
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK



Praca doktorska

**Nieliniowe modele powłok z 6 stopniami
swobody bazujące na dwustopniowych
aproksymacjach**

Przemysław Panasz

Promotor: doc. dr hab. Krzysztof Wiśniewski

WARSZAWA 2008

Spis treści

Oznaczenia	1
1 Wstęp	4
1.1 Wprowadzenie	4
1.2 Cel rozprawy	7
1.3 Zawartość rozprawy	8
2 Podstawowe równania powłok	12
2.1 Trójwymiarowe kontinuum z rotacjami	12
2.1.1 Rozszerzona przestrzeń konfiguracyjna	12
2.1.2 Równanie więzów na rotacje	12
2.1.3 Równania równowagi i warunki brzegowe	13
2.1.4 Funkcjonał energii potencjalnej zawierający rotacje	14
2.2 Kinematyka i odkształcenia powłoki	15
2.2.1 Baza odniesienia i bazy lokalne	15
2.2.2 Hipoteza Reissnera	16
2.2.3 Aproksymacja rotacji	17
2.2.4 Gradient przemieszczenia i gradient deformacji	18
2.2.5 Tensor odkształcenia Greena dla powłoki	19
2.3 Związki konstytutywne dla powłoki	21
2.3.1 Energia odkształcenia dla powłoki	21
2.3.2 Równania konstytutywne dla powłok	22
2.3.3 Warunek zerowego naprężenia normalnego	23
2.3.4 Współczynnik korekcyjny dla ścinania poprzecznego	24
3 Metoda elementów skończonych dla powłok	27
3.1 Funkcjonał dla powłok zawierający rotację normalną	27
3.2 Równania równowagi MES i operator styczny	28
3.3 Obliczenia symboliczne w MES	30
3.4 Metody rozwiązania równań nieliniowych	31
3.4.1 Metoda Newtona	32
3.4.2 Metoda długości łuku	33

4	Charakterystyka podstawowego 9-węzłowego elementu powłokowego	36
4.1	Funkcje kształtu i wektor niewiadomych	36
4.2	Całkowanie funkcjonału F_2	38
4.2.1	Całkowanie analityczne po grubości powłoki	38
4.2.2	Całkowanie numeryczne po powierzchni środkowej	39
4.3	Dobór wartości parametru regularyzującego	41
4.4	Konsekwencje zniekształceń elementu w konfiguracji początkowej	43
4.5	Zagadnienie własne dla dwuwymiarowego 9-węzłowego elementu	48
5	Metody eliminujące zakleszczanie 9-węzłowego elementu powłokowego	51
5.1	Charakterystyka zakleszczania w elementach powłokowych	51
5.1.1	Zakleszczanie od ścinania poprzecznego elementu belkowego	52
5.1.2	Zakleszczanie membranowe elementu belkowego	57
5.1.3	Techniki eliminujące zakleszczanie w elementach belkowych	62
5.1.4	Zakleszczanie elementu powłokowego 9-węzłowego	63
5.2	Dwustopniowa aproksymacja odkształceń	64
5.2.1	Warianty dwustopniowych aproksymacji odkształceń	67
5.2.2	Element powłokowy 9-AS	69
5.2.3	Porównanie metody AS i ANS dla odkształceń ścinających poprzecznych	71
5.3	Dwustopniowa aproksymacja gradientu przemieszczenia	73
5.3.1	Element powłokowy 9-ADG	73
5.4	Selektywne zredukowane całkowanie	74
5.4.1	Element powłokowy 9-SRI	74
6	Testy numeryczne	77
6.1	Test na wartości własne	78
6.2	Testy bazowe (ang. 'patch tests')	79
6.2.1	Pięcioelementowy 'patch test'	79
6.2.2	Jednoelementowy 'patch test' - wpływ przesunięcia węzłów	82
6.2.3	'Patch test' wyższego rzędu	89
6.3	Prosty wspornik	90
6.4	Zakrzywiony wspornik	92
6.5	Wycinek powłoki cylindrycznej	93
6.6	Smukły wspornik	96
6.7	Membrana Cooka	98
6.8	Hak Raascha	100
6.9	Panel cylindryczny	102
6.10	Rozcięty pierścień kołowy	105
6.11	Cylinder z przeponami	107
6.12	Półsfery z otworem	110

6.13 Skrecony wspornik	115
6.14 Wspornik o przekroju ceowym	120
6.15 Skrecony pierścien	123
6.16 Podsumowanie testów	126
7 Podsumowanie	128
Literatura	130
Dodatki	138
A Parametryzacja kanoniczna tensora rotacji	138

Streszczenie

Rozprawa dotyczy 9-węzłowych elementów powłokowych bazujących na kinematyce Reissnera, odkształceniu Greena i funkcjonale energii potencjalnej. Uwzględniono duże (nieograniczone) rotacje powłoki. Opracowane elementy posiadają następujące cechy:

1. Uwzględniono rotację wokół wektora normalnego do powierzchni środkowej powłoki, więc elementy mają 6 stopni swobody w każdym węźle, 3 przemieszczenia i 3 obroty. Rotacja normalna została wprowadzona za pomocą równania więzów na rotacje, nałożonemu na funkcjonał energii potencjalnej metodą funkcji kary.
2. Opracowano metodę dwustopniowej aproksymacji, aby uniknąć zakleszczania od ścinania poprzecznego i zakleszczania membranowego. Technikę tę zastosowano do pola odkształceń (ang. *Assumed Strain (AS) method*) lub do pola gradientu przemieszczenia (ang. *Assumed Displacement Gradient (ADG) method*). W tym drugim przypadku, modyfikowane jest również równanie więzów na rotacje.
3. Zaproponowano modyfikację metody dwustopniowej aproksymacji polegającą na łącznym traktowaniu próbkowania i całkowania numerycznego. Prowadzi to do zastąpienia 6 punktów próbkowania przez 2 linie próbkowania, i poprawia efektywność elementów. Dwustopniowa aproksymacja zastosowana została do składowych w ortonormalnej bazie w środku elementu, co odróżnia opracowany element od elementów z rodziny MITC, w których używane są składowe kowariantne.
4. Zreinterpretowano technikę selektywnego zredukowanego całkowania (ang. *Selective Reduced Integration (SRI)*), które zostało zastosowane nie tylko do składników energii odkształcenia odpowiedzialnych za zakleszczanie, lecz także do tych wywołujących przeszywnienie. Wyselekcjonowano reguły całkowania dla poszczególnych części energii odkształcenia dla powłoki, otrzymując element o bardzo dobrej dokładności i efektywności.

Opracowane zostały cztery 9-węzłowe elementy powłokowe, które poddano szeregowi testów weryfikujących brak zakleszczania, niewrażliwość na zniekształcenia siatki i dobrą dokładność dla rzadkich siatek elementów. Wyniki zostały porównane z rezultatami dla elementów MITC9 (ADINA) oraz S9R5 (ABAQUS), oraz z rezultatami z literatury.

Summary

The thesis concerns 9-node quadrilateral shell elements derived for the Reissner's kinematics. They are based on the Green strain and the potential energy, and are applicable to large (unrestricted) rotations. The characteristic features of the developed elements are as follows:

1. Drilling rotation is included via the drill rotation constraint imposed by the penalty method. Hence, the elements have 6 dofs per node, i.e. 3 displacements and 3 rotational parameters, including drilling rotation.

2. Transverse shear and membrane locking are avoided using the two-level approximation applied either to the strain (Assumed Strain method) or to the displacement gradient (Assumed Displacement Gradient method). The latter method affects also the drilling rotation constraint.

3. A modification of the two-level approximation method is proposed, consisting in treating the sampling and the numerical integration together, which results in 6 sampling points being replaced by two sampling lines. The two-level approximation is applied to components in the ortho-normal basis at the element center, which differs the developed elements from the MITC family of elements, which uses the covariant strain components.

4. Selective reduced integration (SRI) approach is revised. The total functional is split into several parts, and a suitable integration rule is found for each part, yielding an efficient element which shows very good mesh convergence.

Four 9-node shell elements are developed and subjected to a range of benchmark tests, to establish the sensitivity to mesh distortion, the coarse mesh accuracy, and to confirm the lack of locking. Obtained results are compared with results obtained by the MITC9 element of ADINA, the S9R5 element of ABAQUS, and with other published results.

Podstawowe oznaczenia i skróty

$\{\mathbf{i}_k\}$	globalny kartezjański układ współrzędnych, $k = 1, 2, 3$
$\{\mathbf{a}_k\}$	lokalna baza ortonormalna w konfiguracji aktualnej, $k = 1, 2, 3$
$\{\mathbf{g}_k\}$	lokalna baza naturalna w konfiguracji odniesienia, $k = 1, 2, 3$
$\{\mathbf{t}_k\}$	lokalna baza ortonormalna w konfiguracji odniesienia, $k = 1, 2, 3$
\mathbf{t}_3	wektor normalny do powierzchni środkowej w konfiguracji odniesienia
\mathbf{G}	gradient przemieszczenia
\mathbf{F}	gradient deformacji
\mathbf{C}	prawy tensor deformacji Cauchy-Greena
\mathbf{E}	tensor odkształcenia Greena
$\xi = \xi^1, \eta = \xi^2$	współrzędne naturalne, styczne do powierzchni środkowej
ζ	współrzędna normalna do powierzchni środkowej
$\boldsymbol{\xi}$	wektor współrzędnych izoparametrycznych
R_i	funkcje kształtu związane z punktami próbkowania, $i = A, B, C, D, E, F$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor odkształcenia membranowego powłoki
$\boldsymbol{\kappa}$	tensor odkształcenia zgięciowego powłoki
χ	funkcja deformacji
\mathcal{C}	przestrzeń konfiguracyjna
\mathcal{C}_{ext}	rozszerzona przestrzeń konfiguracyjna
R^3	Euklidesowa przestrzeń trójwymiarowa
$SO(3)$	specjalna ortogonalna grupa obrotów
B	ciało odkształcalne
\mathbf{Q}	ortogonalny tensor obrotu
F_2	funkcjonał 2 polowy
F_{ext}	funkcjonał sił zewnętrznych
F_{drill}	funkcjonał związany z równaniem więzów na rotacje
\mathbf{T}_a	mnożnik Lagrange'a
\mathcal{W}	energia odkształcenia
$\bar{\mathcal{W}}$	energia odkształcenia na jednostkę objętości
γ	parametr regularyzacyjny
\mathbf{S}	2-gi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa
\mathbf{P}	naprężenie nominalne, 1-szy tensor Pioli-Kirchhoffa
h	grubość powłoki

\mathbf{y}	wektor położenia dowolnego punktu powłoki przed deformacją
x, y, z	współrzędne globalne wektora położenia \mathbf{y} wzdłuż osi $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$
\mathbf{x}	wektor położenia dowolnego punktu powłoki po deformacji
N_i	funkcja kształtu związana z i -tym węzłem
ϕ	kanoniczny pseudo-wektor rotacji
ϕ_i	rotacyjny stopień swobody, obrót wokół i -tej osi
\mathbf{u}	wektor przemieszczenia
u, v, w	składowe wektora przemieszczenia wzdłuż osi $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$
\mathbf{J}	jakobian przekształcenia między współrzędnymi naturalnymi a globalnymi
\mathbf{R}_0	macierz transformacji do układu $\{\mathbf{t}_i\}$
λ	stała Lamé'go
ν	współczynnik Poissona
E	moduł Younga
G	moduł Kirchhoffa
k	współczynnik korekcyjny dla ścinania poprzecznego
ρ_R	gęstość masy w konfiguracji odniesienia
\mathbf{b}	wektor sił masowych
\mathbf{n}	wektor normalny do powierzchni środkowej powłoki
A	powierzchnia środkowa powłoki
V	objętość ciała
∂B_χ	część brzegu ciała z warunkami na funkcję deformacji
∂B_σ	część brzegu ciała z warunkami na naprężenie
\mathbf{I}	macierz jednostkowa
\mathbf{Z}	tensor przesunięcia (ang. <i>shifter</i>)
μ	wyznacznik tensora przesunięcia
\mathbf{B}	operator styczny dla zdyskretyzowanej postaci tensora odkształcenia
\mathbf{q}	wektor niewiadomych z wszystkich węzłów
\mathbf{b}_d	operator styczny dla rotacyjnego równania więzów
$\hat{\mathbf{p}}$	zewnętrzne siły powłokowe
$\hat{\mathbf{m}}$	zewnętrzne momenty powłokowe
\mathbf{f}	wektor sił wewnętrznych
\mathbf{r}	wektor sił rezydualnych
\mathbf{p}	wektor obciążeń zewnętrznych
\mathbf{K}	macierz sztywności
W_c	funkcjonał energii dopełniającej
$(\dots)_0, (\dots)_1$	człon stały i liniowy rozwinięcia po grubości powłoki,
$(\dots)_{sh}$	wielkości dotyczące powłoki (scałkowane po grubości powłoki)
$(\dots)_I$	wielkość w węźle I

\otimes	diada - iloczyn tensorowy
\times	iloczyn wektorowy
Div(.)	operator dywergencji
$\nabla(\dots)$	operator gradientu
tr(...)	operator śladu
$\partial_{..}(\dots)$	operator pochodnej cząstkowej
$\delta(\dots)$	wariacja
δ_{ij}	delta Kroneckera
skew(.)	część skośnie-symetryczna tensora, $\text{skew}(\cdot) = \frac{1}{2}[(\cdot) - (\cdot)^T]$
MES	metoda elementów skończonych
URI	jednolite zredukowane całkowanie
SRI	selektywne zredukowane całkowanie
AS	dwustopniowa aproksymacja odkształceń
ANS	dwustopniowa aproksymacja odkształceń w układzie naturalnym
ADG	dwustopniowa aproksymacja gradientu przemieszczenia
SVK	Saint Venant-Kirchhoff
PSN	płaski stan naprężenia
MITC	ang. <i>Mixed Interpolation of Tensorial Components</i>

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Konstrukcje powłokowe zawdzięczają swoją popularność temu, że są w stanie przenieść bardzo duże obciążenie gdy pracują w stanie błonowym, mimo, że ich grubość jest dużo mniejsza niż pozostałe wymiary. Dzięki krzywiznie mogą pracować w stanie błonowym nawet dla obciążeń przyłożonych prostopadle do ich powierzchni. Konstrukcje powłokowe mogą być projektowane jako bardzo cienkie i smukłe, o małej masie, co ma zasadnicze znaczenie w przypadku wielu zastosowań np. w konstrukcjach lotniczych.

Do modelowania powłok najczęściej stosuje się metodę elementów skończonych (MES). Najbardziej popularne są elementy powłokowe 4-węzłowe, które aproksymują geometrię, przemieszczenia i parametry rotacyjne bi-liniowymi funkcjami kształtu. Bardziej złożone są elementy o kształcie czworoboku z 9 węzłami, które wykorzystują funkcje bi-kwadratowe i w wielu przypadkach dają większą dokładność rozwiązań, szczególnie dla rzadkich siatek elementów. W niniejszej rozprawie opracowane zostaną elementy powłokowe należące do klasy izoparametrycznych elementów 9-węzłowych.

Zakleszczanie w elementach powłokowych. Podstawowy 9-węzłowy izoparametryczny element powłokowy wykazuje zakleszczanie rozwiązania (ang. *locking*) przy zginaniu, co powoduje, że przemieszczenia i rotacje konstrukcji są zbyt małe, tak jak gdyby sztywność elementu została znacznie zwiększona. To negatywne zjawisko jest spowodowane aproksymacjami odkształceń poprzecznych oraz błonowych, patrz np. [Bathe, Brezzi, Fortin, 1989] i [Bathe, Dvorkin, 1985].

Analogiczny problem występuje dla belek 3-węzłowych, patrz np. [Stolarski, Belytschko, 1982], dlatego można analizować pomocniczy problem zginania 3-węzłowej płaskiej belki.

(i) W przypadku odkształceń ścinających poprzecznych analizuje się prosty (niezakrzywiony) element belkowy, patrz np. [Huang, Hinton, 1984], i z warunku, że

aproxymowane odkształcenie powinno być równe odkształceniu analitycznemu dla liniowego rozkładu momentu zginającego, otrzymuje się $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$. Są to tzw. punkty Barlowa.

(ii) W przypadku odkształceń błonowych rozważany jest zakrzywiony element belkowy, patrz np. [Park, 1986], i z warunku, że odkształcenia powinny się zerować przy czystym zginaniu, otrzymuje się te same punkty co dla odkształceń ścinających poprzecznych. Jednak wynik ten jest przybliżony i ważny tylko dla elementów o małej krzywiznie.

Wyznaczone w powyższy sposób punkty Barlowa są używane także w elementach powłokowych 9-węzłowych; istnieje kilka sposobów ich wykorzystania i są one dyskutowane w niniejszej rozprawie.

Następny problem związany z 9-węzłowymi izoparametrycznymi elementami powłokowymi to zbyt sztywne zachowanie się tych elementów przy zginaniu w płaszczyźnie, co spowodowane jest aproksymacjami odkształcenia ścinającego ε_{12} . Podstawową obserwacją stanowi to, że wartości ε_{12} w punktach Gaussa dla schematu całkowania 3×3 punkty są mniej dokładne niż w czterech punktach $(\xi, \eta) = (\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$. Obserwacja ta stanowi podstawę do rozwijania metod zapobiegających nadmiernej sztywności; kilka z nich jest wymienionych poniżej, a niektóre są opisane szczegółowo w dalszej części rozprawy.

Metody zapobiegające zakleszczaniu. W celu uniknięcia zakleszczania zaproponowanych zostało w literaturze kilka metod, które można scharakteryzować następująco:

1. Jednolite zredukowane całkowanie (ang. *Uniform Reduced Integration (URI)*) połączone ze stabilizacją. Metoda ta została zaproponowana w [Zienkiewicz, Taylor, Too, 1971], ale daje ona osobliwą macierz sztywności i wymaga stabilizacji. Metody stabilizacji macierzy sztywności były przedmiotem wielu prac, np. [Belytschko, Ong, Liu, 1985], [Park, Stanley, 1986], [Belytschko, Wong, Stolarski, 1989]. Warto zauważyć, że stosowane w tym wypadku całkowanie (2×2 punkty Gaussa) członu energii odkształcenia dla ε_{12} nie powoduje powstawania zerowych wartości własnych, patrz [Belytschko, Liu, Ong, 1987].
2. Selektywne zredukowane całkowanie (ang. *Selective Reduced Integration (SRI)*), zostało zaproponowane w [Hughes, Cohen, Haroun, 1978]. Standardowe użycie tej metody, tzn. jednolicie zredukowane całkowanie (URI) członów membranowych i pełne całkowanie członów zgięciowych, nie jest efektywne. Ponadto, pojawia się wtedy dodatkowa zerowa wartość własna, patrz [Huang, 1988].

W literaturze wskazywano także na inną wadę tej metody, a mianowicie słabą zbieżność przy zagęszczaniu siatki. Elementy typu SRI w niektórych testach zbiegały słabo, np. dla ściskanej półsfery (patrz

[Belytschko, Wong, Stolarski, 1989] str.405) i dla ściskanego cylindra (patrz [Jang, Pinsky, 1987] str.2407).

Metoda selektywnego zredukowanego całkowania opracowana w niniejszej rozprawie wykorzystuje punkty Gaussa pokrywające się z punktami w których odkształcenia są dokładne i nie ma wad wskazywanych w powyższych pracach.

Inne ograniczenie metody SRI stanowi fakt, że energia odkształcenia powłoki może zostać rozprężona na część membranową i zgięciową tylko wtedy gdy własności materiałowe są stałe po grubości lub symetryczne względem powierzchni środkowej. To wyklucza użycie elementów typu SRI np. do plastyczności, bo wtedy materiał nie ma powyższej symetrii, a poza tym najczęściej używa się wielu punktów całkowania po grubości powłoki.

3. Metoda założonych odkształceń (ang. *Assumed Strain (AS)*) w połączeniu z koncepcją dwustopniowej aproksymacji. Podstawą tej koncepcji jest próbkowanie (ang. *sampling*) składowych odkształceń w wybranych punktach, a następnie ekstrapolacja tych wartości na cały element.

Metoda AS była rozwijana dla płyt i powłok w wielu publikacjach, takich jak np.: [MacNeal, 1978], [Hughes, Tezduyar, 1981],[MacNeal, 1982], [Dvorkin, Bathe, 1984], [Huang, Hinton, 1984], [Bathe, Dvorkin, 1985], [Bathe, Dvorkin, 1986], [Huang, Hinton, 1986], [Park, Stanley, 1986], [Jang, Pinsky, 1987], [Bucalem, Bathe, 1993] i wielu innych. Została także opisana w dwóch książkach, [Huang, 1988] and [Chapelle, Bathe, 2003]. Różne wersje tej metody zostały opracowane dla:

- (a) odkształceń ścinających poprzecznych w 2-węzłowych belkach i 4-węzłowych elementach płytowych i powłokowych,
- (b) odkształceń membranowych i ścinających poprzecznych w 3-węzłowych belkach i 9-węzłowych elementach płytowych i powłokowych.

W literaturze spotyka się różne warianty tej metody różniące się składowymi odkształceniami które są próbkowane, lokalizacją punktów próbkowania, oraz funkcjami aproksymującymi odkształcenia.

W niniejszej rozprawie metoda AS została opracowana dla 9-węzłowego elementu powłokowego z rotacją normalną, tzn. z 6-cioma stopniami swobody w węźle.

1.2 Cel rozprawy

Celem niniejszej rozprawy jest opracowanie zagadnień teoretycznych i numerycznych związanych z 9-węzłowymi nieliniowymi powłokowymi elementami skończonymi, bazującymi na kinematyce Reissnera oraz na tensorze odkształcenia Greena. Klasyczne prace poświęcone elementom 9-węzłowym zostały rozszerzone w następujący sposób:

1. Klasyczne sformułowania elementów 9-węzłowych ograniczone są do dwuparametrowych reprezentacji rotacji, które muszą być zdefiniowane w bazie lokalnej, a następnie przetransformowane do układu odniesienia.

W rozprawie zdefiniowana została rozszerzona przestrzeń konfiguracyjna, co umożliwia włączenie do sformułowania obrotu wokół wektora normalnego do powierzchni powłoki (ang. *drilling rotation*). W efekcie uzyskuje się 3 rotacyjne parametry w każdym węźle elementu skończonego, a wektor rotacji może być zdefiniowany bezpośrednio w układzie odniesienia.

Umożliwia to stosowanie opracowanych elementów do modelowania powłok z niegładką powierzchnią środkową, np. z narożami, i naturalne łączenie ich z trójwymiarowymi elementami belkowymi posiadającym 6 stopni swobody w węźle.

Sformułowanie opracowane w rozprawie uwzględnia duże (nieograniczone) rotacje powłoki.

2. Standardowe 9-węzłowe elementy powłokowe, wyprowadzone dla bikwadratowych wielomianów Lagrange'a, charakteryzują się bardzo małą dokładnością, co spowodowane jest przez tzw. zakleszczanie, występujące dla powłok cienkich i zakrzywionych. Dlatego w rozprawie opracowano metody eliminujące zakleszczanie od ścinania poprzecznego i zakleszczanie membranowe, takie jak:

- (a) metodę dwustopniowej aproksymacji odkształceń (ang. *Assumed Strain (AS)*). Warto zauważyć, że w klasycznym sformułowaniu, np. [Huang, 1988], metoda ta była stosowana do liniowych powłok, podczas gdy w rozprawie została opracowana dla nieliniowych powłok, bazujących na tensorze odkształcenia Greena i z uwzględnieniem dużych (nieograniczonych) rotacji.

Zaproponowano szereg modyfikacji tej metody, zmierzających do poprawienia jej dokładności i efektywności, m.in. zastosowano ją nie tylko do pola odkształceń lecz także do pola gradientu deformacji. W tym drugim przypadku modyfikowane jest również równanie więzów na rotacje.

- (b) metodę selektywnego zredukowanego całkowania (ang. *Selective Reduced Integration (SRI)*), która została zastosowana nie tylko do składników energii odkształcenia odpowiedzialnych za zakleszczanie, lecz także do innych członów wywołujących przeszywnienie elementu.

Opracowane sformułowanie tej metody nie ma wad opisywanych w literaturze i charakteryzuje się bardzo dobrą efektywnością.

3. Własności opracowanych elementów powłokowych zostały określone na podstawie szeregu rygorystycznych testów numerycznych, zarówno liniowych jak i nieliniowych, i porównane z wynikami podanymi w literaturze oraz rezultatami otrzymanymi za pomocą elementów z profesjonalnych programów MES, takich jak ADINA i ABAQUS. Niektóre z tych testów są bardzo zaawansowane i nie można ich przeprowadzić za pomocą elementów z profesjonalnych programów MES.

Rozprawa należy do dziedziny metod komputerowych w mechanice, do kierunku badań związanego z rozwojem metod aproksymacyjnych, którego celem jest rozwijanie elementów skończonych o dużej dokładności i efektywności, wolnych od zakleszczenia i niewrażliwych na dystorsje kształtu.

1.3 Zawartość rozprawy

Rozprawa składa się z 7 rozdziałów, uwzględniając Wstęp i Podsumowanie, oraz jednego Dodatku.

Rozdział 2 przedstawia podstawowe równania powłok.

Podrozdział 2.1 omawia podstawowe równania trójwymiarowego kontinuum w zmodyfikowanej wersji uwzględniającej rotację. Podstawą sformułowania jest rozszerzona przestrzeń konfiguracyjna, zawierająca funkcję deformacji i rotacje, ograniczone za pomocą równania więzów na rotacje. To ostatnie równanie jest równoważne polarnemu rozkładowi gradientu deformacji, jednak ma postać bardziej dogodną w zastosowaniach numerycznych. Przytoczono niektóre argumenty dotyczące równoważności obu form równania więzów, a następnie, podano równania równowagi i warunki brzegowe w postaci dla 2-go tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa.

Ponieważ w metodzie elementów skończonych (MES) wykorzystuje się równania wariacyjne lub odpowiadające im funkcjonały, zdefiniowano funkcjonały energii odkształcenia, obciążeń zewnętrznych, a także funkcjonał dla równania więzów na rotacje. Ten ostatni funkcjonał zregulowano ze względu na mnożnik Lagrange'a, otrzymując funkcjonał dwupolowy, który jest następnie wykorzystywany do wprowadzenia równań dla powłok.

W podrozdziale 2.2 zdefiniowano kinematykę powłoki. Podrozdział rozpoczyna się od zdefiniowania baz lokalnych (naturalnej i ortonormalnej) na powierzchni środkowej powłoki dla konfiguracji odniesienia, oraz hipotezy Reissnera. Ponieważ sformułowanie zawiera także rotację, określono sposób aproksymowania rotacji po grubości powłoki i podano wzór na tensor rotacji dla parametryzacji za pomocą kanonicznego pseudo-wektora obrotu. Określono składowe gradientu przemieszcze-

nia w ortonormalnej bazie w środku elementu, a następnie składowe kowariantne tensora odkształcenia Greena.

Podrozdział 2.3 poświęcony jest równaniom konstytutywnym dla powłoki. Zdefiniowano funkcję energii odkształcenia dla trójwymiarowego materiału izotropowego typu Saint Venanta-Kirchhoffa (SVK) i podano jej postać dla liniowego rozkładu tensora odkształcenia po grubości powłoki, wynikającego z hipotezy Reissnera. Następnie zdefiniowano tensory sił i momentów przekrojowych dla powłoki i podano równania konstytutywne dla powłoki z materiału SVK.

Ponieważ dla hipotezy Reissnera otrzymuje się odkształcenie w kierunku normalnym do powierzchni środkowej powłoki równe zero, co jest rezultatem fizycznie nieprawdziwym, odkształcenie to jest dla zagadnień sprężystych wyliczane z warunku, że naprężenie normalne w powłoce jest równe zero. Następnie podano wyprowadzenie współczynnika korekcyjnego $k = 5/6$ dla ścinania poprzecznego, uwzględniającego paraboliczność naprężeń ścinających w kierunku normalnym do powłoki.

Rozdział 3 przedstawia podstawowe zagadnienia związane z zastosowaniem metody elementów skończonych (MES) do powłok. Opisy mają charakter ogólny i definiują szerszy kontekst rozprawy; są także niezbędne do zrozumienia niektórych analiz numerycznych opisanych w Rozdz.6.

W podrozdziale 3.1 omówiono modyfikacje dwupolowego funkcjonału dla trójwymiarowego kontinuum, przeprowadzone w celu uzyskania odpowiadającego funkcjonału dla powłok. Omówiono redukcję równania więzów na rotacje do jednego skalarnego równania, zawierającego składową wektora rotacji normalnej do powierzchni środkowej powłoki.

Podrozdział 3.2 omawia wyprowadzenie równań równowagi w postaci całkowej, charakterystycznej dla MES. Omówiono postaci poszczególnych członów funkcjonału powłokowego F_{2sh} używane w MES, wyprowadzono równania równowagi w postaci całkowej, oraz zdefiniowano operator styczny, wykorzystywany w metodzie Newtona i metodzie długości łuku. Podane wyprowadzenia były niezbędne w implementacji 9-węzłowych elementów opracowanych w rozprawie.

W podrozdziale 3.3 opisano możliwości zastosowania obliczeń symbolicznych do wyprowadzenia operatora stycznego i wektora residuum dla elementu powłokowego. Podano szereg ogólnych informacji dotyczących obliczeń symbolicznych, przytoczono przykład różniczkowania za pomocą metody "w przód" i "wstecz".

Podrozdział 3.4 opisuje zastosowane metody rozwiązywania układów równań nieliniowych: metodę Newtona i metodę długości łuku (kontynuacji). Rozdział ten ma charakter uzupełniający, ponieważ w rozprawie wykorzystano wersje tych metod zaimplementowane w programie metody elementów skończonych FEAP.

Rozdział 4 omawia cechy podstawowego izoparametrycznego 9-węzłowego elementu powłokowego z punktu widzenia MES.

W podrozdziale 4.1 podano postaci funkcji kształtu, omówiono numerację węzłów i zdefiniowano wektor stopni swobody (niewiadomych) dla elementu.

W podrozdziale 4.2 omówiono całkowanie funkcjonału F_2 dla powłoki, w rozbięciu na całkowanie analityczne po grubości powłoki i całkowanie numeryczne po powierzchni środkowej. Podano szczegóły całkowania analitycznego energii odkształcenia powłoki, prowadzącego do rozprężonej postaci energii powłoki, z oddzielnymi członami dla odkształceń powłokowych ε i κ .

Podrozdział 4.3 opisuje dobór wartości parametru regularyzacyjnego γ , związanego z członem funkcjonału dla równania więzów na rotację normalną. Opisano sposób przeprowadzenia weryfikacji zakresu dopuszczalnych wartości parametru i podano wyselekcjonowaną wartość parametru. Trzy przykładowe rysunki uwidaczniają wpływ parametru na wartość przemieszczeń dla wybranych przykładów testowych, liniowych i nieliniowych.

Podrozdział 4.4 charakteryzuje konsekwencje początkowych zniekształceń elementu, rozumianych w sensie odstępstwa początkowego kształtu elementu od kształtu kwadratowego, z regularnie rozmieszczonymi węzłami.

Pokazano, że zniekształcenia tego typu mogą prowadzić do zmiany orientacji bazy lokalnej, tzn. zmiany zwrotu wektorów stycznych i najeżenia wektora normalnego. W szczególności wart uwagi jest prosty jednowymiarowy przykład, który pokazuje, że duża zmiana położenia węzła środkowego prowadzi do zmiany zwrotu wektora bazy naturalnej. Przykład ten jest oryginalnym rezultatem rozprawy.

W podrozdziale 4.5 omówiono zagadnienie własne dla dwuwymiarowego 9-węzłowego elementu. Podano wartości własne i wykresy wektorów własnych dla kwadratowego elementu z regularnie rozmieszczonymi węzłami. Zidentyfikowano ruch sztywny elementu, związane z wektorami własnymi dla zerowych wartości własnych.

Rozdział 5 omawia metody eliminujące zakleszczanie 9-węzłowego elementu powłokowego, szczególnie ważne dla powłok cienkich i zakrzywionych. Jest to zasadniczy rozdział pracy.

W podrozdziale 5.1 podano ogólną charakterystykę zakleszczania elementów powłokowych, wyróżniając zakleszczanie membranowe i zakleszczanie od ścinania poprzecznego. Ponieważ zjawisko zakleszczania występuje także dla elementów belkowych typu Timoszenki, więc te, jako mniej skomplikowane, wykorzystano w rozważaniach analitycznych.

Dla obu typów zakleszczania 3-węzłowego elementu belkowego, wyznaczono, z odpowiedniego równania kwadratowego, położenie punktów, w których wartości aproksymowanego odkształcenia ścinającego lub membranowego są równe wartościom analitycznym. Są to dwa punkty $\xi_{A,B} = \pm 1/\sqrt{3}$. Rozważania dla elementów belkowych zakończono omówieniem dwóch sposobów unikania zakleszczania: 2-punktowego (zredukowanego) całkowania oraz dwustopniowej aproksymacji odkształceń. Scharakteryzowano konsekwencje wynikające z analiz 3-węzłowego ele-

mentu belkowego dla 9-węzłowego elementu powłokowego.

W podrozdziale 5.2 omówiono metodę dwustopniowej aproksymacji odkształceń dla elementów powłokowych. Najpierw scharakteryzowano metodę ANS dla elementów 4-węzłowych dla odkształceń ścinających poprzecznych, a następnie dla 9-węzłowego elementu powłokowego. Dokonano przeglądu wariantów dwustopniowych aproksymacji odkształceń dla elementów powłokowych 9-węzłowych opisanych w literaturze.

Następnie scharakteryzowano element 9-AS, który został opracowany w rozprawie. Opisano szereg modyfikacji metody dwustopniowej aproksymacji odkształceń (AS), które stanowią oryginalne elementy rozprawy, takie jak: (i) łączne traktowanie próbkowania i całkowania numerycznego, co pozwala zastąpić 6 punktów próbkowania przez 2 linie próbkowania, (ii) zastosowanie dwustopniowej aproksymacji do składowych w ortonormalnej bazie w środku elementu, co odróżnia opracowane elementy od elementów z rodziny MITC.

W podrozdziale 5.3 opisano zastosowanie metody dwustopniowej aproksymacji do pola gradientu przemieszczenia, które zostało zaimplementowane w elemencie 9-ADG. W tym ostatnim przypadku, na skutek użycia metody, modyfikowane jest również równanie więzów na rotację normalną. Zdefiniowano zastosowane schematy aproksymacji dla poszczególnych składowych części stałej i liniowej gradientu przemieszczenia. Opracowanie i przetestowanie tej wersji metody stanowi oryginalny element rozprawy.

W podrozdziale 5.4 scharakteryzowano metodę selektywnego zredukowanego całkowania i opisano element powłokowy 9-SRI. Zaproponowano, by metodę SRI zastosować do członów energii nie wywołujących zakleszczania lecz nadmierną sztywność i wyselekcjonowano schematy całkowania dla poszczególnych członów energii powłoki. Schematy całkowania dobrano tak, by zachowana była odpowiednia ilość niezerowych wartości własnych elementu i nie była potrzebna dodatkowa stabilizacja. Opracowanie tej kwestii stanowi oryginalny element rozprawy.

Rozdział 6 zawiera testy numeryczne weryfikujące własności opracowanych w rozprawie elementów 9-węzłowych. Podrozdziały 6.1-6.15 zawierają szczegółowe opisy testów i otrzymanych rezultatów, oraz porównania z wynikami referencyjnymi.

Podsumowanie testów umieszczono w Rozdz. 6.16, który zawiera: (1) ogólną charakterystykę przeprowadzonych testów, (2) syntetyczną ocenę elementów własnych przeprowadzoną na podstawie testów liniowych, oraz (3) uwagi ogólne dotyczące dokładności i przydatności poszczególnych elementów własnych.

Rozdział 7 zawiera podsumowanie oryginalnych rezultatów rozprawy.

Dodatek A zawiera krótkie omówienie parametryzacji tensora rotacji za pomocą kanonicznego pseudo-wektora obrotu.

Rozdział 2

Podstawowe równania powłok

2.1 Trójwymiarowe kontinuum z rotacjami

2.1.1 Rozszerzona przestrzeń konfiguracyjna

Klasyczna przestrzeń konfiguracyjna definiowana jest następująco: $\mathcal{C} \doteq \{\boldsymbol{\chi}: B \rightarrow R^3\}$, gdzie $\boldsymbol{\chi}$ jest funkcją deformacji zdefiniowaną na konfiguracji odniesienia ciała B . W niniejszej pracy rozważana jest *rozszerzona przestrzeń konfiguracyjna*, zdefiniowana za pomocą funkcji deformacji $\boldsymbol{\chi}$ oraz rotacji $\mathbf{Q} \in SO(3)$. Rotacje mogą być traktowane na dwa sposoby: (1) pozostawać nieograniczone, jak np. w kontinuum Cosserat, lub (2) być ograniczone przez rozkład polarny gradientu deformacji \mathbf{F} , lub przez równanie więzów na rotację

$$\text{skew}(\mathbf{Q}^T \mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

gdzie $\mathbf{F} \doteq \nabla \boldsymbol{\chi}$. Wykorzystując równanie (2.1) można zdefiniować rozszerzoną przestrzeń konfiguracji w następujący sposób:

$$\mathcal{C}_{ext} \doteq \{(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{Q}) : B \rightarrow R^3 \times SO(3) \mid \boldsymbol{\chi} \in \mathcal{C}\}. \quad (2.2)$$

Należy zwrócić uwagę, że funkcja deformacji $\boldsymbol{\chi}$ należy do klasycznej przestrzeni konfiguracyjnej \mathcal{C} , tzn. jest identyczna jak dla klasycznego nie-polarnego kontinuum Cauchy'ego. W niniejszej pracy używana jest rozszerzona przestrzeń konfiguracji zdefiniowana w równaniu (2.2).

2.1.2 Równanie więzów na rotacje

Aby wprowadzić rotacje do sformułowania 3-wymiarowego problemu, wykorzystywane jest równanie więzów na rotacje (2.1), które można wyprowadzić z rozkładu polarnego gradientu deformacji. Z twierdzenia o rozkładzie biegunowym (polarnym) dowolnego tensora nieosobliwego drugiego rzędu (patrz [Ogden, 1984],

[Ostrowska-Maciejewska, 1994]) wynika, że gradient deformacji \mathbf{F} można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad (2.3)$$

gdzie $\mathbf{U} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{1/2}$ to prawy tensor rozciągnięcia, a $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} \in SO(3)$ jest tensorem rotacji. Podstawowe znaczenie mają własności tych tensorów. Prawy tensor rozciągnięcia \mathbf{U} jest symetryczny i dodatnio określony, natomiast \mathbf{R} jest tensorem ortogonalnym. Wykorzystując ortogonalność tensora \mathbf{R} , tzn. $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$, równanie (2.3) można zapisać w postaci

$$\mathbf{R}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}. \quad (2.4)$$

Rozkładając lewą stronę tego równania na część symetryczną i skośnie-symetryczną otrzymuje się,

$$\text{sym}(\mathbf{R}^T\mathbf{F}) + \text{skew}(\mathbf{R}^T\mathbf{F}) = \mathbf{U}. \quad (2.5)$$

Biorąc pod uwagę symetrię tensora \mathbf{U} , z równania (2.5) wynika, że

$$\text{skew}(\mathbf{R}^T\mathbf{F}) = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Kwestię równoważności rozkładu polarnego \mathbf{F} i równania więzów na rotacje poruszono np. w pracy [Wisniewski, Turska, 2002].

Jeśli wprowadza się rotacje jako zmienne niezależne, wtedy należy, zamiast $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$, użyć nowego tensora $\mathbf{Q} \in SO(3)$. Prowadzi to do równania więzów na rotacje $\text{skew}(\mathbf{Q}^T\mathbf{F}) = \mathbf{0}$, które dołącza się do równań równowagi.

Opis wykorzystania równania więzów na rotacje w celu wzbogacenia kinematyki powłoki można znaleźć np. w pracach [Wisniewski, Turska, 2000] oraz [Wisniewski, Turska, 2001].

2.1.3 Równania równowagi i warunki brzegowe

Lokalne równania równowagi oraz warunki brzegowe dla trójwymiarowego kontinuum mają następującą postać:

1. Zasada zachowania pędu:

$$\text{Div}\mathbf{P} + \rho_R\mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

gdzie \mathbf{P} to naprężenie nominalne (jego transpozycja to 1-szy tensor Pioli Kirchhoffa), ρ_R jest gęstością masy w konfiguracji odniesienia, a \mathbf{b} to siły masowe działające na ciało.

2. Zasada zachowania momentu pędu:

$$\mathbf{F} \times \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad \text{skew}(\mathbf{P}\mathbf{F}^T) = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

dla $\det \mathbf{F} > 0$. Pierwsze jest równaniem wektorowym, a drugie tensorowym. Ich równoważność wynika z relacji $\frac{1}{2}(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) \times \mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{P}^T - \mathbf{P}\mathbf{F}^T)$.

3. Warunki brzegowe:

$$\boldsymbol{\chi} = \bar{\boldsymbol{\chi}} \quad \text{na} \quad \partial B_\chi, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{na} \quad \partial B_\sigma, \quad (2.10)$$

gdzie ∂B_χ oraz ∂B_σ oznaczają rozłączne części obszaru granicznego, na których zostały odpowiednio określone warunki brzegowe kinematyczne i statyczne. Wektor normalny do powierzchni został oznaczony jako \mathbf{n} , natomiast $\bar{\mathbf{p}}$ to obciążenie zewnętrzne działające na powierzchnię.

Równania równowagi można zapisać w zależności od 2-go tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa \mathbf{S} , który jest związany z naprężeniem nominalnym następującą zależnością

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}. \quad (2.11)$$

Tensor naprężenia \mathbf{S} jest symetryczny i sprzężony z miarą odkształcenia Greena \mathbf{E} , co zostanie wykorzystane przy konstrukcji funkcjonału energii odkształcenia.

Wykorzystując równanie (2.11) oraz równanie więzów na rotacje (3.1), równania równowagi wraz z warunkami brzegowymi tworzą następujący układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div}(\mathbf{F}\mathbf{S}) + \rho_R \mathbf{b} = \mathbf{0}, \\ \text{skew}(\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T) = \mathbf{0}, \\ \text{skew}(\mathbf{Q}^T \mathbf{F}) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\chi} = \bar{\boldsymbol{\chi}} \quad \text{na} \quad \partial B_\chi, \\ \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{na} \quad \partial B_\sigma. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

2.1.4 Funkcjonał energii potencjalnej zawierający rotacje

W metodzie elementów skończonych (MES) wykorzystuje się równania wariacyjne, lub odpowiadające im funkcjonały, patrz np. [Bonet, Wood, 1997], [Simo, Hughes, 1989], [Zienkiewicz, Taylor, 2005]. W tym celu przekształca się równania (2.12) do postaci wariacyjnej, a następnie dedukuje się postać funkcjonału, dla którego równania wariacyjne stanowią równania Eulera-Lagrange'a. W ten sposób otrzymano podany poniżej trój-polowy funkcjonał zawierający rotacje.

Dla zagadnień sprężystości funkcjonał ma formę całkową na konfiguracji odniesienia (początkowej) bądź konfiguracji aktualnej. Sformułowanie zagadnienia dla konfiguracji odniesienia ma tę zaletę, że obszar całkowania nie zmienia się podczas procesu deformacji.

Funkcjonał energii odkształcenia przyjęto w postaci zależnej od prawego tensora deformacji Cauchy-Greena, $\mathbf{C} \doteq \mathbf{F}^T \mathbf{F}$,

$$\mathcal{W} = \int_B \mathcal{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) dV, \quad (2.13)$$

co zapewnia mu materialną obiektywność. W niniejszej pracy stosowana jest energia odkształcenia dla materiału liniowego izotropowego sprężystego typu Saint Venanta-Kirchhoffa, patrz Rozdz.2.3.1.

Siły masowe oraz statyczne warunki brzegowe określone równaniem (2.10) są uwzględnione w potencjale obciążenia zewnętrznego

$$F_{ext} = - \int_B \rho_R \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\chi} dV - \int_{\partial B_\sigma} \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\chi} dA. \quad (2.14)$$

Równanie więzów na rotacje (2.1) jest uwzględnione za pomocą mnożnika Lagrange'a \mathbf{T}_a , następująco

$$F_{RC} = \int_B \mathbf{T}_a \cdot \text{skew}(\mathbf{Q}^T \mathbf{F}) dV, \quad (2.15)$$

gdzie \mathbf{T}_a jest tensorem skośnie-symetrycznym.

W efekcie, z równań (2.12), otrzymuje się trój-polowy funkcjonał

$$F_3(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{Q}, \mathbf{T}_a) \doteq \int_B [\mathcal{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \mathbf{T}_a \cdot \text{skew}(\mathbf{Q}^T \mathbf{F})] dV + F_{ext}. \quad (2.16)$$

Regularyzując powyższy funkcjonał względem \mathbf{T}_a uzyskujemy funkcjonał dwu-polowy

$$F_2(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{Q}) \doteq \int_B \left[\mathcal{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \frac{\gamma}{2} \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_a \right] dV + F_{ext}, \quad (2.17)$$

gdzie $\gamma \in (0, \infty)$ jest parametrem regularyzacyjnym. Podobne wyprowadzenie podano np. w pracach [Hughes, Brezzi, 1989] i [Simo, Fox, Hughes, 1992].

2.2 Kinematyka i odkształcenia powłoki

2.2.1 Baza odniesienia i bazy lokalne

Globalną kartezjańską bazę odniesienia oznaczono jako $\{\mathbf{i}_k\}$, $k = 1, 2, 3$.

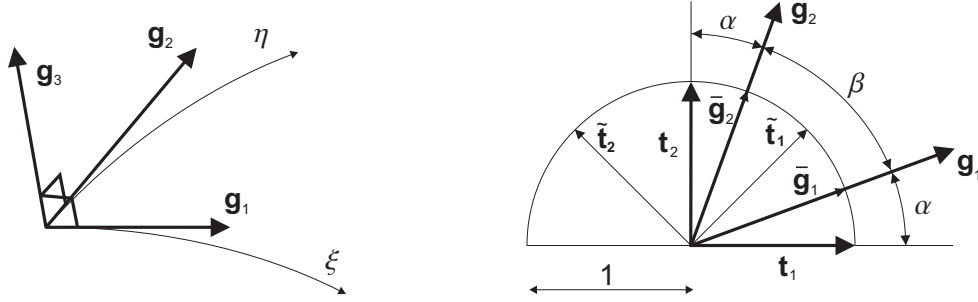
Wektor położenia powierzchni środkowej powłoki jest parametryzowany przez współrzędne naturalne $\xi, \eta \in [-1, +1]$, tzn. $\mathbf{y}_0(\xi, \eta)$. Dla konfiguracji początkowej, używane są dwie bazy lokalne zdefiniowane na powierzchni środkowej powłoki:

1. Lokalna baza naturalna $\{\mathbf{g}_k\}$ zdefiniowana jest następująco,

$$\mathbf{g}_1 \doteq \mathbf{y}_{0,\xi}, \quad \mathbf{g}_2 \doteq \mathbf{y}_{0,\eta}, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2, \quad (2.18)$$

patrz Rys.2.1a. W ogólnym przypadku, wektory \mathbf{g}_1 i \mathbf{g}_2 nie są do siebie prostopadłe i nie są jednostkowe. Tworzą one płaszczyznę styczną do powierzchni środkowej, a wektor \mathbf{g}_3 jest wektorem normalnym do tej płaszczyzny.

Naturalna baza lokalna jest konstruowana w punktach całkowania Gaussa oraz w środku elementu, wyznaczonym przez $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$.



Rysunek 2.1: a) Baza naturalna $\{\mathbf{g}_k\}$. b) Konstrukcja bazy ortonormalnej $\{\mathbf{t}_k\}$.

2. Lokalna baza ortonormalna $\{\mathbf{t}_k\}$ zdefiniowana jest następująco

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\mathbf{t}}_1 - \tilde{\mathbf{t}}_2), \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\mathbf{t}}_1 + \tilde{\mathbf{t}}_2), \quad \mathbf{t}_3 \doteq \bar{\mathbf{g}}_3, \quad (2.19)$$

gdzie wektory pomocnicze są zdefiniowane następująco

$$\tilde{\mathbf{t}}_1 = \frac{\bar{\mathbf{g}}_1 + \bar{\mathbf{g}}_2}{\|\bar{\mathbf{g}}_1 + \bar{\mathbf{g}}_2\|}, \quad \tilde{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{t}_3 \times \tilde{\mathbf{t}}_1. \quad (2.20)$$

Znormalizowane wektory bazy naturalnej oznaczono jako $\bar{\mathbf{g}}_k = \mathbf{g}_k / \|\mathbf{g}_k\|$.

Wzajemne położenie wektorów stycznych baz lokalnych (naturalnej i ortonormalnej) zostało pokazano na Rys.2.1b. Wektory \mathbf{g}_1 i \mathbf{t}_1 oraz \mathbf{g}_2 i \mathbf{t}_2 są równoodległe, a kąt między nimi oznaczono jako α .

Lokalna baza ortonormalna tej postaci była używana np. w pracach [Hughes, 1987] i [Huang, 1988].

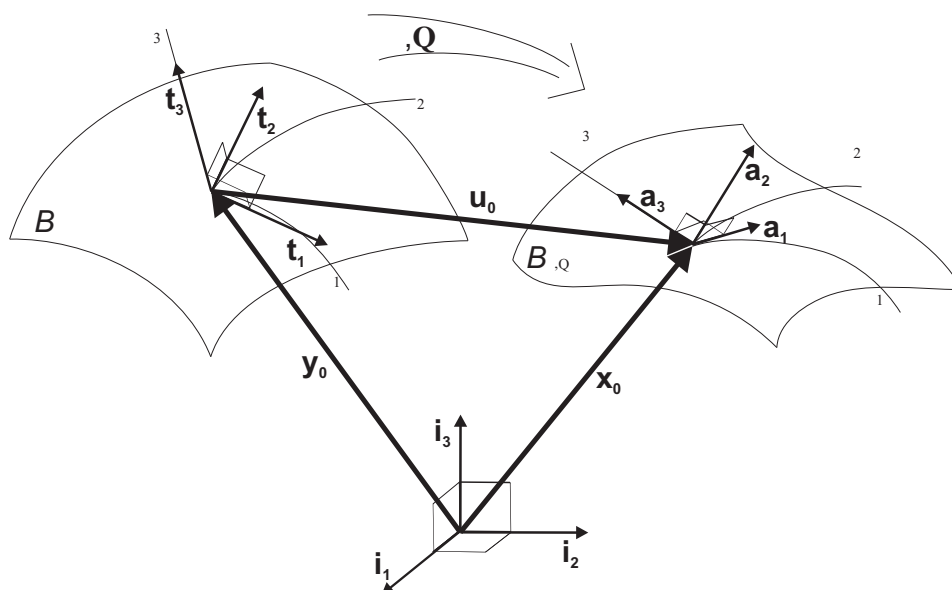
2.2.2 Hipoteza Reissnera

Za pomocą hipotezy Reissnera sformułowanie 3-wymiarowe jest redukowane do dwóch wymiarów, i wtedy wszystkie wielkości kinematyczne zdefiniowane są na powierzchni środkowej powłoki.

Konfiguracja początkowa (odniesienia) powłoki parametryzowana jest poprzez $\boldsymbol{\xi} = \{\xi^\alpha, 2\zeta/h\}$, $\alpha = 1, 2$, gdzie $\xi^\alpha \in [-1, +1]$ to współrzędne naturalne parametryzujące powierzchnię środkową, natomiast $\zeta \in [-h/2, +h/2]$ to współrzędna używana w kierunku normalnym do tej powierzchni, gdzie h oznacza grubość powłoki.

Położenie dowolnego punktu powłoki w konfiguracji odniesienia (nieodkształconej) jest wyrażone następująco

$$\mathbf{y}(\xi^\alpha, \zeta) = \mathbf{y}_0(\xi^\alpha) + \zeta \mathbf{t}_3(\xi^\alpha), \quad (2.21)$$



Rysunek 2.2: Ortonormalne bazy lokalne w konfiguracji początkowej i aktualnej.

gdzie \mathbf{y}_0 to położenie powierzchni odniesienia, a \mathbf{t}_3 jest wektorem normalnym do tej powierzchni. Dla konfiguracji aktualnej, wektor położenia definiowany jest za pomocą hipotezy Reissnera,

$$\mathbf{x}(\xi^\alpha, \zeta) = \mathbf{x}_0(\xi^\alpha) + \zeta \mathbf{Q}_0(\xi^\alpha) \mathbf{t}_3(\xi^\alpha), \quad (2.22)$$

gdzie \mathbf{x}_0 to położenie powierzchni środkowej po deformacji, a $\mathbf{Q}_0 \in SO(3)$ to tensor rotacji, stały po grubości powłoki.

Fizycznie oznacza to, że prosta linia prostopadła do powierzchni środkowej, po deformacji zostaje również prosta, ale już nie prostopadła do tej powierzchni, tylko obrócona zgodnie z $\mathbf{Q}_0(\xi^\alpha)$.

Hipoteza tej postaci prowadzi do równań uwzględniających odkształcenia ścinające poprzeczne, natomiast nie uwzględnia odkształceń w kierunku normalnym. Odkształcenia w kierunku normalnym uwzględnia się w zagadnieniach dla materiału sprężystego poprzez założenie płaskiego stanu naprężenia, patrz rozdział 2.3.3.

2.2.3 Aproksymacja rotacji

Dwupolowy funkcjonal $F_2(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{Q})$ wyrażony równ.(3.3) zawiera tensor rotacji \mathbf{Q} , i dlatego należy określić rząd jego aproksymacji po grubości powłoki.

W niniejszej pracy przyjęto założenie, że rotacja jest stała po ζ , tzn. $\mathbf{Q}(\xi^\alpha, \zeta) \approx \mathbf{Q}_0(\xi^\alpha)$, gdzie $\mathbf{Q}_0(\xi^\alpha)$ jest rotacją na powierzchni odniesienia. Aproksymacja rotacji w funkcjale $F_2(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{Q})$ jest taka sama jak w hipotezie Reissnera określonej równaniem (2.22).

Oznaczmy przez $\boldsymbol{\phi}$ kanoniczny pseudo-wektor rotacji. Tensor rotacji \mathbf{Q}_0 jest parametryzowany za pomocą $\boldsymbol{\phi}$ w następujący sposób,

$$\mathbf{Q}_0(\boldsymbol{\phi}) \doteq \mathbf{I} + \frac{\sin \omega}{\omega} \tilde{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^2, \quad \omega = \|\boldsymbol{\phi}\| = \sqrt{\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}} \geq 0, \quad (2.23)$$

gdzie $\tilde{\boldsymbol{\phi}} \doteq \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I} \in T_{\mathbf{I}}SO(3)$, tzn. tensor skośnie-symetryczny sprzężony z wektorem rotacji należy do przestrzeni stycznej do $SO(3)$ w $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$. Wyprowadzenie postaci tensora rotacji dla wektora kanonicznego umieszczono w Dodatku A.

2.2.4 Gradient przemieszczenia i gradient deformacji

W rozdziale tym przyjęto, że wszystkie wielkości pisane pogrubionym drukiem, oznaczają tablice składowych wektorów lub tensorów w bazie odniesienia $\{\mathbf{i}_k\}$.

Przemieszczenie dowolnego punktu powłoki jest różnicą wektorów położenia określonych wzorami (2.22) i (2.21), więc można zapisać

$$\mathbf{u}(\zeta) \doteq \mathbf{x}(\zeta) - \mathbf{y}(\zeta) = \mathbf{u}_0 + \zeta(\mathbf{a}_3 - \mathbf{t}_3), \quad (2.24)$$

gdzie wektory składowych są zdefiniowane następująco

$$\mathbf{u} \doteq \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} \doteq \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} \doteq \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}. \quad (2.25)$$

Gradient przemieszczenia może zostać wyrażony w następujący sposób,

$$\nabla \mathbf{u} \doteq \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^{-1}, \quad (2.26)$$

gdzie $\boldsymbol{\xi} \doteq \{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$, i $\xi^3 \doteq 2\zeta/h \in [-1, +1]$. Poza tym, gradient przemieszczenia względem współrzędnych naturalnych,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = [\mathbf{u}_{,\xi^1} \mid \mathbf{u}_{,\xi^2} \mid \mathbf{u}_{,\xi^3}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial u^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial u^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial u^3}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

i Jakobian przekształcenia między współrzędnymi globalnymi a naturalnymi,

$$\mathbf{J} \doteq \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = [\mathbf{g}_1 \mid \mathbf{g}_2 \mid \mathbf{g}_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial y^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial y^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial y^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial y^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial y^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial y^3}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Gradient przemieszczenia w lokalnej bazie ortonormalnej $\{\mathbf{t}_k\}$ uzyskuje się z gradientu przemieszczenia w bazie odniesienia $\{\mathbf{i}_k\}$ za pomocą transformacji

$$(\nabla \mathbf{u})_L = \mathbf{R}_0^T \nabla \mathbf{u} \mathbf{R}_0, \quad (2.29)$$

gdzie macierz rotacji $\mathbf{R}_0 \doteq [\mathbf{t}_1 | \mathbf{t}_2 | \mathbf{t}_3]$. Można także zdefiniować gradient przemieszczenia w bazie lokalnej w środku elementu,

$$(\nabla \mathbf{u})_{Lc} \doteq \mathbf{R}_{0c}^T \nabla \mathbf{u} \mathbf{R}_{0c}, \quad (2.30)$$

gdzie $\mathbf{R}_{0c} \doteq \mathbf{R}_0|_c = [\mathbf{t}_1^c | \mathbf{t}_2^c | \mathbf{t}_3^c]$ to macierz rotacji w środku elementu. W obliczeniach jest używany $(\nabla \mathbf{u})_{Lc}$, co sprawia, że elementy spełniają tzw. 'patch testy' z Rozdz.6.2.

Uwaga. Równanie (2.30) jest transformacją $\nabla \mathbf{u}$ do bazy lokalnej $\{\mathbf{t}_k\}$ w środku elementu. Warto zauważyć, że np. w pracy [Huang, Hinton, 1986] używa się różnych baz dla różnych składowych odkształceń (patrz str.90). Dla odkształceń membranowych interpolacje przeprowadzane są w ortogonalnej bazie lokalnej, podczas gdy odkształcenia poprzeczne interpolowane są w naturalnej bazie lokalnej, a następnie transformowane do bazy ortonormalnej. W niniejszej pracy wszystkie interpolacje wykonywane są w ortonormalnej bazie w środku elementu.

Gradient deformacji może zostać wyrażony w następujący sposób,

$$\mathbf{F} \doteq \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{J}^{-1}, \quad (2.31)$$

gdzie Jakobian \mathbf{J} został zdefiniowany w równ.(2.28).

2.2.5 Tensor odkształcenia Greena dla powłoki

W procesie deformacji ciała B , zdefiniowanej za pomocą funkcji deformacji $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{y})$, dowolny element liniowy (wektor) $d\mathbf{y}$ jest odwzorowywany na element liniowy $d\mathbf{x}$. Zmianę długości tego elementu definiuje się następująco

$$(ds)^2 \doteq d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.32)$$

gdzie $d\mathbf{x}$ oznacza ten sam element liniowy (wektor) w konfiguracji aktualnej. Wykorzystując gradient deformacji, $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{y}$, powyższy warunek można zapisać jako

$$(ds)^2 = d\mathbf{y} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}) d\mathbf{y}. \quad (2.33)$$

gdzie $\bar{\mathbf{F}} \doteq \mathbf{F}|_{\boldsymbol{\chi}=\mathbf{0}}$ to gradient odkształcenia dla zerowej funkcji deformacji, tzn. dla $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Wykorzystując powyższe równanie można zdefiniować tensor odkształcenia Greena

$$\mathbf{E} \doteq \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}). \quad (2.34)$$

Jest on symetryczny i sprzężony z 2-gim tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa \mathbf{S} poprzez energię odkształcenia. Tensor odkształcenia Greena jest również nazywany tensorem odkształcenia Lagrange'a.

Wykorzystując postać gradientu deformacji (2.31) otrzymuje się

$$2\mathbf{E} \doteq \mathbf{J}^{-T} \left(\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} - \left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-T} \left(\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \mathbf{J}^{-1} - \mathbf{I}, \quad (2.35)$$

gdzie wykorzystano definicję Jakobianu, $\partial \mathbf{y} / \partial \boldsymbol{\xi} = \mathbf{J}$. Dla $\partial \mathbf{x} / \partial \boldsymbol{\xi} \doteq [\mathbf{x}_{,\xi^1} \mid \mathbf{x}_{,\xi^2} \mid \mathbf{x}_{,\xi^3}]$, otrzymuje się symetryczną macierz w następującej postaci

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,\xi^1}^T \mathbf{x}_{,\xi^1} & \mathbf{x}_{,\xi^1}^T \mathbf{x}_{,\xi^2} & \mathbf{x}_{,\xi^1}^T \mathbf{x}_{,\xi^3} \\ \mathbf{x}_{,\xi^2}^T \mathbf{x}_{,\xi^1} & \mathbf{x}_{,\xi^2}^T \mathbf{x}_{,\xi^2} & \mathbf{x}_{,\xi^2}^T \mathbf{x}_{,\xi^3} \\ \mathbf{x}_{,\xi^3}^T \mathbf{x}_{,\xi^1} & \mathbf{x}_{,\xi^3}^T \mathbf{x}_{,\xi^2} & \mathbf{x}_{,\xi^3}^T \mathbf{x}_{,\xi^3} \end{bmatrix}.$$

Odkształcenie Greena w bazie lokalnej w środku elementu otrzymujemy za pomocą transformacji

$$2\mathbf{E}_c \doteq 2\mathbf{R}_{0c}^T \mathbf{E} \mathbf{R}_{0c} = (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{R}_{0c})^T \left(\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{R}_{0c}) - \mathbf{I}, \quad (2.36)$$

gdzie $\mathbf{R}_{0c} \doteq \mathbf{R}_0|_c = [\mathbf{t}_1^c \mid \mathbf{t}_2^c \mid \mathbf{t}_3^c]$ to macierz rotacji w środku elementu.

Zwykle, dla powłok, tensor Greena jest aproksymowany liniowo po ζ ,

$$\mathbf{E}(\zeta) \approx \boldsymbol{\varepsilon} + \zeta \boldsymbol{\kappa}, \quad (2.37)$$

gdzie powłokowe tensory odkształcenia są zdefiniowane następująco

$$\boldsymbol{\varepsilon} \doteq \mathbf{E}(\zeta)|_{\zeta=0}, \quad \boldsymbol{\kappa} \doteq \left. \frac{d\mathbf{E}(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=0}.$$

Człony wyższego rzędu są zwykle pomijane w pierwszym przybliżeniu energii odkształcenia powłoki, patrz np. [Pietraszkiewicz, 1979], [Pietraszkiewicz, 1984], [Pietraszkiewicz, 1989].

Uproszczona postać składowych odkształcenia Greena dla powłoki niezakrzywionej. Dla kinematyki Reissnera należy uwzględnić, że $\mathbf{x}(\xi^3) = \mathbf{x}_0 + \xi^3(h/2) \mathbf{a}_3$, więc powyższe wyrażenia są dość skomplikowane. Dlatego nie podano ich pełnej formy, pomimo, że jest ona używana w obliczeniach numerycznych.

Dużo prostszą postać niż tę wykorzystywaną w obliczeniach numerycznych można otrzymać dla założenia, że powłoka jest lokalnie płaska (niezakrzywiona). Wtedy, np. kowariantne składowe tensorów odkształcenia dla powłoki są następujące:

1. odkształcenia błonowe, $\varepsilon_{\alpha\beta} \doteq \mathbf{g}_\alpha \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{g}_\beta)$,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{11} &\doteq \mathbf{x}_{0,\xi} \cdot \mathbf{x}_{0,\xi} - \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1, & 2\varepsilon_{22} &\doteq \mathbf{x}_{0,\eta} \cdot \mathbf{x}_{0,\eta} - \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2, \\ 2\varepsilon_{12} &\doteq \mathbf{x}_{0,\xi} \cdot \mathbf{x}_{0,\eta} - \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

2. odkształcenia giętno-skretne, $\kappa_{\alpha\beta} \doteq \mathbf{g}_\alpha \cdot (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{g}_\beta)$,

$$\begin{aligned} 2\kappa_{11} &= \mathbf{x}_{0,\xi} \cdot \mathbf{a}_{3,\xi}, & 2\kappa_{22} &= \mathbf{x}_{0,\eta} \cdot \mathbf{a}_{3,\eta} \\ 2\kappa_{12} &= \kappa_{21} = \mathbf{x}_{0,\xi} \cdot \mathbf{a}_{3,\eta} + \mathbf{x}_{0,\eta} \cdot \mathbf{a}_{3,\xi} \end{aligned} \quad (2.39)$$

3. odkształcenia ścinające poprzeczne, $\varepsilon_{\alpha 3} \doteq \mathbf{g}_\alpha \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{g}_3)$,

$$2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} \doteq \mathbf{x}_{0,\xi} \cdot \mathbf{a}_3, \quad 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} \doteq \mathbf{x}_{0,\eta} \cdot \mathbf{a}_3, \quad (2.40)$$

4. odkształcenia poprzeczne normalne,

$$\varepsilon_{33} \doteq \mathbf{g}_3 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{g}_3) = 0, \quad \kappa_{33} \doteq \mathbf{g}_3 \cdot (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{g}_3) = 0, \quad (2.41)$$

gdzie \mathbf{g}_k ($k = 1, 2, 3$) są zdefiniowane w (2.18).

2.3 Związki konstytutywne dla powłoki

2.3.1 Energia odkształcenia dla powłoki

Dla materiału izotropowego typu Saint Venanta-Kirchhoffa, funkcja energii odkształcenia ma następującą formę

$$\mathcal{W}(\mathbf{E}) \doteq \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \mathbf{E})^2 + G \text{tr}(\mathbf{E}^2), \quad (2.42)$$

gdzie stałe Lamé'go mogą być wyrażone za pomocą modułu Younga E i współczynnika Poissona ν następująco

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.43)$$

Należy podkreślić, że $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ to praca wykonana przez naprężenie \mathbf{S} podczas deformacji z konfiguracji początkowej do aktualnej; praca ta jest niezależna od drogi deformacji. Materiał sprężysty, dla którego istnieje funkcja energii odkształcenia nazywany jest materiałem hipersprężystym bądź sprężystym w sensie Greena, patrz np. [Ogden, 2003], [Fung, 1989], [Green, Adkins, 1970].

Dla kinematyki Reissnera określonej równ.(2.22), tensor odkształcenia Greena może być przybliżony następująco: $\mathbf{E}(\zeta) \approx \boldsymbol{\varepsilon} + \zeta \boldsymbol{\kappa}$. Całkując analitycznie energię

odkształcenia (2.42) po grubości powłoki, w sposób zdefiniowany w Rozdz.4.2.1, otrzymuje się energię odkształcenia dla powłoki w następującej addytywnej formie

$$\mathcal{W}_{sh} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1, \quad (2.44)$$

gdzie

$$\mathcal{W}_0 \doteq h \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \mathcal{W}_1 \doteq \frac{h^3}{12} \mathcal{W}(\boldsymbol{\kappa}), \quad (2.45)$$

oznaczają energię związaną ze stanem błonowym i ścinaniem poprzecznym, oraz energię związaną ze stanem zgięciowym i skręceniem.

Z postacią energii odkształcenia określoną wzorem (2.42) wiążą się następujące ograniczenia:

- zakłada się, że konfiguracja początkowa jest konfiguracją naturalną, tzn. niezdeformowaną, bez naprężeń wstępnych;
- postać energii SVK jest odpowiednia tylko dla małych odkształceń. Nie wyklucza to jednak dużych przemieszczeń i rotacji powłoki.

2.3.2 Równania konstytutywne dla powłok

Równania równowagi z Rozdz.2.1.3 muszą zostać uzupełnione o tzw. równania konstytutywne. Charakteryzują one materiał definiując relację między naprężeniami a odkształceniami. Najważniejszą zasadą stosowaną przy formułowaniu równań konstytutywnych jest zasada materialnej obiektywności, tzn. muszą być one niezmiennicze dla zmian układu odniesienia, patrz np. [Hill, 1978].

Praca wirtualna nominalnego naprężenia \mathbf{P} może zostać przedstawiona jako

$$\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{C}, \quad (2.46)$$

gdzie \mathbf{S} to 2-gi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa, a $\mathbf{C} \doteq \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ to prawy tensor deformacji Cauchy-Greena. Ponieważ $\frac{1}{2} \delta \mathbf{C} = \delta \mathbf{E}$, to z równania (2.46) wynika, że tensor odkształcenia Greena $\mathbf{E} \doteq \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ jest sprzężony z \mathbf{S} . Przyjmując, gęstość energii odkształcenia na jednostkę niezdeformowanej objętości, $\bar{\mathcal{W}}$, jako funkcję \mathbf{C} , spełnia się warunek obiektywności. Wariacja energii odkształcenia jest równa

$$\delta \bar{\mathcal{W}}(\mathbf{C}) = \partial_{\mathbf{C}} \bar{\mathcal{W}}(\mathbf{C}) \cdot \delta \mathbf{C} = \partial_{\mathbf{E}} \mathcal{W}(\mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E}. \quad (2.47)$$

Z równania $\delta \mathcal{W} = \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E}$ uzyskuje się prawo konstytutywne zwane prawem Hooke'a

$$\mathbf{S} = \partial_{\mathbf{E}} \mathcal{W}(\mathbf{E}) = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2G \mathbf{E}. \quad (2.48)$$

Równanie to jest liniowe ze względu na \mathbf{E} , stąd też rozważane zagadnienie należy do *liniowej sprzężystości*, a materiał typu Saint Venanta-Kirchhoffa określany jest

jako liniowy. W liniowej teorii sprężystości dla małych odkształceń zależność między naprężeniami a odkształceniami może zostać wyrażona także za pomocą tensora sztywności (sprężystości)

$${}^4\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2}, \quad (2.49)$$

który jest tensorem czwartego rzędu. Wtedy związek konstytutywny ma postać

$$\mathbf{S} = {}^4\mathbf{C} \mathbf{E}. \quad (2.50)$$

Uwaga. Własności tensora sztywności ${}^4\mathbf{C}$ były badane szczegółowo np. w pracy [Truesdell, Noll, 1965]. Określono, że dla materiału anizotropowego liczba niezależnych stałych wynosi 21. Dla materiału symetrycznego względem powierzchni środkowej liczba ta zmniejsza się do 13, a dla materiałów ortotropowych do 9. Natomiast dla materiałów izotropowych, tensor sztywności zależy tylko od dwóch stałych materiałowych określonych równ.(2.43) i przyjmuje postać

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.51)$$

gdzie δ_{ij} to delta Kroneckera.

Dla powłoki, energia odkształcenia składa się z energii \mathcal{W}_0 , związanej z stanem błonowym i ścinaniem poprzecznym, oraz \mathcal{W}_1 , tzn. z energii związanej ze stanem zgięciowym i skręceniem, patrz równ.(2.45). Tensory sił i momentów przekrojowych definiuje się w następujący sposób

$$\mathbf{N} \doteq \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathbf{S}(\zeta) \mu(\zeta) d\zeta, \quad \mathbf{M} \doteq \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \zeta \mathbf{S}(\zeta) \mu(\zeta) d\zeta, \quad (2.52)$$

gdzie $\mu(\zeta) \doteq \det \mathbf{Z}(\zeta)$, a $\mathbf{Z}(\zeta)$ to tensor przeniesienia, patrz [Wisniewski, 1997], str.46. (Zwykle przyjmuje się w obliczeniach numerycznych, że $\mu(\zeta) \approx 1$.) Wtedy równania konstytutywne dla sił i momentów przekrojowych, zdefiniowane są analogicznie jak w równ.(2.48),

$$\mathbf{N} \doteq \partial_\varepsilon \mathcal{W}_0 = h [\lambda(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}], \quad \mathbf{M} \doteq \partial_\kappa \mathcal{W}_1 = \frac{h^3}{12} [\lambda(\text{tr} \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\kappa}]. \quad (2.53)$$

2.3.3 Warunek zerowego naprężenia normalnego

Z hipotezy kinematycznej Reissnera, równ.(2.22), otrzymuje się, że odkształcenie w kierunku normalnym do powierzchni środkowej powłoki jest równe zero, patrz równ.(2.41). Ponieważ jest to rezultat fizycznie nieprawdziwy, odkształcenie normalne dla zagadnień sprężystych jest zwykle wyliczane z pomocniczego warunku, że naprężenie normalne jest równe zero.

Dla sprężystego, izotropowego materiału w stałej temperaturze, prawo Hooke'a zgodnie z równaniem (2.48) ma postać

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2G\mathbf{E}. \quad (2.54)$$

Dla składowej normalnej \mathbf{S} w lokalnej bazie $\{\mathbf{t}_i\}$ otrzymamy następujące równanie konstytutywne

$$S_{33} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2GE_{33}. \quad (2.55)$$

Korzystając z warunku zerowego naprężenia normalnego, $S_{33} = 0$, można wyliczyć odkształcenia w kierunku normalnym \mathbf{t}_3 ,

$$E_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2G}(E_{11} + E_{22}). \quad (2.56)$$

Dla powłok stosuje się dwa warunki: zerowania się składowych normalnych sił i zerowania się momentów przekrojowych. Wykorzystując równania konstytutywne dla powłoki, równ.(2.53), zapisuje się warunki

$$N_{33} = 0, \quad M_{33} = 0, \quad (2.57)$$

z których otrzymuje się składowe normalne odkształceń membranowych i zgięciowych

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad \kappa_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2G}(\kappa_{11} + \kappa_{22}). \quad (2.58)$$

Powyższe składowe odkształcenia wykorzystuje się do modyfikacji energii odkształcenia powłoki, równ.(2.45).

Uwaga. Gdy jeden wymiar ciała jest zdecydowanie mniejszy niż dwa pozostałe, wtedy zwykle stosuje się warunki płaskiego stanu naprężenia (PSN), które dotyczą nie tylko naprężenia normalnego S_{33} , ale także naprężeń ścinających poprzecznych, S_{31} i S_{32} , dla których także przyjmuje się, że są równe zero. Dla powłok typu Reissnera wykorzystywany jest tylko warunek dla naprężenia normalnego S_{33} , podczas gdy naprężenia ścinające poprzeczne pozostają niezerowe.

2.3.4 Współczynnik korekcyjny dla ścinania poprzecznego

Wartość współczynnika korekcyjnego dla ścinania poprzecznego k określa się na wiele sposobów, których przegląd można znaleźć np. w [Woźniak (ed), 2001]. Poniżej przedstawiono wyprowadzenie współczynnika k dla założenia, że rozkład naprężeń membranowych po grubości powłoki jest liniowy.

Rozkład naprężeń ścinających po grubości powłoki można wyznaczyć z trójwymiarowych równań równowagi, zapisanych w ortonormalnej bazie lokalnej,

$$S_{1\beta,1} + S_{2\beta,2} + S_{3\beta,3} = 0, \quad (2.59)$$

$$S_{13,1} + S_{23,2} + S_{33,3} = 0, \quad (2.60)$$

gdzie $\beta = 1, 2$ odpowiadają współrzędnym S^β związanym z wektorami bazowymi \mathbf{t}_β , a 3 odpowiada współrzędnej $\zeta \in [-h/2, +h/2]$. Założono, że siły masowe są zerowe.

Zakładamy, że naprężenia membranowe są liniową funkcją współrzędnej po grubości ζ ,

$$S_{\alpha\beta}(\zeta) = S_{\alpha\beta}^0 + \zeta S_{\alpha\beta}^1, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.61)$$

Wstawiając powyższą postać naprężeń do pierwszego z równań równowagi (2.59) i całkując po ζ , otrzymuje się naprężenia ścinające w postaci

$$S_{3\beta}(\zeta) = A - \zeta S_{\alpha\beta,\alpha}^0 - \frac{\zeta^2}{2} S_{\alpha\beta,\alpha}^1. \quad (2.62)$$

Do określenia stałej całkowania A , wykorzystać można warunki brzegowe na górnej i dolnej powierzchni ograniczającej powłokę, $S_{3\beta}(\pm \frac{h}{2}) = 0$. Uwzględniając jeden z tych warunków, wylicza się stałą A , i otrzymuje

$$S_{3\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) S_{\alpha\beta,\alpha}^1 = \frac{h^2}{8} (1 - \bar{\zeta}^2) S_{\alpha\beta,\alpha}^1, \quad (2.63)$$

gdzie $\bar{\zeta} \doteq 2\zeta/h \in [-1, 1]$.

Można zauważyć, że rozkład naprężeń ścinających po grubości powłoki jest paraboliczny. Z drugiej strony, dla kinematyki Reissnera odkształcenia ścinające poprzeczne są liniowe po ζ , a więc nie odpowiadają one parabolicznemu rozkładowi naprężeń ścinających. Jednakże można uwzględnić paraboliczność naprężeń ścinających, wprowadzając współczynnik korekcyjny k .

Dla rozkładu naprężeń ścinających poprzecznych z równ.(2.63) otrzymuje się następujące siły i momenty przekrojowe

$$N_{3\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} S_{3\beta}(\zeta) d\zeta = \frac{h^3}{12} S_{\alpha\beta,\alpha}^1, \quad (2.64)$$

$$M_{3\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \zeta S_{3\beta}(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.65)$$

Wyliczając $S_{\alpha\beta,\alpha}^1$ z równ.(2.71), można wyrazić naprężenia ścinające (2.63) w zależności od sił poprzecznych

$$S_{3\beta}(\bar{\zeta}) = \frac{3}{2h} (1 - \bar{\zeta}^2) N_{3\beta}. \quad (2.66)$$

Dla materiału liniowo sprężystego (SVK), gęstość energii komplementarnej wyraża się następująco,

$$\mathcal{W}_c \doteq \frac{1+\nu}{2E} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2S_{21}^2 + 2S_{31}^2 + 2S_{32}^2) - \frac{\nu}{2E} (S_{11} + S_{22} + S_{33})^2, \quad (2.67)$$

gdzie uwzględniona jest symetria składowych naprężenia. Rozważany będzie człon zależący wyłącznie od naprężeń ścinających poprzecznych,

$$\mathcal{W}_c^{3\beta} \doteq \frac{1+\nu}{2E} 2S_{3\beta}^2 = \frac{1}{2G} S_{3\beta}^2, \quad \beta = 1, 2. \quad (2.68)$$

Wykorzystując równ.(2.66), otrzymuje się powłokowy odpowiednik energii $\mathcal{W}_c^{3\beta}$,

$$\Sigma_c^{3\beta} \doteq \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathcal{W}_c^{3\beta}(\zeta) d\zeta = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \mathcal{W}_c^{3\beta}(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} = \frac{6}{5h} \frac{1}{2G} N_{3\beta}^2. \quad (2.69)$$

Wtedy z odwrotnego równania konstytutywnego dla powłoki wynika następująca relacja,

$$2\varepsilon_{3\beta} \doteq \frac{\partial \Sigma_c^{3\beta}}{\partial N_{3\beta}} = \frac{6}{5h} \frac{1}{G} N_{3\beta}, \quad (2.70)$$

z której oblicza się

$$N_{3\beta} = \frac{5}{6} \frac{E}{2(1+\nu)} h \varepsilon_{3\beta} = \frac{5}{6} (2G) h \varepsilon_{3\beta}. \quad (2.71)$$

Zauważmy, że w wyrażeniu tym występuje współczynnik $\frac{5}{6}$. Tak więc, dla powłok sprężystych, równanie konstytutywne, definiujące zależność między przekrojową siłą tnącą $N_{3\beta}$ a odkształceniem ścinającym poprzecznym $\varepsilon_{3\beta}$, zapisuje się następująco

$$N_{3\beta} = k (2G) h \varepsilon_{3\beta}, \quad (2.72)$$

gdzie $k = \frac{5}{6}$ to *współczynnik korekcyjny dla ścinania poprzecznego*, uwzględniający paraboliczność naprężeń ścinających po ζ .

Otrzymana powyżej wartość współczynnika korekcyjnego jest najczęściej stosowana w literaturze, patrz np. [Zienkiewicz, Taylor, 2005], [Huang, 1988], [Hughes, 1987] i [Belytschko, Liu, Moran, 2000]. Można także wyprowadzić współczynnik korekcyjny dla równania konstytutywnego dla momentu $M_{3\beta}$, jednak jest on rzadko stosowany, ponieważ w elementach powłokowych najczęściej pomija się energię od $\kappa_{3\beta}$, jako wielkość drugiego rzędu.

Energia odkształceń ścinających poprzecznych z uwzględnieniem współczynnika k ma następującą postać,

$$\mathcal{W}_0^{3\beta} \doteq \frac{1}{2} N_{3\beta} \varepsilon_{3\beta} = \frac{1}{2} k (2G) h \varepsilon_{3\beta}^2. \quad (2.73)$$

Rozdział 3

Metoda elementów skończonych dla powłok

3.1 Funkcjonał dla powłok zawierający rotację normalną

Funkcjonał dla trójwymiarowego kontinuum z równania (2.17) został w niniejszej pracy zmodyfikowany dla powłok w następujący sposób:

1. użyto hipotezę kinematyczną Reissnera, zdefiniowaną w Rozdz.2.2.
2. równanie więzów na rotacje zredukowano do jednego równania skalarne, w którym występuje składowa wektora rotacji normalna do powierzchni środkowej powłoki. To uproszczenie omówiono szczegółowo poniżej.

Rozważmy składowe równania więzów na rotacje (2.1) w lokalnej ortonormalnej bazie $\{\mathbf{t}_i\}$, patrz równ.(2.19) oraz Rys.2.2. Składowe α_3 ($\alpha = 1, 2$) tego równania są zwykle pomijane, ale składowe $(\cdot)_{12}$ i $(\cdot)_{21}$ dla $\zeta = 0$ prowadzą do równania więzów dla rotacji normalnej w następującej postaci

$$\mathbf{x}_{0,1} \cdot \mathbf{a}_2 - \mathbf{x}_{0,2} \cdot \mathbf{a}_1 = 0, \quad (3.1)$$

gdzie $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{Q}_0 \mathbf{t}_\alpha$ są wektorami obróconej bazy ortonormalnej $\{\mathbf{a}_i\}$, co pokazano na Rys.2.2. Oznaczając $C_d \doteq \mathbf{x}_{0,1} \cdot \mathbf{a}_2 - \mathbf{x}_{0,2} \cdot \mathbf{a}_1$, można zapisać równanie (3.1) jako $C_d = 0$, a funkcję kary jako

$$F_{drill} \doteq \int_B \frac{\gamma}{2} \text{skew}(\mathbf{Q}_0^T \mathbf{F}_0) \cdot \text{skew}(\mathbf{Q}_0^T \mathbf{F}_0) dV \approx \int_B \frac{\gamma}{2} C_d^2 dV. \quad (3.2)$$

Zregularyzowany funkcyjonał (2.17) zapiszemy dla powłoki w postaci

$$F_2(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{Q}) \doteq \int_B \left[\mathcal{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \frac{\gamma}{2} C_d^2 \right] dV + F_{ext}. \quad (3.3)$$

Wartość parametru regularyzującego γ ustalana jest na podstawie testów numerycznych, patrz Rozdz.4.3.

3.2 Równania równowagi MES i operator styczny

Niech dowolny funkcjonal odnoszący się do powłoki będzie zdefiniowany następująco,

$$(\cdot)_{sh} \doteq \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\cdot) \mu d\zeta, \quad (3.4)$$

gdzie (\cdot) jest wielkością odnoszącą się do ciała trójwymiarowego (3D), natomiast $(\cdot)_{sh}$ jest wielkością dwuwymiarową odnoszącą się do powierzchni odniesienia (środkowej). Ponadto, $\mu \doteq \det \mathbf{Z}$, gdzie \mathbf{Z} jest tensorem przesunięcia, patrz równ.(2.52).

Poniżej, najpierw zostaną zdefiniowane powłokowe odpowiedniki wszystkich składników funkcjonału F_2 określonego w równ.(3.3) w sposób podany w równ.(3.4), a następnie zostanie obliczona ich wariacja,

$$\delta F_{2sh} = \delta \mathcal{W}_{sh} + \delta (F_{drill})_{sh} - \delta (F_{ext})_{sh}, \quad (3.5)$$

gdzie funkcjonal wynikający z równania więzów na rotacje jest określony w równ.(3.2).

Poniżej rozpatrywane są oddzielnie poszczególne człony równ.(3.5).

(i) Praca wirtualna 2-go tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa dla ciała trójwymiarowego określona jest jako $\delta \mathcal{W} = \int_V \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} dV$, gdzie odkształcenie Greena \mathbf{E} i 2-gi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa \mathbf{S} są sprzężoną parą. Dla powłoki, zgodnie z założeniami kinematycznymi, odkształcenie jest wielomianową funkcją współrzędnej wzdłuż grubości powłoki ζ , czyli $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\zeta)$. Więc naprężenie jest również funkcją ζ , czyli $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\zeta)$.

Separując całkowanie po grubości powłoki od całkowania po powierzchni odniesienia A , otrzymuje się,

$$\delta \mathcal{W} = \int_A \delta \mathcal{W}_{sh} dA, \quad (3.6)$$

gdzie praca wirtualna naprężenia w powłoce wynosi

$$\delta \mathcal{W}_{sh} \doteq \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \mathbf{E}(\zeta) \cdot \mathbf{S}(\zeta) \mu d\zeta. \quad (3.7)$$

Wykorzystując operator styczny dla odkształcenia $\mathbf{B} \doteq \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{q}$, można zapisać:

$$\delta \mathbf{E}(\zeta) = \mathbf{B}(\zeta) \delta \mathbf{q}, \quad \delta \mathcal{W}_{sh} = \delta \mathbf{q} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathbf{B}^T(\zeta) \mathbf{S}(\zeta) \mu d\zeta. \quad (3.8)$$

(ii) Wariacja funkcjonału związanego z obrotem wokół normalnej, wynikającego z równania więzów na rotacje jest postaci

$$\delta (F_{drill})_{sh} \doteq \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} F_{drill} \mu d\zeta = h \frac{\gamma}{2} \delta C_d^2 = h(\gamma C_d) \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{b}_d, \quad (3.9)$$

gdzie operator styczny wynosi $\mathbf{b}_d \doteq \partial C_d / \partial \mathbf{q}$.

(iii) Praca wirtualna obciążenia zewnętrznego na dolną i górną powierzchnię powłoki wynosi

$$\delta(F_{ext})_{sh} = \delta\mathbf{q} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{m}} \end{array} \right\}, \quad (3.10)$$

gdzie $\hat{\mathbf{p}}$ i $\hat{\mathbf{m}}$ to zewnętrzne siły i momenty typu powłokowego.

Zapisując powyższe wariacje funkcjonałów wg równania (3.5) w jedną całość, otrzymuje się postać całkową (słabą) równania równowagi

$$\delta\mathbf{q} \cdot \int_A \left[\mathbf{B}^T \mathbf{S} + h(\gamma C_d) \mathbf{b}_d - \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{m}} \end{array} \right\} \right] dA = 0. \quad (3.11)$$

W równaniu tym można wprowadzić wektory używane w MES,

$$\int_A \left[\mathbf{B}^T(\mathbf{q}) \mathbf{S}(\mathbf{q}) + h(\gamma C_d) \mathbf{b}_d \right] dA \xrightarrow{\text{(MES)}} \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad \int_A \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{m}} \end{array} \right\} dA \xrightarrow{\text{(MES)}} \mathbf{p}, \quad (3.12)$$

gdzie \mathbf{f} jest wektorem sił wewnętrznych uwzględniającym równanie więzów na rotację normalną, a \mathbf{p} jest wektorem obciążeń zewnętrznych typu powłokowego. Wtedy, wektor residuum \mathbf{r} dla całego elementu jest zdefiniowany następująco

$$\mathbf{r} \doteq \mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{p}. \quad (3.13)$$

Wykorzystując powyższe wektory, warunek stacjonarności $\delta F_{2sh} = 0$ zapiszemy w postaci

$$\delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (3.14)$$

Są to równania równowagi zapisane w postaci całkowej (słabej). Oznaczając, $G(\mathbf{q}) \doteq \delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$, i po przeprowadzeniu linearyzacji G w $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$, otrzymuje się

$$G(\mathbf{q}) \approx G(\bar{\mathbf{q}}) + DG(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \Delta\mathbf{q}, \quad (3.15)$$

gdzie $DG(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \Delta\mathbf{q}$ to pochodna kierunkowa G w kierunku $\Delta\mathbf{q}$. Wtedy równanie $G(\mathbf{q}) = 0$, przyjmuje następującą postać,

$$G(\bar{\mathbf{q}}) + DG(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \Delta\mathbf{q} = 0, \quad (3.16)$$

gdzie operator styczny \mathbf{K} : $\delta\mathbf{q}^T \mathbf{K} \Delta\mathbf{q} \doteq DG(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \Delta\mathbf{q}$. Równanie powyższe jest wykorzystywane do sformułowania metody Newtona. Proces znajdowania stacjonarności funkcjonałów jest związany z wczesnymi pracami [Rayleigh, 1870] i [Ritz, 1908].

Można zauważyć, że zdyskretyzowany i scałkowany funkcjonał (3.3) jest wielomianem algebraicznym stopni swobody q_i ($i = 1, \dots, N$). Warunek stacjonarności tego wielomianu względem wektora stopni swobody (niewiadomych) $\mathbf{q} \doteq \{q_1, \dots, q_N\}$ prowadzi do układu równań,

$$\mathbf{r} \doteq \frac{\partial F_{2sh}}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial F_{2sh}}{\partial q_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F_{2sh}}{\partial q_N} \end{array} \right\} = \mathbf{0}. \quad (3.17)$$

Operator styczny \mathbf{K} wyznaczony jest przez drugą pochodną

$$\mathbf{K} \doteq \frac{\partial^2 F_{2sh}}{\partial \mathbf{q}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial q_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial r_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial r_N}{\partial q_N} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

i jest to macierz symetryczna, tzn. $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$.

Wyrażenia algebraiczne potrzebne do obliczenia wektora \mathbf{r} i macierzy \mathbf{K} mogą być otrzymane za pomocą np. różniczkowania symbolicznego opisanego w Rozdz.3.3. Następnie, są one całkowane numerycznie za pomocą np. metody Gaussa dla każdego elementu z osobna i agregowane dla wszystkich elementów, w celu utworzenia globalnego wektora residuum i macierzy sztywności. Nieliniowy układ równań jest rozwiązywany metodami omówionymi w Rozdz.3.4.

3.3 Obliczenia symboliczne w MES

W ciągu ostatnich lat nastąpił wzrost zainteresowania użyciem przekształceń symbolicznych do wyprowadzania i analizy elementów skończonych. Stało się to możliwe dzięki systemom symbolicznych algebraicznych przekształceń, takim jak np. *Mathematica* ([Wolfram, 1991], [Mathematica]), *AceGen* ([Korelc, 2002],[AceGen]), *Finger* ([Wang, 1986]) i *Sinapse* ([Kant, 1993]). Dzięki nim można wyprowadzić macierze i wektory dla elementu wykorzystując funkcje ułatwiające przekształcenia algebraiczne i różniczkowanie. Wynik tych operacji jest następnie optymalizowany i tłumaczony na język programowania w którym napisane są pozostałe procedury numeryczne dla metody elementów skończonych, więc może być z nimi bezpośrednio łączony.

Aby otrzymać wielkości takie jak gradienty czy hesjany, wymagane są skomplikowane numeryczne przekształcenia oraz różniczkowanie. Dzięki obliczeniom symbolicznym, w tym automatycznemu różniczkowaniu, otrzymać można pochodne algorytmów, patrz np. w pracy [Griewank, 1989]. Procedura automatycznego różniczkowania została zaimplementowana np. w systemie *AceGen*, który został wykorzystany w niniejszej pracy.

Automatyczne różniczkowanie polega na wygenerowaniu wyrażeń na pochodne funkcji złożonych przy wykorzystaniu formuł na pochodne funkcji prostych. Tworzony jest wektor nowych pomocniczych zmiennych, które są zdefiniowane w ten sposób, aby sukcesywnie upraszczać dane wyrażenie na pochodną funkcji. Tak skonstruowana funkcja, dzięki dodatkowym zmiennym, może być różniczkowana symbolicznie (ze względu na pomocnicze funkcje) np. w środowisku programistycznym *Mathematica*.

Automatyczne różniczkowanie może zostać przeprowadzone na dwa sposoby: ”w przód” oraz ”wstecz” (ang. *forward and backward*). Najprościej ilustruje to przykład zaczerpnięty z programu *AceGen*, który pokazuje różniczkowanie na dwa sposoby funkcji złożonej, $f_3(q_i, f_1(q_i), f_2(q_i, f_1(q_i)))$, zależnej od zmiennych q_i , $i = 1, \dots, n$.

Różniczkowanie "w przód" funkcji f_3 prowadzi do następujących wyrażeń:

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(q_i), & \frac{\partial v_1}{\partial q_i} &= \frac{\partial f_1}{\partial q_i}, & i &= 1, \dots, n \\ v_2 &= f_2(q_i, v_1), & \frac{\partial v_2}{\partial q_i} &= \frac{\partial f_2}{\partial q_i} + \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_i}, & i &= 1, \dots, n \\ v_3 &= f_3(q_i, v_1, v_2), & \frac{\partial v_3}{\partial q_i} &= \frac{\partial f_3}{\partial q_i} + \frac{\partial f_3}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_i} + \frac{\partial f_3}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_i}, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Zmienne v_1, v_2, v_3 są dodatkowymi funkcjami tworzonymi podczas procesu.

Różniczkowanie "wstecz" wygląda dla tego przykładu następująco,

$$\begin{aligned} v_3 &= f_3(q_i, v_1, v_2), & \bar{v}_3 &= \frac{\partial v_3}{\partial v_3} = 1, \\ v_2 &= f_2(q_i, v_1), & \bar{v}_2 &= \frac{\partial v_3}{\partial v_2} = \frac{\partial f_3}{\partial v_2} \bar{v}_3, \\ v_1 &= f_1(q_i), & \bar{v}_1 &= \frac{\partial v_3}{\partial v_1} = \frac{\partial f_3}{\partial v_1} \bar{v}_3 + \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \bar{v}_2, \\ q_i & & \frac{\partial v_3}{\partial q_i} &= \frac{\partial f_3}{\partial q_i} \bar{v}_3 + \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \bar{v}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \bar{v}_1, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Różniczkowanie "wstecz" daje efektywniejsze algorytmy dla dużych n , ale jest bardziej czasochłonne.

Podejście symboliczne znacznie ułatwia sformułowanie elementu skończonego, i to nie tylko z powodu wysokiej efektywności automatycznie wygenerowanego i zoptymalizowanego kodu, ale także z punktu widzenia przejrzystości zastosowanych w opisie formuł, które są zapisywane bardziej zwięźle niż w tradycyjnych językach, takich jak np. Fortran.

3.4 Metody rozwiązania równań nieliniowych

W poprzednich rozdziałach zdyskretyzowano równania równowagi powłoki, co doprowadziło do układu równań algebraicznych postaci

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

Nieliniowości w równaniu (3.21) mogą mieć źródło w prawie konstytutywnym, bądź też mieć charakter geometryczny.

W tym pierwszym przypadku mówi się o nieliniowości fizycznej, czyli braku liniowej proporcjonalności pomiędzy naprężeniami \mathbf{S} a odkształceniami \mathbf{E} . Z tym typem nieliniowości mamy do czynienia np. dla materiałów sprężystych gumopodobnych (nieściśliwych) i w zagadnieniach plastyczności. Użyty w niniejszej pracy sprężysty materiał typu Saint Venanta-Kirchhoffa jest liniowy, patrz równanie konstytutywne (2.48).

W przypadku nieliniowości geometrycznej, występuje brak proporcjonalności pomiędzy odkształceniami \mathbf{E} a zmiennymi kinematycznymi (przemieszczeniami i parametrami rotacyjnymi) \mathbf{q} . Duże przemieszczenia i duże rotacje powłok wymagają uwzględnienia tego typu nieliniowości. Umożliwia to np. tensor odkształcenia Greena, równ.(2.34), który jest wykorzystywany w niniejszej pracy.

Poniżej omówiono dwie metody rozwiązywania równań nieliniowych: (1) metodę Newtona, i (2) metodę długości łuku, której elementem składowym jest metoda Newtona.

3.4.1 Metoda Newtona

Dla rozwiązania układu równań algebraicznych MES dla zagadnień nieliniowych najczęściej stosowana jest metoda Newtona, której zbieżność jest kwadratowa. Nazywana jest ona również metodą Newtona-Raphsona, historyczne korzenie metody mówiono np. w pracy [Bicanic, Johnson, 1979]. Metoda ta jest stosowana także w niniejszej pracy.

Niech i oznacza numer iteracji. Aby rozwiązać równ.(3.21) należy je zlinearyzować, czyli obliczyć pochodną kierunkową (patrz np. [Dennis, Schnabel, 1983],[Marsden, Hughes, 1983])

$$\mathbf{r}^{i+1} \approx \mathbf{r}^i + \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}^i = \mathbf{r}^i + \mathbf{K}^i \Delta \mathbf{q}^i = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

gdzie

$$\mathbf{K}^i = \mathbf{K}(\mathbf{q}^i) = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}^i}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.23)$$

to operator styczny (macierz sztywności). W zależności od zagadnienia mechanicznego i stosowanych algorytmów, może być ona symetryczna lub niesymetryczna. Dla opisywanych w niniejszej pracy zagadnień i stosowanych metod obliczeniowych \mathbf{K} jest symetryczna. W przypadku niesymetryczności, czasami stosowana jest symetryzacja, patrz np. [Simo, 1992], ale, w ogólnym przypadku, metoda ta nie powinna być stosowana.

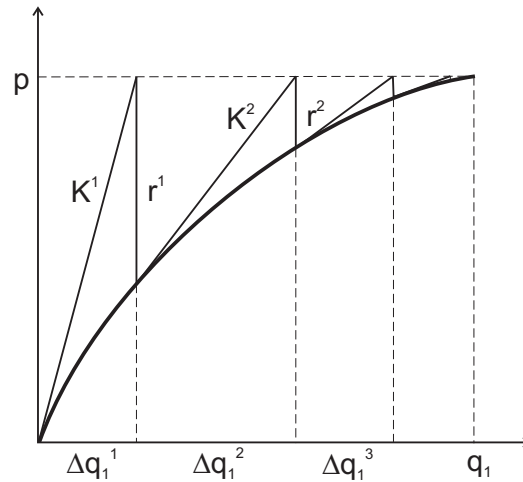
W metodzie Newtona stosuje się następujący proces iteracyjny, polegający na znalezieniu kolejnych przyrostów $\Delta \mathbf{q}$,

$$\mathbf{K}^i \Delta \mathbf{q}^i = -\mathbf{r}^i, \quad \mathbf{q}^i = \mathbf{q}^{i-1} + \Delta \mathbf{q}^i. \quad (3.24)$$

Jako pierwsze przybliżenie stosuje się najczęściej zero lub rozwiązanie otrzymane dla poprzedniego przyrostu obciążenia. Iteracje kontynuowane są do uzyskania zbieżności w odpowiedniej normie, zgodnie z przyjętą tolerancją. Dla normy energetycznej stosuje się np. warunek

$$\Delta \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{r}^i < 10^{-15}. \quad (3.25)$$

Dla zadania liniowego wykonywana jest tylko jedna iteracja. Łączne rozwiązanie otrzymuje się obliczając $\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{q}^i$. Graficzne przedstawienie kolejnych iteracji dla jednego kroku metody Newtona dla jednej zmiennej pokazano na Rys.3.1. Aby uzyskać pełną krzywą obciążenie-przemieszczenie, należy metodę Newtona stosować sukcesywnie zwiększając obciążenie.



Rysunek 3.1: Metoda Newtona dla jednej zmiennej. Zbieżność iteracji w jednym kroku.

3.4.2 Metoda długości łuku

W wielu zadaniach nieliniowych zachodzi potrzeba śledzenia ścieżki równowagi także po przekroczeniu punktu granicznego, co wymaga ujemnego przyrostu obciążenia. Można to zaobserwować w rozwiązaniach zadań testowych, np. w Rozdz. 6.9, 6.11, 6.14, lub 6.15.

Aby uzyskać rozwiązania w tych przypadkach stosuje się metody kontynuacyjne. Istnieje obszerna literatura z tego zakresu, skupiająca się na poszczególnych aspektach tych metod, patrz np. [Riks, 1970], [Riks, 1972], [Wempner, 1971], [Bergan, Horrigmoe, Krakeland, Soreide, 1978], [Crisfield, 1980], [Ramm, 1981], [Waszczyszyn, 1981], [Allgower, Georg, 1990]. W metodach kontynuacyjnych steruje się: przemieszczeniami, mnożnikiem obciążenia, bądź też długością łuku.

W niniejszej pracy do rozwiązania szeregu zadań testowych użyto metody długości łuku (ang. *arc-length method*) z uaktualnianą płaszczyzną normalną (ang. *updated normal plane*). Została ona rozwinięta w pracach [Riks, 1970], [Riks, 1972], [Wempner, 1971] i [Ramm, 1981].

Rozważmy przestrzeń rozwiązań rozszerzoną o jedną zmienną μ , zwaną mnoż-

nikiem obciążenia. W przestrzeni $\{\mathbf{q}, \mu\}$ równanie (3.14) przyjmuje postać

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, \mu) \doteq \mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mu \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (3.26)$$

Podobnie, jak dla metody Newtona, można zlinearyzować to równanie otrzymując

$$\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{r}^i + \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}^i - \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mu} \Delta \mu^i = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Po oznaczeniu

$$\mathbf{K}^i = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{p} = -\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mu}, \quad (3.28)$$

można równanie zlinearyzowane przepisać w postaci

$$\mathbf{K}^i \Delta \mathbf{q}^i - \mathbf{p} \Delta \mu^i = -\mathbf{r}^i. \quad (3.29)$$

Niewiadomymi są $\Delta \mathbf{q}^i$ i $\Delta \mu^i$, więc równ.(3.29) musi zostać uzupełnione o jedno równanie skalarne łączące $\Delta \mathbf{q}^i$ oraz $\Delta \mu^i$,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}^1 \cdot \Delta \mathbf{q}^i + \mu^1 \Delta \mu^i p^2 &= l^2 \quad \text{dla } i = 1 \\ \mathbf{q}^1 \cdot \Delta \mathbf{q}^i + \mu^1 \Delta \mu^i p^2 &= 0 \quad \text{dla } i > 1 \end{aligned} \right\}, \quad (3.30)$$

gdzie l to długość łuku, $p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$. Dla iteracji $i = 1$ zostaje określony parametr długości łuku, i jest to faza predykcji, natomiast dla $i > 1$ ograniczeniem jest warunek prostotliwości i jest to faza korekcji. Jako pierwsze przybliżenie stosuje się $\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}$ i $\mu^0 = 0$, a kolejne uzyskuje się iterując

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^i &= \mathbf{q}^{i-1} + \Delta \mathbf{q}^i, & \mathbf{q} &= \sum_{i=1}^{i=n} \Delta \mathbf{q}^i, \\ \mu^i &= \mu^{i-1} + \Delta \mu^i, & \mu &= \sum_{i=1}^{i=n} \Delta \mu^i. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Wprowadzając oznaczenie $\Delta \mathbf{q}^p = (\mathbf{K}^i)^{-1} \mathbf{p}$ oraz $\Delta \mathbf{q}^r = (\mathbf{K}^i)^{-1} \mathbf{r}^i$ można, dla fazy korekcji, zapisać rozwiązanie równania (3.29) jako

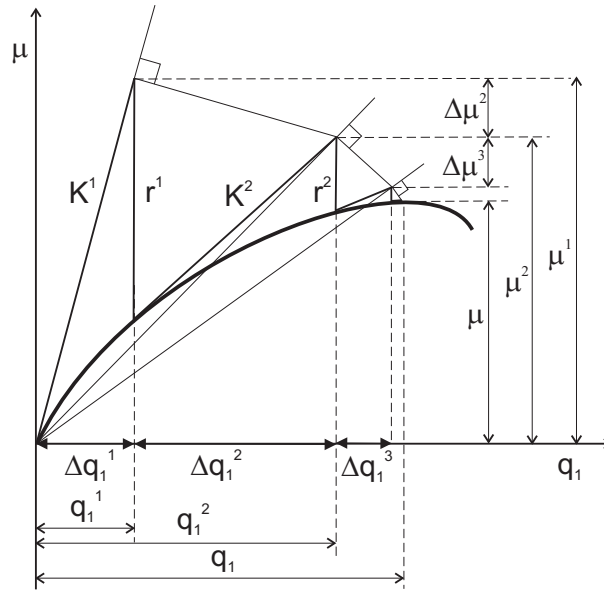
$$\Delta \mathbf{q}^i = \Delta \mu^i \Delta \mathbf{q}^p + \Delta \mathbf{q}^r, \quad (3.32)$$

Wstawiając to wyrażenie do równania (3.30) otrzymuje się

$$\Delta \mu^i = -\frac{\mathbf{q}^1 \cdot \Delta \mathbf{q}^r}{\mathbf{q}^1 \cdot \Delta \mathbf{q}^p + p^2 \mu^1}. \quad (3.33)$$

Ilustrację graficzną dla jednego kroku metody długości łuku z uaktualnianą płaszczyzną normalną przedstawia Rys.3.2.

Wielkość mnożnika obciążenia oraz przyrost zmiennych niezależnych kontrolowane są przez parametr długości łuku l . Zmienia się on w każdym kroku metody



Rysunek 3.2: Jeden krok metody długości łuku dla zmiennych $\{q_1, \mu\}$.

Newtona podczas śledzenia ścieżki równowagi. Wartość początkowa dla pierwszego kroku ($n = 1$) powinna zostać ustalona przez użytkownika bezpośrednio, lub za pomocą mnożnika obciążenia, zgodnie z równaniem

$$\mu_1^1 = \pm \frac{l_1}{\sqrt{\Delta q_1^p \cdot \Delta q_1^p + 1}}. \quad (3.34)$$

Dla następnych kroków ($n > 0$) długość łuku l_n modyfikowana jest na podstawie szybkości zbieżności w poprzednim kroku

$$\Delta \mu_{req} = \sqrt{\frac{i_{req}}{i_n}} \Delta \mu_n, \quad (3.35)$$

gdzie i_{req} oznacza pożądaną liczbę iteracji w jednym kroku.

W niektórych zadaniach mogą pojawić się trudności z obliczeniem długości łuku i dobrym uwarunkowaniem równań. Przyczyną jest zróżnicowanie rzędów wielkości zmiennych niezależnych \mathbf{q} (przesunięć, obrotów, czy ich pochodnych). Aby pomyślnie zaimplementować metodę długości łuku niezbędne jest skalowanie przestrzeni rozwiązań, aby $\{\mathbf{q}, \mu\}$ były wielkościami tego samego rzędu. Skalowanie takie można przeprowadzić na wiele sposobów, patrz np. prace [Chroscielewski, Nolte 1985], [Schweizerhof, 1989]. W metodzie długości łuku zaimplementowanej np. w programie Abaqus [ABAQUS] wprowadza się następujące przeskalowane zmienne:

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{\max|q_i|}, \quad \bar{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^{1/2}}, \quad (3.36)$$

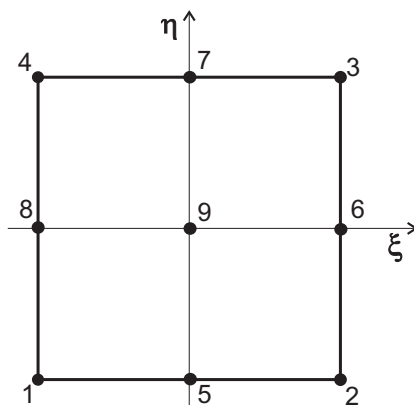
gdzie $\max|q_i|$ oznacza maksymalną wartość bezwzględną wszystkich składowych wektora \mathbf{q} .

Rozdział 4

Charakterystyka podstawowego 9-węzłowego elementu powłokowego

4.1 Funkcje kształtu i wektor niewiadomych

Element powłokowy 9-węzłowy ma na płaszczyźnie współrzędnych naturalnych, $\xi, \eta \in [-1, +1]$, węzły rozmieszczone i ponumerowane tak jak pokazano na Rys.4.1.



Rysunek 4.1: Położenie i numeracja węzłów elementu 9-węzłowego.

Wszystkie pola występujące w funkcjonale F_{2sh} , tzn. pole położenia, przemieszczeń i parametrów rotacyjnych, interpolowane są za pomocą wielomianów Lagrange'a, które mają taką własność, że przyjmują wartość 1 w węźle I określonym współrzędnymi (ξ_i, η_i) , a w pozostałych węzłach przyjmują wartość 0. W przypadku jednowymiarowym, wielomian stopnia n tworzy się dla i -tego węzła wg wzoru

$$l_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)\dots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\dots(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_0)(\xi_i - \xi_1)\dots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\dots(\xi_i - \xi_n)}. \quad (4.1)$$

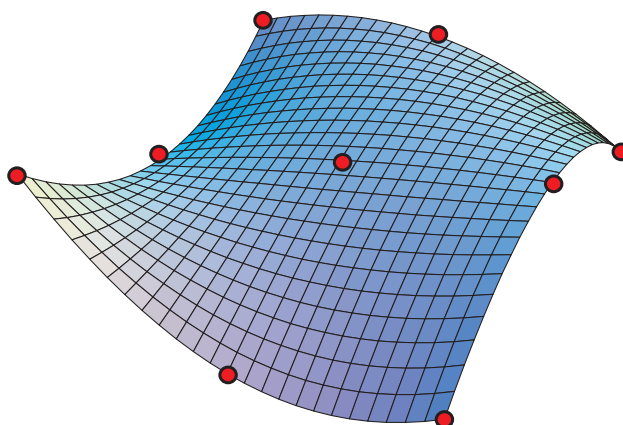
Dla przypadku dwuwymiarowego używana jest kombinacja dwóch wielomianów dla przypadków jednowymiarowych

$$N_I(\xi, \eta) = l_i^m(\xi) l_j^m(\eta). \quad (4.2)$$

Dla elementu 9-węzłowego otrzymuje się następujące bi-kwadratowe wielomiany:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta), & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta), & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta), \\ N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\eta^2 + \eta)(1 - \xi^2), & N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2), \\ N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\eta^2 + \eta)(1 - \xi^2), & N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2), \\ N_9 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Funkcje kształtu N_I odpowiadają odpowiednio węzłom $I = 1, \dots, 9$, ponumerowanym jak na Rys.4.1. Przykładową aproksymację tymi funkcjami pokazano na poglądowym Rys.4.2.



Rysunek 4.2: Przykładowa interpolacja funkcjami Lagrange'a na elemencie 9-węzłowym.

Opracowany element 9-węzłowy jest izoparametryczny, tzn. identyczne funkcje kształtu używane są do aproksymacji składowych wektora położenia początkowego i niewiadomych, czyli składowych wektora przemieszczenia i wektora rotacji,

$$\mathbf{y}_0(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^9 N_I(\xi, \eta) \mathbf{y}_{0I}, \quad \mathbf{u}_0(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^9 N_I(\xi, \eta) \mathbf{u}_{0I}, \quad \boldsymbol{\phi}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^9 N_I(\xi, \eta) \boldsymbol{\phi}_I. \quad (4.4)$$

Wektor stopni swobody (niewiadomych) dla elementu. Rozważamy składowe wektora przemieszczeń i wektora rotacji w bazie odniesienia $\{\mathbf{i}_k\}$. Składowe we wszystkich węzłach elementu 9-węzłowego można zapisać w postaci jednego wektora,

$$\mathbf{q} \doteq \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_{0I} \\ \boldsymbol{\phi}_I \end{array} \right\}, \quad I = 1, \dots, 9, \quad (4.5)$$

gdzie wektor przemieszczeń $\mathbf{u}_{0I} = \{u, v, w\}_I$ i wektor rotacji $\boldsymbol{\phi}_I = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}_I$. Stąd 9-węzłowy element ma $9 \times 6 = 54$ wartości węzłowe (stopnie swobody lub niewiadome).

4.2 Całkowanie funkcjonału F_2

W opracowanych elementach 9-węzłowych zastosowano analityczne całkowanie po grubości powłoki oraz numeryczne całkowanie po powierzchni środkowej. Funkcjonał F_2 z równania (3.3) jest całkowany wg następującego schematu,

$$F_2 \doteq \int_A \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} F_2 d\zeta}_{\text{analitycznie}} dA = \underbrace{\int_A F_{2sh} dA}_{\text{numerycznie}}, \quad (4.6)$$

gdzie $F_{2sh} \doteq \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} F_2 d\zeta$.

4.2.1 Całkowanie analityczne po grubości powłoki

Zasadniczą część funkcjonału F_2 stanowi gęstość energii odkształcenia \mathcal{W} , i jej całkowanie analityczne zostanie omówione poniżej.

Rozważamy gęstość energii odkształcenia dla liniowego izotropowego sprężystego materiału SVK,

$$\mathcal{W}(\mathbf{E}) \doteq \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \mathbf{E})^2 + G \text{tr}(\mathbf{E}^2), \quad (4.7)$$

i obliczamy analitycznie jej całkę po grubości powłoki. Ponieważ przyjęto, że odkształcenie powłoki $\mathbf{E}(\zeta) \approx \boldsymbol{\varepsilon} + \zeta \boldsymbol{\kappa}$, więc

$$(\text{tr} \mathbf{E})^2 = (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + 2\zeta (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})(\text{tr} \boldsymbol{\kappa}) + \zeta^2 (\text{tr} \boldsymbol{\kappa})^2, \quad \text{tr} \mathbf{E}^2 = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^2 + 2\zeta \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\kappa}) + \zeta^2 \text{tr} \boldsymbol{\kappa}^2,$$

i energię (4.7) można zapisać w postaci

$$\mathcal{W}(\mathbf{E}) = \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \zeta \mathcal{W}^*(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) + \zeta^2 \mathcal{W}(\boldsymbol{\kappa}), \quad (4.8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) &\doteq \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + G \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2), & \mathcal{W}(\boldsymbol{\kappa}) &\doteq \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\kappa})^2 + G \text{tr}(\boldsymbol{\kappa}^2), \\ \mathcal{W}^*(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) &\doteq \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})(\text{tr} \boldsymbol{\kappa}) + G \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\kappa}). \end{aligned}$$

Całkując energię odkształcenia (4.8) po grubości powłoki otrzymuje się

$$\mathcal{W}_{sh} \doteq \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathcal{W}(\mathbf{E}) d\zeta = h \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{h^3}{12} \mathcal{W}(\boldsymbol{\kappa}), \quad (4.9)$$

ponieważ poszczególne całki

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\zeta = h \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \zeta^2 \mathcal{W}(\boldsymbol{\kappa}) d\zeta = \frac{h^3}{12} \mathcal{W}(\boldsymbol{\kappa}),$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \zeta \mathcal{W}^*(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) d\zeta = \mathcal{W}^*(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \zeta d\zeta = 0.$$

Tak więc, całkując analitycznie energię po grubości powłoki otrzymuje się energię odkształcenia powłoki w postaci rozprężonej, t.j. jako sumę energii odkształcenia dla tensorów odkształcenia zerowego i pierwszego stopnia, wynikających z liniowego rozwinięcia \mathbf{E} .

4.2.2 Całkowanie numeryczne po powierzchni środkowej

Funkcjonał F_{2sh} jest całkowany numerycznie po powierzchni środkowej powłoki za pomocą kwadratury Gaussa-Legendre'a.

Całkowanie numeryczne związane jest z wyborem określonej liczby punktów w ograniczonym, unormowanym obszarze całkowania, obliczeniem wartości podcałkowej funkcji w tych punktach oraz wykonaniem sumowania z wykorzystaniem wartości wagowych. Podstawowym problemem w całkowaniu numerycznym jest dobór punktów całkowania oraz wag dla określonych funkcji aproksymujących tak, aby zapewnić minimalny błąd. Szczegóły teoretyczne można znaleźć np. w pracy [Stroud, Secrest 1966].

Jedną z klasycznych i najbardziej efektywnych metod całkowania numerycznego jest kwadratura Gaussa-Legendre'a. Daje ona dokładne rozwiązania jeśli funkcjami aproksymującymi są wielomiany nie przekraczające rzędu $2n-1$. Dla funkcji jednej zmiennej ma ona postać

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i,$$

gdzie n , ξ_i , w_i oznaczają ilość punktów całkowania, ich położenie i wagi.

Tabela 4.1: Kwadratura Gaussa-Legendre'a dla funkcji jednej zmiennej.

Liczba punktów n	Współrzędne $\pm\xi_i$	Wagi w_i
1	0	2
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0 $\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$

W przypadku powłoki, po analitycznym scałkowaniu energii po grubości powłoki, jest ona funkcją dwóch zmiennych, i stosowane jest następujące sumowanie

$$F_2 = \int_A F_{2sh}(\xi, \eta) dA = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{2sh}(\xi_i, \eta_j) w_i w_j = \sum_{GP=1}^{nGP} (F_{2sh})_{GP} w_{GP},$$

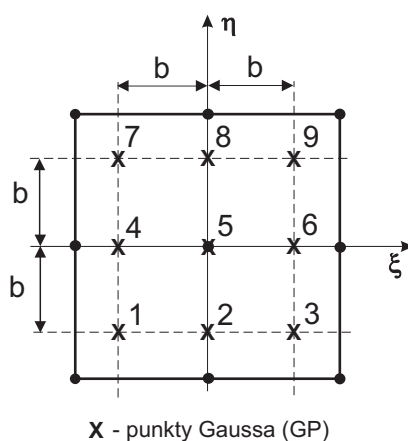
gdzie:

GP - punkty całkowania Gaussa, oznaczone jak na Rys.4.3,

nGP - liczba punktów Gaussa,

$(F_{2sh})_{GP}$ - wartość funkcji w punkcie całkowania,

$w_{GP} = w_i w_j$ - waga w punkcie Gaussa, obliczana jako iloczyn odpowiednich wag z Tabeli 4.1.



Rysunek 4.3: Położenie punktów całkowania Gaussa w elemencie 9-węzłowym.

$$b = \sqrt{3/5}.$$

Na Rys.4.3 pokazany został schemat całkowania dla Lagrange'owskiego elementu 9-węzłowego. Przyjmuje się, patrz np. [Hughes, 1987] lub [Zienkiewicz, Taylor, 1989], że rząd całkowania powinien wynosić n dla elementów n -węzłowych jednowymiarowych, oraz $n \times n$ dla elementów powierzchniowych, czworobocznych o ilości węzłów $n \times n$. Stąd dla elementu 9-węzłowego używa się 9 punktów całkowania, których położenie i wagi określa odpowiednia kombinacja wartości z Tab.4.1 dla $n = 3$. Całkowanie 3×3 dla elementu 9-węzłowego nazywane jest całkowaniem pełnym. Standardowa (3×3) -punkty kwadratura Gaussa stosowana jest do całkowania macierzy sztywności oraz wektora sił wewnętrznych. Przy takim rzędzie całkowania macierz sztywności ma odpowiednią liczbę zerowych wartości własnych, patrz Rozdz.5.4.

Można zauważyć, że dzięki zastosowaniu całkowania analitycznego po grubości powłoki, liczba punktów Gaussa jest zredukowana, co poprawia efektywność elementu.

4.3 Dobór wartości parametru regularyzującego

W Rozdz.2 zdefiniowano dla powłoki dwu-polowy funkcjonal (3.3),

$$F_2(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{Q}) \doteq \int_B \left[\mathcal{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \frac{\gamma}{2} C_d^2 \right] dV + F_{ext}, \quad (4.10)$$

który zawiera parametr regularyzujący γ . Wartość tego parametru ma wpływ na dokładność rotacji normalnej, która jest związana z przemieszczeniami tylko za pomocą równania $C_d = 0$. Zbyt mała wartość γ może prowadzić do zbyt małych rotacji, natomiast zbyt duża, do przesztynienia elementu w zagadnieniach, w których występuje deformacja ścinająca w płaszczyźnie stycznej elementu.

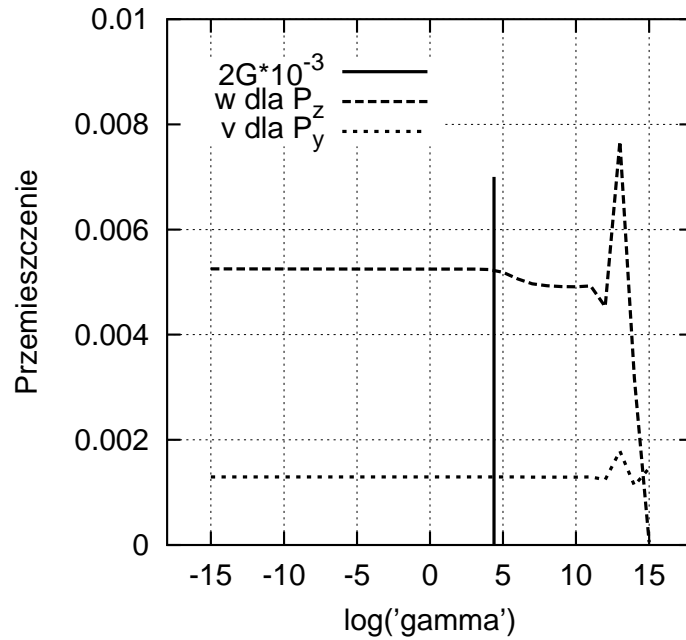
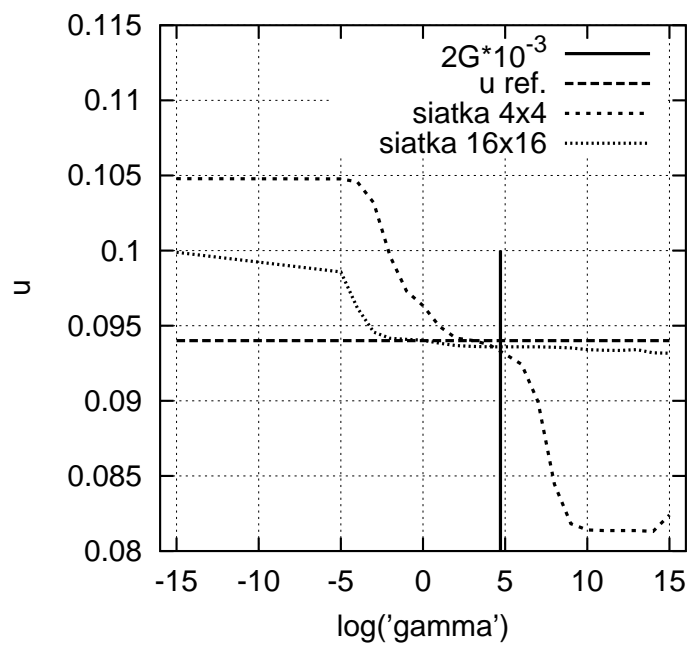
W pracy [Hughes, Brezzi, 1989], przeprowadzono zaawansowaną analizę teoretyczną i zaproponowano $\gamma = G$, tzn. by wartość parametru była równa modułowi ścinania Kirchhoffa. Jednak analiza ta nie uwzględnia własności funkcji aproksymacyjnych i dwustopniowych aproksymacji odkształceń.

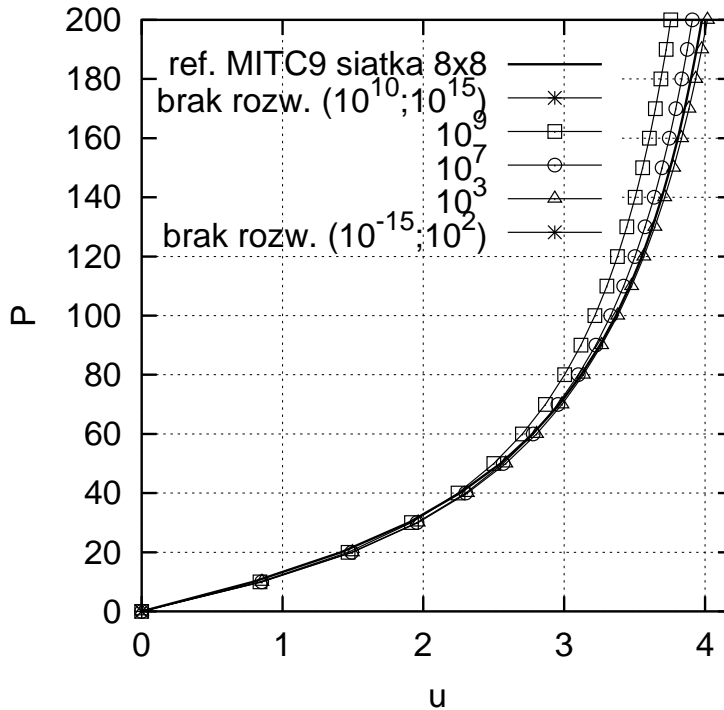
W niniejszej pracy, wartość γ jest ustalana na podstawie testów numerycznych, przy czym badany był zakres wartości $\gamma \in [10^{-15}; 10^{15}]$. Obliczenia przeprowadzono dla większości przykładów z Rozdz.6, i we wszystkich testach otrzymano podobne rezultaty. Na podstawie testów numerycznych ustalono, że optymalna wartość to

$$\gamma = 2G \times 10^{-3}. \quad (4.11)$$

Na Rys.4.4, 4.5 i 4.6, przedstawiono kilka reprezentatywnych rezultatów obliczeń numerycznych.

1. Rys.4.4 wykonano dla skręconego wspornika z Rozdz.6.13, dla dwóch rodzajów obciążenia. Widać, że wyselekcjonowana wartość γ daje dość dokładne wyniki niezależnie od rodzaju obciążenia.
2. Rys.4.5 wykonano dla półsfery z otworem z Rozdz.6.12. Można z niego odczytać, że parametr γ może mieć większą wartość, jeśli użyje się do obliczeń gęstszej siatki elementów skończonych.
3. Na Rys.4.6 umieszczono wyniki analiz nieliniowych dla półsfery z otworem z Rozdz.6.12. Wynika z nich, podobnie jak z Rys.4.4 i Rys.4.5, że zbyt duża wartość γ powoduje tzw. przesztynienie półsfery, tzn. przemieszczenia są zbyt małe. Poza tym, dla skrajnych wartości parametru, metoda Newtona jest rozbieżna i nie można otrzymać rozwiązań dla ustalonych wartości przyrostu obciążenia.

Rysunek 4.4: Zależność przemieszczeń od parametru γ dla 2 typów obciążenia.Rysunek 4.5: Zależność przemieszczeń od parametru γ dla dwóch siatek.



Rysunek 4.6: Zależność przemieszczeń od parametru γ dla testu nieliniowego.

4.4 Konsekwencje zniekształceń elementu w konfiguracji początkowej

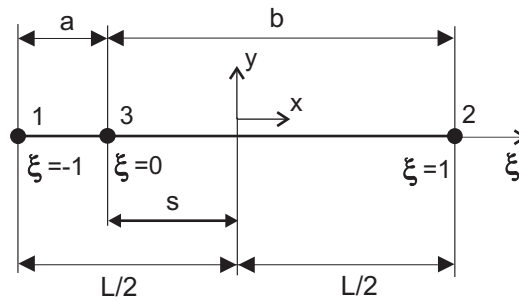
Stosując elementy izoparametryczne należy wziąć pod uwagę ograniczenia dotyczące rozmieszczenia węzłów elementu dla konfiguracji początkowej powłoki. Ograniczenia te wynikają ze sformułowania izoparametrycznego, sposobu definiowania baz lokalnych i schematu całkowania.

Optymalny jest kwadratowy kształt elementu 9-węzłowego, przy czym węzły krawędziowe, o numerach 5, 6, 7 i 8, powinny leżeć w połowie odległości pomiędzy węzłami narożnymi, a węzeł centralny nr 9 powinien znajdować się w połowie odległości pomiędzy węzłami 5-7 i 6-8. Kształt optymalny na płaszczyźnie fizycznej powinien być podobny do tego na płaszczyźnie współrzędnych naturalnych, pokazanego na Rys.4.1.

W praktyce, często stosuje się zniekształcone elementy, dlatego ważne jest by określić dopuszczalny zakres zniekształceń. Poniżej rozważane są konsekwencje odstępstw od powyżej scharakteryzowanego regularnego początkowego kształtu elementu.

(Warto zauważyć, że podobne zagadnienie występuje dla konfiguracji zdeformowanych w przypadku dużych odkształceń, jednak nie jest ono w tym rozdziale omawiane.)

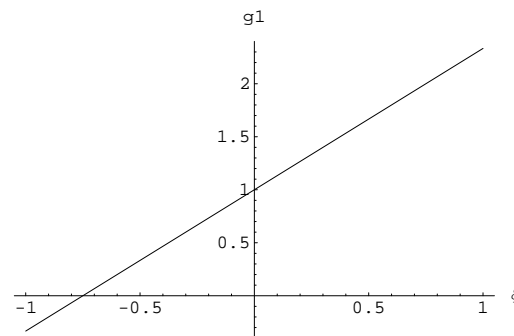
Przypadek jednowymiarowy. Przeprowadzana jest analiza jednowymiarowego 3-węzłowego elementu pokazanego na Rys.4.7. Zakładamy, że węzeł 3 nie znajduje się w środku elementu, lecz jego położenie jest określone przez współrzędną s mierzoną od środka elementu. Badamy przy jakim stosunku a/b następuje zamiana znaku składowej poziomej wektora bazy naturalnej \mathbf{g}_1 .



Rysunek 4.7: Element 3-węzłowy. Pozycja węzła 3 jest określona przez s .

Położenie węzłów w układzie umieszczonym w środku elementu jest następujące, $\mathbf{y}_{0i} = \{-L/2, s, L/2\}$, gdzie s jest wartością współrzędnej x węzła środkowego. Położenie dowolnego punktu elementu o współrzędnej ξ to $y_0 = \mathbf{N} \mathbf{y}_{0i} = s + \frac{L\xi}{2} - s\xi^2$, dla wektora funkcji kształtu $\mathbf{N} = \frac{1}{2}\{\xi(\xi - 1), 2(1 - \xi^2), \xi(\xi + 1)\}$. Składowa wektora bazy naturalnej wynosi $g_1 = y_{0,\xi} = \frac{L}{2} - 2s\xi$ i może ona zmieniać znak w zależności od położenia węzła 3, czyli od s .

Np. dla $s = -2/3$ i $L = 2$, otrzymuje się wartości funkcji $g_1(\xi)$, $\xi \in [-1, +1]$, pokazane na Rys.4.8. Widać, że w tym przypadku wartości g_1 są ujemne dla $\xi < -3/4$, i wtedy zmienia się zwrot wektora bazy naturalnej \mathbf{g}_1 .



Rysunek 4.8: Wykres $g_1(\xi)$ dla $s = -2/3$ i $L = 2$.

Można sprawdzić wartość g_1 dla niektórych punktów wybranych schematów całkowania Gaussa:

- dla punktu schematu trój-punktowego i np. $\xi = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ otrzymuje się $g_1 = 0.2302$,

- dla punktu schematu dwu-punktowego, $\xi = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ otrzymuje się $g_1 = -0.0327$, czyli zmienia się zwrot wektora bazy naturalnej \mathbf{g}_1 .

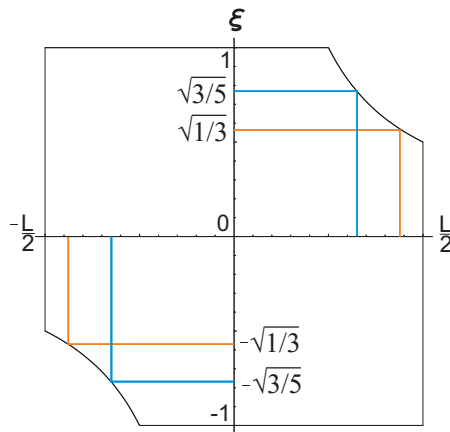
Położenie węzła środkowego, w którym następuje zmiana znaku g_1 , wynika z warunku

$$g_1 = 0 \quad \implies \quad s = \frac{L}{4\xi}. \quad (4.12)$$

Zamiast s można użyć parametrów $a = \frac{L}{2} + s$ i $b = \frac{L}{2} - s$ oraz ilorazu a/b , który jest niezależny od długości elementu L . Dla obliczonej powyżej wartości s wynosi on

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{L}{2} + s}{\frac{L}{2} - s} = \frac{2\xi + 1}{2\xi - 1}. \quad (4.13)$$

Wykres rozwiązania nierówności $g_1(\xi, s) \geq 0$ dla $L = 2$ pokazano na Rys.4.9, gdzie na osi poziomej zaznaczono s , a na osi pionowej ξ . Wykres przedstawia zakres przesunięcia węzła środkowego dla którego nie następuje zmiana zwrotu wektora \mathbf{g}_1 . Ponadto, zaznaczono położenie punktów całkowania dla 2- i 3-punktowego schematu Gaussa. Widać, że dla zredukowanego 2-punktowego całkowania węzeł środkowy ma szerszy zakres dozwolonych położeń.



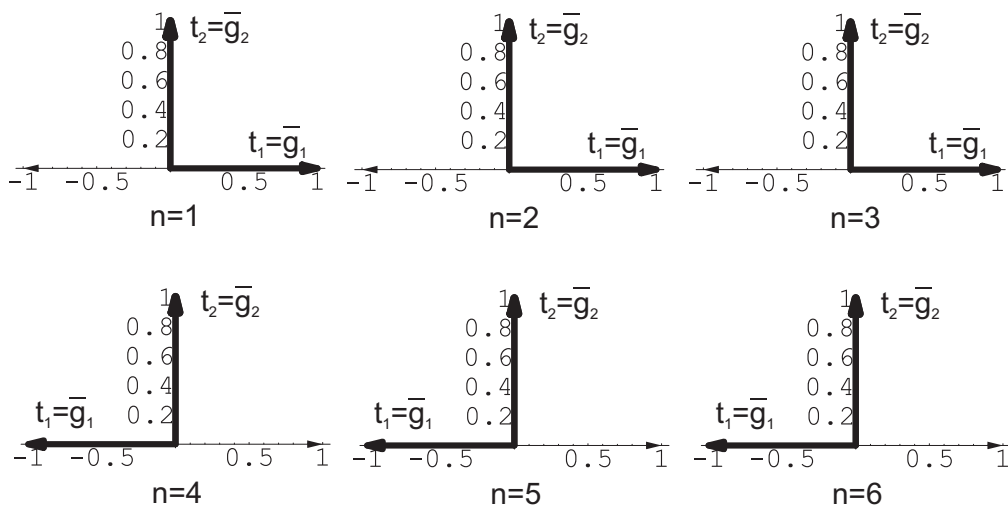
Rysunek 4.9: Wykres rozwiązania nierówności $g_1(\xi, s) \geq 0$ dla $L = 2$.

Przypadek dwuwymiarowy, powłoka. Przypadek dwuwymiarowy jest złożeniem dwóch przypadków jednowymiarowych omówionych powyżej. Dodatkowym efektem zniekształcenia elementu jest to, że najeżenie wektorów normalnych \mathbf{t}_3 niekoniecznie jest zgodne. Najeżenie jest zgodne wtedy, gdy wszystkie wektory normalne lokalnych baz orto-normalnych w punktach Gaussa są zwrócone w tę samą stronę względem powierzchni odniesienia (środkowej) dla danego elementu,.

Wraz ze wzrostem przesunięć węzłów dokładność obliczeń może się pogarszać, a w przypadku gdy najeżenie wektorów normalnych \mathbf{t}_3 nie jest zgodne, wtedy rozwiązania nie można uznać za wiarygodne. Sytuację tę dobrze obrazują Testy 6.2.2A

oraz 6.2.2B. Wskazują one, że element 9 (standardowe sformułowanie) daje złe wyniki dla dużych przesunięć węzłów (w powyższych testach przesuwa się węzeł nr 9). Przyczyną jest zmiana orientacji bazy lokalnej dla dużych przesunięć węzłów, tzn. następuje zmiana kierunku wektora \mathbf{t}_3 . Ma to swoje podłoże w dwóch mechanizmach:

1. wektory bazy naturalnej zmieniają zwroty (Rys.4.10),
2. kąt rozwarcia pomiędzy wektorami bazy naturalnej przekracza 180° (Rys.4.11).

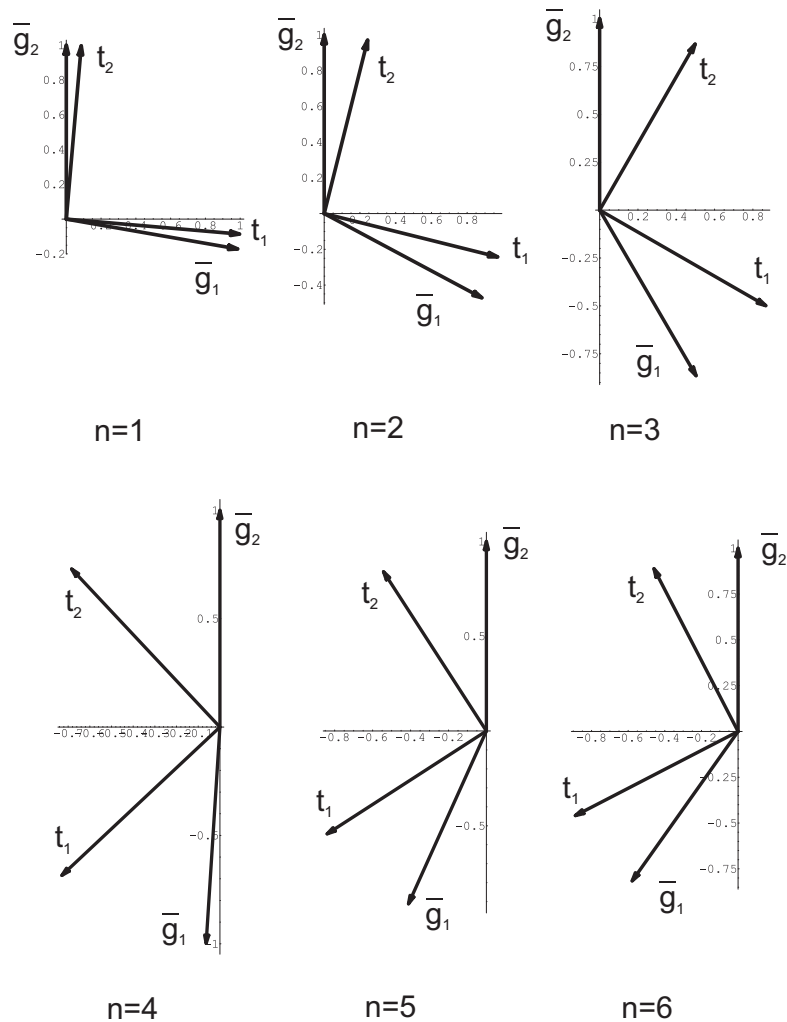


Rysunek 4.10: Bazy lokalne w punkcie Gaussa nr 4 dla wzrastającego n . Test 6.2.2A.

Przypadek pierwszy uwidacznia się w Teście 6.2.2. Przesunięciu w poziomie ulega węzeł nr 9 i dla parametru przesunięcia $n = 4$ otrzymuje się błędny wynik. Na Rys.4.10 przedstawione zostały wektory bazy naturalnej $\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2$, oraz wektory bazy ortonormalnej $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ w punkcie Gaussa nr 4 ($\xi = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \eta = 0, \zeta = 0$, patrz Rozdz.4.2).

Wektory te zmieniają się dla zwiększającego się n , tak jak opisano w Teście 6.2.2A. Bazy te pokrywają się ze sobą dla $n = 1, 2, 3$. Dla wartości $n = 4, 5, 6$ wektory $\bar{\mathbf{g}}_1$ i \mathbf{t}_1 również się pokrywają, ale mają przeciwny zwrot. Dlatego \mathbf{t}_3 , jako iloczyn wektorowy \mathbf{t}_1 i \mathbf{t}_2 (patrz Rozdz.2.2.1) również zmienia kierunek, i w konsekwencji rozwiązanie jest nieprawidłowe. Aby zbadać dokładnie w jakim zakresie położenia węzła 9 następuje opisana zmiana kierunku wektora \mathbf{t}_3 należy przeprowadzić analizę analogiczną do tej dla przypadku jednowymiarowego.

Drugi mechanizm, który powoduje niezgodne najeżenie wektorów \mathbf{t}_3 , może zostać przeanalizowany na przykładzie Testu 6.2.2B. W tym przypadku przesunięcie węzła nr 9 następuje po przekątnej elementu. Sprawdzane jest zachowanie się baz lokalnych w punkcie Gaussa nr 4, przedstawione na Rys.4.11. Można zauważyć, że dla $n = 4$, rozwarcie wektorów bazy naturalnej wynosi ponad 180° , co powoduje



Rysunek 4.11: Bazy lokalne w punkcie Gaussa nr 4 dla wzrastającego n . Test 6.2.2B.

zmianę orientacji wektorów t_1 i t_2 , i w konsekwencji zmianę zwrotu t_3 jako ich iloczynu wektorowego.

Powyższe obserwacje wskazują, że węzły elementu 9-węzłowego nie powinny być rozmieszczone zbyt nieregularnie, kwestię tę podjęto w sposób bardziej precyzyjny w testach z Rozdz.6.2.

4.5 Zagadnienie własne dla dwuwymiarowego 9-węzłowego elementu

Mając macierz sztywności uzyskaną w sposób opisany w Rozdz.3.2 można sformułować następujące zadanie na wartości i wektory własne

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\nu}^i = \lambda^i \boldsymbol{\nu}^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (4.14)$$

gdzie λ^i to wartości własne, $\boldsymbol{\nu}^i$ to wektory własne, a n to liczba stopni swobody elementu. Jest to układ równań liniowych jednorodnych ze względu na $\boldsymbol{\nu}^i$,

$$(\mathbf{K} - \lambda^i \mathbf{I}) \boldsymbol{\nu}^i = \mathbf{0}. \quad (4.15)$$

Równania (4.15) mają niezerowe rozwiązania jeśli spełniony jest warunek

$$\det(\mathbf{K} - \lambda^i \mathbf{I}) = 0. \quad (4.16)$$

Wartości i wektory własne tworzą pary $\{\lambda^i, \boldsymbol{\nu}^i\}$, tzn. każdej wartości własnej odpowiada określony wektor własny. Wartości własne λ^i mogą być podwójne i wtedy odpowiadające wektory własne $\boldsymbol{\nu}^i$ są obrócone względem siebie. Przyjmując $\boldsymbol{\nu} = \{\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\nu}^2, \dots\}$ oraz $\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}(\lambda^i)$ można zapisać

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\lambda}. \quad (4.17)$$

Korzystając z własności ortogonalności $\boldsymbol{\nu}$ otrzymuje się

$$\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda}. \quad (4.18)$$

Wektory własne otrzymane z zadania (4.14) to przemieszczenia węzłów

$$\boldsymbol{\nu}^i = \{u_I, v_I\}^i, \quad (4.19)$$

dla $I = 1, \dots, 9$ oznaczającego węzły. W celu lepszego przedstawienia graficznego, wektory własne można przeskalować, np.

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}^i = \frac{\boldsymbol{\nu}^i}{\max|\boldsymbol{\nu}^i|/5}, \quad (4.20)$$

gdzie $\max|\boldsymbol{\nu}^i|$ oznacza maksymalną wartość bezwzględną wszystkich składowych $\boldsymbol{\nu}^i$.

Do wyznaczenia macierzy sztywności posłużono się 9-węzłowym dwuwymiarowym elementem, o dwóch składowych wektora przemieszczenia w węzle, $\{u, v\}$. Liczba stopni swobody tego elementu jest równa 18, a wektory własne można czytelnie przedstawić jako przemieszczenia węzłów na płaszczyźnie. (Wyniki testu na wartości własne dla opracowanych w pracy elementów powłokowych omówiono w Rozdz.6.1.)

W celu zbadania wartości i wektorów własnych macierzy sztywności zdefiniowano jeden element w kształcie kwadratu, o boku jednostkowym i grubości $h = 0.1$, oraz $E = 10^6$ i $\nu = 0.3$. Nie zadano warunków brzegowych. Otrzymane wartości własne podano w Tabeli 4.2.

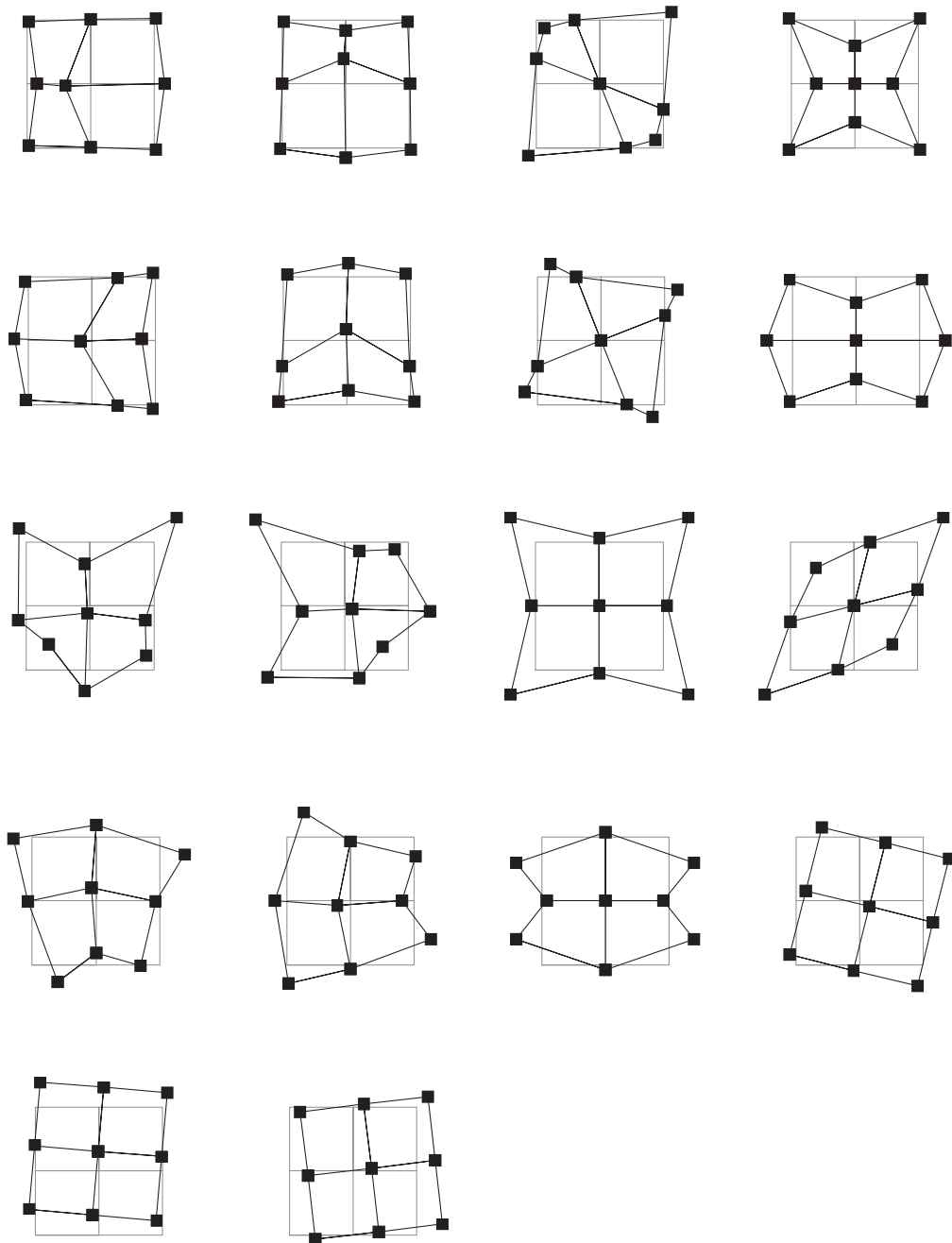
Tabela 4.2: Wartości własne 9-węzłowego dwuwymiarowego elementu.

548501.63	548501.63	233586.42	216795.78
157904.83	157904.83	112820.51	89421.66
67625.54	67625.54	57929.49	44069.25
27066.90	27066.90	16805.44	0
0	0		

Przeskalowane wektory własne pokazano na Rys.4.12. Zostały one umieszczone w kolejności odpowiadającej wartościom własnym z Tabeli 4.2.

Kolorem szarym oznaczono pierwotny kształt elementu, a czarnym kształt elementu po nałożeniu wektorów własnych, przeskalowanych zgodnie z wzorem (4.20). Węzły schematycznie połączono liniami prostymi, lecz ich rzeczywisty kształt to krzywe 2-go stopnia, zgodnie z funkcjami kształtu z równ.(4.3). Trzy ostatnie rysunki przedstawiają ruch sztywny elementu i związane są z wektorami własnymi dla zerowych wartości własnych.

Podobną graficzną interpretację wektorów własnych, lecz dotyczącą elementu 4-węzłowego, można znaleźć np. w [Bathe, Wilson 1976] lub [Kleiber, 1989].



Rysunek 4.12: Wektory własne 9-węzłowego dwuwymiarowego elementu.

Rozdział 5

Metody eliminujące zakleszczanie 9-węzłowego elementu powłokowego

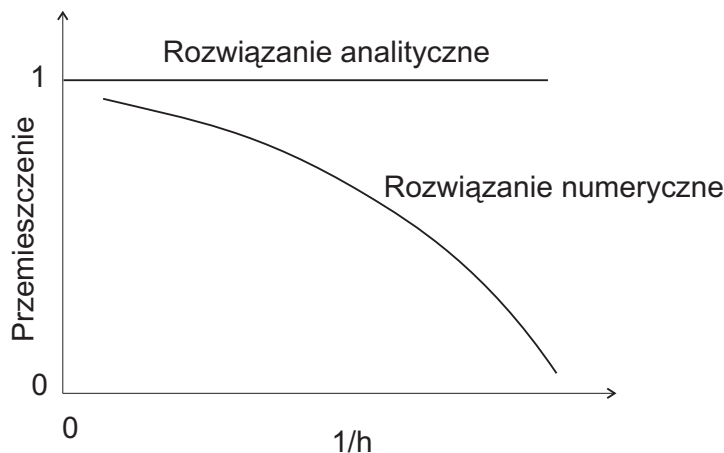
Standardowy 9-węzłowy element powłokowy charakteryzuje się bardzo małą dokładnością, co spowodowane jest przez tzw. zakleszczanie, występujące dla powłok cienkich i zakrzywionych. Dlatego potrzebne są dodatkowe techniki poprawiające jego własności.

5.1 Charakterystyka zakleszczania w elementach powłokowych

Zakleszczanie (ang. *locking*) to negatywne zjawisko występujące dla aproksymacji niskiego rzędu. Na skutek zakleszczania, przemieszczenia cienkich powłok są silnie niedoszacowane, tak jak gdyby sztywność elementu została znacznie zwiększona, co przedstawiono poglądowo na Rys.5.1. Inna nazwa zakleszczania to "przesztywnienie" elementu, lub, np. w [Chroscielewski, Makowski, Pietraszkiewicz, 2004] (str.381), to "blokada" rozwiązania. Zakleszczanie powłok silnie zależy od grubości powłoki, która jest tzw. parametrem krytycznym. Zakleszczanie zwiększa się przy zmniejszaniu grubości.

Wyróżnić można dwa rodzaje zakleszczania elementów powłokowych:

- zakleszczanie od ścinania poprzecznego (ang. *transverse shear locking*), wywołane przez aproksymacje odkształceń ścinających poprzecznych, ε_{31} , ε_{32} , i występujące w elementach powłokowych płaskich i zakrzywionych,
- zakleszczanie membranowe (ang. *membrane locking*), wywołane przez aproksymacje odkształceń błonowych ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} , i występujące tylko w elementach powłokowych zakrzywionych.



Rysunek 5.1: Zakleszczanie rozwiązania numerycznego.

Oba powyższe typy zakleszczania występują w elementach powłokowych 9-węzłowych.

Zakleszczanie jest efektem wynikającym m.in. z własności zastosowanych funkcji aproksymujących, w szczególności tzw. 'niedopasowania' aproksymacji poszczególnych członów energii, natomiast nie ma związku z dokładnością reprezentacji numerycznej zmiennych. Istnienie tego efektu można wykazać dla prostych przypadków za pomocą metod analitycznych, a także przez porównanie rozwiązań numerycznych z rozwiązaniami analitycznymi.

Warto zauważyć, że efekt zakleszczania od ścinania poprzecznego i zakleszczania membranowego maleje wraz z zagęszczaniem siatki elementów. Jednak następuje to powoli. Dla rzadkich siatek elementy zakleszczające się są bardzo niedokładne.

5.1.1 Zakleszczanie od ścinania poprzecznego elementu belkowego

Zjawisko zakleszczania występuje także w elementach belkowych, i te, jako mniej skomplikowane od elementów powłokowych, są zwykle wykorzystywane w rozważaniach analitycznych.

Równania belki Timoszenki. Składowe odkształcenia membranowego, odkształcenia ścinania poprzecznego i odkształcenia zgięciowego dla belki Timoszenki o liniowej kinematyce są następujące

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x}, \quad 2\varepsilon_{zx} = w_{,x} - \phi, \quad \kappa_{xx} = -\phi_{,x}, \quad (5.1)$$

gdzie u to przemieszczenie styczne, w to przemieszczenie normalne, a ϕ to kąt rotacji linii środkowej belki. Energię odkształcenia można wyrazić jako sumę energii

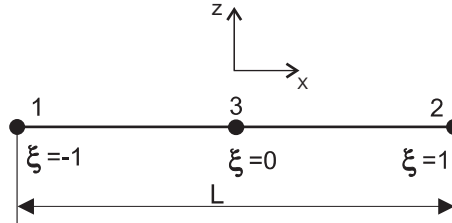
$$\mathcal{W} = \int_0^L [\mathcal{W}(\varepsilon_{xx}) + \mathcal{W}(\varepsilon_{zx}) + \mathcal{W}(\kappa_{xx})] dx, \quad (5.2)$$

gdzie

$$\mathcal{W}(\varepsilon_{xx}) = \frac{1}{2}EA \varepsilon_{xx}^2, \quad \mathcal{W}(\varepsilon_{zx}) = k 2GA \varepsilon_{zx}^2, \quad \mathcal{W}(\kappa_{xx}) = \frac{1}{2}EI \kappa_{xx}^2. \quad (5.3)$$

Ponadto, $A = bh$ to pole (prostokątnego) przekroju belki, $I = bh^3/12$ to moment bezwładności przekroju, h to wysokość, b to szerokość przekroju belki, a $k = 5/6$ to współczynnik korekcyjny dla ścinania poprzecznego.

Aproksymacja odkształcenia ścinającego w elemencie belkowym. W celu zidentyfikowania zakleszczania od ścinania poprzecznego rozważa się 3-węzłowy prosty (niezakrzywiony) element belkowy, patrz Rys.5.2. Dla elementu 3-węzłowego,



Rysunek 5.2: Element belkowy 3-węzłowy.

przemieszczenie normalne oraz rotacja są aproksymowane w następujący sposób

$$w(\xi) = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi) w_I, \quad \phi(\xi) = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi) \phi_I, \quad (5.4)$$

gdzie kwadratowe funkcje kształtu są zdefiniowane następująco,

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), \quad N_3(\xi) = 1 - \xi^2. \quad (5.5)$$

Ponadto, $(\cdot)_I$ oznaczają wartości w węzłach, a współrzędna naturalna $\xi \in [-1, +1]$. Po uwzględnieniu, że $x = (L/2)\xi$, gdzie L to długość belki, otrzymuje się

$$(\cdot)_{,x} = (\cdot)_{,\xi} \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{L} \right) (\cdot)_{,\xi}. \quad (5.6)$$

Aproksymowane odkształcenie ścinające poprzeczne, obliczone wg równ.(5.1) z uwzględnieniem funkcji kształtu (5.5), ma następującą postać

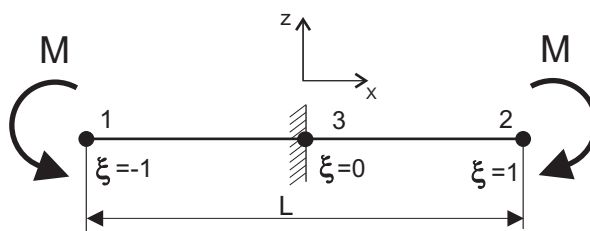
$$2\varepsilon_{zx}^{MES} = \frac{2}{L} \left[\left(\xi - \frac{1}{2} \right) w_1 + \left(\xi + \frac{1}{2} \right) w_2 - (2\xi) w_3 \right] - \left[\frac{1}{2} \xi(\xi - 1) \phi_1 + \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) \phi_2 + (1 - \xi^2) \phi_3 \right]. \quad (5.7)$$

W ogólnym przypadku, aproksymowany rozkład odkształcenia ścinającego poprzecznego ε_{zx}^{MES} powinien być jak najbardziej zbliżony do rozkładu obliczonego analitycznie, ε_{zx}^{ANA} , co prowadzi do warunku

$$\varepsilon_{zx}^{MES} - \varepsilon_{zx}^{ANA} = 0. \quad (5.8)$$

Ponieważ w równ.(5.7), część zależna od w_I jest liniową funkcją ξ , a część zależna od ϕ_I jest kwadratową funkcją ξ , więc w niektórych przypadkach mogą występować problemy ze spełnieniem tego warunku. Poniżej, ta kwestia jest rozważona dla kilku założonych rozkładów ε_{zx}^{ANA} wzdłuż osi belki.

A. Zerowe odkształcenie ścinające poprzeczne. Dla bardzo wiotkich (cienkich) belek, gdy $h/L \ll 1$, a także dla przypadku czystego zginania belki dwoma momentami, patrz Rys.5.3, wartość analityczna odkształcenia poprzecznego jest stała i równa zero, tzn. $\varepsilon_{zx}^{ANA} = 0$.



Rysunek 5.3: Czyste zginanie prostego elementu 3-węzłowego.

Wtedy, warunek (5.8) redukuje się do

$$\varepsilon_{zx}^{MES} = 0. \quad (5.9)$$

W elemencie 2-węzłowym, zbudowanym za pomocą liniowych funkcji kształtu, otrzymuje się $\varepsilon_{zx}^{MES} = 0$ tylko w punkcie środkowym ($\xi = 0$), natomiast w punktach $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$ otrzymuje się $\varepsilon_{zx}^{MES} \neq 0$, więc element ten zakleszcza się, gdy jest całkowany za pomocą 2 punktów Gaussa. Natomiast dla elementu 3-węzłowego, dla rozważanego obciążenia, zakleszczanie nie występuje. Można to pokazać w następujący sposób. Dla czystego zginania,

$$w_1 = w_2 = \alpha L/4, \quad w_3 = 0, \quad \phi_1 = \phi, \quad \phi_2 = -\phi, \quad \phi_3 = 0. \quad (5.10)$$

gdzie $\alpha L/4$ to analityczna wartość ugięcia. Można ją otrzymać także z warunku $\int_0^{L/2} 2\varepsilon_{zx} dx = 0$, z którego wynika

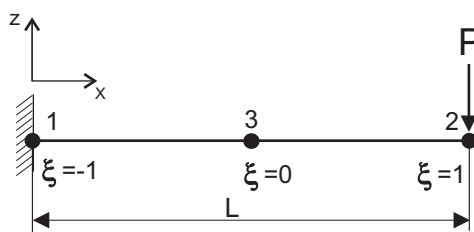
$$\underbrace{w_3}_{=0} - w_1 = \int_0^{L/2} \alpha \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) dx = -\frac{\alpha L}{4}, \quad (5.11)$$

gdzie wykorzystano symetrię ε_{zx} względem $x = 0$, i parametryzację $\phi = \alpha\xi = \alpha\left(\frac{2x}{L} - 1\right)$. Podstawiając warunki (5.10) do rón.(5.7) otrzymuje się

$$2\varepsilon_{zx}^{MES} = \frac{2}{L} \left[\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right] \alpha \frac{L}{4} - \left[\frac{1}{2}\xi(\xi - 1)\alpha - \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)\alpha \right] = \frac{2}{L} 2\xi\alpha \frac{L}{4} + \xi\alpha = 0, \quad (5.12)$$

tzn. odkształcenie ścinające jest równe zero.

B. Stałe niezerowe odkształcenie ścinające poprzeczne. Rozważmy przypadek zginania prostej belki siłą poprzeczną, patrz Rys.5.4.

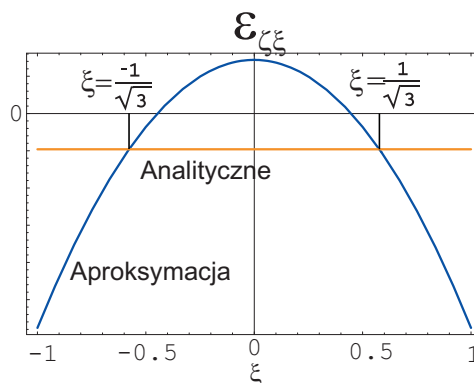


Rysunek 5.4: Zginanie prostego elementu 3-węzłowego siłą poprzeczną P .

W tym przypadku odkształcenie ścinające jest niezerowe i stałe po długości belki,

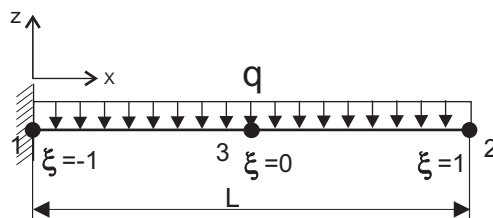
$$\varepsilon_{zx}^{ANA} = \frac{-P}{k 2GA}. \quad (5.13)$$

Aby znaleźć punkty, w których wartości ε_{zx}^{MES} obliczone wg rón.(5.7) są równe wartościom analitycznym ε_{zx}^{ANA} , trzeba rozwiązać równanie (5.8). Jest to równanie kwadratowe ze względu na ξ i jego pierwiastkami są $\xi_A = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\xi_B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, co pokazano na Rys.5.5. Obliczenia wykonano dla: $L = 6$, $b = 0.2$, $P = 1$, $h = 1/10$, $E = 10^7$, $\nu = 0.3$.



Rysunek 5.5: Porównanie rozkładów odkształceń ścinających. Stałe odkształcenie ścinające.

C. Liniowe odkształcenie ścinające poprzeczne. Rozważmy przypadek zginania prostej siłą poprzeczną rozłożoną o intensywności q , patrz Rys.5.6. W tym

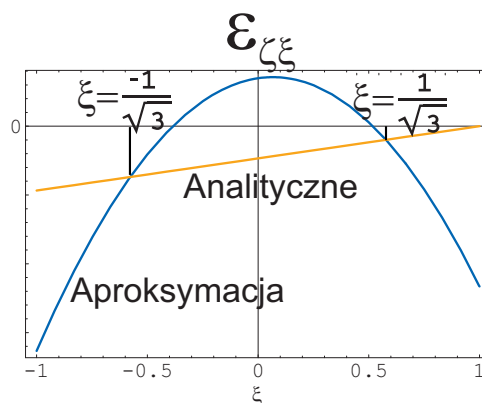


Rysunek 5.6: Zginanie prostego elementu 3-węzłowego siłą rozłożoną q .

przypadku odkształcenie ścinające jest niezerowe i zmienia się liniowo po długości belki,

$$\varepsilon_{zx}^{ANA} = \frac{-q(L/2)(1 - \xi)}{k 2GA}. \quad (5.14)$$

Aby znaleźć punkty, w których wartości ε_{zx}^{MES} obliczone wg równ.(5.7) są równe wartościom analitycznym ε_{zx}^{ANA} , trzeba rozwiązać równanie (5.8). Jest to równanie kwadratowe ze względu na ξ . Podobnie jak w poprzednim przypadku, jego pierwiastkami są $\xi_A = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\xi_B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, co pokazano na Rys.5.7. Obliczenia wykonano dla: $L = 6$, $b = 0.2$, $q = 1$, $h = 1/10$, $E = 10^7$, $\nu = 0.3$.



Rysunek 5.7: Porównanie rozkładów odkształceń poprzecznych. Liniowe odkształcenie ścinające poprzeczne.

Podsumowując przypadek stałego i liniowego rozkładu odkształceń ścinających, widać, że tylko w dwóch punktach $\xi_A = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\xi_B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, wartości ε_{zx}^{MES} są równe wartościom analitycznym ε_{zx}^{ANA} . Jeżeli do całkowania energii odkształcenia od ścinania, $\mathcal{W}(\varepsilon_{zx})$, zastosuje się 3-punktowy schemat całkowania Gaussa, bazujący na punktach, $\xi = \pm\sqrt{3/5}$ i $\xi = 0$, to wtedy ε_{zx}^{MES} jest próbkowane w punktach, gdzie jego wartości są niepoprawne. Jest to jedna z przyczyn wywołujących efekt zakleszczania.

Uwaga na temat analizy w [Huang, 1988], str.50. Jeżeli warunek (5.9) nie jest spełniony w każdym punkcie belki, to można żądać spełnienia słabszego warunku, by energia odkształcenia poprzecznego (5.3) była równa zero, tzn. $\int_0^L \mathcal{W}(\varepsilon_{zx}^{MES}) dx = 0$. Można zauważyć, że energia odkształcenia poprzecznego (5.3) jest funkcją kwadratową ε_{zx}^{MES} . Zakładając, że rozkład GA jest stały po x , otrzymuje się warunek,

$$\int_0^L (\varepsilon_{zx}^{MES})^2 dx = 0. \quad (5.15)$$

Ten warunek jest dość skomplikowany, dlatego np. w [Huang, 1988], str.50, rozważany jest inny całkowy warunek

$$\int_0^L \varepsilon_{zx}^{MES} dx = 0. \quad (5.16)$$

Jednak należy krytycznie zauważyć, że jest to tylko słaba postać równ.(5.9), lecz nie jest to warunek wystarczający dla spełnienia równ.(5.15).

Inna wada analizy przeprowadzonej w cytowanej pracy to założenie, że $B = 0$, które wyjaśnimy poniżej. Całkę (5.16) można wyrazić w zmiennej naturalnej i rozważać warunek

$$\int_{-1}^{+1} \varepsilon_{\xi\xi}^{MES} d\xi = 0. \quad (5.17)$$

Dla 3-węzłowego elementu, $\varepsilon_{\xi\xi}^{MES}$ jest funkcją kwadratową, którą można zapisać w postaci

$$\int_{-1}^{+1} (A\xi^2 + B\xi + C) d\xi = 0, \quad (5.18)$$

gdzie A, B, C to stałe. Ponieważ, całka $\int_{-1}^{+1} \xi d\xi = 0$, więc wartość B może być dowolna, ale tylko przy obliczaniu powyższej całki. Wtedy wyrażenie podcałkowe jest postaci $A\xi^2 + C$, i po scałkowaniu otrzymuje się $A = -3C$. Jednak nie można zakładać dowolności B w równaniu $A\xi^2 + B\xi + C = 0$, co w cytowanej pracy uczyniono, by otrzymać $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$.

5.1.2 Zakleszczanie membranowe elementu belkowego

Odkształcenie membranowe dla zakrzywionej belki. Odkształcenie błonowe prostej (niezakrzywionej) belki może zostać wyrażone za pomocą klasycznej formuły Marguerre'a [Marguerre, 1939],

$$\varepsilon_{xx} = \bar{u}_{,x} + \frac{1}{2} \bar{w}_{,x}^2. \quad (5.19)$$

Zakrzywienie belki można uwzględnić w uproszczony sposób wprowadzając wstępne przemieszczenia belki, u_0 i w_0 , odmierzane od postaci niezdeformowanej i niezakrzywionej. Wtedy przemieszczenie całkowite jest wyrażone w następujący sposób:

$$\bar{u} = u_0 + u, \quad \bar{w} = w_0 + w, \quad (5.20)$$

i ze wzoru (5.19), otrzymuje się

$$\varepsilon_{xx} = u_{0,x} + u_{,x} + \frac{1}{2}w_{0,x}^2 + w_{0,x}w_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2. \quad (5.21)$$

Zakładamy, że zakrzywienie nie wywołuje wstępnego odkształcenia, tzn. $\varepsilon_{xx}^0 = u_{0,x} + \frac{1}{2}w_{0,x}^2 = 0$, i pomijamy człon wyższego rzędu, $\frac{1}{2}w_{,x}^2$. Wtedy odkształcenie membranowe ma postać,

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} + w_{0,x}w_{,x}. \quad (5.22)$$

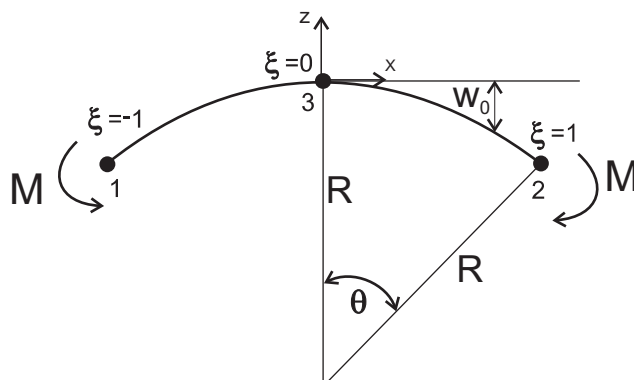
Analogiczną postać można otrzymać dla teorii powłok małowyniosłych Donnella-Musztariego-Własowa [Donnell, 1934].

Powyższa postać ε_{xx} zostanie poniżej wykorzystana do określenia punktów, w których odkształcenie membranowe jest prawidłowe. W ogólnym przypadku, aproksymowany rozkład odkształcenia membranowego ε_{xx}^{MES} wzdłuż elementu powinien być jak najbardziej zbliżony do rozkładu obliczonego analitycznie, ε_{xx}^{ANA} , co prowadzi do warunku

$$\varepsilon_{xx}^{MES} - \varepsilon_{xx}^{ANA} = 0. \quad (5.23)$$

Poniżej, rozważymy ten warunek dla $\varepsilon_{xx}^{ANA} = 0$ wzdłuż osi belki.

Czyste zginanie zakrzywionego elementu 3-węzłowego. Poniżej rozważany jest 3-węzłowy zakrzywiony element belkowy obciążony symetrycznie momentem, pokazany na Rys.5.8. Analiza tego elementu przeprowadzona jest podobnie jak w [Huang, 1988], str.84-7, usunięto jednak kilka błędów utrudniających jej zrozumienie i wyraźnie zdefiniowano założenia.



Rysunek 5.8: Zginanie zakrzywionego elementu 3-węzłowego o długości L .

W analizie tego elementu, wykorzystuje się następujące warunki dla węzłów elementu:

1. wstępne ugięcie (zakrzywienie),

$$w_{01} = -h, \quad w_{02} = -h, \quad w_{03} = 0, \quad (5.24)$$

2. przemieszczenie pionowe

$$w_1 = w_2, \quad w_3 = 0, \quad (5.25)$$

3. przemieszczenie poziome

$$u_1 = -u_2, \quad u_3 = 0, \quad (5.26)$$

gdzie h oznacza wysokość łuku. (W niniejszej pracy h oznacza grubość powłoki bądź belki; tutaj uczyniono wyjątek w celu zachowania zgodności z notacją użytą w pracy [Huang, 1988].)

Dla powyższych warunków otrzymuje się,

$$w_0(\xi) = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi) w_{0I} = -h\xi^2, \quad w_{0,x} = -2\xi h/c, \quad (5.27)$$

$$w(\xi) = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi) w_I = w_2\xi^2, \quad w_{,x} = 2\xi w_2/c, \quad (5.28)$$

$$u(\xi) = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi) u_I = u_2\xi, \quad u_{,x} = u_2/c, \quad (5.29)$$

gdzie współrzędną x węzła 2 oznaczono jako $c = x_2$, i wykorzystano następujące przybliżenie równ.(5.6)

$$(\cdot)_{,x} = \left(\frac{2}{L}\right) (\cdot)_{,\xi} \approx \frac{1}{c} (\cdot)_{,\xi}, \quad (5.30)$$

które jest dopuszczalne tylko dla belek małowyniosłych. Wprowadzając powyższe relacje do równ.(5.22) otrzymuje się

$$\varepsilon_{xx}^{MES} = \frac{u_2 c - 4h w_2 \xi^2}{c^2}. \quad (5.31)$$

Ponieważ, dla przypadku czystego zginania belki dwoma momentami, wartość analityczna odkształcenia membranowego jest równa zero, tzn. $\varepsilon_{xx}^{ANA} = 0$, więc warunek (5.23) przyjmuje postać

$$u_2 c - 4h w_2 \xi^2 = 0. \quad (5.32)$$

Z tego równania wylicza się

$$\xi = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{c}{h} \frac{u_2}{w_2}}. \quad (5.33)$$

Powyższe wyrażenie można uprościć zakładając, że:

1. deformacja przekształca łuk kołowy o promieniu R , kącie środkowym θ i wysokości h , w łuk kołowy o promieniu R' , kącie środkowym θ' i wysokości h' ,
2. $\theta' \approx \theta + \Delta\theta$, gdzie przyrost kąta $\Delta\theta$ jest mały,
3. długość belki L w przybliżeniu nie ulega zmianie,

$$L = R\theta \approx R'\theta', \quad \rightarrow \quad R' \approx R\theta'/\theta. \quad (5.34)$$

Relacje te wykorzystuje się obliczając przemieszczenia węzła 2,

$$u_2 = R' \sin \theta' - R \sin \theta, \quad w_2 = R'(1 - \cos \theta') - R(1 - \cos \theta), \quad (5.35)$$

i ich rozwinięcie liniowe względem $\Delta\theta$,

$$u_2 \approx \Delta\theta R(\cos \theta - \sin \theta/\theta), \quad w_2 \approx \Delta\theta R[\sin \theta - (1 - \cos \theta)/\theta] \quad (5.36)$$

Tak więc,

$$\frac{u_2}{w_2} = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \theta \sin \theta - 1}, \quad (5.37)$$

a ponadto,

$$\frac{c}{h} = \frac{R \sin \theta}{R(1 - \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)}. \quad (5.38)$$

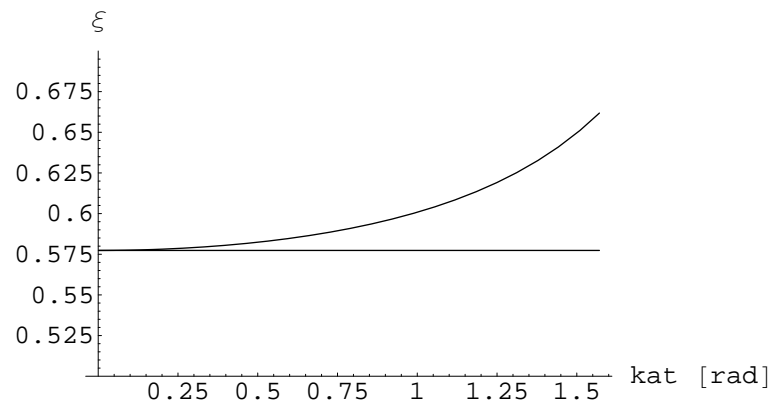
W efekcie, równ.(5.33) przyjmuje postać

$$\xi(\theta) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)} \frac{(\theta \cos \theta - \sin \theta)}{(\cos \theta + \theta \sin \theta - 1)}}, \quad (5.39)$$

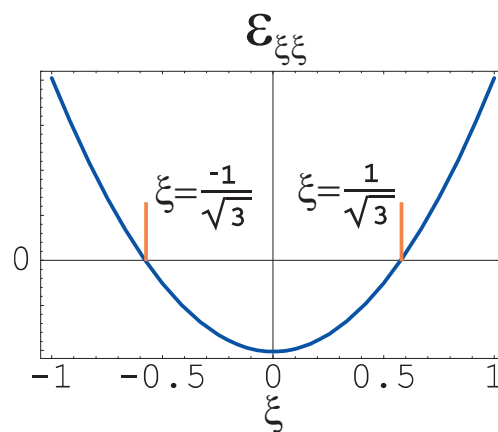
która zależy tylko od kąta θ . Wykres funkcji $\xi(\theta)$ pokazano na Rys.5.9. W przypadku granicznym belki prostej (niezakrzywionej), tzn. gdy $\theta \rightarrow 0$, otrzymuje się

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \xi(\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (5.40)$$

Rozkład odkształcenia błonowego wzdłuż osi elementu pokazuje Rys.5.10. Obliczenia wykonano dla: $\theta = 1^\circ$, $L = 6$, $b = 0.2$, $M = 1$, $h = 1/10$, $E = 10^7$, $\nu = 0.3$. Widać, że poprawną wartość odkształcenia membranowego ε_{xx} otrzymuje się tylko w dwóch punktach: $\xi_A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\xi_B = +\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Rysunek 5.9: Wykres $\xi(\theta)$ dla czystego zginania zakrzywionego elementu 3-węzłowego. Linia pozioma to $\xi = 1/\sqrt{3}$.



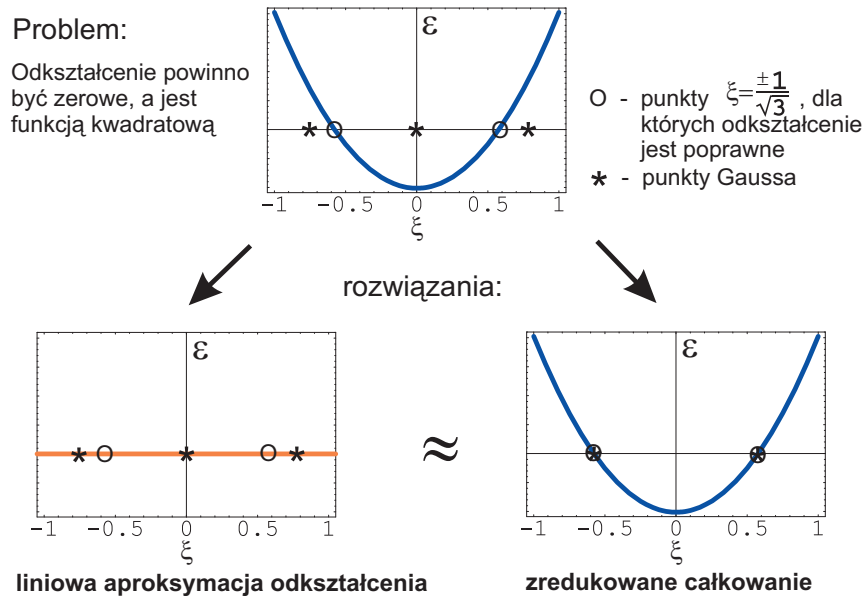
Rysunek 5.10: Rozkład odkształcenia błonowego dla zakrzywionego elementu 3-węzłowego.

5.1.3 Techniki eliminujące zakleszczanie w elementach belkowych

W podrozdziałach 5.1.1 i 5.1.2 zilustrowano efekty zakleszczania w 3-węzłowych elementach belkowych i określono współrzędne dwóch punktów, w których odkształcenia ścinające i membranowe mają prawidłowe wartości. Aby uniknąć efektu zakleszczania, zarówno membranowego jak i od ścinania poprzecznego, można zastosować dwa sposoby postępowania:

- całkować numeryczne tak, aby punkty Gaussa pokrywały się z punktami $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, co odpowiada zredukowanemu 2-punktowemu całkowaniu,
- aproksymować odkształcenie nowymi funkcjami, dobranymi z wykorzystaniem wartości w punktach $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ i stosować standardowe 3-punktowe całkowanie.

Oba sposoby pokazano schematycznie na Rys.5.11, dla przypadku gdy analityczne odkształcenie (ścinające poprzeczne lub błonowe) jest równe zero. Należy zwrócić uwagę, że powyższe sposoby nie są równoważne, co wynika z faktu, że energia jest kwadratową funkcją odkształcenia, patrz (5.3).



Rysunek 5.11: Eliminacja efektu zakleszczania dla 3-węzłowego elementu belkowego.

5.1.4 Zakleszczanie elementu powłokowego 9-węzłowego

Odształcenia ścinające poprzeczne powłoki. Postaci aproksymowanego odkształcenia ścinającego poprzecznego dla 9-węzłowego elementu powłokowego są analogiczne do równania (5.7) dla belki, więc mogą wywoływać zakleszczanie tego elementu.

Z tego względu, postępowanie dla poszczególnych składowych odkształcenia ścinającego poprzecznego powinno odpowiadać temu dla belki 3-węzłowej.

Odształcenia membranowe zakrzywionej powłoki. Rozważamy zakrzywioną lecz małowyniosłą powłokę. Dla najprostszego wariantu teorii powłok Marguerre'a [Marguerre, 1939] lub Donnella-Musztariego-Własowa [Donnell, 1934], składowe tensora odkształcenia membranowego są następujące

$$\varepsilon_{xx} = \bar{u}_{,x} + \frac{1}{2}\bar{w}_{,x}^2, \quad \varepsilon_{yy} = \bar{v}_{,y} + \frac{1}{2}\bar{w}_{,y}^2, \quad 2\varepsilon_{xy} = \bar{u}_{,x} + \bar{v}_{,y} + \bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y}. \quad (5.41)$$

Składowe ε_{xx} i ε_{yy} są analogiczne do równ.(5.19) dla zakrzywionych belek, dlatego można postąpić analogicznie, uwzględniając zakrzywienie powłoki za pomocą wstępnych przemieszczeń, u_0 , v_0 i w_0 , odmierzanych od postaci niezakrzywionej w następujący sposób:

$$\bar{u} = u_0 + u, \quad \bar{v} = v_0 + v, \quad \bar{w} = w_0 + w. \quad (5.42)$$

Zakładając, że nie ma wstępnych odkształceń wywołanych przez zakrzywienie, tzn. $\varepsilon_{xx}^0 = u_{0,x} + \frac{1}{2}w_{0,x}^2 = 0$ i $\varepsilon_{yy}^0 = v_{0,y} + \frac{1}{2}w_{0,y}^2 = 0$, oraz pomijając człony wyższego rzędu, $\frac{1}{2}w_{,x}^2$ i $\frac{1}{2}w_{,y}^2$, otrzymuje się

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} + w_{0,x}w_{,x}, \quad \varepsilon_{yy} = v_{,y} + w_{0,y}w_{,y}. \quad (5.43)$$

Te postaci odkształcenia są analogiczne do równ.(5.22) dla zakrzywionej belki, więc mogą wywoływać zakleszczanie elementu 9-węzłowego bazującego na funkcjach kształtu (4.3).

Z tego względu, postępowanie dla poszczególnych składowych odkształcenia membranowego w elemencie 9-węzłowym powinno odpowiadać temu dla belki 3-węzłowej.

Dla odkształceń ścinających w płaszczyźnie, po wprowadzeniu (5.42), otrzymuje się

$$2\varepsilon_{xy} = \bar{u}_{0,x} + \bar{u}_{,x} + \bar{v}_{0,y} + \bar{v}_{,y} + (\bar{w}_{0,x} + \bar{w}_{,x})(\bar{w}_{0,y} + \bar{w}_{,y}), \quad (5.44)$$

gdzie

$$(\bar{w}_{0,x} + \bar{w}_{,x})(\bar{w}_{0,y} + \bar{w}_{,y}) = \bar{w}_{0,x}\bar{w}_{0,y} + \bar{w}_{0,x}\bar{w}_{,y} + \bar{w}_{,x}\bar{w}_{0,y} + \bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y}.$$

Zakładając, że nie ma wstępnego odkształcenia wywołanego przez zakrzywienie, tzn. $2\varepsilon_{xy}^0 = u_{0,x} + u_{0,y} + \bar{w}_{0,x}\bar{w}_{0,y} = 0$ i pomijając człon wyższego rzędu, $\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y}$, otrzymuje się

$$2\varepsilon_{xy} = \bar{u}_{,x} + \bar{v}_{,y} + \bar{w}_{0,x}\bar{w}_{,y} + \bar{w}_{,x}\bar{w}_{0,y}. \quad (5.45)$$

Postawić można pytanie czy ta składowa odkształcenia może wywoływać zakleszczanie membranowe. Trudno znaleźć odpowiedź na to pytanie w sposób analityczny, jednak testy numeryczne wykazują, że gdy postępujemy tak jak w przypadku odpowiedzi twierdzącej, to wpływa to bardzo korzystnie na dokładność elementu.

5.2 Dwustopniowa aproksymacja odkształceń

Jednym ze sposobów eliminacji zakleszczania w elementach powłokowych jest dwustopniowa aproksymacja odkształceń, nazywana również metodą założonych odkształceń (ang. *Assumed Strain (AS) method*).

Pierwszy stopień to aproksymacja odkształceń dla przemieszczeń i rotacji wyrażonych za pomocą funkcji kształtu, natomiast drugi stopień to aproksymacja odkształceń na podstawie ich wartości obliczonych w wybranych punktach.

Położenie punktów próbkowania dobiera się tak, by uzyskać pożądane wartości odkształcenia dla pewnych stanów deformacji, tzn. spełnić warunki

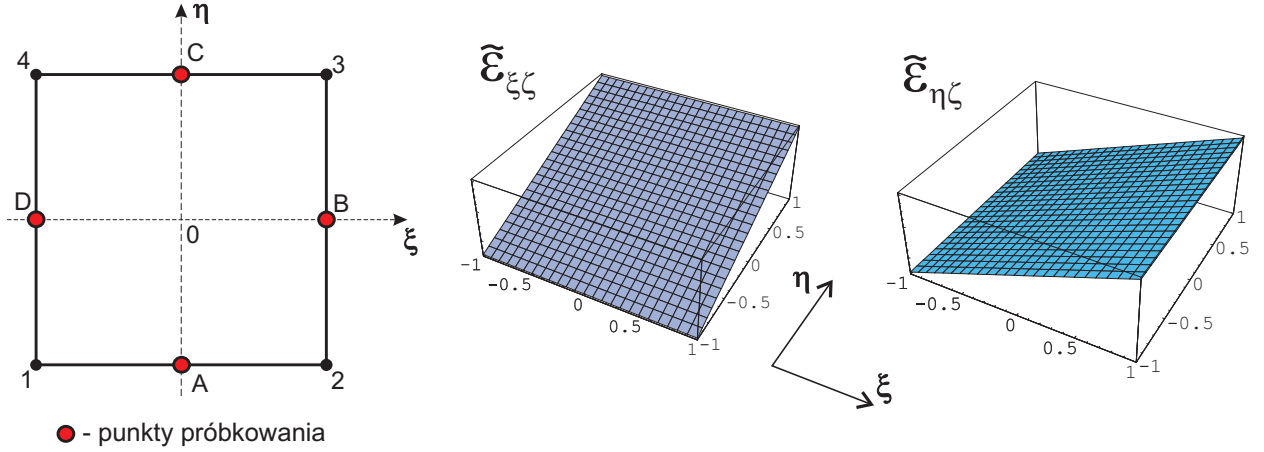
$$\varepsilon_{\xi\xi}^{MES} - \varepsilon_{\xi\xi}^{ANA} = 0, \quad \varepsilon_{\eta\xi}^{MES} - \varepsilon_{\eta\xi}^{ANA} = 0, \quad (5.46)$$

analogicznie jak dla elementu belkowego 3-węzłowego w Rozdz.5.1.1 i 5.1.2.

Element 4-węzłowy. Metoda ta została po raz pierwszy zastosowana do eliminacji zakleszczania od ścinania poprzecznego w elemencie płytowym 4-węzłowym, a następnie, była stopniowo rozwijana w szeregu prac, m.in. [MacNeal, 1978], [Hughes, Tezduyar, 1981], [MacNeal, 1982], a jej obecnie najczęściej wykorzystywana wersja przedstawiona została w pracy [Dvorkin, Bathe, 1984]. Odkształcenia ścinające poprzeczne są w tej metodzie modyfikowane (próbkowane i aproksymowane) w naturalnym układzie współrzędnych, stąd nazwa metoda ANS (ang. *Assumed Natural Strain method*). Dopiero później opracowano tę metodę dla elementów 9-węzłowych, płytowych i powłokowych.

Metoda ANS polega na tym, że najpierw obliczane są wartości odkształceń w określonych punktach, nazywanych punktami próbkowania (ang. *sampling points*), odpowiednio rozmieszczonych w elemencie. Następnie, konstruuje się funkcję aproksymującą odkształcenia wykorzystując te wartości. Wartości pierwotnego pola odkształceń są w tych punktach równe wartościom nowego pola odkształceń poprzecznych.

Oznaczmy punkty próbkowania przez $i = 1, \dots, n$, gdzie n to liczba punktów, wartości współrzędnych naturalnych przez (ξ_i, η_i) , a wartości odkształcenia w



Rysunek 5.12: Punkty próbkowania i nowy rozkład odkształceń dla elementu 4-węzłowego.

tych punktach przez $\varepsilon_{\xi\zeta}^i = \varepsilon_{\xi\zeta}(\xi_i, \eta_i)$. Wykorzystując wartości odkształcenia w punktach próbkowania, pole odkształceń można aproksymować następująco:

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\zeta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \varepsilon_{\xi\zeta}^i, \quad (5.47)$$

gdzie $R_i(\xi, \eta)$ to funkcje aproksymujące, które powinny być dobrane tak, by w punktach próbkowania spełnione były warunki

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\zeta}(\xi_i, \eta_i) = \varepsilon_{\xi\zeta}^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.48)$$

gdzie n to liczba punktów próbkowania. Dla składowej $\varepsilon_{\eta\zeta}$ postępowanie jest analogiczne.

W celu wyznaczenia położenia punktów próbkowania dla elementu powłokowego 4-węzłowego, przeprowadza się, w sposób analogiczny jak dla elementu belkowego 3-węzłowego w Rozdz.5.1.1 i 5.1.2, analizę dla elementu belkowego 2-węzłowego. Położenie punktów próbkowania pokazano na Rys.5.12. Np. dla odkształcenia ścinającego poprzecznego $\varepsilon_{\xi\zeta}$ wykorzystywane są 2 punkty, A i C, na linii $\xi = 0$. W efekcie odkształcenie to aproksymowane jest następująco

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\zeta}(\eta) = R_A(\eta) \varepsilon_{\xi\zeta}^A + R_C(\eta) \varepsilon_{\xi\zeta}^C, \quad (5.49)$$

gdzie $R_A(\eta) \doteq \frac{1}{2}(1 - \eta)$ i $R_C(\eta) \doteq \frac{1}{2}(1 + \eta)$ to funkcje liniowe w kierunku η . Można zauważyć, że aproksymacja tej składowej odkształcenia jest stała po ξ .

Element 9-węzłowy. Metodę ANS dla 9-węzłowego elementu powłokowego wyprowadza się wykorzystując rezultaty dla elementu belkowego 3-węzłowego z Rozdz.5.1.1 i 5.1.2, w sposób analogiczny jak dla elementu 4-węzłowego,

jednak inna jest ilość i położenie punktów próbkowania oraz postaci funkcji aproksymujących. Rozwinięcie metody dwustopniowej aproksymacji odkształceń dla elementów 9-węzłowych, płytowych i powłokowych, przedstawiono w pracy [Huang, Hinton, 1984].

Dla odkształcenia ścinającego poprzecznego wyrażonego formułą

$$2\varepsilon_{xz} = (2/L_\xi)w_\xi + \phi_\eta, \quad (5.50)$$

aproksymacje członów ϕ_η i w_ξ , dla standardowych funkcji kształtu dla elementu 9-węzłowego, są następujące:

$$\phi_\eta = \phi_\eta(1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \xi^2\eta, \eta^2, \xi\eta^2, \xi^2\eta^2), \quad w_\xi = w_\xi(1, \xi, \eta, \xi\eta, \eta^2, \xi\eta^2). \quad (5.51)$$

Zakłada się, że nowe pole odkształceń opisane jest analogicznym wielomianem jak w_ξ , tzn.

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} = \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(1, \xi, \eta, \xi\eta, \eta^2, \xi\eta^2), \quad (5.52)$$

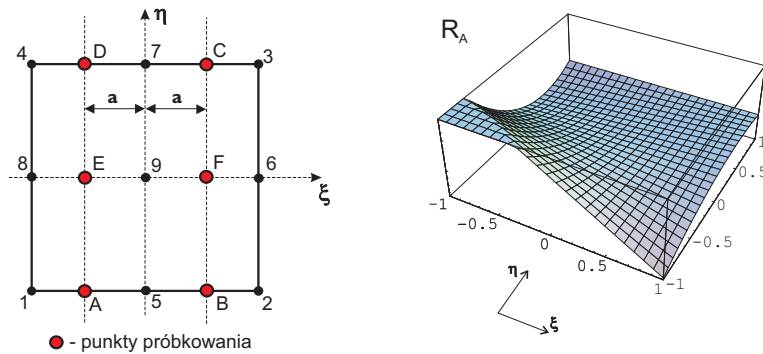
który jest liniowy po ξ i kwadratowy po η . Potrzeba 6 punktów próbkowania do jednoznacznego określenia współczynników dla tych członów, i jeżeli np. punkty te umieszczone zostaną tak jak pokazano na Rys.5.13, to otrzymamy następujące funkcje aproksymujące

$$\begin{aligned} R_A(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{\xi}{a})(\eta^2 - \eta), & R_B(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{\xi}{a})(\eta^2 - \eta), \\ R_C(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{\xi}{a})(\eta^2 + \eta), & R_D(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{\xi}{a})(\eta^2 + \eta), \\ R_E(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\xi}{a})(1 - \eta^2), & R_F(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\xi}{a})(1 - \eta^2), \end{aligned} \quad (5.53)$$

gdzie $a = 1/\sqrt{3}$. Aproksymowane odkształcenie ścinające poprzeczne dla kierunku ξ ma postać

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(\xi, \eta) = R_A\varepsilon_{\xi\xi}^A + R_B\varepsilon_{\xi\xi}^B + R_C\varepsilon_{\xi\xi}^C + R_D\varepsilon_{\xi\xi}^D + R_E\varepsilon_{\xi\xi}^E + R_F\varepsilon_{\xi\xi}^F. \quad (5.54)$$

Wykres $R_A(\xi, \eta)$ pokazano na Rys.5.13. Aproksymowane odkształcenie poprzecz-



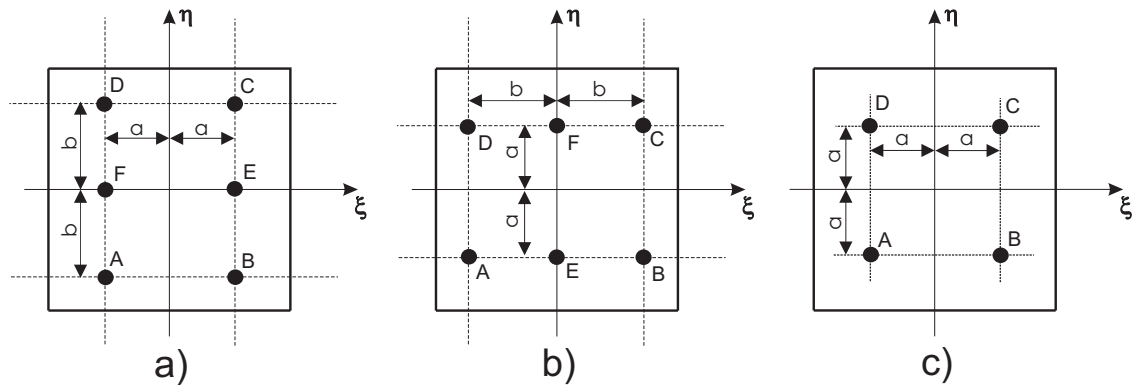
Rysunek 5.13: Punkty próbkowania i wykres funkcji aproksymującej $R_A(\xi, \eta)$.

ne $\tilde{\varepsilon}_{\eta\xi}$ dla kierunku η ma analogiczną formę jak $\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}$; wystarczy w formule (5.54) zamienić współrzędne, $\xi \rightarrow \eta$ oraz $\eta \rightarrow \xi$.

Powyższe przykłady dwustopniowej aproksymacji odkształceń przedstawiono w pracach [Dvorkin, Bathe, 1984] i [Huang, Hinton, 1984]. Dotyczą one tylko odkształceń ścinających poprzecznych i aproksymacja odkształceń dokonywana jest w naturalnym układzie współrzędnych. Są to jedne z pierwszych prac dotyczących dwustopniowych aproksymacji; później metoda została użyta do modyfikacji odkształceń błonowych, zastosowano interpolacje w lokalnym układzie kartezjańskim, a także testowano różne punkty próbkowania. Przegląd podstawowych wariantów przedstawiony został w następnym rozdziale.

5.2.1 Warianty dwustopniowych aproksymacji odkształceń

Poniżej omówiono warianty dwustopniowych aproksymacji odkształceń dla elementów powłokowych 9-węzłowych.



Rysunek 5.14: Położenie punktów próbkowania.

Zredukowana liczba punktów: a) w kierunku ξ , b) w kierunku η , c) w dwóch kierunkach.

Używając dwustopniowych aproksymacji zawsze zakłada się położenie punktów próbkowania i wyznacza postaci funkcji aproksymujących. Jednak w metodzie tej jest pewna dowolność, dlatego opracowano różne jej warianty. Na Rys.5.14 pokazano trzy zestawy punktów próbkowania, które są najczęściej stosowane. Są one powiązane z funkcjami interpolującymi w sposób zdefiniowany poniżej. (Dla wszystkich przedstawionych formuł $a = 1/\sqrt{3}$.)

1. Dla składowych odkształcenia $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ i $\varepsilon_{3\alpha}$, ($\alpha = 1, 2$) stosuje się punkty próbkowania pokazane na Rys.5.14 a) i b) oraz używa się zestawu funkcji interpolujących zaproponowanych w [Huang, Hinton, 1984], [Huang, Hinton, 1986],

- dla zredukowanej liczby punktów w kierunku ξ , Rys.5.14 a),

$$\begin{aligned} R_A(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{\xi}{a}) \left[\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 - \frac{\eta}{b} \right], & R_B(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{\xi}{a}) \left[\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 - \frac{\eta}{b} \right], \\ R_C(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{\xi}{a}) \left[\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \frac{\eta}{b} \right], & R_D(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{\xi}{a}) \left[\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \frac{\eta}{b} \right], \\ R_E(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\xi}{a}) \left[1 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right], & R_F(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\xi}{a}) \left[1 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Zestaw ten stosowany jest do odkształceń ϵ_{11} i ϵ_{31} .

- dla zredukowanej liczby punktów w kierunku η , Rys.5.14 b),

$$\begin{aligned} R_A(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{\eta}{a}) \left[\left(\frac{\xi}{b}\right)^2 - \frac{\xi}{b} \right], & R_B(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{\eta}{a}) \left[\left(\frac{\xi}{b}\right)^2 - \frac{\xi}{b} \right], \\ R_C(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{\eta}{a}) \left[\left(\frac{\xi}{b}\right)^2 + \frac{\xi}{b} \right], & R_D(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{\eta}{a}) \left[\left(\frac{\xi}{b}\right)^2 + \frac{\xi}{b} \right], \\ R_E(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\eta}{a}) \left[1 - \left(\frac{\xi}{b}\right)^2 \right], & R_F(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\eta}{a}) \left[1 - \left(\frac{\xi}{b}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Zestaw ten stosowany jest do odkształceń ϵ_{22} i ϵ_{32} .

Dla kierunków w których liczba punktów nie jest redukowana, mogą one zostać umiejscowione na dwa sposoby: na krawędzi elementu dla $b = 1$ lub w środku dla $b = \sqrt{3/5}$, patrz [Huang, Hinton, 1986]. Odpowiednia wartość b powinna zostać użyta także w funkcjach interpolujących dla tego punktu.

W cytowanej pracy autorzy preferują położenie punktów na krawędzi, ponieważ: (i) zapewnia to ciągłość odkształceń ścinających pomiędzy sąsiadującymi elementami, (str.53), oraz (ii) jest spełniony tzw. 'patch test' na ścinanie, patrz uwaga na str.90 i test na str.59. Druga wartość ($b = \sqrt{3/5}$) używana jest w pracy [Bucalem, Bathe, 1993], a także w niniejszej pracy, z uwagi na to, że wtedy jedna ze współrzędnych naturalnych dla tych punktów jest taka sama jak dla punktów całkowania Gaussa.

2. Dla odkształcenia ścinającego ϵ_{12} stosowane są trzy różne podejścia:

(a) W [Park, Stanley, 1986] oraz [Huang, Hinton, 1986] zastosowano 6-punktowy schemat aproksymacji zgodny z (5.55) i (5.56) stosowany jest do poszczególnych części ϵ_{12} .

(b) W [Jang, Pinsky, 1987] także bazuje się na punktach próbkowania pokazanych na Rys.5.14 a) i b), lecz używa inne funkcje aproksymujące:

- dla zredukowanej liczby punktów w kierunku ξ , Rys.5.14 a),

$$\begin{aligned} R_A(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\xi}{a})(\frac{1}{6} - \frac{\eta}{2}), & R_B(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\xi}{a})(\frac{1}{6} - \frac{\eta}{2}), \\ R_C(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\xi}{a})(\frac{1}{6} + \frac{\eta}{2}), & R_D(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\xi}{a})(\frac{1}{6} + \frac{\eta}{2}), \\ R_E(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\xi}{a})\frac{2}{3}, & R_F(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\xi}{a})\frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Zestaw ten stosowany jest do odkształceń ϵ_{12}^{ξ} .

- dla zredukowanej liczby punktów w kierunku η , Rys.5.14 b),

$$\begin{aligned} R_A(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\eta}{a})(\frac{1}{6} - \frac{\xi}{2}), & R_B(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\eta}{a})(\frac{1}{6} - \frac{\xi}{2}), \\ R_C(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\eta}{a})(\frac{1}{6} + \frac{\xi}{2}), & R_D(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\eta}{a})(\frac{1}{6} + \frac{\xi}{2}), \\ R_E(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\eta}{a})\frac{2}{3}, & R_F(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\eta}{a})\frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Zestaw ten stosowany jest do odkształceń ε_{12}^η .

- (c) W [Bucalem, Bathe, 1993] stosuje się zredukowaną liczbę punktów próbkowania w obu kierunkach, patrz Rys.5.14 c), i używane są następujące funkcje aproksymujące:

$$\begin{aligned} R_A(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{\xi}{a})(1 - \frac{\eta}{a}), & R_B(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{\xi}{a})(1 - \frac{\eta}{a}), \\ R_C(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{\xi}{a})(1 + \frac{\eta}{a}), & R_D(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{\xi}{a})(1 + \frac{\eta}{a}). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Użycie czterech punktów próbkowania jest wygodniejsze w przypadku odkształceń nieliniowych.

Dla wszystkich powyższych schematów, składowa tensora odkształcenia ε , do której stosuje się dwustopniową aproksymację, jest wyrażona w następujący sposób:

$$\tilde{\varepsilon}(\xi, \eta) = \sum_i R_i(\xi, \eta) \varepsilon_i, \quad (5.60)$$

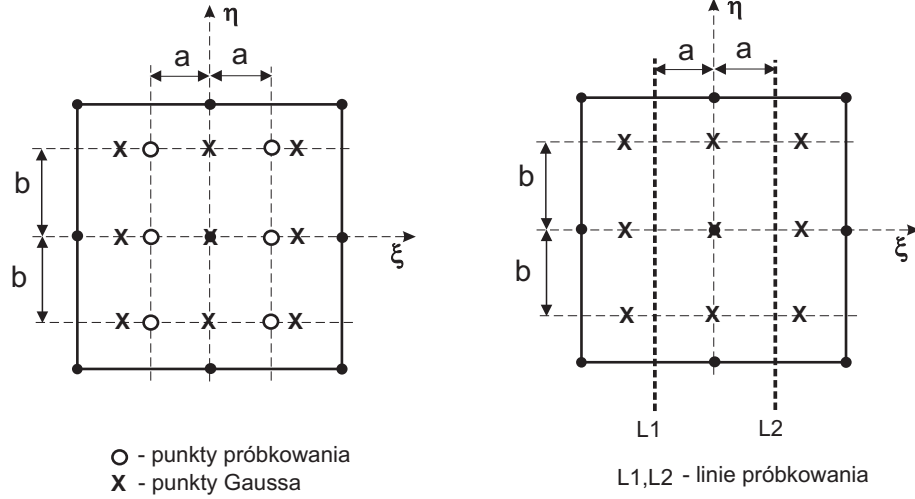
gdzie $i = A, B, C, D, E, F$ dla schematów z 6 punktami próbkowania, oraz $i = A, B, C, D$ dla schematów z 4 punktami próbkowania, zgodnie z Rys.5.14.

5.2.2 Element powłokowy 9-AS

Dwustopniowe schematy pokazane na Rys.5.14a i b wykorzystują łącznie 12 punktów próbkowania, co oznacza znaczny wzrost liczby dodatkowych obliczeń, w porównaniu ze standardowym sformułowaniem elementu 9-węzłowego. Dlatego w pracy [Panasz, Wisniewski, 2007] zaproponowano modyfikację tego schematu. Jeżeli rozważy się próbkowanie i całkowanie numeryczne jako elementy ze sobą związane poprzez wartość $b = \sqrt{3/5}$, to można uprościć całą procedurę dwustopniowej aproksymacji, co zostało przedstawione poniżej.

Składowe tensora odkształcenia Greena w bazie lokalnej $\{\mathbf{t}_k\}$ w środku elementu otrzymujemy przez transformację składowych tego tensora w bazie odniesienia $\{\mathbf{i}_k\}$, patrz wzór (2.36).

Rozważmy odkształcenie ścinające poprzeczne ε_{13} , które próbkujemy w zredukowanej liczbie punktów w kierunku ξ , patrz Rys.5.15a, i aproksymujemy za pomocą funkcji (5.55). Na Rys.5.15a zaznaczono także punkty całkowania dla schematu całkowania 3×3 Gaussa.



Rysunek 5.15: Położenie: a) punktów próbkowania, b) linii próbkowania.

Widzimy, że gdy $b = \sqrt{3/5}$, wtedy punkty próbkowania i punkty całkowania leżą na tych samych trzech liniach: $\eta = -b$, $\eta = 0$ i $\eta = +b$. Dlatego punkty całkowania próbują odkształcenie ε_{13} dla właściwych wartości współrzędnej η , i nie ma potrzeby modyfikacji tego odkształcenia w kierunku η .

W konsekwencji, wystarczające jest zastosowanie dwustopniowej aproksymacji tylko w kierunku ξ . W ten sposób, zamiast 6-punktowej formuły z równania (5.60), można użyć znacznie prostszej, liniowej aproksymacji tylko w kierunku ξ ,

$$\tilde{\varepsilon}_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \varepsilon|_{\xi=-a} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi}{a}\right) \varepsilon|_{\xi=+a}, \quad (5.61)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $\varepsilon \doteq \varepsilon_{13}$ i $a = 1/\sqrt{3}$. Związek ten wprowadza dwie linie próbkowania zamiast punktów próbkowania, co zostało pokazane na Rys.5.15b, gdzie linia $L1$ jest położona w $\xi = -a$, a linia $L2$ w $\xi = a$. Analogiczna formuła może zostać użyta dla odkształceń poprzecznych $\varepsilon \doteq \varepsilon_{23}$,

$$\tilde{\varepsilon}_\eta(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta}{a}\right) \varepsilon|_{\eta=-a} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\eta}{a}\right) \varepsilon|_{\eta=+a}, \quad (5.62)$$

ze zredukowaną liczbą punktów próbkowania w kierunku η , patrz Rys.5.14b i równ.(5.56).

Równania (5.61) i (5.62) stosuje się również dla odkształceń membranowych ε_{11} i ε_{22} w bazie lokalnej $\{\mathbf{t}_k\}$ w środku elementu. W stosunku do odkształceń ścinających w płaszczyźnie stycznej elementu ε_{12} i skręcających κ_{12} , redukcja stopnia wielomianu aproksymującego następuje w dwóch kierunkach. Używa się wtedy punkty próbkowania pokazane na Rys.5.14c razem z funkcjami aproksymującymi wg równ.(5.59).

Uwaga. Zaproponowane funkcje aproksymacyjne, (5.61) i (5.62), mogą być zastosowane tylko wtedy, gdy położenie punktów próbkowania określone jest przez $b = \sqrt{3/5}$, tzn. leżą one na tych samych liniach co punkty Gaussa. Wykonane testy, takie jak np. te omówione w Rozdz. 6.2.2 i 6.2.3 pokazują, że elementy w których zastosowano $b = \sqrt{3/5}$ są bardziej odporne na wstępne zniekształcenie kształtu niż elementy w których zastosowano $b = 1$.

Zaproponowane formy dwustopniowych aproksymacji zostały zaimplementowane w elemencie powłokowym oznaczonym jako 9-AS i scharakteryzowanym w Tab.5.1. Do całkowania tego elementu używa się schematu 3×3 punkty Gaussa.

Tabela 5.1: Metoda AS dla elementu powłokowego 9-AS.

Składowa odkształcenia	Schemat aproksymacji
$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}$	równ.(5.61)
$\varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}$	równ.(5.62)
ε_{12}	równ.(5.59), Rys.5.14c
κ_{12}	równ.(5.59), Rys.5.14c

5.2.3 Porównanie metody AS i ANS dla odkształceń ścinających poprzecznych

Poniżej porównane zostaną dwa sposoby traktowania odkształceń ścinających poprzecznych w ramach metody dwustopniowych aproksymacji:

1. W elemencie własnym 9-AS zastosowano metodę AS do składowych odkształceń ścinających poprzecznych w lokalnym ortonormalnym układzie $\{\mathbf{t}_k\}$ w środku elementu. Składowe te są aproksymowane w każdym kierunku oddzielnie.
2. Metoda ANS, zaproponowana w [Dvorkin, Bathe, 1984] dla elementu 4-węzłowego, może także być zastosowana w elementach 9-węzłowych.

W metodzie ANS, składowe odkształceń ścinających poprzecznych aproksymowane są następująco:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{\zeta\xi} \\ \varepsilon^{\zeta\eta} \end{Bmatrix}, \quad (5.63)$$

gdzie

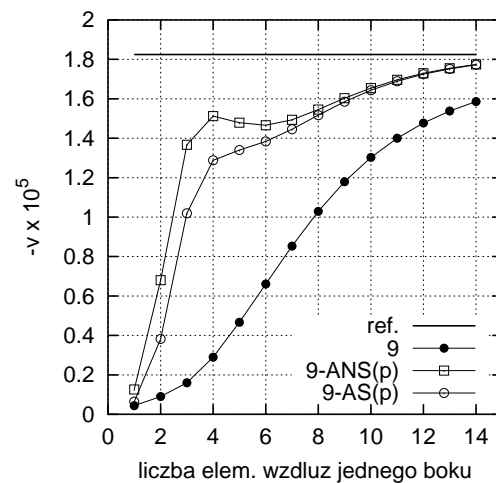
$$\varepsilon^{\zeta\xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \xi} \cdot \mathbf{a}_3, \quad \varepsilon^{\zeta\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \eta} \cdot \mathbf{a}_3, \quad (5.64)$$

to składowe kontrawariantne w bazie $\{\mathbf{g}_i\}$, które są aproksymowane w każdym kierunku oddzielnie, np. $\varepsilon^{\zeta\xi}$ w kierunku η wg wzoru

$$\tilde{\varepsilon}^{\zeta\xi}(\eta) = R_A(\eta) \varepsilon_A^{\zeta\xi} + R_C(\eta) \varepsilon_C^{\zeta\xi}, \quad (5.65)$$

który jest podobny do wzoru (5.49).

W celu porównania metody AS i ANS zaimplementowano je w elemencie 9-węzłowym i przeprowadzono przykładowe obliczenia dla cylindra z przeponami, patrz Rozdz.6.11. Jest to jeden z tych przykładów, w których silnie uwidacznia się zakleszczanie od ścinania poprzecznego. W testowanych elementach modyfikowano wyłącznie odkształcenia ścinające poprzeczne, stąd oznaczenie elementów zawierające literę (p), i sprawdzano zbieżność rozwiązania wraz z zagęszczaniem siatki.



Rysunek 5.16: Cylinder z przeponami. Zbieżność elementów: 9, 9-ANS(p), 9-AS(p).

Wyniki obliczeń numerycznych pokazano na Rys.5.16. Widać, że elementy 9-ANS(p) oraz 9-AS(p) dają dokładniejsze rezultaty niż standardowy element 9. Stosując do odkształceń ścinających poprzecznych metodę ANS uzyskuje się trochę lepszą zbieżność dla rzadkiej siatki niż dla metody AS, ale różnica ta maleje wraz z zagęszczaniem siatki. Charakterystycznym efektem jest brak monotoniczności rozwiązania dla elementu 9-ANS(p), co uwidacznia się dla 4, 5 lub 6 elementów wzdłuż jednej krawędzi.

Należy zauważyć, że w rozwiązaniach pokazanych na Rys.5.16 widoczne jest zakleszczanie membranowe, które nie było eliminowane w testowych elementach 9-ANS(p) oraz 9-AS(p). Dla obu testowych elementów zbieżność jest relatywnie wolna, ale i tak szybsza niż dla elementu 9.

5.3 Dwustopniowa aproksymacja gradientu przemieszczenia

Jednym ze sposobów eliminacji zakleszczania w elementach powłokowych jest dwustopniowa aproksymacja zastosowana do gradientu przemieszczenia $\nabla \mathbf{u}$. Oznaczamy tę metodę jako metodę ADG (ang. *Assumed Displacement Gradient (ADG) method*). W metodzie tej próbkowane i aproksymowane są składowe $\nabla \mathbf{u}$ w lokalnej kartezyjskiej bazie $\{\mathbf{t}_k\}$ w środku elementu.

Wektor przemieszczenia punktu powłoki wyrażony jest następująco

$$\mathbf{u}(\zeta) \doteq \mathbf{x}(\zeta) - \mathbf{y}(\zeta) = \mathbf{u}_0 + \zeta(\mathbf{a}_3 - \mathbf{t}_3), \quad (5.66)$$

a gradient przemieszczenia w lokalnej bazie $\{\mathbf{t}_k\}$ w środku elementu (patrz równ.(2.30)) może zostać rozdzielony na część stałą oraz liniową po ζ ,

$$\mathbf{G}(\zeta) = \mathbf{G}_0 + \zeta \mathbf{G}_1, \quad (5.67)$$

gdzie $\mathbf{G}_0 \doteq \mathbf{R}_{0c}^T \nabla \mathbf{u}_0 \mathbf{R}_{0c}$ i $\mathbf{G}_1 \doteq \mathbf{R}_{0c}^T \nabla(\mathbf{a}_3 - \mathbf{t}_3) \mathbf{R}_{0c}$.

Niech g oznacza odpowiednią składową \mathbf{G}_0 lub \mathbf{G}_1 . Dwustopniową aproksymację stosuje się w analogiczny sposób jak dla odkształceń, tzn.

$$\tilde{g}_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) g|_{\xi=-a} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi}{a}\right) g|_{\xi=+a}, \quad (5.68)$$

lub

$$\tilde{g}_\eta(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta}{a}\right) g|_{\eta=-a} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\eta}{a}\right) g|_{\eta=+a}, \quad (5.69)$$

w zależności od składowej. Powyższe wzory są analogiczne do równań (5.61) i (5.62) dla odkształceń.

5.3.1 Element powłokowy 9-ADG

Zaproponowana forma dwustopniowych aproksymacji gradientu przemieszczenia została zaimplementowana w elemencie powłokowym oznaczonym jako 9-ADG i scharakteryzowanym w Tab. 5.2. Do całkowania tego elementu używa się 3×3 punkty Gaussa.

Uwaga. Warto zauważyć, że powyższa modyfikacja gradientu przemieszczenia wpływa również na rotacyjne równanie więzów, $\text{skew}(\mathbf{Q}_0^T \mathbf{F}_0) = \mathbf{0}$, które zależy od $\mathbf{F}_0 = \mathbf{I} + \mathbf{G}_0$, i na odpowiadający mu funkcjonal F_{drill} , równ.(3.2). Z uwagi na to, że $\nabla \mathbf{u}$ jest niesymetryczny, metoda ADG musi być zastosowana do większej liczby składowych niż metoda AS, która jest stosowana do składowych symetrycznego tensora odkształcenia.

Tabela 5.2: Metoda ADG dla elementu powłokowego 9-ADG.

Część	Składowa	Schemat aproksymacji
\mathbf{G}_0	11, 13, 31	równ.(5.68)
	22, 23, 32	równ.(5.69)
	12, 21	równ.(5.59), Rys.5.14c
\mathbf{G}_1	12, 21	równ.(5.59), Rys.5.14c

5.4 Selektywne zredukowane całkowanie

Jednym ze sposobów eliminacji zakleszczania w elementach powłokowych jest metoda selektywnego zredukowanego całkowania (ang. *Selective Reduced Integration (SRI)*), zaproponowana w pracy [Hughes, Cohen, Haroun, 1978].

Metoda SRI opracowana w niniejszej rozprawie wykorzystuje punkty Gaussa pokrywające się z punktami w których odkształcenia są dokładne. Rzędy całkowania poszczególnych członów energii w metodzie SRI są tak dobierane, by nie była potrzebna dodatkowa stabilizacja, co odróżnia ją od metody jednolicie zredukowanego całkowania (ang. *Uniformly Reduced Integration (URI)*). Zaletą metody SRI jest to, że wzrasta szybkość obliczeń dzięki eliminacji dwustopniowych aproksymacji i zmniejszeniu liczby punktów Gaussa.

5.4.1 Element powłokowy 9-SRI

W tym rozdziale omówiono sformułowanie elementu powłokowego 9-węzłowego bazującego na metodzie selektywnego zredukowanego całkowania (SRI).

Zakłada się, że własności materiału powłoki są symetryczne względem powierzchni środkowej po grubości powłoki. Założenie to obejmuje także najbardziej istotny dla zastosowań przypadek gdy własności materiałowe są stałe po grubości powłoki.

Dla tego założenia, energia odkształcenia powłoki, po scałkowaniu po grubości elementu, dekomponuje się na sumę dwóch części

$$\mathcal{W}_{sh} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1, \quad (5.70)$$

gdzie \mathcal{W}_0 i \mathcal{W}_1 są zdefiniowane w równaniu (2.45) i uwzględniają odkształcenia normalne (2.58), obliczone z warunków zerowych sił i momentów normalnych. Dzięki temu można stosować różne schematy całkowania dla poszczególnych części energii odkształcenia powłoki. Powyższe części są sumą następujących członów związanych z odkształceniami

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_0(\varepsilon_{11}^2, \varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}^2, \varepsilon_{31}^2, \varepsilon_{32}^2), \quad (5.71)$$

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_1(\kappa_{11}^2, \kappa_{22}^2, \kappa_{11}\kappa_{22}, \kappa_{12}^2), \quad (5.72)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_0(\varepsilon_{11}^2) &= hc_1\varepsilon_{11}^2, & \mathcal{W}_1(\kappa_{11}^2) &= \frac{h^3}{12}c_1\kappa_{11}^2, \\
\mathcal{W}_0(\varepsilon_{22}^2) &= hc_1\varepsilon_{22}^2, & \mathcal{W}_1(\kappa_{22}^2) &= \frac{h^3}{12}c_1\kappa_{22}^2, \\
\mathcal{W}_0(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}) &= hc_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, & \mathcal{W}_1(\kappa_{11}\kappa_{22}) &= \frac{h^3}{12}c_2\kappa_{11}\kappa_{22}, \\
\mathcal{W}_0(\varepsilon_{12}^2) &= hc_3\varepsilon_{12}^2, & \mathcal{W}_1(\kappa_{12}^2) &= \frac{h^3}{12}c_3\kappa_{12}^2, \\
\mathcal{W}_0(\varepsilon_{31}^2) &= \frac{5}{6}hc_3\varepsilon_{31}^2, & \mathcal{W}_1(\kappa_{31}^2) &= 0, \\
\mathcal{W}_0(\varepsilon_{32}^2) &= \frac{5}{6}hc_3\varepsilon_{32}^2, & \mathcal{W}_1(\kappa_{32}^2) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.73}$$

a współczynniki konstytutywne: $c_1 \doteq \frac{2G(\lambda+G)}{\lambda+2G}$, $c_2 \doteq \frac{2G\lambda}{\lambda+2G}$ i $c_3 = 2G$.

Druga pochodna zdyskretyzowanej energii potencjalnej względem wektora zmiennych w węzłach elementu, prowadzi do następujących macierzy sztywności

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\varepsilon_{11}^2) + \mathbf{K}(\varepsilon_{22}^2) + \mathbf{K}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}) + \mathbf{K}(\varepsilon_{12}^2) + \mathbf{K}(\varepsilon_{31}^2) + \mathbf{K}(\varepsilon_{32}^2), \tag{5.74}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\kappa_{11}^2) + \mathbf{K}(\kappa_{22}^2) + \mathbf{K}(\kappa_{11}\kappa_{22}) + \mathbf{K}(\kappa_{12}^2). \tag{5.75}$$

Dodatkowo otrzymuje się macierz $\mathbf{K}_{drill}(C_d^2)$, wynikającą z równania (3.2). Dla każdej z tych macierzy traktowanej z osobna, może zostać dobrany odpowiedni schemat całkowania Gaussa.

Punkty całkowania w schematach 2×3 -punkty, 3×2 -punkty i 2×2 -punkty są zgodne z punktami próbkowania zaznaczonymi na Rys.5.14. Wagi przy całkowaniu można obliczyć na podstawie Tabeli 4.1.

Uwaga. W pracy [Huang, Hinton, 1986], zredukowane całkowanie zostało zastosowane tylko do składników energii odkształcenia odpowiedzialnych za zakleszczanie, lecz, jak wykazały testy własne, można zastosować zredukowane całkowanie także do innych komponentów. W ogólności, metoda SRI nie może być traktowana jako całkowicie równoważna technice AS.

Metoda SRI zwiększa dokładność elementu poprzez likwidację zakleszczania oraz zwiększa szybkość obliczeń dzięki zmniejszeniu liczby punktów Gaussa. Należy jednak postępować ostrożnie, bowiem nadmierna redukcja rzędu całkowania prowadzi do dodatkowych niepożądanych zerowych wartości własnych macierzy sztywności. W elemencie powłokowym powinno być nie więcej niż 6 zerowych wartości własnych, związanych z ruchem sztywnym elementu. Każda dodatkowa wartość zerowa może, chociaż nie musi, spowodować pojawienie się mechanizmów, i zmniejszyć stabilność elementu.

Różne schematy całkowania sprawdzono wykorzystując test na wartości własne opisany w Rozdz.6.1. Testowano kilka elementów z selektywnym zredukowanym

całkowaniem, w celu sprawdzenia wpływu zredukowanego całkowania różnych komponentów sztywności na liczbę zerowych wartości własnych. Rezultaty podano w Tab.5.3. Można zauważyć, że

1. Element 9-URI to element poddany jednolicie zredukowanemu całkowaniu, który wymaga stabilizacji ponieważ ma 12 dodatkowych zerowych wartości własnych.
2. Porównując elementy 9-SRI(1) i 9-URI widzimy, że zredukowane 2×2 -punkty całkowanie C_d^2 , czyli członu dla rotacji normalnej, wprowadza 5 dodatkowych zerowych wartości własnych.
3. Elementy 9-SRI(2) i 9-SRI(3) można uznać za klasyczne elementy SRI, w których jednolicie podcałkowana jest sztywność związana ze ścinaniem poprzecznym i ewentualnie sztywność membranova, patrz [Parish, 1979], [Huang, 1988], [Belytschko, Wong, Stolarski, 1989], [Kreja, Schmidt, Reddy, 1997]. Elementy te wymagają dodatkowej stabilizacji.
4. Element który ostatecznie wyselekcjonowano, oznaczony jako 9-SRI, nie wymaga stabilizacji. W Tabeli 5.4 podano schematy całkowania odpowiednich części macierzy sztywności dla tego elementu. Zredukowane 2×2 -punkty całkowanie zostało zastosowane do kilku członów energii i nie powoduje to pojawienia się dodatkowych zerowych wartości własnych macierzy sztywności elementu.

Tabela 5.3: Liczba zerowych wartości własnych dla różnych schematów całkowania.

Element	Schemat całkowania komponentu macierzy sztywności dla				Liczba zerowych wartości własnych
	$\varepsilon_{31}^2, \varepsilon_{32}^2$	$\varepsilon_{11}^2, \varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}^2$	$\kappa_{11}^2, \kappa_{22}^2, \kappa_{11}\kappa_{22}, \kappa_{12}^2$	C_d^2	
9	3×3	3×3	3×3	3×3	6+0
9-URI	2×2	2×2	2×2	2×2	6+12
9-SRI(1)	2×2	2×2	2×2	3×3	6+7
9-SRI(2)	2×2	2×2	3×3	3×3	6+4
9-SRI(3)	2×2	3×3	3×3	3×3	6+1
9-SRI	jak w Tab.5.4				6+0

Tabela 5.4: Schemat selektywnego całkowania elementu powłokowego 9-SRI.

Reguła całkowania	Komponent macierzy \mathbf{K} dla
3×3	$\kappa_{11}^2, \kappa_{22}^2, \kappa_{11}\kappa_{22}, C_d^2$
2×3	$\varepsilon_{11}^2, \varepsilon_{31}^2$
3×2	$\varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{32}^2$
2×2	$\varepsilon_{12}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, \kappa_{12}^2$

Rozdział 6

Testy numeryczne

W tym rozdziale opisane są testy numeryczne, które przeprowadzono w celu weryfikacji własności opracowanych w rozprawie 9-węzłowych elementów powłokowych.

Cztery opracowane w rozprawie elementy powłokowe zostały scharakteryzowane w Tabeli 6.1. Elementy te są analitycznie całkowane po grubości, a całkowanie po powierzchni środkowej scharakteryzowane zostało w Tabeli 6.1, gdzie FI oznacza pełne całkowanie (3×3 -punkty Gaussa). Szczegóły dotyczące całkowania omówiono w Rozdz.4.2.

Tabela 6.1: Charakterystyka opracowanych elementów powłokowych.
Elementy 9-węzłowe z 6 stopniami swobody w węźle.

Element	Charakterystyka	Całkowanie w warstwie	Opisany w
9	standardowy	FI	Rozdz.4
9-ADG	ADG	FI	Rozdz.5.3
9-AS	AS	FI	Rozdz.5.2
9-SRI	SRI	Tabela 5.4	Rozdz.5.4

W przypadku oceny dokładności elementów, nie są uwzględniane wyniki dla standardowego elementu oznaczonego jako 9 - zostały one umieszczone jedynie w celach porównawczych.

Poza tym, w celach porównawczych używany jest 4-węzłowy element powłokowy, z gradientem przemieszczenia wzbogaconym przez 4 dodatkowe mody, oznaczony jako 4-EADG4, (ang. *Enhanced Assumed Displacement Gradient*). Dla tego elementu używane są siatki o takiej samej liczbie węzłów jak dla elementów 9-węzłowych. Oznacza to, że na każdy element 9-węzłowy przypadają 4 elementy 4-węzłowe.

Elementy własne zostały zaprogramowane przy użyciu programu AceGen, opracowanego przez J. Korelca, patrz [AceGen], [Korelc, 2002], i przetestowane w programie FEAP opracowanym przez R.L. Taylora, patrz [FEAP], [Zienkiewicz, Taylor, 1989].

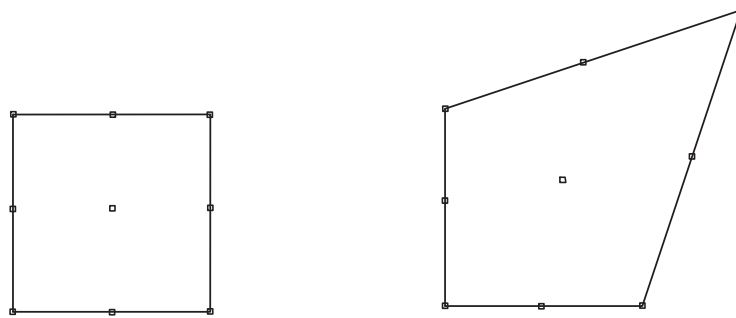
Rezultaty porównawcze zostały uzyskane na drodze obliczeń własnych przeprowadzonych za pomocą profesjonalnych programów MES [ADINA] i [ABAQUS]. Rezultaty te zostały uzyskane za pomocą elementów opisanych w Tabli 6.2, gdzie URI oznacza jednolite zredukowane całkowanie.

Tabela 6.2: Referencyjne 9-węzłowe elementy powłokowe z 5 stopniami w węźle.

Element	Charakterystyka	Całkowanie w warstwie	Ref.
MITC9	AS	FI	[ADINA]
S9R5	przem./napr.	SRI	[ABAQUS]
$\gamma - \psi$		URI+stabilizacja	[Belytschko, Wong, Stolarski, 1989]

6.1 Test na wartości własne

Test na wartości własne macierzy sztywności jest podstawowym testem, sprawdzającym, czy w elemencie nie występują niepożądane mody deformacji tzw. mechanizmy. Test ten został opisany w Rozdz.4.5 dla elementu 9-węzłowego dwuwymiarowego.



Rysunek 6.1: Kształty elementów użytych w analizie wartości własnych.

Wartości własne wyliczane są dla pojedynczego elementu bez warunków brzegowych, przy czym zastosowano dwa kształty elementu, patrz Rys.6.1. Pierwszy, to kwadrat o regularnym położeniu węzłów i długości boku równej 1. Drugi otrzymano przez przesunięcie jednego węzła narożnego kwadratu o wektor $(0.5, 0.5)$ w płaszczyźnie elementu, a inne węzły są przesunięte proporcjonalnie. Wszystkie krawędzie pozostają proste, a węzły krawędziowe są równo oddalone od narożnych. Dane materiałowe są następujące: $E = 10^6$, $\nu = 0.3$, grubość powłoki $h = 0.1$. Wartości własne dla elementu powłokowego 9-AS o kształcie kwadratu zamieszczono w Tabeli 6.3.

Liczba zerowych wartości własnych macierzy sztywności powinna być równa liczbie stopni swobody związanych z ruchem sztywnym. W przypadku rozwijanych w

Tabela 6.3: Wartości własne elementu powłokowego 9-AS o kształcie kwadratu.

0.5261E+06	0.5261E+06	0.2238E+06	0.2168E+06	0.2146E+06	0.1524E+06
0.1524E+06	0.1026E+06	0.8953E+05	0.8815E+05	0.7143E+05	0.7143E+05
0.5793E+05	0.5549E+05	0.5549E+05	0.4366E+05	0.2809E+05	0.2655E+05
0.2655E+05	0.2405E+05	0.2121E+05	0.2121E+05	0.1690E+05	0.2700E+04
0.1928E+04	0.1928E+04	0.7507E+03	0.3368E+03	0.3368E+03	0.1864E+03
0.1784E+03	0.1754E+03	0.6067E+02	0.6067E+02	0.5637E+02	0.4740E+02
0.4397E+02	0.4397E+02	0.4066E+02	0.3436E+02	0.2823E+02	0.2823E+02
0.2346E+02	0.1367E+02	0.8488E+01	0.4117E+01	0.4117E+01	0.2338E+01
0	0	0	0	0	0

tej pracy elementów powłokowych oznacza to 6 zerowych wartości własnych: 3 związane z przemieszczeniami i 3 związane z obrotami jak ciało sztywne. Jeśli występuje więcej zerowych wartości własnych niż 6 to uznaje się, że wynik testu na wartości własne jest negatywny i macierz sztywności jest niewystarczającego rzędu (ang. *rank deficient*).

Wszystkie opracowane elementy, tzn. 9, 9-ADG, 9-AS oraz 9-SRI, posiadają dokładnie 6 zerowych wartości własnych.

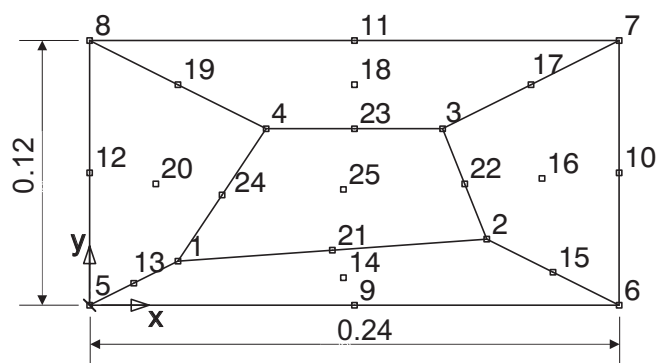
6.2 Testy bazowe (ang. 'patch tests')

Schemat przeprowadzania tych testów jest następujący. Dla prostej geometrii zakłada się postaci przemieszczeń i rotacji tak by odkształcenia w całym obszarze były stałe. Zadaje się warunki brzegowe na brzegu siatki, i oblicza przemieszczenia i rotacje w wewnętrznych węzłach siatki. Następnie są one porównywane z wartościami obliczonymi dla założonych przemieszczeń i rotacji.

Testy te są dość proste, lecz dzięki nim można sprawdzić czy element zachowuje się prawidłowo. Są one wykonywane zaraz po teście na wartości własne, lecz przed wszystkimi innymi testami.

6.2.1 Pięcioelementowy 'patch test'

Pięcioelementowa siatka elementów skończonych pokazana na Rys.6.2 została zaproponowana w [Robinson, Blackham, 1979]. Siatka składa się z pięciu elementów o nieregularnych kształtach, a węzły środkowe i krawędziowe w każdym z elementów są równo oddalone od węzłów narożnych. Ten test został włączony do katalogu testów sprawdzających dokładność elementów opracowanego w [MacNeal, Harder, 1985].



Rysunek 6.2: 5-cio elementowy 'patch test'. $E = 1.0 \times 10^6$, $\nu = 0.25$, $h = 0.001$.

Tabela 6.4: 5-elementowy 'patch test'. Współrzędne wewnętrznych węzłów i referencyjne wartości przemieszczeń i rotacji.

Współrzędne wewnętrznych węzłów			Wart. ref. testu membranowego		Wart. ref. testu zgięciowego		
węzeł	x	y	u	v	w	ϕ_x	ϕ_y
1	0.04	0.02	5.0000E-05	4.0000E-05	1.4000E-06	4.0000E-05	-5.0000E-05
2	0.18	0.03	1.9500E-04	1.2000E-04	1.9350E-05	1.2000E-04	-1.9500E-04
3	0.16	0.08	2.0000E-04	1.6000E-04	2.2400E-05	1.6000E-04	-2.0000E-04
4	0.08	0.08	1.2000E-04	1.2000E-04	9.6000E-06	1.2000E-04	-1.2000E-04
13	0.02	0.06	2.5000E-05	2.0000E-05	3.5000E-07	2.0000E-05	-2.5000E-05
14	0.115	0.0125	1.2125E-04	7.0000E-05	7.4094E-06	7.0000E-05	-1.2125E-04
15	0.21	0.015	2.1750E-04	1.2000E-04	2.3737E-05	1.2000E-04	-2.1750E-04
16	0.205	0.0575	2.3375E-04	1.6000E-04	2.8559E-05	1.6000E-04	-2.3375E-04
17	0.2	0.1	2.5000E-04	2.0000E-04	3.5000E-05	2.0000E-04	-2.5000E-04
18	0.12	0.1	1.7000E-04	1.6000E-04	1.8200E-05	1.6000E-04	-1.7000E-04
19	0.04	0.1	9.0000E-05	1.2000E-04	7.8000E-06	1.2000E-04	-9.0000E-05
20	0.3	0.055	5.7500E-05	7.0000E-05	2.7875E-06	7.0000E-05	-5.7500E-05
21	0.11	0.25	1.2250E-04	8.0000E-05	7.7375E-06	8.0000E-05	-1.2250E-04
22	0.17	0.055	1.9750E-04	1.4000E-04	2.0637E-05	1.4000E-04	-1.9750E-04
23	0.12	0.08	1.6000E-04	1.4000E-04	1.5200E-05	1.4000E-04	-1.6000E-04
24	0.06	0.05	8.5000E-05	8.0000E-05	4.5500E-06	8.0000E-05	-8.5000E-05
25	0.115	0.0525	1.4125E-04	1.1000E-04	1.1009E-05	1.1000E-04	-1.4125E-04

Test membranowy. Sprawdzana jest zdolność elementów do reprezentowania stałego odkształcenia membranowego. Przyjmowane są następujące przemieszczenia i rotacje:

$$\begin{aligned} u &= 0.001(x + \frac{1}{2}y), & \phi_x &= 0, \\ v &= 0.001(\frac{1}{2}x + y), & \phi_y &= 0, \\ w &= 0, & \phi_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Wartości przemieszczeń u, v, w są zadane dla wszystkich węzłów na krawędziach, natomiast rotacje ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z pozostają nieograniczone. Za pomocą elementów skończonych wyliczane są wartości przemieszczeń dla wszystkich wewnętrznych węzłów, i powinny one być równe wartościom wyliczonym wg formuł (6.1) i podanym w Tab.6.4.

Test zgięciowy. Sprawdzana jest zdolność elementu do reprezentowania stałego odkształcenia zgięciowego i skręcającego. Przyjmowane są następujące przemieszczenia i rotacje:

$$\begin{aligned} u &= 0, & \phi_x &= 0.0005(x + 2y), \\ v &= 0, & \phi_y &= -0.0005(2x + y), \\ w &= 0.0005(x^2 + xy + y^2), & \phi_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Wartości przemieszczeń u, v, w i obrotów ϕ_x, ϕ_y są zadane dla zewnętrznych węzłów, natomiast rotacja normalna, ϕ_z , pozostaje nieograniczona dla wszystkich węzłów. Elementy przechodzą test zgięciowy wtedy, gdy wyliczone niewiadome w węzłach zgodne są z wartościami uzyskanymi wg formuł (6.2) i podanymi w Tab.6.4.

Wszystkie elementy 9-węzłowe rozwijane w tej pracy przechodzą pozytywnie powyższe testy części błonowej i zgięciowej.

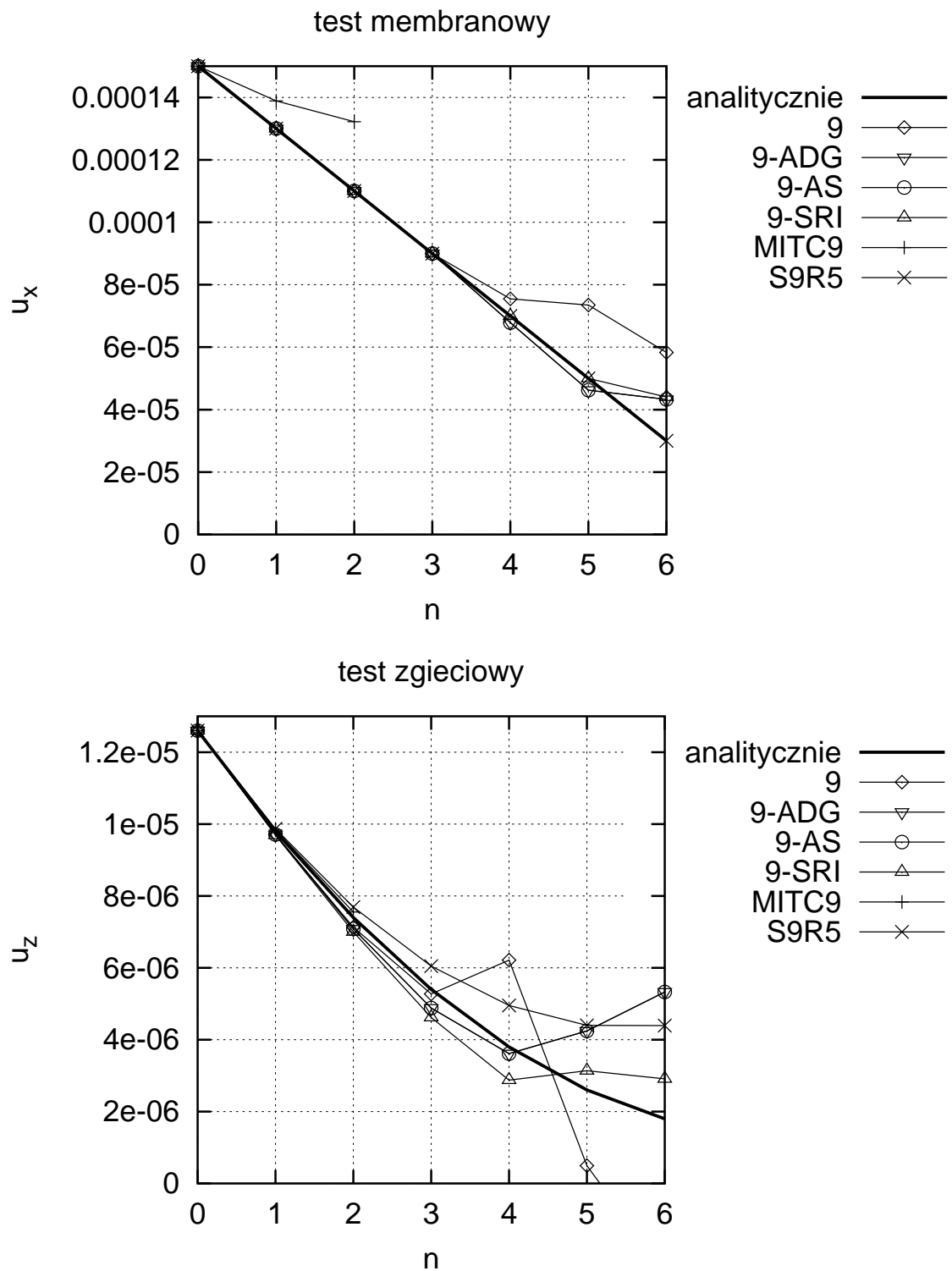
Uwaga. Warto zauważyć, że wartość $\phi_z = 0$ w teście membranowym wynika ze zlinearyzowanego równania więzów na rotacje, z którego możemy wyliczyć rotację normalną,

$$\phi_z(x, y) \doteq \frac{1}{2}(u_{x,y} - u_{y,x}) = 0, \quad (6.3)$$

dla u_x i u_y wg równ.(6.1). Rotacja normalna ϕ_z może zostać zadana w węzłach brzegowych na kilka sposobów. Np. w pracy [Wisniewski, Turska, 2006] test ten został przeprowadzony przy użyciu 3 różnych warunków brzegowych:

1. rotacja normalna została ograniczona dla wszystkich węzłów na brzegach,
2. rotacja normalna została ograniczona dla jednego węzła na brzegu,
3. rotacja normalna pozostała nieograniczona dla wszystkich węzłów na brzegach.

Trzecia forma jest najbardziej wymagająca i dlatego została tutaj zastosowana.



Rysunek 6.4: Jednoelementowy 'patch test'. Przesunięcie poziome węzła 9.

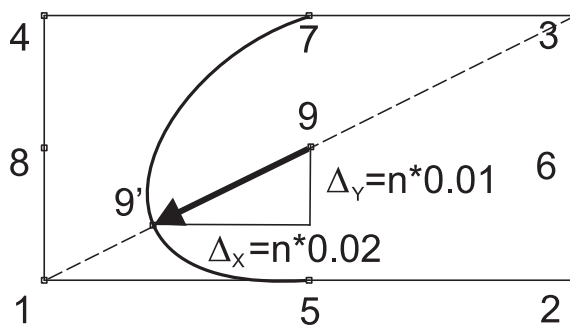
Wszystkie testowane elementy przechodzą ten test dla węzła nr 9 położonego w środku, tzn. dla $n = 0$. Dla węzła przesuniętego, kiedy $n > 0$, sytuacja przedstawia się następująco:

1. Test błonowy, aż do $n = 3$, przechodzą wszystkie testowane elementy. Dla $n = 4$ następuje zmiana orientacji bazy lokalnej w elemencie (przy pełnym całkowaniu) i nie można uzyskać prawidłowego rozwiązania. Wyjątkiem jest element 9-SRI, dla którego zredukowane całkowanie na tym kierunku spowodowało, że możliwe jest większe przesunięcie węzła, patrz Rozdz.4.4.
2. Bardziej wymagający jest test zgięciowy, którego dla $n > 0$ nie przechodzi żaden z testowanych elementów. Jednakże z Rys.6.4 widać, że błąd dla $n \leq 3$ jest mały. Podobne zachowanie się elementu 9-węzłowego $\gamma - \psi$ opisano w [Belytschko, Wong, Stolarski, 1989].

Elementy porównawcze, MITC9 i S9R5, zostały użyte w tym teście z 5 stopniami swobody w węźle, gdyż rotacja normalna może zostać uaktywniona dopiero po przypisaniu jej odpowiedniego warunku brzegowego. To byłoby jednak sprzeczne z założeniami tego testu; patrz uwagi dotyczące równ.(6.3).

B. Przesunięcie węzła środkowego po przekątnej

Warunki brzegowe są identyczne jak w teście poprzedzającym, a przesunięcie węzła 9 jest zadawane w sposób pokazany na Rys.6.5. W stosunku do poprzedniego testu dochodzi dodatkowo przesunięcie wzdłuż osi OY , $\Delta_Y = 0.01 n$.



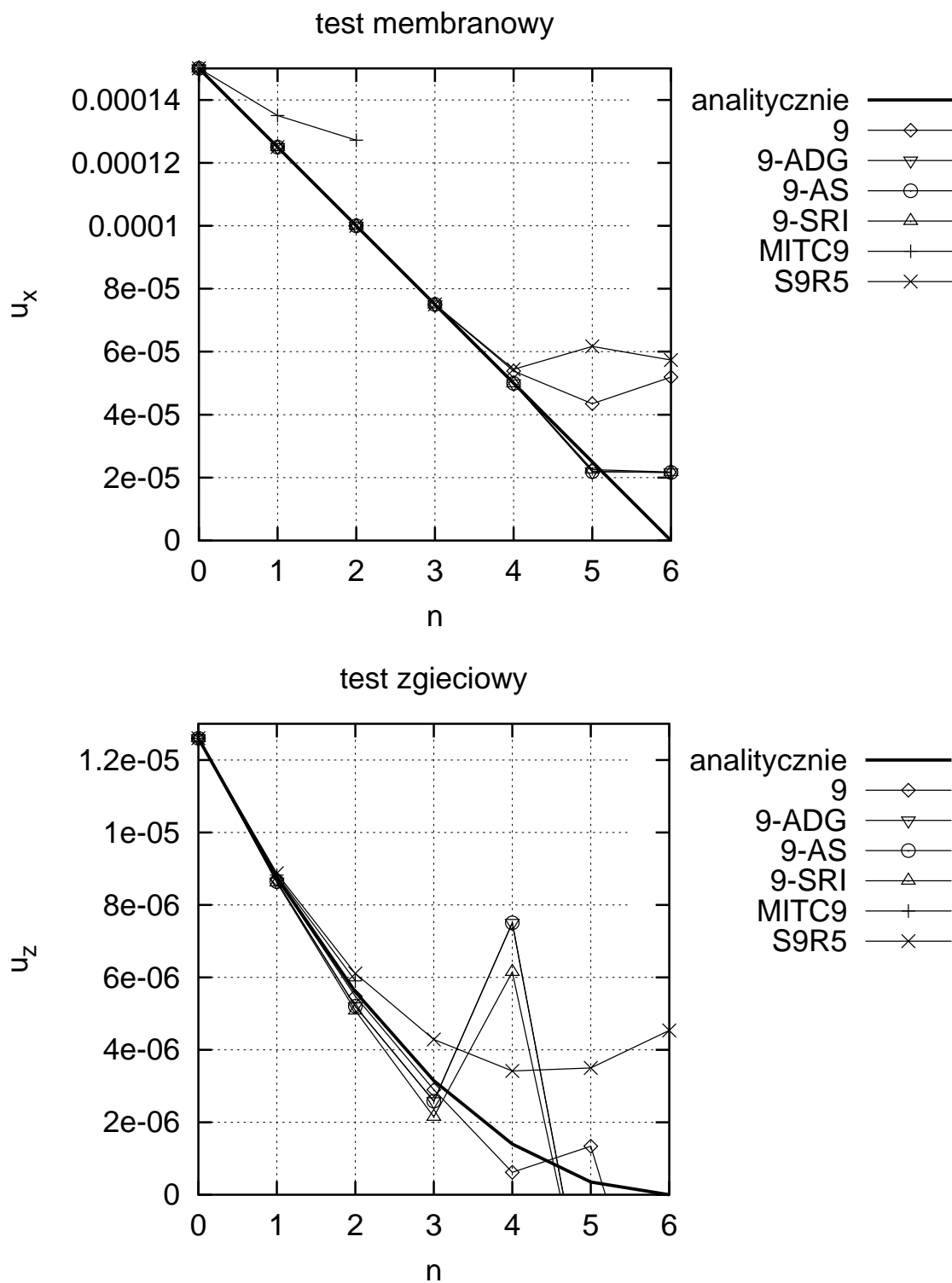
Rysunek 6.5: Jednoelementowy 'patch test'. Przesunięcie węzła 9 po przekątnej.

Wyniki testu zostały przedstawione w Tabeli 6.6 oraz na Rys.6.6. Otrzymane rezultaty są podobne do tych z Rozdz.6.2.2 i można je podsumować następująco:

1. Dla $n = 4$ kąty pomiędzy liniami izoparametrycznymi elementu są zbyt duże i nie można uzyskać rozwiązania.
2. Element 9-SRI nie daje lepszych wyników w tym teście niż inne elementy własne.
3. Elementy 9-ADG, 9-AS i 9-SRI dają pozytywne wyniki w teście membranowym w podobnym stopniu co S9R5 i w dużo lepszym niż MITC9.

Tabela 6.6: Jednoelementowy 'patch test'. Przesunięcie węzła 9 po przekątnej.
Wyniki testu membranowego/zgięciowego.

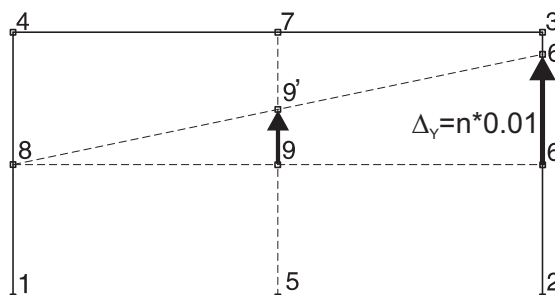
Element	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
9	p/p	p/-	p/-	p/-	-/-	-/-	-/-
9-ADG	p/p	p/-	p/-	p/-	-/-	-/-	-/-
9-AS	p/p	p/-	p/-	p/-	-/-	-/-	-/-
9-SRI	p/p	p/-	p/-	p/-	-/-	-/-	-/-
MITC9	p/p	-/-	-/-	N/N	N/N	N/N	N/N
S9R5	p/p	p/-	p/-	p/-	-/-	-/-	-/-
4-EADG4	p/p	p/p	p/p	p/p	-/p	-/p	N/N



Rysunek 6.6: Jednoelementowy 'patch test'. Przesunięcie węzła 9 po przekątnej.

C. Przesunięcie pionowe dwóch węzłów

W tym teście przesunięciu ulegają dwa węzły, środkowy o numerze 9 i krawędziowy o numerze 6. Zmiana położenia tych węzłów ma charakter proporcjonalny, tzn. węzły 8, 9' i 6' leżą na jednej linii, patrz Rys.6.7.



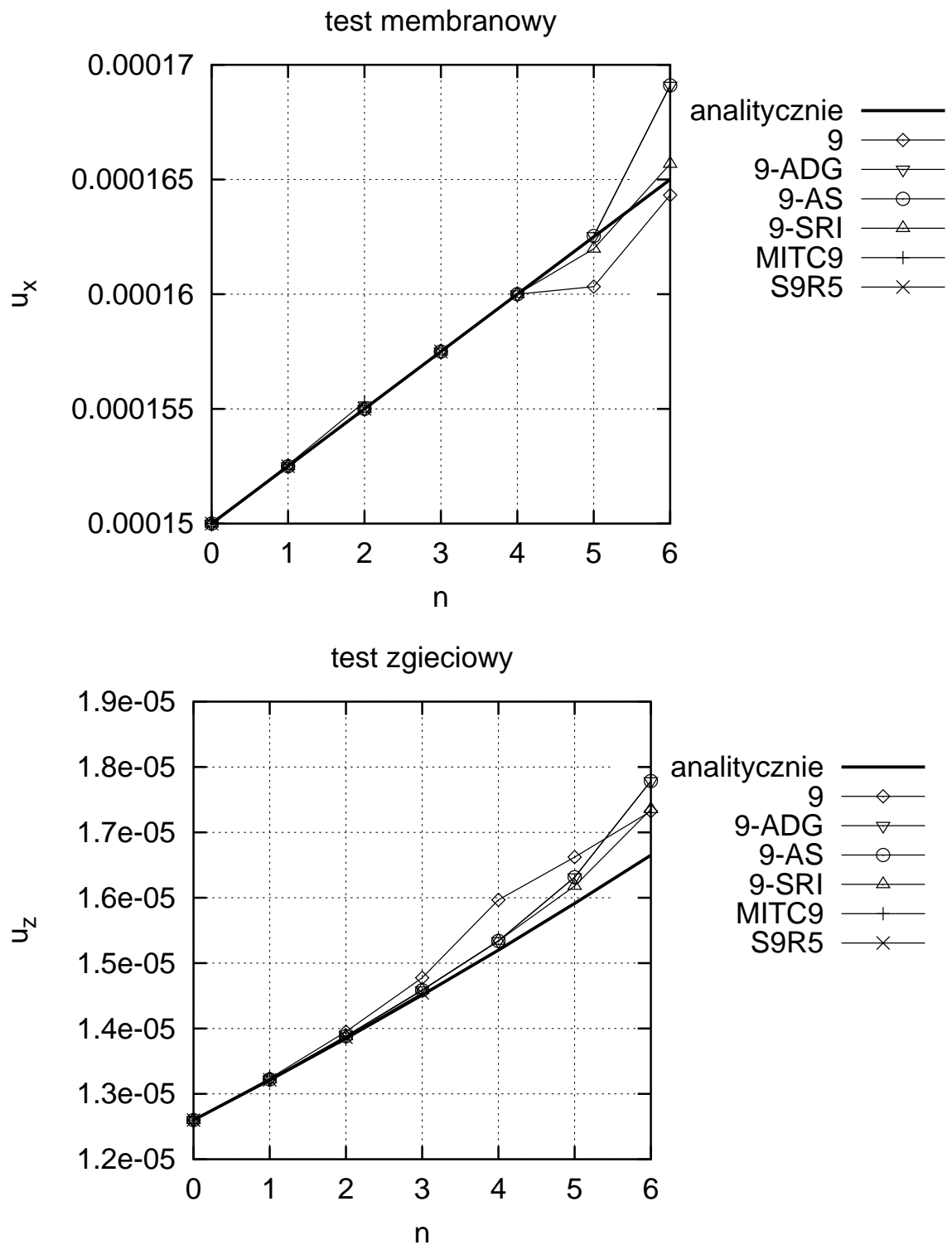
Rysunek 6.7: Jednoelementowy 'patch test'. Przesunięcie pionowe dwóch węzłów.

Tabela 6.7: Jednoelementowy 'patch test'. Przesunięcie pionowe dwóch węzłów.
Wyniki testu membranowego/zgięciowego.

Element	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
9	p/p	p/-	p/-	p/-	p/-	-/-	-/-
9-ADG	p/p	p/-	p/-	p/-	p/-	-/-	-/-
9-AS	p/p	p/-	p/-	p/-	p/-	-/-	-/-
9-SRI	p/p	p/-	p/-	p/-	p/-	-/-	-/-
MITC9	p/p	-/-	-/-	N/N	N/N	N/N	N/N
S9R5	p/p	p/-	p/-	p/-	N/N	N/N	N/N
4-EADG4	p/p	p/-	p/p	p/-	p/p	p/-	N/N

Analizując wyniki z Tabeli 6.7 oraz z Rys. 6.8 można stwierdzić, że, w przypadku testu membranowego, elementy sprawdzają się dla dużego zakresu przesunięcia węzłów, bo aż do $n = 4$.

Dla testu zgięciowego sytuacja przedstawia się podobnie jak w poprzednich testach, tzn. prawidłowa wartość rozwiązania uzyskiwana jest tylko dla $n = 0$, a dla $n > 0$ zauważalny jest niewielki błąd.



Rysunek 6.8: Jednoelementowy 'patch test'. Przesunięcie pionowe dwóch węzłów.

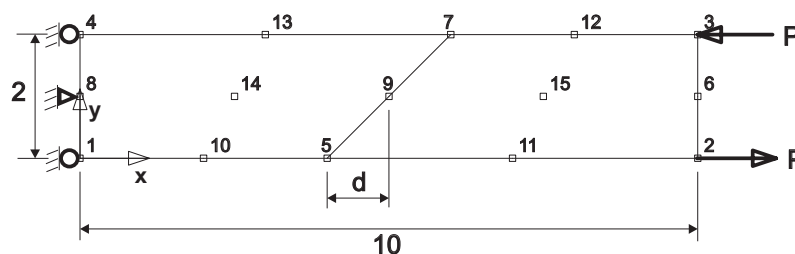
6.2.3 'Patch test' wyższego rzędu

Na Rys.6.9 pokazana została siatka składająca się z dwóch czworobocznych elementów. Linia graniczna pomiędzy elementami wyznaczona jest przez węzły 5-9-7. Kąt nachylenia tej linii definiowany jest parametrem d . Dla $d = 0$ elementy są prostokątne, a zwiększając d zwiększamy zniekształcenie elementów. Należy zaznaczyć, że węzły krawędziowe są umieszczone zawsze w równej odległości od węzłów narożnych. Zginanie w płaszczyźnie jest wymuszone poprzez parę przeciwnie skierowanych sił.

Test ten został zaproponowany w [Zienkiewicz, Taylor, 1989], jako sprawdzian członów wyższego rzędu w elementach bi-kwadratowych. Ewentualny błąd może wskazywać na niewłaściwy rząd wielomianów aproksymujących odkształcenia, tak jak to się dzieje w przypadku elementów z jednolicie zredukowanym całkowaniem.

Wyniki zostały umieszczone w Tab.6.8, gdzie dla $d = 1$ nachylenie linii 5-9-7 wynosi 45° , a elementy są trapezami.

Jak widać, wszystkie własne elementy 9-węzłowe dają dokładne wyniki, natomiast elementy porównawcze mają problemy przy siatce nieregularnej. Element S9R5 daje błędny rezultat nawet dla $d = 0$, co prawdopodobnie spowodowane jest zredukowanym całkowaniem. Widać, że w przypadku elementu własnego 9-SRI, selektywne zredukowane całkowanie nie pogarsza rozwiązania.



Rysunek 6.9: Dwuelementowy test. $E = 10^2$, $\nu = 0.3$, $h = 10$, $P = 5$.

Tabela 6.8: Dwuelementowy test. Pionowe przemieszczenie w węźle 2.

Element	$d = 0$	$d = 1$
9	0.75225	0.75225
9-ADG	0.75225	0.75225
9-AS	0.75225	0.75225
9-SRI	0.75225	0.75225
MITC9	0.75225	0.74568
S9R5	0.72770	0.74040
4-EADG4	0.75225	0.73550
Wartość dokładna	0.75225	

6.3 Prosty wspornik

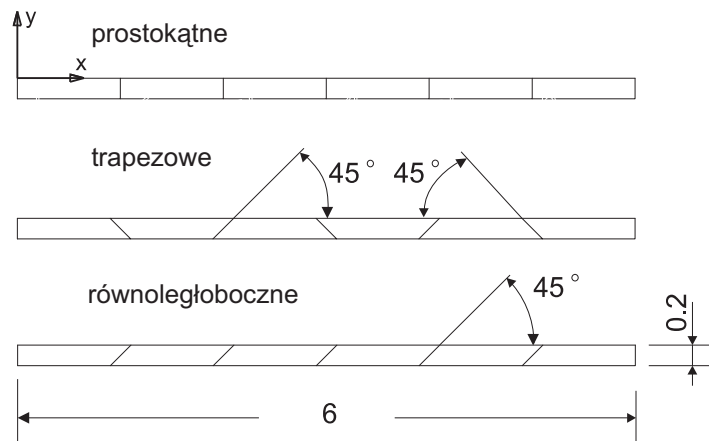
Test ten zaproponowano w [MacNeal, Harder, 1985]. Wspornik jest utwierdzony na jednym końcu, a na drugim obciążony w różny sposób. Geometria i dane umieszczone zostały na Rys.6.10. Siatka MES składa się tylko z 6-ciu elementów o następujących kształtach: prostokątnym, trapezowym i równoległobocznym.

Oprócz typów obciążenia zaproponowanych w [MacNeal, Harder, 1985], dodatkowo zbadane zostanie zginanie jednostkowym momentem wzdłuż osi y , dla którego wartość porównawcza obliczona jest wg wzoru,

$$\phi_y = \frac{M_y L}{EJ}, \quad (6.4)$$

patrz np. [Warren, 1989].

Wyniki obliczeń zostały umieszczone w Tabeli 6.9. Wynika z nich, że kształt elementu nie ma zbyt dużego wpływu w przypadku elementów 9-węzłowych, w odróżnieniu od elementów 4-węzłowych. Pomimo niewielkich różnic w wynikach, widać że najgorzej wypada element 9, czyli ten w którym nie zastosowano żadnej z metod eliminujących zakleszczanie (ADG, AS, SRI). W przypadku skręcania przez parę sił, wyniki wszystkich elementów są około 6% niższe niż wartość porównawcza podana w pracy [MacNeal, Harder, 1985].



Rysunek 6.10: Prosty wspornik. $E = 1.0 \times 10^7$, $\nu = 0.3$, $h = 0.1$.

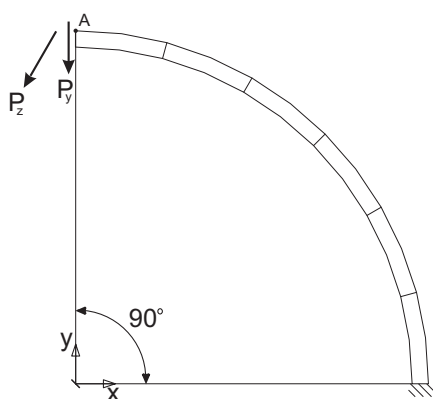
Tabela 6.9: Prosty wspornik. Wyniki dla 3 siatek i 4 przypadków obciążeń.

Elementy	prostokątne	trapezy	równoległoboki
<i>ściananie w płaszczyźnie ($u_y \times 10$)</i>			
9	1.0703	1.0606	1.0617
9-ADG	1.0748	1.0715	1.0749
9-AS	1.0748	1.0715	1.0749
9-SRI	1.0748	1.0715	1.0746
MITC9	1.0748	1.0646	1.0746
S9R5	0.9344	0.9261	0.9854
4-EADG4	1.0737	0.7803	1.0146
Ref.	1.0810		
<i>ściananie poprzeczne ($u_z \times 10$)</i>			
9	4.2719	4.2329	4.2397
9-ADG	4.2958	4.2812	4.2929
9-AS	4.2958	4.2812	4.2929
9-SRI	4.2958	4.2812	4.2929
MITC9	4.2955	4.2823	4.2930
S9R5	4.3100	4.3110	4.3110
4-EADG4	4.2850	4.2886	4.2886
Ref.	4.3210		
<i>skręcanie przez parę sił ($\phi_x \times 100$)</i>			
9	3.0176	3.0209	2.9836
9-ADG	3.0307	3.0360	3.0229
9-AS	3.0307	3.0334	3.0229
9-SRI	3.0277	3.0342	3.0212
MITC9	2.9128	2.9130	2.9033
S9R5	3.0400	3.0400	3.0300
4-EADG4	3.0313	3.0345	2.9150
Ref.	3.2080		
<i>zginanie momentem ($\phi_y \times 100$)</i>			
9	3.5927	3.5927	3.4612
9-ADG	3.5929	3.5930	3.5344
9-AS	3.5929	3.5930	3.5344
9-SRI	3.5929	3.5930	3.5340
MITC9	3.5930	3.5928	3.5178
S9R5	3.5995	3.5994	3.6000
4-EADG4	3.5919	3.5927	3.5923
Ref.	3.6000		

6.4 Zakrzywiony wspornik

Zakrzywiony wspornik to jeden z testów z katalogu testów zaproponowanego w [MacNeal, Harder, 1985]. Geometria i dane materiałowe pokazano na Rys.6.11. Wspornik jest utwierdzony na jednym końcu, natomiast na drugim obciążony jest rozłożoną jednostkową siłą, w płaszczyźnie lub poprzecznie. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch siatek, 1×6 i 1×24 elementy.

Wyniki obliczeń liniowych przedstawiono w Tabeli 6.10. Dla siły P_y uzyskane wyniki przewyższają wartość referencyjną, co może wskazywać na jej niewłaściwą wielkość. Dla tego obciążenia własne elementy 9-węzłowe wykazują większą sztywność niż element MITC9, a mniejszą niż element S9R5. Odwrotna sytuacja jest przy obciążeniu siłą P_z , kiedy to element MITC9 jest wyraźnie sztywniejszy niż pozostałe.



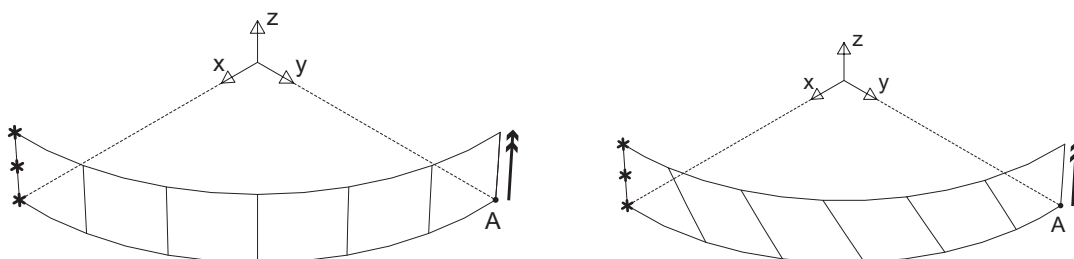
Rysunek 6.11: Zakrzywiony wspornik. $E = 1.0 \times 10^7$, $\nu = 0.25$, $h = 0.1$.
Promień wewnętrzny 4.12, promień zewnętrzny 4.32.

Tabela 6.10: Zakrzywiony wspornik. Przemieszczenie w punkcie A.

Obciążenie	P_y		P_z	
	$-v \times 10^2$		$w \times 10$	
Siatka	1×6	1×24	1×6	1×24
9	7.7246	8.8435	4.8448	4.8917
9-ADG	8.8236	8.8495	4.8847	4.8944
9-AS	8.8236	8.8495	4.8847	4.8944
9-SRI	8.8240	8.8495	4.8848	4.8944
MITC9	8.9852	9.0041	4.8045	4.8131
S9R5	7.3666	8.8476	4.8940	4.8940
4-EADG4	8.7355	8.8465	4.8776	4.8939
Ref.	8.734		5.022	

6.5 Wycinek powłoki cylindrycznej

Utwierdzony wycinek powłoki cylindrycznej w kształcie zakrzywionego prostokątnego paska obciążony jest momentem zginającym, patrz Rys.6.12. Szerokość paska wynosi $b = 0.025$, promień krzywizny $R = 0.1$. Dane materiałowe są następujące: $E = 2 \times 10^5$, $\nu = 0$. Siatka elementów składa się z 6-ciu regularnych lub nieregularnych elementów. Test ten przeprowadzono np. w [Koschnick, Bischoff, Camprubi, Bletziger, 2005].



Rysunek 6.12: Wycinek powłoki cylindrycznej. Regularna i nieregularna siatka.

Obciążenie przyjęto w postaci $M_z = (R/h)^{-3}$, tzn. jako funkcję R/h , i analizy przeprowadzano zmieniając grubość powłoki. Jako rozwiązania porównawcze wykorzystano rozwiązania dla zakrzywionej belki, patrz np. [Warren, 1989],

$$\phi_z = \frac{\pi M_z R}{2EJ}, \quad v = u_y = \frac{M_z R^2}{EJ}, \quad (6.5)$$

Rotacja ϕ_z i przemieszczenie v są monitorowane w punkcie A, patrz Rys.6.12.

W teście tym badany jest wpływ grubości powłoki na efekt zakleszczania membranowego, oraz efekt nieregularności siatki. Ponieważ moment zginający pozostaje w niezmiennym stosunku do grubości, więc poprawne rozwiązanie powinno być stałe dla zmieniającego się h . Jeśli element się zakleszcza to rotacja wraz ze wzrostem parametru R/h będzie dążyć do zera.

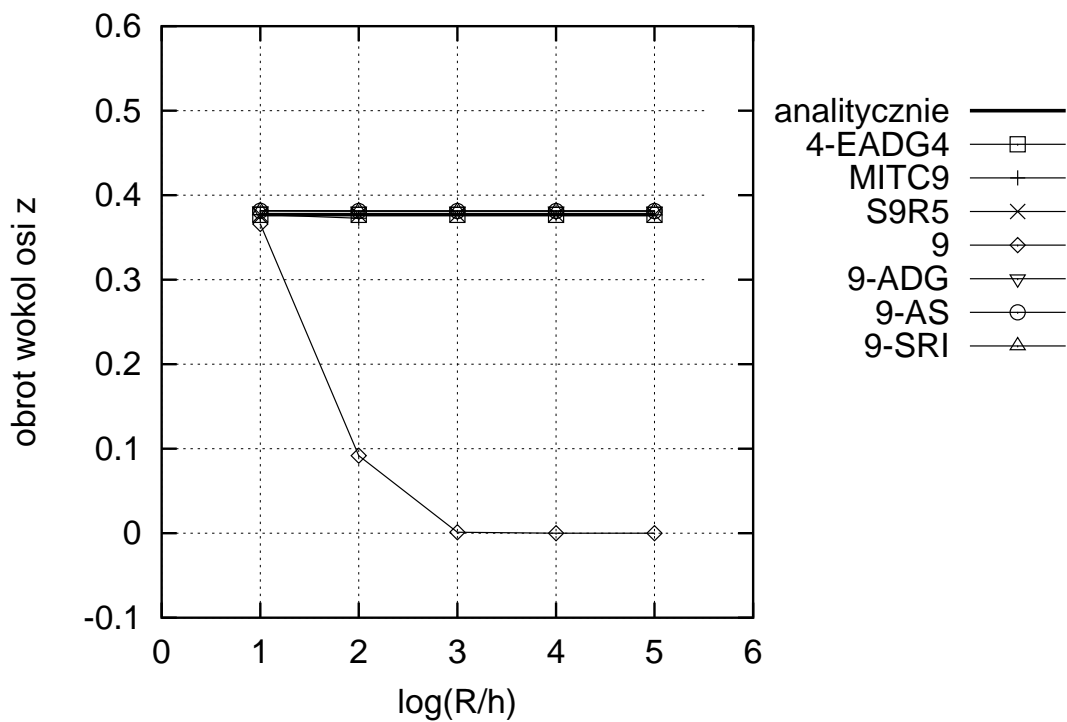
Rotację ϕ_z otrzymaną z obliczeń numerycznych pokazano na Rys.6.13 i 6.14, dla siatki regularnej i nieregularnej.

Dla siatki regularnej rozwiązania wszystkich elementów własnych są poprawne, oprócz rozwiązania dla elementu 9, który zakleszcza się, zgodnie z przewidywaniami.

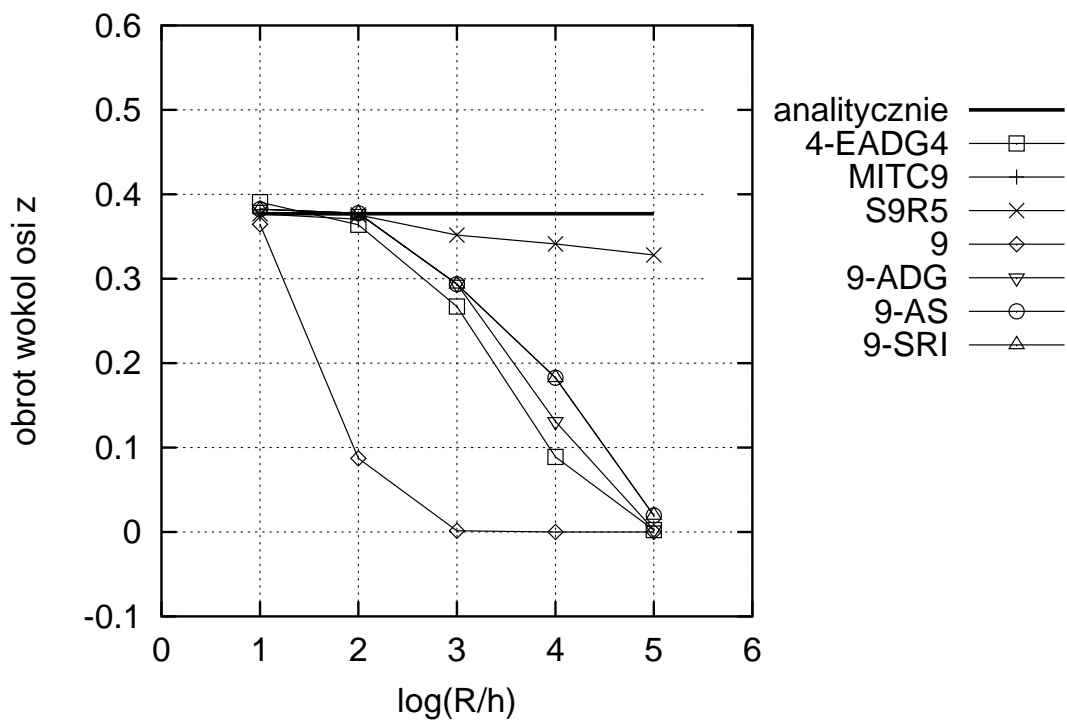
Natomiast dla siatki nieregularnej, obserwujemy wpływ grubości na rozwiązanie. Widać, że elementy 9-ADG, 9-AS, 9-SRI oraz 4-EADG4 zachowują się lepiej niż element 9, ale dla $R/h \geq 100$ rezultaty obarczone są dużym błędem.

Dla elementu porównawczego MITC9 wyniki można uzyskać tylko dla $\log(R/h) = 1, 2$ i są one bliskie analitycznym. Najlepiej w tym teście wypadł element S9R9, dla którego błąd jest najmniejszy.

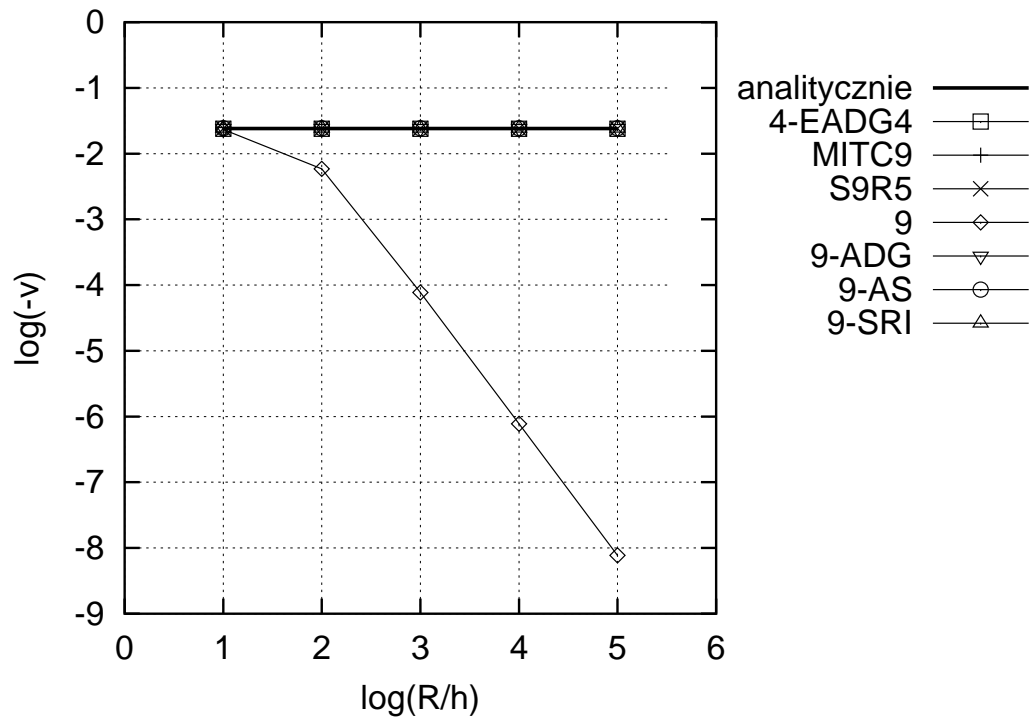
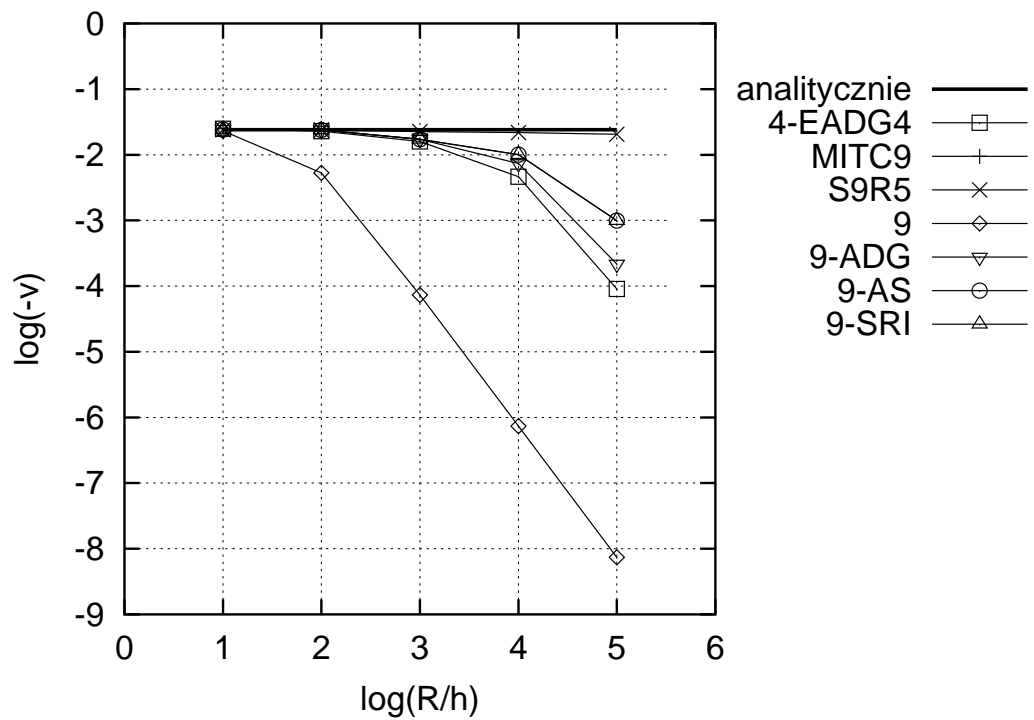
Przemieszczenie v otrzymane dla różnych wartości h pokazano na Rys.6.15 i 6.16, gdzie na osi pionowej użyto skali logarytmicznej. Konkluzje są podobne jak dla rotacji ϕ_z .



Rysunek 6.13: Wycinek powłoki cylindrycznej. Rozwiązania dla siatki regularnej.

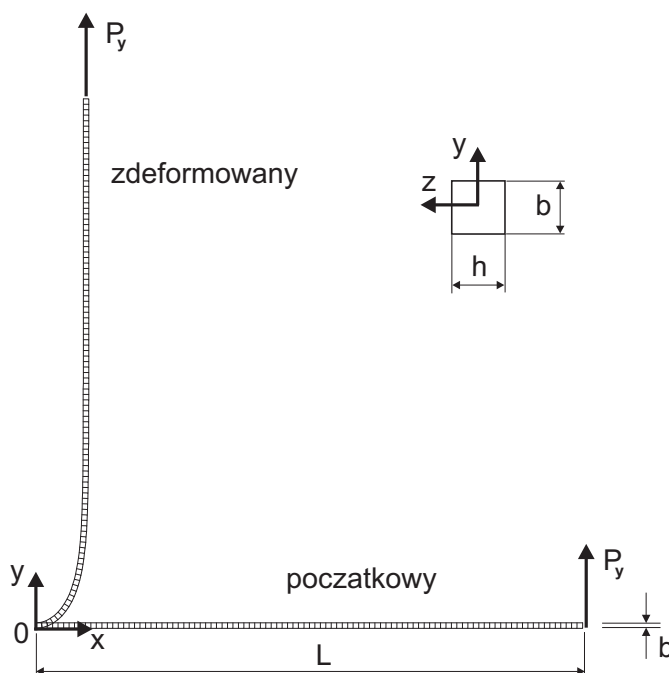


Rysunek 6.14: Wycinek powłoki cylindrycznej. Rozwiązania dla siatki nieregularnej.

Rysunek 6.15: Powłoka cylindryczna. Przemieszczenie v dla siatki regularnej.Rysunek 6.16: Powłoka cylindryczna. Przemieszczenie v dla siatki nieregularnej.

6.6 Smukły wspornik

Test ten zaproponowano w celu określenia dokładności rotacji normalnej, dla deformacji w płaszczyźnie elementu. Smukły wspornik jest utwierdzony na jednym końcu, a na drugim końcu przyłożono siłę $P_y = 1$, patrz Rys.6.17. Grubość powłoki jest prostopadła do płaszczyzny XOY .



Rysunek 6.17: Smukły wspornik obciążony siłą ścinającą.
 $E = 10^6$, $\nu = 0.3$, $L = 100$, $b = 1$, grubość $h = 1$.

Wspornik modelowany jest jedną warstwą elementów wzdłuż osi OY , oraz 100 elementami wzdłuż osi OX . Elementy są kwadratowe, dzięki czemu unika się niekorzystnego wpływu wydłużenia kształtu elementu, a duża liczba elementów powinna dać wystarczającą dokładność rozwiązania.

Wyniki obliczeń liniowych zamieszczono w Tabeli 6.11, gdzie podano przemieszczenia i rotację normalną dla górnego węzła na końcu wspornika.

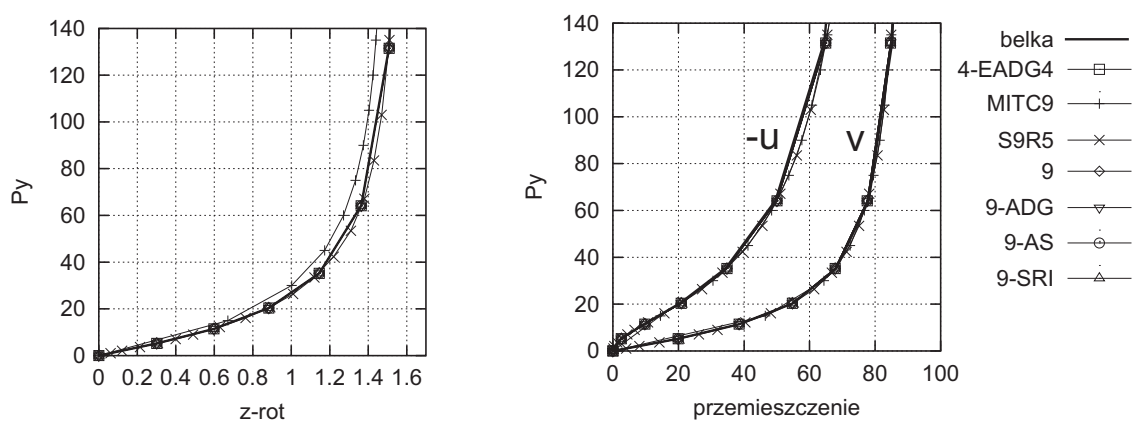
Otrzymane rezultaty są bardzo dokładne dla wszystkich elementów własnych i referencyjnych. Widać, że elementy własne 9, 9-ADG, 9-AS, 9-SRI zachowują się prawie identycznie.

Dla elementu porównawczego MITC9, rotację normalną uzyskano wykorzystując komendę RIGIDNODES. Dla elementu S9R5 rotację normalną uzyskano poprzez zadanie warunku $\phi_x = 0$ w punkcie monitorowania ϕ_z .

Tabela 6.11: Smukły wspornik. Wyniki dla górnego węzła.

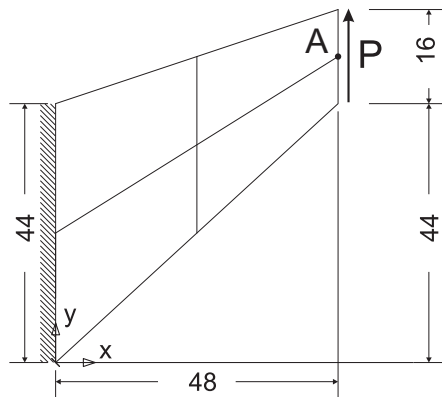
Element	$u_x \times 10^2$	u_y	$\phi_z \times 10^2$
9	-2.9992	3.9987	5.9986
9-ADG	-2.9993	3.9989	5.9989
9-AS	-2.9993	3.9989	5.9988
9-SRI	-2.9993	3.9989	5.9988
MITC9	-2.9993	3.9989	5.9988
S9R5	-2.9999	4.0000	5.9997
4-EADG4	-2.9994	3.9991	5.9989
Ref.	-3.0000	4.0000	6.0000

Obliczenia nieliniowe przeprowadzono metodą długości łuku, stosując przyrost siły $\Delta P = 5$. Otrzymane krzywe dla górnego węzła na końcu wspornika pokazano na Rys.6.18. Widać, że krzywe dla elementów własnych pokrywają się z referencyjnym rozwiązaniem dla elementu belkowego Timoshenki z dużymi rotacjami. Element referencyjny MITC9 jest nieco bardziej sztywny, i otrzymane rotacje są zbyt małe.

Rysunek 6.18: Smukły wspornik. a) Rotacja ψ_z . b) Przemieszczenie $u = u_x$ i $v = u_y$.

6.7 Membrana Cooka

Test ten został zaproponowany w [Cook, 1976]. Trapezoidalna tarcza jest utwierdzona z jednej strony, a z drugiej strony przyłożona została rozłożona jednostkowa siła ścinająca w płaszczyźnie, tak jak pokazano na Rys.6.19. W teście tym dominuje ścinanie w płaszczyźnie i użyte zostały skośne trapezoidalne elementy. Do obliczeń liniowych użyto dwie siatki: 1×1 element i 2×2 elementy.



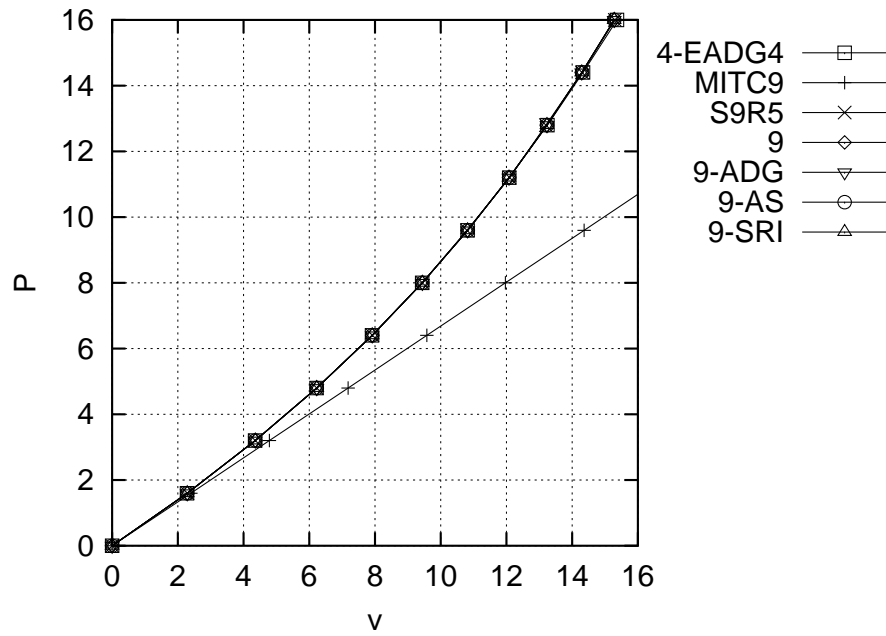
Rysunek 6.19: Membrana Cooka. $E = 1.0$, $\nu = \frac{1}{3}$, $h = 1.0$, $P = 1$.

Tabela 6.12: Membrana Cooka. Pionowe przemieszczenie w punkcie A.

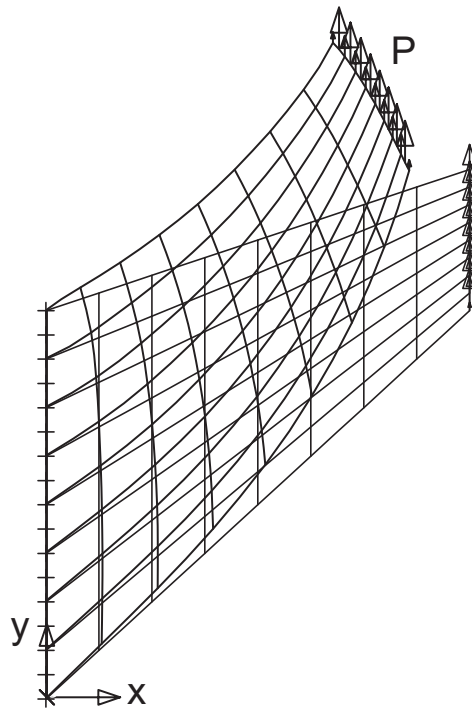
Element	1×1	2×2
9	19.643	23.288
9-ADG	21.798	23.576
9-AS	21.799	23.576
9-SRI	21.799	23.576
MITC9	22.208	23.613
S9R5	26.540	23.980
4-EADG4	21.037	23.014
Ref.	23.810	

Wyniki obliczeń umieszczono w Tabeli 6.12, gdzie podano przemieszczenie pionowe w punkcie A. Widać, że elementy referencyjne, MITC9 oraz S9R5, są dokładniejsze niż elementy własne 9-ADG, 9-AS, 9-SRI. Widać także, iż elementy S9R5 dają bardzo zawyżone rozwiązanie dla rzadkich siatek.

Na Rys.6.20 pokazano przemieszczenie pionowe w punkcie A dla rozwiązań nieliniowych, otrzymanych metodą Newtona, dla $\Delta P = 0.1$. Dla wszystkich elementów, z wyjątkiem MITC9, uzyskane krzywe są identyczne. Dla elementu MITC9 możliwe było uzyskanie tylko liniowej zależności przemieszczenia od obciążenia. Postać deformacji dla elementu 9-AS, siatki 8×8 i $P = 16$ pokazano na Rys.6.21.



Rysunek 6.20: Membrana Cooka. Pionowe przemieszczenie w punkcie A. Rozwiązania nieliniowe dla siatki 8×8 .

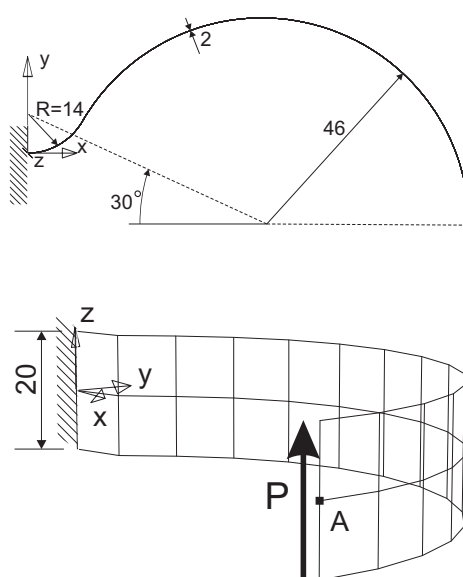


Rysunek 6.21: Membrana Cooka. Elementy 9-AS, deformacja dla $P = 16$.

6.8 Hak Raascha

Hak Raascha to prostokątna płyta o dwóch krzywiznach, z jednej strony utwierdzona, a z drugiej obciążona liniowo rozłożoną siłą działającą w płaszczyźnie stycznej. Geometria i dane materiałowe podano na Rys.6.22.

Zadanie to rozwiązywał I. Raasch, pracownik BMW w Niemczech, i zauważył, że element powłokowy z programu ANSYS daje błędne rezultaty; ugięcia są zbyt duże, a poza tym wyniki są rozbieżne przy zagęszczaniu siatki.



Rysunek 6.22: Hak Raascha. Geometria i warunki brzegowe.

$$P = 1, E = 3300, \nu = 0.35, h = 2.0.$$

W teście tym stan deformacji jest złożony; odpowiada równoczesnemu skręcaniu, zginaniu i ścinaniu. Wartość referencyjnego rozwiązania dla tego testu nie została jednoznacznie ustalona w literaturze. Np. w [Knight, 1996] podawana jest wartość 4.9352, uzyskana hybrydowymi elementami typu 'solid', w dokumentacji [ABAQUS] podano wartość 5.02, uzyskaną dla siatki $20 \times 144 \times 2$ elementów C3D20R, natomiast w pracy [Schoop, Hornig, Wenzel, 2002] otrzymano, na podstawie teorii belek, wartość 4.7561.

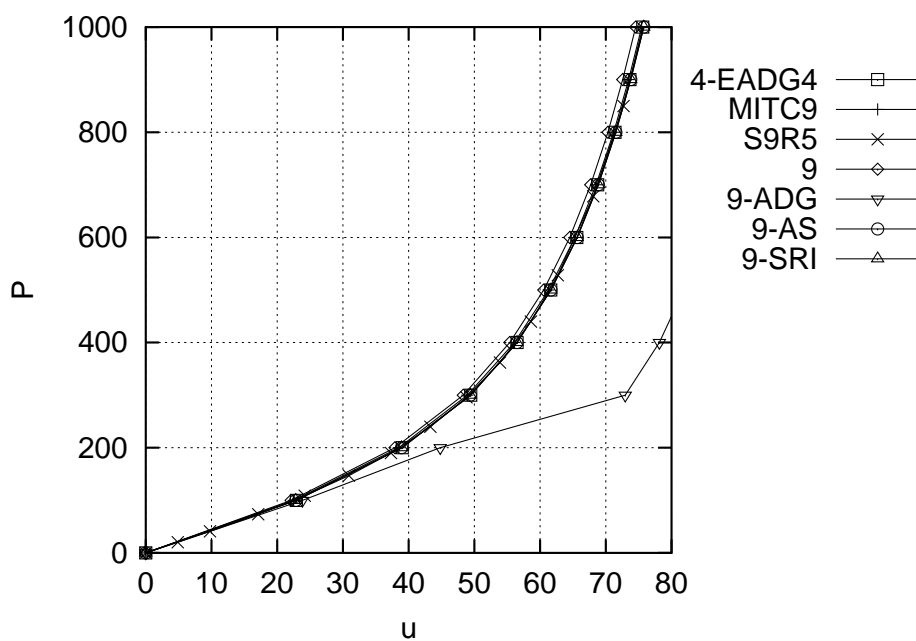
Wyniki testów liniowych umieszczono w Tabeli 6.13. Rozwiązania uzyskano dla różnych siatek, i widać, że dla gęstszych siatek rozwiązania przewyższają wartość odniesienia. Błąd nie jest jednak duży - nie przekracza 2% dla elementów 9-węzłowych. Najbardziej podatny okazał się element 4-węzłowy 4-EADG4.

Na Rys.6.23 umieszczono rozwiązania nieliniowe, otrzymane metodą Newtona, dla $\Delta P = 5$. Dla większości elementów krzywe pokrywają się; wyjątkiem jest element 9-ADG, który jest zbyt podatny. Elementem 9 uzyskuje się rozwiązanie

Tabela 6.13: Hak Raascha. Przemieszczenie w dla punktu A.

Element/siatka	2×14	4×28	8×56
9	4.7454	4.9381	5.0090
9-ADG	4.9182	4.9640	5.0135
9-AS	4.9182	4.9640	5.0135
9-SRI	4.9188	4.9640	5.0135
MITC9	4.8364	4.9163	4.9740
S9R5	4.8350	4.9140	4.9940
4-EADG4	4.9478	5.0802	5.1715
Ref.		4.9352	

lekko przeszywnione, co uwidacznia się w małym przesunięciu krzywej rozwiązania w lewo; podobne rozwiązanie można znaleźć np. w [Eriksson, 2002].

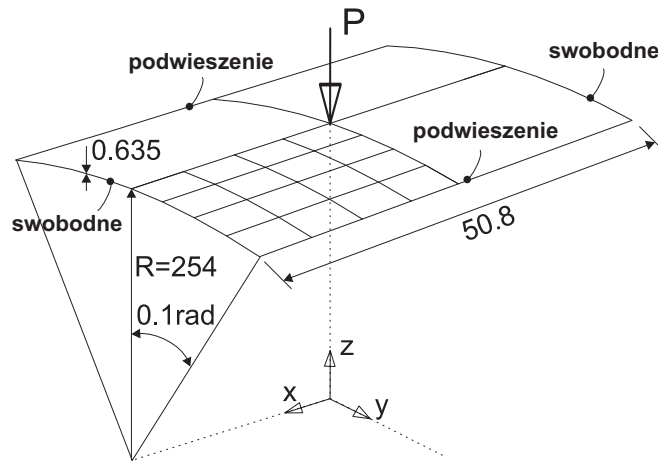


Rysunek 6.23: Hak Raascha. Pionowe przemieszczenie w punkcie A. Rozwiązania nieliniowe dla siatki 2×14 .

6.9 Panel cylindryczny

Jest to jeden z podstawowych testów nieliniowych, który był używany w wielu pracach, np. [Ramm, 1981], [Simo, Fox, Rifai, 1990], [Sansour, Bednarczyk, 1995].

Powłoka cylindryczna o małej krzywiznie obciążona jest centralnie siłą skupioną, patrz Rys.6.24. Proste brzegi są podwieszane, tzn. zablokowano przemieszczenia v i w oraz rotacje ϕ_y i ϕ_z , a zakrzywione brzegi są swobodne. Wykorzystano symetrie (geometrii powłoki, warunków brzegowych i obciążenia) i modelowana jest tylko jedna czwarta panelu. Zastosowano siatkę 2×2 -elementy 9-węzłowe i 4×4 -elementy 4-węzłowe.



Rysunek 6.24: Panel cylindryczny. $E = 310.275$, $\nu = 0.3$.

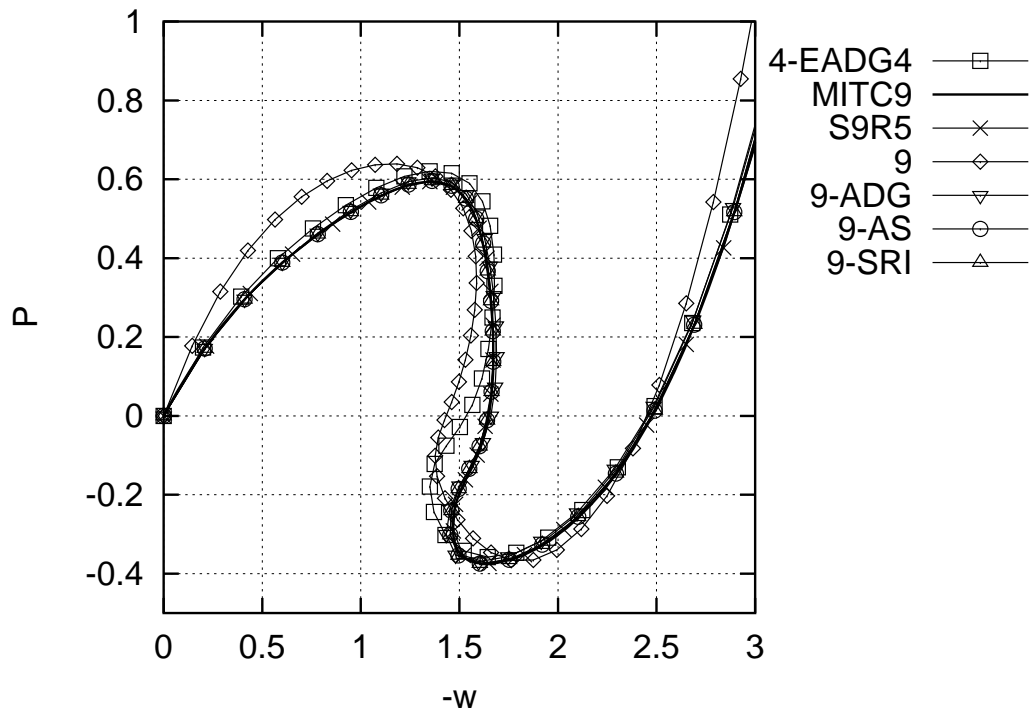
Rozwiązania liniowe zamieszczono w Tabeli 6.14; monitorowane jest przemieszczenie w w kierunku działania siły i w punkcie przyłożenia siły. Widać, że elementy własne 9-ADG, 9-AS i 9-SRI, dają identyczne rozwiązanie, które jest trochę sztywniejsze niż rozwiązania dla elementów referencyjnych 9-węzłowych.

Tabela 6.14: Panel cylindryczny. $P = 0.01$

Element/siatka	$-w \times 10^2$
9	0.7248
9-ADG	1.0582
9-AS	1.0582
9-SRI	1.0582
MITC9	1.0664
S9R5	1.0655
4-EADG4	1.0084

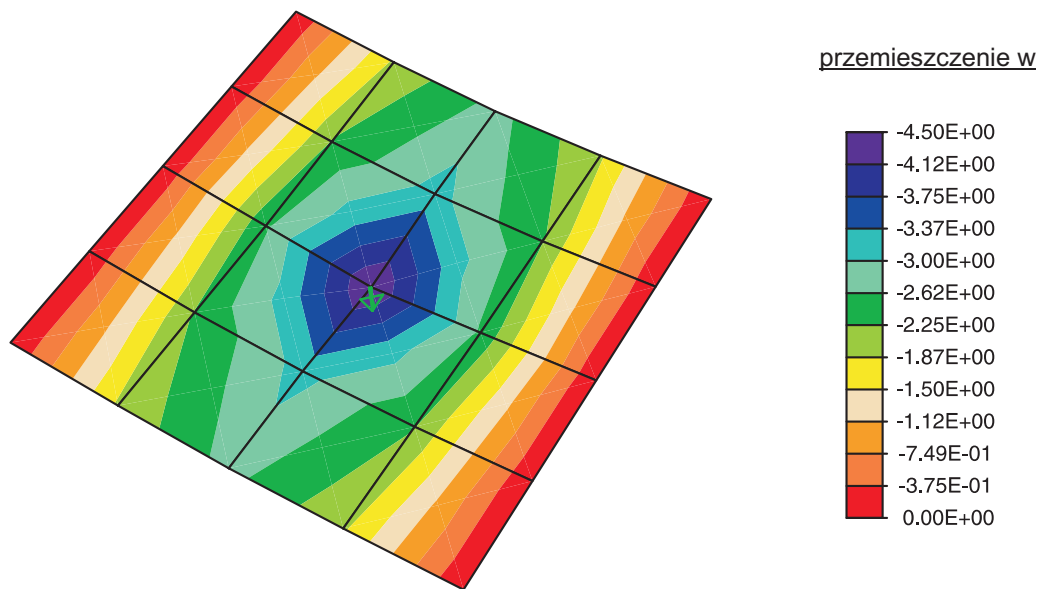
Rozwiązania nieliniowe otrzymano metodą długości łuku, dla początkowego $\Delta P = -0.05 \times 4$. Krzywe pokazane na Rys.6.25 wskazują, że element 9 jest lekko przeszywniony co przejawia się przesunięciem krzywej w lewą stronę. Pozostałe elementy własne 9-węzłowe (9-ADG, 9-AS, 9-SRI) oraz elementy referencyjne, dają takie same rozwiązania.

Dla rzadkich siatek, uwidacznia się różnica między rozwiązaniami dla elementów 9- i 4-węzłowych, pomimo takiej samej liczby stopni swobody. Np. krzywa dla elementu 4-EADG4 jest w początkowej i środkowej fazie przesunięta w lewo, co wskazuje na lepszą dokładność elementów 9-węzłowych dla rzadkiej siatki.



Rysunek 6.25: Panel cylindryczny. Rozwiązania nieliniowe dla siatki 2×2 .

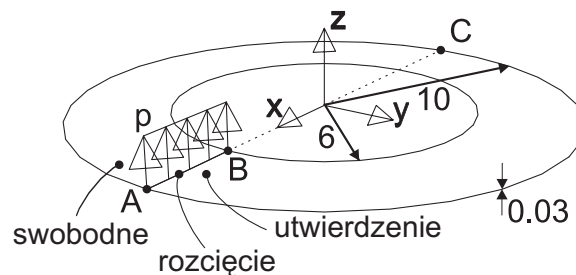
Końcową postać deformacji i rozkład przemieszczeń w dla elementu 9-AS i $P = 2$ pokazano na Rys.6.26.



Rysunek 6.26: Panel cylindryczny. Mapa przemieszczeń dla elementu 9-AS i $P = 2$.

6.10 Rozcięty pierścień kołowy

Płyta w kształcie pierścienia kołowego jest rozcięta wzdłuż promienia, tak jak pokazano na Rys.6.27. Jeden z brzegów rozcięcia utwierdzono, a do drugiego przyłożono liniowo rozłożoną siłę skierowaną prostopadłe do płyty. Przykład ten był analizowany np. w [Basar, Ding, 1992] i [Buechter, Ramm, 1992]. W obliczeniach zastosowano siatkę 2×16 elementów 9-węzłowych.



Rysunek 6.27: Rozcięty pierścień kołowy. $E = 2.1 \times 10^8$, $\nu = 0.0$.

Wyniki analiz liniowych zamieszczono w Tabeli 6.15, gdzie podano przemieszczenie pionowe w w punkcie A dla $p = 0.01$. Widać, że elementy własne 9-ADG, 9-AS i 9-SRI, dają identyczne rozwiązanie, które jest trochę sztywniejsze niż rozwiązania dla elementów referencyjnych 9-węzłowych.

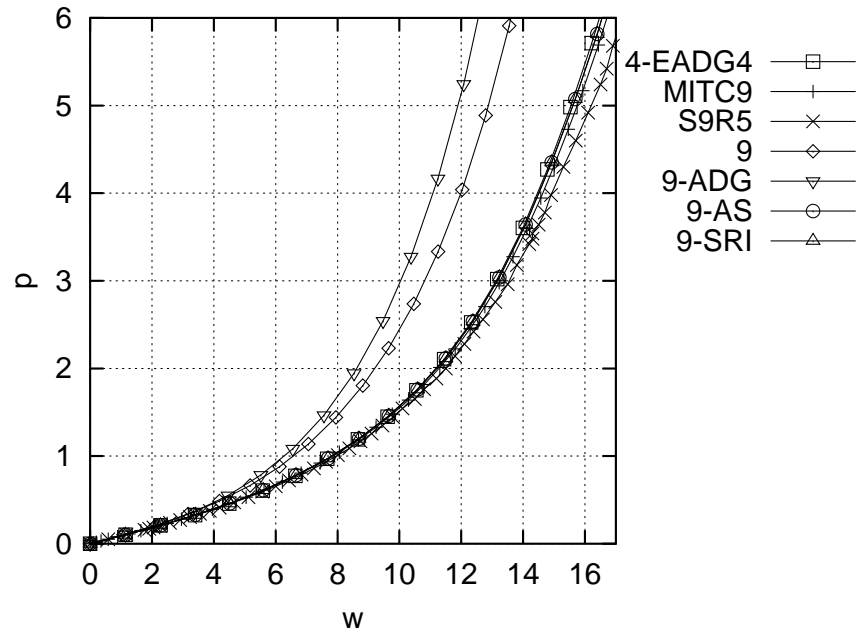
Tabela 6.15: Rozcięty pierścień kołowy. Rozwiązania liniowe dla $p = 0.01$.

Element/siatka	w
9	0.1065
9-ADG	0.1134
9-AS	0.1134
9-SRI	0.1134
MITC9	0.1135
S9R5	0.1147
4-EADG4	0.1145

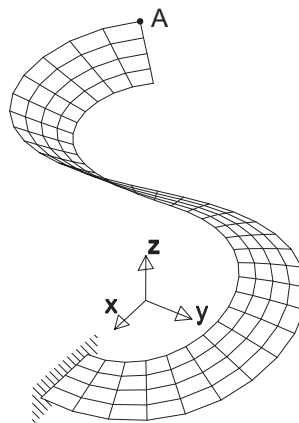
Do obliczeń nieliniowych zastosowano metodę długości łuku i początkową wartość obciążenia $p^{ref} = 0.1$. Rezultaty nieliniowej analizy pokazano na Rys.6.28 i można je scharakteryzować następująco:

1. Elementy własne 9-AS i 9-SRI oraz element porównawczy MITC9 mają podobne charakterystyki.
2. Krzywe dla elementu 9 oraz 9-ADG są przesunięte w lewą stronę, co oznacza ujawnienie się zjawiska zakleszczania. Oznacza to, że użycie dwustopniowych aproksymacji dla gradientu przemieszczenia w elemencie 9-ADG nie jest w tym teście efektywne.

3. Element porównawczy S9R5 jest najbardziej podatny; uzyskana dla niego krzywa jest najbardziej przesunięta w prawą stronę.



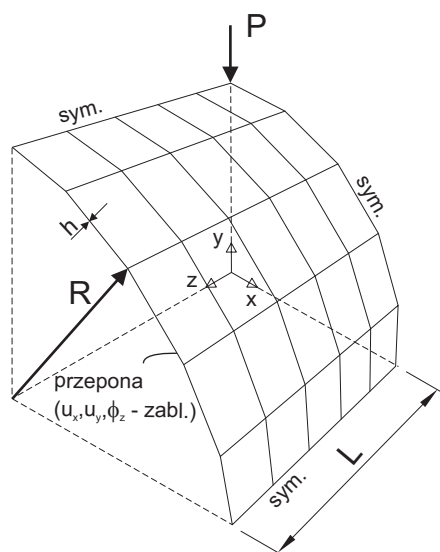
Rysunek 6.28: Rozcięty pierścień kołowy. Krzywe przemieszczenia w dla $p^{ref} = 0.1$.



Rysunek 6.29: Rozcięty pierścień kołowy. Postać zdeformowana $p = 7.62$.

6.11 Cylinder z przeponami

Cylindryczna powłoka zamknięta dwoma sztywnymi przeponami jest ściskana przez dwie przeciwnie skierowane siły, działające w jednej linii. Z uwagi na symetrię powłoki, warunków brzegowych i obciążenia, do obliczeń została użyta jedynie jedna ósma powłoki pokazana na Rys. 6.30, oczywiście z uwzględnieniem warunków symetrii. Dane geometryczne i materiałowe podano w opisie rysunku.



Rysunek 6.30: Cylinder z przeponami. $E = 3.0 \times 10^6$, $\nu = 0.3$.
 $h = 3.0$, $R = 300$, $L = 300$, $P = 0.25$.

Wyniki testu liniowego zostały umieszczone w Tab. 6.16, gdzie podano pionowe przemieszczenie v w miejscu przyłożenia siły P . Do obliczeń użyto dwóch siatek: 2×2 elementy i 5×5 elementów. Porównanie rezultatów wskazuje, że elementy własne dają lepsze rezultaty niż elementy porównawcze. Dla elementu 9 rozwiązanie jest silnie przeszywnione; jak wskazano np. w [Belytschko, Wong, Stolarski, 1989], jest to efektem bardziej zakleszczania poprzecznego niż membranowego.

Uwaga. W pracy [Jang, Pinsky, 1987], Rys. 7, rozwiązanie dla elementu typu SRI zbiega się bardzo słabo, tak, że dla siatki z 17 węzłami/krawędź błąd jest rzędu 20%. Wynik własnego elementu 9-SRI ma błąd $< 1\%$ dla siatki z 11 węzłami/krawędź. Tak więc, opinia, że elementy typu SRI charakteryzują się słabą zbieżnością nie została potwierdzona.

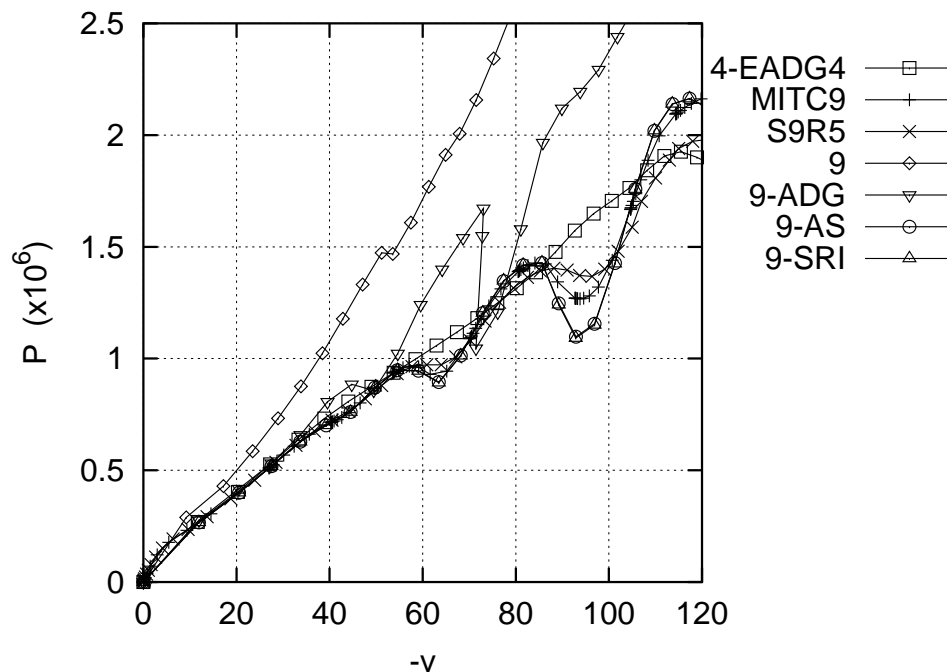
Rozwiązania nieliniowe otrzymano metodą długości łuku, dla początkowego $\Delta P = 10^4$. Pionowe przemieszczenie v w miejscu przyłożenia siły, w funkcji siły P pokazano na Rys. 6.31. Na krzywych zaznaczono co 10 punkt rozwiązania, dla wszystkich elementów z wyjątkiem MITC9 i S9R5. Rozwiązania dla elementów

Tabela 6.16: Cylinder z przeponami. Przemieszczenie pionowe ($\times 10^5$) pod siłą.

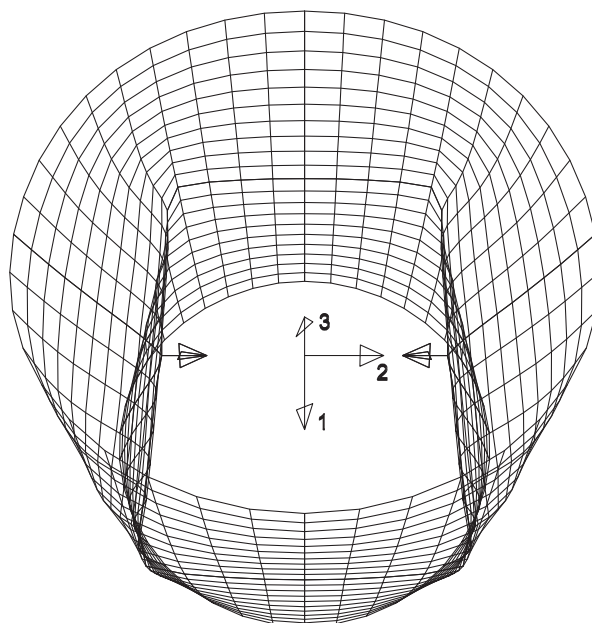
Element/siatka	2×2	5×5
9	0.0918	0.4701
9-ADG	1.4526	1.8192
9-AS	1.4535	1.8194
9-SRI	1.4547	1.8197
MITC9	1.3180	1.7979
S9R5	1.3870	1.8040
$\gamma - \psi$	1.3449	–
4-EADG4	1.3855	1.7548
Wart. ref.	1.8249	

własnych 9-AS oraz 9-SRI pokrywają się i są podobne do rozwiązań dla elementów porównawczych MITC9 i S9R5. Dla elementu 9 rozwiązanie jest silnie przeszywnione.

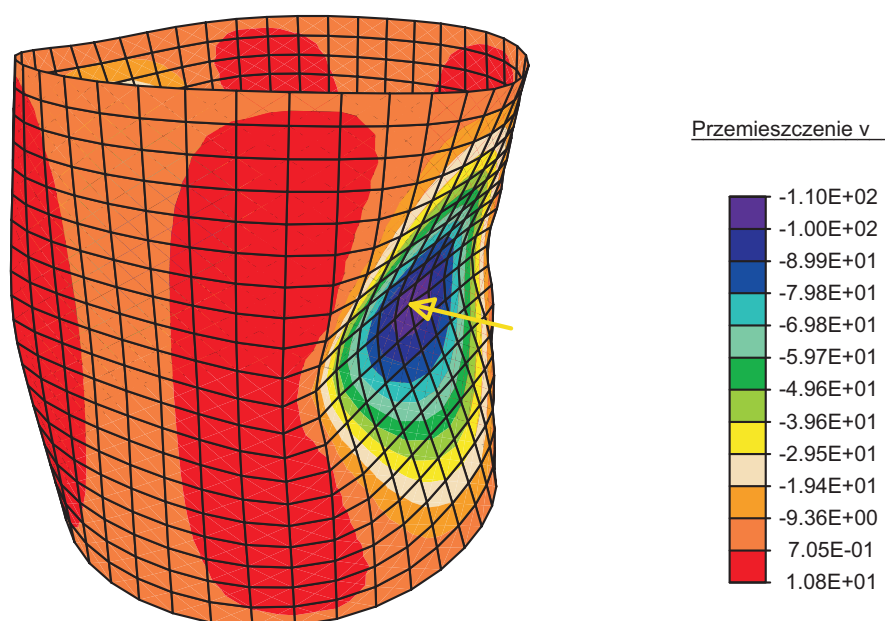
Dla elementu 4-wzłowego 4-EADG4 rozwiązanie jest prawie linią prostą, natomiast dla elementów 9-wzłowych uwidacznia się wpływ wyższych postaci deformacji.

Rysunek 6.31: Cylinder z przeponami. Rozwiązania nieliniowe dla siatki 10×10 .

Przykładową postać deformacji oraz mapę przemieszczeń pokazano na Rys.6.32 i 6.33, uzyskano je za pomocą elementu własnego 9-AS.



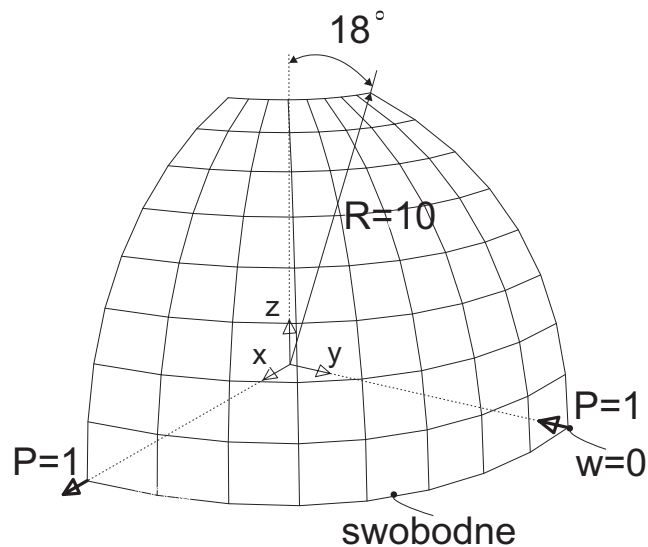
Rysunek 6.32: Cylinder z przeponami. Deformacja dla 9-AS i $P = 2 \times 10^6$.



Rysunek 6.33: Cylinder z przeponami. Mapa przemieszczeń dla 9-AS i $P = 2 \times 10^6$.

6.12 Półsfery z otworem

Półsfery z otworem obciążona jest układem sił zrównoważonych, dwiema siłami ścisakającymi wzdłuż osi OY i dwiema siłami rozciągającymi wzdłuż osi OX , działającymi w płaszczyźnie XY . Po uwzględnieniu warunków symetrii, do obliczeń wykorzystano tylko ćwiartkę powłoki pokazaną na Rys.6.34, gdzie umieszczono również wszystkie dane. Test ten zaproponowano w [MacNeal, Harder, 1985] do testowania elementów dla deformacji zgięciowych.



Rysunek 6.34: Półsfery z otworem. $E = 6.825 \times 10^7$, $\nu = 0.3$, $h = 0.04$.

Wyniki obliczeń liniowych zamieszczono w Tabeli 6.17, gdzie podano przemieszczenie w kierunku siły rozciągającej dla dwóch siatek 4×4 elementy i 8×8 elementów. Wartość referencyjną przytoczono za [MacNeal, Harder, 1985]. Widzimy, że elementy własne są bardziej dokładne od elementu porównawczego MITC9.

Tabela 6.17: Półsfery z otworem. Rezultaty liniowe. Przemieszczenie $u \times 10^2$.

Element/siatka	4×4	8×8
9	0.2066	2.4160
9-ADG	9.2449	9.3446
9-AS	9.3306	9.3473
9-SRI	9.3250	9.3473
MITC9	8.1762	8.5687
S9R5	9.3365	9.3513
4-EADG4	9.1566	9.3076
Wart. ref.	9.4000	

Wyniki dla elementu 9 świadczą o tym, że silnie manifestuje się zakleszczanie, i, jak wykazano w [Belytschko, Wong, Stolarski, 1989], jest to zakleszczanie membranowe. Dlatego ten przykład dobrze nadaje się do sprawdzania technik eliminujących ten typ zakleszczania.

Obliczenia nieliniowe przeprowadzono stosując metodę Newtona i $\Delta P = 10$. Krzywe otrzymane dla siatki 8×8 elementów pokazano na Rys.6.35 i 6.36, gdzie u i v to składowe przemieszczenia w kierunku siły rozciągającej i siły ściskającej.

Krzywe dla elementów własnych 9-AS i 9-SRI pokrywają się, a dla składowej u są zbliżone do krzywych dla elementów porównawczych. Dla składowej v , krzywe dla elementów własnych 9-AS i 9-SRI są zbliżone do krzywej dla elementu porównawczego S9R5, natomiast krzywa dla elementu porównawczego MITC9 jest przesunięta w prawo, czyli element ten jest bardziej podatny. Elementy 9 i 9-ADG zakleszczają się.

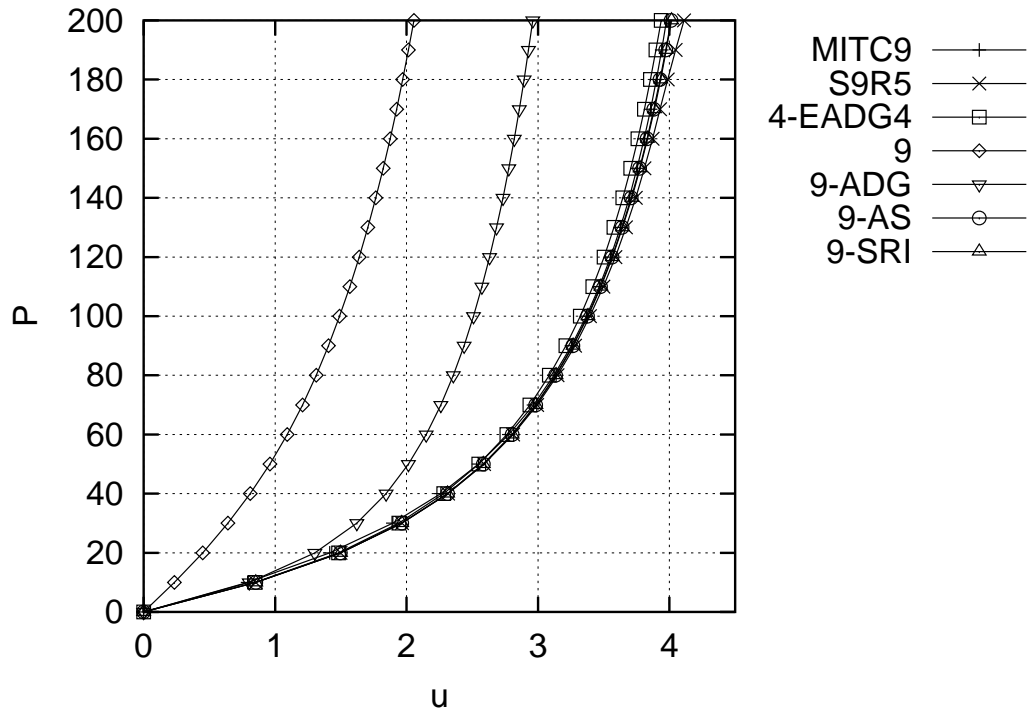
Zbieżność metody Newtona zilustrowano na Rys.6.39 i 6.40, zamieszczając wykresy liczby iteracji przypadających na każdy krok tej metody w dwóch przypadkach:

1. stosując różne wartości przyrostów siły i siatkę 8×8 elementów, Rys.6.39,
2. stosując różne siatki i przyrost siły $P^{ref} = 10$, Rys.6.40.

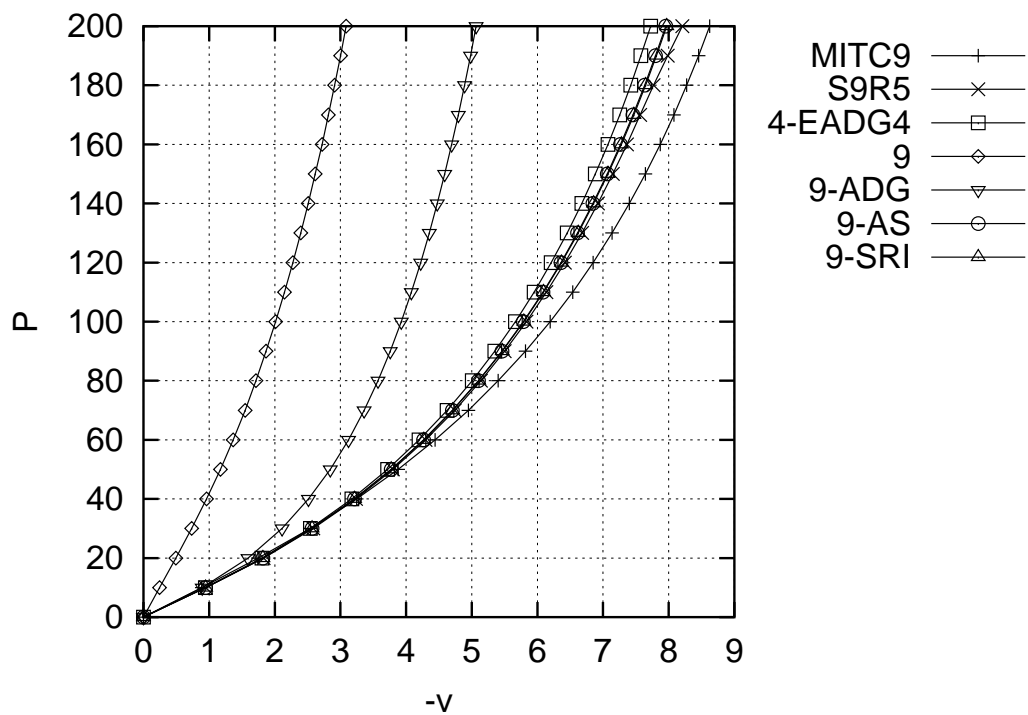
Wyniki otrzymano za pomocą elementów własnych 9-AS oraz 9-SRI; są one identyczne dla obu tych elementów. Można je podsumować następująco:

1. Z Rys.6.39 wynika, iż dla dużych kroków potrzebna jest większa ilość iteracji, aby uzyskać zbieżność. Dla $P^{ref} = 30$ maksymalna liczba iteracji to 16, a dla $P^{ref} = 1$ już tylko 6.
2. Cechą charakterystyczną tego zadania jest lepsza zbieżność wraz z postępującymi krokami rozwiązania, co widoczne jest w zmniejszającej się liczbie iteracji w kolejnych krokach.
3. Z Rys.6.40 wynika, że zbieżność rozwiązania w niewielkim stopniu zależy od gęstości siatki. Istnieje niewielka tendencja, że dla rzadszych siatek zbieżność uzyskuje się w mniejszej liczbie iteracji.

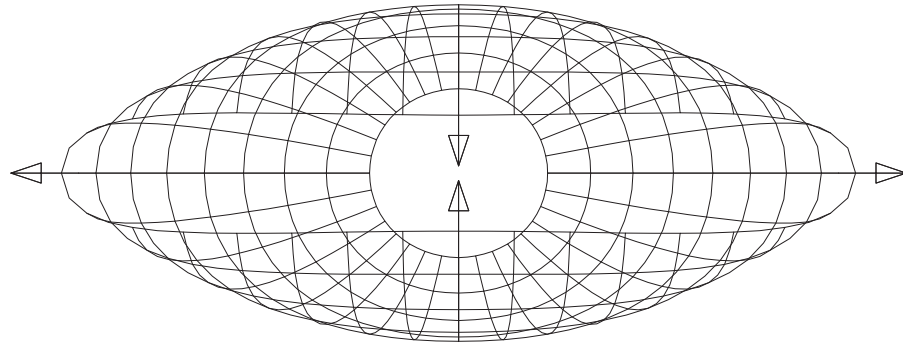
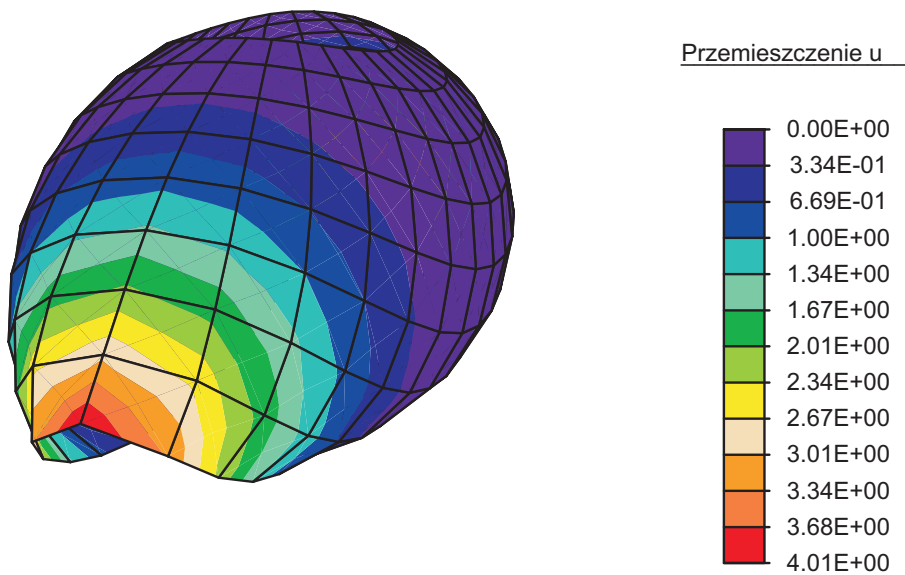
Postać zdeformowaną półsfery pokazano na Rys.6.37, a mapę przemieszczeń dla elementu 9-AS i $P = 200$ pokazano na Rys.6.38.

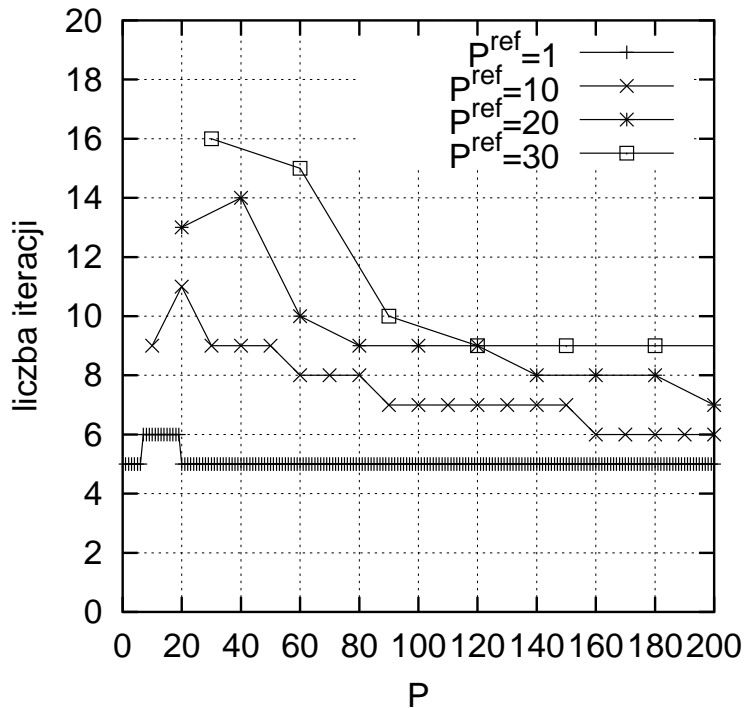


Rysunek 6.35: Półsfery z otworem. Przemieszczenie u .
Rozwiązania nieliniowe dla siatki 8×8 elementów.

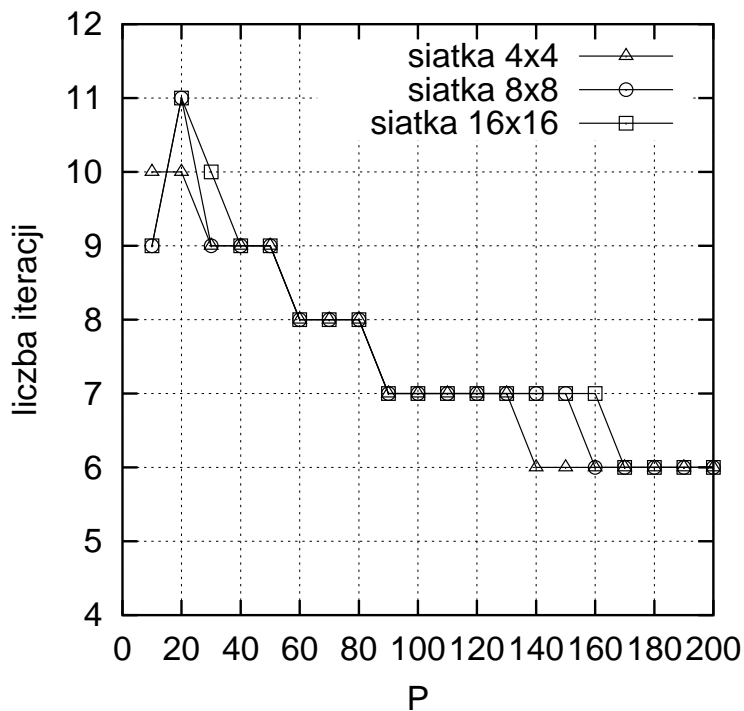


Rysunek 6.36: Półsfery z otworem. Przemieszczenie v .
Rozwiązania nieliniowe dla siatki 8×8 elementów.

Rysunek 6.37: Półsfery z otworem. Postać deformacji dla $P = 200$.Rysunek 6.38: Półsfery z otworem. Mapa przemieszczeń. Element 9-AS, $P = 200$.



Rysunek 6.39: Półsfery z otworem. Liczba iteracji dla wybranych przyrostów siły. Siatka 8×8 elementów. Elementy 9-AS i 9-SRI.



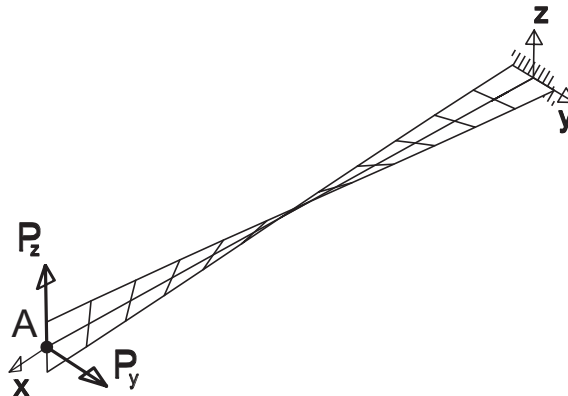
Rysunek 6.40: Półsfery z otworem. Liczba iteracji w zależności od siatki. Przyrost siły $P^{ref} = 10$. Elementy 9-AS i 9-SRI.

6.13 Skręcony wspornik

Wspornik jest wstępnie skręcony, ale odkształcenia początkowe są zerowe. Podobne wstępne skręcenie jest charakterystyczne dla geometrii np. śmigła lub łopatek turbiny. Wspornik jest utwierdzony na jednym końcu, a siła przyłożona jest w środku drugiego końca, patrz Rys.6.41, gdzie podano wymiary i dane materiałowe. W tym teście elementy mają kształt hiperboliczno-paraboliczny. W obliczeniach użyto siatki 2×12 -elementów 9-węzłowych.

Test ten zaproponowano w [MacNeal, Harder, 1985], gdzie grubość wspornika wynosiła $h = 0.32$. W innych pracach używana jest mniejsza grubość, gdyż wtedy silniej uwidacznia się zakleszczanie membranowe i test staje się bardziej wymagający. Np. w [Belytschko, Wong, Stolarski, 1989] użyto $h = 0.0032$. W poniższych testach używane są dwie grubości: $h = 0.0032$ i $h = 0.032$.

Analizowane są dwa przypadki obciążenia; siła skupiona skierowana jest wzdłuż osi OZ lub wzdłuż osi OY .



Rysunek 6.41: Skręcony wspornik. $E = 2.9 \times 10^7$, $\nu = 0.22$.
Długość 12.0, szerokość 1.1, kąt skręcenia 90° .

Wyniki testów liniowych, przeprowadzonych dla $h = 0.0032$ i sił $P_y = P_z = 10^{-6}$, podano w Tabeli 6.18. Monitorowana jest składowa wektora przemieszczenia w punkcie A przyłożenia siły i w kierunku działania siły. Wyniki obliczeń można podsumować następująco:

1. Dla obciążenia poprzecznego, wyniki pokazują, że elementy własne 9-AS, 9ADG i 9-SRI mają bardzo dobrą dokładność, lepszą od elementu porównawczego MITC9.
2. W przypadku siły w płaszczyźnie elementy MITC9 oraz S9R5 są dokładniejsze od elementów własnych,

Wyniki dla elementu 9 pokazują, że w tym przykładzie zakleszczania jest bardzo silne. Element porównawczy S9R5 zbiega od góry dla obydwu przypadków.

Tabela 6.18: Skręcony wspornik.
Przemieszczenie w punkcie A ($\times 10^3$) w kierunku siły.

Element/obciążenie	w płaszczyźnie (P_z)	poprzeczne (P_y)
9	0.4754	0.1163
9-ADG	5.1823	1.2936
9-AS	5.2283	1.2935
9-SRI	5.2280	1.2934
MITC9	5.2468	1.2920
S9R5	5.2683	1.2958
9-node $\gamma - \psi$	5.2297	1.3069
4-EADG4	5.1888	1.2861
Wart. ref.	5.2560	1.2940

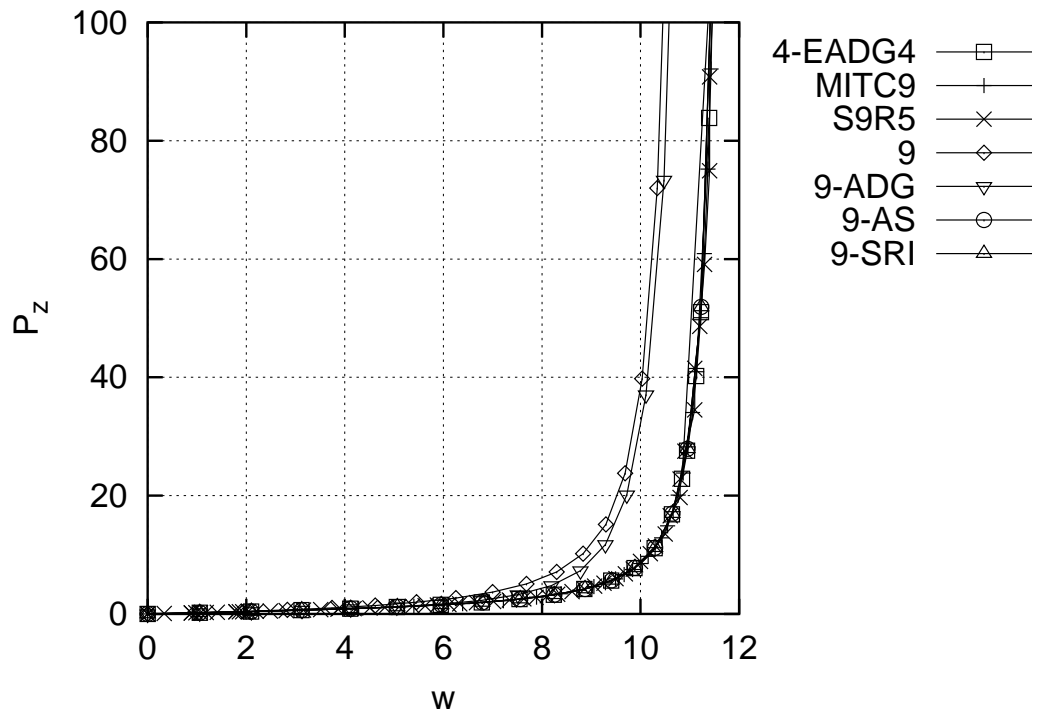
Analizy nieliniowe przeprowadzono metodą długości łuku, dla dwóch grubości powłoki. Monitorowana jest składowa wektora przemieszczenia w punkcie A przyłożenia siły i w kierunku działania siły. Wyniki podano następująco:

1. dla $h = 0.032$: na Rys.6.42 i 6.43.
2. dla $h = 0.0032$: na Rys.6.44 i 6.45.

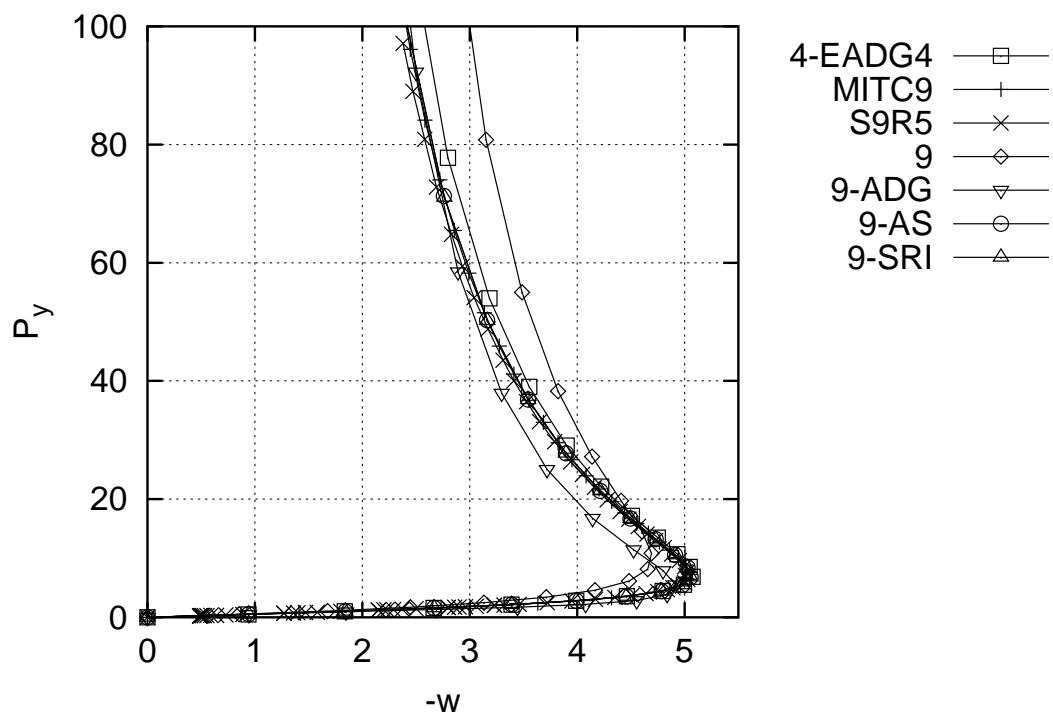
Otrzymane wyniki można podsumować następująco:

1. Elementy własne 9-AS i 9-SRI, oraz element porównawczy MITC9, dają prawie identyczne wykresy dla obu grubości wspornika, co świadczy o ich dużej odporności na zakleszczanie.
2. Element referencyjny S9R5 traci zbieżność w obu przypadkach obciążenia. Dla grubości $h = 0.0032$: dla obciążenia P_z przy przemieszczeniu $w \approx 7$, natomiast dla obciążenia P_y przy przemieszczeniu $w \approx -4.5$.
3. Mechanizm zakleszczania jest silniejszy dla cieńszego (i bardziej smukłego) wspornika, co widać gdy porówna się Rys.6.45 i Rys.6.43, oraz rozwiązania dla elementów 9 oraz 9-ADG.
4. Dla cieńszego wspornika, rozwiązania dla własnych elementów 9-węzłowych 9-AS i 9-SRI różnią się od rozwiązania dla elementu 4-węzłowego 4-EADG4.

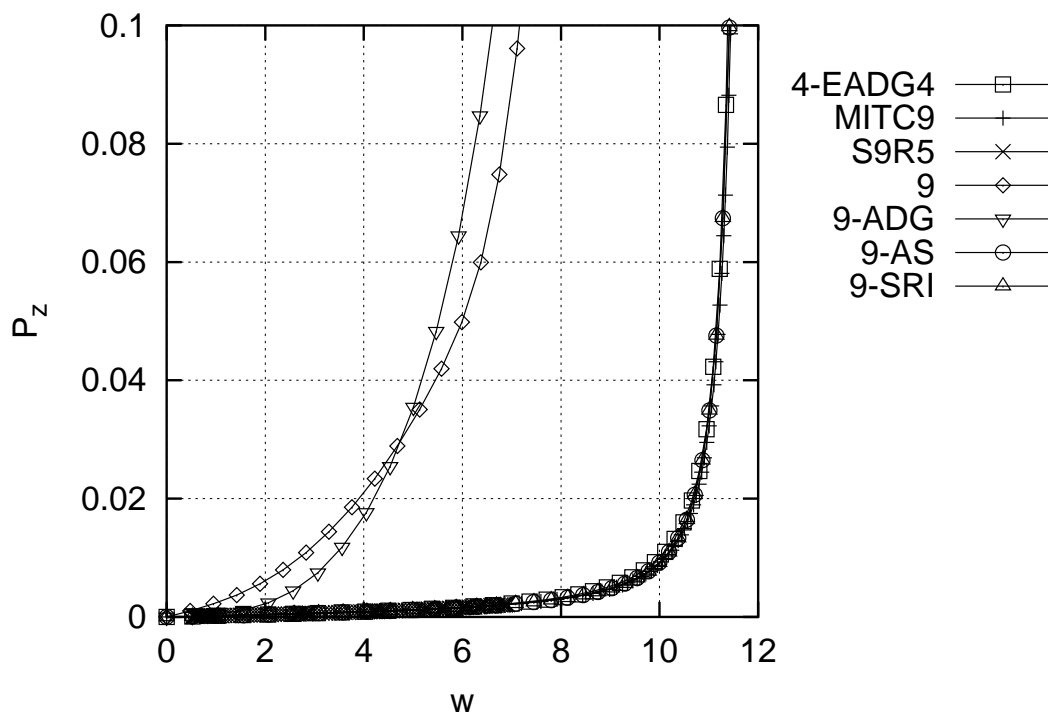
Na Rys.6.46 pokazano przykładową mapę przemieszczeń, otrzymaną dla elementu własnego 9-AS, grubości $h = 0.032$ i obciążenia normalnego $P_y = 200$.



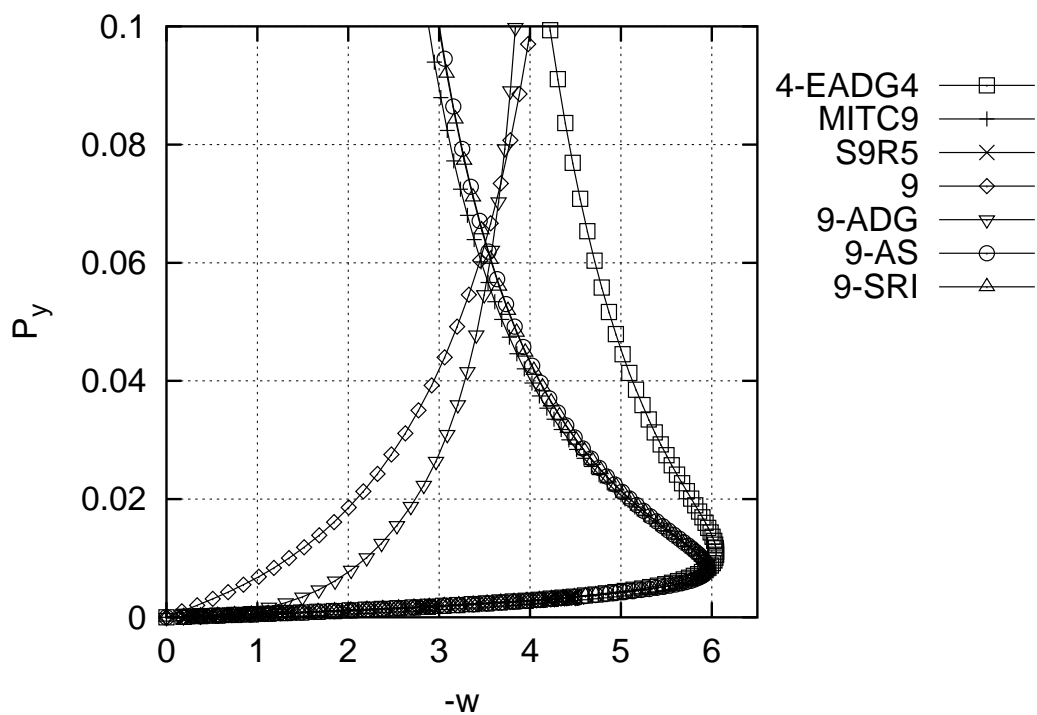
Rysunek 6.42: Skręcony wspornik, $h = 0.032$. Obciążenie w płaszczyźnie wspornika. Rozwiązania nieliniowe dla siatki 2×12 elementów.



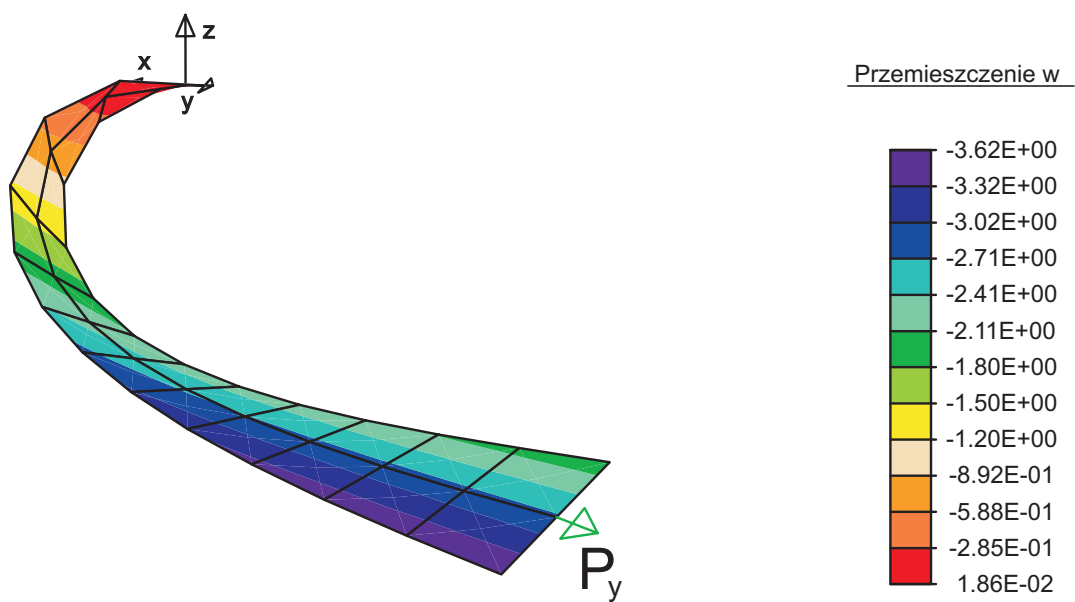
Rysunek 6.43: Pólsfera z otworem, $h = 0.032$. Obciążenie prostopadłe do wspornika. Rozwiązania nieliniowe dla siatki 2×12 elementów.



Rysunek 6.44: Skręcony wspornik, $h = 0.0032$. Obciążenie w płaszczyźnie wspornika. Rozwiązania nieliniowe dla siatki 2×12 elementów.



Rysunek 6.45: Półsfera z otworem, $h = 0.0032$. Obciążenie normalne do wspornika. Rozwiązania nieliniowe dla siatki 2×12 elementów.

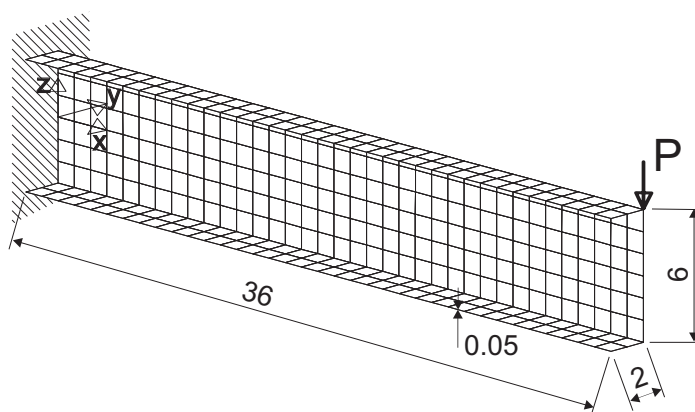


Rysunek 6.46: Skręcony wspornik. Mapa przemieszczeń.
Rozwiązanie nieliniowe elementem 9-AS. $P_y = 200$. $h = 0.032$.

6.14 Wspornik o przekroju ceowym

Wspornik pokazany na Rys.6.47 jest utwierdzony na jednym końcu, a na drugim obciążony jednostkową siłą skupioną. Test ten zaproponowano w [Chroscielewski, Makowski, Stumpf, 1992], aby zademonstrować zdolność elementów do modelowania niegładkich połączeń konstrukcji powłokowych.

Analiza tego wspornika jest dość trudna, ponieważ, ze względu na sprzężenie stanu membranowego ze stanem zgięciowym i skrętnym, powstaje pofałdowanie struktury widoczne na Rys.6.49. Do obliczeń wykorzystano regularną siatkę 5×18 elementów, z 5 elementami w kierunku poprzecznym i 18 wzdłuż osi wspornika.



Rysunek 6.47: Wspornik o przekroju ceowym. $E = 1 \times 10^7$, $\nu = 0.333$.

Rozwiązania linowe podano w Tabeli 6.19, gdzie w to przemieszczenie pionowe w punkcie przyłożenia siły. Widać, że rozwiązania dla elementów własnych niewiele różnią się od siebie. Rozwiązania uzyskane elementami referencyjnymi S9R5 i MITC9 są mniej sztywne.

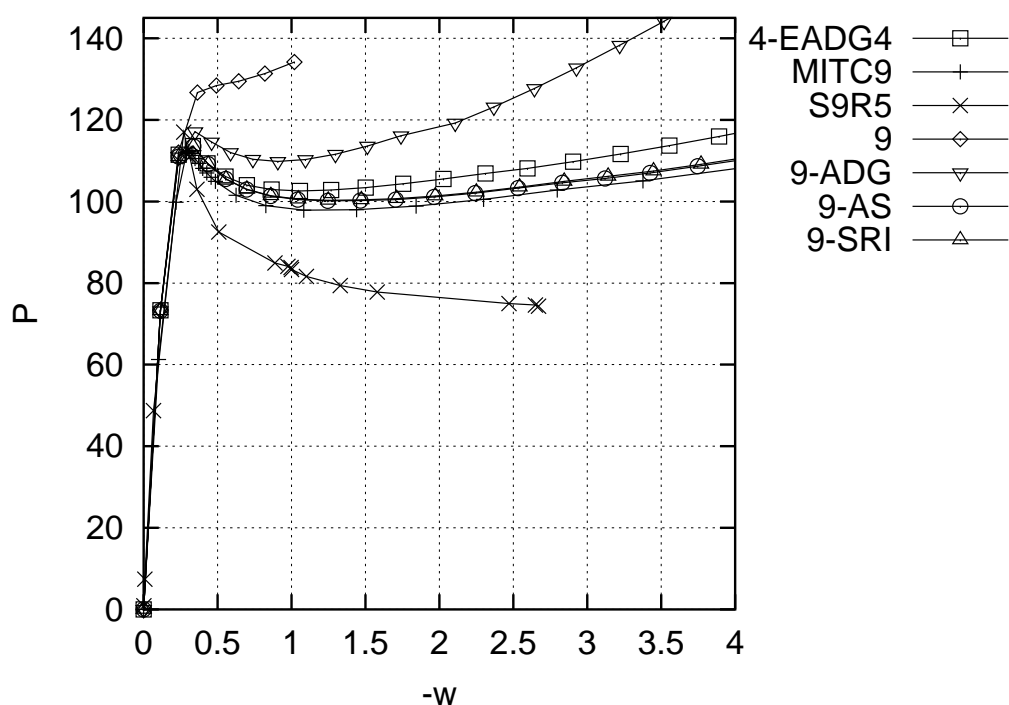
Tabela 6.19: Wspornik o przekroju ceowym. Rozwiązanie liniowe dla $P_z = -1$. Siatka 5×18 elementów.

Element	$-w \times 10^3$
9	1.1543
9-ADG	1.1556
9-AS	1.1556
9-SRI	1.1556
MITC9	1.2839
S9R5	1.1628
4-EADG4	1.1541
Ref.	1.1544

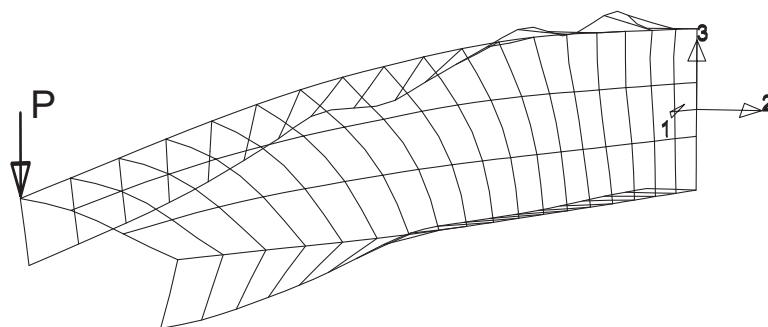
Uwaga. Rozwiązanie referencyjne $w = -1.1544 \times 10^{-3}$ otrzymano w [Chroscielewski, Makowski, Pietraszkiewicz, 2004] 16-węzłowym elementem CAM dla pełnego całkowania, $\alpha_t = 0.01$ i siatki $(2 + 3 + 2) \times 9$ elementów.

Obliczenia nieliniowe przeprowadzono metodą długości łuku, dla początkowego $\Delta P = 20$. Otrzymane krzywe pokazano na Rys. 6.48, gdzie na krzywych zaznaczono co 5-ty punkt rozwiązania, dla wszystkich elementów z wyjątkiem MITC9. Rezultaty można podsumować następująco:

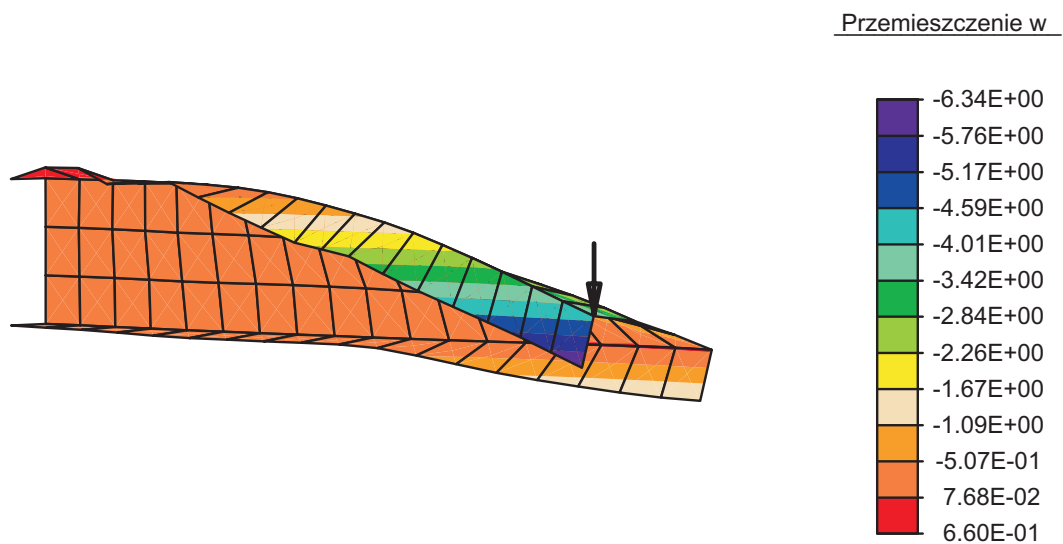
1. Wykresy dla elementów własnych 9-AS oraz 9-SRI pokrywają się. Mniej dokładne rozwiązanie uzyskano dla elementu 9-ADG, natomiast nie udało się ukończyć obliczeń (iteracje były rozbieżne) elementem 9.
2. Element porównawczy S9R5 utracił zbieżność dla $w \approx -2,7$ i daje on rozwiązanie zbyt podatne w stosunku do tych podawanych w literaturze, patrz np. [Chroscielewski, Makowski, Stumpf, 1992], [Betsch, Gruttmann, Stein, 1996].
3. Krzywa dla elementu porównawczego MITC9 jest zbliżona do krzywych dla elementów 9-AS i 9-SRI, jednak wykazuje on trochę mniejszą sztywność.
4. Element 4-węzłowy 4-EADG4 jest wyraźnie sztywniejszy od elementów 9-węzłowych 9-AS oraz 9-SRI.



Rysunek 6.48: Wspornik o przekroju ceowym. Charakterystyka nieliniowa.



Rysunek 6.49: Wspornik o przekroju ceowym. Postać deformacji dla elementu 9-AS i $P = 112$.

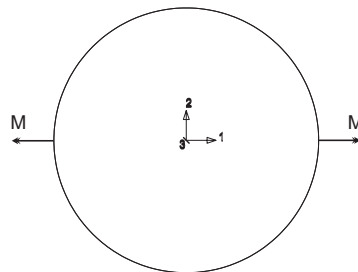


Rysunek 6.50: Wspornik o przekroju ceowym. Mapa przemieszczeń dla elementu 9-AS i $P = 112$.

6.15 Skręcany pierścień

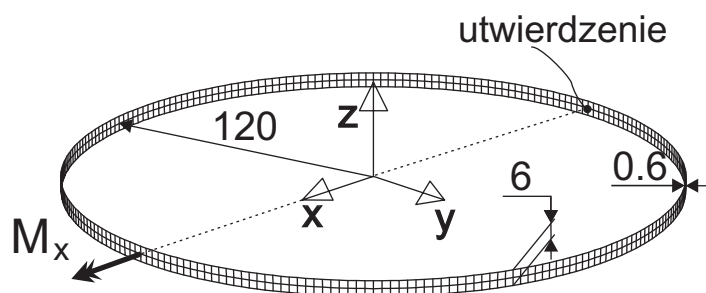
Pierścień kołowy jest obciążony dwoma momentami skręcającymi, patrz Rys.6.51. Analiza przeprowadzana jest dla dużych wartości momentów, wywołujących bardzo złożone postaci deformacji. Test ten zaproponowano w [Goto, *et al.*, 1992] i stanowi on trudną weryfikację możliwości elementu w zakresie dużych obrotów i skręcania.

Ciekawą własnością pierścienia jest to, że po obciążeniu momentem skręcającym, redukuje on rozmiar do 1/3 wielkości początkowej, patrz Rys.6.54. Z tego względu, może być wykorzystany np. w inżynierii astronautycznej, gdyż będzie zajmował mało miejsca podczas transportu na orbitę.



Rysunek 6.51: Skręcany pierścień.

W modelu dyskretnym MES, patrz Rys.6.52, przyjęto, że pierścień jest utwierdzony punktowo z jednej strony, a z drugiej obciążony punktowo momentem skręcającym. Do obliczeń użyto siatki 1×124 elementów 9-węzłowych.



Rysunek 6.52: Skręcany pierścień. $E = 2 \times 10^5$, $\nu = 0.3$.

Uwaga. Warto podkreślić, że dzięki szóstemu stopniowi swobody wprowadzonemu za pomocą równana więzów na rotacje (2.1), można przyłożyć moment normalny bezpośrednio do węzła elementu skończonego. Z powodu braku tej możliwości nie uzyskano rozwiązań za pomocą elementów porównawczych, MITC9 oraz S9R5. Aby ominąć to ograniczenie, w niektórych pracach, np. [Rebel, 1998], stosowana jest dodatkowa sztywna płytką.

Wyniki analiz liniowych podano w Tabeli 6.20. Widać, że elementy 9 oraz 9-ADG nie wykazują zakleszczania i dają wyniki porównywalne do wyników dla elementów 9-AS i 9-SRI. Rozwiązania dla elementów 9-AS i 9-SRI są identyczne. Rozwiązanie uzyskane elementem 4-węzłowym 4-EADG4 różni się o około 9% od rozwiązań dla elementów 9-węzłowych 9-AS i 9-SRI.

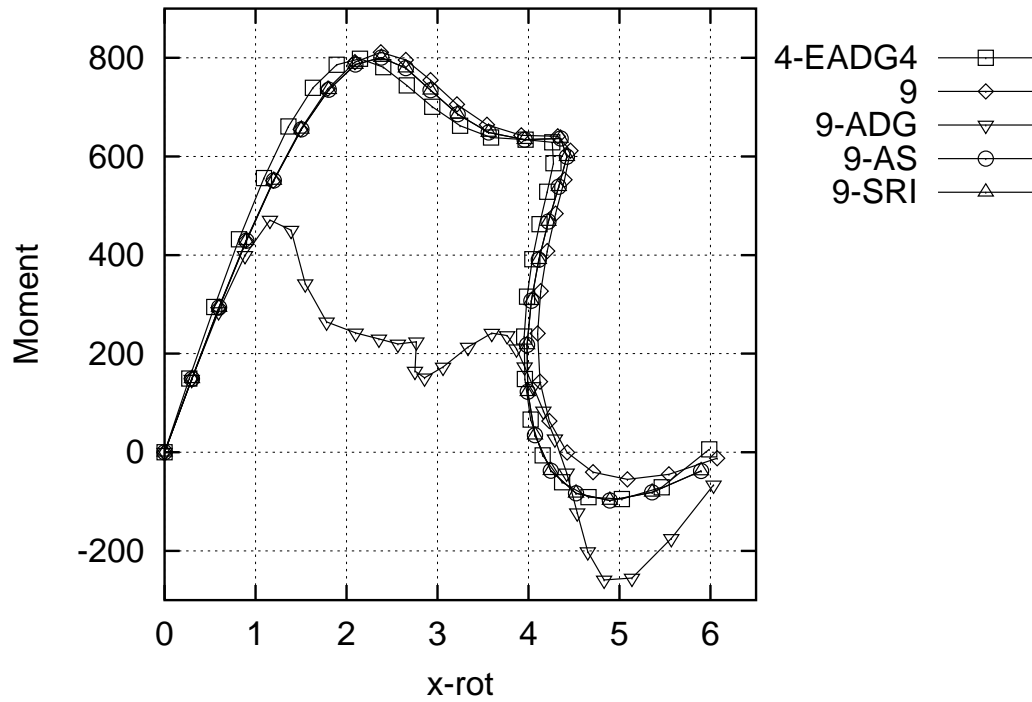
Tabela 6.20: Skręcany pierścień. Rozwiązanie liniowe. $M_x = 10$.

Element	Obrót $\phi_x \times 10^2$
9	1.9846
9-ADG	1.9958
9-AS	1.9971
9-SRI	1.9971
4-EADG4	1.8200

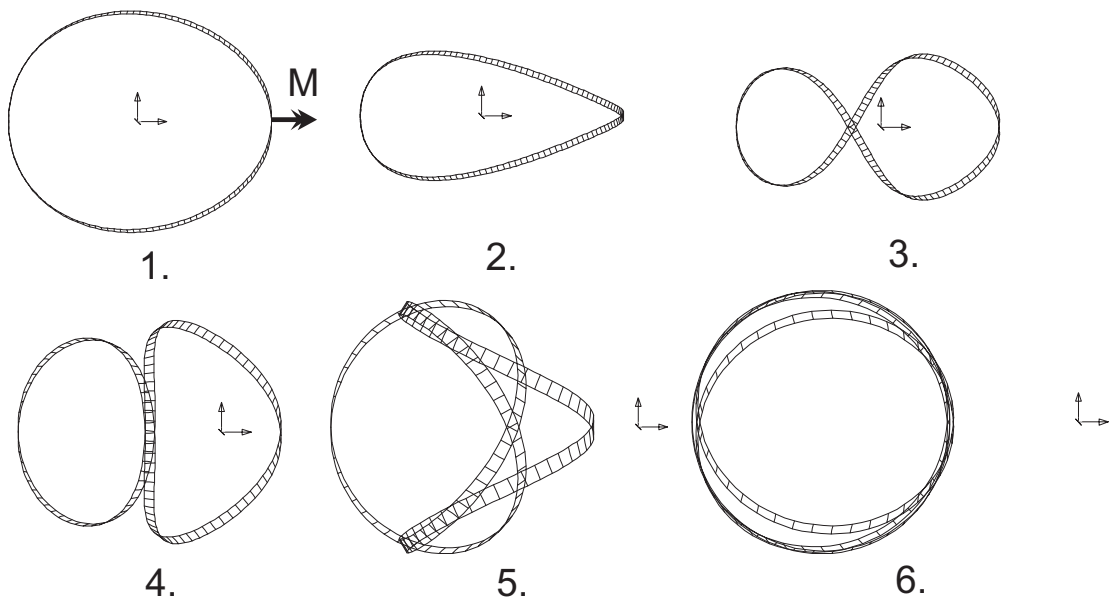
Wyniki analiz nieliniowych, przeprowadzonych metodą długości łuku dla $\Delta M_x = 10$, zamieszczono na Rys.6.53, gdzie na krzywych zaznaczono co 15-ty punkt rozwiązania. Otrzymane krzywe mogą być skomentowane następująco:

1. Elementy własne 9-AS oraz 9-SRI dają identyczne krzywe, natomiast element własny 9-ADG daje krzywą bardzo od nich odbiegającą. Krzywa dla elementu 9 jest bliska krzywej dla elementów 9-AS oraz 9-SRI.
2. Elementy 9-węzłowe dają mniej sztywne rezultaty niż 4-węzłowy element 4-EADG4, dla którego krzywa jest przesunięta w lewą stronę.
3. W pracy [Goto, *et al.*, 1992] nie uzyskano rozwiązań z ujemnym momentem, natomiast wyniki z Rys.6.53 potwierdzają rozwiązania z [Rebel, 1998], gdzie, pod koniec deformacji, moment przyjmuje wartość ujemną.
4. Przemieszczenia styczne w punkcie obciążenia pozostają zerowe podczas całego procesu deformacji, bez stosowania warunków brzegowych.

Kolejne stadia deformacji pierścienia, dla całego zakresu wartości momentu skręcającego, pokazano na Rys.6.54.



Rysunek 6.53: Skręcany pierścień. Wykres moment skrecający-kał skrećenia wokół osi x w punkcie przyłożenia momentu.



Rysunek 6.54: Skręcany pierścień. Kolejne stadia deformacji.

6.16 Podsumowanie testów

Szczegółowe omówienie zachowania się opracowanych elementów 9-węzłowych i porównania z elementami odniesienia zamieszczono dla każdego z testów oddzielnie w poprzednich rozdziałach. Poniżej zamieszczono charakterystyki i uwagi o charakterze ogólnym.

Ogólna charakterystyka przeprowadzonych testów. Łącznie przeprowadzono 17 testów numerycznych, wliczając w to 3 testy bazowe z Rozdz.6.2. Przeprowadzono analizy następujących typów:

1. zagadnienie na wartości własne: 1 test z Rozdz.6.1,
2. testy liniowe: 16 testów z Rozdz.6.2-6.15,
3. testy nieliniowe: 10 testów z Rozdz.6.6-6.15, z zastosowaniem metody Newtona lub metody długości łuku (kontynuacji).

Zestaw testów składa się z:

1. klasycznych testów z katalogu zaproponowanego w [MacNeal, Harder, 1985], np. test z Rozdz.6.3, 6.4, 6.7, 6.12, 6.13, przy czym niektóre z nich uzupełniono o analizę nieliniową, oraz
2. nowszych testów wybranych z literatury, przy czym niektóre z nich wymagają zaawansowanych cech elementów powłokowych, takich jak:
 - (a) uwzględnianie dużych (nieograniczonych) rotacji, np. test z Rozdz.6.15,
 - (b) posiadanie rotacji normalnej jako stopnia swobody, przy czym jej wielkość nie może być ograniczona, np. test z Rozdz.6.6, 6.8, 6.15,
 - (c) techniki eliminujące zakleszczanie membranowe i zakleszczania od ścinania poprzecznego, np. test z Rozdz.6.5, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14.

Syntetyczna ocena elementów na podstawie testów liniowych. Aby móc porównać dokładność elementów w zakresie liniowym utworzono Tabelę 6.21, w której umieszczono uśrednione procentowe błędy dla tych testów liniowych dla których znana była wartość odniesienia. Każdemu testowi przypisano 1 liczbę, uśredniając otrzymane wcześniej, dla różnych siatek i rodzajów obciążenia, wyniki. Rezultaty zawarte w Tabeli 6.21 świadczą o różnicach pomiędzy porównywanymi elementami; dokładność rozwiązań można oczywiście poprawić stosując gęstsze siatki.

Elementy własne, 9-AS, 9-SRI oraz 9-ADG, okazały się dokładniejsze od elementów referencyjnych, MITC9 i S9R5. Różnica nie jest duża, ale w wielu testach wyraźnie zauważalna.

Tabela 6.21: Uśrednione błędy w testach liniowych (w %) .

Test (Rozdz.)	Średni procentowy błąd dla elementu						
	9	9-ADG	9-AS	9-SRI	MITC9	S9R5	4-EADG4
Prosty wspornik (6.3)	2.7	1.9	1.8	1.9	2.9	4.5	4.8
Zakrzywiony wspornik (6.4)	4.1	1.9	1.9	1.9	3.6	5.2	1.7
Smukły wspornik (6.6)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Membrana Cooka (6.7)	9.4	4.7	4.7	4.7	3.8	6.1	7.5
Hak Raascha (6.8)	2.7	0.7	0.7	0.7	1.0	1.2	2.7
Cylinder z przeponami (6.11)	84.6	10.4	10.3	10.3	14.6	12.6	14.0
Półsfery z otworem (6.12)	86.1	1.1	0.6	0.7	10.9	0.6	1.8
Skręcony wspornik (6.13)	91.0	0.7	0.3	0.3	0.2	0.2	0.9
Sumaryczny średni błąd w %	35.1	2.7	2.5	2.6	4.6	3.8	4.2

Uwagi dotyczące przydatności poszczególnych elementów własnych.

1. Standardowy element 9 nie ma praktycznego znaczenia, ponieważ jest silnie przesztyniony, na skutek zakleszczania membranowego i od ścinania poprzecznego. Jest on stosowany wyłącznie w celach porównawczych, by zdemontować skuteczność metod eliminujących zakleszczanie zastosowanych w innych elementach.
2. Element 9-ADG w zakresie liniowym daje wyniki porównywalne do tych dla elementów 9-AS i 9-SRI. Jednak w kilku nieliniowych testach, np. tych z Rozdz. 6.8, 6.10, 6.12, 6.13, element 9-ADG daje rezultaty odbiegające od poprawnych. Jeśli uwzględnić bardziej skomplikowaną implementację metody ADG w porównaniu z metodą AS, to wydaje się, że stosowanie metody ADG w obecnej wersji nie jest celowe.
3. Element 9-AS jest najdokładniejszy w testach liniowych, patrz Tabela 6.21, i bardzo dobrze zachowuje się w testach nieliniowych. Podsumowując zadania testowe, można stwierdzić, że zastosowana w tym elemencie metoda AS dla składowych odkształcenia w ortonormalnej bazie w środku elementu, nie ustępuje w niczym metodzie opartej na składowych kowariantach odkształcenia, użytej w elemencie referencyjnym MITC9.
4. Element 9-SRI ma własności zbliżone do własności elementu 9-AS. Opracowana metoda SRI nie jest całkowicie równoważna technice AS, jednak element 9-SRI jest efektywny i stabilny i dlatego może być stosowany do modelowania powłok sprężystych.

Podsumowując, elementy 9-AS i 9-SRI zbiegają monotonicznie wraz z zagęszczaniem siatki i dają rozwiązania obciążone małym błędem, mniejszym niż elementy referencyjne. Poza tym, charakteryzują się bardzo dobrą dokładnością i zbieżnością w testach nieliniowych.

Rozdział 7

Podsumowanie

Zdaniem autora, w rozprawie otrzymano następujące oryginalne rezultaty:

1. Opracowano podstawy teoretyczne 9-węzłowych nieliniowych elementów powłokowych bazujących na kinematyce Reissnera oraz na tensorze odkształcenia Greena. Sformułowanie uwzględnia rotację wokół wektora normalnego do powierzchni powłoki i dopuszcza duże (nieograniczone) rotacje.
2. Opracowano metodę dwustopniowej aproksymacji odkształceń (AS), eliminującą zakleszczanie od ścinania poprzecznego i zakleszczanie membranowe, oraz zaproponowano szereg jej modyfikacji, polegających na:
 - (a) łącznym traktowaniu próbkowania i całkowania numerycznego. Prowadzi to do zastąpienia 6 punktów próbkowania przez 2 linie próbkowania, co poprawia efektywność elementów.
 - (b) zastosowaniu dwustopniowej aproksymacji do składowych w ortonormalnej bazie w środku elementu, co poprawia efektywność i dokładność elementu. Odróżnia to opracowane elementy od elementów z rodziny MITC, w których używane są składowe kowariantne odkształcenia.
 - (c) opracowaniu metody dwustopniowej aproksymacji nie tylko w zastosowaniu do pola odkształceń (AS), ale także do pola gradientu przemieszczenia (ADG). W tym ostatnim przypadku modyfikowane jest również równanie więzów na rotacje.
3. Zaproponowano aby technikę selektywnego zredukowanego całkowania (SRI) zastosować nie tylko do składników energii odkształcenia odpowiedzialnych za zakleszczanie, lecz także do innych członów wywołujących przeszywnienie. Wyselekcjonowano odpowiednio niskie reguły całkowania, otrzymując element o bardzo dobrej dokładności i efektywności.
4. Opracowano kwestię początkowych zniekształceń elementu (Rozdz.4.4), rozumianych w sensie odstępstwa początkowego kształtu elementu od kształtu kwadratowego, z regularnie rozmieszczonymi węzłami.

Pokazano, że zniekształcenia tego typu mogą prowadzić do zmiany orientacji bazy lokalnej, w tym najeżenia (zwrotu) wektora normalnego \mathbf{t}_3 , co powoduje problemy z dokładnością obliczeń. Podano prosty jednowymiarowy przykład, który pokazuje, że zmiana położenia węzła środkowego prowadzić może do zmiany zwrotu wektora stycznego bazy naturalnej.

5. Zaimplementowano 4 oryginalne 9-węzłowe elementy powłokowe i, w celu zwerifikowania ich własności, poddano je szeregowi rygorystycznych testów liniowych i nieliniowych; podsumowanie tych testów zamieszczono w Rozdz. 6.16.

Testy te wykazują, że elementy oznaczone jako 9-AS i 9-SRI, posiadają bardzo dobre własności i w wielu testach wykazują wyższość nad elementami z profesjonalnych pakietów MES.

Opracowane elementy powłokowe mogą być stosowane do modelowania powłok z niegładką powierzchnią środkową, np. z krawędziami i narożami, oraz być łączone z trójwymiarowymi elementami belkowymi, posiadającym 6 stopni swobody w węźle.

Bibliografia

- [ABAQUS] ABAQUS. Ver.6.6-2. 35, 78, 100
- [AceGen] AceGen Manual (<http://www.fgg.uni-lj.si/Symech/>) 30, 77
- [ADINA] ADINA. Ver.8.3.1. 78
- [Allgower, Georg, 1990] Allgower E.L., Georg K.: *Numerical Continuation Methods*. Springer-Verlag (1990) 33
- [Argyris, 1982] Argyris J.: *An excursion into large rotations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol.32, 85–155 (1982)
- [Basar, Ding, 1992] Basar, Y., Ding Y.: *Finite-Rotation Shell Elements for the Analysis of Finite-Rotation Shell Problems*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.34, 165-169 (1992) 139
105
- [Bathe, Brezzi, Fortin, 1989] Bathe, K-J., Brezzi F., Fortin M.: *Mixed interpolated elements for Reissner-Mindlin plate*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.28, 1787-1801 (1989) 4
- [Bathe, Dvorkin, 1985] Bathe, K-J., Dvorkin E.N.: *A four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and mixed interpolation*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.21, 367–383 (1985) 4, 6
- [Bathe, Dvorkin, 1986] Bathe, K-J., Dvorkin E.N.: *A formulation of general shell elements - The use of mixed interpolations of tensorial components*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.22, 697-722 (1986) 6
- [Bathe, Wilson 1976] Bathe, K-J., Wilson, Edward L.: *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice–Hall (1976) 49
- [Belytschko, Liu, Moran, 2000] Belytschko T., Liu W.K., Moran B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000 26
- [Belytschko, Liu, Ong, 1987] Belytschko T., Liu W. K., Ong J.S.: *Mixed variational principles and stabilization of spurious modes in the 9-node element*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol.62, 275–292 (1987) 5

- [Belytschko, Ong, Liu, 1985] Belytschko T., Ong J.S., Liu W.K.: *A consistent control of spurious singular modes in the 9-node Lagrangian element for the Laplace and Mindlin plate equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol.44, 269–295 (1985) [5](#)
- [Belytschko, Wong, Stolarski, 1989] Belytschko T., Wong B.L., Stolarski H.: *Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange Shell element*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.28, 385–414 (1989) [5](#), [6](#), [76](#), [78](#), [84](#), [107](#), [111](#), [115](#)
- [Bergan, Horrigmoe, Krakeland, Soreide, 1978] Bergan P.G., Horrigmoe G., Krakeland B., Soreide T.H.: *Solution techniques for nonlinear finite element problems*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.12, pp.1677-1696 (1978)
- [Betsch, Gruttmann, Stein, 1996] Betsch, P., Gruttmann, F., Stein, E.: *A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol.130, 57-79 (1996) [33](#)
[121](#)
- [Bicanic, Johnson, 1979] Bicanic, N., Johnson, K.W.: *Who was 'Raphson'?* Int. J. Num. Meth. Engng, Vol 14, pp.148-152 (1979) [32](#)
- [deBoer, 1982] deBoer R.: *Vector- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag (1982)
- [Bonet, Wood, 1997] Bonet J., Wood R.D.: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis* Cambridge University Press, Cambridge (1997) [139](#)
[14](#)
- [Bucalem, Bathe, 1993] Bucalem, M., L., Bathe K-J.: *Higher-order MITC general shell elements*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.36, 3729-3754 (1993) [6](#), [68](#), [69](#)
- [Buechter, Ramm, 1992] Buechter N., Ramm E.: *Shell theory versus degeneration - a comparison in large rotation finite element analysis*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.34, 39–59 (1992) [105](#)
- [Chapelle, Bathe, 2003] Chapelle D., Bathe K.J.: *The finite element analysis of shells-Fundamentals*. Springer (2003) [6](#)
- [Chrosielewski, Nolte 1985] Chrosielewski J., Nolte L-P.: *Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY*. Mitt Institut für Mechanik, 48, Ruhr-Universität, Bochum (1985) [35](#)

- [Chroscielewski, Makowski, Stumpf, 1992] Chroscielewski J., Makowski J., Stumpf H.: *Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material nonlinearity*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.35, 63–94 (1992) [120](#), [121](#)
- [Chroscielewski, Makowski, Pietraszkiewicz, 2004] Chróscielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W.: *Statyka i dynamika powłok wielopłatowych. Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*. Biblioteka Mechaniki Stosowanej. IPPT PAN Warszawa (2004) [51](#), [121](#)
- [Cook, 1976] Cook R.D.: *Improved two dimensional finite element*. J. Struct. Div. ASCE, Vol.100, 1851-1863 (1976) [98](#)
- [Crisfield, 1980] Crisfield M.A.: *Incremental/iterative solution procedures for nonlinear structural analysis*. In C.Taylor, E.Hinton, D.R.J.Owen, and E.Onate, editors *Numerical Methods for Nonlinear Problems* Prineridge Press, Swansea (1980)
- [Dennis, Schnabel, 1983] Dennis J.E., Schnabel R.B.: *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall (1983) [33](#)
[32](#)
- [Dvorkin, Bathe, 1984] Dvorkin E.N., Bathe, K-J.: *A continuum mechanics based four -node shell element for general nonlinear analysis*. Eng. Comput., Vol.1, 77-88 (1984) [6](#), [64](#), [67](#), [71](#)
- [Donnell, 1934] Donnell L.H.: *A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending*. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, Vol.56, p.795 (1934) [58](#), [63](#)
- [Eriksson, 2002] Eriksson A.: *Some aspects of shell instability analyses*. CanCNSM, Vancouver, June 19-23 (2002) [101](#)
- [FEAP] FEAP - A Finite Element Analysis Program. Version 8.1 User Manual [77](#)
- [Fung, 1989] Fung Y.C.: *Podstawy Mechaniki Ciała Stałego* PWN, Warszawa (1969) [21](#)
- [Goto, et al., 1992] Goto Y., Watanabe Y., Kasugai T., Obata M.: *Elastic Buckling Phenomenon Applicable to Deployable Rings*. International Journal of Solids and Structures Vol.29, pp.893-909 (1992) [123](#), [124](#)
- [Goldstein, 1980] Goldstein H.: *Classical Mechanics. 2nd Edition*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts (1980)

- [Green, Adkins,1970] Green A.E., Adkins J.E.: *Large Elastic Deformations. 2nd Edition*. Oxford Univ. Press (1970)
- [Griewank, 1989] Griewank, A.: *On Automatic Differentiation, Mathematical Programming: Recent Developments and Applications* Kluwer Academic Publisher, Amsterdam, 1989. 139
21
30
- [Hill, 1978] Hill R.: *Aspects of Invariance in Solids Mechanics*. Advanced Applied Mechanics, Vol.18, 1-75 (1978) 22
- [Huang, 1988] Hou-Cheng Huang: *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells. Theory, Software and Applications* Springer-Verlag (1988) 5,
6, 7, 16, 26, 57, 58, 59, 76
- [Huang, Hinton, 1984] Huang H.C., Hinton E.: *A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation*. Eng. Comput., Vol.1, 369-379 (1984) 4, 6, 66, 67
- [Huang, Hinton, 1986] Huang H.C., Hinton E.: *A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.22, 73-92 (1986) 6, 19, 67, 68, 75
- [Hughes, Cohen, Haroun, 1978] Hughes, T.J.R., Cohen, M., Haroun, M.: *Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates*. Nucl. Eng. Design, Vol.46, 203-222 (1978) 5, 74
- [Hughes, 1987] Hughes, T.J.R.: *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall (1987) 16, 26, 40
- [Hughes, Brezzi, 1989] Hughes T.J.R., Brezzi F.: *On drilling degrees of freedom*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol.72, 105-121 (1989) 15, 41
- [Hughes, Tezduyar, 1981] Hughes T.J.R., Tezduyar T.E.: *Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node isoparametric element*. J. Appl. Mech., Vol.48, 587-596 (1981) 6, 64
- [Jang, Pinsky, 1987] Jang J., Pinsky P.M.: *An assumed covariant strain based 9-node shell element*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.24, 2389-2411 (1987) 6, 68, 107
- [Kant, 1993] Kant E.: *Synthesis of mathematical modeling software*. IEEE Software Vol.10 30-41 (1993) 30
- [Kleiber, 1989] Kleiber M.: *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*. IPPT PAN, PWN Warszawa - Poznań (1989) 49

- [Knight, 1996] Knight, N.F.Jr. *The Raasch Challenge for Shell Elements*. 37th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, Salt Lake City, CP 962, 450–460 (1996) 100
- [Korelc, 2002] Korelc J.: *Multi-language and multi-environment generation of nonlinear finite element codes*. Engineering with Computers, Vol.18, pp.312–327 (2002) 30, 77
- [Koschnick, Bischoff, Camprubi, Bletziger, 2005] Koschnick F., Bischoff G.A., Camprubi N., Bletziger K.U.: *The discrete strain gap method and membrane locking*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol.194, 2444–2463 (2005) 93
- [Kreja, Shmidt, Reddy, 1997] Kreja I., Shmidt R., Reddy J.N.: *Finite elements based on a first-order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures*. Int. J. Non-linear Mechanics, Vol.32, No.6 1123–1142 (1997) 76
- [MacNeal, 1978] MacNeal, R.H.: *A simple quadrilateral shell element*, Computers & Structures, Vol.8, No.2, 175–183 (1978) 6, 64
- [MacNeal, 1982] MacNeal, R.H.: *Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions*. Nuclear Engineering and Design, Vol.70, 3–12 (1982) 6, 64
- [MacNeal, Harder, 1985] MacNeal R.H., Harder R.L.: *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite Element in Analysis and Design. Vol.1, pp.3–20 (1985) 79, 90, 92, 110, 115, 126
- [Marguerre, 1939] Marguerre K.: *Zur theorie der gekrummten platte grosser formanderung*. Proc Intl Congress Appl Mech 5–93, 1939 57, 63
- [Marsden, Hughes, 1983] Marsden J.E., Hughes T.J.R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, 1983 32
- [Mathematica] Mathematica Manual (<http://www.wolfram.com/>) 30
- [Ogden, 1984] Ogden R.: *Non-Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood, Chichester, UK (1984) 12
- [Ogden, 2003] Ogden R.: *Nonlinear Elasticity with Application to Material Modeling*. IPPT AMAS, Lecture notes Vol.6 (2003) 21
- [Ostrowska-Maciejewska, 1994] Ostrowska-Maciejewska J.: *Mechanika Ciał Odkształcalnych*. IPPT PAN, Warszawa (1994) 13
- [Panasz, Wisniewski, 2007] Panasz P., Wisniewski K.: *Nine-node shell elements with 6 dofs/node based on two-level approximations*. Submitted (2007) 69

- [Parish, 1979] Parish, H.: *A critical survey of the 9 node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng. Vol.20, 323–350 (1979) 76
- [Park, 1986] Park K.C.: *Improved strain interpolation for curved C^0 elements*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.22, 281–288 (1986) 5
- [Park, Stanley, 1986] Park K.C, Stanley G.M.: *A Curved C^0 Shell Element Based on Assumed Natural-Coordinate Strains*. Transactions of the ASME, Vol.53, 278–290 (1986) 5, 6, 68
- [Pietraszkiewicz, 1979] Pietraszkiewicz W.: *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*. Polish Scientific Publisher, Warszawa - Poznan (1979) 20, 139
- [Pietraszkiewicz, 1984] Pietraszkiewicz W.: *Lagrangian description and incremental formulation in the nonlinear theory of thin shells*. Int. J. Nonlin. Mech., Vol.19, 115-140 (1984) 20
- [Pietraszkiewicz, 1989] Pietraszkiewicz W.: *Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells*. Adv. Mech., Vol.12, 51-130 (1989) 20
- [Pietraszkiewicz, Badur, 1983] Pietraszkiewicz W., Badur J.: *Finite rotations in the description of continuum deformation*. Int. J. Engng Sci., Vol.21, No.9, 1097-1115 (1983)
- [Rayleigh, 1870] Rayleigh (J.W. Strutt): *On the theory of resonance* Trans. Roy. Soc., London A161:77-118 (1870) 139
- [Ramm, 1981] Ramm E.: *Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points*. Proc. Europe-U.S. Workshop, Bochum 1980, 63-89. Wunderlich, Stein, Bathe (eds). Springer-Verlag (1981) 29
33, 102
- [Rebel, 1998] Rebel G.: *Finite rotation shell theory including drill rotations and its finite element implementation*. Delft University Press (1998) 123, 124
- [Riks, 1970] Riks, E.: *On the numerical solution of snapping problems in the theory of elastic stability*. SUDAAR Vol.401, Stanford University (1970) 33
- [Riks, 1972] Riks, E.: *The application of of Newton's method to the problem of elastic stability*. J.Appl.Mech. Vol.39, 1060–1066 (1972) 33
- [Ritz, 1908] Ritz, W.: *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser variationsproblem der mathematischen physik* J. Reine angew. Math., Vol. 135, 1-61 (1908) 29

- [Robinson, Blackham, 1979] Robinson J., Blackham S.: *An evaluation of lower order membranes as contained in MSC/NASTRAN, ASA and PAFEC FEM Systems*. Robinson and Associates, Dorset, England (1979) 79
- [Sadłowski, 2007] Sadłowski P.: *Parametryzacje rotacji i algorytmy rozwiązywania równań dynamiki z rotacyjnymi stopniami swobody*. Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa (2007) 139
- [Sansour, Bednarczyk, 1995] Sansour C., Bednarczyk H.: *The Cosserat surface as a shell model, theory and finite-element formulation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol.120, 1–32 (1995) 102
- [Schoop, Hornig, Wenzel, 2002] Schoop, H., Hornig, J., Wenzel, T.: *Remarks on Raasch's Hook*. Technische Mechanik, Band 22, Heft 4, 259–270 (2002) 100
- [Schweizerhof, 1989] Schweizerhof K.H.: *Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis*. Institut für Baustatik, 9, Universität Fridericiana, Karlsruhe (1989) 35
- [Simo, 1992] Simo J.C.: *The (symmetric) Hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics: Intrinsic definition and geometric interpretation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol.96, 189-200 (1992) 32
- [Simo, Fox, Rifai, 1990] Simo J.C., Fox D.D., Rifai M.S.: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.79, 21-70 (1990) 102
- [Simo, Fox, Hughes, 1992] Simo J.C., Fox D.D., Hughes T.J.R.: *Formulations of finite elasticity with independent rotations*. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.95, 227-288 (1992) 15
- [Simo, Hughes, 1989] Simo, J.C., Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticity*. Springer, 1998 14
- [Stolarski, Belytschko, 1982] Stolarski H., Belytschko T.: *Membrane locking and reduced integration for curved elements*. J. Appl. Mech. ASME, Vol.49, 172-6 (1982) 4
- [Stroud, Secrest 1966] Stroud A.H., Secrest D.: *Gaussian Quadrature Formulas* Prentice-Hall (1966) 39
- [Truesdell, Noll, 1965] Truesdell C., Noll W.: *The Non-Linear Field Theory*. Handbuch der Physik, Vol.III/3, Springer-Verlag (1965) 23
- [Wang, 1986] Wang P.S.: *Finger: a symbolic system for automatic generation of numerical programs in finite element analysis* J. Symbol Comput, Vol.2, 305–316 (1986) 30

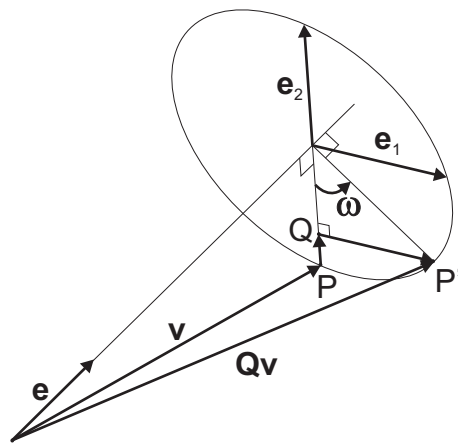
- [Warren, 1989] Warren C.Y.: *Roark's Formulas for Stress and Strain. 6-th Edition.* Mc Graw-Hill, 1989. 90, 93
- [Waszczyszyn, 1981] Waszczyszyn, Z.: *Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych.* W: *Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji (praca zbiorowa)* Ossolineum, Wrocław, 341-380 (1981) 33
- [Wempner, 1971] Wempner G.: *Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids.* Int. J. Solids Struct., Vol.7, 1581-1599 (1971) 33
- [Wisniewski, 1997] Wisniewski K.: *Finite rotations of shells and beams. Extended equations and numerical models.* IFTR Reports 9/1997 23, 139
- [Wisniewski, Turska, 2000] Wisniewski K., Turska E.: *Kinematics of finite rotation shells with in-plane twist parameter.* Comput. Methods Appl. Mech. Engng. Vol.190, No.8-10. 1117-1135 (2000) 13
- [Wisniewski, Turska, 2001] Wisniewski K., Turska E.: *Warping and in-plane twist parameter in kinematics of finite rotation shells,* Comput. Methods Appl. Mech. Engng. Vol.190, No.43-44, 5739-5758 (2001) 13
- [Wisniewski, Turska, 2002] Wisniewski K., Turska E.: *Second order shell kinematics implied by rotation constraint equation,* J. Elasticity, Vol.67, pp.229-246 (2002). 13
- [Wisniewski, Turska, 2006] Wisniewski K., Turska E.: *Enhanced Allman quadrilateral for finite drilling rotations.* Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol.195, No.44-47, pp.6086-6109 (2006) 81
- [Wolfram, 1991] Wolfram, S.: *A system for Doing mathematics by Computer* Addison-Wesley, Reading, MA, 1991 30
- [Woźniak (ed), 2001] Wozniak Cz. (ed): *Mechanika Techniczna. Tom VIII. Mechanika sprężystych płyt i powłok.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (2001) 24
- [Zienkiewicz, Taylor, 1989] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L.: *The Finite Element Method. Fourth Edition. Vol.1. Basic Formulation and Linear Problems.* McGraw-Hill (1989) 40, 77, 89
- [Zienkiewicz, Taylor, 2005] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L.: *The Finite Element Method for Solid and Structural mechanics. Sixth Edition.* Butterworth-Heinemann (2005) 14, 26
- [Zienkiewicz, Taylor, Too, 1971] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Too, J.M. *Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells'.* Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.3, 275-290 (1971) 5

Dodatek A

Parametryzacja kanoniczna tensora rotacji

Twierdzenie Eulera. *Dla dwóch dowolnych baz ortonormalnych, istnieje wektor, oraz kąt taki, że obracając jedną z baz wokół tego wektora o wspomniany kąt, otrzymamy drugą z nich. Wektor ten jest równoległy do wektora własnego tensora ortogonalnego przekształcającego jedną bazę na drugą odpowiadającego wartości własnej 1.*

Korzystając z twierdzenia Eulera, można analizować obrót dowolnego wektora \mathbf{v} wokół wektora jednostkowego \mathbf{e} o kąt ω , patrz Rys.A.1.



Rysunek A.1: Obrót wektora \mathbf{v} wokół wektora \mathbf{e} .

Położenie obróconego wektora $Q\mathbf{v}$ uzyskuje się sumując wektory pomocnicze

$$Q\mathbf{v} = \mathbf{v} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie

$$\overrightarrow{PQ} = (1 - \cos \omega) \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{QP'} = (\sin \omega) \mathbf{e}_1. \quad (\text{A.2})$$

Ortonormalne wektory bazy \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 zdefiniowane są za pomocą wektorów \mathbf{e} oraz \mathbf{v} w następujący sposób

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{e} \times \mathbf{v}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{e}_1. \quad (\text{A.3})$$

Po podstawieniu, równ.(A.1) przyjmuje postać

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sin \omega \mathbf{e}_1 + (1 - \cos \omega) \mathbf{e}_2. \quad (\text{A.4})$$

Wprowadźmy skośnie-symetryczny tensor $\mathbf{S} \in SO(3)$, taki, że wektor \mathbf{e} jest jego wektorem osiowym, tzn. $\mathbf{S}\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Dla tensora skośnie-symetrycznego zachodzi równość $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$. Może być on wyrażony za pomocą wektorów \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 leżących w płaszczyźnie prostopadłej do \mathbf{e} , co widać na Rys.A.1. Przyjmując $\mathbf{S} \doteq \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$, iloczyny wektorowe wyrażone formułami (A.3) mogą zostać zapisane jako,

$$\mathbf{e} \times \mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v}, \quad \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) = \mathbf{S}^2\mathbf{v}. \quad (\text{A.5})$$

Wtedy równanie (A.4) zapisuje się

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sin \omega \mathbf{S}\mathbf{v} + (1 - \cos \omega) \mathbf{S}^2\mathbf{v} = [\mathbf{I} + (\sin \omega) \mathbf{S} + (1 - \cos \omega) \mathbf{S}^2] \mathbf{v}. \quad (\text{A.6})$$

W ten sposób otrzymano tensor rotacji w postaci

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \sin \omega \mathbf{S} + (1 - \cos \omega) \mathbf{S}^2. \quad (\text{A.7})$$

Tensor ten należy do grupy tensorów ortogonalnych, $SO(3)$, takich, że $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ oraz $\det \mathbf{Q} = +1$.

Parametryzacja trójparametrowa kanoniczna. Zdefiniujmy kanoniczny pseudowektor rotacji,

$$\boldsymbol{\phi} \doteq \omega \mathbf{e}. \quad (\text{A.8})$$

Odpowiadający mu tensor skośnie-symetryczny to $\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}$, gdzie iloczyn wektorowy wektora i tensora zdefiniowano np. w [deBoer, 1982]. W efekcie mamy,

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \omega \mathbf{S}, \quad \omega = \|\boldsymbol{\phi}\| = \sqrt{\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}} \geq 0, \quad (\text{A.9})$$

i tensor rotacji (A.7) przyjmuje postać

$$\mathbf{Q}(\tilde{\boldsymbol{\phi}}) \doteq \mathbf{I} + \frac{\sin \omega}{\omega} \tilde{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^2. \quad (\text{A.10})$$

Ta postać nazywana jest formułą Rodriguesa, patrz np. [Argyris, 1982], [Goldstein, 1980].

Warto zauważyć, że opisana powyżej parametryzacja tensora \mathbf{Q} jest jedną z wielu spotykanych w literaturze. Porównanie kilku z nich zawarto np. w pracach [Pietraszkiewicz, 1979], [Pietraszkiewicz, Badur, 1983], [Wisniewski, 1997], [Sadłowski, 2007]. Oczywiście zaletą tej parametryzacji jest użycie tylko 3 parametrów, będących trzema składowymi wektora rotacji, $\boldsymbol{\phi} \doteq \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.