its Applications in Rigid Body Dynamics*, ZAMM, 1998, T. 78, No. 10, 695-702.
- [5] Bogoyavlensky O. I., *Methods of Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.
- [6] Bogoyavlensky O. I., *Prikladnaja matematika i mekhanika*, **40**, nr 2, 1976, 270.
- [7] Byron F. W., Fuller R. W., *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, Tom I, PWN, Warszawa, 1973.
- [8] F. Calogero and C. J. Marchioro, *Exact Solution of a One-Dimensional Three-Body Scattering Problem with Two-Body and/or Three-Body Inverse-Square Potentials*, Math. Phys. **15** (1974), 1425.
- [9] Capriz G., *Continua with Microstructure*, Springer Tracts in Natural Philosophy, tom 35, Springer-Verlag, 1989.
- [10] Capriz G., *Continua with Substructure*, Phys. Mesomech. **3** (2000), 5–14, 37–50.

- [11] Chandrasekhar S., *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Yale Univ. Press, 1969.
- [12] Chevallier D. P., *On the Foundations of Ordinary and Generalized Rigid Body Dynamics and the Principle of Objectivity*, Arch. Mech. **56** (2004), nr 4, 313–353.
- [13] Cohen H., *Pseudo-Rigid Bodies*, Utilitas Math. **20** (1981), 221–247.
- [14] Cohen H., Mac Sithigh G. P., *Plane Motions of Elastic Pseudo-Rigid Bodies*, J. Elasticity **14** (1989), 193–226.
- [15] Cohen H., Mac Sithigh G. P., *Impulsive Motions of Elastic Pseudo-Rigid Bodies*, ASME J. Appl. Mech. **58** (1991), 1042–1048.
- [16] Cohen H., Mac Sithigh G. P., *Symmetry and Asymmetry Roto-Deformations of a Symmetrical, Isotropic, Elastic Pseudo-Rigid Body*, Int. J. Nonlinear Mech. **27** (1992), 519–526.
- [17] Cohen H., Mac Sithigh G. P., *Impulsive Motions of Elastic Pseudo-Rigid Bodies. II. Further Results and Examples*, J. Elasticity **34** (1994), 149–166.
- [18] Cohen H., Muncaster M. G., *The Theory of Pseudo-Rigid Bodies*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [19] Cohen H., Sun Q. X., *Plane Motions of Elastic Pseudo-Rigid Pendulums*, Sol. Mech. Arch. **13** (1988), 147–176.
- [20] Dyson F. J., *Dynamics of a Spinning Gas Cloud*, J. of Math. and Mech. **18** (1968), nr 1, 91.
- [21] Ebin D. G., Marsden J., *Groups of Diffeomorphisms and the Motion of an Incompressible Fluid*, Ann. Math. **92** (1970), 102–163.
- [22] Eringen A. C., *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
- [23] Eringen A. C., *Mechanics of Micromorphic Continua*, in: Proceedings of the IUTAM Symposium on Mechanics of Generalized Continua, Freudenstadt and Stuttgart, 1967, E. Kröner (ed.), tom **18**, Springer, 1968, 18–33.
- [24] Eringen A. C., (ed.), *Continuum Mechanics. Tom I. Mathematics*, Academic Press, 1975.
- [25] Eringen A. C., (ed.), *Continuum Mechanics. Tom II. Continuum Mechanics of Single-Substance Bodies*, Academic Press, 1975.

-
- [26] Godlewski P., *Quantization of Anisotropic Rigid Body*, Int. J. of Theor. Phys. **42** (2003), nr 12, 2863–2875.
- [27] Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1950.
- [28] Gołębiewska A., Sławianowski J. J., *Geometria Przestrzeni Fazowej*, Prace IPPT **28**, 1971.
- [29] Gołubowska B., *Motion of Test Rigid Bodies in Riemannian Spaces*, Rep. on Math. Phys. **48** (2001), nr 1/2, 95–102.
- [30] Gołubowska B., *Models of Internal Degrees of Freedom Based on Classical Groups and Their Homogeneous Spaces*, Rep. on Math. Phys. **49** (2002), nr 2/3, 193–201.
- [31] Gołubowska B., *Action-Angle Analysis of Some Geometric Models of Internal Degrees of Freedom*, J. of Nonlinear Math. Phys. **11** (2004), Supplement, 138–144.
- [32] Hamermesh M., *Group Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1962.
- [33] Hermann R., *Differential Geometry and the Calculus of Variations*, Academic Press, 1968.
- [34] Hermann R., *Vector Bundles in Mathematical Physics*, W. A. Benjamin, 1970.
- [35] Kobayashi S. Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, 1963.
- [36] Kolmogorov A. N., *General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics*, in: Proc. 1954 Intern. Congr. Math., 1957.
- [37] Kossecka E., Zorski H., Int. J. Solids Struct. **3** (1967), 881.
- [38] Landau L. D., Lifshitz E. M., *Mechanika Ośrodków Ciągłych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1954.
- [39] Landau L. D., Lifshitz E. M., *Course of Theoretical Physics. Tom III. Quantum Mechanics*, Pergamon Press, 1958.
- [40] Lewis D., Simo J. C., *Nonlinear Stability of Rotating Pseudo-Rigid Bodies*, Proc. R. Soc. Lond. A **427** (1990), 281–319.
- [41] Mackey G. W., *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1963.

- [42] Mariano P. M., *Configuration Forces in Continua with Microstructure*, Z. angew. Math. Phys. **51** (2000), 752–791.
- [43] Marsden J. E., *Lectures on Geometric Methods in Mathematical Physics*, SIAM, 1981.
- [44] Marsden J. E., Hughes T. J. R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [45] Marsden J. E., Ratiu T., *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer, 1994.
- [46] Marsden J. E., Ratiu T., *Introduction to Mechanics and Symmetry. A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems* (second ed.), Springer, 1999.
- [47] Martens A., *Dynamics of Holonomically Constrained Affinely-Rigid Body*, Rep. on Math. Phys. **49** (2002), nr 2/3, 295–303.
- [48] Martens A., *Quantization of Affinely-Rigid Body with Constraints*, Rep. on Math. Phys. **51** (2003), nr 2/3, 287–295.
- [49] Martens A., *Hamiltonian Dynamics of Planar Affinely-Rigid Body*, J. of Nonlinear Math. Phys. **11** (2004), Supplement, 145–150.
- [50] Martens A., *Quantization of the Planar Affinely-Rigid Body*, J. of Nonlinear Math. Phys. **11** (2004), Supplement, 151–156.
- [51] Mladenova C., *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Z. angew. Math. Mech. **75** (1995), nr 3, 199–205.
- [52] J. Moser, *Dynamical Systems Theory and Applications*, Lecture Notes in Physics **38**, Springer, Berlin, 1975.
- [53] J. Moser, *Three Integrable Hamiltonian Systems Connected with Isospectral Deformations*, Advances in Math. **16** (1975), 197–220.
- [54] O'Reilly O. M., *A Properly Invariant Theory of Infinitesimal Deformations of an Elastic Cosserat Point*, Z. angew. Math. Phys. **47** (1996), 179–193.
- [55] O'Reilly O. M., Varadi P. C., *A Unified Treatment of Constraints in the Theory of a Cosserat Point*, Z. angew. Math. Phys. **49** (1998), 205–223.
- [56] Papadopoulos P., *On a Class of Higher-Order Pseudo-Rigid Bodies*, Math. Mech. Solids **6** (2001), 631–640.
- [57] Raszewski P. K., *Geometria Riemanna i Analiza Tensorowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1958.

- [58] Roberts M., Wulff C., Lamb J., *Hamiltonian Systems Near Relative Equilibria*, J. of Diff. Equations **179** (2002), 562–604.
- [59] Rose M. E., *Elementary Theory of Angular Momentum*, Dover Publications, 1995.
- [60] Rubin M. B., *On the Theory of a Cosserat Point and Its Application to the Numerical Solution of Continuum Problems*, ASME J. Appl. Mech. **52** (1985), 368–372.
- [61] Rubinowicz W., *Mechanika Kwantowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1968.
- [62] Rubinowicz W., *Mechanika Teoretyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1968.
- [63] Rudnicki J., *Geometria Analityczna. Cz. I*, T. Szczęsny's Scientific Publishing House, 1949.
- [64] Simo J. C., Lewis D., Marsden J. E., *Stability of Relative Equilibria. Part I. The Reduced Energy-Momentum Method*, ARMA **115** (1991), 15–59.
- [65] Sławianowska A. K., *On Certain Nonlinear Many-Body Problems on Lines and Circles*, Arch. of Mech. **41** (1989), nr 5, 619–640.
- [66] Sławianowska A. K., Sławianowski J. J., *Quantization of Affinely Rigid Body in N Dimensions*, Rep. on Math. Phys. **29** (1991), nr 3, 297–320.
- [67] Sławianowski J. J., *Mechanika Analityczna Deformacji Jednorodnych*, Prace IPPT **8**, 1973.
- [68] Sławianowski J. J., *Abelian Groups and the Weyl Approach to Kinematics. Nonlocal Function-Algebras*, Rep. on Math. Phys. **5** (1974), nr 3, 295–319.
- [69] Sławianowski J. J., *Analytical Mechanics of Finite Homogeneous Strains*, Arch. of Mech. **26** (1974), nr 4, 569–587.
- [70] Sławianowski J. J., *The Mechanics of an Affinely-Rigid Body*, Int. J. of Theor. Phys. **12** (1975), nr 4, 271–296.
- [71] Sławianowski J. J., *Newtonian Dynamics of Homogeneous Strains*, Arch. of Mech. **27** (1975), nr 1, 93–102.
- [72] Sławianowski J. J., *Newtonian Dynamics of Polynomial Deformations*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques **23** (1975), nr 1, 17–22.
- [73] Sławianowski J. J., *Homogeneously Deformable Body in a Curved Space*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques **23** (1975), nr 2, 43–47.

- [74] Sławianowski J. J., *Deformable Gyroscope in a Non-Euclidean Space. Classical Non-Relativistic Theory*, Rep. on Math. Phys. **10** (1976), nr 2, 219–243.
- [75] Sławianowski J. J., *The Mechanics of the Homogeneously-Deformable Body. Dynamical Models with High Symmetries*, Z. angew. Math. Mech. **62** (1982), 229–240.
- [76] Sławianowski J. J., *Mechanika Analityczna Ciał Odkształcalnych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1982.
- [77] Sławianowski J. J., *Nonlinear Torsional Vibrations of Rigid Bodies*, Arch. of Mech. **39** (1987), nr 6, 663–682.
- [78] Sławianowski J. J., *An Affinely-Rigid Body and Hamiltonian Systems on $GL(n, \mathbb{R})$* , Rep. on Math. Phys. **26** (1988), nr 1, 73–119.
- [79] Sławianowski J. J., *Space-Time as a Micromorphic Continuum*, Int. J. of Theor. Phys. **29** (1990), nr 11, 1177–1184.
- [80] Sławianowski J. J., *Geometry of Phase Spaces*, John Wiley & Sons, 1991.
- [81] Sławianowski J. J., *Nonlinear Vibrations of Rigid Bodies. Projective Correspondence between Rigid Body and Material Point Mechanics*, in: Proceedings of the 2nd Polish-German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems, March 10–17, 1991, in Paderborn, eds: R. Bogacz, J. Lücker, and K. Popp, IFTR Editions, 1991, 25–34.
- [82] Sławianowski J. J., *$GL(n, \mathbb{R})$, Tetrads and Generalized Space-Time Dynamics*, in: *Differential Geometry, Group Representations, and Quantization*, Lecture Notes in Physics **379**, Springer-Verlag, 1991.
- [83] Sławianowski J. J., *One-Dimensional Chains, Matrix Groups and Quantization of Poisson Structures*, J. of Tech. Phys. **39** (1998), nr 2, 163–187.
- [84] Sławianowski J. J., *Various Aspects of the Born-Infeld Nonlinearity*, Rep. on Math. Phys. **46** (2000), nr 1/2, 253–260.
- [85] Sławianowski J. J., *Group-Theoretic Approach to Internal and Collective Degrees of Freedom in Mechanics and Field Theory*, Technische Mechanik **22** (2002), nr 1, 8–13.
- [86] Sławianowski J. J., *Quantum and Classical Models Based on $GL(n, \mathbb{R})$ -Symmetry*, in: Proceedings of the Second International Symposium on Quantum Theory and Symmetries, Kraków, Poland, July 18–21, 2001, eds: E. Kapuścik and A. Horzela, World Scientific, 2002, 582–588.

- [87] Ślawianowski J. J., *Classical and Quantum Collective Dynamics of Deformable Objects. Symmetry and Integrability Problems*, in: Proceedings of the Fifth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, June 5–12, 2003, Varna, Bulgaria, eds: Ivaïlo M. Mladenov and Allen C. Hirshfeld, SOFTEX, 2004, 81–108.
- [88] Ślawianowski J. J., *Geodetic Systems on Linear and Affine Groups. Classics and Quantization*, J. of Nonlinear Math. Phys. **11** (2004), Supplement, 130–137.
- [89] Ślawianowski J. J., Kovalchuk V., *Classical and Quantized Affine Physics. A Step Towards It*, J. of Nonlinear Math. Phys. **11** (2004), Supplement, 157–166.
- [90] Ślawianowski J. J., Kovalchuk V., Ślawianowska A. K., Gołubowska B., Martens A., Rożko E. E., Zawistowski Z. J., *Invariant Geodetic Systems on Lie Groups and Affine Models of Internal and Collective Degrees of Freedom*, Prace IPPT **7**, 2004.
- [91] Ślawianowski J. J., Kovalchuk V., Ślawianowska A. K., Gołubowska B., Martens A., Rożko E. E., Zawistowski Z. J., *Affine Symmetry in Mechanics of Collective and Internal Modes. Part I. Classical Models*, Rep. on Math. Phys. **54** (2004), nr 3, 373–427.
- [92] Ślawianowski J. J., Kovalchuk V., Ślawianowska A. K., Gołubowska B., Martens A., Rożko E. E., Zawistowski Z. J., *Affine Symmetry in Mechanics of Collective and Internal Modes. Part II. Quantum Models*, Rep. on Math. Phys. **55** (2005), nr 1, 1–45.
- [93] Solberg J. M., Papadopoulos P., *A Simple Finite Element-Based Framework for the Analysis of Elastic Pseudo-Rigid Bodies*, Int. J. Numer. Meth. Eng. **45** (1999), 1297–1314.
- [94] Solberg J. M., Papadopoulos P., *Impact of an Elastic Pseudo-Rigid Body on a Rigid Foundation*, Int. J. Eng. Sci. **38** (2000), 589–603.
- [95] Sousa Dias E., *A Geometric Hamiltonian Approach to the Affine Rigid Body*, in: *Dynamics, Bifurcation and Symmetry. New Trends and New Tools*, P. Chossat (ed.), NATO ASI Series C, tom **437**, Kluwer Academic Publishers, 1994, 291–299.
- [96] Sternberg S., *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, 1964.
- [97] Synge J. L., *Classical Dynamics*, Springer-Verlag, 1960.
- [98] Trzęsowski A., Ślawianowski J. J., *Global Invariance and Lie-Algebraic Description in the Theory of Dislocations*, Int. J. of Theor. Phys. **29** (1990), nr 11, 1239–1249.
- [99] Weyl H., *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, 1931.

- [100] Weyl H., *Classical Groups*, Princeton Univ. Press, N. J., 1946.
- [101] Wigner E. P., w: *Quantum Theory of Angular Momentum*, eds: Biedenharn L. C., van Dam H., Academic Press, New York, 1965.
- [102] Wojtyński W., *Lie Groups and Algebras*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1986.
- [103] Woźniak Cz., *Mechanika ośrodków ciągłych* w *Mechanika Techniczna*, pod red. H. Zorski, Tom I, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1985.
- [104] Woźniak Cz., *Więzy w mechanice ciał odkształcalnych*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo PAN, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk-Lódź, 1988.
- [105] Wulff C. i Roberts M., *Hamiltonian Systems Near Relative Periodic Orbits*, SIAM J. of Dynamical Systems **1** (2002), no. 1, 1–43.