

**Instytut Podstawowych Problemów
Techniki**
Polskiej Akademii Nauk

mgr Jakub Lengiewicz

**Analiza wrażliwości dla zagadnień
kontaktowych z tarcieniem**

Rozprawa doktorska

Praca wykonana pod kierunkiem
doc. dra hab. Stanisława Stupkiewicza
Pracownia Mechaniki Materiałów Niesprężystych
Zakład Mechaniki Materiałów, IPPT PAN

Czerwiec 2008

Streszczenie

W niniejszej rozprawie zastosowano w praktyce metodę bezpośredniego różniczkowania (DDM) do analizy wrażliwości złożonych zagadnień nieliniowej mechaniki. W szczególności skoncentrowano się na zagadnieniach kontaktowych z tarciem w zakresie skończonych deformacji i skończonych poślizgów w połączeniu z zaawansowanymi metodami ich rozwiązywania, obejmującymi techniki wygładzania kontaktu jak i regularyzację warunków kontaktowych metodą rozszerzonych mnożników Lagrange'a.

W pracy przedstawiono przykłady numeryczne obrazujące poprawność i dokładność analizy wrażliwości. Praca zawiera również przykłady zastosowania analizy wrażliwości w problemach optymalizacji.

Zamierzone cele osiągnięto przez rozszerzenie pakietu Metody Elementów Skończonych – *AceFEM* – o infrastrukturę dla zagadnień kontaktowych, w tym odpowiednie struktury danych i algorytmy wyszukiwania kontaktu. Opracowano szablony elementów kontaktowych, umożliwiające analizę bezpośrednią jak i analizę wrażliwości. Zaimplementowano szereg dwu- i trójwymiarowych elementów kontaktowych różniących się sposobem parametryzacji powierzchni kontaktowej.

Abstract

The objective of the thesis is to apply the direct differentiation method (DDM) of sensitivity analysis (SA) for complex problems of non-linear mechanics. In particular, advanced formulations of 3D multi-body contact problems with friction at large slips and large deformations are considered, in which the augmented Lagrangian method is applied to impose contact conditions and contact smoothing techniques are used within the discretized framework.

Several numerical examples are presented in order to verify the correctness and accuracy of the direct and sensitivity analysis. Two optimisation problems are also solved to demonstrate the use of sensitivity analysis in practice.

To enable achievement of the thesis objectives, the Finite Element Method package – *AceFEM* – has been enhanced with the capability to solve contact problems. Within this package, templates of contact elements were created for both direct and sensitivity analysis. Using these templates, several 2D and 3D contact elements, employing different method of smoothing, have been implemented.

Spis treści

1. Wstęp	5
1.1. Motywacja	5
1.2. Cel i zakres pracy	8
1.3. Układ pracy	9
2. Mechanika kontaktu	11
2.1. Mechanika skończonych deformacji	12
2.1.1. Opis deformacji ciała	12
2.1.2. Pochodna materialna. Opis ruchu	13
2.1.3. Obiektywność	13
2.1.4. Zasady zachowania. Miary sprzężone	14
2.1.5. Związki konstytutywne	15
2.1.6. Zagadnienie początkowo-brzegowe. Postać słaba	15
2.2. Zagadnienie kontaktowe	16
2.2.1. Kinematyka kontaktu	17
2.2.2. Naprężenia kontaktowe	19
2.2.3. Warunki kontaktowe	20
2.2.4. Zagadnienie początkowo-brzegowe.	21
2.2.5. Regularyzacja warunków kontaktowych. Postać słaba	21
3. Metoda Elementów Skończonych w zagadnieniach kontaktowych	27
3.1. Ogólny zarys MES	27
3.1.1. Dyskretyzacja przestrzenna	28
3.1.2. Schemat całkowania po czasie	32
3.1.3. Metoda Newtona-Raphsona	32
3.1.4. Schemat rozwiązywania Metodą Elementów Skończonych	33
3.2. Zagadnienie kontaktowe	34
3.2.1. Dyskretyzacja	34
3.2.2. Element biliniowy	36
3.3. Wygładzanie kontaktu	40
3.3.1. Krzywe i płaty Bézier	41
3.3.2. Płaty Gregory'ego	44
3.3.3. Porównanie metod parametryzacji powierzchni <i>master</i>	45
4. Analiza wrażliwości	49
4.1. Zastosowanie do optymalizacji	49
4.2. Aproksymacja różnicami skończonymi – metoda FDM	50
4.3. Analiza Wrażliwości	52

4.3.1.	DDM dla zagadnień niezależnych od historii, bez problemu wewnętrznego	52
4.3.2.	DDM dla zagadnień zależnych od historii zawierających problem wewnętrzny	52
5.	Rozbudowa środowiska MES	57
5.1.	Struktura systemu <i>AceGEN/AceFEM</i>	57
5.1.1.	Składowe systemu	58
5.1.2.	Element hipersprężysty	59
5.2.	Wyszukiwanie kontaktu	61
5.2.1.	Globalne wyszukiwanie par węzeł-segment	62
5.2.2.	Lokalne wyszukiwanie par węzeł-segment	64
6.	Element kontaktowy	67
6.1.	Szablon elementu kontaktowego	67
6.1.1.	Lokalne wyszukiwanie kontaktu	67
6.1.2.	Wektor rezydualny i macierz styczna	68
6.1.3.	Moduł analizy wrażliwości	72
6.2.	Ciągłość zmiennych kinematycznych	72
6.2.1.	Lokalne wyszukiwanie kontaktu	73
6.2.2.	Wyznaczanie $\Delta \mathbf{g}_T$	74
7.	Przykłady	79
7.1.	Zagadnienie Hertza	79
7.1.1.	Kontakt walca z półprzestrzenią	79
7.1.2.	Kontakt kuli z półprzestrzenią	87
7.2.	Analiza kontaktu wałka obracanego w tulei	93
7.3.	Analiza wrażliwości kontaktu hipersprężystych rur grubościennych	95
7.4.	Optymalizacja kształtu gumowej uszczelki	98
7.5.	Optymalizacja wstępnego kształtu odkuwki w procesie spęczania	104
8.	Zakończenie	111

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Motywacja

Obserwowany od ponad 30 lat dynamiczny wzrost mocy obliczeniowej komputerów oraz rozwój samych metod komputerowych był kluczowym czynnikiem wpływającym na podejście do rozwiązywania problemów w dziedzinie mechaniki. Możliwe stało się praktyczne zastosowanie Metody Elementów Skończonych (MES) jako ogólnej metody rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych. Zastosowanie MES do zagadnień o coraz większej złożoności charakteryzowało się nie tylko wzrastającą liczbą niewiadomych zadania czy stopniem skomplikowania warunków brzegowych, ale również stosowaniem coraz bardziej zaawansowanych modeli materiałowych i nowoczesnych sformułowań zagadnień.

Na tle zagadnień mających duże znaczenie dla rozwoju nauki i przemysłu, zagadnienia kontaktowe stanowią grupę problemów trudnych (Wriggers, 2002; Laursen, 2002). Wysoki stopień skomplikowania zagadnień kontaktowych wynika z kilku czynników, takich jak: nieliniowość (zarówno geometryczna jak i modeli konstytutywnych), wprowadzanie ograniczeń nierównościowych czy problemy pojawiające się na poziomie dyskretyzacji. Wspomniany wcześniej wzrost mocy obliczeniowej komputerów oraz rozwój technik komputerowych spowodował, że proces rozwiązywania tych trudnych zagadnień stał się na tyle efektywny, że możliwe stało się przeprowadzanie analizy problemów odwrotnych dla zagadnień kontaktowych.

Problemy odwrotne (np. optymalizacja, identyfikacja) charakteryzują się jeszcze wyższym poziomem złożoności, dlatego spośród metod ich rozwiązywania praktyczne zastosowania mogą mieć jedynie te najefektywniejsze. Klasę metod, charakteryzujących się dobrą zbieżnością, stanowią metody gradientowe. Ich użycie wymaga znajomości gradientu funkcji celu względem parametrów zadania, który może być efektywnie wyznaczony za pomocą *analizy wrażliwości*. Metody gradientowe charakteryzują się dobrą zbieżnością jednak, w podstawowej postaci, zdolne są do znajdowania jedynie minimów lokalnych. Istnieje cała gama algorytmów optymalizacyjnych które są w stanie wyszukiwać minima globalne – np. metody bazujące na algorytmach ewolucyjnych (Burczyński i in., 2004). Nie umniejsza to jednak zasadności rozwijania technik gradientowych, jako że metody globalne mogą również korzystać z tych technik w celu poprawy efektywności.

Zagadnienia kontaktowe

Interesujący, z uwagi na tematykę niniejszej pracy, rozwój metod komputerowych dla zagadnień kontaktowych wielu ciał odkształcalnych w zakresie dużych deformacji i poślizgów kształtował się od początków lat 90-tych ubiegłego stulecia. Podejście *master-slave* (w tym elementy kontaktowe typu *node-to-segment*) zastosowane do kontaktu wielu ciał odkształcalnych (Hallquist i in., 1985; Wriggers i in., 1990), opis we współrzędnych konwekcyjnych związanych z powierzchnią *master* (Curnier i in., 1992; Laursen i Simo, 1993, Klarbring, 1995) oraz regularyzacja warunków kontaktowych metodą rozszerzonych mnożników Lagrange’a (Alart i Curnier, 1991; Simo i Laursen, 1992; Pietrzak, 1997; Pietrzak i Curnier, 1999) są podstawowymi cechami charakteryzującymi techniki stosowane w niniejszej pracy.

Niska regularność zdyskretyzowanych powierzchni kontaktowych może w ogólności powodować problemy ze zbieżnością oraz błędy w rozwiązaniach otrzymanych przy użyciu MES. Można wyróżnić dwa główne kierunki działań mających na celu rozwiązanie tego problemu. Jednym nich jest użycie technik wygładzania powierzchni kontaktowej (Pietrzak, 1997; Krstulović-Opara i in., 2002; Puso i Laursen, 2002; Belytschko i in., 2002; Stadler i in., 2003; Stadler i Holzapfel, 2004), co zapewnia ciągłość zmiennych kontaktowych w przypadku dużych poślizgów. Rozwijane są również metody odchodzące od podejścia *node-to-segment*, bazujące na podejściach symetrycznych (Solberg i Papadopoulos, 2005; Solberg i in., 2007) i quasi-symetrycznych, z których najlepiej rokującą wydaje się być metoda elementu mortarowego (McDevitt i Laursen, 2000; Puso i Laursen, 2004; Puso i in., 2008). W tym przypadku, zamiast kontaktu węzła z segmentem rozpatruje się kontakt między parami segmentów składających się na brzegi zdyskretyzowanych ciał.

Charakterystyczne dla zagadnień kontaktowych warunki nierównościowe wymagają użycia specjalnych technik rozwiązywania. Pierwszym, najbardziej bezpośrednim podejściem, wykorzystującym metodę mnożników Lagrange’a, była metoda bazująca na pojęciu zbioru aktywnych ograniczeń (*active set strategy*). Dużym mankamentem tej metody są możliwe oscylacje zawartości owego zbioru w trakcie procesu rozwiązywania, co dla gęściejszych dyskretyzacji powierzchni kontaktowych uniemożliwia jej praktyczne zastosowanie. Lepsze własności ze względu na zbieżność posiada metoda funkcji kary; pierwsze próby powiązania tego podejścia z fizycznymi zjawiskami normalnej i stycznej podatności kontaktowej można znaleźć w pracach Michałowskiego i Mroza (1978), Curniera (1984) lub Wriggersa i in. (1990). Metoda jest często stosowana w praktyce, jednak charakteryzuje się niedokładnym spełnieniem warunków kontaktowych, co dla wielu zastosowań jest nieakceptowalne. Ponadto, zwiększenie wartości parametru regularyzacyjnego, choć pozwala na lepsze spełnienie warunków kontaktowych, skutkuje pogorszeniem zbieżności.

Z uwagi na niekorzystne własności wymienionych powyżej metod, do regularyzacji warunków kontaktowych zaadoptowano klasę metod bazujących na rozszerzonych mnożnikach Lagrange’a (Bertsekas, 2003). Można rozpatrywać dwa podejścia do rozwiązywania zagadnień kontaktowych metodą rozszerzonych mnożników Lagrange’a. Pierwszym podejściem jest stosowanie tzw. schematu Uzawy (Laursen i Simo, 1993), który charakteryzuje się dodatkową zewnętrzną pętlą służącą uaktualnianiu wartości mnożników Lagrange’a. Schemat jest relatywnie prosty w zastosowaniu, jednak może być kosztowny obliczeniowo z uwagi na dodatkową pętlę oraz wolniejszą zbieżność. Drugim podejściem jest zastosowanie metody Newtona-Raphsona z uwzględnieniem zarówno zmiennych podstawowych (przemieszczenia) jak i dualnych (mnożniki Lagrange’a)

(Alart i Curnier, 1991). Zaletą tego podejścia jest (granicznie) kwadratowa zbieżność metody Newtona-Raphsona (pod warunkiem wykorzystania konsystentnej macierzy stycznej). W dalszej części pracy, pod pojęciem metody rozszerzonych mnożników Lagrange'a będziemy rozumieli drugie z wymienionych podejść.

Analiza wrażliwości

Zagadnieniem (zadaniem, problemem) bezpośrednim nazywać będziemy problem postawiony w postaci klasycznego zagadnienia początkowo-brzegowego. Z wielu względów, interesujące może być nie tylko rozwiązanie samego zadania bezpośredniego, ale również odpowiedź na pytanie jaki wpływ na rozwiązanie mają parametry definiujące zadanie (stałe materiałowe, wymiary, kształt). Zależność rozwiązania od parametrów ma charakter uwikłany a sam problem jej znalezienia nosi nazwę problemu wrażliwości – wrażliwości rozwiązania na zmianę parametrów zadania.

Rozwiązaniem problemu wrażliwości są pochodne rozwiązania problemu bezpośredniego względem parametrów zadania. Oprócz tego, że pochodne same w sobie niosą istotną informację, to również są podstawą do wykorzystania metod gradientowych w zagadnieniach optymalizacyjnych, takich jak optymalizacja konstrukcji i procesów (Fourment i in., 1996; Zhao i in., 1997; Zabararas i in., 2000; Stupkiewicz, 2003) czy identyfikacja parametrów materiałowych (Burczyński i in., 2002; Tardieu i Constantinescu, 2000; Szeliga i in., 2006).

Można wyróżnić kilka podejść do rozwiązania problemu wrażliwości. Najprostszym, mającym wiele wad (por. rozdz. 4.2), podejściem jest metoda oparta na różnicach skończonych (FDM – Finite Difference Method). Polega na przybliżaniu pochodnych za pomocą ilorazów różnicowych, bazujących na rozwiązaniach zadania bezpośredniego. W celu uniknięcia problemów związanych z używaniem metody FDM, stosuje się bardziej zaawansowane techniki. Dzielą się one na metody w których problem wrażliwości jest definiowany w postaci kontynuualnej (Kleiber, 1993; Dems i Mróz, 1993; Kleiber i in., 1997; Srikanth i Zabararas, 2000; Zabararas i in., 2000; Choi i Kim, 2005; Acharjee i Zabararas, 2006), oraz na metody, które stosuje się w odniesieniu do konkretnego schematu MES dla zagadnienia bezpośredniego (Michaleris i in., 1994). W obrębie drugiej grupy metod – bazujących na postaci zdyskretyzowanej – można wyróżnić podejścia semi-analityczne (np. Ponthot i Kleinermaun, 2006) w których sam schemat analizy wrażliwości ma postać analityczną jednak na poziomie elementów skończonych wymagane pochodne wyznacza się metodami przybliżonymi. Owe podejścia mają tę niekorzystną własność, że przenoszą niektóre wady metody FDM. W niniejszej pracy, pod pojęciem analizy wrażliwości będą rozumiane w pełni analityczne metody rozwiązywania problemu wrażliwości, zdefiniowane dla problemów zadanych w postaci zdyskretyzowanej (w oparciu o pracę Michalerisa i in., 1994). Głównym ograniczeniem w stosowaniu analizy wrażliwości jest konieczność obliczenia pochodnych wektora sił węzłowych po parametrach zadania oraz stosowanie konsystentnej macierzy stycznej, będącej pełną pochodną wektora sił węzłowych po stopniach swobody. Dla zaawansowanych sformułowań i skomplikowanych metod rozwiązywania problemów bezpośrednich, policzenie oych pochodnych jest zadaniem trudnym.

Swoistą klasę trudnych problemów bezpośrednich stanowią zagadnienia zależne od historii deformacji, takie jak zagadnienia sprężysto-plastyczności lub problemy kontaktowe z tarciem. Niezregularyzowane sformułowania problemów kontaktowych zawierają warunki nierównościowe wymagające specjalnych technik regularyzacji oraz odpowiednich metod rozwiązywania w ramach MES. Zagadnienie wrażliwości odniesione do tych

przypadków, szczególnie wrażliwość względem parametrów kształtu, stanowi wyzwanie dla współczesnych metod komputerowych.

Podsumowanie

Podczas gdy można spotkać prace, w których zastosowano analizę wrażliwości do skomplikowanych problemów sztywno-plastyczności i sprężysto-plastyczności (Antúnez i Kleiber, 1996; Kowalczyk i Kleiber, 1999; Doltsinis i Rodič, 1999; Kowalczyk, 2006), to rozwiązanie problemu wrażliwości dla zagadnień kontaktowych ogranicza się do stosunkowo prostych sformułowań. Głównie ograniczono się do przypadku kontaktu ze sztywną powierzchnią (Kleiber i Sosnowski, 1995; Zhao i in., 1997; Gao i Grandhi, 1999; Tardieu i Constantinescu, 2000; Kim i in., 2002), podczas gdy analiza wrażliwości dla zagadnienia kontaktu wielu ciał odkształcalnych ograniczyła się do przypadku dwuwymiarowego bez uwzględnienia metod wygładzania (Stupkiewicz i in., 2002). W szczególności, w literaturze brakuje prac stosujących analizę wrażliwości do zaawansowanych sformułowań dla trójwymiarowych problemów kontaktowych z tarciem, uwzględniających kontakt ciał odkształcalnych w zakresie dużych deformacji i poślizgów.

1.2. Cel i zakres pracy

Podstawowym celem niniejszej rozprawy jest przeprowadzenie w praktyce analizy wrażliwości dla złożonych zagadnień mechaniki kontaktu. W ogólności, rozpatrywane będą trójwymiarowe zagadnienia kontaktu wielu ciał odkształcalnych z tarciem, sformułowane dla dużych deformacji i poślizgów, przy wykorzystaniu zaawansowanych metod regularyzacji warunków kontaktowych oraz technik wygładzania powierzchni kontaktu.

W niniejszej pracy analizę wrażliwości stosuje się w odniesieniu do problemu podstawowego postawionego w postaci zdyskretyzowanej. Wykorzystano metodę bezpośredniego różniczkowania (DDM – Direct Differentiation Method), charakteryzującą się rozwiązywaniem liniowego problemu wrażliwości na każdym kroku czasowym przy użyciu konsystentnej macierzy stycznej. Zastosowane sformułowanie bazuje na pracy Michalerisa i in. (1994).

Zakres rozpatrywanych zjawisk kontaktowych ograniczony został do kontaktu z tarciem Coulomba, zaś do regularyzacji warunków kontaktowych użyto metody rozszerzonych mnożników Lagrange’a. Zastosowano podejście niesymetryczne (*master-slave*), które w zdyskretyzowanej postaci zagadnienia prowadzi do elementu kontaktowego typu *node-to-segment*. Użyto technik wygładzania kontaktu, parametryzując stronę *master* przy pomocy krzywych lub płatów Bézier i płatów Gregory’ego. Zaimplementowano szereg dwu- i trójwymiarowych elementów kontaktowych różniących się sposobem parametryzacji powierzchni kontaktowej. Zaproponowano również własny schemat wygładzania powierzchni kontaktowej przy pomocy płatów Bézier opartych na 9 węzłach.

W celu ilustracji i weryfikacji zastosowanych metod, zagadnienie wrażliwości zostało rozwiązane dla szeregu dwu- i trójwymiarowych zagadnień kontaktowych – również w zastosowaniu do problemów optymalizacyjnych.

Jednym z zadań, umożliwiających realizację powyższych założeń, była rozbudowa istniejącego środowiska metody elementów skończonych – *AceFEM* – o infrastrukturę niezbędną do analizy zagadnień kontaktowych (zarządzanie strukturami danych, globalne wyszukiwanie kontaktu). Efektywną implementację elementów kontaktowych przeprowadzono z wykorzystaniem programu *AceGen* – środowiska do symbolicznego

zapisywania wyrażeń matematycznych, ich automatycznego różniczkowania oraz generowania na ich podstawie zoptymalizowanego kodu niskopoziomowego.

1.3. Układ pracy

Praca została podzielona na 8 rozdziałów. W rozdziale 2 wprowadzone zostały podstawy mechaniki w zakresie skończonych deformacji dla problemów kontaktowych z tarcieniem. Szczegółowe rozważania prowadzono dla kontaktu ciał hipersprężystych. Przeprowadzono regularyzację warunków kontaktowych przy użyciu metody rozszerzonych mnożników Lagrange’a. Podsumowaniem rozdziału jest przedstawienie postaci słabej dla zregularyzowanego problemu kontaktowego w zapisie kontynualnym. Rozdział 3 wprowadza dyskretyzację w ramach Metody Elementów Skończonych. W szczególności przybliżone są aspekty związane z dyskretyzacją powierzchni kontaktowych. W podrozdziale 3.3 przedstawiono, zaimplementowane w ramach niniejszej pracy, gładkie parametryzacje powierzchni kontaktowych – w tym, zaproponowaną przez autora, parametryzację płacami Bézier opartymi na 9 węzłach. W rozdziale 4 przedstawiono analizę metody opartej na różnicach skończonych (metoda FDM) oraz opisano metodę DDM Analizy Wrażliwości dla problemów zależnych od ścieżki całkowania po czasie, zawierających problem wewnętrzny. Rozdział 5 dotyczy rozbudowy środowiska *AceFEM* tak, aby możliwa była analiza zagadnień kontaktowych. Opisano, zaimplementowany w ramach niniejszej pracy, algorytm wyszukiwania kontaktu. Rozdział 6 dotyczy implementacji elementów kontaktowych. Przedstawiono schematyczny zapis kodu elementów, oraz przeanalizowano dwa istotne aspekty związane z ciągłością sformułowań w postaci zdyskretyzowanej. Rozdział 7 zawiera szereg przykładów pokazujących poprawność analizy bezpośredniej i analizy wrażliwości. W szczególności przeprowadzono analizę wrażliwości dla trójwymiarowego kontaktu z tarcieniem dwóch ciał odkształcalnych w zakresie skończonych deformacji. Przedstawiono również przykłady zastosowania analizy wrażliwości do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych. W rozdziale 8 zawarto podsumowanie niniejszej rozprawy oraz nakreślono dalsze możliwe kierunki rozwoju badań.

Rozdziały 3.3 oraz 5–7 zawierają oryginalne elementy niniejszej rozprawy.

Niniejsza praca stanowi element badań przeprowadzonych w ramach europejskich projektów badawczych IMPRESS, ENLUB oraz PROHIP (V i VI Program Ramowy UE).

Chciałbym w tym miejscu podziękować doc. dr. hab. Stanisławowi Stupkiewiczowi za wprowadzenie mnie w tematykę analizy wrażliwości dla zagadnień kontaktowych oraz za jego pomoc merytoryczną i cenne wskazówki w trakcie powstawania niniejszej rozprawy.

Rozdział 2

Mechanika kontaktu

Niniejszy rozdział poświęcony jest opisowi zjawisk kontaktowych w postaci kontynu-
alnej z uwzględnieniem skończonych deformacji i poślizgów. Podrozdziały 2.1 i 2.2
wprowadzają od podstaw odpowiedni formalizm (w oparciu o książki Ogdena, 2003;
Laursena, 2002; Ostrowskiej-Maciejewskiej, 1994). Pierwszy podrozdział dotyczy mo-
delowania deformacji pojedynczego ciała, drugi jest rozszerzeniem uwzględniającym
interakcje wielu ciał odkształcalnych.

W niniejszym rozdziale ograniczono się do klasy modeli izotropowych materiałów
hipersprężystych co pozwala w sposób formalny włączyć do opisu zjawiska kontakto-
we. Jako że jest to istotne ograniczenie, dalej pokazano (już w sposób mniej formal-
ny), że uzyskany wynik jest prawdziwy również dla bardziej zaawansowanych modeli
materiałowych. Z kolei w ramach modelowania zjawisk kontaktowych, obok warunku
kontaktu jednostronnego uwzględniono też model tarcia Coulomba. Użycie jednego z
najprostszych modeli tarcia daje możliwość klarownego przedstawienia, wprowadzo-
nych w niniejszej pracy, zaawansowanych sformułowań problemów kontaktowych oraz
technik ich regularyzacji.

W pracy użyto standardowej notacji rachunku tensorowego. Notację absolutną za-
stosowano tam, gdzie była potrzeba zapisania danego wyrażenia w sposób zwarty i
gdzie nie było groźby utraty klarowności. W przeciwnym przypadku stosowano notację
indeksową. W przypadku notacji absolutnej, wielkości nieskalarne zapisano czcionką
wytluszczoną. Dla notacji indeksowej stosowano konwencję sumacyjną Einsteina. W
podrozdziale 2.1 założono ortonormalność odpowiednich baz, tak więc wszystkie indek-
sy zapisane są na dole. Stosuje się rozróżnienie między zapisem indeksów związanych
z bazą w konfiguracji odniesienia (wielkie litery alfabetu łacińskiego) a zapisem tych,
związanych z bazą w konfiguracji aktualnej (małe litery alfabetu łacińskiego). Poniżej
przedstawiono, używane dalej w tekście, symbole operacji w zapisie absolutnym oraz
ich odpowiedniki w zapisie indeksowym:

$$\begin{array}{ll} c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & c = a_i b_i \\ \mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{b} & c_i = A_{ij} b_j \\ \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B} & C_{ik} = A_{ij} B_{jk} \\ c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & c = A_{ij} B_{ij} \\ \mathbf{A} = \mathbf{B}^T & A_{ij} = B_{ji} \end{array}$$

Wprowadzono również oznaczenia dla operatorów różniczkowania, różne dla różnicz-

kowania w konfiguracji aktualnej i odniesienia:

$$\text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \text{Grad } \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (\text{div } \mathbf{u})_i = \sum_j \frac{\partial u_{ji}}{\partial x_j}, \quad (\text{Div } \mathbf{U})_i = \sum_J \frac{\partial U_{Ji}}{\partial X_J}.$$

2.1. Mechanika skończonych deformacji

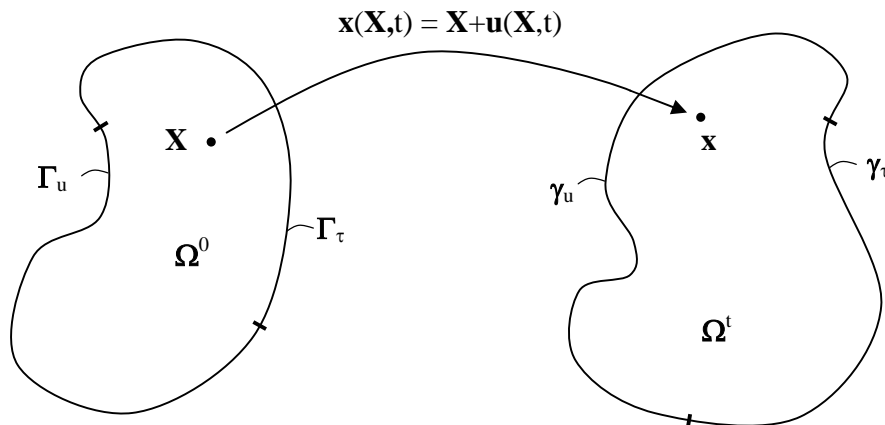
Praca obejmuje problematykę skończonych deformacji, dlatego w poniższych podrozdziałach został wprowadzony odpowiedni do tego celu formalizm. W podrozdziałach 2.1.1 i 2.1.2 zdefiniowano podstawowe pojęcia potrzebne przy opisie kinematyki deformacji. Dalej (podrozdział 2.1.3) poruszono problem obiektywności. W podrozdziale 2.1.4 wprowadzono równanie ciągłości (zasada zachowania masy) oraz równania ruchu Euler'a (zasady zachowania pędu i momentu pędu) tak, by dalej, po określeniu pojęcia sprzężonych miar statycznych i kinematycznych oraz po wyspecyfikowaniu klasy równań konstytutywnych (podrozdział 2.1.5), można było przejść w podrozdziale 2.1.6 do zdefiniowania zagadnienia początkowo-brzegowego w postaci silnej i słabej.

2.1.1. Opis deformacji ciała

W niniejszej pracy ciało fizyczne będzie utożsamiane ze zwartym podzbiorem euklidesowej przestrzeni punktowej. Ów podzbiór jest zmienny w czasie co wyrazimy w następujący sposób:

$$\Omega(t) \equiv \Omega^t \subset \mathbb{R}^{nd} \times \mathcal{T},$$

gdzie $t \in \mathcal{T} \equiv \mathbb{R}$ określa punkt na osi czasu. Stosowany jest opis lagrange'owski co wiąże się z wyborem pewnej szczególnej konfiguracji zwanej konfiguracją odniesienia. W stosowanym tu opisie, konfiguracją odniesienia będzie konfiguracja początkowa (dla $t = 0$).



Rysunek 2.1.1: Zagadnienie początkowo-brzegowe – konfiguracja odniesienia i konfiguracja aktualna.

Podstawową wielkością w mechanice skończonych deformacji jest *tensor gradientu deformacji*

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x}, \quad F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J},$$

opisujący deformację “włókien materiału” (infinitesimalnych przyrostów $d\mathbf{X}$) przy przejściu z Ω^0 do Ω^t . W powyższej formule

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega^t,$$

jest aktualnym położeniem punktu, \mathbf{u} jest przemieszczeniem, natomiast $\mathbf{X} \in \Omega^0$ jest położeniem punktu w konfiguracji początkowej (odniesienia).

2.1.2. Pochodna materialna. Opis ruchu

W przyjętym w pracy opisie lagrange’owskim punkty ciała są rozróżnialne, to jest z każdym punktem jest związane unikatowe położenie w konfiguracji odniesienia. Dlatego też można śledzić tor ruchu każdego punktu. W szczególności można określić jego prędkość w danej chwili czasu t

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t).$$

Użyte powyżej wyrażenie $\dot{\mathbf{x}}$ oznacza *pochođną materialną* funkcji \mathbf{x} . Jest to pełna pochodna (ozn. $\frac{d}{dt}$) funkcji po czasie w ustalonym punkcie \mathbf{X} w konfiguracji odniesienia. Pojęcie pełnej pochodnej rozumiane jest jako pochodna cząstkowa działająca rekurencyjnie na parametrach funkcji (traktując je jako kolejne funkcje),

$$\frac{d}{dt} f(u_1, u_2, \dots, u_n, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt}.$$

Na przykład, dla funkcji ϕ zależącej w sposób bezpośredni od położenia aktualnego \mathbf{x} , położenia początkowego \mathbf{X} oraz od czasu, jej pochodna materialna definiowana jest jako

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = \left. \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{X}=\text{const.}} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\text{grad } \phi) \cdot \mathbf{v}.$$

2.1.3. Obiektywność

Pojęcie obiektywności w modelowaniu wywodzi się z empirycznego faktu niezmienniczości zjawisk fizycznych względem sztywnego ruchu obserwatora. W opisie tych zjawisk dąży się do tego, aby związki konstytutywne nie zależały od ruchu wykonywanego przez obserwatora. Sprowadza się to do tego, że obie strony równania (tensorowego) opisującego związek konstytutywny muszą się transformować w taki sam sposób przy zmianie (ruchomego) obserwatora. Zwykle owa transformacja jest indukowana przez wybór konkretnej pary sprzężonych miar: naprężenia $\boldsymbol{\tau}$ oraz deformacji $\boldsymbol{\varepsilon}$. Wtedy funkcja konstytutywna określająca zależność $\boldsymbol{\tau}$ od $\boldsymbol{\varepsilon}$ (por. rozdziały 2.1.4, 2.1.5) musi się transformować tak samo jak $\boldsymbol{\tau}$.

Do opisu takich obiektywnych związków konstytutywnych używa się obiektywnych miar wielkości fizycznych. Miary uważamy za obiektywne, gdy przy zmianie obserwatora transformują się w ściśle określony sposób. Np. dla w pełni eulerowskich pól tensorowych (opisanych na konfiguracji aktualnej i zależnych od aktualnego położenia) owa transformacja przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} c^*(\mathbf{x}^*) &= c(\mathbf{x}) \\ \mathbf{b}^*(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{Q} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}^*(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T, \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{x}^* jest położeniem ciała względem przesuniętego i obróconego obserwatora

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(\mathbf{X}, t),$$

natomiast c , \mathbf{b} i \mathbf{A} oznaczają pola tensorowe o walencji 0, 1 i 2 (pola skalarne, wektorowe i tensorowe). Dla innych niż eulerowskie obiektywne pola tensorowe transformacja przebiega inaczej (Ogden, 1984). Można powiedzieć, że warunek obiektywności jest równoważny temu aby dana wielkość dla zmieniającej się konfiguracji transformowała się jak tensor (w ogólności lagrange'owsko-eulerowski). W szczególności, warunek obiektywności dla w pełni lagrange'owskich pól tensorowych jest równoważny ich niezmienniczości względem zmiany obserwatora (przy założeniu, że położenie wszystkich obserwatorów w konfiguracji odniesienia jest takie samo).

Niestety, jak wiadomo, pochodna materialna obiektywnych wielkości nieskalarnych i nielagrange'owskich nie jest obiektywna. W celu wyrażenia prędkości zmiany obiektywnych pól tensorowych wprowadzono klasę pochodnych obiektywnych (por. Simo i Hughes, 1998). Konstrukcja takich pochodnych jest ściśle związana z deformacją ciała. Polega na przetransformowaniu tensora do pewnej nieobróconej konfiguracji (operacja φ_t^* , ang. *pull-back*), policzeniu pochodnej materialnej z tego wyrażenia, a następnie przetransformowaniu tak powstałego tensora do konfiguracji aktualnej (operacja φ_{t*} , ang. *push-forward*)

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \varphi_{t*} \left[\overline{\dot{\varphi}_t^*(\mathbf{T})} \right].$$

Wybór konkretnej operacji φ_t^* (i tym samym, jednocześnie φ_{t*}) określa jednoznacznie rodzaj obiektywnej pochodnej.

W niniejszej pracy, w części poświęconej zjawiskom kontaktowym, będzie wykorzystywana pewna obiektywna miara prędkości poślizgu, związana z deformacją powierzchni kontaktowej. Szczegółowa definicja, bazująca na pracy Laursena i Simo (1993), została zamieszczona w podrozdziale 2.2.1.

2.1.4. Zasady zachowania. Miary sprzężone

W dalszej części założono, że masa deformującego się ciała nie ulega zmianie. Owo założenie, zwane *zasadą zachowania masy*, i wynikające z niego *równanie ciągłości* wpływa na postać równań równowagi. Samo jednak równanie ciągłości nie wchodzi w skład zagadnienia początkowo-brzegowego, gdyż, przeciwnie niż w cieczech, znamy konfigurację początkową i gęstość aktualną można określić jako funkcję deformacji

$$\rho = J^{-1} \rho_0,$$

gdzie $J = \det \mathbf{F}$.

Zasady zachowania pędu i momentu pędu (wraz z równaniem ciągłości) dają w efekcie równania ruchu Cauchy'ego oraz (przy braku momentów masowych) symetrię tensora naprężeń Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$. W dalszej części pracy ograniczymy się do opisu zjawisk niezależnych od skali czasu, co skutkuje między innymi pominięciem członów bezwładnościowych. W efekcie otrzymujemy następujący układ równań w postaci lokalnej:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad (2.2)$$

gdzie $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ jest polem sił masowych na jednostkę masy.

Powyższy zapis równań nie jest wygodny w tym sensie, że opisuje zależności między wielkościami zapisanymi w zmiennych aktualnych, co w dalszej perspektywie powodowałoby konieczność całkowania po zmiennym w czasie obszarze Ω^t . Dlatego też równania (2.1)–(2.2) zostały wyrażone przy użyciu wielkości nominalnych

$$\text{Div } \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S}, \quad (2.4)$$

gdzie \mathbf{S} jest tensorem naprężeń nominalnych, \mathbf{S}^T jest pierwszym tensorem Pioli-Kirchhoffa

$$\mathbf{S}^T = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T},$$

natomiast $\mathbf{B}(\mathbf{X}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(\mathbf{X}))$ jest nominalnym polem sił masowych.

2.1.5. Związki konstytutywne

Związki konstytutywne stanowią dopełnienie równań (2.3)–(2.4) tak, aby układ równań różniczkowych cząstkowych, współtworzący zagadnienie początkowo-brzegowe, był w pełni określony. Ograniczając się do sprężystości, związek konstytutywny ustanawia zależność pewnej miary naprężenia od pewnej miary deformacji. W szczególności, dla materiałów hipersprężystych ową zależność definiuje się poprzez skalarną funkcję $W(\mathbf{F})$ wyrażającą energię odkształceń sprężystych na jednostkę objętości w konfiguracji odniesienia, tak że mamy

$$\mathbf{S}^T = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}.$$

W dalszej części rozprawy wykorzystana jest definicja zaczerpnięta z pracy Zienkiewicza i Taylora (2000), opisująca materiał izotropowy typu *neo-Hookean*:

$$W(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{2} (J - 1)^2 + \mu \left(\frac{\text{Tr}(\mathbf{C}) - 3}{2} - \text{Log}(J) \right) \quad (2.5)$$

gdzie \mathbf{C} jest prawym tensorem Cauchy-Greena,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F},$$

natomiast λ i μ są stałymi Lamégo.

2.1.6. Zagadnienie początkowo-brzegowe. Postać słaba

Równania równowagi i równania konstytutywne wraz z warunkami początkowymi i warunkami brzegowymi stanowią zagadnienie początkowo-brzegowe następującej postaci:

1. Równania równowagi i symetria tensora Cauchy'ego

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{F}^T &= \mathbf{F} \mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2. Warunki początkowe i brzegowe

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^T(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) &= \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t) & \text{dla } \mathbf{X} \in \Gamma_\tau, \quad t \geq 0 \\
\mathbf{u}_t(\mathbf{X}) &= \bar{\mathbf{u}}_t(\mathbf{X}) & \text{dla } \mathbf{X} \in \Gamma_u, \quad t > 0 \\
\mathbf{u}_0(\mathbf{X}) &= \mathbf{0} & \text{dla } \mathbf{X} \in \Omega^0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

3. Związki konstytutywne

$$\mathbf{S}^T = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \tag{2.8}$$

4. Definicja wielkości kinematycznych

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \tag{2.9}$$

Wielkość $\mathbf{N}(\mathbf{X})$, użyta w warunkach (2.7), jest wektorem normalnym do powierzchni Γ_τ .

Mając na względzie dalsze zastosowania numeryczne, powyższe zagadnienie zostaje przekształcone do postaci słabej. Wiąże się to z wyborem odpowiedniej przestrzeni rozwiązań \mathcal{C}_t i przestrzeni funkcji próbkowych \mathcal{V}

$$\mathcal{C}_t = \left\{ \mathbf{u}_t : \Omega^0 \rightarrow \mathbb{R}^{nd} \mid \mathbf{u}_t \in H^1(\Omega^0), \mathbf{u}_t = \bar{\mathbf{u}}_t \text{ na } \Gamma_u \right\} \tag{2.10}$$

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{u}^* : \Omega^0 \rightarrow \mathbb{R}^{nd} \mid \mathbf{u}^* \in H^1(\Omega^0), \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_u \right\}, \tag{2.11}$$

gdzie $H^1(\Omega^0)$ jest oznaczeniem przestrzeni Sobolewa (Evans, 2002).

Zagadnienie w postaci słabej sprowadza się do znalezienia takich $\mathbf{u}_t \in \mathcal{C}_t$, że spełnione jest następujące równanie (zasada prac wirtualnych)

$$\int_{\Omega^0} (\text{Grad } \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{S}^T d\Omega - \int_{\Omega^0} \rho_0 \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{u}^* \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0 \tag{2.12}$$

dla każdej funkcji próbkowej $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}$ (przy odpowiednio zdefiniowanych związkach konstytutywnych (2.8) i zmiennych kinematycznych (2.9)).

Można pokazać, że dla zachowawczych obciążeń \mathbf{B} i $\bar{\mathbf{T}}$ powyższa postać słaba jest warunkiem koniecznym dla minimum funkcjonału energii potencjalnej

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega^0} W(\mathbf{F}(\mathbf{u})) d\Omega - \int_{\Omega^0} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma. \tag{2.13}$$

Warunek konieczny uzyskuje się z warunku zerowania się pochodnych kierunkowych względem wszystkich wariacji $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}$:

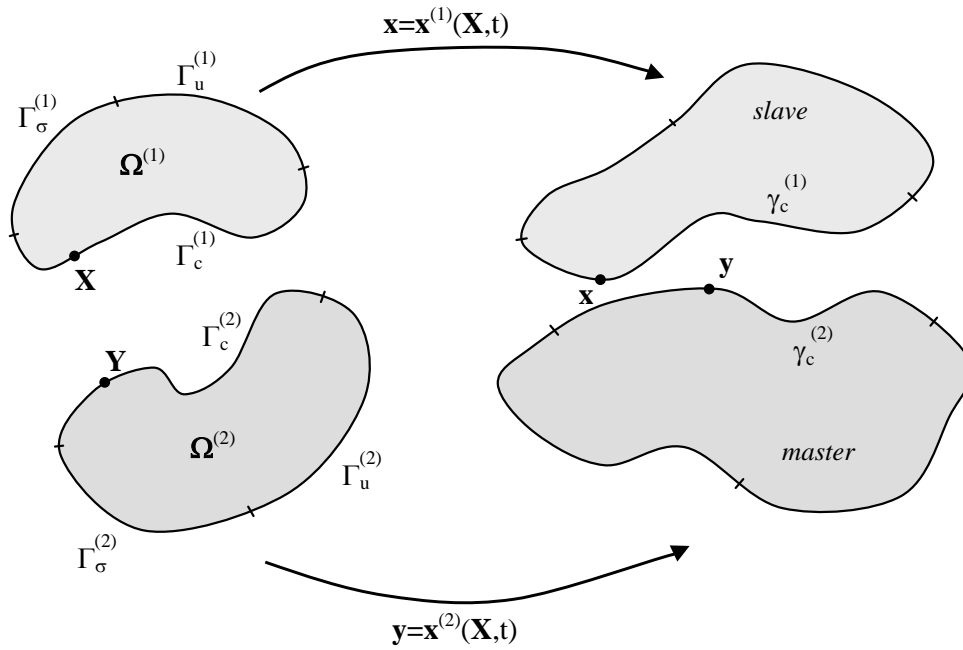
$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Pi(\mathbf{u} + s \mathbf{u}^*) = 0. \tag{2.14}$$

2.2. Zagadnienie kontaktowe

Bez straty ogólności, zagadnienie kontaktowe zostanie wprowadzone dla przypadku kontaktu dwóch ciał odkształcalnych. Ograniczymy się do modelowania jedynie oddziaływań kontaktowych mających charakter lokalny. Przy tych założeniach, zagadnienie kontaktowe można wprowadzić formułując dla każdego z ciał zagadnienie brzegowe

(2.6)–(2.9) zmodyfikowane poprzez wydzielenie na brzegach ciał dodatkowo podzbiorów $\Gamma_c^{(i)}$, na których mogą zachodzić oddziaływania kontaktowe.

W niniejszej pracy skoncentrujemy się na modelach zjawisk kontaktowych niezależnych od skali czasu: geometrycznej nieprzenikalności oraz tarcia Coulomba. Użycie prostego prawa tarcia ma jedynie na celu umożliwić klarowność rozważań. W ogólności, bez większego wpływu na wprowadzone dalej techniki regularyzacji oraz metody numeryczne, można by modelować bardziej skomplikowane zjawiska kontaktowe.



Rysunek 2.2.1: Zagadnienie kontaktowe – notacja.

2.2.1. Kinematyka kontaktu

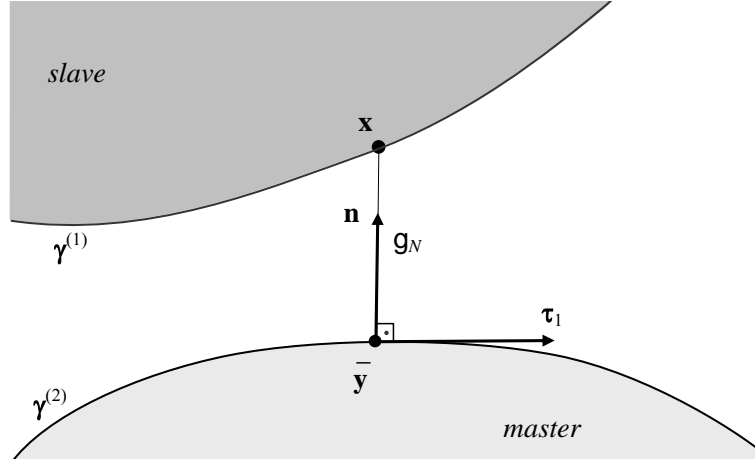
Sformułowanie warunków kontaktowych wymaga wprowadzenia zmiennych kinematycznych określających względne położenie oraz względny ruch powierzchni kontaktowych. W niniejszej pracy zastosowano podejście niesymetryczne (*master-slave*), w którym w sposób arbitralny ciałom $\Omega^{(1)}$ i $\Omega^{(2)}$ przydziela się role, odpowiednio, *slave* i *master*, a względny ruch opisuje się w odniesieniu do konfiguracji związanej z ciałem *master*. Jako że nie istnieje polski odpowiednik dla terminów *master* i *slave*, w dalszej części pracy będzie stosowane nazewnictwo anglojęzyczne.

Po przypisaniu ciału $\Omega^{(2)}$ roli *master* a ciału $\Omega^{(1)}$ roli *slave*, każdemu punktowi $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t^{(1)}(\mathbf{X})$ leżącemu na powierzchni $\gamma_c^{(1)}$ można przypisać najbliższy mu punkt $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}})$ leżący na $\gamma_c^{(2)}$. W tym celu formułujemy zagadnienie poszukiwania punktu $\bar{\mathbf{y}} \in \gamma_c^{(2)}$ leżącego najbliżej punktu \mathbf{x} :

$$\bar{\boldsymbol{\xi}} = \arg \min_{\boldsymbol{\xi}} \left\| \mathbf{x}_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{x}_t^{(2)}(\boldsymbol{\Psi}_0^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) \right\|, \quad (2.15)$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{Y}} = \boldsymbol{\Psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}),$$



Rysunek 2.2.2: Zagadnienie kontaktowe – zmienne kinematyczne.

a $\Psi_0^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$ jest pewną parametryzacją opisującą fragment brzegu $\partial\Omega_0^{(2)}$. Powyższe przypisanie, przy odpowiednio regularnym brzegu $\gamma_c^{(2)}$ (rozmaitość klasy C^1), jest tożsame operacji rzutowania prostopadłego punktu $\mathbf{x}_t^{(1)}(\mathbf{X})$ na powierzchnię $\gamma_c^{(2)}$. Warto podkreślić, że problem (2.15) może być niejednoznaczny, co może powodować trudności dla przybliżonych metod rozwiązywania zagadnień kontaktowych (por. Konyukhov i Schweizerhof, 2008).

Mając określoną normalną zewnętrzną \mathbf{n} do powierzchni $\gamma_c^{(2)}$ w punkcie $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}})$, funkcję odległości wyraża się w następujący sposób:

$$g_N = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{x}_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}})). \quad (2.16)$$

Według powyższej definicji, warunek $g_N = 0$ oznacza kontakt, $g_N > 0$ – separację, natomiast $g_N < 0$ – penetrację ciał.

W dalszej części rozpatrywane jest zagadnienie kontaktowe z tarciem, zatem niezbędne jest wprowadzenie odpowiedniej miary prędkości poślizgu kontaktujących się powierzchni. W niniejszej pracy przyjęto podejście zaproponowane przez Laursena i Simo (1993) polegające na zdefiniowaniu prędkości poślizgu jako pewnej obiektywnej (kowariantnej) pochodnej odległości $\mathbf{x}_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{x}_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}})$ związanej z bazą styczną

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha = \mathbf{F}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}, t) \Psi_{0,\alpha}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}),$$

gdzie $\Psi_{0,\alpha}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \partial\Psi_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}})/\partial\xi^\alpha$ jest bazą w konfiguracji odniesienia. Baza $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ stanowi przejście między konfiguracją w przestrzeni parametrów ξ^α a konfiguracją aktualną, związaną z punktem rzutowania na powierzchnię $\gamma_c^{(2)}$. Przyjmując założenie, że ciała znajdują się w idealnym kontakcie (tzn. $g_N = 0$), prędkość poślizgu \mathbf{v}_T oraz jej składowe $\dot{\xi}^\alpha$ w bazie $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ wyrażone zostaną następująco (Laursen, 2002):

$$\mathbf{v}_T = \dot{\xi}^\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}) \right) \boldsymbol{\tau}^\alpha \right) \boldsymbol{\tau}_\alpha = \left((\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{v}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}})) \boldsymbol{\tau}^\alpha \right) \boldsymbol{\tau}_\alpha \quad (2.17)$$

gdzie $\boldsymbol{\tau}^\alpha$ jest kobazą dla bazy $\boldsymbol{\tau}_\alpha$.

W powyższej definicji prędkości poślizgu \mathbf{v}_T pewien niepokój może budzić założenie idealnego kontaktu ($g_N = 0$). Oczywiście jest, że gdy ciała są w separacji wtedy miara

prędkości względnej nie ma znaczenia, gdyż nie ma wtedy oddziaływań kontaktowych. Problem niedokładności definicji może się natomiast pojawić gdy stosuje się metody przybliżonego rozwiązywania zagadnień kontaktowych, które mogą dopuszczać penetrację. Wtedy $g_N \neq 0$, a uproszczona definicja prędkości poślizgu (2.17) różni się od pełnej definicji (por. Laursen, 2002) o człony związane z krzywizną powierzchni $\gamma_c^{(2)}$. Zostaną rozpatrzone dwa przypadki, w których może występować konieczność uwzględnienia tych dodatkowych członów:

1. Regularyzacja warunków kontaktowych może dopuszczać rozwiązanie spełniające te warunki jedynie w przybliżony sposób (jak np. w metodzie funkcji kary). W takim przypadku stosowanie przybliżonej miary prędkości poślizgu (2.17) mogłoby być dyskusyjne. W ramach niniejszej pracy stosowana jest metoda rozszerzonych mnożników Lagrange'a, która charakteryzuje się tym, że warunki kontaktowe spełnione są dokładnie.
2. W związku ze stosowaniem iteracyjnej procedury rozwiązywania zdyskretyzowanego zagadnienia kontaktowego w danej iteracji można się spodziewać zarówno penetracji jak i separacji. W tym przypadku dodatkowe człony prędkości mogą mieć wpływ na zbieżność procesu iteracyjnego lecz nie na samo rozwiązanie, które – jak już wspomniano – spełnia warunek $g_N = 0$.

Z powyższych rozważań wynika, że w ramach niniejszej pracy dopuszczalne jest stosowanie uproszczonej definicji (2.17).

2.2.2. Naprężenia kontaktowe

Załóżmy, że w danej chwili czasu t dwa kontaktujące się ciała znajdują się w równowadze. Wtedy dla każdej pary punktów $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t^{(1)}(\mathbf{X}) \in \gamma_c^{(1)}$, $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}) \in \gamma_c^{(2)}$ takiej, że $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{y}}$, zachodzi warunek równowagi naprężeń kontaktowych:

$$-\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^{(2)}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$$

Powyzsza równość, wyrażona za pomocą naprężeń nominalnych $\mathbf{T}^{(i)} = \mathbf{t}^{(i)} j^{(i)}$, ma postać:

$$-\mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{X})/j^{(1)} = \mathbf{T}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))/j^{(2)}, \quad (2.18)$$

gdzie $j^{(i)} = da^{(i)}/dA^{(i)}$ jest współczynnikiem ekspansji powierzchni, który w sformułowaniach kontynualnych można wyznaczyć ze wzoru Nansona, $\mathbf{n} da = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA$. Dla rozpatrywanego przypadku ciał znajdujących się w idealnym kontakcie ($g_N = 0$), oraz przyjmując $da^{(1)} = da^{(2)}$, zależność (2.18) można zapisać jako

$$\mathbf{T} \stackrel{ozn}{=} -\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2)} \frac{dA^{(2)}}{dA^{(1)}} \quad (2.19)$$

Powyzsza równość umożliwi późniejsze zapisanie warunku kontaktowego jedynie przy użyciu zmiennych związanych z powierzchnią $\Gamma_c^{(1)}$.

Wektor nominalnych naprężeń kontaktowych $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ można przedstawić jako składowe w bazie $\{\boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2, \mathbf{n}\}$ zaczepionej w punkcie $\bar{\mathbf{y}}$ na powierzchni $\gamma_c^{(2)}$ (*master*). Pozwala to wyodrębnić składowe styczne oraz składową normalną:

$$\mathbf{T}_T = T_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha = (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha) \boldsymbol{\tau}^\alpha, \quad \mathbf{T}_N = T_N \mathbf{n} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (2.20)$$

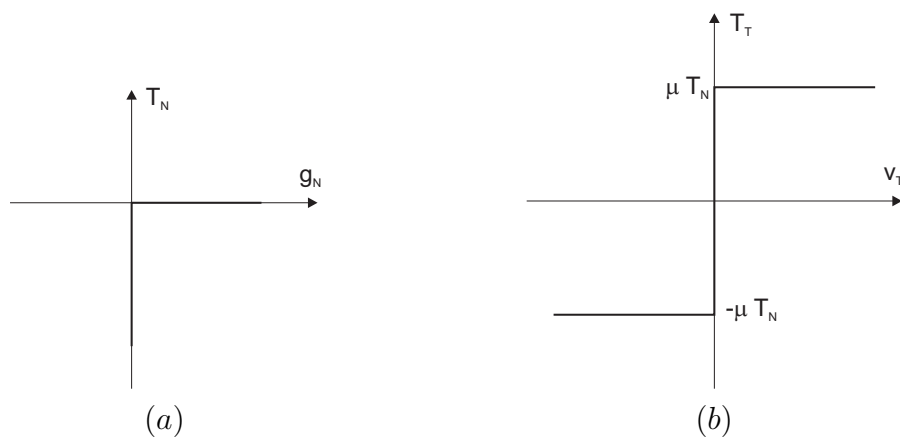
Według przyjętych powyżej oznaczeń, składowa normalna naprężenia kontaktowego jest zawsze niedodatnia, tzn. $T_N \leq 0$ (por. rys. 2.2.3(a)).

2.2.3. Warunki kontaktowe

Obserwowana własność ciał stałych polegająca na tym, że ciała wzajemnie się nie przenikają a kontakt zachodzi jedynie poprzez powierzchnię będącą częścią wspólną brzegów obu ciał nosi nazwę warunku kontaktu jednostronnego. Ów warunek można wprowadzić w oparciu o podane wcześniej wielkości kinematyczne (2.16) i statyczne (2.20) jako problem Signorini'ego:

$$g_N \geq 0, \quad T_N \leq 0, \quad g_N T_N = 0. \quad (2.21)$$

Należy zwrócić uwagę, że opierając ów warunek na funkcji odległości g_N zdefiniowanej jak w (2.16)) nie uwzględnia się przypadku kontaktu ciała z samym sobą (ang. *self-contact*). To ograniczenie zostało wprowadzone świadomie z uwagi na pewne subtelne trudności jakie niesie ze sobą uwzględnienie tego przypadku przy, stosowanym w niniejszej pracy, podejściu *master-slave*¹.



Rysunek 2.2.3: Schematyczna ilustracja (a) warunku kontaktu jednostronnego i (b) warunku tarcia Coulomba.

Prawo Coulomba jest najprostszym modelem opisującym zjawisko tarcia. Warunek tarcia Coulomba definiuje się w oparciu o wprowadzone wcześniej: prędkość poślizgu (2.17) oraz naprężenia kontaktowe (2.19). Warunek tarcia mówi, że granica poślizgu dla wartości naprężenia stycznego $\|\mathbf{T}_T\|$ jest proporcjonalna do naprężenia normalnego T_N ze współczynnikiem proporcjonalności μ , oraz że wektor naprężeń stycznych \mathbf{T}_T oraz wektor prędkości poślizgu \mathbf{v}_T mają ten sam kierunek i zwrot. Schematycznie zostało to przedstawione na rys. 2.2.3(b), natomiast formalnie warunek zapisać można następująco (dla $T_N \leq 0$):

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{T}_T, T_N) &= \|\mathbf{T}_T\| + \mu T_N \leq 0 \\ \|\mathbf{T}_T\| \mathbf{v}_T &= \|\mathbf{v}_T\| \mathbf{T}_T \\ \|\mathbf{v}_T\| \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

¹Trudności wynikają z faktu, że w przypadku skończonych deformacji nie można *a priori* ustalić podziału brzegu na części *master* i *slave*. Trudności występują zarówno w opisie kontynuualnym jak i po dyskretyzacji MES.

2.2.4. Zagadnienie początkowo-brzegowe.

Zagadnienie (2.6)–(2.9), rozszerzone do przypadku dwóch kontaktujących się ciał, wraz z wprowadzonymi warunkami kontaktowymi (2.21) i (2.22) stanowi zagadnienie początkowo-brzegowe dla problemu kontaktowego (dla $i \in \{1, 2\}$):

1. Równania równowagi i symetria tensora naprężeń Cauchy’ego

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{S}^{(i)} + \rho_0^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{F}^{(i)} \mathbf{S}^{(i)})^T &= \mathbf{F}^{(i)} \mathbf{S}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

2. Warunki początkowe i brzegowe

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}^{(i)}(\mathbf{X}, t))^T \mathbf{N}^{(i)}(\mathbf{X}) &= \bar{\mathbf{T}}^{(i)}(\mathbf{X}, t) & \text{dla } \mathbf{X} \in \Gamma_\tau^{(i)}, \quad t \geq 0 \\ \mathbf{u}_t^{(i)}(\mathbf{X}) &= \bar{\mathbf{u}}_t^{(i)}(\mathbf{X}) & \text{dla } \mathbf{X} \in \Gamma_u^{(i)}, \quad t > 0 \\ \mathbf{u}_0^{(i)}(\mathbf{X}) &= \mathbf{0} & \text{dla } \mathbf{X} \in \Omega_0^{(i)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

3. Związki konstytutywne

$$(\mathbf{S}^{(i)})^T = \frac{\partial W^{(i)}}{\partial \mathbf{F}^{(i)}} \quad (2.25)$$

gdzie $W^{(i)}$ są zdefiniowane tak jak w podrozdziale 2.1.5.

4. Definicja wielkości kinematycznych

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(i)} &= \text{Grad } \mathbf{x}^{(i)} & g_N &= \mathbf{n} \left(\mathbf{x}_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{x}_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}) \right) \\ \mathbf{v}_T &= \left[\left(\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{v}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}) \right) \boldsymbol{\tau}^\alpha \right] \boldsymbol{\tau}_\alpha \end{aligned} \quad (2.26)$$

5. Warunki kontaktowe (zgodność naprężeń, brak penetracji oraz tarcie Coulomba)

$$\begin{aligned} T_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha + T_N \mathbf{n} &= \mathbf{T} \stackrel{\text{ozn}}{=} -\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2)} \frac{dA^{(2)}}{dA^{(1)}} \\ \left\{ \begin{array}{l} g_N \geq 0 \\ T_N \leq 0 \\ g_N T_N = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\mathbf{T}_T, T_N) = \|\mathbf{T}_T\| + \mu T_N \leq 0 \\ \|\mathbf{T}_T\| \mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}_T\| \mathbf{T}_T \\ \|\mathbf{v}_T\| \Phi = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Zauważmy, że dzięki podejściu *master-slave*, warunki (2.27) określone są tylko na powierzchni *slave*, tzn. dla wszystkich $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} \in \gamma_c^{(1)}$.

2.2.5. Regularyzacja warunków kontaktowych. Postać słaba

Podobnie jak w podrozdziale 2.1.6, kolejnym krokiem jest doprowadzenie zagadnienia (2.23)–(2.27) do postaci słabej. W przypadku zagadnienia kontaktowego, trudność stanowią warunki kontaktowe (2.27), które w postaci słabej prowadzą do nierówności wariacyjnych. Nie jest to postać bezpośrednio nadająca się do zastosowań numerycznych, dlatego też zagadnienie jest doprowadzane do równości wariacyjnej, zawierającej odpowiednie człony wymuszające spełnienie warunków kontaktowych. Takie przekształcenie nazywane jest regularyzacją warunków kontaktowych. W niniejszej pracy zastosowana została jedna z metod regularyzacji – metoda rozszerzonych mnożników Lagrange’a.

Postać niezregularyzowana

Przekształcając zagadnienie (2.23)–(2.27) do postaci słabej dostajemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Omega^{(i)}} (\text{Grad } \mathbf{u}^{*(i)}) \cdot (\mathbf{S}^{(i)})^T d\Omega - \int_{\Omega^{(i)}} \rho_0^{(i)} \mathbf{u}^{*(i)} \cdot \mathbf{B}^{(i)} d\Omega - \int_{\Gamma_r^{(i)}} \mathbf{u}^{*(i)} \cdot \bar{\mathbf{T}}^{(i)} d\Gamma \right) \\ - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_c^{(i)}} \mathbf{u}^{*(i)} \cdot \mathbf{T}^{(i)} d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

gdzie pierwszy człon odpowiada za równowagę każdego z ciał osobno, natomiast drugi człon wprowadza oddziaływania kontaktowe. Oznaczając człony określone na powierzchniach $\Gamma_c^{(i)}$ przez G_c ,

$$G_c(\mathbf{u}_t^{(i)}, \mathbf{u}^{*(i)}) := - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_c^{(i)}} \mathbf{T}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{*(i)} d\Gamma,$$

postać słabą (2.28) można zapisać jako sumę

$$G(\mathbf{u}_t^{(i)}, \mathbf{u}^{*(i)}) := G^{(1)}(\mathbf{u}_t^{(1)}, \mathbf{u}^{*(1)}) + G^{(2)}(\mathbf{u}_t^{(2)}, \mathbf{u}^{*(2)}) + G_c(\mathbf{u}_t^{(i)}, \mathbf{u}^{*(i)}),$$

gdzie wyrazy $G^{(1)}$ i $G^{(2)}$ odpowiadają postaci słabej (2.12) zapisanej dla każdego z ciał osobno.

Skoncentrujmy się na członie G_c . Korzystając z (2.19), G_c można zapisać jako

$$G_c = \int_{\Gamma_c^{(1)}} \mathbf{T}(\mathbf{X}) \cdot \left(\mathbf{u}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right) d\Gamma.$$

co po dalszych przekształceniach, z wykorzystaniem (2.20), prowadzi do

$$G_c = \int_{\Gamma_c^{(1)}} \left[T_N \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{u}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right) + T_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha \cdot \left(\mathbf{u}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right) \right] d\Gamma. \quad (2.29)$$

Wykorzystując wynik z pracy Laursena i Simo (1993), można wyprowadzić następujące wzory na wariacje wielkości g_N i $\bar{\xi}$, związane z wariacjami $\mathbf{u}^{*(i)}$:

$$g_N^* = \mathbf{n} \cdot \left[\mathbf{u}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right], \quad (2.30)$$

$$\bar{\xi}^\alpha = \boldsymbol{\tau}^\alpha \cdot \left[\mathbf{u}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right]. \quad (2.31)$$

W powyższych wzorach wielkość g_N^* jest pochodną g_N w kierunku wariacji wariacji \mathbf{u}^* , natomiast $\bar{\xi}^\alpha$ jest jedynie przybliżeniem pochodnej $\bar{\xi}^\alpha$ w kierunku wariacji \mathbf{u}^* . Wyrażenie (2.31) jest ściśle dla $g_N = 0$. Taki zabieg pozwala uniknąć kosztownego wyznaczania pochodnych związanych z krzywizną powierzchni kontaktowej, co wydatnie obniża czas obliczeń numerycznych (Laursen, 2002). Wykorzystując wzory (2.30) i (2.31), wyrażenie (2.29) zapisujemy ostatecznie w postaci

$$G_c = \int_{\Gamma_c^{(1)}} \left(T_N g_N^* + T_{T_\alpha} \bar{\xi}^\alpha \right) d\Gamma. \quad (2.32)$$

Ten podstawowy wynik uzyskali również, wprowadzając nieco odmienne definicje prędkości poślizgu, Pietrzak i Curnier (1999) oraz Klarbring (1995).

Ostatecznie, niezregularyzowana postać słaba dla zagadnienia (2.23)–(2.27) sprowadza się do zdefiniowania następujących przestrzeni rozwiązań \mathcal{C}_t i przestrzeni funkcji próbkowych \mathcal{V} :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_t &= \left\{ \mathbf{u}_t : \Omega_0^{(1)} \cup \Omega_0^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^{nd} \mid \mathbf{u}_t \in H^1(\Omega_0^{(1)}) \cup H^1(\Omega_0^{(2)}), \right. \\ &\quad \left. \mathbf{u}_t = \bar{\mathbf{u}}_t^{(i)} \text{ na } \Gamma_u^{(i)}, \text{ spełnione jest (2.27) na } \Gamma_c^{(1)} \right\} \\ \mathcal{V} &= \left\{ \mathbf{u}^* : \Omega_0^{(1)} \cup \Omega_0^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^{nd} \mid \mathbf{u}^* \in H^1(\Omega_0^{(1)}) \cup H^1(\Omega_0^{(2)}), \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_u^{(i)} \right\}. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest takie pole $\mathbf{u}_t \in \mathcal{C}_t$, że dla każdego pola $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}$ spełnione jest (2.28).

Postać zregularyzowana

Zauważmy, że analogicznie do (2.13), przy założeniu konserwatywności sił \mathbf{B} i $\bar{\mathbf{T}}$, dla każdego z kontaktujących się ciał można określić funkcjonal energii potencjalnej $\Pi^{(i)}$:

$$\Pi^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}) = \int_{\Omega_0^{(i)}} W^{(i)}(\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)})) d\Omega - \int_{\Omega_0^{(i)}} \rho_0^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{B}^{(i)} d\Omega - \int_{\Gamma_\tau^{(i)}} \mathbf{u}^{(i)} \cdot \bar{\mathbf{T}}^{(i)} d\Gamma. \quad (2.33)$$

Rozwiązanie zagadnienia kontaktowego można wtedy traktować jako minimalizację zsumowanej energii potencjalnej obu ciał $\Pi = \sum_{i=1}^2 \Pi^{(i)}$ z nałożonymi ograniczeniami kontaktowymi (2.27). Takie ujęcie problemu pozwala na zastosowanie metod optymalizacyjnych. Bazując na pracach Alarta i Curniera (1991), Pietrzaka (1997) oraz Pietrzaka i Curniera (1999), zdefiniowano następujący lagranżjan:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda}; \hat{k}) = \Pi(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) + \int_{\Gamma_c^{(1)}} \left(l_N(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \lambda_N) + l_T(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda}_T; \hat{k}) \right) d\Gamma,$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_N \mathbf{n} + \boldsymbol{\lambda}_T$, natomiast wyrażenia l_N oraz l_T są funkcjami zaleźnymi od zmiennych podstawowych (przemieszczenia $\mathbf{u}^{(i)}$) oraz od zmiennych dualnych (mnożniki Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda}$),

$$\begin{aligned} l_N(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \lambda_N) &= \begin{cases} \left(\lambda_N + \frac{\rho}{2} g_N \right) g_N, & \hat{\lambda}_N \leq 0 \\ -\frac{1}{2\rho} |\lambda_N|^2, & \hat{\lambda}_N > 0 \end{cases} \\ l_T(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda}_T; \hat{k}) &= \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \left(\boldsymbol{\lambda}_T + \frac{\rho}{2} \mathbf{v}_T dt \right) \cdot (\mathbf{v}_T dt), & \|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\| \leq \hat{k} \\ -\frac{1}{2\rho} \left(\|\boldsymbol{\lambda}_T\|^2 - 2\hat{k}\|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\| + \hat{k}^2 \right), & \|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\| > \hat{k} \end{array} \right\} & \hat{\lambda}_N \leq 0 \\ -\frac{1}{2\rho} \|\boldsymbol{\lambda}_T\|^2, & \hat{\lambda}_N > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

gdzie $\hat{\lambda}_N = \lambda_N + \rho g_N$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T = \boldsymbol{\lambda}_T + \rho \mathbf{v}_T dt$, $\hat{k} = -\mu \hat{\lambda}_N$, natomiast ρ jest parametrem regularyzacyjnym². Wielkości $\hat{\lambda}_N$ i $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T$ noszą nazwę *rozszerzonych mnożników Lagrange'a*. Można pokazać (Pietrzak, 1997; Pietrzak i Curnier, 1999), że punkt siodłowy lagranżjanu \mathcal{L} ,

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda}; \hat{k})$$

²Przyjęto taką samą wartość parametru ρ dla części normalnej i stycznej. W ogólności można użyć dwóch niezależnych parametrów regularyzacyjnych.

jest rozwiązaniem zagadnienia (2.23)–(2.27). Warunkiem koniecznym dla istnienia punktu siodłowego jest zerowanie się pochodnych kierunkowych³ względem wariacji przemieszczeń \mathbf{u}^* i wariacji mnożników $\boldsymbol{\lambda}^*$ należących do przestrzeni

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_u &= \left\{ \mathbf{u}^* : \Omega_0^{(1)} \cup \Omega_0^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^{nd} \mid \mathbf{u}^* \in H^1(\Omega_0^{(1)}) \cup H^1(\Omega_0^{(2)}), \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_u^{(i)} \right\} \\ \mathcal{V}_\lambda &= \left\{ \boldsymbol{\lambda}^* : \Gamma_c^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}^{nd} \mid \boldsymbol{\lambda}^* \in H^1(\Gamma_c^{(1)}) \right\}. \end{aligned}$$

Odpowiednie przestrzenie dla pola przemieszczeń oraz pola mnożników przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_t &= \left\{ \mathbf{u}_t : \Omega_0^{(1)} \cup \Omega_0^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^{nd} \mid \mathbf{u}_t \in H^1(\Omega_0^{(1)}) \cup H^1(\Omega_0^{(2)}), \mathbf{u}_t = \bar{\mathbf{u}}_t^{(i)} \text{ na } \Gamma_u^{(i)} \right\} \\ \mathcal{C}_\lambda &= \left\{ \boldsymbol{\lambda}_t : \Omega_0^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}^{nd} \mid \boldsymbol{\lambda}_t \in H^1(\Omega_0^{(1)}) \right\} \end{aligned}$$

Zauważmy, że w tym przypadku przestrzeń rozwiązań nie zawiera już więzów jednostronnych związanych z warunkami kontaktowymi. Można teraz zapisać zregularyzowane zagadnienie kontaktowe w postaci słabej. Zadaniem jest znalezienie takich $\mathbf{u}_t \in \mathcal{C}_t$, $\boldsymbol{\lambda}_t \in \mathcal{C}_\lambda$, że $\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_u$, $\forall \boldsymbol{\lambda}^* \in \mathcal{V}_\lambda$ zachodzi

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\mathbf{u} + s \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda} + s \boldsymbol{\lambda}^*; \hat{k}) = 0. \quad (2.35)$$

Występujący w (2.34) człon $\mathbf{v}_T dt$ wyraża przyrost drogi poślizgu. Bazując na pracy Pietrzaka i Curniera (1999) oraz korzystając ze wzoru (2.17), w dalszej części niniejszej rozprawy przyrost $\mathbf{v}_T dt$ będziemy rozumieli jako

$$\mathbf{v}_T dt := \Delta \mathbf{g}_T = \Delta \bar{\xi}^\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha, \quad (2.36)$$

gdzie wielkość $\Delta \bar{\xi}^\alpha$ jest zdefiniowana w taki sposób, że co do wartości zachodzi równość

$$\Delta \bar{\xi}^\alpha = \dot{\xi}^\alpha dt,$$

natomiast pochodna $\Delta \bar{\xi}^\alpha$ wzdłuż wariacji \mathbf{u}^* zostanie określona, z wykorzystaniem definicji (2.31), w następujący sposób:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Delta \bar{\xi}^\alpha(\mathbf{u} + s \mathbf{u}^*) = \dot{\xi}^\alpha.$$

Wykorzystując przyrostową definicję wielkości $\mathbf{v}_T dt$ podaną w równaniu (2.36), pochodne wyrażenia (2.35) zostaną zapisane jako (Pietrzak, 1997; Pietrzak i Curnier, 1999):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Omega^{(i)}} (\text{Grad } \mathbf{u}^{(i)}) \cdot (\mathbf{S}^{(i)})^T d\Omega - \int_{\Omega^{(i)}} \rho_0^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{B}^{(i)} d\Omega - \int_{\Gamma_\tau^{(i)}} \mathbf{u}^{(i)} \cdot \bar{\mathbf{T}}^{(i)} d\Gamma \right) \\ &\quad + \int_{\Gamma_c^{(1)}} \left(T_N^{\text{eff}} \mathbf{g}_N^* + T_{T_\alpha}^{\text{eff}} \bar{\xi}^\alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^{(1)}} \left(g_{N_{\text{eff}}} \boldsymbol{\lambda}_N^* + \Delta \bar{\xi}_{\text{eff}}^\alpha \boldsymbol{\lambda}_{T_\alpha}^* \right) d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.37)$$

³Pochodną l_T liczymy przy ustalonym członie \hat{k} .

gdzie $\lambda_N^* = \mathbf{\lambda} \cdot \mathbf{n}$, $\lambda_{T_\alpha}^* = \mathbf{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha$, natomiast wielkości z indeksem "eff" odpowiadają pochodnym kowariantnym wyrażen l_N i l_T wzdłuż wariacji⁴ \mathbf{u}^* i $\mathbf{\lambda}^*$:

$$T_N^{\text{eff}} = \begin{cases} \hat{\lambda}_N, & \hat{\lambda}_N \leq 0 \\ 0, & \hat{\lambda}_N > 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

$$T_{T_\alpha}^{\text{eff}} = \begin{cases} \begin{cases} \hat{\lambda}_{T_\alpha}, & \|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\| \leq \hat{k} \\ \hat{k} \frac{\hat{\lambda}_{T_\alpha}}{\|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\|}, & \|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\| > \hat{k} \end{cases} & \hat{\lambda}_N \leq 0 \\ 0, & \hat{\lambda}_N > 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

$$g_{N_{\text{eff}}} = \begin{cases} g_N, & \hat{\lambda}_N \leq 0 \\ -\frac{1}{\rho} \lambda_N, & \hat{\lambda}_N > 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\Delta \bar{\xi}_{\text{eff}}^\alpha = \begin{cases} \begin{cases} \Delta \bar{\xi}^\alpha, & \|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\| \leq \hat{k} \\ -\frac{1}{\rho} \left(\lambda_{T_\beta} - \hat{k} \frac{\hat{\lambda}_{T_\beta}}{\|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\|} \right) m^{\beta\alpha}, & \|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\| > \hat{k} \end{cases} & \hat{\lambda}_N \leq 0 \\ -\frac{1}{\rho} \lambda_{T_\beta} m^{\beta\alpha}, & \hat{\lambda}_N > 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

Użyty powyżej symbol $m^{\beta\alpha} = \boldsymbol{\tau}^\beta \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha$ jest macierzą metryczną.

Zwróćmy uwagę na fakt, że regularyzacja warunków kontaktowych metodą rozszerzonych mnożników Lagrange'a objawia się w równaniu (2.37) jedynie w postaci wprowadzonych całek liczonych na powierzchni $\Gamma_c^{(1)}$. Owe człony są niezależne od użytych modeli materiałowych kontaktujących się ciał. Jest to szczególnie korzystne w przypadku stosowania Metody Elementów Skończonych, ponieważ umożliwia wyabstrahowanie elementów związanych wyłącznie ze zjawiskami kontaktowymi. Co więcej, można stosować inne niż, zakładane w niniejszym rozdziale, hipersprężyste modele materiałowe bez ingerencji w postać członów odpowiedzialnych za zjawiska kontaktowe (Pietrzak, 1997). Fakt ten wykorzystano w rozdziale 7, gdzie w niektórych przykładach rozpatrzono deformacje plastyczne kontaktujących się ciał.

⁴Dokładniej, wzdłuż składowych wariacji odpowiednio w bazie lub kobazie stycznej.

Rozdział 3

Metoda Elementów Skończonych w zagadnieniach kontaktowych

W niniejszym podrozdziale przedstawiono schemat rozwiązywania zregulowanej postaci słabej zagadnienia kontaktowego z tarcie przy pomocy Metody Elementów Skończonych (MES). W podrozdziale 3.1 jest opisany ogólny zarys MES, bazujący na zagadnieniu deformacji pojedynczego ciała hipersprężystego. Podrozdział 3.2 stanowi rozszerzenie uwzględniające zjawiska kontaktowe. Opisany jest schemat elementu kontaktowego. W podrozdziale 3.3 przedstawiono przegląd zastosowanych, w ramach niniejszej pracy, technik wygładzania kontaktu.

3.1. Ogólny zarys MES

Metoda Elementów Skończonych (MES) jest jedną z podstawowych metod przybliżonego rozwiązywania nieliniowych zagadnień początkowo-brzegowych. W zastosowaniu do zagadnień zapisanych w postaci słabej (por. (2.12)), charakteryzuje się odpowiednim wyborem skończone-wymiarowych podprzestrzeni \mathcal{C}_t^h i \mathcal{V}^h dla przestrzeni rozwiązań \mathcal{C}_t i przestrzeni funkcji próbkowych \mathcal{V} , oraz odpowiednim wyborem baz rozpinających owe podprzestrzenie. Taki proces określa się mianem *dyskretyzacji przestrzennej*. Zostanie to dokładniej opisane w podrozdziale 3.1.1.

Zdyskretyzowane (przestrzennie) zagadnienie początkowo-brzegowe prowadzi do układu równań względem wektora zmiennych \mathbf{u}_t^i – składowych w wybranej uprzednio bazie funkcyjnej. Równania mają zwykle charakter równań nieliniowych względem wektora \mathbf{u}_t^i oraz równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu. Aby poradzić sobie z ową zależnością od czasu, wprowadza się odpowiedni schemat rozwiązywania zagadnień zależnych od czasu (podrozdział 3.1.2). Wiąże się to z podziałem domeny czasowej na skończone interwały (przyrosty) i umożliwia sprowadzenie zagadnienia do równań algebraicznych sformułowanych dla wektora $\mathbf{u}_{t_k}^i$ i rozwiązywanych w dyskretnych chwilach czasu t_k .

Nieliniowy charakter równań względem zmiennych $\mathbf{u}_{t_k}^i$ wymaga odpowiednich technik rozwiązywania. Jedną z takich technik – stosowaną w niniejszej pracy *metodę Newtona-Raphsona* – przedstawiono w podrozdziale 3.1.3.

Niniejszy podrozdział powstał w oparciu o książki Kleibera (1989), Curniera (1993) oraz Zienkiewicza i Taylora (2000).

3.1.1. Dyskretyzacja przestrzenna

Dyskretyzacja. Element skończony

Wychodząc z postaci słabej zagadnienia początkowo-brzegowego (por. (2.12)), mamy doczynienia z nieskończenie-wymiarowymi przestrzeniami funkcyjnymi \mathcal{C}_t i \mathcal{V} . Dla metod numerycznych stosuje się ich skończenie-wymiarowe podprzestrzenie (oznaczone odpowiednio \mathcal{C}_t^h i \mathcal{V}^h). W niniejszej pracy wykorzystano *metodę Galerkiną*, która charakteryzuje się przyjęciem tej samej bazy rozpinającej podprzestrzenie \mathcal{C}_t^h oraz \mathcal{V}^h . Ograniczając się do ogólniejszego przypadku zagadnień trójwymiarowych, w oparciu o definicje (2.10) i (2.11), przestrzenie \mathcal{C}_t^h i \mathcal{V}^h można określić w następujący sposób:

$$\mathcal{C}_t^h = \left\{ \mathbf{u}_t^h : \Omega_0^h \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u}_t^h = \sum_i \mathbf{u}_t^i N_i, \mathbf{u}_t^h = \bar{\mathbf{u}}_t^h \simeq \bar{\mathbf{u}}_t \text{ na } \Gamma_u^h \right\} \quad (3.1)$$

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \mathbf{u}^h : \Omega_0^h \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u}^h = \sum_i \mathbf{u}^{*i} N_i, \mathbf{u}^h = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_u^h \right\}, \quad (3.2)$$

gdzie

$$\mathbf{u}_t^i = \left((u_t^i)_1, (u_t^i)_2, (u_t^i)_3 \right) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}^{*i} = \left((u^{*i})_1, (u^{*i})_2, (u^{*i})_3 \right) \quad (3.4)$$

są zmiennymi określającymi wektor przemieszczeń, mającymi składowe w bazie

$$((N_i, 0, 0), (0, N_i, 0), (0, 0, N_i)).$$

Funkcje $N_i(\mathbf{X})$ noszą nazwę *funkcji kształtu*. Standardowo, spełniają następujące warunki:

1. $N_i : \Omega_0^h \rightarrow \mathbb{R}$, $N_i \in C^0(\Omega_0^h)$, $N_i \in PC^1(\Omega_0^h)$
2. $\sum N_i(\mathbf{X}) \equiv 1$ na Ω_0^h
3. $N_i(\mathbf{X}_j) = \delta_{ij}$

Pierwszy warunek oznacza, że wymagamy aby N_i były ciągłymi funkcjami skalarnymi, mającymi prawie wszędzie¹ ciągłą pochodną. Drugi warunek mówi, że N_i mają charakter funkcji wagowych. Trzeci warunek wyróżnia *węzły*. W każdym węźle \mathbf{X}_i funkcja N_i przyjmuje wartość 1, podczas gdy w pozostałych węzłach przyjmuje wartość 0. Daje to podstawę do interpretacji wielkości \mathbf{u}_t^i jako wartości węzłowych.

Dla wygody notacji, zamiast macierzy (3.3) i (3.4) można wprowadzić jednowymiarowe wektory dla zmiennych podstawowych \mathbf{u}_t^i oraz funkcji próbkowych \mathbf{u}^{*i} :

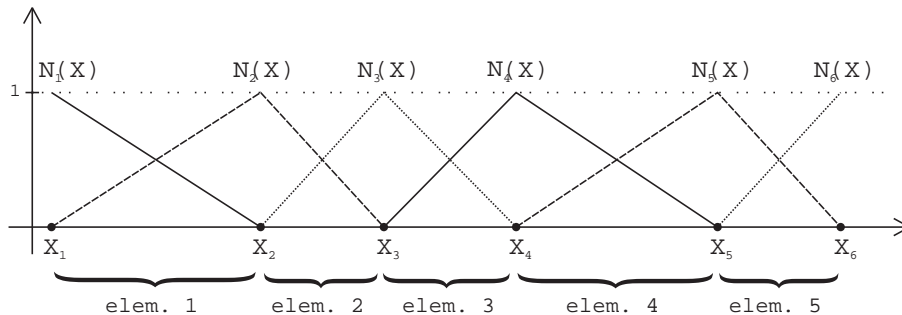
$$\begin{aligned} (u_t^1, u_t^2, u_t^3) &= \mathbf{u}_t^1, & (u_t^4, u_t^5, u_t^6) &= \mathbf{u}_t^2, & \dots, & (u_t^{M-2}, u_t^{M-1}, u_t^M) &= \mathbf{u}_t^{M/3} \\ (u^{*1}, u^{*2}, u^{*3}) &= \mathbf{u}^{*1}, & (u^{*4}, u^{*5}, u^{*6}) &= \mathbf{u}^{*2}, & \dots, & (u^{*M-2}, u^{*M-1}, u^{*M}) &= \mathbf{u}^{*M/3} \end{aligned} \quad (3.5)$$

oraz odpowiadający im wektor elementów bazy

$$\mathbf{N} = \left((N_1, 0, 0), (0, N_1, 0), (0, 0, N_1), (N_2, 0, 0), \dots, (N_{M/3}, 0, 0), (0, N_{M/3}, 0), (0, 0, N_{M/3}) \right).$$

¹*Prawie wszędzie* – wszędzie poza zbiorem miary zero.

Wymiar przestrzeni \mathcal{C}_t^h i \mathcal{V}^h jest zatem równy rozmiarowi wektora u_t^i , który – przed uwzględnieniem przemieszczeniowych warunków brzegowych – określa liczbę *stopni swobody* zdyskretyzowanego zadania. Liczbę tę oznaczmy przez M . Wprowadzenie przemieszczeniowych warunków brzegowych, w najprostszej postaci prowadzi do ustalenia wartości przemieszczeń dla konkretnych stopni swobody oraz do wyeliminowania z układu równań 3.9 równań związanych z tymi stopniami swobody. Dla przejrzystości zapisu, w dalszej części niniejszego rozdziału nie będą uwzględniane przemieszczeniowe warunki brzegowe.



Rysunek 3.1.1: Funkcje kształtu i podział na elementy skończone. Przypadek 1D.

Zdyskretyzowany odpowiednik postaci słabej (2.12) jest zagadnieniem sprowadzającym się do znalezienia takich $\mathbf{u}_t^h \in \mathcal{C}_t^h$, że dla każdej funkcji próbkowej $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}^h$ spełnione jest równanie

$$\int_{\Omega_0^h} (\text{Grad } \mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{S}^T(\mathbf{u}_t^h) d\Omega - \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Gamma_\tau^h} \mathbf{u}^* \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0. \quad (3.6)$$

Wobec faktu, że wymiar przestrzeni \mathcal{V}^h jest równy M , powyższe zagadnienie jest równoważne układowi M równań. Dobierając funkcje próbkowe tak, aby dokładnie jedna składowa u^i miała wartość 1 podczas gdy pozostałe były równe zero, otrzymujemy układ M równań skalarnych:

$$R_k = \int_{\Omega_0^h} (\text{Grad } \mathbf{N}_k) \cdot \mathbf{S}^T(\sum_l \mathbf{N}_l u_t^l) d\Omega + \int_{\Omega_0^h} -\rho_0 \mathbf{N}_k \cdot \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_\tau^h} -\mathbf{N}_k \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

dla $k = \{1, \dots, M\}$. Wektor $\mathbf{R}(\mathbf{u}_i, \mathbf{X}_i, t)$ nosi nazwę *wektora rezydualnego*, a warunek zerowania się tego wektora odpowiada równowadze (uogólnionych) sił węzłowych. We wzorze (3.7) skorzystano z definicji

$$\mathbf{u}_t^h = \sum_{k=1}^M \mathbf{N}_k u_t^k$$

wyrażającej zależność ciągłego (przybliżonego) pola przemieszczeń od dyskretnych wartości węzłowych. W przypadku, stosowanego w niniejszej pracy, sformułowania izoparametrycznego podobny wzór obowiązuje również dla położenia początkowych,

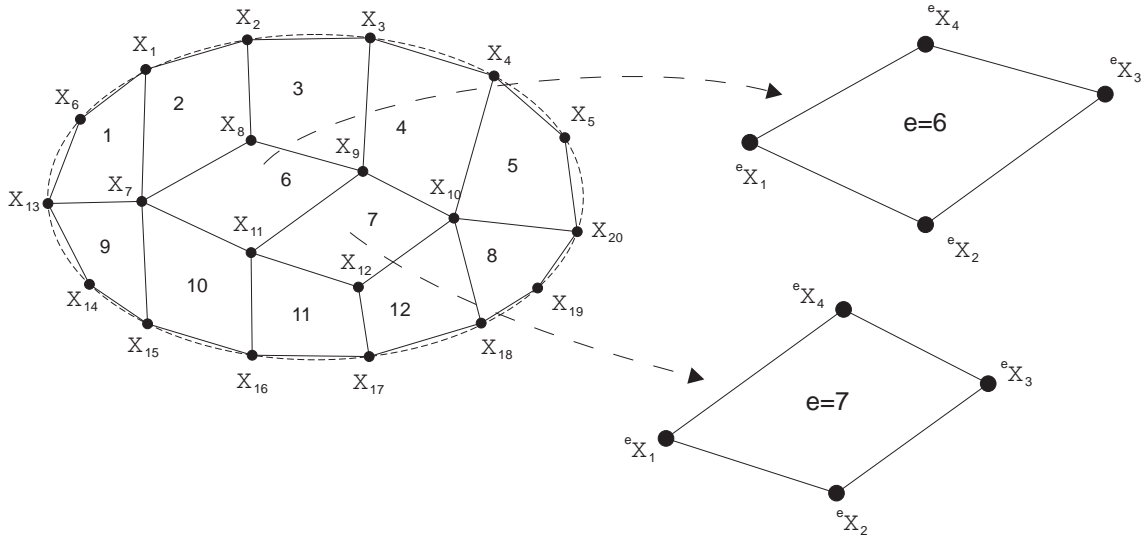
$$\mathbf{X}^h = \sum_{k=1}^M \mathbf{N}_k X^k,$$

gdzie X^k jest wektorem składowych położenia węzłów \mathbf{X}_i (analogicznie do (3.5)).

Wybór odpowiednich funkcji kształtu (por. rys. 3.1.1) pozwala na podział obszaru Ω_0^h oraz brzegu Γ_0^h na minimalne podobszary ${}^e\Omega_0$ i ${}^e\Gamma_0$ ograniczone przez węzły ${}^e\mathbf{X}_i$ takie, że do wyznaczenia całki po takim podobszarze potrzebne są tylko wielkości ${}^e\mathbf{u}_t^i$ oraz ${}^e\mathbf{X}_i$ (funkcje kształtu związane z pozostałymi węzłami są równe zero). Jest to równoważne wymaganiu, aby zachodziły równości:

$$\begin{aligned} \forall_{\mathbf{X} \in {}^e\Omega_0} \quad \mathbf{u}_t^h &= \sum_{k=1}^M \mathbf{N}_k u_t^k = \sum_{k=1}^{{}^eK} {}^e\mathbf{N}_k {}^e u_t^k = {}^e\mathbf{u}_t^h \\ \forall_{\mathbf{X} \in {}^e\Omega_0} \quad \mathbf{X}^h &= \sum_{k=1}^M \mathbf{N}_k X^k = \sum_{k=1}^{{}^eK} {}^e\mathbf{N}_k {}^e X^k = {}^e\mathbf{X}^h \end{aligned}$$

gdzie eK oznacza liczbę stopni swobody związanych z wektorem ${}^e u_t^k$. Określone w ten sposób podobszary nazwiemy *elementami* (elementami skończonymi). Symbol e po lewej stronie poszczególnych wielkości oznacza fakt, że jest to wielkość związana z elementem i że stosuje się indeksy lokalne. Równania (3.7) można teraz przedstawić



Rysunek 3.1.2: Podział obszaru na siatkę elementów czterowęzłowych.

jako sumy całek wyznaczone w poszczególnych elementach:

$$\mathbf{R}_k = \sum_{e=1}^{N_V} \int_{{}^e\Omega_0} \left((\text{Grad } \mathbf{N}_k) \cdot \mathbf{S}^T({}^e\mathbf{u}_t^h) - \rho_0 \mathbf{N}_k \cdot \mathbf{B} \right) d\Omega + \sum_{e=N_V+1}^{N_V+N_S} \int_{{}^e\Gamma_\tau} -\mathbf{N}_k \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0, \quad (3.8)$$

gdzie N_V i N_S oznaczają odpowiednio liczbę elementów objętościowych oraz liczbę elementów powierzchniowych.

W powyższych równaniach, najkosztowniejsze numerycznie są operacje wyznaczania wielkości $\mathbf{S}({}^e\mathbf{u}_t^h)$, \mathbf{B} oraz $\bar{\mathbf{T}}$. Bezpośrednie wykorzystanie wzoru (3.8) powodowałoby konieczność wielokrotnego ich obliczania. Dlatego też, zamiast obliczać każdą składową siłę węzłową \mathbf{R}_k z osobna, przeprowadza się obliczenia dla kolejnych elementów, co daje możliwość wykonania kosztownych obliczeń tylko jeden raz. Wyznaczone na poziomie każdego elementu wielkości ${}^e\mathbf{R}_m$ stanowią wkład do globalnego wektora \mathbf{R}_k .

Wzór (3.8) przybiera wtedy postać

$$\mathbf{R} = \sum_{e=1}^{N_V+N_S} {}^e\mathbf{L} {}^e\mathbf{R}, \quad (3.9)$$

gdzie

$${}^e\mathbf{R}_m = \begin{cases} \int_{e\Omega_0} [\text{Grad } {}^e\mathbf{N}_m \cdot \mathbf{S}^T({}^e\mathbf{u}_t^h) - \rho_0 {}^e\mathbf{N}_m \cdot \mathbf{B}] d\Omega & \text{dla } e \leq N_V \\ \int_{e\Gamma_r} -{}^e\mathbf{N}_m \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma & \text{w p.p.} \end{cases} \quad (3.10)$$

są wkładami z każdego elementu do globalnego wektora sił węzłowych \mathbf{R}_k . Macierz ${}^e\mathbf{L}^m$ o wymiarach $(M \times {}^eK)$ transformuje (dla każdego elementu e) jego lokalne indeksy do indeksów globalnych.

Wyznaczenie wkładów ${}^e\mathbf{R}$ niezależnie w każdym elemencie jest charakterystyczną cechą Metody Elementów Skończonych, natomiast obliczanie lokalnego wektora ${}^e\mathbf{R}$ stanowi jedną z podstawowych procedur realizowanych na poziomie elementu. W dalszej części pracy skoncentrowano się zatem na wyznaczeniu wektora ${}^e\mathbf{R}$ na poziomie elementu w oparciu o lokalne wektory ${}^e\mathbf{X}^m$, ${}^e\mathbf{u}_t^m$, ${}^e\mathbf{N}_m$.

Całkowanie zdyskretyzowanych równań równowagi

Zazwyczaj niemożliwe jest analityczne wyznaczenie całek w równaniach (3.10). Stosuje się zatem *kwadratury*, które są metodą przybliżoną, polegającą na zamianie całki po obszarze na pewną skończoną sumę, bazującą na wartościach funkcji w wybranych punktach obszaru. Standardowym podejściem jest zastosowanie *kwadratur Gaussa* (Jankowska i Jankowski, 1981), charakteryzujących się odpowiednim doбором punktów całkowania ${}^e\tilde{\mathbf{X}}^g$ oraz związanych z nimi wag ${}^e\omega^g$.

Przyjmując 8 punktów całkowania dla trójwymiarowego, triliniowego elementu objętościowego oraz 4 punkty całkowania dla biliniowego elementu powierzchniowego, wzór (3.10) sprowadzony zostaje do następującej postaci:

$${}^e\mathbf{R}_m = \begin{cases} \sum_{g=0}^8 {}^e\omega^g [\text{Grad } {}^e\mathbf{N}_m^g \cdot \mathbf{S}^T({}^e\mathbf{u}_t^h({}^e\tilde{\mathbf{X}}^g)) - \rho_0 {}^e\mathbf{N}_m^g \cdot \mathbf{B}^g] & \text{dla } e \leq N_V, \\ \sum_{g=0}^4 {}^e\omega^g [{}^e\mathbf{N}_m^g \cdot \bar{\mathbf{T}}^g] & \text{w p.p.,} \end{cases} \quad (3.11)$$

gdzie

$${}^e\mathbf{N}_m^g = {}^e\mathbf{N}_m({}^e\tilde{\mathbf{X}}^g), \quad \mathbf{B}^g = \mathbf{B}({}^e\tilde{\mathbf{X}}^g), \quad \bar{\mathbf{T}}^g = \bar{\mathbf{T}}({}^e\tilde{\mathbf{X}}^g).$$

Warto wspomnieć, że powyższe sformułowanie odnosi się do najprostszych, przemieszczeniowych elementów bi- oraz triliniowych. Ze względu na niekorzystne efekty numeryczne (np. blokowanie – *volumetric locking*, *shear locking*) w praktyce stosuje się bardziej zaawansowane sformułowania (*enhanced strain* (Simo i in., 1993), *F-bar* (de Souza Neto i in., 1996), *selective reduced integration*, sformułowania mieszane, i in.).

3.1.2. Schemat całkowania po czasie

Zagadnienia rozpatrywane w niniejszej pracy należą do klasy zagadnień quasi-statycznych, niezależnych od skali czasu. W ogólności, znalezienie rozwiązania w chwili t_k wymaga znajomości dotychczasowych trajektorii przemieszczeń węzłowych \mathbf{u}_t (zależność od ścieżki całkowania po czasie).

W niniejszej pracy stosowany jest algorytm kroczący (por. Kleiber, 1989), który bazuje na dyskretyzacji czasu, czyli podziale przedziału czasu $[0, T]$ na mniejsze fragmenty

$$\mathbb{I} = [0, T] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}]$$

oraz wyznaczaniu, w schemacie niejawnym, rozwiązania równania (3.9) w chwilach t_n w oparciu o rozwiązania z poprzednich chwil czasu.

Założmy, że znamy rozwiązanie $\mathbf{u}_{t_{n-1}}$ w chwili t_{n-1} . Zdyskretyzowane równanie równowagi (3.9) dla chwili t_n można zapisać następująco:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, t_n) = \mathbf{0}, \quad (3.12)$$

gdzie niewiadomymi są elementy wektora \mathbf{u}_{t_n} .

Dla konkretnego schematu całkowania po czasie istotne jest określenie przybliżenia dla wektora prędkości. W niniejszej pracy stosowany jest schemat niejawny, dlatego owo przybliżenie jest funkcją wektorów przemieszczeń aktualnych \mathbf{u}_{t_n} (które są niewiadomymi) oraz przemieszczeń z poprzedniego kroku czasowego $\mathbf{u}_{t_{n-1}}$. Odpowiednie zależności dla przypadku zregulowanych członów kontaktowych zostaną podane w rozdziałach 3.2.2 oraz 6.2.2.

3.1.3. Metoda Newtona-Raphsona

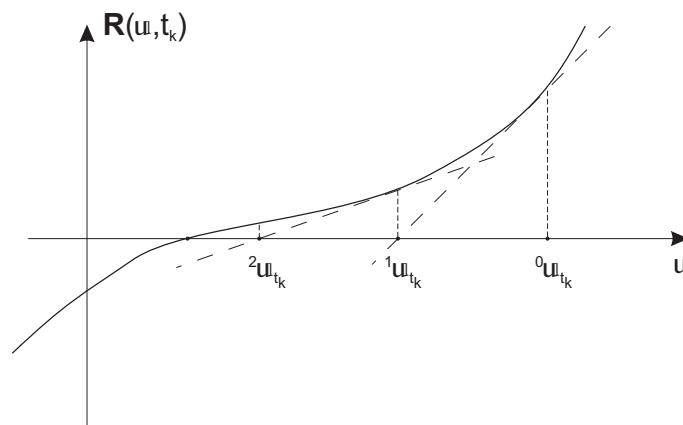
Układ równań (3.12) wyraża warunek równowagi sił węzłowych dla zagadnienia (2.12) zdyskretyzowanego przestrzennie i czasowo. Zależność residuum \mathbf{R} od szukanego wektora przemieszczeń węzłowych \mathbf{u}_{t_k} ma (poza najprostszymi przypadkami liniowej sprzężystości) charakter nieliniowy. W większości przypadków nie istnieją algebraiczne metody znajdowania rozwiązań dla takich układów, stosowane są zatem metody przybliżone.

W niniejszej pracy została użyta *metoda Newtona-Raphsona* – jedna z popularniejszych metod przybliżonego rozwiązywania nieliniowych układów równań. Metoda jest wielowymiarowym odpowiednikiem metody stycznych Newtona (por. rys. 3.1.3), gdzie w miejsce modułu stycznego obliczana jest konsystentna macierz styczna \mathbf{K} będąca pełną pochodną wektora sił węzłowych \mathbf{R} po stopniach swobody zadania, natomiast obliczanie kolejnego przybliżenia wiąże się z rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{t_n} &:= -\mathbf{K}^{(j-1)}(\mathbf{u}_{t_n})^{-1} \mathbf{R}^{(j-1)}(\mathbf{u}_{t_n}) \\ {}^{(j)}\mathbf{u}_{t_n} &:= {}^{(j-1)}\mathbf{u}_{t_n} + \Delta \mathbf{u}_{t_n}, \end{aligned}$$

gdzie indeks po lewej stronie zmiennej oznacza numer iteracji.

W ramce 3.1.1 przedstawiono zarys algorytmu. Zwróćmy uwagę, że na każdym kroku iteracyjnym wyznaczana jest macierz styczna \mathbf{K} oraz rozwiązywany jest związany z nią układ równań liniowych. Obie te operacje stanowią o wysokim koszcie numerycznym



Rysunek 3.1.3: Ilustracja metody Newtona-Raphsona.

metody. Zaletą metody jest granicznie kwadratowa zbieżność. Istotny jest fakt, że podobnie jak w przypadku wektora rezydualnego, również macierz styczną można wyznaczyć odwołując się niezależnie do poszczególnych elementów (por. rozdz. 5.1.2, 6.1.2). Dodatkową zaletą stosowania konsystentnej macierzy stycznej jest jej wykorzystanie do, używanej w niniejszej pracy, metody obliczania problemu wrażliwości (rozd. 4).

$\mathbf{u}_{t_{n-1}}$ – rozwiązanie w poprzednim kroku czasowym

${}^0\mathbf{u}_{t_n} := \mathbf{u}_{t_{n-1}}$ – punkt startowy procedury iteracyjnej

$j := 0$

Powtarzaj:

$j := j + 1$

$$\mathbf{R} := \sum_{e=1}^{N_V+N_S} {}^e\mathbf{L} {}^e\mathbf{R}({}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, t_n)$$

$$\mathbf{K} := \sum_{e=1}^{N_V+N_S} {}^e\mathbf{L} \frac{\partial {}^e\mathbf{R}}{\partial {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}}$$

$$\Delta \mathbf{u} := -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}$$

$${}^j\mathbf{u}_{t_n} := {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n} + \Delta \mathbf{u}$$

dopóki $\|\Delta \mathbf{u}\| > \varepsilon_u$ lub $\|\mathbf{R}\| > \varepsilon_R$

$\mathbf{u}_{t_n} := {}^j\mathbf{u}_{t_n}$

Ramka 3.1.1: Metoda Newtona-Raphsona.

3.1.4. Schemat rozwiązywania Metodą Elementów Skończonych

W ramce 3.1.2 przedstawiony jest schemat rozwiązywania zdyskretyzowanego zagadnienia (2.12), bazujący na algorytmie kroczącym po czasie (rozd. 3.1.2) oraz na iteracyjnej metodzie Newtona-Raphsona (rozd. 3.1.3). Po fazie inicjalizacji danych, dla kolejnych kroków czasowych i , wykonywana jest pętla metody Newtona-Raphsona.

W rzeczywistości schemat rozwiązywania jest bardziej rozbudowany – umożliwia między innymi skracanie kroku czasowego w przypadku braku zbieżności oraz zawiera algorytm oszacowywania, na podstawie warunków brzegowych, wartości ${}^0\mathbf{u}_{t_n}$ dla kolejnych kroków czasowych (Korelc, 2008).

Inicjalizacja

$$\mathbf{u}_{t_0} := \mathbf{0}$$

Dla $n \in \{1, \dots, N\}$ wykonaj:

$${}^0\mathbf{u}_{t_n} := \mathbf{u}_{t_{n-1}}$$

$$j := 0$$

Powtarzaj:

$$j := j + 1$$

$$\mathbf{R} := \sum_{e=1}^{N_V+N_S} {}^e\mathbf{L} {}^e\mathbf{R}({}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, t_n)$$

$$\mathbf{K} := \sum_{e=1}^{N_V+N_S} {}^e\mathbf{L} \frac{\partial {}^e\mathbf{R}}{\partial {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}}$$

$$\Delta\mathbf{u} := -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}$$

$${}^j\mathbf{u}_{t_n} := {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n} + \Delta\mathbf{u}$$

dopóki $\|\Delta\mathbf{u}\| > \varepsilon_u$ lub $\|\mathbf{R}\| > \varepsilon_R$

$$\mathbf{u}_{t_n} := {}^j\mathbf{u}_{t_n}$$

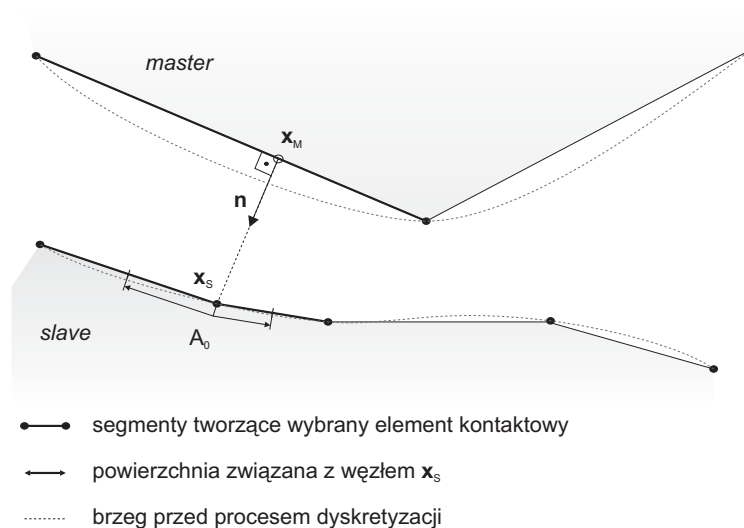
Ramka 3.1.2: Schemat analizy MES dla zagadnienia (2.12).

3.2. Zagadnienie kontaktowe

Zastosowanie Metody Elementów Skończonych do zagadnień kontaktowych wymaga dodatkowych zabiegów w porównaniu do schematu przedstawionego w poprzednim podrozdziale (por. Laursen, 2002; Wriggers, 2002). W podrozdziale 3.2.1 zostanie wprowadzone pojęcie elementu kontaktowego oraz poruszone będą niektóre aspekty związane z dyskretyzacją przestrzenną. W podrozdziale 3.2.2 zostanie omówiony biliniowy element kontaktowy.

3.2.1. Dyskretyzacja

Postać słaba zregulowanego zagadnienia kontaktowego (2.37) składa się, oprócz całek po objętości każdego z kontaktujących się ciał, również z całek po powierzchni kontaktowej ciała *slave* wyrażających warunki kontaktowe. Dyskretyzacja tych równań wymaga określenia skończenie-wymiarowych odpowiedników dla przestrzeni rozwiązań \mathcal{C}_t , \mathcal{C}_λ oraz przestrzeni wariacji \mathcal{V}_u , \mathcal{V}_λ . Powoduje to podział na elementy skończone zarówno objętościowe jak i powierzchniowe – w tym kontaktowe (por. rys. 3.2.1).



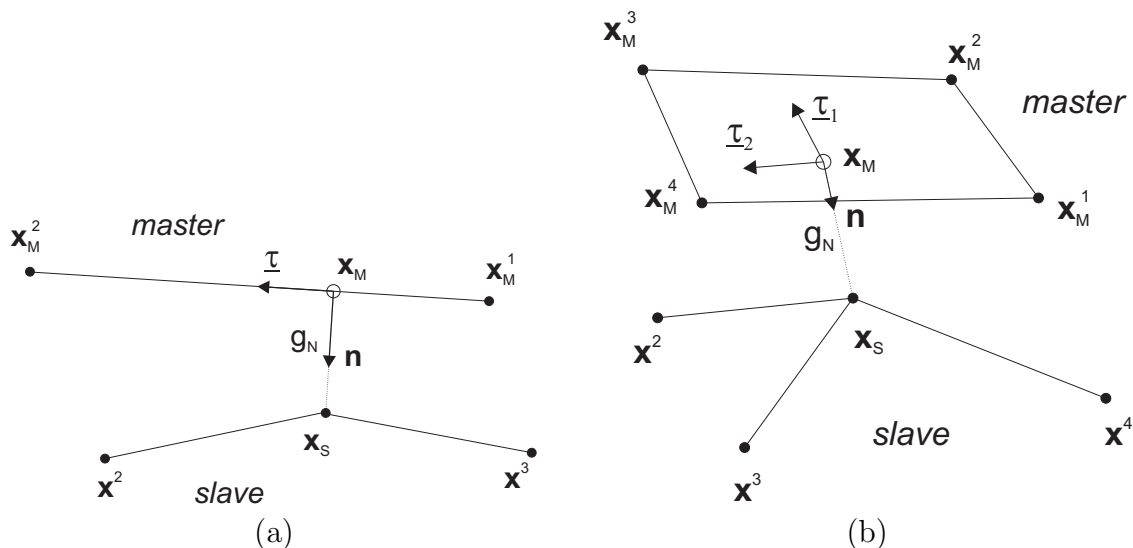
Rysunek 3.2.1: Schemat dyskretyzacji powierzchni kontaktowej. Zaznaczono wybrany element kontaktowy oraz pole powierzchni A_0 związane z całkowaniem w węźle x_s .

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na kilka aspektów charakterystycznych dla zagadnień kontaktowych:

1. Wyznaczenie wkładu elementu kontaktowego do wektora \mathbf{R} i macierzy \mathbf{K} wymaga wykonania rzutu ortogonalnego z punktu całkowania (węzeł *slave*) na powierzchnię *master*. Dany element kontaktowy musi zatem zawierać odpowiedni zbiór węzłów (parę kontaktową) umożliwiającą znalezienie punktu rzutowania. W trakcie analizy ciała się deformują i przemieszczają względem siebie co powoduje, że powiązania par kontaktowych muszą ulec zmianie (por. rozdz. 5.2).
2. Dyskretyzacja powoduje, że powierzchnia *master* ma niską regularność (np. kawałkami liniowa/biliniowa). W konsekwencji można się spodziewać, że dla pewnych konfiguracji nie będzie możliwe wykonanie rzutu prostopadłego z danego punktu *slave*. Jednym z rozwiązań tego problemu jest zastosowanie gładkiej parametryzacji powierzchni *master*, co zostało przedstawione w podrozdziale 3.3.
3. Zastosowanie kwadratur do całkowania wyrażeń kontaktowych wiąże się z odpowiednim wyborem punktów całkowania. W niniejszej pracy zastosowano podejście *node-to-segment* oraz całkowanie w punktach węzłowych co powoduje, że warunki kontaktowe spełnione są dokładnie tylko dla węzłów – pozostałe punkty powierzchni *slave* mogą penetrować ciało *master*. Między innymi dlatego, przy stosowaniu podejścia *node-to-segment*, strona *slave* jest zazwyczaj gęściej dyskretyzowana.
4. Przybliżone całkowanie wiąże się z potrzebą wyznaczenia pola powierzchni A_0 związanej z danym węzłem. Dlatego też w elemencie kontaktowym oprócz węzła *slave* znajdują się również jego bezpośredni sąsiedzi (por. rys. 3.2.1 oraz artykuł Stupkiewicza, 2001).

3.2.2. Element biliniowy

Zdyskretyzowany problem kontaktowy pozwala na wydzielenie elementu kontaktowego jako minimalnego podzbioru węzłów, który w sposób autonomiczny (tzn. niezależny od wartości węzłowych spoza elementu) umożliwia policzenie wkładu do wektora \mathbf{R} i macierzy \mathbf{K} . W zastosowanym w niniejszej pracy podejściu *master-slave*, element kontaktowy jest na stałe powiązany ze stroną *slave* zatem węzły odpowiadające tej stronie nie zmieniają się. W trakcie analizy mogą się natomiast zmieniać węzły odpowiadające stronie *master*.



Rysunek 3.2.2: Schemat elementów kontaktowych: (a) element 2D dla parametryzacji liniowej, (b) element 3D dla parametryzacji biliniowej.

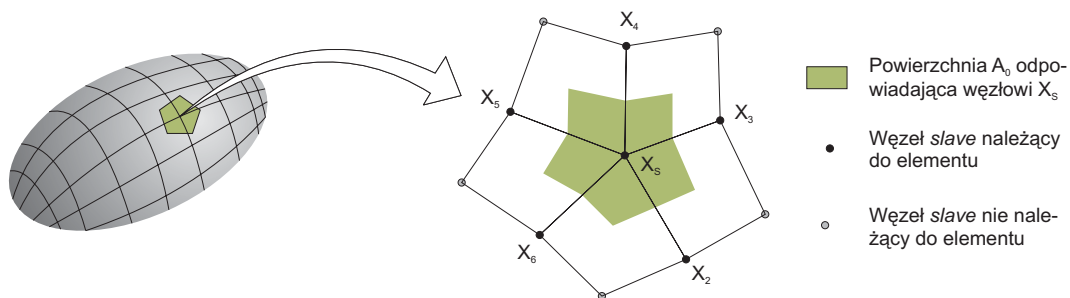
Dla ustalenia uwagi zostaną wprowadzone pewne założenia. Po pierwsze rozpatrywany będzie przypadek 3D, gdyż jest ogólniejszy i jego szczególnym (prostszy) przypadkiem jest zagadnienie dwuwymiarowe. Drugie założenie polega na tym, że ciało *master* jest zdyskretyzowane elementami ośmiowęzłowymi (sześciennymi), czyli że jego powierzchnia składa się z (w ogólności nieplanarnych) czworoboków. Owe elementy ośmiowęzłowe są wynikiem dyskretyzacji przy pomocy kawałkami trzyliniowych funkcji kształtu, czego naturalną konsekwencją jest przyjęcie kawałkami biliniowej parametryzacji powierzchni *master*.

Część elementu kontaktowego dotycząca strony *slave* będzie zawierać jeden węzeł – w którym będziemy liczyć kwadraturę Lobatto – oraz sąsiadujące z nim węzły (trzy lub więcej) potrzebne do wyznaczenia pola powierzchni A_0 (por. rys. 3.2.3).

W danym elemencie kontaktowym, z każdym węzłem o ustalonym położeniu początkowym \mathbf{X}^i powiązane jest jego przemieszczenie \mathbf{u}^i tak, że aktualne położenie węzła można zapisać wzorem $\mathbf{x}^i = \mathbf{X}^i + \mathbf{u}^i$. Dodatkowo, węzeł $\mathbf{X}_S \equiv \mathbf{X}^1$ ma przypisane trzy stopnie swobody w postaci mnożnika Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda}$ (por. 2.2.5). Węzły związane ze stroną *master* będą indeksowane jako $\mathbf{X}_M^1, \mathbf{X}_M^2, \dots$

Parametryzacja powierzchni kontaktowej

Stosowane w niniejszej pracy podejście *master-slave* charakteryzuje się tym, że powierzchnie pary kontaktowej traktowane są w różny sposób. Dany punkt leżący na po-



Rysunek 3.2.3: Wycinek brzegu ciała *slave*. Zaznaczono węzły *slave* należące do elementu kontaktowego związanego z węzłem \mathbf{X}_S , oraz powierzchnię A_0 związaną z tym elementem.

wierzchni *slave* jest rzutowany na sparametryzowaną powierzchnię *master*, co pozwala wyrazić kontaktowe zmienne kinematyczne (g_N i \mathbf{v}_T) za pomocą wielkości związanych z bazą styczną, zaczepioną w punkcie rzutowania. Proces dyskretyzacji ciał *slave* i *master* powoduje, że ich powierzchnia przestaje ściśle odzwierciedlać rzeczywisty brzeg ciał. Najbardziej naturalnym podejściem określenia rzutowania w przypadku dyskretnym jest przyjęcie, że parametryzacja Ψ stosowana w części kontaktowej zagadnienia (2.35), pokrywa się z brzegiem zdyskretyzowanych ciał *slave* i *master*. Zakładając dodatkowo, że przekształcenie zastosowane do dyskretyzacji obszaru jest kawałkami trzyliniowe, to brzeg tak powstałego zbioru jest kawałkami biliniowy. Z uwagi na prostą postać takiej parametryzacji i na fakt, że sposób parametryzacji jest w dużej mierze niezależny od pozostałych części procedury elementu kontaktowego, zostanie ona wykorzystana w niniejszym podrozdziale.

Na podstawie aktualnego położenia węzłów *master* (tworzących nieplanarny czworobok), płat powierzchni biliniowej można wyznaczyć następująco:

$$\mathbf{x}_M \equiv \Psi(\mathbf{x}_M^i, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4} (1 - \xi^1, 1 + \xi^1) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_M^1 & \mathbf{x}_M^2 \\ \mathbf{x}_M^3 & \mathbf{x}_M^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \xi^2 \\ 1 + \xi^2 \end{pmatrix}$$

gdzie $\boldsymbol{\xi} \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ jest wektorem parametrów funkcji Ψ (parametryzacji płata powierzchni), natomiast $\mathbf{x}_M^i = \mathbf{X}_M^i + \mathbf{u}_M^i$ są aktualnymi położeniami węzłów.

Lokalny układ bazowy

W stosowanym w niniejszej pracy podejściu, opis ruchu związany jest z lokalnym układem bazowym $(\boldsymbol{\tau}_\alpha, \mathbf{n})$. Ów układ bazowy oraz określone w nim zmienne kinematyczne są ściśle związane z wyborem konkretnej funkcji odległości, bazującej na rzucie prostopadłym punktu *slave* na powierzchnię *master*. W ogólności, taki rzut może być przedstawiony w sposób niejawni jako rozwiązanie nieliniowego układu równań²

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}; g_N) \equiv \mathbf{x}_M(\mathbf{x}_M^i, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{x}_S + \mathbf{n} g_N = \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

gdzie

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|}, \quad \boldsymbol{\tau}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{x}_M}{\partial \xi^\alpha} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\alpha},$$

²W niektórych przypadkach (np. segmenty dwuwymiarowe i kawałkami liniowe) można określić rzut w sposób jawny.

oznaczają, odpowiednio: normalną do powierzchni oraz wektory styczne. Ta trójka wektorów tworzy bazę lokalną, wyznaczoną w punkcie $\mathbf{x}_M \equiv \Psi(\boldsymbol{\xi})$. Wielkość g_N odpowiada funkcji odległości (2.16), natomiast \mathbf{x}_S jest położeniem węzła *slave*. W celu rozwiązania powyższego układu równań stosowana jest metoda Newtona. Zarys algorytmu, wykorzystujący oznaczenia $\mathbf{b} \equiv (\xi^1, \xi^2, g_N)$ oraz $\mathbf{H}(\mathbf{b}) \equiv \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}, g_N)$, został przedstawiony w ramce 3.2.1.

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{b} &:= (0, 0, 0) \\ i &:= 0 \\ \text{powtarzaj:} \\ &\quad i := i + 1 \\ \mathbf{M} &:= \frac{\partial \mathbf{H}({}^{i-1}\mathbf{b})}{\partial {}^{i-1}\mathbf{b}} \\ \Delta \mathbf{b} &:= -(\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{H}({}^{i-1}\mathbf{b}) \\ {}^i\mathbf{b} &:= {}^{i-1}\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} \\ \text{dopóki } \|\Delta \mathbf{b}\| &> \varepsilon \text{ oraz } i < i_{max} \\ \bar{\boldsymbol{\xi}} &:= ({}^i\mathbf{b}^1, {}^i\mathbf{b}^2) \\ g_N &:= {}^i\mathbf{b}^3 \end{aligned}$$

Ramka 3.2.1: Algorytm znajdowania rzutu ortogonalnego.

Wyznaczanie drogi poślizgu $\Delta \mathbf{g}_T$

W zregulowanej postaci zagadnienia kontaktowego, przedstawionej w podrozdziale 2.2.5, występuje wielkość $\Delta \mathbf{g}_T$, która odpowiada przyrostowi drogi poślizgu. Zastosowanie dyskretyzacji i przyjęcie konkretnego schematu całkowania po czasie wymaga również odpowiedniego zdefiniowania tej wielkości, czym bliżej zajęto się w podrozdziale 6.2.2. W tym miejscu założymy jedynie, że $\Delta \mathbf{g}_T$ będzie funkcją przemieszczeń aktualnych oraz przemieszczeń z poprzedniego kroku czasowego. Dodatkowo zakładamy, że $\Delta \mathbf{g}_T$ jest styczne do aktualnej powierzchni *master*, oraz że

$$\Delta \mathbf{g}_T \rightarrow \mathbf{0}, \quad \text{dla } \Delta t_k = (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0^+.$$

Obliczenie wektora rezydualnego \mathbf{R} i macierzy stycznej \mathbf{K}

Całki powierzchniowe po powierzchni kontaktowej występujące w równaniu (2.35) bazują na wyrażeniach zdefiniowanych przez równania (2.38)–(2.41). Przedstawiony w niniejszym podrozdziale proces dyskretyzacji umożliwia określenie dyskretnych odpowiedników dla tych wyrażeń. Konkretna ich postać zależy od wyboru parametryzacji powierzchni *master* oraz od wyboru schematu całkowania po czasie i związanej z tym definicji członu $\Delta \mathbf{g}_T = \Delta \bar{\xi}^\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha$ (por. rozdz. 6.2.2).

Trudność może stanowić określenie dyskretniej wersji członów g_N^* oraz $\bar{\xi}^{\alpha*}$ z równania (2.35), które trzeba wyrazić jako funkcje wariacji zmiennych podstawowych $\mathbf{u}^*{}^i$. Korzystając ze wzorów (2.30)–(2.31)) dla kontynualnych odpowiedników tych wyrażeń

i w oparciu o wynik z pracy Laursena i Simo (1993), użyto następujących definicji:

$$\begin{aligned} g_N^* &= (\mathbf{x}_S^* - \mathbf{x}_M^*) \cdot \mathbf{n}, \\ \bar{\xi}^\alpha &= (\mathbf{x}_S^* - \mathbf{x}_M^*) \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_S^* &= \mathbf{u}_S^* = \mathbf{u}^{*1} \\ \mathbf{x}_M^* &= \sum_i \mathbf{u}^i \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{x}_M(\mathbf{x}_M^i, \bar{\xi})}{\partial \mathbf{u}^i} \right|_{\xi^\alpha = \text{const.}}. \end{aligned}$$

Dobór wektora funkcji próbkowych dla przemieszczeń w taki sposób, że zawsze dokładnie jedna składowa jest równa 1 podczas gdy pozostałe są równe zero, prowadzi do M niezależnych wariacji:

$$\begin{aligned} (g_N^*)_m &= ((\delta \mathbf{x}_S)_m - (\delta \mathbf{x}_M)_m) \cdot \mathbf{n}, \\ (\bar{\xi}^\alpha)_m &= ((\delta \mathbf{x}_S)_m - (\delta \mathbf{x}_M)_m) \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{x}_S)_m &= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u^m}, \\ (\delta \mathbf{x}_M)_m &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}_M}{\partial u^m} \right|_{\xi^\alpha = \text{const.}}, \end{aligned}$$

natomiast u^m są przemieszczeniowymi stopniami swobody.

Ostatecznie zapiszemy wkład danego elementu kontaktowego do residuum globalnego \mathbf{R} jako wektor złożony z części ${}^e\mathbf{R}_u$ i ${}^e\mathbf{R}_\lambda$:

$${}^e\mathbf{R} = [{}^e\mathbf{R}_u \quad {}^e\mathbf{R}_\lambda],$$

gdzie

$$\begin{aligned} ({}^eR_u)_m &= A_0 \left(T_N^{\text{eff}} (g_N^*)_m + T_{T_\alpha}^{\text{eff}} (\bar{\xi}^\alpha)_m \right), \\ {}^e\mathbf{R}_\lambda &= A_0 \left(g_{N_{\text{eff}}} \mathbf{n} + \Delta \bar{\xi}_{\text{eff}}^\alpha \boldsymbol{\tau}^\alpha \right). \end{aligned}$$

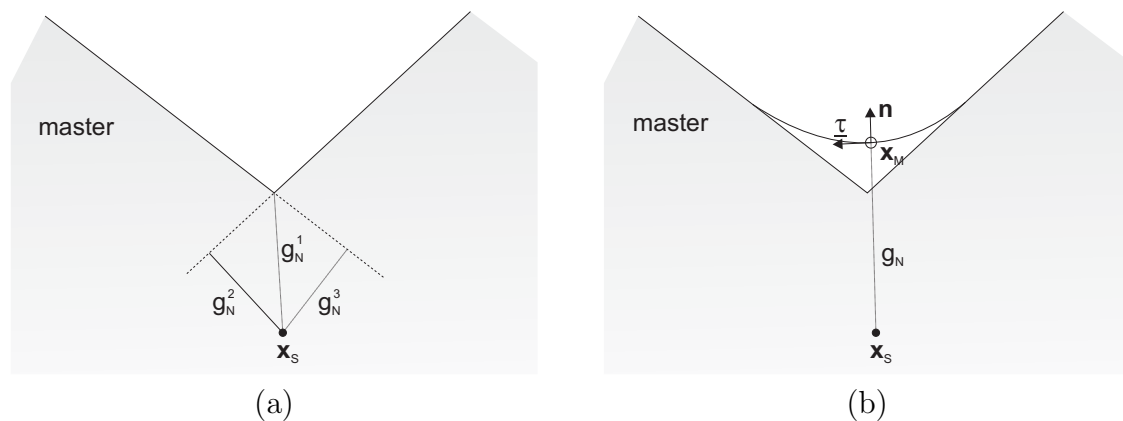
W powyższej definicji wykorzystano przybliżone całkowanie w punkcie węzłowym, gdzie A_0 jest polem powierzchni w konfiguracji początkowej związanym z węzłem *slave* (punktem całkowania). Dla przypadku 3D, wartość A_0 wyznacza się w sposób przybliżony, na podstawie iloczynów wektorowych między krawędziami wychodzącymi z węzła *slave*.

Wkład elementu do macierzy stycznej \mathbf{K} wyznaczany jest poprzez przeprowadzenie pełnej linearyzacji wektora ${}^e\mathbf{R}$ (zrózniczkowanie po wszystkich stopniach swobody w elemencie):

$${}^e\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial {}^e\mathbf{R}_u}{\partial {}^e\mathbf{u}} & \frac{\partial {}^e\mathbf{R}_u}{\partial {}^e\boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{\partial {}^e\mathbf{R}_\lambda}{\partial {}^e\mathbf{u}} & \frac{\partial {}^e\mathbf{R}_\lambda}{\partial {}^e\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}.$$

3.3. Wygładzanie kontaktu

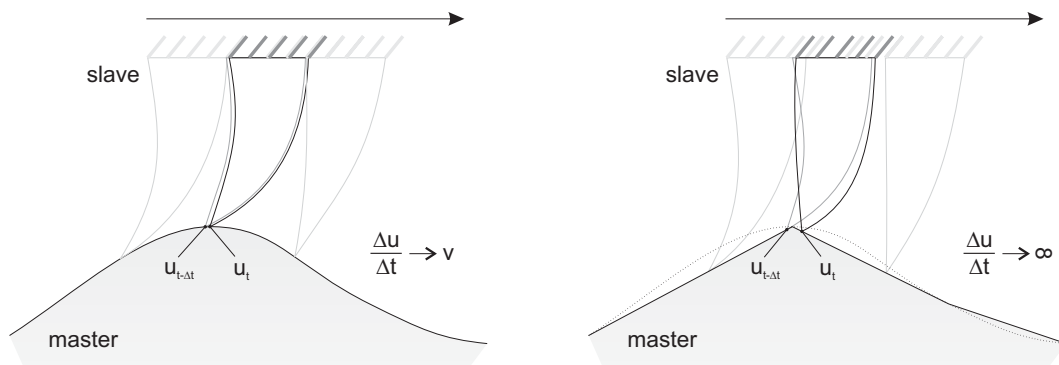
W podrozdziale 3.2.2 przedstawiono schemat elementu kontaktowego, w którym parametryzacja powierzchni *master* pokrywała się z brzegiem zdyskretyzowanego ciała. Taki wybór parametryzacji daje niską regularność powierzchni (powierzchnia kawałkami biliniowa jest klasy C^0), co prowadzi do trudności w uzyskaniu zbieżności procedury obliczeniowej. Dwa główne czynniki powodujące problemy to nieciągłość wektora normalnego do powierzchni oraz nieistnienie lub niejednoznaczność rozwiązania problemu rzutu prostopadłego (por. rys. 3.3.1). Właśnie bezpośrednią ich konsekwencją mogą być oscylacje lub brak rozwiązania procedury iteracyjnej. Na przykład zakładając, że rozwiązanie jest usytuowane w pobliżu naroża można się spodziewać, że – bez zastosowania specjalnych technik – w czasie iteracji siły kontaktowe będą się gwałtownie zmieniały uniemożliwiając zbieżność. Inny niekorzystny efekt może się pojawić gdy zagadnienie postawione w postaci kontynualnej jest quasi-statyczne, a w wyniku niedokładności dyskretyzacji powierzchni kontaktowej zatracą tę własność (por. rys. 3.3.2). Pominięcie członów dynamicznych daje wtedy nieciągłość rozwiązań względem czasu, co może prowadzić do braku zbieżności procedury iteracyjnej (por. Klarbring, 1990).



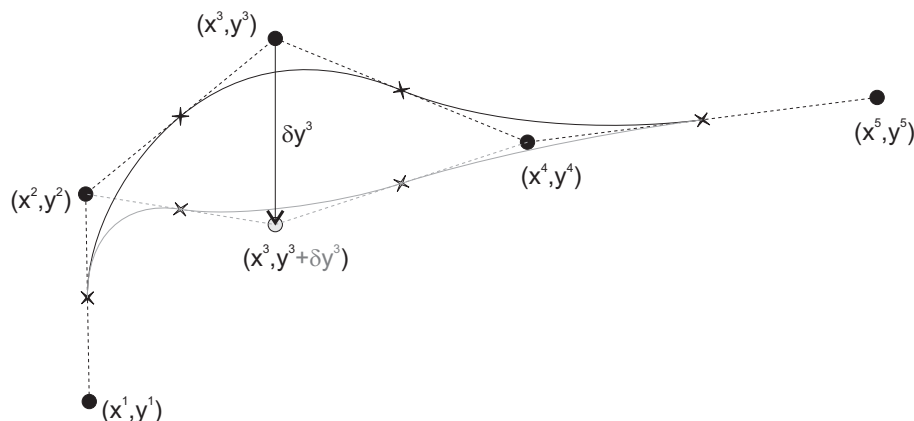
Rysunek 3.3.1: Problem znalezienia punktu rzutowania na powierzchnię *master* w narożniku i związany z tym problem znalezienia bazy lokalnej: (a) brak rozwiązania dla niegładkiej parametryzacji, (b) jednoznaczne rozwiązanie dla wygładzonej powierzchni *master*.

W celu zaradzenia powyższym problemom, w niniejszej pracy zastosowano wygładzanie kontaktu. Przez wygładzanie będziemy rozumieć stosowanie gładkiej parametryzacji powierzchni *master*. W ramach niniejszej pracy zaimplementowano szereg elementów kontaktowych, różniących się użytym rodzajem gładkiej parametryzacji. Użyto krzywych (w 2D) i powierzchni (w 3D) sklejanych, które mają tę korzystną własność, że modyfikacja położenia jednego punktu kontrolnego powoduje modyfikację krzywej (powierzchni) jedynie w ograniczonym zakresie (por. rys. 3.3.3).

W podrozdziale 3.3.1 wprowadzono parametryzacje wykorzystujące krzywe i płaty Bézier. W zagadnieniach trójwymiarowych, ich zastosowanie ograniczone jest do powierzchni pokrytych siatkami strukturalnymi. W podrozdziale 3.3.2 przedstawiono parametryzację wykorzystującą płaty Gregory'ego, którą można zastosować również w przypadku siatek niestructuralnych.



Rysunek 3.3.2: Problem quasi-statyczny po dyskretyzacji może tracić własność istnienia rozwiązań quasi-statycznych. Na rysunku pokazana możliwa nieciągłość rozwiązań względem czasu.



Rysunek 3.3.3: Wpływ wariacji przemieszczeń wzdłuż współrzędnej y^3 na kształt parametryzacji funkcją sklejaną. Widoczny jest lokalny charakter wpływu wariacji na krzywą.

3.3.1. Krzywe i płaty Bézier

Przypadek 2D

W przypadku dwuwymiarowym, parametryzację brzegu *master* można zdefiniować jako gładkie (klasy C^1) sklejenie następujących krzywych Bézier:

$$\Psi(\xi, \mathbf{d}^i) = \sum_{i=1}^4 B_3^i(\xi) \mathbf{d}^i, \quad (3.14)$$

gdzie \mathbf{d}^i są odpowiednio dobranymi punktami kontrolnymi, natomiast

$$B_n^i(\xi) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1} (\xi + 1)^{i-1} (\xi - 1)^{n+1-i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n+1\} \quad (3.15)$$

jest bazą wielomianową *Bernstein'a* stopnia n . Położenie punktów kontrolnych jest pewną (liniową) funkcją położenia węzłów *master*. Punkty dobiera się tak, aby zachować gładkość parametryzacji na całym brzegu ciała *master*. Ów wybór nie jest jednoznaczny. W niniejszej pracy rozpatrywane są dwa (spośród wielu) sposoby doboru punktów kontrolnych.

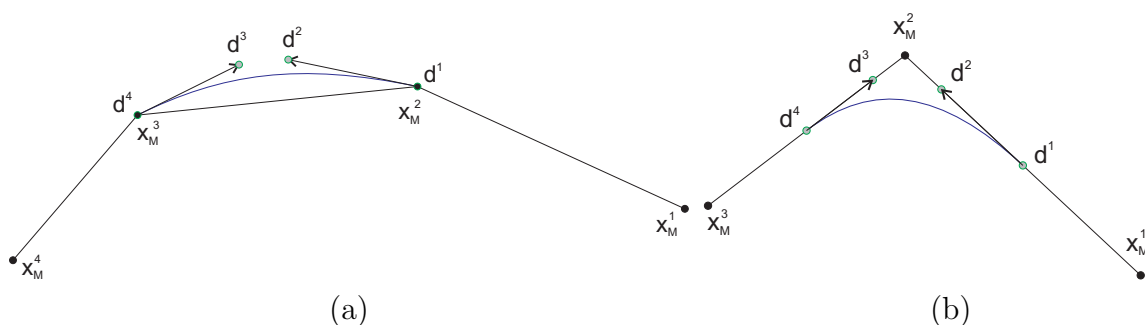
Pierwszy sposób określenia punktów kontrolnych (por. Pietrzak, 1997) wymaga czterech sąsiednich węzłów *master* (por. rys. 3.3.4(a)). Punkty kontrolne \mathbf{d}^i definiuje się wtedy następująco:

$$\mathbf{d}^1 = \mathbf{x}_M^2, \quad \mathbf{d}^2 = \mathbf{x}_M^2 + \alpha(\mathbf{x}_M^3 - \mathbf{x}_M^1), \quad (3.16)$$

$$\mathbf{d}^4 = \mathbf{x}_M^3, \quad \mathbf{d}^3 = \mathbf{x}_M^3 + \alpha(\mathbf{x}_M^2 - \mathbf{x}_M^4), \quad (3.17)$$

gdzie parametr α określa charakter krzywej. Nieodpowiedni dobór tego parametru może spowodować (Pietrzak, 1997) samoprzecięcie się krzywej. W niniejszej pracy przyjęto $\alpha = 2/3$.

Krzywa oparta na 4 węzłach charakteryzuje się tym, że przechodzi przez wszystkie węzły brzegu *master* oraz dobrze oddaje geometrię brzegu ciała sprzed dyskretyzacji. Pewną wadą jest użycie 4 węzłów, co wpływa niekorzystnie na koszt obliczeń procedur elementów kontaktowych. Również niekorzystny jest fakt, że modyfikacja położenia jednego węzła powoduje modyfikację krzywej w promieniu 4 węzłów z każdej strony.



Rysunek 3.3.4: Parametryzacja krzywymi Bézier: (a) krzywa oparta na 4 węzłach, (b) krzywa oparta na 3 węzłach.

Drugi wykorzystany w pracy sposób definiowania punktów kontrolnych, zaproponowany przez Krstulovića-Oparę (2001), wymaga trzech sąsiednich węzłów *master* (por. rys. 3.3.4(b)). Punkty kontrolne wyznaczone są wtedy następująco:

$$\mathbf{d}^1 = \frac{\mathbf{x}_M^1 + \mathbf{x}_M^2}{2}, \quad \mathbf{d}^2 = (1 - \beta) \frac{\mathbf{x}_M^1 + \mathbf{x}_M^2}{2} + \beta \mathbf{x}_M^2,$$

$$\mathbf{d}^4 = \frac{\mathbf{x}_M^3 + \mathbf{x}_M^2}{2}, \quad \mathbf{d}^3 = (1 - \beta) \frac{\mathbf{x}_M^3 + \mathbf{x}_M^2}{2} + \beta \mathbf{x}_M^2,$$

gdzie parametr β , określający charakter krzywej, ustalony został jako $\beta = 1/2$. Tak zdefiniowane krzywe Bézier są styczne do środków odcinków łączących sąsiednie węzły. W ogólności krzywa nie przechodzi przez węzły co, przy rzadszych siatkach, może się wiązać z niedokładnym odwzorowaniem geometrii brzegu ciała sprzed dyskretyzacji. Zaletami, w porównaniu z parametryzacją opartą na 4 węzłach, są niższe koszty obliczeniowe oraz bardziej lokalny wpływ modyfikacji położenia węzła na kształt krzywej.

Przypadek 3D

W pracy użyto płatów powierzchni Bézier wykorzystujących 16 punktów kontrolnych \mathbf{d}^{ij} ($i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$),

$$\Psi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{d}^{ij}) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 B_3^i(\xi^1) B_3^j(\xi^2) \mathbf{d}^{ij}. \quad (3.18)$$

Punkty kontrolne, podobnie jak w przypadku 2D, definiuje się w oparciu o położenie węzłów *master* tak, aby zapewnić gładkość powierzchni złożonej z przylegających do siebie płatów. W niniejszej pracy wykorzystano dwie takie definicje (spośród wielu możliwych), które są analogiczne do odpowiedników dwuwymiarowych.

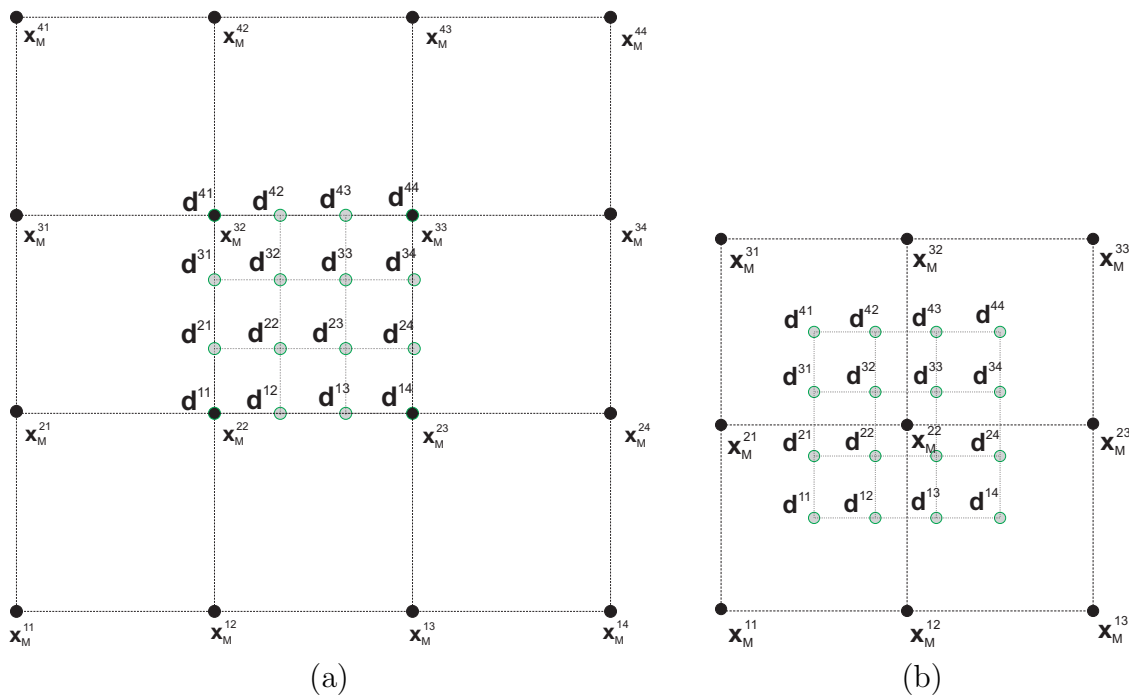
Pierwszy sposób definiowania punktów \mathbf{d}^{ij} (w oparciu o pracę Pietrzaka, 1997) wykorzystuje informację o położeniu 16 węzłów *master*, oznaczonych jako \mathbf{x}_M^{ij} (por. rys. 3.3.5(a)):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{j1} &= \hat{\mathbf{d}}^{j2} & \mathbf{d}^{j2} &= \hat{\mathbf{d}}^{j2} + \alpha(\hat{\mathbf{d}}^{j3} - \hat{\mathbf{d}}^{j1}) \\ \mathbf{d}^{j4} &= \hat{\mathbf{d}}^{j3} & \mathbf{d}^{j3} &= \hat{\mathbf{d}}^{j3} + \alpha(\hat{\mathbf{d}}^{j2} - \hat{\mathbf{d}}^{j4}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}^{1i} &= \mathbf{x}_M^{2i} & \hat{\mathbf{d}}^{2i} &= \mathbf{x}_M^{2i} + \alpha(\mathbf{x}_M^{3i} - \mathbf{x}_M^{1i}) \\ \hat{\mathbf{d}}^{4i} &= \mathbf{x}_M^{3i} & \hat{\mathbf{d}}^{3i} &= \mathbf{x}_M^{3i} + \alpha(\mathbf{x}_M^{2i} - \mathbf{x}_M^{4i}) \end{aligned}$$

są punktami pomocniczymi, natomiast $\alpha = 2/3$.



Rysunek 3.3.5: Topologia węzłów i punktów kontrolnych dla płatów Bézier: (a) opartych na 16 węzłach, (b) opartych na 9 węzłach.

Podobnie jak dla przypadku 2D, powierzchnia charakteryzuje się tym, że przechodzi przez wszystkie punkty węzłowe, co pozwala dobrze przybliżyć powierzchnię ciała sprzed dyskretyzacji.

Drugi sposób definicji punktów kontrolnych został zaproponowany w niniejszej pracy jako połączenie koncepcji Pietrzaka (1997) i Krstulovića-Opary (2001). Parametry-

zacja płata bazuje na 9 węzłach *master* (por. rys. 3.3.5(b)):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{j1} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{d}}^{j1} + \hat{\mathbf{d}}^{j2}), & \mathbf{d}^{j2} &= (1 - \beta) \frac{\hat{\mathbf{d}}^{j2} + \hat{\mathbf{d}}^{j1}}{2} + \beta \hat{\mathbf{d}}^{j2}, \\ \mathbf{d}^{j4} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{d}}^{j3} + \hat{\mathbf{d}}^{j2}), & \mathbf{d}^{j3} &= (1 - \beta) \frac{\hat{\mathbf{d}}^{j2} + \hat{\mathbf{d}}^{j3}}{2} + \beta \hat{\mathbf{d}}^{j2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}^{1i} &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_M^{1i} + \mathbf{x}_M^{2i}), & \hat{\mathbf{d}}^{2i} &= (1 - \beta) \frac{\mathbf{x}_M^{2i} + \mathbf{x}_M^{1i}}{2} + \beta \mathbf{x}_M^{2i}, \\ \hat{\mathbf{d}}^{4i} &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_M^{3i} + \mathbf{x}_M^{2i}), & \hat{\mathbf{d}}^{3i} &= (1 - \beta) \frac{\mathbf{x}_M^{2i} + \mathbf{x}_M^{3i}}{2} + \beta \mathbf{x}_M^{2i}, \end{aligned}$$

są punktami pomocniczymi, natomiast $\beta = 1/2$. W tym przypadku, powstała powierzchnia jest styczna do środków czworoboków stanowiących brzeg zdyskretyzowanego ciała *master*. W porównaniu do powierzchni złożonej z płatów bazujących na 16 węzłach, niniejsza definicja charakteryzuje się niższym kosztem obliczeniowym oraz bardziej lokalnym wpływem położenia węzłów na kształt powierzchni. Mankamentem jest fakt, że płaty w ogólności nie przechodzą przez punkty węzłowe a przez środki boków co powoduje że owe powierzchnie gorzej przybliżają rzeczywistą geometrię ciała.

Oba powyższe podejścia wymagają czworokątnej i strukturalnej³ siatki na wygładzonym brzegu. Podczas gdy pierwszy warunek jest łatwo zapewnić, tak drugi – strukturalność siatki na brzegu – zwykle jest niespełniony (np. naroża prostopadłościanu zdyskretyzowanego trójwymiarową siatką strukturalną). Dlatego też zakres stosowalności powyższych metod wygładzania jest ograniczony jedynie do fragmentów brzegu ciała *master* zdyskretyzowanych siatką strukturalną.

3.3.2. Płaty Gregory’ego

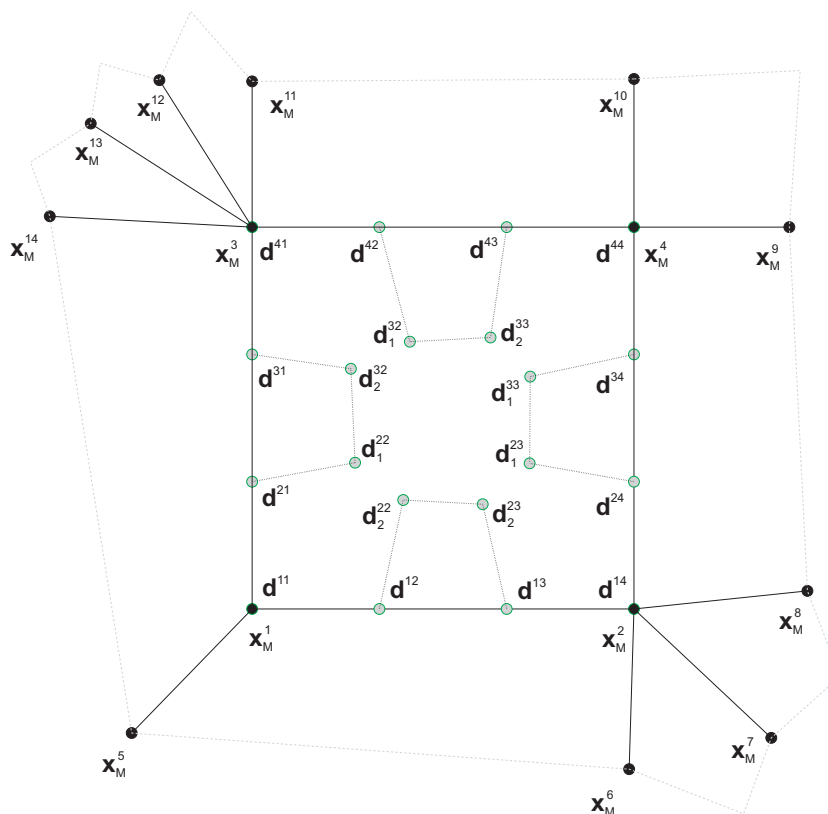
Wymóg strukturalności siatki w przypadku płatów Bézier może być poważnym ograniczeniem, gdyż nie zawsze jesteśmy w stanie to zapewnić (np. gdy możliwy jest kontakt na całej powierzchni ciała *master*). Kiedy dochodzi do sytuacji, że w kontakcie uczestniczy węzeł łączący więcej lub mniej niż cztery przylegające czworokąty, wtedy trzeba zastosować inną, odpowiedniejszą metodę wygładzania. Jedną z takich metod jest wykorzystanie *płatów Gregory’ego*.

Płaty Gregory’ego (Puso i Laursen, 2002) jest to parametryzacja zachowująca jedynie ciągłość normalnych do powierzchni. Nie spełnia warunków ciągłości klasy C^1 , tym niemniej w obrębie dziedziny danego płata można określić w sposób jednoznaczny pochodne kierunkowe (a zatem i płaszczyznę styczną).

Definicja płata Gregory’ego ma postać bardzo podobną do definicji płata Bézier (rów. (3.18)):

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\xi}, \{\mathbf{x}_M^{ij}\}) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 B_3^i(\xi^1) B_3^j(\xi^2) \mathbf{g}^{ij}(\xi^1, \xi^2), \\ \mathbf{g}^{ij}(\xi^1, \xi^2) &= \begin{cases} \frac{(1 + (-1)^i \xi^1) \mathbf{d}_1^{ij} + (1 + (-1)^j \xi^2) \mathbf{d}_2^{ij}}{(1 + (-1)^i \xi^1) + (1 + (-1)^j \xi^2)}, & i, j \in \{2, 3\}, \\ \mathbf{d}^{ij} & \text{w p.p.} \end{cases} \end{aligned}$$

³Fragment siatki na powierzchni nazwiemy strukturalnym gdy każdy węzeł sąsiaduje z taką samą liczbą wielokątów (“oczek” siatki). W niniejszej pracy, węzły w siatkach strukturalnych sąsiadują dokładnie z czterema czworokątami.



Rysunek 3.3.6: Topologia węzłów i punktów kontrolnych dla płata Gregory'ego (jeden z możliwych przypadków). Topologia punktów kontrolnych jest niezależna od liczby sąsiadujących segmentów.

Różnica polega na tym, że punkty kontrolne \mathbf{g}^{ij} są nieliniową funkcją położenia punktów węzłowych. Wyznaczenie \mathbf{g}^{ij} bazuje na, pokazanych na rys. 3.3.6, punktach \mathbf{d}^{ij} , \mathbf{d}_α^{ij} . Skomplikowana zależność tych 20 punktów pośrednich od punktów węzłowych, oraz nieliniowa zależność punktów kontrolnych \mathbf{g}^{ij} od punktów pośrednich powoduje, że koszt wyznaczenia płata Gregory'ego jest o wiele wyższy niż w przypadku płatów Béziera.

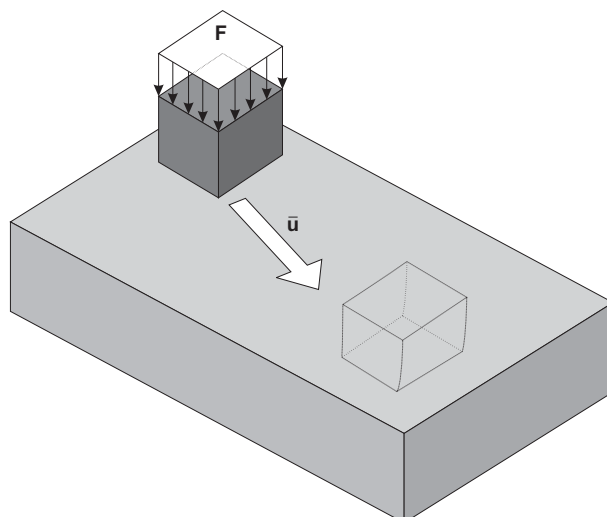
Dokładną procedurę wyznaczania punktów kontrolnych można znaleźć w pracy Puso i Laursena (2002). Najistotniejszy w całej procedurze jest fakt, że najpierw wyznaczone są normalne \mathbf{n}^k do węzłów \mathbf{x}_M^k ($k \in \{1, 2, 3, 4\}$) na podstawie ułożenia krawędzi wychodzących z tych węzłów (rys. 3.3.6) a dalsza część procedury bazuje już tylko na wielkościach \mathbf{n}^k oraz \mathbf{x}_M^k . Dzięki temu procedura jest niezależna od liczby wielokątów spotykających się w węzle \mathbf{x}_M^k , czyli można ją zastosować również dla niestrukturalnych siatek powierzchniowych.

3.3.3. Porównanie metod parametryzacji powierzchni *master*

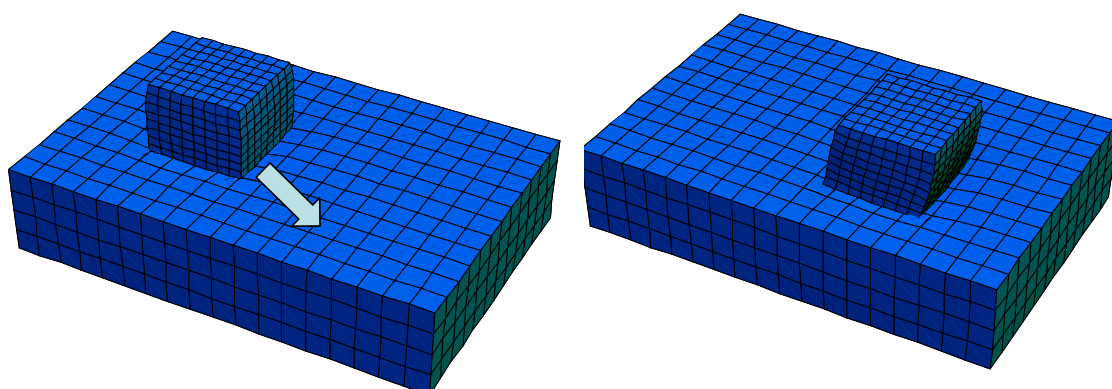
W celu zbadania własności numerycznych elementów wykorzystujących różne, przedstawione w niniejszej pracy, rodzaje parametryzacji powierzchni *master*, przeprowadzono ich porównanie dla pewnego modelowego, trójwymiarowego problemu. Wyniki zamieszczone w niniejszym podrozdziale zostały również opublikowane w pracy Korelca i in. (2006).

Zagadnieniem modelowym było przesuwanie miękkiego prostopadłościennego kloc-

ka po twardszym podłożu, z uwzględnieniem tarcia (por. rys. 3.3.7 i 3.3.8).



Rysunek 3.3.7: Schemat zagadnienia przesuwania miękkiego prostopadłościennego klocka po twardszym podłożu.



Rysunek 3.3.8: Zagadnienie przesuwania miękkiego prostopadłościennego klocka po twardszym podłożu. Rozwiązanie MES w dwóch wybranych chwilach czasu.

Wyniki przedstawione w tabeli 3.3.1 pokazują wskaźniki złożoności czasowej obliczeń dla czterech rodzajów parametryzacji. Pierwszy wskaźnik jest procentowym udziałem sumarycznego czasu wyznaczania wektora \mathbf{R} i macierzy \mathbf{K} w elementach kontaktowych względem całkowitego czasu obliczeń. Drugi wskaźnik pokazuje całkowitą liczbę iteracji wykonanych w procesie obliczeniowym.

Z wyników zamieszczonych w tabeli 3.3.1 można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Koszt obliczeń procedur w elementach wykorzystujących poszczególne rodzaje parametryzacji jest zgodny z oczekiwaniami, tzn. najniższy koszt w przypadku parametryzacji Biliniowej a najwyższy w przypadku płatów Gregory'ego.
2. Drugi wskaźnik, czyli całkowita liczba iteracji, jest najniższy w przypadku płatów Bézier opartych na 9 węzłach oraz płatów Gregory'ego. Wysoka liczba iteracji w

Tabela 3.3.1: Wskaźniki złożoności czasowej obliczeń dla różnych rodzajów parametryzacji powierzchni *master*.

Rodzaj parametryzacji	% całkowitego czasu	Całkowita liczba iteracji
Biliniowa	0.9	154
Bézier 9	2.3	75
Bézier 16	3.5	102
Gregory	14	86

przypadku parametryzacji Biliniowej wskazuje na trudności ze zbieżnością, które mogą być spowodowane niégładkim połączeniem pomiędzy płacami powierzchni. W przypadku parametryzacji płacami Bézier opartymi na 16 węzłach problemów można upatrywać w bardziej nielokalnym wpływie położenia węzła *master* na kształt krzywej. Wpływa to niekorzystnie na liczbę iteracji potrzebną do uzyskania rozwiązania w danym kroku czasowym.

Podsumowując, odpowiedni dobór elementu zależy od różnych czynników. Jeżeli da się zapewnić strukturalność siatki, wtedy korzystniej jest zastosować jedną z parametryzacji wykorzystującą płaty Bézier z uwagi na ich ciągłość oraz stosunkowo niski koszt obliczeniowy. W przeciwnym razie, wymagane jest zastosowanie bądź to elementów biliniowych bądź też płatów Gregory'ego. Elementy biliniowe są korzystne z uwagi na niski koszt obliczania procedur elementu kontaktowego, jednak w bardziej złożonych przypadkach niż takie jak ten, zaprezentowany w niniejszym podrozdziale, mogą się pojawić problemy ze zbieżnością. Z kolei użycie płatów Gregory'ego wiąże się z bardzo wysokimi kosztami obliczeniowymi.

W porównaniu z płacami Bézier opartymi na 16 węzłach, wykorzystanie zaproponowanych w ramach niniejszej pracy płatów Bézier opartych na 9 węzłach jest korzystniejsze ze względu na niższy koszt obliczeniowy. Podstawową wadą tego podejścia jest jednak gorsze odzwierciedlenie rzeczywistej geometrii ciała, jako że w ogólności płaty nie przechodzą przez węzły a przez środki segmentów.

Rozdział 4

Analiza wrażliwości

W rozdziale 3 przedstawiono sposób przybliżonego rozwiązywania problemu kontaktowego z tarcieniem przy użyciu MES. Na danym kroku czasowym t_n rozwiązaniem jest wektor \mathbf{u}_{t_n} , na który składają się wartości wszystkich stopni swobody zadania. Od owego rozwiązania wymagamy, żeby spełniało zdyskretyzowane równania równowagi zapisane w postaci rezydualnej

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, \mathbf{X}, t_n) = \mathbf{0}$$

stanowiące tzw. problem bezpośredni. Aby znaleźć owo rozwiązanie, posługujemy się iteracyjną metodą Newtona-Raphsona, która do rozwiązania układu liniowego wykorzystuje konsystentną macierz styczną \mathbf{K} .

W niniejszym rozdziale będzie rozpatrywany taki sam typ problemów z tą różnicą, że zostanie wprowadzony wektor $\boldsymbol{\phi}$ parametryzujący zagadnienie. W ogólności parametryzacja może dotyczyć różnych aspektów zagadnienia. Mogą to być parametry funkcji określającej stałe materiałowe, kształt początkowy, warunki początkowe, itp. Pozwala to na postawienie problemu znalezienia zależności $d\mathbf{u}/d\phi_i$ – pochodnej rozwiązania względem parametrów zadania.

Znajomość pochodnej $d\mathbf{u}/d\phi_i$ może mieć wiele praktycznych zastosowań. Przede wszystkim określa wrażliwość rozwiązania na zmianę parametru ϕ_i . Sama w sobie jest więc cenną informacją – pozwala na przykład ocenić stopień wrażliwości kształtu końcowego produktu na niedoskonałości wykonania półproduktów. Z drugiej strony, znajomość owej pochodnej jest niezbędna dla gradientowych metod optymalizacyjnych, co zostanie bliżej przedstawione w podrozdziale 4.1.

Najprostszym podejściem do wyznaczenia pochodnej $d\mathbf{u}/d\phi_i$ jest zastosowanie – posiadającej wiele wad – metody FDM, bazującej na różnicach skończonych (podrozdział 4.2). Efektywniejszą metodę – Analizę Wrażliwości – przedstawiono w podrozdziale 4.3.

4.1. Zastosowanie do optymalizacji

Dla wybranej grupy L parametrów projektowych ϕ_i , zadanie optymalizacji procesu polega na poszukiwaniu takich wartości tych parametrów, które minimalizują pewną skalarną funkcję $J(\boldsymbol{\phi})$. Owa funkcja, zwana *funkcją kosztu* lub *funkcją celu* (ang. *objective function*), wiąże w sobie poszczególne kryteria stawiane procesowi. Kryteria są zwykle funkcją rozwiązania, tak więc ich zależność od parametrów zadania ma charakter niejawny.

W niniejszej pracy optymalizowanym procesem będzie zregulowane zagadnienie kontaktowe w postaci zdyskretyzowanej. W wyniku obliczeń otrzymuje się rozwiązania w poszczególnych krokach czasowych $\mathbf{u}_{t_n}(\boldsymbol{\phi})$. Zakładając pewną ustaloną postać funkcji celu $J(\mathbf{u}_{t_0}(\boldsymbol{\phi}), \dots, \mathbf{u}_{t_N}(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\phi})$, problem odwrotny (optymalizacyjny) można przedstawić następująco:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \arg \min_{\boldsymbol{\phi}} J(\mathbf{u}_{t_0}(\boldsymbol{\phi}), \dots, \mathbf{u}_{t_N}(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\phi})$$

Pomijając kwestię istnienia i jednoznaczności, oraz zakładając gładkość $J(\boldsymbol{\phi})$, warunkiem koniecznym dla minimum jest zerowanie się pochodnych względem parametrów zadania. Ów warunek można zapisać w postaci układu L równań nieliniowych:

$$\frac{DJ}{D\phi_i} = \frac{\partial J}{\partial \phi_i} + \sum_{n=0}^N \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}_{t_n}} \frac{d\mathbf{u}_{t_n}(\boldsymbol{\phi})}{d\phi_i} = 0, \quad i \in \{1, \dots, L\}. \quad (4.1)$$

Użycie metod gradientowych do wyznaczania minimum funkcji kosztu, wymaga znajomości, określonej w równaniu (4.1), wielkości $DJ/D\phi_i$. Podczas gdy występujące tam człony $\partial J/\partial \phi_i$ oraz $\partial J/\partial \mathbf{u}_{t_n}(\boldsymbol{\phi})$ są zwykle dostępne poprzez jawne zróżniczkowanie funkcjonału J , o tyle człony $d\mathbf{u}_{t_n}(\boldsymbol{\phi})/d\phi_i$ mają charakter niejawny, co wymaga użycia specjalnych technik do ich obliczenia.

Metody gradientowe charakteryzują się potrzebą wielokrotnego wyliczania wartości pochodnych (4.1) dla rozwiązań odpowiadających różnym parametrom zadania. Istotne jest zatem aby koszt ich wyznaczania był możliwie niski. Stąd też w niniejszej pracy zastosowano metodę DDM Analizy Wrażliwości (por. podrozdz. 4.3) – metodę efektywniejszą i dokładniejszą w porównaniu do popularnej metody bazującej na różnicach skończonych.

Zagadnienia optymalizacyjne zamieszczone w rozdziale 7 zostały rozwiązane przy użyciu jednej z metod gradientowych – metody BFGS (Press i in., 1992; Bertsekas, 1993).

4.2. Aproxymacja różnicami skończonymi – metoda FDM

Najbardziej intuicyjną metodą wyznaczenia niejawnej pochodnej $d\mathbf{u}/d\phi_i$ jest, bazująca na różnicach skończonych, metoda FDM (ang. Finite Difference Method). Polega na przybliżeniu pochodnej funkcji $\mathbf{u}(\boldsymbol{\phi})$ po parametrze ϕ_i (liczonej w punkcie $\boldsymbol{\phi}$) za pomocą ilorazu różnicowego. W niniejszej pracy przyjęto następującą definicję ilorazu różnicowego metody FDM:

$$\frac{d\mathbf{u}(\boldsymbol{\phi})}{d\phi_i} \simeq \frac{\mathbf{u}(\boldsymbol{\phi} + \alpha \boldsymbol{\delta}_i) - \mathbf{u}(\boldsymbol{\phi})}{\alpha}$$

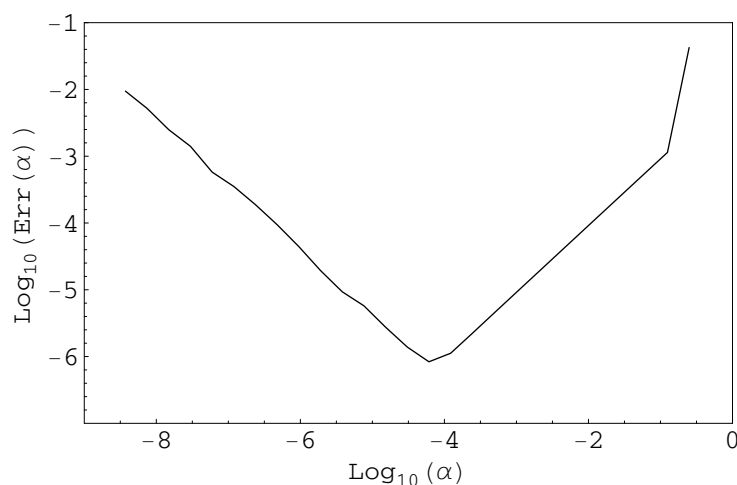
gdzie przez $\boldsymbol{\delta}_i$ rozumiemy wektor $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ (jedyńka na i -tym miejscu).

Jak łatwo zauważyć, użycie tej metody do wyznaczenia pochodnych po m różnych parametrach wymaga rozwiązania $m + 1$ różnych problemów bezpośrednich, co jest kosztowne. Co więcej, nie wiadomo z góry jaką przyjąć wartość perturbacji α tak, żeby przybliżyć pochodną możliwie najdokładniej. Przyjęcie zbyt dużej wartości α powoduje niedokładności związane z przybliżaniem pochodnych przy pomocy modułów siecznych. Z drugiej strony zbyt mała wartość α prowadzi do błędów natury numerycznej.

W celu zobrazowania problemu odpowiedniego doboru parametru α przeprowadzono serię obliczeń. Dla zagadnienia Hertza, zamieszczonego w podrozdziale 7.1.1, obliczono pochodną rozwiązania względem promienia walca za pomocą Analizy Wrażliwości (opisanej w następnym podrozdziale) a następnie metodą FDM dla różnych parametrów $\alpha \equiv \Delta R$. Wykres na rys. 4.2.1 przedstawia wartości błędu względnego rozwiązań otrzymanych metodą FDM dla różnych wartości parametru α . Widoczna na wykresie wielkość $\text{Err}(\alpha)$ jest błędem względnym między pochodną liczoną metodą FDM a wynikiem otrzymanym przy użyciu Analizy Wrażliwości (por. podrozdział 4.3.1).

$$\text{Err}(\alpha) = \frac{\|(\mathbf{u}(\boldsymbol{\phi} + \alpha\boldsymbol{\delta}_i) - \mathbf{u}(\boldsymbol{\phi}))/\alpha - d\mathbf{u}(\boldsymbol{\phi})/d\phi_i\|}{\|d\mathbf{u}(\boldsymbol{\phi})/d\phi_i\|}$$

Pomimo faktu, że rozwiązanie otrzymane przy pomocy Analizy Wrażliwości jest rów-



Rysunek 4.2.1: Błąd aproksymacji w metodzie FDM dla zagadnienia Hertza (podrozdział 7.1.1).

niez obarczone pewnym błędem natury numerycznej, widać wyraźną zależność rozwiązania wyznaczonego metodą FDM od wyboru perturbacji α . Wynika z tego wniosek, że odpowiedni dobór parametru α jest kluczowy dla dokładności metody FDM. Niestety, w większości przypadków nie da się *a priori* ustalić optymalnej wartości dla perturbacji parametru ϕ_i , co stanowi poważne ograniczenie tej metody.

Kolejnym utrudnieniem w stosowaniu metody FDM dla problemów zależnych od ścieżki całkowania po czasie jest fakt, że w przypadku adaptacyjnego doboru kroku czasowego trzeba zadbać o to, aby wszystkie obliczenia przebiegały w tych samych punktach czasowych. Wynika to z tego, że samo rozwiązanie zależy od wyboru punktów całkowania. Konieczność zapewnienia wspólnych punktów czasowych dla wszystkich różnic skończonych może znacząco wydłużyć czas obliczeń a – w skrajnych przypadkach – uniemożliwić ich przeprowadzenie z odpowiednią dokładnością.

Duży koszt numeryczny i ograniczona możliwość kontroli dokładności metody są to mankamenty, które utrudniają jej wykorzystanie w praktyce – szczególnie w zastosowaniu do automatycznego procesu optymalizacji.

4.3. Analiza Wrażliwości

W niniejszej pracy wykorzystano analityczną metodę wyznaczania wyżej wymienionych, niejawnych pochodnych, zwaną Analizą Wrażliwości. Bazując na pracy Michalalisa i in. (1994), można rozpatrywać dwa podejścia do Analizy Wrażliwości: *Adjoint Sensitivities* oraz *Direct Differentiation Method* (DDM). Pierwsze podejście, w zastosowaniu do problemów zależnych od ścieżki całkowania po czasie (takich jak problemy kontaktowe z tarciem), charakteryzuje się niekorzystną złożonością pamięciową, proporcjonalną do liczby kroków czasowych oraz do liczby stopni swobody. Dlatego też nie wykorzystano tej metody pomimo, że posiada lepszą złożoność czasową dla dużej liczby parametrów ϕ_i . W pracy skoncentrowano się natomiast na zastosowaniu podejścia opartego na bezpośrednim różniczkowaniu (DDM), które (podobnie jak sam problem bezpośredni) ma złożoność pamięciową niezależną od liczby kroków czasowych.

4.3.1. DDM dla zagadnień niezależnych od historii, bez problemu wewnętrznego

Aby wyjaśnić na czym polega metoda DDM Analizy Wrażliwości, rozpoczniemy od najprostszego przypadku nieliniowego zagadnienia niezależnego od ścieżki całkowania po czasie i niezawierającego problemu wewnętrznego (np. zagadnienia nieliniowej sprężystości). Takie sparametryzowane zagadnienie, można zapisać w postaci rezydualnej:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}(\phi_i), \mathbf{X}(\phi_i), \phi_i) = \mathbf{0}.$$

Wiedząc, że niezależnie od wyboru parametru ϕ_i powyższe równanie jest spełnione w punkcie rozwiązania, możemy zapisać:

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\phi_i} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\phi_i} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\phi_i} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\phi_i} = \mathbf{0}.$$

Przekształcając, problem wrażliwości zostaje sprowadzony do następującego układu równań liniowych:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{u}} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\phi_i} = - \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\phi_i} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\phi_i} \right) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \mathbf{P}_i. \quad (4.2)$$

Zauważmy, że macierz $\partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{u}$ jest konsystentną macierzą styczną \mathbf{K} używaną do rozwiązania problemu bezpośredniego¹. Jest to o tyle wygodne, że nie trzeba jej ponownie wyznaczać oraz przeprowadzać niektórych operacji związanych z rozwiązywaniem układu równań liniowych (np. dekompozycja macierzy).

4.3.2. DDM dla zagadnień zależnych od historii zawierających problem wewnętrzny

Metoda DDM, w zastosowaniu do klasy problemów jakimi się zajmujemy w niniejszej pracy, ma bardziej skomplikowaną postać. Wynika to z faktu, że w przypadku

¹Powyższe równanie pozwala na intuicyjne zrozumienie metody DDM. Wykorzystując analogię do rozwiązywania problemu bezpośredniego można powiedzieć, że wrażliwość rozwiązania jest zależna w sposób liniowy od wektora \mathbf{P}_i , który wyraża wrażliwość sił węzłowych (w ustalonym punkcie \mathbf{u} , będącym rozwiązaniem).

problemów zależnych od ścieżki całkowania po czasie trzeba uwzględnić zależność od rozwiązania w poprzednim kroku czasowym. Dodatkowo, występowanie problemu wewnętrznego powoduje potrzebę uwzględnienia niejawnych pochodnych zmiennych wewnętrznych po parametrach ϕ_i .

Zastosowanie algorytmu kroczącego (rozdz. 3.1.2) dla zdyskretyzowanego zagadnienia zależnego od ścieżki całkowania po czasie i zawierającego problem wewnętrzny, w ogólności, w danym kroku czasowym t_n , prowadzi do następującego układu równań nieliniowych

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, \mathbf{b}_{t_n}, \mathbf{b}_{t_{n-1}}, t_n) = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, \mathbf{b}_{t_n}, \mathbf{b}_{t_{n-1}}, t_n) = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

gdzie \mathbf{H} jest residuum dla problemu wewnętrznego, natomiast \mathbf{b} jest wektorem zmiennych wewnętrznych. W niniejszej pracy, rozwiązanie powyższego układu równań uzyskuje się stosując zagnieżdżone pętle iteracyjne (por. rozdział 3.2) co zostało zobrazowane na schemacie w ramce 4.3.1. Dla j -tej iteracji pętli zewnętrznej, w pętli wewnętrznej rozwiązywane jest równanie (4.4) względem zmiennych \mathbf{b}_{t_n} dla ustalonych pozostałych zmiennych, a następnie wyznaczany jest wektor rezydualny \mathbf{R} oraz konsyistentna macierz styczna \mathbf{K} . Na ich podstawie obliczane jest kolejne przybliżenie $^j \mathbf{u}_{t_n}$.

Uzależniając zdyskretyzowane zagadnienie od wektora parametrów ϕ_i , równania (4.3)–(4.4) przyjmują następującą postać:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{t_n}(\phi_i), \mathbf{u}_{t_{n-1}}(\phi_i), \mathbf{b}_{t_n}(\phi_i), \mathbf{b}_{t_{n-1}}(\phi_i), \mathbf{X}(\phi_i), \phi_i, t_n) = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}_{t_n}(\phi_i), \mathbf{u}_{t_{n-1}}(\phi_i), \mathbf{b}_{t_n}(\phi_i), \mathbf{b}_{t_{n-1}}(\phi_i), \mathbf{X}(\phi_i), \phi_i, t_n) = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

Wprowadzając zależność $\mathbf{b}(\mathbf{u})$ możemy wyznaczyć z równania (4.6) pochodną zmiennych wewnętrznych po parametrze ϕ_i :

$$\frac{d\mathbf{b}_{t_n}}{d\phi_i} = - \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{b}_{t_n}} \right)^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}_{t_n}} \frac{d\mathbf{u}_{t_n}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}_{t_{n-1}}} \frac{d\mathbf{u}_{t_{n-1}}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{b}_{t_{n-1}}} \frac{d\mathbf{b}_{t_{n-1}}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \phi_i} \right]. \quad (4.7)$$

Różniczkując równanie (4.5) względem parametrów ϕ_i a następnie podstawiając wynik (4.7), po przekształceniach otrzymujemy:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}_{t_n}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{b}_{t_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{b}_{t_n}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}_{t_n}} \right] \frac{d\mathbf{u}_{t_n}}{d\phi_i} = - \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}_{t_{n-1}}} \frac{d\mathbf{u}_{t_{n-1}}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{b}_{t_{n-1}}} \frac{d\mathbf{b}_{t_{n-1}}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{b}_{t_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{b}_{t_n}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}_{t_{n-1}}} \frac{d\mathbf{u}_{t_{n-1}}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{b}_{t_{n-1}}} \frac{d\mathbf{b}_{t_{n-1}}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\phi_i} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \phi_i} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Wyrażenie w kwadratowych nawiasach występujące po lewej stronie równania (4.8) jest konsyistentną macierzą styczną \mathbf{K} taką, jaka jest wykorzystywana do rozwiązania problemu bezpośredniego. Wyrażenie po prawej stronie, analogicznie do odpowiednika z podrozdziału 4.3.1, opisuje wrażliwość sił węzłowych w ustalonym punkcie rozwiązania. Oznaczając prawą stronę przez \mathbf{P}_i , problem wrażliwości można zapisać jako:

$$\frac{d^n \mathbf{u}}{d\phi_i} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}_i.$$

$\mathbf{u}_{t_{n-1}}$ – rozwiązanie w poprzednim kroku czasowym
 ${}^0\mathbf{u}_{t_n} := \mathbf{u}_{t_{n-1}}$ – punkt startowy procedury iteracyjnej
 $j := 0$
 Powtarzaj:
 $j := j + 1$
 $k := 0, {}^0\mathbf{b}_{t_n} = \mathbf{0}$
 Powtarzaj:
 $k := k + 1$
 $\mathbf{H} := \mathbf{H}({}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, {}^{k-1}\mathbf{b}_{t_n}, \mathbf{b}_{t_{n-1}}, t_n)$
 $\mathbf{M} := \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial {}^{k-1}\mathbf{b}_{t_n}}$
 $\Delta \mathbf{b} := -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}$
 ${}^k\mathbf{b}_{t_n} := {}^{k-1}\mathbf{b}_{t_n} + \Delta \mathbf{b}$
 dopóki $\|\Delta \mathbf{b}\| > \varepsilon_b$ lub $\|\mathbf{H}\| > \varepsilon_H$
 $\mathbf{b}_{t_n} := {}^k\mathbf{b}_{t_n}$
 $\frac{\partial \mathbf{b}_{t_n}}{\partial {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}} := \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}}$
 $\mathbf{R} := \mathbf{R}({}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, \mathbf{b}_{t_n}, \mathbf{b}_{t_{n-1}}, t_n)$
 $\mathbf{K} := \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{b}_{t_n}} \frac{\partial \mathbf{b}_{t_n}}{\partial {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}}$
 $\Delta \mathbf{u} := -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}$
 ${}^j\mathbf{u}_{t_n} := {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n} + \Delta \mathbf{u}$
 dopóki $\|\Delta \mathbf{u}\| > \varepsilon_u$ lub $\|\mathbf{R}\| > \varepsilon_R$
 $\mathbf{u}_{t_n} := {}^j\mathbf{u}_{t_n}$

Ramka 4.3.1: Zagnieżdżony schemat iteracyjny na danym kroku czasowym t_n dla zagadnienia zależnego od ścieżki całkowania po czasie i zawierającego problem wewnętrzny.

Metoda DDM dla problemów zależnych od ścieżki całkowania po czasie jest stosowana na każdym kroku czasowym, po rozwiązaniu problemu bezpośredniego. Na schemacie w ramce 4.3.2 widać, że chcąc policzyć wrażliwość rozwiązania względem L parametrów, trzeba dodatkowo rozwiązać $L \times N$ układów równań liniowych (i tyle samo razy wyznaczyć wektor \mathbf{P}_i). Zauważmy, że jest to mniej kosztowne niż w przypadku stosowania metody FDM, gdzie należałoby rozwiązać dodatkowo L razy cały problem bezpośredni, co wymaga rozwiązania $L \times I$ układów równań liniowych (gdzie I oznacza całkowitą liczbę iteracji – znacznie większą niż liczba kroków czasowych).

Należy również zwrócić uwagę na fakt, że obliczanie wrażliwości względem L parametrów ϕ_i wymaga wyznaczenia jednej macierzy stycznej \mathbf{K} oraz L prawych stron \mathbf{P}_i . Rozwiązywanie układów równań liniowych poprzez L -krotne podstawienie prawej stro-

ny względem tej samej macierzy jest zazwyczaj dużo efektywniejsze niż rozwiązywanie L takich układów równań niezależnie.

Inicjalizacja

Inicjalizacja DDM

$$\mathbf{u}_{t_0} := \mathbf{0}$$

Dla $n := 1, \dots, N$ wykonaj:

$${}^0\mathbf{u}_{t_n} := \mathbf{u}_{t_{n-1}}$$

$$j := 0$$

Powtarzaj:

$$j := j + 1$$

wyszukaj_kontakt(${}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}$)

$$\mathbf{R} := \sum_{e=1}^{N_V+N_S} {}^e\mathbf{L} {}^e\mathbf{R}({}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, t_n)$$

$$\mathbf{K} := \sum_{e=1}^{N_V+N_S} {}^e\mathbf{L} \frac{\partial {}^e\mathbf{R}}{\partial {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n}}$$

$$\Delta\mathbf{u} := -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}$$

$${}^j\mathbf{u}_{t_n} := {}^{j-1}\mathbf{u}_{t_n} + \Delta\mathbf{u}$$

dopóki $\|\Delta\mathbf{u}\| > \varepsilon_u$ lub $\|\mathbf{R}\| > \varepsilon_R$

$$\mathbf{u}_{t_n} := {}^j\mathbf{u}_{t_n}$$

Dla $k := 1, \dots, L$ wykonaj:

$$\mathbf{P}_k := \sum_{e=1}^{N_V+N_S} {}^e\mathbf{L} {}^e\mathbf{P}_k(\mathbf{u}_{t_n}, \mathbf{u}_{t_{n-1}}, t_n)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_{t_n}}{d\phi_k} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}_k$$

Ramka 4.3.2: Schemat analizy bezpośredniej oraz analizy wrażliwości dla zdykretyzowanego zagadnienia kontaktowego (2.37). Kolorem niebieskim zaznaczono dodatkowe fragmenty analizy (względem schematu w ramce 3.1.2), związane z rozwiązywaniem problemu wrażliwości. Procedura `wyszukaj_kontakt(...)` opisana jest w rozdziale 5.2.

Rozdział 5

Rozbudowa środowiska MES

W rozdziale 2.2 zostało wprowadzone zaawansowane, dualne sformułowanie zagadnienia kontaktowego. Następnie, w rozdziale 3, przedstawiono sposób rozwiązywania powyższego zagadnienia przy wykorzystaniu Metody Elementów Skończonych, z zastosowaniem technik wygładzania powierzchni kontaktowych. Użyta w niniejszej pracy metoda rozwiązywania, bazująca na niejawnym, przyrostowym schemacie całkowania po czasie, wykorzystująca konsystentną macierz styczną w metodzie Newtona-Raphsona, wpisuje się w schemat DDM analizy wrażliwości przedstawiony w rozdziale 4.

Aby móc przeprowadzić analizę wrażliwości w takiej postaci w praktyce, potrzebny był system do Metody Elementów Skończonych posiadający następujące cechy:

- obsługa zagadnień kontaktowych,
- możliwość tworzenia własnych definicji elementów kontaktowych,
- obsługa sformułowań dualnych (mnożniki Lagrange’a),
- obsługa analizy wrażliwości.

Z uwagi na fakt, że nie istniał w owym czasie gotowy system spełniający powyższe wymagania, potrzebne było rozbudowanie jednego z istniejących systemów. Idealnym okazał się system *AceGEN/AceFEM* (Korelc, 2002; Korelc, 2008) stworzony i utrzymywany przez prof. Jożę Korelca z Uniwersytetu w Lublanie. Ów system, opisany w podrozdziale 5.1, wymagał jedynie dodania obsługi zagadnień kontaktowych. Zmian w strukturze systemu dokonano we współpracy z doc. Stanisławem Stupkiewiczem oraz prof. Jożę Korelcem. Implementacja algorytmu wyszukiwania kontaktu, opisana w podrozdziale 5.2, jest oryginalnym elementem niniejszej rozprawy.

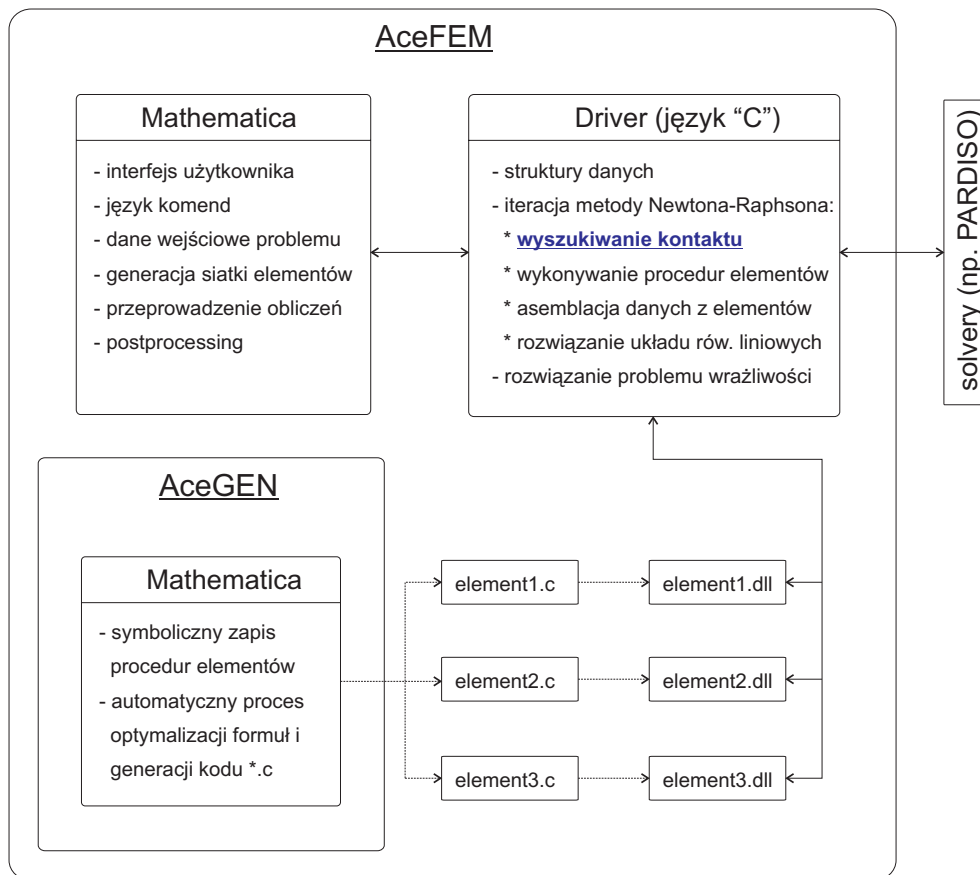
5.1. Struktura systemu *AceGEN/AceFEM*

AceGEN/AceFEM jest pakietem do Metody Elementów Skończonych. Opiera się na programie *Mathematica* (Wolfram, 1999), wykorzystując jego interfejs oraz możliwości symbolicznego przetwarzania formuł matematycznych. Daje to możliwość łatwego i elastycznego zapisywania logiki rozwiązywanych zagadnień (preprocessing, przebieg pętli iteracyjnej, postprocessing), jak również symbolicznego zapisania kodu elementów skończonych, ich automatycznej optymalizacji i generacji niskopoziomowego kodu. Procedury charakteryzujące się wysoką złożonością obliczeniową (takie jak rozwiązywanie układu równań liniowych, wyznaczenie wektora \mathbf{R} i macierzy \mathbf{K} , wyznaczenie wektora

rezydualnego dla problemu wrażliwości) zostały napisane w języku niskopoziomowym. Do rozwiązania układu równań liniowych system wykorzystuje jeden z zewnętrznych solverów, w tym solver *PARDISO* z pakietu Intel MKL.

5.1.1. Składowe systemu

Na rys. 5.1.1 przedstawiono strukturę systemu. Główną częścią jest moduł *AceFEM* umożliwiający przeprowadzenie analizy Metodą Elementów Skończonych. Moduł ma charakter hybrydowy. Sam interfejs oraz fragmenty procedur osadzone są w środowisku *Mathematica*. Procedury kosztowne numerycznie zaimplementowane zostały w języku C w ramach oddzielnego programu o nazwie *CDriver*. Obie części komunikują się ze sobą przy pomocy łącza *mathlink* – standardowego łącza systemu *Mathematica*.



Rysunek 5.1.1: Struktura systemu *AceGEN/AceFEM*.

Moduł *AceFEM* wykorzystuje procedury elementów skończonych dołączone w postaci zewnętrznych bibliotek DLL. Każdy rodzaj elementu opisany jest przez oddzielną bibliotekę, która zawiera zestaw procedur potrzebnych do obliczeń:

- wyznaczanie wkładów do wektora rezydualnego \mathbf{R} i macierzy stycznej \mathbf{K} ,
- wyznaczenie wkładu do wektora \mathbf{P} dla problemu wrażliwości,
- wyznaczenie wielkości postprocessingowych,
- inne procedury, charakterystyczne dla danego problemu.

System udostępnia biblioteki elementów dla standardowych modeli materiałowych. Często jednak – szczególnie w zastosowaniach naukowych – występuje potrzeba definiowania własnych elementów. Służy do tego moduł *AceGEN*, który umożliwia użycie notacji symbolicznej do zapisu wyrażeń definiujących element. Tak zapisane sformułowanie poddawane jest automatycznemu procesowi przetwarzania (automatyczne różniczkowanie i upraszczanie wyrażeń) oraz translacji do języka C, przy jednoczesnej optymalizacji kodu. Powyższe podejście umożliwia czytelny zapis wyrażeń w języku zbliżonym do notacji matematycznej. Skutkuje to obniżeniem czasu tworzenia elementu oraz pozwala na wielokrotne wykorzystanie raz napisanych fragmentów kodu (szablony elementów).

5.1.2. Element hipersprężysty

W niniejszym podrozdziale, jako przykład, zostaną zapisane procedury dla trójwymiarowego, ośmiowęzłowego elementu hipersprężystego, zdefiniowanego w oparciu o funkcję energii odkształceń sprężystych $W(\mathbf{F})$ (por. 2.1.5). Pierwsza procedura wyznacza wkład elementu do wektora rezydualnego \mathbf{R} oraz macierzy stycznej \mathbf{K} , natomiast druga wyznacza wkład do wektora rezydualnego \mathbf{P} dla problemu wrażliwości.

Korzystając z możliwości automatycznego przetwarzania wyrażeń oferowanej przez system *AceGEN/AceFEM*, procedury mogą zostać zapisane przy użyciu notacji symbolicznej.

Wyznaczanie wektora \mathbf{R} i macierzy \mathbf{K}

Symboliczny zapis procedury SKR, której zadaniem jest wyznaczenie wkładu elementu do wektora \mathbf{R} i macierzy \mathbf{K} został przedstawiony w ramce 5.1. Poszczególne podprocedury symbolicznego kodu umieszczono w ramach 5.1a–5.1e. Należy zwrócić uwagę, że dzięki wykorzystaniu techniki automatycznego różniczkowania będącego podstawą systemu *AceGEN*, zapis formuł jest bardzo zbliżony do jego matematycznej postaci. Skomplikowane operacje, takie jak różniczkowanie czy odwracanie macierzy, są efektywnie wykonywane przez system *AceGEN*.

Procedura SKR

- Inicjalizacja i dane wejściowe (ramka 5.1a)

Dla każdego punktu Gaussa g :

- Zmienne kinematyczne (ramka 5.1b)
- Związki konstytutywne (ramka 5.1c)
- Wektor \mathbf{R} (ramka 5.1d)
- Macierz \mathbf{K} (ramka 5.1e)

Ramka 5.1: Procedura SKR: wyznaczenie wkładu elementu do wektora rezydualnego \mathbf{R} i macierzy stycznej \mathbf{K} .

Inicjalizacja i dane wejściowe:

${}^e\mathbf{X}^k, {}^e\mathbf{u}^k$ – położenia początkowe oraz przemieszczenia węzłów
 u^m – wektor stopni swobody związanych z przemieszczeniami ${}^e\mathbf{u}^k$
 $\lambda = \lambda(E, \nu), \mu = \mu(E, \nu)$ – stałe Lamé'go
 $N_k(\boldsymbol{\xi})$ – izoparametryczne funkcje kształtu (np. trzyliniowe)
 $\boldsymbol{\xi}^g, \omega^g$ – punkty Gaussa i wagi Gaussa
 $g, k \in \{1, \dots, 8\}, m \in \{1, \dots, 24\}$

Ramka 5.1a: Inicjalizacja i dane wejściowe.

Zmienne kinematyczne:

$$\mathbf{X}^g = \sum_k N_k(\boldsymbol{\xi}^g) {}^e\mathbf{X}^k, \quad \mathbf{u}^g = \sum_k N_k(\boldsymbol{\xi}^g) {}^e\mathbf{u}^k$$

$$\mathbf{J}_\xi^g = \frac{\partial \mathbf{X}^g}{\partial \boldsymbol{\xi}^g}, \quad J_\xi^g = \det(\mathbf{J}_\xi^g)$$

$$\mathbf{F}^g = \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}^g}{d\boldsymbol{\xi}^g} (\mathbf{J}_\xi^g)^{-1}, \quad \mathbf{C}^g = (\mathbf{F}^g)^T \mathbf{F}^g$$

$$J^g = \det(\mathbf{F}^g)$$

Ramka 5.1b: Zmienne kinematyczne.

Związki konstytutywne:

$$W^g = \frac{\lambda}{2} (J^g - 1)^2 + \mu \cdot \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{C}^g) - 3}{2} - \text{Log}(J^g) \right)$$

Ramka 5.1c: Związki konstytutywne: funkcja energii odkształceń sprężystych.

Wektor R:

$$R_i^g = \omega^g J_\xi^g \frac{dW^g}{du_i}, \quad {}^eR_i := {}^eR_i + R_i^g$$

$$i \in \{1, \dots, 24\}$$

Ramka 5.1d: Obliczenie wkładu elementu do wektora rezydualnego \mathbf{R} .

Wyznaczanie wektora P

Zapis niniejszej procedury w sposób szczególny ujawnia zalety technik przetwarzania symbolicznego. Zostaną wykorzystane formuły zapisane w ramach (5.1a)–(5.1d), dzięki czemu procedura analizy wrażliwości sprowadza się do zdefiniowania wektora \mathbf{P} zgodnie ze wzorem (4.2). Ramka 5.2 zawiera odpowiedni pseudokod procedury SSE.

Macierz \mathbf{K} :

$$K_{ij}^g = \frac{dR_i^g}{du^j}, \quad {}^eK_{ij} := {}^eK_{ij} + K_{ij}^g$$

$$i, j \in \{1, \dots, 24\}$$

Ramka 5.1e: Obliczenie wkładu elementu macierzy stycznej \mathbf{K}

Wektor \mathbf{P} obliczany jest niezależnie dla każdego parametru zadania. W przypadku elementu hipersprężystego parametrami ϕ_k mogą być np. stałe materiałowe E i ν lub też parametry opisujące kształt początkowy obszaru Ω^h . Wielkości $d\mathbf{X}_m/d\phi_s$ wykorzystane w ramce 5.2a oznaczają wrażliwość kształtu początkowego na dany parametr ϕ_s . Są wyliczane tylko raz, w fazie inicjalizacyjnej analizy.

Procedura SSE

- Inicjalizacja i dane wejściowe (ramka 5.1a)

Dla każdego punktu Gaussa g :

- Zmienne kinematyczne (ramka 5.1b)
- Związki konstytutywne (ramka 5.1c)
- Wektor \mathbf{R} (ramka 5.1d)
- Wektor \mathbf{P} (ramka 5.2a)

Ramka 5.2: Procedura SSE: wyznaczanie wkładu elementu do wektora \mathbf{P} .

Wektor \mathbf{P} dla parametru ϕ_s :

$$P_i^g = \sum_{k=1}^8 \frac{\partial R_i^g}{\partial {}^e\mathbf{X}^k} \frac{d {}^e\mathbf{X}^k}{d\phi_s} + \frac{\partial R_i^g}{\partial \phi_s}, \quad {}^eP_i := {}^eP_i + P_i^g, \quad i \in \{1, \dots, 24\}$$

Ramka 5.2a: Obliczenie wkładu elementu do wektora \mathbf{P} dla parametru ϕ_s

5.2. Wyszukiwanie kontaktu

W przeciwieństwie do elementów objętościowych lub standardowych elementów powierzchniowych, elementy kontaktowe charakteryzują się zmienną strukturą. Część węzłów, odpowiadająca powierzchni *slave*, jest ustalona, natomiast w trakcie analizy zmienia się konfiguracja węzłów odpowiadająca powierzchni *master*. Jest to podyktowane potrzebą znalezienia, w obrębie elementu, prawidłowej parametryzacji powierzchni *master* oraz rzutu prostopadłego węzła *slave* na tę powierzchnię. Zgrupowanie węzłów *slave* i *master* w ramach elementu kontaktowego będziemy nazywać *parą kontaktową*. Algorytm wyszukiwania kontaktu będzie miał na celu znalezienie właściwych par kontaktowych czyli takich, które umożliwią wyznaczenie rzutu prostopadłego.

W ramach niniejszej pracy, moduł *AceFEM* został rozszerzony o procedurę wyszukiwania kontaktu, wywoływaną na każdym kroku iteracyjnym metody Newtona-Raphsona. Algorytm wyszukiwania składa się z trzech faz:

1. globalne wyszukiwanie par węzeł-segment,
2. lokalne wyszukiwanie par węzeł-segment,
3. uaktualnienie struktury elementów.

Pierwsza faza (podrozdział 5.2.1) polega na zgrubnym znalezieniu dla każdego węzła *slave* odpowiadającego mu segmentu *master*. W tej fazie, algorytm wyszukiwania jest niezależny od rodzaju parametryzacji powierzchni kontaktowej, dlatego potrzebna jest druga faza – lokalna – w której w sposób dokładny określa się parę (węzeł *slave*)-(segment *master*). Zostanie to przybliżone w podrozdziale 5.2.2. W ostatnim kroku, w oparciu o znalezione segmenty *master*, uaktualniana jest struktura węzłów *master* w elementach kontaktowych. Oprócz węzłów potrzebnych do parametryzacji powierzchni *master*, umieszczane są również węzły związane z innymi rodzajami pól (np. temperatura).

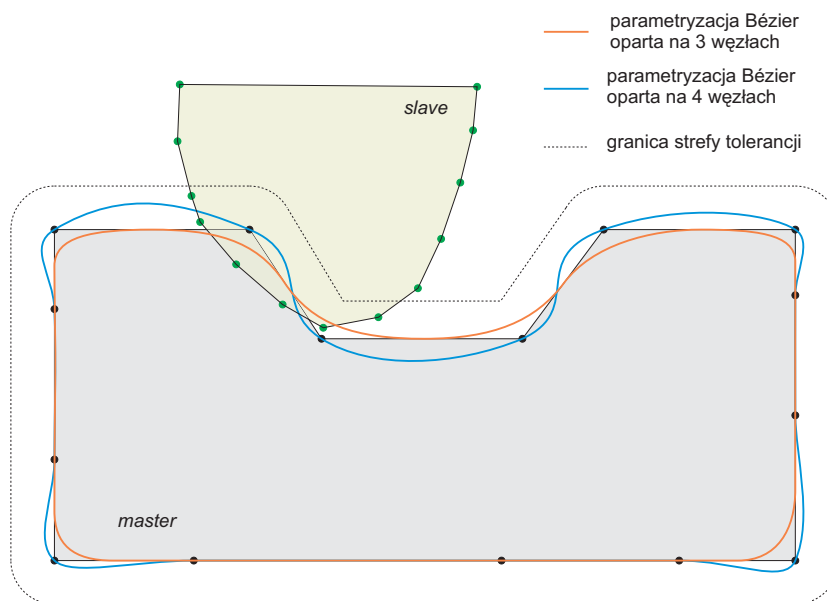
5.2.1. Globalne wyszukiwanie par węzeł-segment

W ogólności można rozpatrywać wiele kontaktujących się ciał. Dla stosowanego w niniejszej pracy podejścia *master-slave* konieczne jest określenie wzajemnych relacji dla każdej pary ciał. Jako że dla N ciał występuje $N \times (N - 1)/2$ relacji *master-slave*, w niniejszej rozprawie zaproponowano uproszczone podejście polegające na ponumerowaniu ciał, a przez to ich liniowe uporządkowanie. Wyszukiwanie kontaktu przeprowadzane jest pomiędzy węzłami konkretnego ciała, traktowanego jako *slave*, a segmentami innych ciał, będących ciałami *master* (według ustalonego wcześniej porządku).

Zakładamy, że brzeg każdego zdyskretyzowanego ciała *master* składa się z odcinków (2D) lub (niekoniecznie planarnych) wieloboków (3D), które będziemy nazywali dalej *segmentami*. Pierwsza faza wyszukiwania kontaktu ma na celu znalezienie dla danego węzła *slave* najbliższego mu segmentu w którymś z ciał *master* lub wykluczenie istnienia kontaktu w przypadku, gdy najbliższy segment jest zbyt daleko. Dokładniej, w przypadku gdy węzeł *slave* leży wewnątrz któregoś ciała *master*, wtedy kontakt zachodzi. Natomiast gdy węzeł *slave* nie leży wewnątrz któregośkolwiek ciała *master*, wtedy kontakt zachodzi o ile odległość do najbliższego segmentu jest nie większa niż pewien ustalony współczynnik tolerancji d_{tol} (por. rys. 5.2.1). Potrzeba istnienia owego marginesu o grubości d_{tol} wynika z niedokładności z jaką proste segmenty przybliżają powierzchnię *master*.

Takie postawienie problemu wymaga określenia odpowiedniej funkcji odległości między węzłem a segmentem. Do znalezienia najbliższego segmentu wystarczająca jest funkcja odległości punktu od zbioru, gdzie zbiorem jest otoczka wypukła węzłów segmentu (w przypadku 3D może to być wielościan). Do określenia tego czy węzeł leży wewnątrz czy na zewnątrz ciała potrzebna jest informacja o orientacji segmentów¹. Zastosowano uproszczenie polegające na tym, że jeżeli węzeł *slave* leży na zewnątrz najbliższego segmentu to uznaje się, że leży na zewnątrz ciała *master*. Takie uproszczenie może w szczególnych przypadkach (por. rys. 5.2.2) błędnie zakwalifikować lub

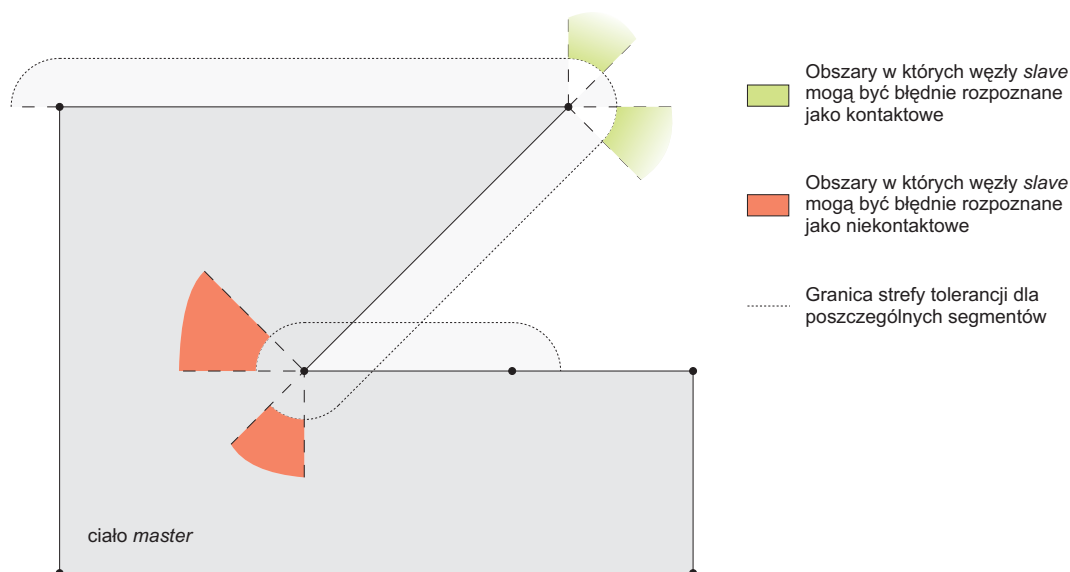
¹W przypadku segmentów nieplanarnych trzeba uogólnić pojęcie orientacji oraz zdefiniować dokładnie co oznacza *wewnątrz* i *na zewnątrz*.



Rysunek 5.2.1: Wyszukiwanie kontaktu. Przykładowa konfiguracja z zaznaczoną strefą tolerancji oraz dwiema możliwymi parametryzacjami powierzchni *master*.

wykluczyć daną parę jako kontaktową. Błędne zakwalifikowanie najbliższej pary jako kontaktowej spowoduje jedynie niepotrzebne obliczenie zmiennych kinematycznych w elemencie. Groźny jest natomiast przypadek odwrotny, gdyż może prowadzić do błędnych wyników oraz do problemów ze zbieżnością. Groźba błędu wyszukiwania kontaktu występuje w szczególnych (rzadko występujących) przypadkach gdy kąt α między sąsiednimi segmentami spełnia zależność $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Dlatego zastosowano najprostsze rozwiązanie tego problemu, określając odpowiednio duży współczynnik tolerancji d_{tol} .

W ramach niniejszej pracy do globalnego wyszukiwania par kontaktowych użyto tzw. algorytmu siłowego (metoda *brute-force*), w którym dla każdego węzła *slave* sprawdzane są odległości kolejno do wszystkich segmentów *master* (por. ramka 5.3). Zaletą takiego podejścia jest prostota i brak dodatkowych struktur danych (niska złożoność pamięciowa), natomiast oczywistą wadą jest wysoka złożoność obliczeniowa rzędu $O(NM)$, gdzie N i M oznaczają odpowiednio liczbę węzłów *slave* oraz liczbę segmentów na powierzchniach *master*. Niniejsza implementacja była wystarczająca do zagadnień rozpatrywanych w pracy, w których analizowano kontakt kilku ciał, a zazwyczaj kontakt tylko dwóch ciał. W przypadku zwiększania udziału elementów powierzchniowych względem objętościowych, koszt wyszukiwania kontaktu byłby nieproporcjonalnie duży w stosunku do pozostałych operacji MES i należałoby użyć bardziej złożonego algorytmu. W literaturze można znaleźć wiele podejść do globalnego wyszukiwania kontaktu, np. oparte na sortowaniu kubełkowym (Benson i Hallquist, 1990; Munjiza i in., 2006) czy na podejściu hierarchicznym (Zhong, 1993; Bruneel i Rycke, 2002; Feng i Owen, 2002; Yang i Laursen, 2008). Przy zastosowaniu relatywnie prostych technik można osiągnąć złożoność czasową rzędu $O(V \log V)$, gdzie V oznacza całkowitą liczbę obiektów (np. węzłów lub segmentów). Bardziej zaawansowane algorytmy są w stanie obniżyć (zamortyzowaną) złożoność czasową do liniowej (Munjiza i in., 2006; Yang i Laursen, 2008). Niniejsza implementacja może w przyszłości stanowić rozwiązanie referencyjne przy opracowywaniu skuteczniejszych metod wyszukiwania



Rysunek 5.2.2: Wyszukiwanie kontaktu. Zaznaczono strefy, w których w szczególnych okolicznościach może dojść do błędnego zakwalifikowania węzła jako kontaktowy bądź niekontaktowy.

par kontaktowych.

5.2.2. Lokalne wyszukiwanie par węzeł-segment

Procedura globalnego wyszukiwania kontaktu wstępnie ustala pary węzeł-segment na podstawie odpowiednio zdefiniowanej funkcji odległości. Owa funkcja zależy jedynie od geometrii segmentu *master* i jest niezależna od funkcji odległości określonej na poziomie konkretnego elementu kontaktowego. Dlatego też zdarza się, co zostanie pokazane w rozdziale 6.2.1, że dla danego węzła *slave* zamiast prawidłowej strony *master* wyszukany jest któryś z jej sąsiadów.

Część lokalna wyszukiwania kontaktu służy do ustalenia właściwego sąsiada. W tym celu, w elemencie odpowiadającym wstępnie wyszukanej parze kontaktowej wywoływana jest procedura LCS, która wyznacza parametry $\bar{\xi}^\alpha$ rzutu prostopadłego punktu *slave* na płat powierzchni *master*. Schemat tej procedury podano w rozdziale 6.1.1. Uzyskanie parametrów spełniających warunek $-1 \leq \bar{\xi}^\alpha \leq 1$, czyli należących do dziedziny parametryzacji płata oznacza, że para kontaktowa jest określona prawidłowo. W przeciwnym przypadku, wartości $\bar{\xi}^\alpha$ podpowiadają, którego z sąsiadów wybrać. Powyższa procedura przeprowadzana jest dopóty, dopóki nie zostanie znaleziona prawidłowa para kontaktowa lub nie zostanie przekroczona maksymalna liczba zmian.

Wyszukiwanie par kontaktowych ($\mathbf{v}_i, \mathbf{s}_i^{min}$)

Dla każdego węzła *slave* \mathbf{v}_i wykonaj:

$$d_i^{min} := \infty$$

$$\mathbf{s}_i^{min} := \emptyset$$

Dla każdego segmentu *master* \mathbf{s}_j wykonaj:

Jeżeli odległość($\mathbf{v}_i, \mathbf{s}_j$) $< d_i^{min}$ to:

$$d_i^{min} := \text{odległość}(\mathbf{v}_i, \mathbf{s}_j)$$

$$\mathbf{s}_i^{min} := \mathbf{s}_j$$

Jeżeli \mathbf{v}_i leży na zewnątrz \mathbf{s}_i^{min} oraz $d_i^{min} > d_{tol}$ to:

$$d_i^{min} := \infty$$

$$\mathbf{s}_i^{min} := \emptyset$$

Ramka 5.3: Algorytm siłowy wyszukiwania par węzeł-segment (wyszukiwanie globalne). Dla każdego węzła *slave* \mathbf{v}_i wyszukiwany jest najbliższy segment *master* \mathbf{s}_i^{min} .

Rozdział 6

Element kontaktowy

Poza rozbudową systemu omówioną w rozdziale 5, drugim elementem niniejszej pracy jest implementacja serii dwu- i trójwymiarowych elementów kontaktowych. W podrozdziale 6.1 przedstawiono szablony procedur elementu kontaktowego. Podrozdział 6.2 porusza problem ciągłości zmiennych kinematycznych w elementach kontaktowych, mającej wpływ zarówno na jakość wyników jak i na sam przebieg procedury obliczeniowej.

6.1. Szablon elementu kontaktowego

Zastosowanie narzędzi do symbolicznego przetwarzania formuł (*AceGEN/AceFEM*, *Mathematica*) pozwoliło na przejrzysty zapis kodu procedur dla elementów kontaktowych. Dzięki temu możliwy stał się też podział kodu danej procedury na, w pewnym stopniu od siebie niezależne, fragmenty. Taki podział pozwala na traktowanie procedury jako szablonu do tworzenia innych elementów – np. zmiana sposobu wygładzania powierzchni wymaga zmian jedynie we fragmentach dotyczących inicjalizacji (zmianie może ulec struktura elementu) oraz wyznaczania gładkiej parametryzacji $\Psi(\xi^1, \xi^2, \mathbf{x}_M^j)$.

6.1.1. Lokalne wyszukiwanie kontaktu

Przedstawiony w podrozdziale 5.2 algorytm globalnego wyszukiwania kontaktu w pierwszej fazie działania przeprowadza wstępne wyszukiwanie par kontaktowych. W drugiej fazie prowadzone są cyklicznie: weryfikacja i uaktualnianie par kontaktowych. Weryfikacja polega na wykonaniu lokalnego wyszukiwania kontaktu dla każdego tymczasowo utworzonego elementu kontaktowego. Wynikiem tej procedury są współrzędne parametryczne $\bar{\xi}^\alpha$ rzutu prostopadłego punktu *slave* na powierzchnię *master*. Spełnienie warunku

$$-1 \leq \bar{\xi}^\alpha \leq 1, \quad \alpha = 1, 2$$

odpowiada sytuacji gdy para kontaktowa jest prawidłowo dobrana (por. rozdział 6.2.1). W przeciwnym przypadku wyznaczone parametry wskazują procedurze globalnej na odpowiedni sąsiadujący segment powierzchni *master*.

Każdy element kontaktowy, o ile to konieczne, posiada zaimplementowaną procedurę lokalnego wyszukiwania kontaktu (w skrócie LCS). Procedura (ramka 6.1) wywoływana jest z poziomu algorytmu globalnego wyszukiwania kontaktu i sprowadza się

do przeprowadzenia rzutu prostopadłego węzła *slave* na płat powierzchni *master*. Procedura zwraca parę liczb $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2)$ oraz zapamiętuje do dalszego wykorzystania wielkości $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{g}_N)$.

Procedura LCS

$\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_M^j$ – aktualne położenie węzła *slave* i węzłów *master*

$\Psi(\xi^1, \xi^2; \mathbf{x}_M^j)$ – parametryzacja płata powierzchni *master*

$\mathbf{b} \equiv \{\xi^1, \xi^2, g_N\} := \{0, 0, 0\}$ – punkt startowy procedury iteracyjnej

$i := 1$

Powtarzaj:

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha := \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\alpha}, \quad \mathbf{n} := \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|}$$

$$\mathbf{H} := \Psi + \mathbf{n} g_N - \mathbf{x}_S$$

$$\mathbf{M} := \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{b}}$$

$$\Delta \mathbf{b} := -(\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{H}$$

$$\mathbf{b} := \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$$

$$i := i + 1$$

dopóki $\|\Delta \mathbf{b}\| > \varepsilon$ oraz $i \leq i_{max}$

$$\bar{\boldsymbol{\xi}} := \{b_1, b_2\}, \quad \bar{g}_N := b_3$$

Zwróć wartości $\{\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2\}$

Ramka 6.1: Procedura lokalnego wyszukiwania kontaktu (rzut prostopadły)

6.1.2. Wektor rezydualny i macierz styczna

W niniejszym podrozdziale zostanie zapisany szablon procedury wyznaczania wkładu elementu kontaktowego do wektora rezydualnego \mathbf{R} i macierzy stycznej \mathbf{K} . Ogólny opis tej procedury został przedstawiony w podrozdziale 3.2.2. W ramce 6.2 została przedstawiona część główna, w której można wyodrębnić poszczególne podprocedury opisane dalej w ramach 6.2a–6.2f-2.

Przebieg procedury jest uzależniony od tego, czy dla powiązanej z danym elementem części *slave* została znaleziona część *master*. Jeżeli tak, wtedy wywoływane są podprocedury zapisane w ramach 6.2b–6.2f-1, które wymagają istnienia strony *master* między innymi po to, aby wyznaczyć punkt rzutowania na powierzchnię *master*. W przeciwnym przypadku, wywoływane są podprocedury zapisane w ramach 6.2e-2–6.2f-2, zawierające wyrażenia dla warunku separacji $\hat{\lambda}_N > 0$, które są dobrze określone niezależnie od istnienia stony *master*.

Podprocedura w ramce 6.2b wyznacza punkt rzutowania węzła *slave* na sparymetryzowany płat powierzchni *master*. Założono, że parametry zostały już wyznaczone

Procedura SKR

- Inicjalizacja i dane wejściowe (ramka 6.2a)

Jeżeli element ma aktywną stronę *master* to wyznaczyć:

- Lokalny układ bazowy (ramka 6.2b)
- Zmienne kinematyczne kontaktu (ramka 6.2c)
- Warunki kontaktowe (ramka 6.2d)
- Wektor \mathbf{R} (ramka 6.2e-1)
- Macierz \mathbf{K} (ramka 6.2f-1)

w przeciwnym przypadku wyznaczyć:

- Wektor \mathbf{R} (brak kontaktu) (ramka 6.2e-2)
- Macierz \mathbf{K} (brak kontaktu) (ramka 6.2f-2)

Ramka 6.2: Procedura SKR: wyznaczanie wkładu elementu do wektora \mathbf{R} i macierzy \mathbf{K} .

przez procedurę LCS (ramka 6.1). Jako wynik otrzymujemy lokalny układ bazowy oraz pochodną rozwiązania problemu wewnętrznego po stopniach swobody $\partial \mathbf{b} / \partial u^m$. Uzyskana zależność \mathbf{b} od u^m jest dalej automatycznie uwzględniana podczas wykonywania operacji różniczkowania. Zwróćmy również uwagę na fakt, że zapis symboliczny dalszej części procedury SKR jest niezależny od konkretnego wyboru parametryzacji.

W ramce 6.2c została użyta definicja (6.4) miary długości poślizgu $\Delta \bar{\xi}^\alpha$. Głębsza dyskusja na ten temat została przeprowadzona w rozdziale 6.2.2.

Inicjalizacja i dane wejściowe:

${}^e \mathbf{X}^k$ – położenia początkowe węzłów

${}^e \mathbf{u}^k, {}^{pe} \mathbf{u}^k$ – przemieszczenia węzłów: aktualne i z poprzedniego kroku

$\mathbf{x}^k = {}^e \mathbf{X}^k + {}^e \mathbf{u}^k$ – aktualne położenia węzłów

${}^p \mathbf{x}^k = {}^e \mathbf{X}^k + {}^{pe} \mathbf{u}^k$ – położenia węzłów z poprzedniego kroku

$\mathbf{X}_S, \mathbf{x}_S$ – położenie początkowe i aktualne węzła *slave*

$\mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^{nsl}$ – położenia początkowe sąsiadów węzła *slave*

${}^e \boldsymbol{\lambda} = \{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3\}$ – wektor mnożników Lagrange’a

u^m – wektor stopni swobody związanych z przemieszczeniami ${}^e \mathbf{u}^k$

μ, ρ – współczynnik tarcia Coulomba i parametr regularyzacyjny

$$A_0 := \frac{1}{4} \left(|(\mathbf{X}^{nsl} - \mathbf{X}_S) \times (\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}_S)| + \sum_{i=2}^{nsl-1} |(\mathbf{X}^i - \mathbf{X}_S) \times (\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}_S)| \right)$$

– pole powierzchni związane z punktem całkowania \mathbf{X}_S (rys. 3.2.3)

$k \in \{1, \dots, nnod\}, \quad m \in \{1, \dots, 3 \cdot nnod\}$

– indeksy dla węzłów i dla przemieszczeniowych stopni swobody

Ramka 6.2a: Inicjalizacja i dane wejściowe

Lokalny układ bazy:

$\Psi(\xi^1, \xi^2; \mathbf{x}^k)$ – parametryzacja płata powierzchni *master* (por. rozdz. 3.3.1)

$\bar{\mathbf{b}} \equiv \{\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{g}_N\}$ – wielkości wyznaczone w procedurze LCS

$\bar{\mathbf{x}}_M := \Psi(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2; \mathbf{x}^k)$ – punkt rzutowania na powierzchnię *master*

$\boldsymbol{\tau}_\alpha := \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_M}{\partial \bar{\xi}^\alpha}$, $\mathbf{n} := \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|}$ – lokalny układ bazy

$m_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta$, $m^{\alpha\beta} = (m_{\alpha\beta})^{-1}$, $\boldsymbol{\tau}^\beta = m^{\beta\alpha} \boldsymbol{\tau}_\alpha$ – macierze metryczne i kobaza

$\mathbf{H} := \bar{\mathbf{x}}_M + \mathbf{n} \bar{g}_N - \mathbf{x}_S$

$\mathbf{M} := \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \bar{\mathbf{b}}}$

$\frac{\partial \bar{\mathbf{b}}}{\partial u^m} := \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u^m}$ – pochodna param. wewnętrznych po stopniach swobody

Ramka 6.2b: Lokalny układ bazy

Zmienne kinematyczne kontaktu:

${}^p\bar{\mathbf{x}}_M := \Psi(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2; {}^p\mathbf{x}^k)$ – punkt o współrzędnych $\bar{\xi}_\alpha$ w poprzedniej konfiguracji

${}^p\boldsymbol{\tau}^\alpha$ – kobaza związana z punktem ${}^p\bar{\mathbf{x}}_M$ (analogicznie do $\boldsymbol{\tau}^\alpha$ – ramka 6.2b)

$\Delta \bar{\xi}^\alpha := ({}^p\bar{\mathbf{x}}_M - {}^p\mathbf{x}_S) \cdot {}^p\boldsymbol{\tau}^\alpha$ – miara długości poślizgu (por. rozdz. 6.2.2)

$(\bar{\xi}^\alpha)^m := \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_S}{\partial u^m} - \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_M}{\partial u^m} \Big|_{\frac{\partial \bar{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{u}}=0} \right) \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha$ – wariacja długości poślizgu

$(\bar{g}_N)^m := \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_S}{\partial u^m} - \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_M}{\partial u^m} \Big|_{\frac{\partial \bar{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{u}}=0} \right) \cdot \mathbf{n}$ – wariacja miary odległości

Ramka 6.2c: Zmienne kinematyczne kontaktu

Warunki kontaktowe:

$\lambda_{T_\alpha} := {}^e\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha$, $\lambda_N := {}^e\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}$ – składowe wektora ${}^e\boldsymbol{\lambda}$ w bazie stycznej

$\hat{\lambda}_{T_\alpha} := \lambda_{T_\alpha} + \rho \Delta \bar{\xi}^\beta m_{\beta\alpha}$, $\hat{\lambda}_N := \lambda_N + \rho g_N$ – rozszerzone mnożniki Lagrange’a

Wyznacz: T_N^{eff} , $T_{T_\alpha}^{\text{eff}}$, $g_{N,\text{eff}}$, $\Delta \bar{\xi}_{\text{eff}}^\alpha$ – składowe uogólnionych sił (rów. (2.38)-(2.41))

Ramka 6.2d: Warunki kontaktowe

Wektor \mathbf{R} :

${}^e\mathbf{R} := [\mathbf{R}_u \ \mathbf{R}_\lambda]$ – wektor ${}^e\mathbf{R}$ jako połączenie wektorów \mathbf{R}_u i \mathbf{R}_λ

$$R_u^m := A_0 \left(T_N^{\text{eff}} (\bar{g}_N^*)^m + T_{T_\alpha}^{\text{eff}} (\bar{\xi}^\alpha)^m \right), \quad m \in \{1, \dots, 3 \cdot \text{nnod}\}$$

$$\mathbf{R}_\lambda := A_0 \left(g_{N_{\text{eff}}} \mathbf{n} + \Delta \bar{\xi}_{\text{eff}}^\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha \right)$$

Ramka 6.2e-1: Wyznaczanie wkładu elementu do wektora \mathbf{R} .

Macierz \mathbf{K} :

${}^e\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\lambda} \\ \mathbf{K}_{\lambda u} & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$ – macierz ${}^e\mathbf{K}$ skomponowana z odpowiednich podmacierzy

$$K_{uu}^{mn} := \frac{\partial R_u^m}{\partial u^n}, \quad K_{u\lambda}^{mj} := \frac{\partial R_u^m}{\partial \lambda^j}, \quad K_{\lambda u}^{in} := \frac{\partial R_\lambda^i}{\partial u^n}, \quad K_{\lambda\lambda}^{ij} := \frac{\partial R_\lambda^i}{\partial \lambda^j}$$

$$m, n \in \{1, \dots, 3 \cdot \text{nnod}\}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Ramka 6.2f-1: Wyznaczanie wkładu elementu do macierzy \mathbf{K} .

Wektor \mathbf{R} (brak kontaktu):

${}^e\mathbf{R} := [\mathbf{R}_u \ \mathbf{R}_\lambda]$ – wektor ${}^e\mathbf{R}$ jako połączenie wektorów \mathbf{R}_u i \mathbf{R}_λ

$$R_u^m := 0, \quad m \in \{1, \dots, 3 \cdot \text{nnod}\}$$

$$\mathbf{R}_\lambda := -A_0 \frac{1}{\rho} {}^e\boldsymbol{\lambda}$$

Ramka 6.2e-2: Wyznaczanie wkładu elementu do wektora \mathbf{R} – przypadek nieznaledzenia strony *master* przez procedurę globalnego wyszukiwania kontaktu.

Macierz \mathbf{K} (brak kontaktu):

${}^e\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\lambda} \\ \mathbf{K}_{\lambda u} & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$ – macierz ${}^e\mathbf{K}$ skomponowana z odpowiednich podmacierzy

$$K_{uu}^{mn} := 0, \quad K_{u\lambda}^{mj} := 0, \quad K_{\lambda u}^{in} := 0, \quad K_{\lambda\lambda}^{ij} := -A_0 \frac{1}{\rho} \delta^{ij}$$

$$m, n \in \{1, \dots, 3 \cdot \text{nnod}\}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Ramka 6.2f-2: Wyznaczanie wkładu elementu do macierzy \mathbf{K} – przypadek nieznaledzenia strony *master* przez procedurę globalnego wyszukiwania kontaktu.

6.1.3. Moduł analizy wrażliwości

Podobnie jak w przypadku analizy wrażliwości dla elementu hipersprężystego (rozdział 5.1.2), tak i w tym przypadku możliwe jest ponowne wykorzystanie już raz zapisanych podprocedur. W ramce 6.3a skorzystano ze wzoru (4.8). Możliwe było pominięcie niektórych członów z uwagi na fakt, że wektory rezydualne ${}^e\mathbf{R}$ i \mathbf{H} nie zależą od wektora parametrów wewnętrznych z poprzedniego kroku, oraz że wektor \mathbf{H} nie zależy od wektora przemieszczeń z poprzedniego kroku.

Procedura SSE

- **Inicjalizacja i dane wejściowe** (ramka 6.2a)

Jeżeli element ma aktywną stronę *master* to wyznaczyć:

- **Lokalny układ bazowy** (ramka 6.2b)
- **Zmienne kinematyczne kontaktu** (ramka 6.2c)
- **Warunki kontaktowe** (ramka 6.2d)
- **Wektor \mathbf{R}** (ramka 6.2e-1)
- **Wektor \mathbf{P}** (ramka 6.3a)

w przeciwnym przypadku:

$${}^e\mathbf{P} := \mathbf{0}$$

Ramka 6.3: Procedura SSE: wyznaczanie wkładu elementu do wektora \mathbf{P} .

Wektor \mathbf{P} dla parametru ϕ_s :

$${}^e\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{nnode} \left(\frac{\partial {}^e\mathbf{R}}{\partial {}^{pe}\mathbf{u}^k} \frac{d {}^{pe}\mathbf{u}^k}{d\phi_s} + \frac{\partial {}^e\mathbf{R}}{\partial {}^e\mathbf{X}^k} \frac{d {}^e\mathbf{X}^k}{d\phi_s} \right) + \frac{\partial {}^e\mathbf{R}}{\partial \phi_s} - \frac{\partial {}^e\mathbf{R}}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{M}^{-1} \left[\sum_{k=1}^{nnode} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial {}^e\mathbf{X}^k} \frac{d {}^e\mathbf{X}^k}{d\phi_s} \right) + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \phi_s} \right]$$

Ramka 6.3a: Obliczenie wkładu elementu do wektora \mathbf{P} dla parametru ϕ_s .

6.2. Ciągłość zmiennych kinematycznych

W niniejszym podrozdziale koncentrujemy się na dwóch istotnych aspektach związanych z zastosowaniem Metody Elementów Skończonych dla zagadnień kontaktowych. Każde z poruszanych zagadnień ma nieco inny charakter, lecz ich wspólną cechą jest dążenie do uniknięcia nieciągłości zmiennych kinematycznych w momencie zmiany strony *master* w elemencie kontaktowym. Owe nieciągłości mogą wpływać niekorzystnie na dokładność rozwiązania (skokowe zmiany sił kontaktowych) zarówno problemu bezpośredniego jak i problemu wrażliwości. Co więcej, mogą prowadzić do problemów ze zbieżnością (oscylacje), a w krańcowych przypadkach mogą uniemożliwić przeprowadzenie obliczeń.

W podrozdziale 6.2.1 zamieszczony jest przykład pokazujący to jak duże znaczenie dla ciągłości zmiennych kinematycznych ma prawidłowe określenie par kontaktowych. W podrozdziale 6.2.2 poruszony został problem poprawnego zdefiniowania miary długości poślizgu – chcielibyśmy zachować ciągłość przynajmniej dla kierunku tego wektora na połączeniu płatów powierzchni.

6.2.1. Lokalne wyszukiwanie kontaktu

W niniejszym podrozdziale przedstawiono jeden z wielu przypadków mogących się pojawić w praktyce, w którym niezbędne jest zastosowanie lokalnego wyszukiwania kontaktu przy wyszukiwaniu globalnym. Na podstawie analizy tego przypadku wyjaśniony zostanie problem błędnego określenia pary kontaktowej i pokazane będą konsekwencje jakie się z tym wiążą.

Rozpatrzmy trójwymiarowy problem kontaktowy, który rozwiązywany jest przy zastosowaniu podejścia opisanego w niniejszej pracy (rozdział 3). Zastosowano wygładzenie powierzchni *master* powierzchnią sklejaną z płatów Bézier opartych na 16 węzłach. Przeanalizowana zostanie hipotetyczna konfiguracja, występująca w konkretnym kroku iteracyjnym.

Na rysunku 6.2.1 przedstawiono rzut fragmentu powierzchni *master* na płaszczyznę XY . Na rysunku oznaczono dwa sąsiadujące segmenty, związane z nimi dwie grupy punktów kontrolnych oraz zarys brzegów dwóch płatów odpowiadających poszczególnym grupom punktów. Całość przecięto płaszczyzną $y = \bar{y}$ prostopadłą do rysunku, na której oznaczono przecięcie granic segmentów (punkty x_1^e , x_{12}^e i x_2^e) oraz granic płatów (punkty P , Q , R). Widać również punkt *slave* oznaczony jako \mathbf{x}_S , leżący “nad” segmentem 2.

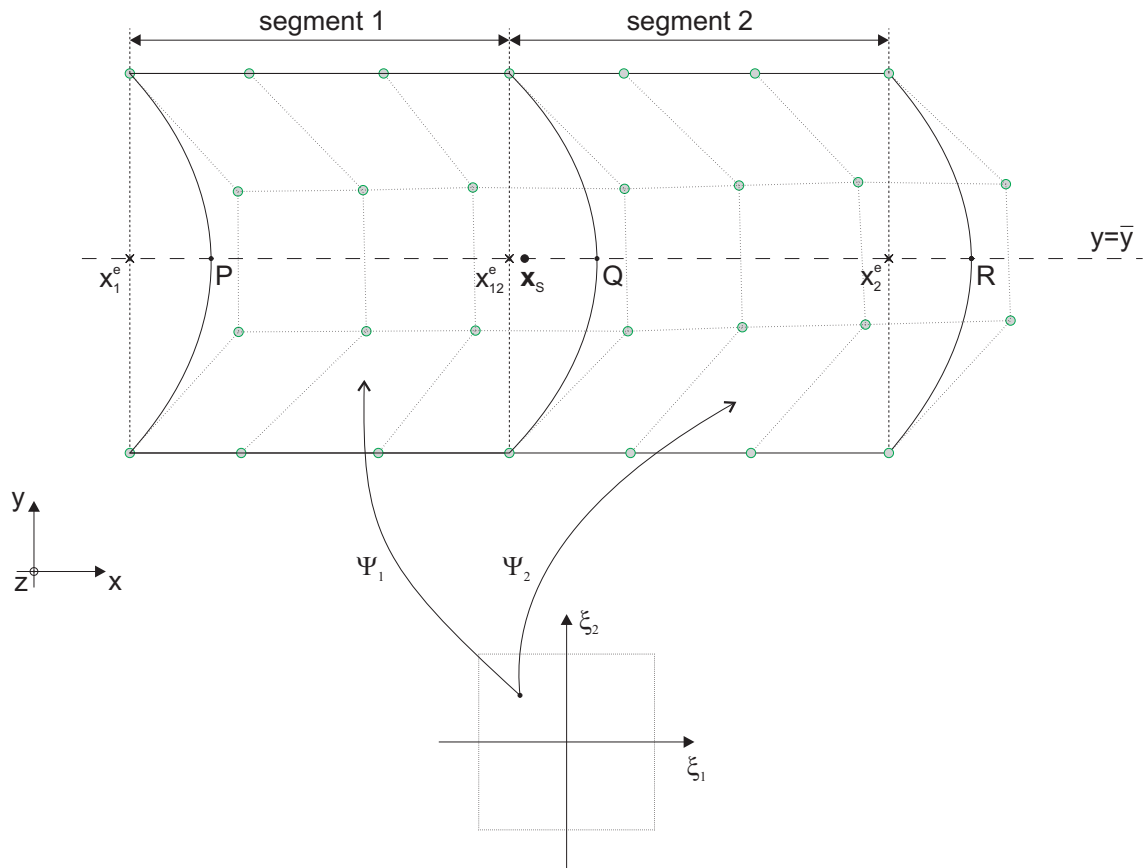
Dla konfiguracji przedstawionej na rys. 6.2.1, procedura globalnego wyszukiwania kontaktu wskaże segment 2 jako leżący najbliżej punktu \mathbf{x}_S . Pomimo tego, że najbliższym segmentem¹ jest segment 2, w rzeczywistości odpowiednim płatem powierzchni nie jest, związany z tym segmentem, płat Ψ_2 ale płat Ψ_1 , związany z segmentem 1. Lepiej jest to widoczne na rys. 6.2.2, który powstał jako przekrój tej samej konfiguracji płaszczyzną $y = \bar{y}$ (oznaczenia punktów na rysunku 6.2.2 są analogiczne do odpowiednich punktów na rys. 6.2.1).

Takie nieprawidłowe określenie pary kontaktowej powoduje nieciągłość przy przejściu punktu \mathbf{x}_S znad segmentu 2 nad segment 1. Mówiąc w uproszczeniu, nieciągłość wynika ze zmiany parametryzacji z Ψ_2 na Ψ_1 , które w tym miejscu nie pokrywają się.

Chcąc to opisać dokładniej załóżmy idealny poślizg punktu \mathbf{x}_S , leżącego nad segmentem 2, po powierzchni opisanej parametryzacją Ψ_2 . W momencie gdy ów punkt znajdzie się nad segmentem 1, wtedy procedura globalnego wyszukiwania kontaktu doprowadzi do zmiany parametryzacji na Ψ_1 . Jako że nie jest to punkt, w którym następuje ciągle (gładkie) przejście pomiędzy płatami, nastąpi skok wartości funkcji odległości g_N .

Z powyższych rozważań wynika, że w niektórych przypadkach zastosowanie procedury lokalnego wyszukiwania kontaktu w ramach wyszukiwania globalnego jest kluczowe dla przeprowadzenia analizy Metodą Elementów Skończonych. Spośród metod

¹W niniejszym wywodzie stosowane jest uproszczenie polegające na założeniu, że najbliższy segment oraz najbliższy płat powierzchni można określić w oparciu o rzut na płaszczyznę XY . W rzeczywistości jest to oczywiście bardziej skomplikowane. Taki zabieg nie wpływa jakościowo na problem, za to pozwala go przedstawić w sposób przejrzysty.



Rysunek 6.2.1: Płaty Bézier rozpięte nad dwoma sąsiednimi segmentami (rzut na płaszczyznę XY). Widoczna niezgodność linii połączenia płatów z granicą między segmentami.

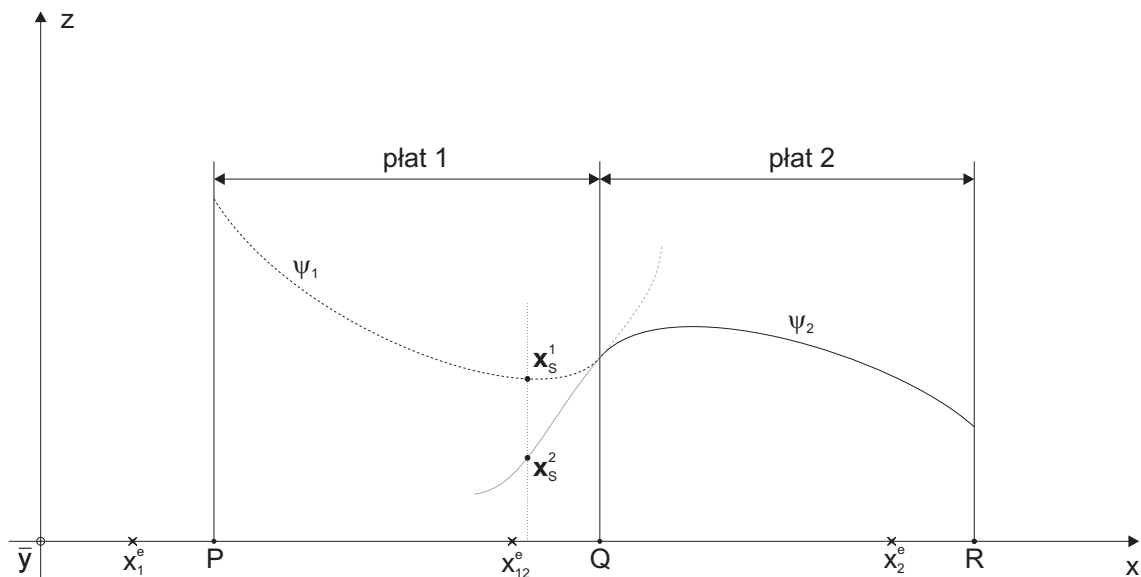
parametryzacji opisanych w niniejszej pracy, procedura LCS jest wymagana w przypadku użycia krzywych Bézier opartych na 4 węzłach, płatów Bézier opartych na 16 węzłach oraz płatów Gregory'ego. W pozostałych przypadkach procedura globalnego wyszukiwania kontaktu bez udziału LCS jest wystarczająca do poprawnego określenia par kontaktowych.

6.2.2. Wyznaczanie $\Delta \mathbf{g}_T$

Równania (2.34) definiujące funkcjonal l_T zawierają wielkość $\Delta \mathbf{g}_T$ będącą miarą drogi poślizgu kontaktujących się ciał. Po dyskretyzacji, jest ona rozumiana jako skończony przyrost określający drogę przebytą przez węzeł *slave* poruszający się względem powierzchni *master*. Można go zdefiniować na wiele sposobów, przy czym istotne jest, aby zachowana była jego ciągłość² względem przemieszczeń, oraz żeby w przypadku braku względnego poślizgu zachodził warunek $\Delta \mathbf{g}_T = \mathbf{0}$. Wielkość $\Delta \mathbf{g}_T$ związana jest z bazą styczną $\boldsymbol{\tau}_\alpha$

$$\Delta \mathbf{g}_T = \Delta \bar{\xi}^\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha$$

²W przypadku modelu tarcia Coulomba wystarczający jest warunek ciągłości jedynie dla kierunku i zwrotu wektora $\Delta \mathbf{g}_T$.



Rysunek 6.2.2: Płaty Bézier rozpięte nad dwoma sąsiednimi segmentami (przekrój płaszczyzną $y = \bar{y}$). Punkt \mathbf{x}_S leży nad segmentem 2, tak więc procedura globalnego wyszukiwania kontaktu błędnie wybrałaby parametryzację 2.

tak więc w dalszej części skoncentrujemy się na wyznaczaniu składowych $\Delta \bar{\xi}^\alpha$.

Pierwszym możliwym podejściem, mającym na celu wyznaczenie przyrostu $\Delta \bar{\xi}^\alpha$, jest określenie go jako różnicy pomiędzy aktualną wartością $\bar{\xi}^\alpha$ a tą z poprzedniego kroku:

$$\Delta \bar{\xi}^\alpha = \bar{\xi}_{t_n}^\alpha - \bar{\xi}_{t_{n-1}}^\alpha. \quad (6.1)$$

Jest to naturalny sposób określania przyrostu drogi w czasie i charakteryzuje go prostota realizacji. Jest jednak nieakceptowalny w przypadku skończonych poślizgów, gdy węzeł *slave* zmienia płat powierzchni *master*. Na rys. 6.2.3 przedstawiono sytuację poślizgu w ramach jednego płata – wtedy wzór (6.1) jest poprawny. Kiedy następuje zmiana płata – tak jak w sytuacji przedstawionej na rys. 6.2.4 – wtedy ten sposób definiowania $\Delta \bar{\xi}^\alpha$ jest błędny.

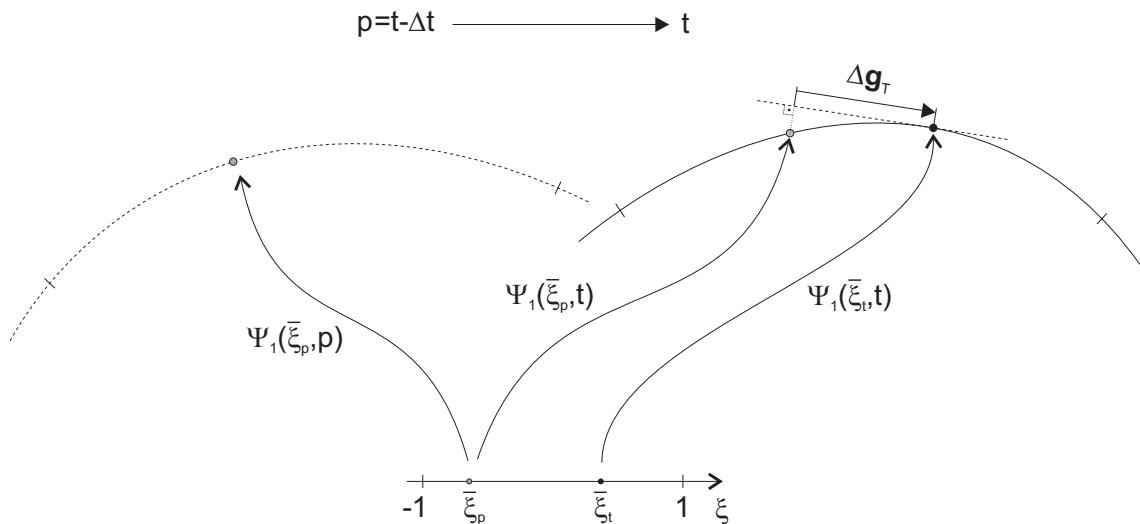
Aby uniknąć problemów przy przechodzeniu z jednego płata powierzchni na inny, można skorzystać z rozwinięcia $\bar{\xi}_{t_n}^\alpha$ w szereg potęgowy wokół punktu $\mathbf{u}_{t_n}^i$

$$\Delta \bar{\xi}^\alpha \simeq \frac{\partial \bar{\xi}_{t_n}^\alpha}{\partial \mathbf{u}_{t_n}^i} (\mathbf{u}_{t_{n-1}}^i - \mathbf{u}_{t_n}^i). \quad (6.2)$$

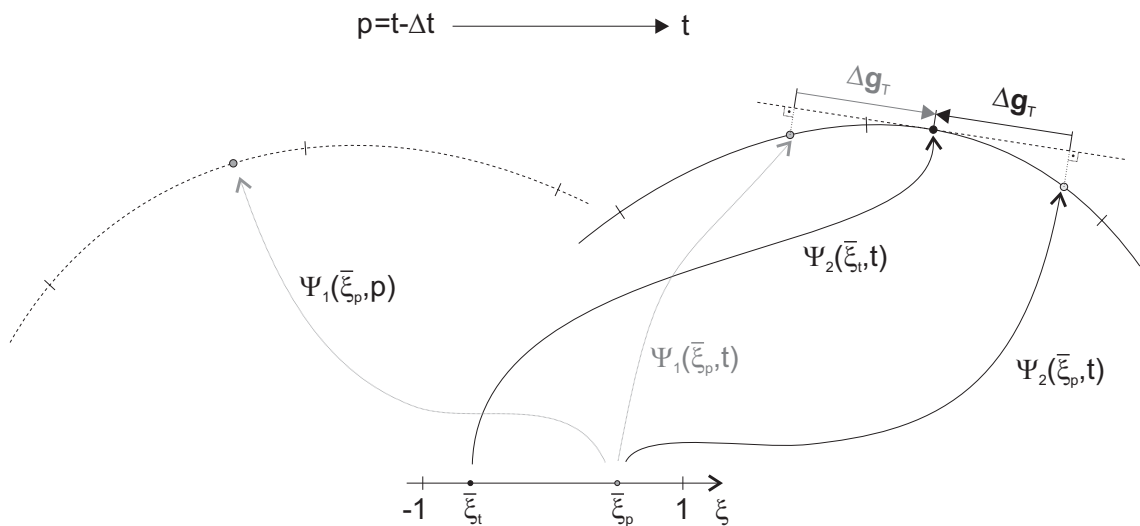
Wiadomo, że istnieje niejawną zależność $\bar{\xi}_{t_n}^\alpha$ od $\mathbf{u}_{t_n}^i$ poprzez rozwiązanie problemu wewnętrznego (rozdział 3.2.2). Wykorzystując ową zależność, równanie (6.2) można zapisać jako

$$[\Delta \bar{\xi}^1, \Delta \bar{\xi}^2, \Delta \bar{g}_N] \simeq \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}_{t_n}^i} (\mathbf{u}_{t_{n-1}}^i - \mathbf{u}_{t_n}^i) \quad (6.3)$$

gdzie \mathbf{H} i \mathbf{M} są odpowiednio residuum i macierzą styczną dla problemu wewnętrznego, wyznaczonymi w punkcie rzutowania $[\bar{\xi}_{t_n}^1, \bar{\xi}_{t_n}^2, \bar{g}_N]$. Niestety, takie podejście prowadzi do pojawienia się w residuum \mathbf{R} skomplikowanych członów. Powoduje to tym większy



Rysunek 6.2.3: Wyznaczanie wielkości $\Delta \mathbf{g}_T$ przy wykorzystaniu różnicy $\xi_t - \xi_p$. Przypadek poślizgu w ramach jednego płata powierzchni.



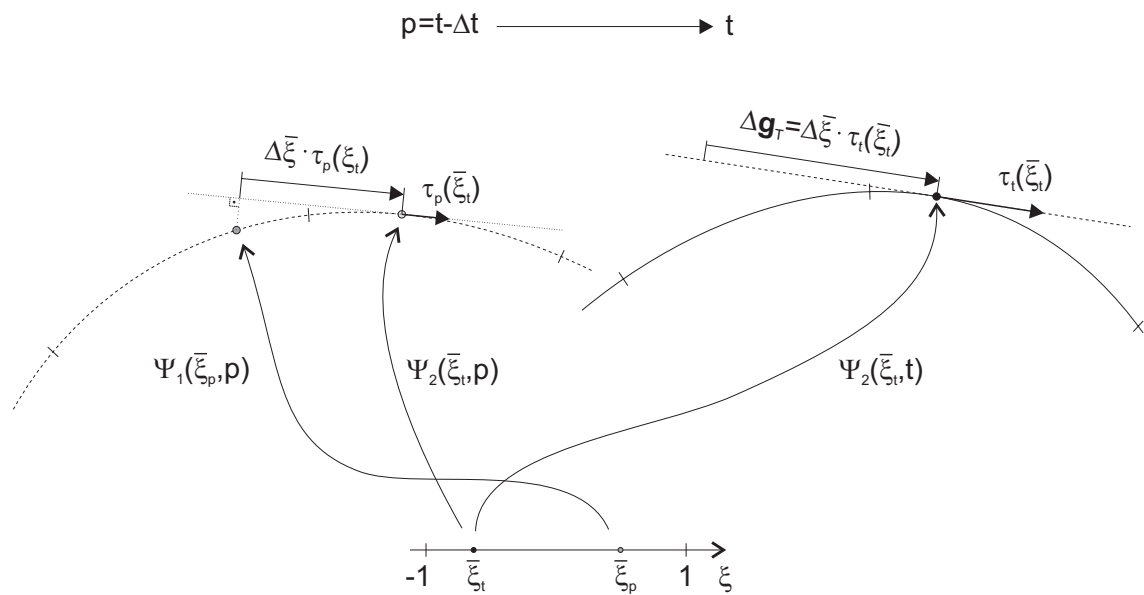
Rysunek 6.2.4: Wyznaczanie wielkości $\Delta \mathbf{g}_T$ przy wykorzystaniu różnicy $\xi_t - \xi_p$. Przypadek poślizgu przy zmianie płata powierzchni powoduje nieprawidłowe oszacowanie $\Delta \mathbf{g}_T$. Na szaro zaznaczono prawidłowe oszacowanie drogi poślizgu.

stopień skomplikowania wyrażeń (kolejna pochodna) podczas wyznaczania macierzy stycznej \mathbf{K} . Wszystko to przekłada się na nieakceptowalnie wysoki koszt obliczeniowy.

Mając na uwadze powyższe wady, w niniejszej pracy zaadoptowano inny sposób wyznaczania $\Delta \bar{\xi}^\alpha$, bazujący na monografii Krstulovića-Opary (2001). Polega on na oszacowaniu przyrostu $\Delta \bar{\xi}^\alpha$ w oparciu o (aktualne) współrzędne $\bar{\xi}_{t_n}^\alpha$, zastosowane do konfiguracji z poprzedniego kroku czasowego:

$$\Delta \bar{\xi}^\alpha \simeq \left(\Psi(\bar{\xi}_{t_n}, t_{n-1}) - \mathbf{x}_S(t_{n-1}) \right) \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha(\bar{\xi}_{t_n}, t_{n-1}) \quad (6.4)$$

Jak widać na rysunku 6.2.5, odnosimy się do parametryzacji powierzchni $\Psi(\bar{\xi}_{t_n}, t_{n-1})$



Rysunek 6.2.5: Wyznaczanie wielkości $\Delta \mathbf{g}_T$ poprzez zastosowanie składowych $\Delta \bar{\xi}^\alpha$ określonych równaniem (6.4).

opartej na położeniach węzłów z poprzedniego kroku jednak liczonej dla aktualnych parametrów $\bar{\xi}^\alpha$. Mamy również do dyspozycji położenie węzła *slave* z poprzedniego kroku. Pomnożenie różnicy wyżej wymienionych punktów przez kobazę $\boldsymbol{\tau}^\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{t_n}, t_{n-1})$ daje przybliżoną wartość przyrostu $\Delta \bar{\xi}^\alpha$ w bazie $\boldsymbol{\tau}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{t_n}, t_{n-1})$. Ów przyrost, potraktowany jest dalej już jako współrzędne w bazie aktualnej $\boldsymbol{\tau}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{t_n}, t_n)$. Wyznaczona w ten sposób miara długości poślizgu ma tą zaletę, że jedynie współrzędne $\bar{\xi}_{t_n}^\alpha$ są zależne od zmiennych aktualnych. Dzięki temu koszt wyznaczenia wektora ${}^e\mathbf{R}$ i macierzy stycznej ${}^e\mathbf{K}$ jest znacznie niższy w porównaniu z przypadkiem użycia definicji (6.3).

Rozdział 7

Przykłady

Zamieszczone w niniejszym podrozdziale przykłady numeryczne mają na celu weryfikację użytych w niniejszej pracy metod oraz ilustrację zastosowań analizy wrażliwości. W podrozdziale 7.1 przeprowadzona została weryfikacja rozwiązań problemu bezpośredniego oraz problemu wrażliwości dla dwu- i trójwymiarowego problemu Hertza – zarówno bez tarcia jak i z tarciem Coulomba. Dalej, w podrozdziale 7.2, przedstawiono rozwiązanie trójwymiarowego problemu kontaktowego w zakresie skończonych poślizgów oraz przeanalizowano wpływ zagęszczania siatki elementów skończonych na dokładność rozwiązania. W podrozdziale 7.3 skoncentrowano się na weryfikacji rozwiązania problemu wrażliwości dla trójwymiarowego problemu kontaktowego z tarciem w zakresie skończonych deformacji. Przykłady w podrozdziałach 7.4 i 7.5 obrazują zastosowanie Analizy Wrażliwości do dwu- i trójwymiarowych problemów optymalizacyjnych.

7.1. Zagadnienie Hertza

Niniejszy podrozdział jest poświęcony klasie zagadnień Hertza (Mindlin i Deresiewicz, 1953; Johnson, 1985). Rozpatrywany jest kontakt sztywnych ciał o prostej geometrii (kula, walec) ze sprężystą półprzestrzenią w zakresie małych deformacji.

Zostały wzięte pod uwagę dwie klasy problemów kontaktowych. Kontakt sztywnego walca z półprzestrzenią został zredukowany do dwuwymiarowego zagadnienia kontaktu koła z półpłaszczyzną w płaskim stanie odkształcenia, natomiast kontakt sztywnej kuli z półprzestrzenią został policzony jako w pełni trójwymiarowe zadanie. Pozwoliło to na weryfikację stosowanych metod numerycznych zarówno dla problemów 2D jak i 3D.

Zarówno dla problemu kontaktu walca jak i kuli, zostały zbadane dwa przypadki: bez tarcia oraz z tarciem Coulomba. W każdym przypadku wrażliwość rozwiązania względem parametrów zadania była policzona na dwa sposoby: za pomocą Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM. Umożliwiło to wzajemną weryfikację wyników.

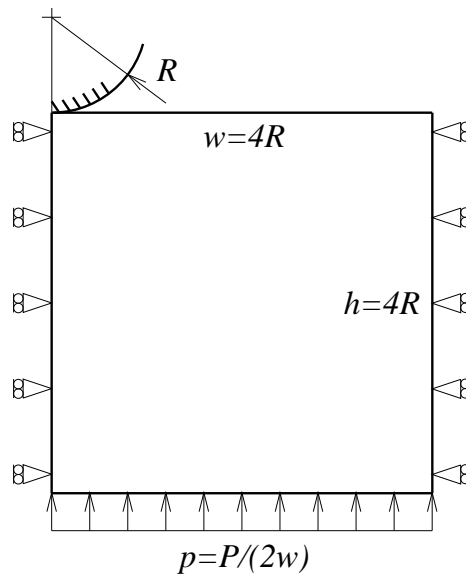
Przy odpowiednich założeniach (małe deformacje, brak tarcia) istnieją analityczne rozwiązania zagadnień Hertza (Johnson, 1985). W niniejszej pracy wykorzystano te rozwiązania aby porównać wyniki analityczne i numeryczne dla zagadnień bez tarcia.

7.1.1. Kontakt walca z półprzestrzenią

Do sztywnego, nieskończenie długiego walca o promieniu $R = 25 [mm]$ zostaje przyłożone obciążenie $P = 5 [kN/mm]$ skierowane pionowo w dół, wciskające walec w sprężystą

półprzestrzeń o parametrach $E = 210 [GPa]$, $\nu = 0.3$. W przypadku kontaktu z tarcie Coulomba, przyjęto współczynnik tarcia $\mu = 0.3$. Analiza prowadzona jest przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia.

Zastosowanie Metody Elementów Skończonych wymaga modyfikacji geometrii zadania. Półpłaszczyznę zastąpiono prostokątem o parametrach podanych na rys. 7.1.1. Wygodniej też było przyłożyć obciążenie, w postaci jednorodnego ciśnienia $p = P/(2w)$, do dolnego boku prostokąta.



Rysunek 7.1.1: Uproszczona geometria dwuwymiarowego zagadnienia Hertza.

Analiza wrażliwości dla analogicznego zagadnienia rozpatrywana była również w pracach Stupkiewicza i in. (2002) oraz Stupkiewicza (2003).

Rozwiązanie analityczne

W przypadku braku tarcia istnieje rozwiązanie analityczne powyższego zagadnienia. Wzory na promień strefy kontaktu a , maksymalne ciśnienie kontaktowe p_0 oraz na funkcję opisującą rozkład ciśnień kontaktowych $p(x)$ wyrażają się następująco (Johnson, 1985):

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{4PR(1-\nu^2)}{\pi E} \right)^{1/2} \\
 p_0 &= - \frac{2P}{\pi a} \\
 p_N(x) &= \begin{cases} p_0 \sqrt{1 - (x/a)^2} & \text{dla } |x| < a \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie MES

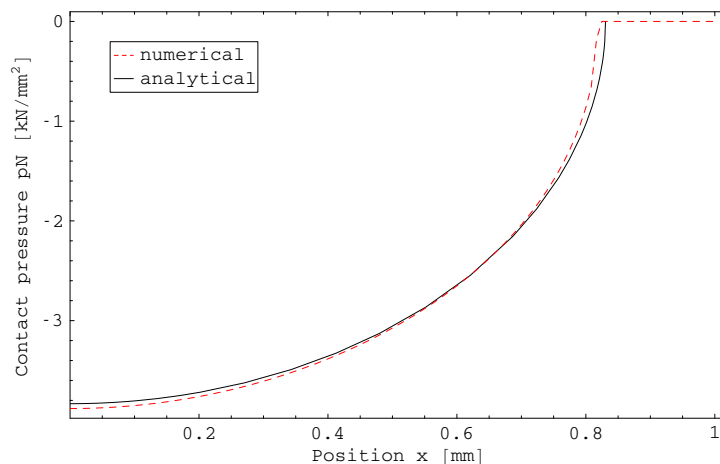
Rozwiązania numeryczne otrzymano przy wykorzystaniu Metody Elementów Skończonych. Podział obszaru na czworokątne elementy skończone został zadany nierówno-

miernie tak, aby zagęścić siatkę w bezpośrednim sąsiedztwie strefy kontaktu. Strefa ta, o wymiarach $2\text{mm} \times 1\text{mm}$, została podzielona siatką 240×30 elementów. Okrąg został zastąpiony wycinkiem okręgu o rozwartości 0.16π , który podzielono w kierunku obwodowym na 10 elementów.

Dyskretyzację powierzchni kontaktowych zrealizowano stosując podejście *master-slave*, gdzie stroną *master* był wycinek koła. Zastosowano wygładzanie strony *master* wykorzystując krzywe Bézier oparte na czterech węzłach (patrz 3.3.1, równ. (3.17)). Do regularyzacji warunków kontaktowych zastosowano metodę rozszerzonych mnożników Lagrange'a. Zastosowano przyrostowy, w pełni niejawnny schemat całkowania po czasie.

Wyniki: kontakt bez tarcia

Rysunek 7.1.13 przedstawia porównanie rozkładu ciśnień kontaktowych w funkcji położenia dla rozwiązania analitycznego i numerycznego. Wyznaczono błąd względny pomiędzy rozwiązaniami analitycznym i numerycznym. Dla promienia strefy kontaktu a oraz dla maksymalnego ciśnienia kontaktowego p_0 wynosi on odpowiednio $err(a) \simeq 0.017$ oraz $err(p_0) \simeq 0.013$.

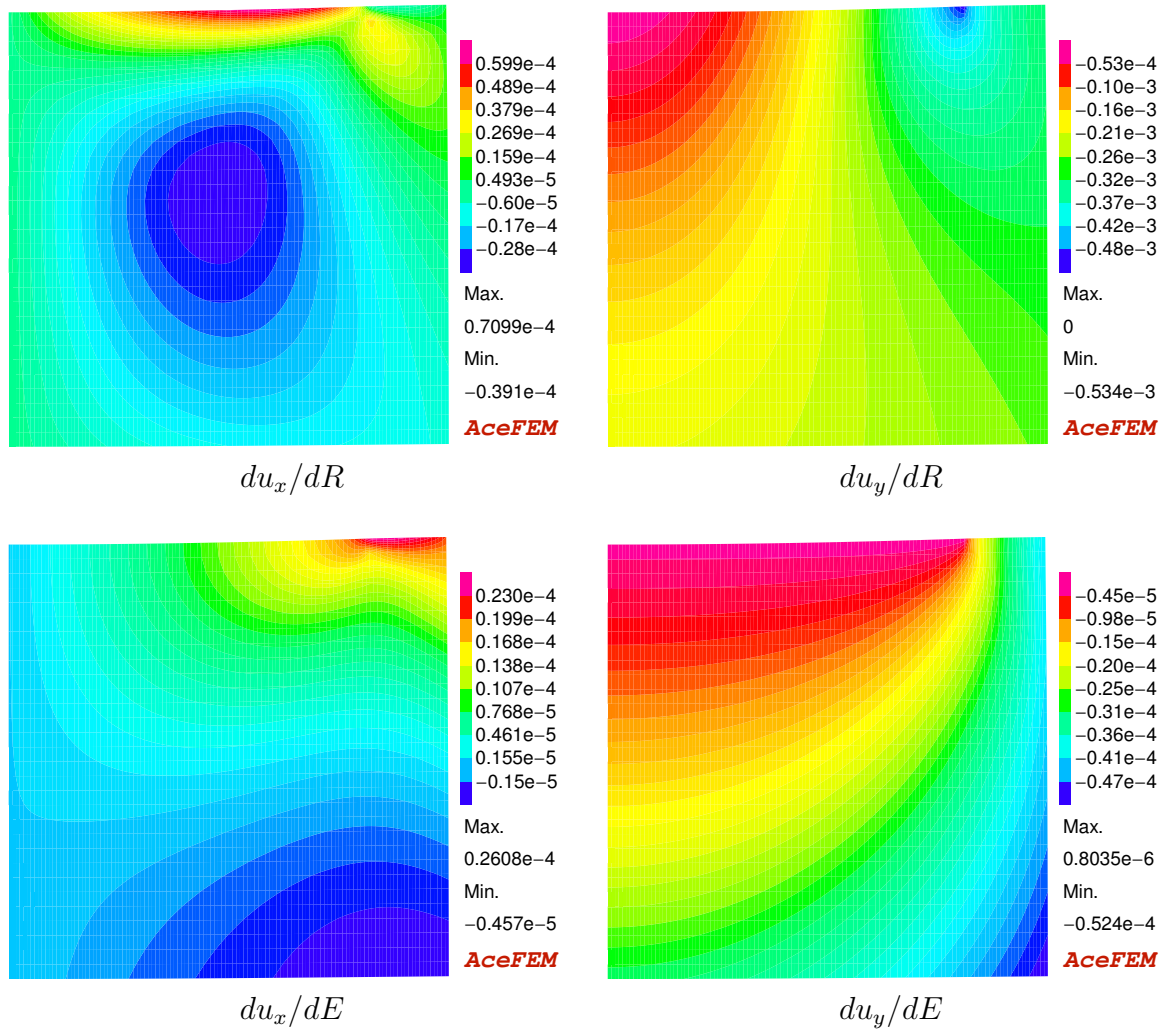


Rysunek 7.1.2: Przypadek 2D bez tarcia. Rozkład ciśnień kontaktowych. Porównanie wyniku numerycznego z analitycznym.

Dla otrzymanego rozwiązania numerycznego wyznaczono wrażliwość przemieszczeń (rys. 7.1.3) oraz ciśnień kontaktowych względem promienia R oraz modułu sztywności E . Wrażliwości policzono na dwa sposoby – za pomocą Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM. Dla danej pary wektorów wartości węzłowych \mathbf{v}_{SA} , \mathbf{v}_{FDM} , policzonych odpowiednio przy pomocy Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM, błąd względny $err(\mathbf{v})$ zapiszemy jako:

$$err(\mathbf{v}) := \|\mathbf{v}_{SA} - \mathbf{v}_{FDM}\| / \|\mathbf{v}_{SA}\| \quad (7.2)$$

W tabeli 7.1.1 przedstawiono wartości błędów względnych dla wyznaczonych pochodnych. Wyniki pokazują bardzo dobrą zgodność obu metod. Dodatkowo na rys. 7.1.4–7.1.5 przedstawiono porównanie pochodnych dp_N/dR i dp_N/dE wyznaczonych analitycznie (przez zróżniczkowanie zależności (7.1)) oraz przy wykorzystaniu Analizy Wrażliwości.



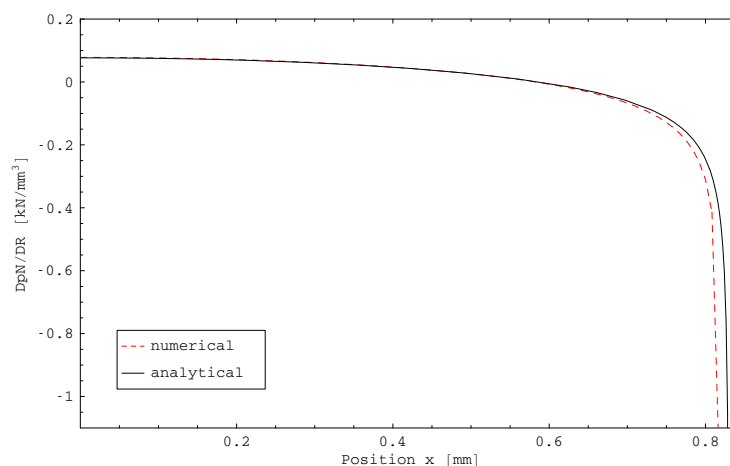
Rysunek 7.1.3: Przypadek 2D bez tarcia. Pola wrażliwości przemieszczeń po wybranych parametrach zadania. Pokazano jedynie sąsiadujący ze strefą kontaktu obszar o wymiarach $1.25a \times 1.25a$.

Tabela 7.1.1: Przypadek 2D bez tarcia. Błąd względny między wektorami pochodnych liczonych przy pomocy Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM.

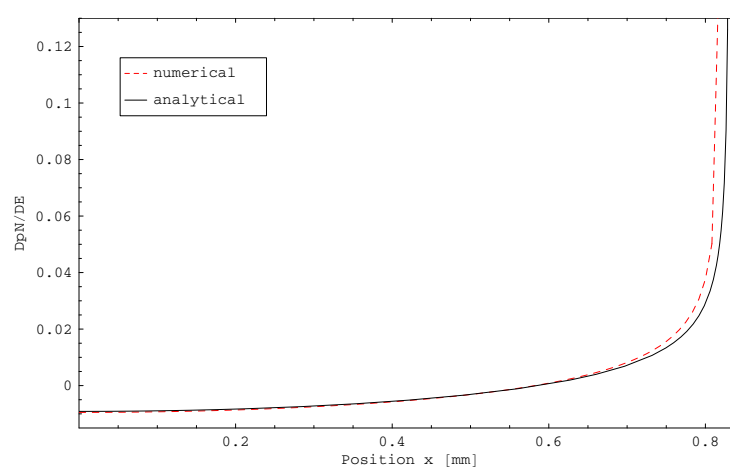
Wrażliwość	Błąd względny $err(\cdot)$
du_x/dR	8.55 E-10
du_y/dR	1.20 E-8
dp_N/dR	4.21 E-6
du_x/dE	4.83 E-6
du_y/dE	4.77 E-6
dp_N/dE	1.55 E-6

Wyniki: tarcie Coulomba

Podobnie przeprowadzono analizę dla przypadku tarcia Coulomba (współczynnik tarcia $\mu = 0.3$). Rysunek 7.1.6 przedstawia rozkład ciśnień kontaktowych dla różnych war-



Rysunek 7.1.4: Przypadek 2D bez tarcia. Pochodne ciśnień kontaktowych po parametrze R (promień koła). Porównanie wyników analitycznych i numerycznych.

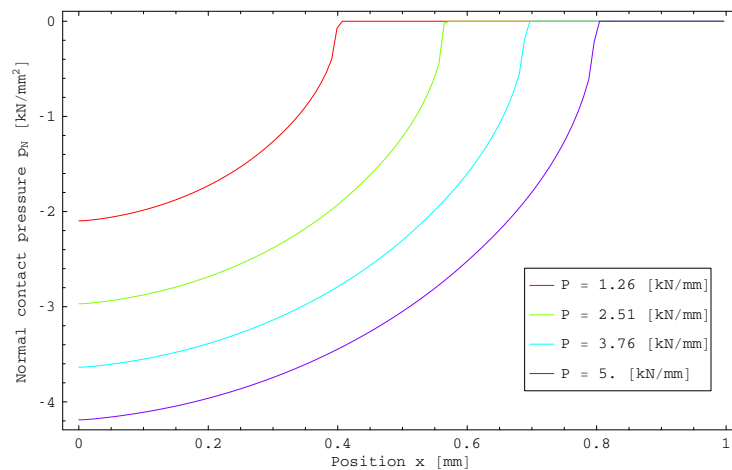


Rysunek 7.1.5: Przypadek 2D bez tarcia. Pochodne ciśnień kontaktowych po parametrze E (moduł Younga). Porównanie wyników analitycznych i numerycznych.

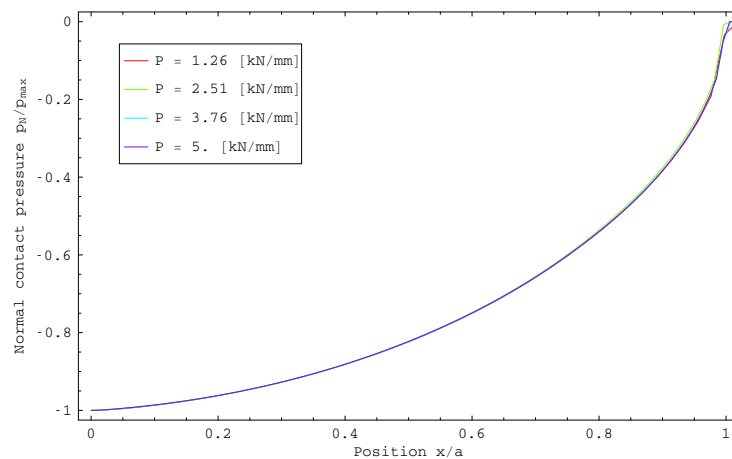
tości obciążeń. Zgodnie z oczekiwaniami, rozwiązania są samopodobne, co pokazuje rys. 7.1.7. Dużo trudniejsze w uzyskaniu jest samopodobieństwo dla składowych stycznych naprężeń kontaktowych (rys. 7.1.8). Osiągnięcie satysfakcjonującej dokładności wyników wymaga stosowania bardzo drobnych kroków czasowych.

Dla otrzymanego rozwiązania (przemieszczenia węzłów oraz węzłowe siły kontaktowe: normalne i styczne) wyznaczono pochodne względem wybranych parametrów zadania (promienia R , modułu sztywności E oraz współczynnika tarcia μ). Pochodne (rys. 7.1.11) ponownie policzono na dwa sposoby – przy pomocy Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM. Tabela 7.1.2 przedstawia błąd względny (7.2) między parami odpowiadającymi sobie pochodnych. Wyniki pokazują bardzo dobrą wzajemną zgodność obu metod, z czego można wnioskować poprawność Analizy Wrażliwości.

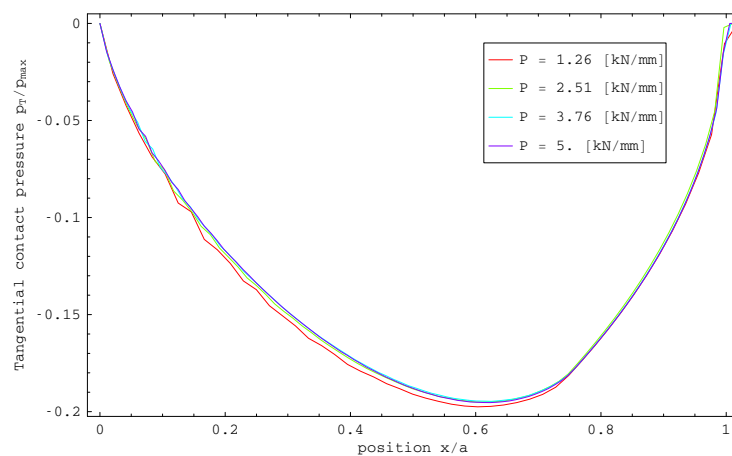
Na rysunkach 7.1.9 i 7.1.10 przedstawiono znormalizowane wykresy wrażliwości naprężeń kontaktowych względem parametru R dla różnych wartości obciążenia, pokazujące ich samopodobieństwo. Osiągnięcie samopodobieństwa w tym przypadku jest szczególnie trudne i świadczy o poprawności stosowanych metod. Widoczne na wykresach zaburzenia są efektem dyskretyzacji.



Rysunek 7.1.6: Przypadek 2D z tarciem. Rozkłady ciśnień kontaktowych dla różnych wartości obciążeń.



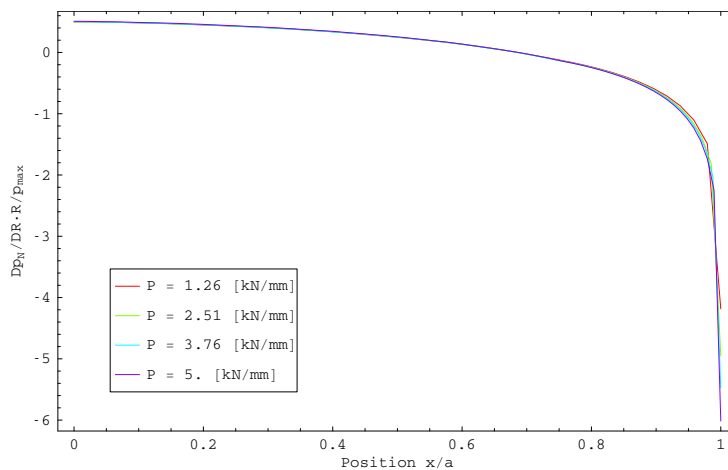
Rysunek 7.1.7: Przypadek 2D z tarciem. Znormalizowane wykresy ciśnień kontaktowych dla różnych wartości obciążeń.



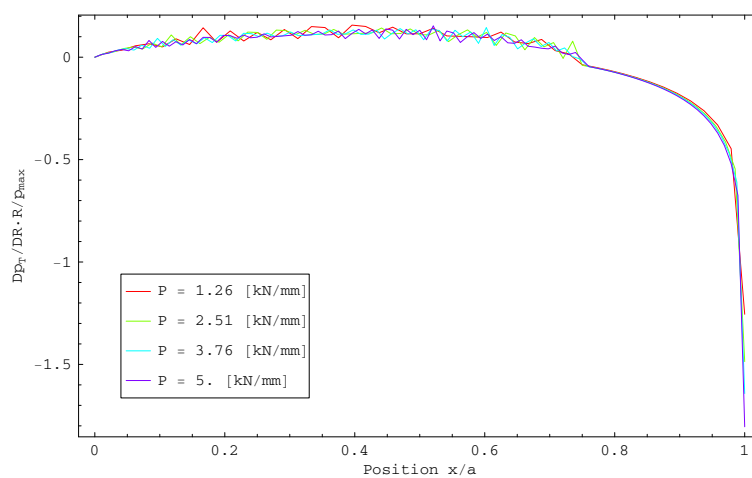
Rysunek 7.1.8: Przypadek 2D z tarciem. Znormalizowane wykresy kontaktowych naprężeń stycznych dla różnych wartości obciążeń.

Tabela 7.1.2: Przypadek 2D z tarciem. Błąd względny wrażliwości liczonych przy pomocy Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM.

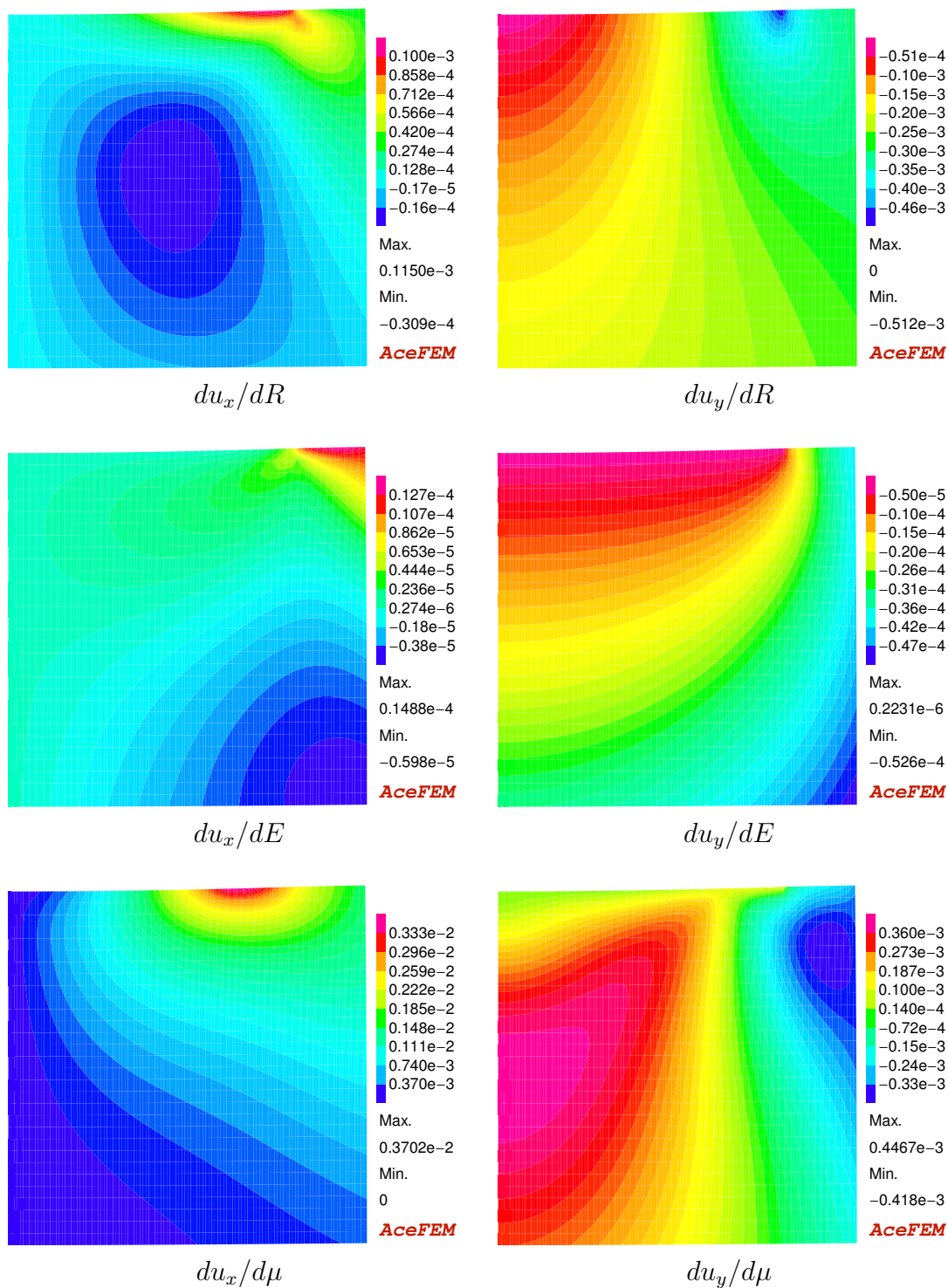
Wrażliwość	Błąd względny $err(\cdot)$
du_x/dR	9.57 E-10
du_y/dR	1.19 E-8
dp_N/dR	4.28 E-6
dp_T/dR	4.75 E-6
du_x/dE	4.82 E-6
du_y/dE	4.77 E-6
dp_N/dE	1.58 E-6
dp_T/dE	2.35 E-6
$du_x/d\mu$	2.60 E-6
$du_y/d\mu$	3.74 E-6
$dp_N/d\mu$	1.20 E-5
$dp_T/d\mu$	2.51 E-6



Rysunek 7.1.9: Przypadek 2D z tarciem. Znormalizowane wykresy wrażliwości ciśnień kontaktowych względem parametru R (dla różnych wartości obciążeń).



Rysunek 7.1.10: Przypadek 2D z tarciem. Znormalizowane wykresy wrażliwości kontaktowych naprężeń stycznych względem parametru R (dla różnych wartości obciążeń).

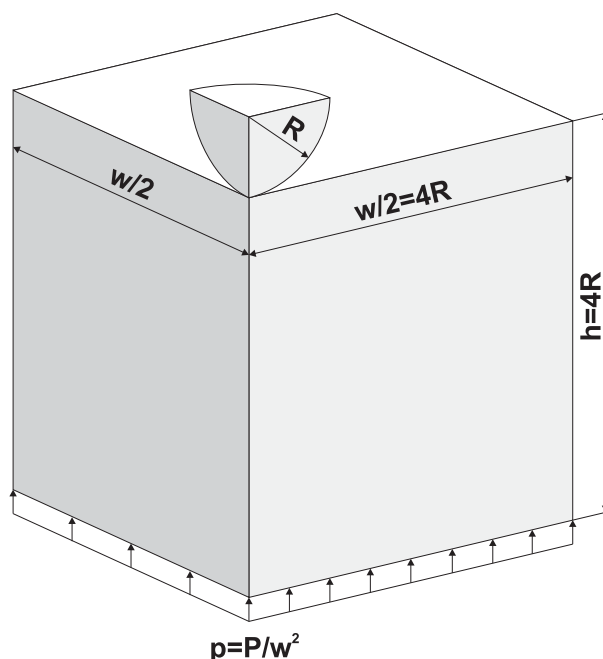


Rysunek 7.1.11: Przypadek 2D z tarcie. Pola wrażliwości przemieszczeń względem wybranych parametrów zadania. Pokazano jedynie sąsiadujący ze strefą kontaktu obszar o wymiarach $1.25a \times 1.25a$.

7.1.2. Kontakt kuli z półprzestrzenią

Poniżej rozpatrujemy sytuację analogiczną do tej z poprzedniego podrozdziału. Do sztywnej kuli o promieniu $R = 25 [mm]$ zostaje przyłożone obciążenie $P = 4.4 [kN]$ skierowane pionowo w dół, wciskające kulę w sprężystą półprzestrzeń o parametrach $E = 210 [GPa]$, $\nu = 0.3$. Rozpatrujemy dwa przypadki: bez tarcia oraz z tarcie Coulomba ($\mu = 0.3$). Interesuje nas rozkład naprężeń normalnych p_N oraz stycznych p_T (w przypadku kontaktu z tarcie) na powierzchni kontaktu.

Aby przeprowadzić obliczenia, dokonano modyfikacji geometrii zadania. Półpłaszczyznę zastąpiono prostopadłościanem, a obciążenie przyłożono do jego dolnego boku. Pomimo tego, że zagadnienie jest osiowo symetryczne, przeprowadzono obliczenia w trzech wymiarach (celem było pokazanie poprawności analizy dla trójwymiarowych problemów kontaktowych). Wykorzystano symetrię zadania, co pozwoliło na ograniczenie obliczeń do wycinka 1/4 całości geometrii¹ (por. rys. 7.1.12).



Rysunek 7.1.12: Uproszczona geometria trójwymiarowego zagadnienia Hertza.

Rozwiązanie analityczne

Przy założeniu małych deformacji oraz braku kontaktowych naprężeń stycznych (brak tarcia) istnieje analityczne przybliżenie rozwiązania (Johnson, 1985):

$$p_N(r) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}, \quad p_0 = -\frac{3P}{2\pi a^2}, \quad a = \left(\frac{3PR(1-\nu^2)}{4E}\right)^{1/3}.$$

Wielkości a oraz p_0 oznaczają odpowiednio promień (kołowego) obszaru kontaktu oraz maksymalne naprężenie normalne (w środku tego obszaru).

¹Warto w tym miejscu podkreślić, że dla zagadnienia kontaktowego z wygładzaniem powierzchni kontaktowej, trzeba w specjalny sposób obsługiwać elementy kontaktowe leżące w bezpośrednim sąsiedztwie płaszczyzn symetrii.

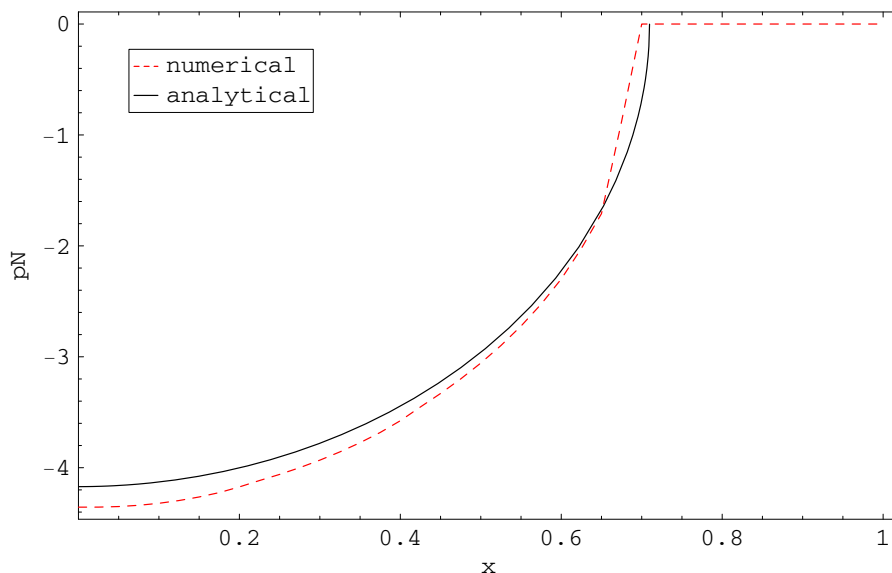
Rozwiązanie MES

Przeprowadzono analizę Metodą Elementów Skończonych. Prostopadłościan podzielono na elementy ośmiowęzłowe w taki sposób, żeby zagęścić siatkę w bezpośredniej strefie kontaktu. Strefa ta, o wymiarach $1\text{mm} \times 1\text{mm} \times 1\text{mm}$, została podzielona siatką $40 \times 40 \times 5$ elementów.

Zastosowano podejście *master-slave*, gdzie stroną *master* był wycinek powierzchni kuli. Wykorzystano wygładzanie strony *master* płacami Béziera opartymi na 16 węzłach (rozdział 3.3.1 równ. (3.19)). Regularyzację warunków kontaktowych przeprowadzono przy wykorzystaniu rozszerzonych mnożników Lagrange'a. Zastosowano przyrostowy, w pełni niejawni schemat całkowania po czasie.

Wyniki: brak tarcia

Obliczony numerycznie rozkład ciśnień kontaktowych porównano z wynikami analitycznymi (rys. 7.1.13). Wyznaczono błąd względny między obydwoma rozwiązaniami. Dla promienia strefy kontaktu a oraz maksymalnego ciśnienia kontaktowego p_0 wyniósł on odpowiednio $err(a) \simeq 0.051$, $err(p_0) \simeq 0.042$.



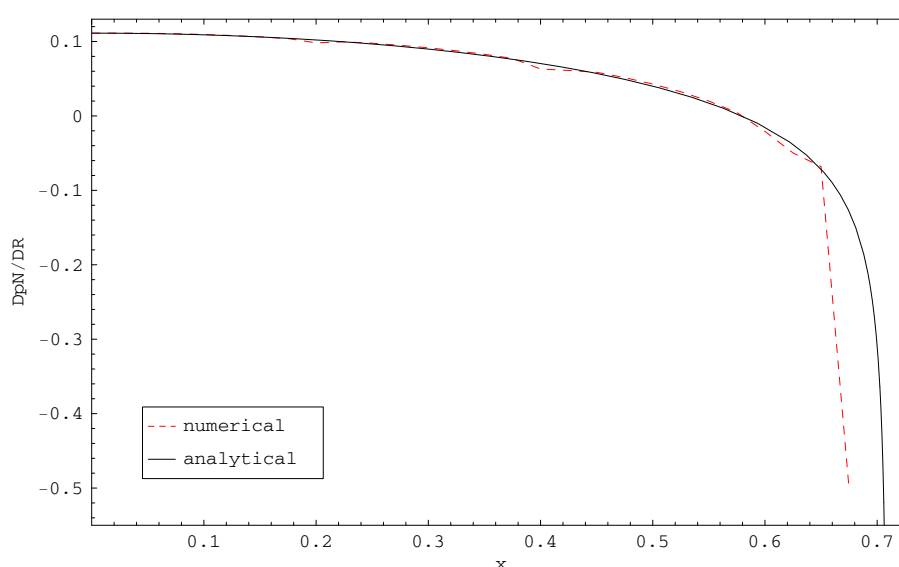
Rysunek 7.1.13: Ciśnienie kontaktowe w funkcji promienia dla problemu Hertza (kontakt kuli, brak tarcia). Porównanie rozwiązania analitycznego i MES dla przekroju płaszczyzną $Y = 0$.

Dla otrzymanego rozwiązania numerycznego (przemieszczenia u_x , u_y , u_z oraz ciśnienia kontaktowe) wyznaczono wrażliwości względem wybranych parametrów zadania: promienia kuli R oraz modułu sztywności E . Pochodne wyznaczono na dwa sposoby: przy pomocy Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM. W tabeli 7.1.3 przedstawiono błędy względne (7.2) pomiędzy poszczególnymi wektorami pochodnych. Wartości błędów rzędu 10^{-6} świadczą o bardzo dobrej zgodności wyników, z czego można wnioskować poprawność wyników Analizy Wrażliwości.

Dodatkowo, rysunki 7.1.14–7.1.15 zawierają porównanie wyników analitycznych i numerycznych obliczenia wrażliwości ciśnień kontaktowych względem promienia R oraz modułu sprężystości E .

Tabela 7.1.3: Przypadek 3D bez tarcia. Błąd względny między wrażliwościami liczonymi przy pomocy Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM.

Wrażliwość	Błąd względny $err(\cdot)$
du_x/dR	7.88 E-10
du_y/dR	7.84 E-10
du_z/dR	6.95 E-9
dp_N/dR	4.27 E-6
du_x/dE	5.46 E-6
du_y/dE	5.40 E-6
du_z/dE	4.76 E-6
dp_N/dE	8.69 E-7

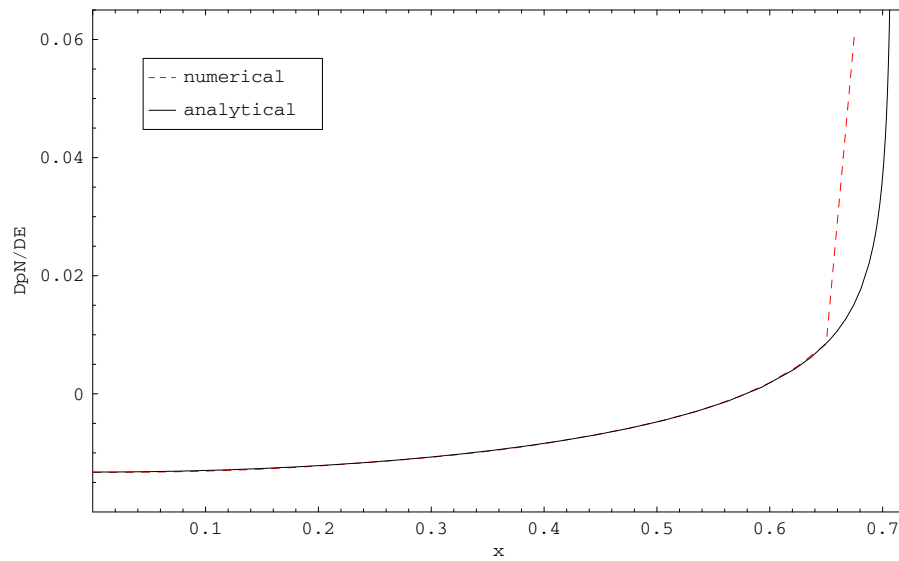


Rysunek 7.1.14: Przypadek 3D bez tarcia. Pochodne ciśnienia kontaktowych po parametrze R (promień koła). Porównanie wyników analitycznych i numerycznych.

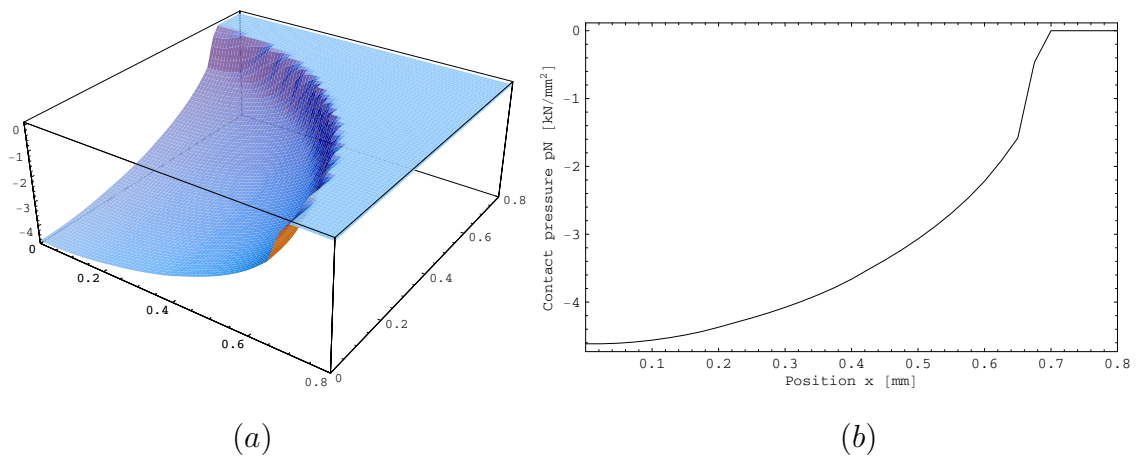
Wyniki: tarcie Coulomba

Modyfikujemy powyższy problem, wprowadzając tarcie Coulomba. Rozwiązanie numeryczne w postaci pola ciśnienia kontaktowych oraz pola modułów naprężeń stycznych jest przedstawione na rys. 7.1.16–7.1.17.

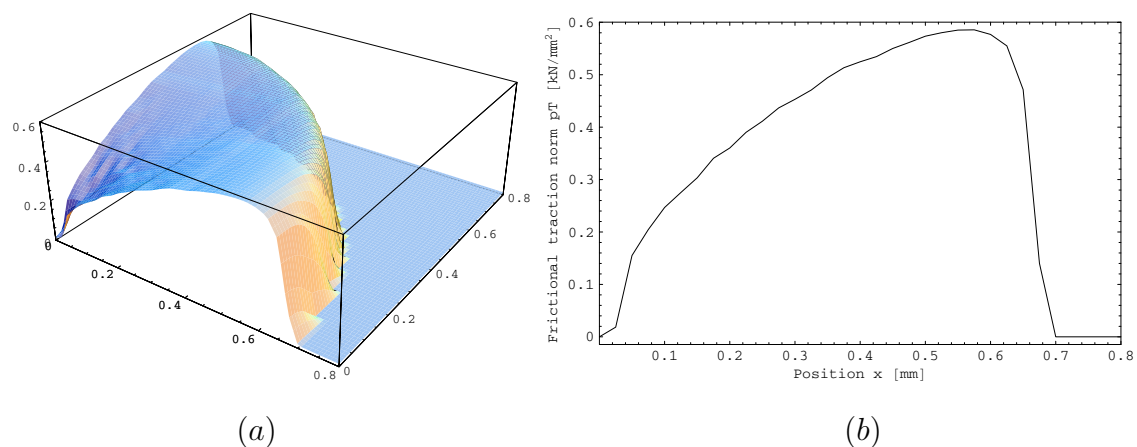
Dla otrzymanego rozwiązania (przemieszczenia węzłów oraz węzłowe siły kontaktowe: normalne i styczne) wyznaczono wrażliwości względem wybranych parametrów zadania (promienia R , modułu sztywności E oraz współczynnika tarcia μ). Wrażliwości (rys. 7.1.18) policzono na dwa sposoby – przy pomocy Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM. Tabela 7.1.4 przedstawia błąd względny (7.2) między parami odpowiadającymi sobie wrażliwości. Z wzajemnej bardzo dobrej zgodności obu metod można wnioskować poprawność Analizy Wrażliwości.



Rysunek 7.1.15: Przypadek 3D bez tarcia. Pochodne ciśnień kontaktowych po parametrze E (moduł Younga). Porównanie wyników analitycznych i numerycznych.



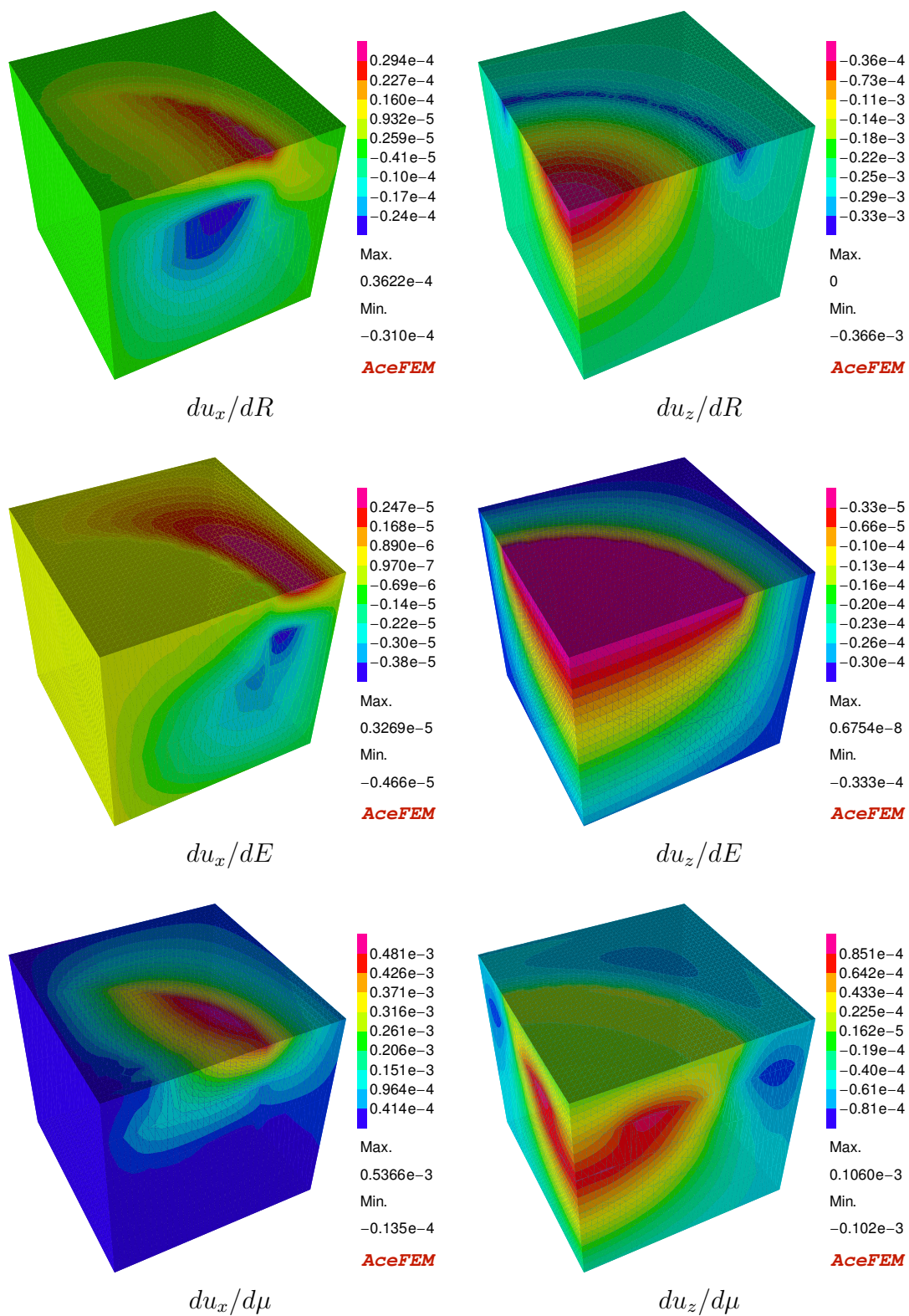
Rysunek 7.1.16: Przypadek 3D z tarcia. Pole ciśnień kontaktowych: (a) cała powierzchnia, (b) przekrój płaszczyzną $Y=0$.



Rysunek 7.1.17: Przypadek 3D z tarciem. Pole modułu naprężeń stycznych: (a) cała powierzchnia, (b) przekrój płaszczyzną $Y=0$.

Tabela 7.1.4: Przypadek 3D z tarciem. Błąd względny między wektorami wrażliwości liczonych przy pomocy Analizy Wrażliwości oraz metodą FDM.

Wrażliwość	Błąd względny $err(\bullet)$
du_x/dR	7.46 E-10
du_y/dR	7.47 E-10
du_z/dR	6.93 E-9
dp_N/dR	4.54 E-6
dp_T/dR	4.60 E-6
du_x/dE	5.63 E-6
du_y/dE	5.71 E-6
du_z/dE	4.78 E-6
dp_N/dE	8.91 E-7
dp_T/dE	1.47 E-6
$du_x/d\mu$	5.55 E-6
$du_y/d\mu$	5.17 E-6
$du_z/d\mu$	7.28 E-6
$dp_N/d\mu$	3.25 E-5
$dp_T/d\mu$	1.08 E-6



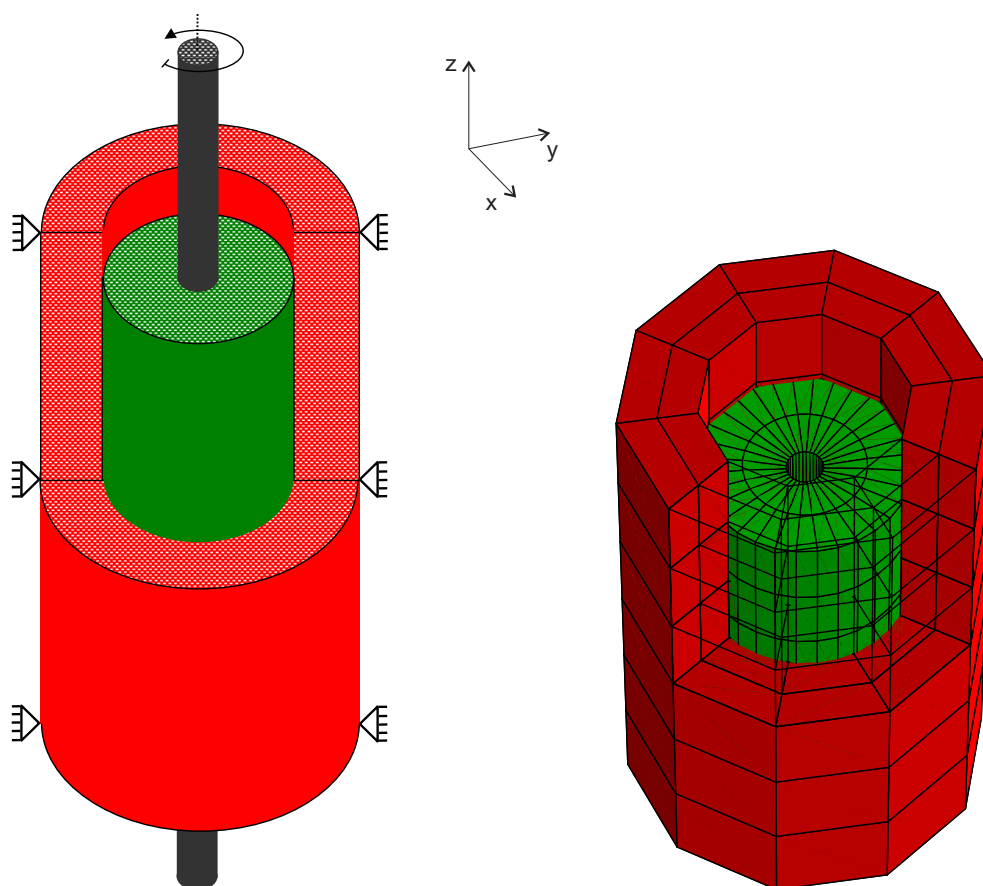
Rysunek 7.1.18: Przypadek 3D z tarciem. Pola pochodnych przemieszczeń po wybranych parametrach zadania. Pokazano jedynie sąsiadujący ze strefą kontaktu obszar o wymiarach $1.25a \times 1.25a \times 1.25a$.

7.2. Analiza kontaktu wałka obracanego w tulei

W poprzednim podrozdziale badano poprawność używanych w pracy metod numerycznych. Wykorzystano problem Hertza, dla którego znane jest rozwiązanie analityczne i który mieścił się w zakresie małych deformacji i poślizgów. W niniejszym podrozdziale przedstawiony jest bardziej skomplikowany problem obracania sprężystego wałka w sprężystej tulei. Celem jest zaprezentowanie analizy bezpośredniej problemów kontaktowych w przypadku skończonych poślizgów, a także poruszenie zagadnień związanych z wygładzaniem kontaktu.

Rozpatrzmy quasi-statyczne zagadnienie obracającego się hipersprężystego wałka o promieniu $r_e = 60 [mm]$ i długości $l = 200 [mm]$ spasowanego w hipersprężystej tulei o promieniu wewnętrznym $R_i = 57 [mm]$ oraz promieniu zewnętrznym $R_e = 100 [mm]$ i długości $L = 320 [mm]$. Moduły sprężyste i moduły Poissona dla obu ciał wynoszą odpowiednio: $E_1 = 10 [MPa]$, $\nu_1 = 0.3$ dla wałka i $E_2 = 30 [MPa]$, $\nu_2 = 0.3$ dla tulei. Tuleja jest zamocowana na zewnętrznej powierzchni natomiast obrót wałka jest wymuszany poprzez zadanie przemieszczeń na jego sztywnej osi o promieniu $r_i = 10 [mm]$ (por. rys. 7.2.1). W zakresie zjawisk kontaktowych uwzględniamy dwa przypadki: bez tarcia oraz z tarciem Coulomba ($\mu = 0.1$).

Zastosowano wygładzanie kontaktu płacami Bézier opartymi na 16 węzłach (3.19) gdzie stroną *master* jest zdyskretyzowana powierzchnia wewnętrzna tulei natomiast stroną *slave* są węzły zdyskretyzowanej powierzchni zewnętrznej wałka.



Rysunek 7.2.1: Problem obracania wałka spasowanego wewnątrz tulei.

Wykonano pełen obrót osi wałka odczytując na każdym kroku analizy składową

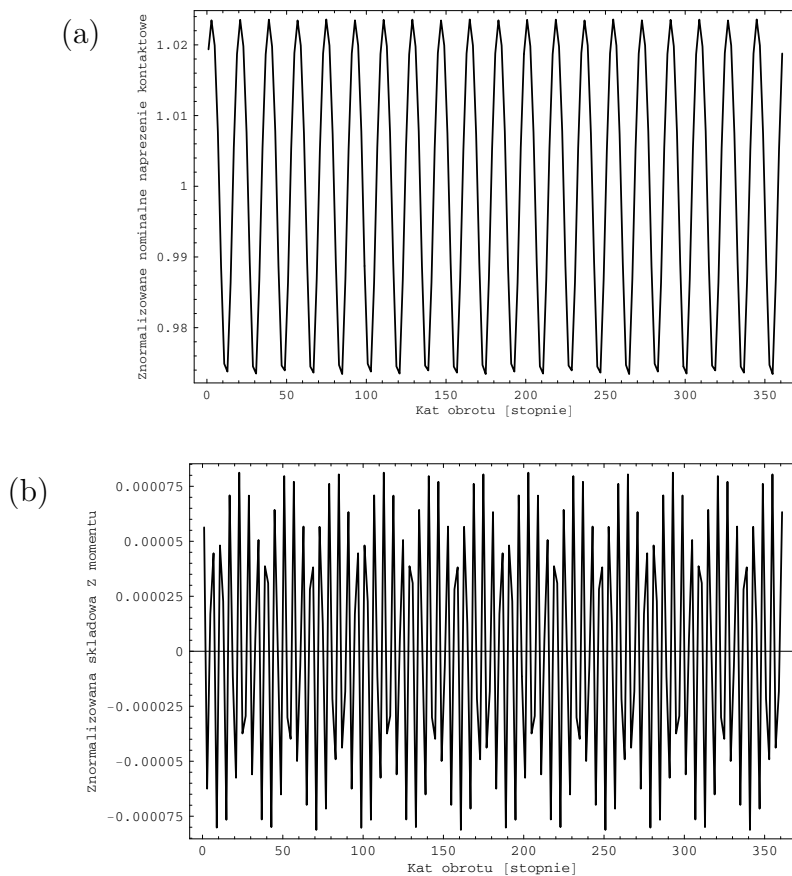
normalną nominalnego naprężenia kontaktowego p_N w wybranym węźle *slave* oraz składową M_z wypadkowego momentu odczytanego z zamocowanej powierzchni zewnętrznej tulei. Wykresy 7.2.2 oraz 7.2.3 pokazują znormalizowane wielkości \bar{p}_N i \bar{M}_z w funkcji kąta obrotu osi wałka, odpowiednio: dla przypadku kontaktu bez tarcia i z tarcie. Znormalizowane wielkości \bar{p}_N i \bar{M}_z określone są następująco:

$$\bar{p}_N = p_N/p_N^{\text{avg}}, \quad \bar{M}_z = M_z/M_z^{\text{ref}},$$

gdzie

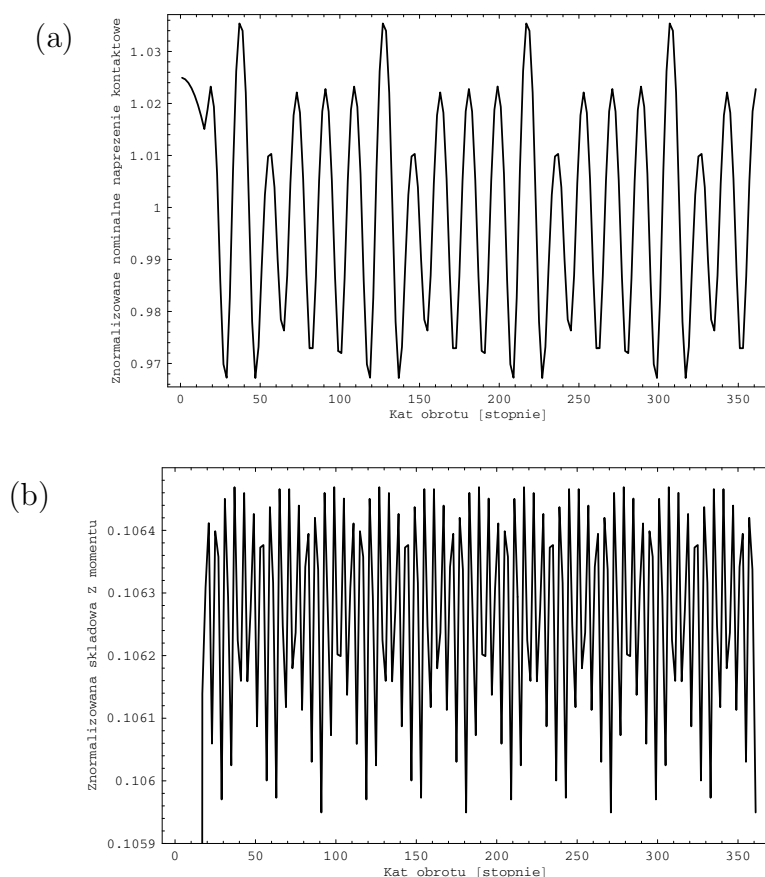
$$p_N^{\text{avg}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_N(\alpha_t), \quad M_z^{\text{ref}} = (R_i 2\pi R_i l) p_N^{\text{avg}}$$

są, odpowiednio: uśrednionym naprężeniem normalnym oraz referencyjną składową momentu, przy czym T oznacza liczbę kroków czasowych.



Rysunek 7.2.2: Obracanie wałka w tulei bez tarcia: (a) znormalizowane normalne nominalne naprężenie kontaktowe, (b) znormalizowana składowa Z wypadkowego momentu.

W przypadku braku tarcia dostajemy w przybliżeniu stałe naprężenie \hat{p}_N w ustalonym węźle, oraz wielkość \bar{M}_z oscylującą blisko wartości 0. Podobnie w przypadku problemu z tarcie Coulomba: po początkowych zaburzeniach związanych z rozwijaniem się naprężeń stycznych, znowu wykresy przedstawiają funkcje w przybliżeniu stałe. W obu przypadkach jakościowo jest to zgodne z tym, czego można oczekiwać. Dodatkowo, na rys. 7.2.3(b) widać, że znormalizowana składowa $\bar{M}_Z \simeq \nu = 0.1$, co również jest wynikiem jakościowo poprawnym.



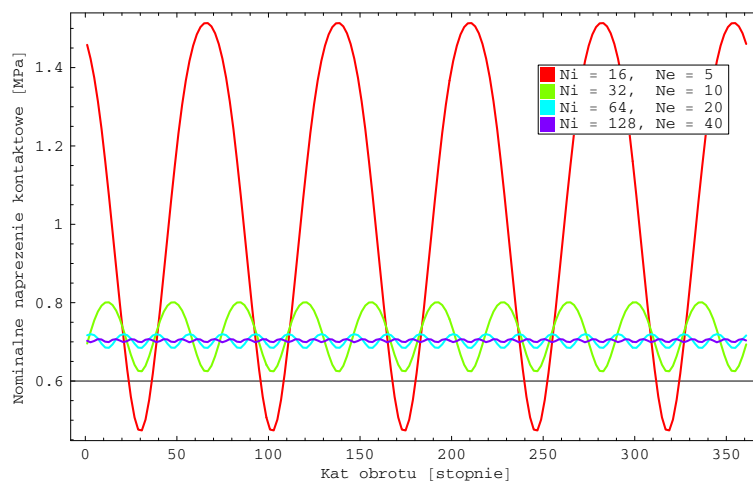
Rysunek 7.2.3: Obracanie wałka w tulei z tarciem Coulomba: (a) znormalizowane normalne nominalne naprężenie kontaktowe, (b) znormalizowana składowa Z wypadkowego momentu.

Zwróćmy teraz uwagę na widoczne na wykresach oscylacje. Przyczyny ich powstania należy upatrywać z jednej strony w dyskretyzacji ciał a z drugiej strony w niedokładności odwzorowania cylindrycznego kształtu tulei przy pomocy płatów Bézier. Wykresy 7.2.4 i 7.2.5 pokazują, że wraz z zagęszczaniem siatki (w kierunku obwodowym) amplituda oscylacji zanika, a wynik zbiega do pewnej granicy. Zastosowanie wygładzania pozwala uniknąć trudności ze zbieżnością, które dla przypadku parametryzacji funkcjami biliniowymi nasilałyby się wraz z zagęszczaniem dyskretyzacji.

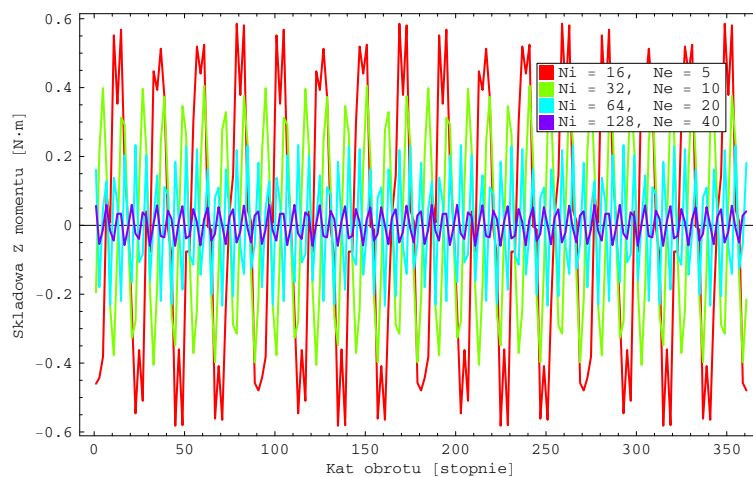
7.3. Analiza wrażliwości kontaktu hipersprężystych rur grubościennych

Niniejszy przykład stanowi weryfikację Analizy Wrażliwości dla trójwymiarowego zagadnienia kontaktowego z tarciem dla przypadku dużych deformacji obu ciał. Przedstawione poniżej wyniki zostały opublikowane w pracy (Lengiewicz i in., 2006).

Rozpatrujemy kontakt dwóch hipersprężystych rur grubościennych o module sprężystości $10 [MPa]$ i współczynnika Poissona 0.3 . Obie rury mają długość $40 [mm]$, promień zewnętrzny $5 [mm]$ i promień wewnętrzny $2.5 [mm]$. Rury umieszczono jedna tuż nad drugą, przy czym górną względem dolnej obrócono o 90° wokół osi OZ (por. rys. 7.3.1(a)). Zadano przemieszczeniowe warunki brzegowe na końcach rur tak,

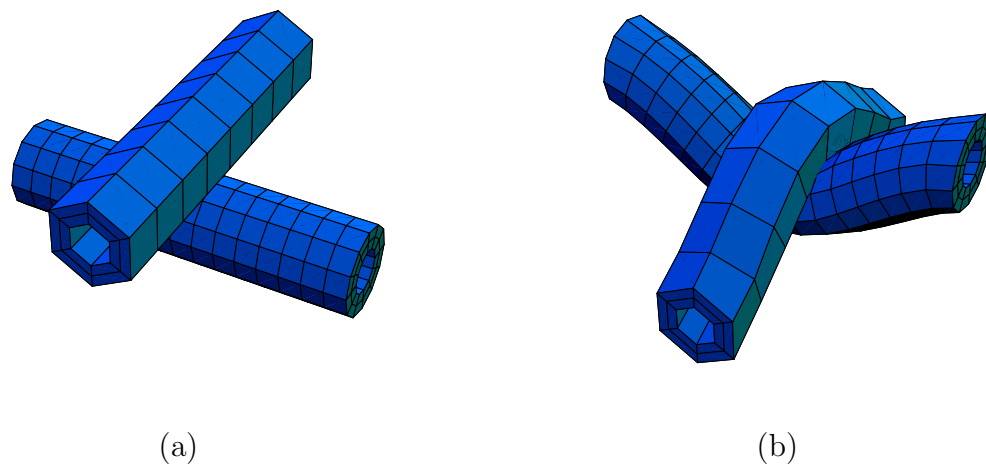


Rysunek 7.2.4: Zbieżność rozwiązania wraz z zagęszczaniem siatki. Normalne nominalne naprężenie kontaktowe w funkcji kąta obrotu. Wartości N_i oraz N_e oznaczają gęstość dyskretyzacji w kierunku obwodu, odpowiednio: dla powierzchni zewnętrznej wałka oraz powierzchni wewnętrznej tulei.

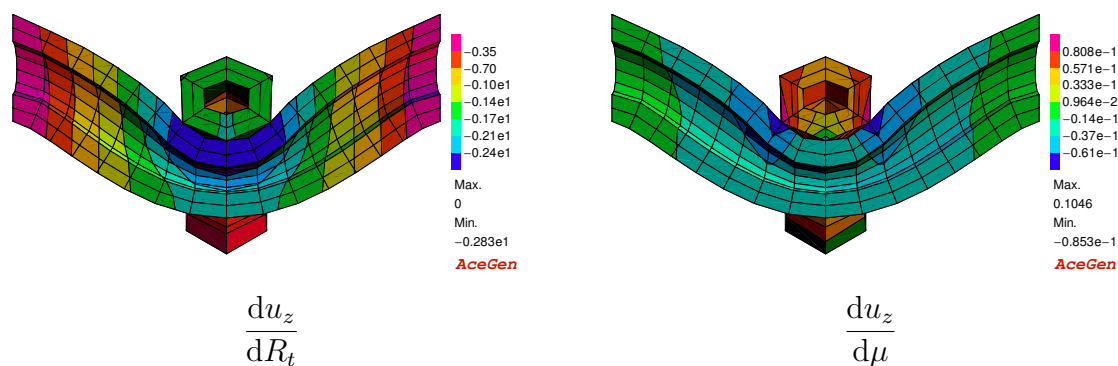


Rysunek 7.2.5: Zbieżność rozwiązania wraz z zagęszczaniem siatki. Składowa Z wypadkowego momentu w funkcji kąta obrotu. Wartości N_i oraz N_e oznaczają gęstość dyskretyzacji w kierunku obwodu, odpowiednio: dla powierzchni zewnętrznej wałka oraz powierzchni wewnętrznej tulei.

aby w chwili końcowej różnica przemieszczeń w kierunku Z wyniosła $24 [mm]$. Zablokowano natomiast możliwość przemieszczenia się końców rur w kierunkach X oraz Y (por. rys. 7.3.1(b)).



Rysunek 7.3.1: Kontakt hipersprężystych rur: (a) konfiguracja początkowa, (b) konfiguracja końcowa.



Rysunek 7.3.2: Kontakt hipersprężystych rur grubościennych (przekrój płaszczyzną $X = 0$). Wrażliwość pola przemieszczeń w kierunku pionowym względem promienia zewnętrznego górnej rury oraz względem współczynnika tarcia.

Dolna rura została zdyskretyzowana gęściej niż górna i przypisano jej rolę ciała *slave*. Zastosowano wygładzanie powierzchni kontaktowej przy użyciu płatów Bézier opartych na 16 węzłach (por. rozdz. 3.3.1).

Rozwiązano problem bezpośredni oraz problem wrażliwości, gdzie parametrami zadania były promień zewnętrzny górnej rury R_t (parametr kształtu) oraz współczynnik tarcia μ (parametr materiałowy). Wrażliwość wyznaczona została na dwa sposoby: za pomocą Analizy Wrażliwości oraz przy użyciu metody FDM. W tabeli 7.3.1 przedstawiono porównanie wyników uzyskanych tymi dwoma metodami, oraz odpowiadający im błąd względny. Otrzymano błąd rzędu 10^{-5} , co świadczy o dobrej zgodności wyników.

Jako że wyniki uzyskano, w dużym stopniu niezależnymi, metodami, to ze zgodności wyników można wnioskować ich poprawność.

Tabela 7.3.1: Kontakt rur grubościennych. Błąd względny $\text{err}(\cdot)$ pomiędzy wrażliwością wyznaczoną przy użyciu metody FDM oraz przy użyciu Analizy Wrażliwości (SA). Pokazano wyniki dla wybranych węzłów.

Węzeł	$du_z/d\mu$			du_z/dR_t		
	SA	FDM	$\text{err}(\cdot)$	SA	FDM	$\text{err}(\cdot)$
32	-0.01126618	-0.01126612	5.5E-6	-0.64451519	-0.64450526	1.5E-5
64	-0.03031119	-0.03031102	5.8E-6	-1.49473608	-1.49470542	2.1E-5
393	-0.00535480	-0.00535474	1.0E-5	-0.27672344	-0.27672016	1.2E-5
667	0.00811398	0.00811385	1.6E-5	-0.34567623	-0.34565159	7.1E-5

7.4. Optymalizacja kształtu gumowej uszczelki

Przy projektowaniu uszczelki do elementów ruchomych (takich jak siłowniki hydrauliczne) istotnym czynnikiem minimalizującym wpływ cieczy z komory roboczej jest uzyskanie odpowiedniego profilu ciśnień kontaktowych pomiędzy uszczelką a elementem. Jest to problem bardzo złożony – w rozważaniach należy ująć między innymi efekty wynikające z różnorodności faz cyklu pracy jak i efekty długoterminowe związane ze zużyciem i zmianą właściwości gumy (Muller i Nau, 1998). W niniejszym podrozdziale ów problem zostanie bardzo mocno uproszczony.

Rozpatrujemy hipersprężystą uszczelkę ścisnącą między dwiema płaskimi, sztywnymi powierzchniami w płaskim stanie odkształcenia. Początkowo okrągła w przekroju uszczelka, po ściśnięciu daje w przybliżeniu hertzowski profil naprężeń normalnych na dolnej i górnej powierzchni (rys. 7.4.1). Można postawić problem optymalizacyjny, w którym celem jest znalezienie takiego kształtu początkowego uszczelki aby po ściśnięciu uzyskać zadany z góry, żądany profil ciśnień kontaktowych na dolnej powierzchni (rys. 7.4.1).

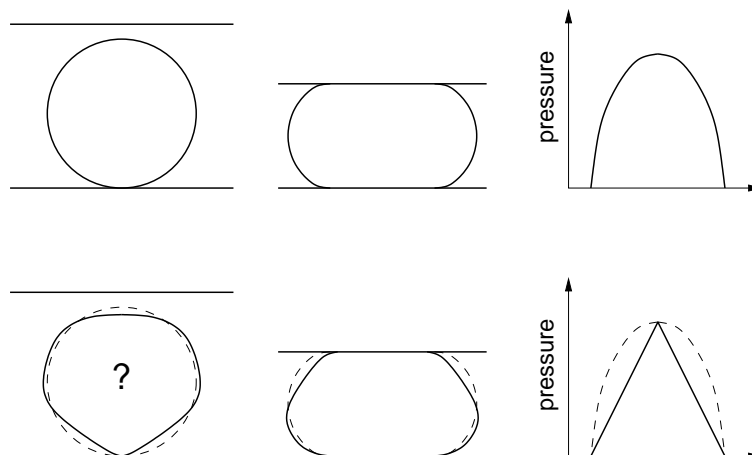
Problem bezpośrednio rozwiązywany jest Metodą Elementów Skończonych. Warunek kontaktowy regularyzowany jest metodą rozszerzonych mnożników Lagrange'a. W wyniku analizy otrzymujemy rozwiązanie w postaci pola przemieszczeń oraz pola mnożników Lagrange'a na powierzchni ciała *slave*. W przyjętym sformułowaniu mnożniki Lagrange'a mają charakter nominalnych naprężeń kontaktowych P_N (na jednostkę powierzchni w konfiguracji odniesienia). Ciśnienie aktualne p_N otrzymuje się poprzez przemnożenie ciśnienia P_N przez, odpowiadający danemu węzłowi, współczynnik ekspansji powierzchni $j = A_t/A_0$

$$p_N(x_k) = j^{-1} P_N(x_k),$$

gdzie x_k jest aktualnym położeniem k -tego węzła.

Parametryzacja kształtu

Kształt uszczelki opisano przy pomocy krzywych B-sklejanych (por. Jankowski, 2006) zdefiniowanych w cylindrycznym układzie współrzędnych (α, r) . W pracy wzięto pod



Rysunek 7.4.1: Schemat zagadnienia optymalizacyjnego: znaleźć taki kształt początkowy próbki, aby po deformacji otrzymać założony rozkład ciśnień kontaktowych.

uwagę dwa rodzaje otwartych krzywych B-sklejanych: stopnia 2 oraz stopnia maksymalnego (tj. krzywe Bézier), opartych na równoodległych punktach kontrolnych.

Problem jest symetryczny względem osi OY tak więc do opisu kształtu uszczelki wystarcza zestaw parametrów ϕ_i definiujący jego połowę. Funkcja $R(\alpha, \phi_i)$ (określona dla $\pi/2 \leq \alpha \leq 5/2\pi$) opisuje kształt brzegu uszczelki w zależności od parametrów ϕ_i :

$$R(\alpha, \phi_i) := \begin{cases} R_0 \sum_{i=0}^N \phi_i B^i \left(\frac{2\alpha - 3\pi - 2\delta}{\gamma - \delta} - 1 \right), & \text{dla } \frac{3}{2}\pi + \delta \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi + \gamma \\ R_0 \sum_{i=0}^N \phi_i B^i \left(\frac{2\alpha - 3\pi + 2\delta}{\gamma - \delta} + 1 \right), & \text{dla } \frac{3}{2}\pi - \gamma \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi - \delta \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wielkość R_0 jest wstępnym promieniem uszczelki (dla $\phi_i = 1$) natomiast $B^i(\xi)$ są elementami bazy funkcji B-sklejanych lub bazy Bernstein'a stopnia N (3.15). Parametry δ i γ ($0 \leq \delta < \gamma \leq \pi$) określają odpowiednio początek i koniec wycinka boku uszczelki, który podlega optymalizacji (ze względu na symetrię, przyjęcie wartości $\delta = 0$, $\gamma = \pi$ powoduje optymalizację całego brzegu uszczelki).

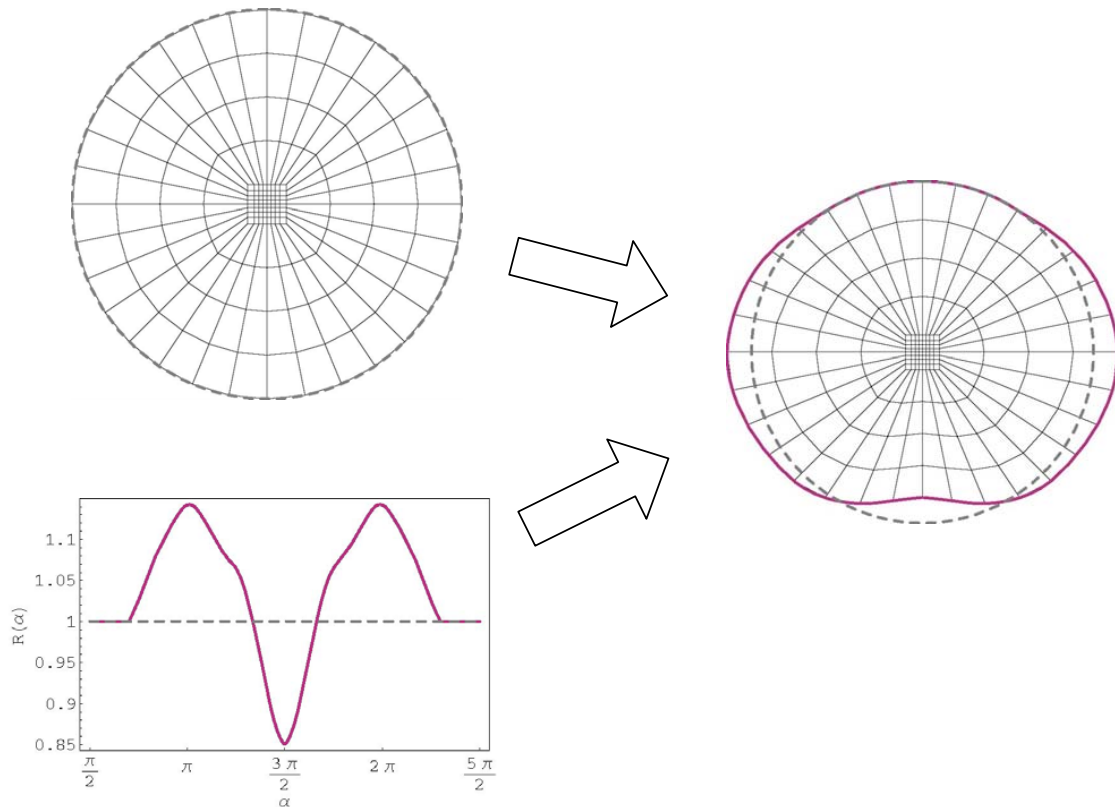
Opracowano siatkę, jak na rys. 7.4.2, dla początkowego kształtu kołowego. Sparаметryzowany kształt siatki elementów skończonych otrzymuje się poprzez proporcjonalne przeskalowanie w kierunku promieniowym współrzędnych początkowych węzłów (odpowiadających kształtowi kołowemu) przy wykorzystaniu funkcji $R(\alpha, \phi_i)$. Przeskalowaniu podlega fragment pomiędzy brzegiem kwadratowej części siatki a brzegiem koła (rys. 7.4.2) tak, aby część kwadratowa pozostała niezmieniona, natomiast brzeg odpowiadał funkcji $r(\alpha, \phi_i)$.

Funkcja celu

Oznaczmy przez $\bar{p}_N(x)$ żądany profil ciśnień kontaktowych. Funkcję celu $J(\phi_i)$ zdefiniujemy jako kwadrat normy błędu:

$$J(\phi_i) = J(p_N(x; \phi_i)) := \int_{\gamma_p} (p_N(x) - \bar{p}_N(x))^2 da,$$

gdzie za γ_p przyjmuje się zadany fragment brzegu uszczelki, obejmujący potencjalną strefę kontaktu. Ponieważ rozwiązanie numeryczne znane jest jedynie w punktach wę-



Rysunek 7.4.2: Schemat parametryzacji kształtu uszczelki.

złowych, wprowadzono przybliżenie powyższej całki za pomocą metody prostokątów,

$$J(\phi_i) = J(p_N(x_k; \phi_i), x_k(\phi_i)) := \sum_i A_t^k (p_N(x_k) - \bar{p}_N(x_k))^2,$$

gdzie x_k są współrzędnymi x -owymi węzłów w konfiguracji odkształconej, $p_N(x_k)$ są aktualnymi ciśnieniami kontaktowymi, natomiast A_t^k są aktualnymi polami powierzchni związanymi z węzłami x_k .

W niniejszym przykładzie jako docelowy profil ciśnienia kontaktowego przyjęto profil trójkątny, zdefiniowany w oparciu o rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia dla uszczelki okrągłej:

$$\bar{p}_N(x) := \begin{cases} p_{max} - \left| \frac{p_{max}}{a_{max}} \cdot x \right|, & \text{dla } -a_{max} \leq x \leq a_{max} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

gdzie p_{max} jest maksymalnym naprężeniem normalnym natomiast a_{max} jest promieniem strefy kontaktu. Obie wielkości odpowiadają początkowemu, kołowemu kształtowi uszczelki ($\phi_i = 1$), por. rys. 7.4.1.

Metoda rozwiązywania problemu optymalizacyjnego

Optymalizacja sprowadza się do znalezienia minimum funkcji celu J

$$\min_{\phi_i} J(\phi_i) = \min_{\phi_i} J(p_N(x_k; \phi_i), x_k(\phi_i)).$$

Zastosowano jeden z algorytmów minimalizacyjnych – metodę BFGS (Press i in., 1992; Bertsekas, 2003). Jako że jest to metoda gradientowa, to oprócz wartości funkcji J należy obliczyć również jej pochodne po parametrach zadania: $dJ/d\phi_i$. Uwzględniając jawne oraz niejawne zależności J od ϕ_i można napisać:

$$\frac{dJ}{d\phi_i} = \sum_k \left[\frac{\partial J}{\partial \lambda_k} \frac{d\lambda_k}{d\phi_i} + \frac{\partial J}{\partial x_k} \left(\frac{du_k}{d\phi_i} + \frac{dX_k}{d\phi_i} \right) \right],$$

gdzie przez u_k oznaczono przemieszczeniowe stopnie swobody zadania, przez X_k oznaczono początkowe położenia węzłów, odpowiadające stopniom swobody u_k , natomiast λ_k są mnożnikami mającymi charakter nominalnych ciśnień kontaktowych, $p_{N_k} = -j^{-1}\lambda_k$. Występujące w wyrażeniu pochodne cząstkowe $\partial J/\partial x_k$ wyznaczane są analitycznie. Podobnie, znana jest jawna zależność położenia początkowych X_i od parametrów zadania. Występujące w wyrażeniu gradienty $du_i/d\phi_j$ oraz $d\lambda_i/d\phi_j$, ze względu na niejawny charakter zależności, wyznaczane są za pomocą Analizy Wrażliwości.

Wyniki: studium przypadków

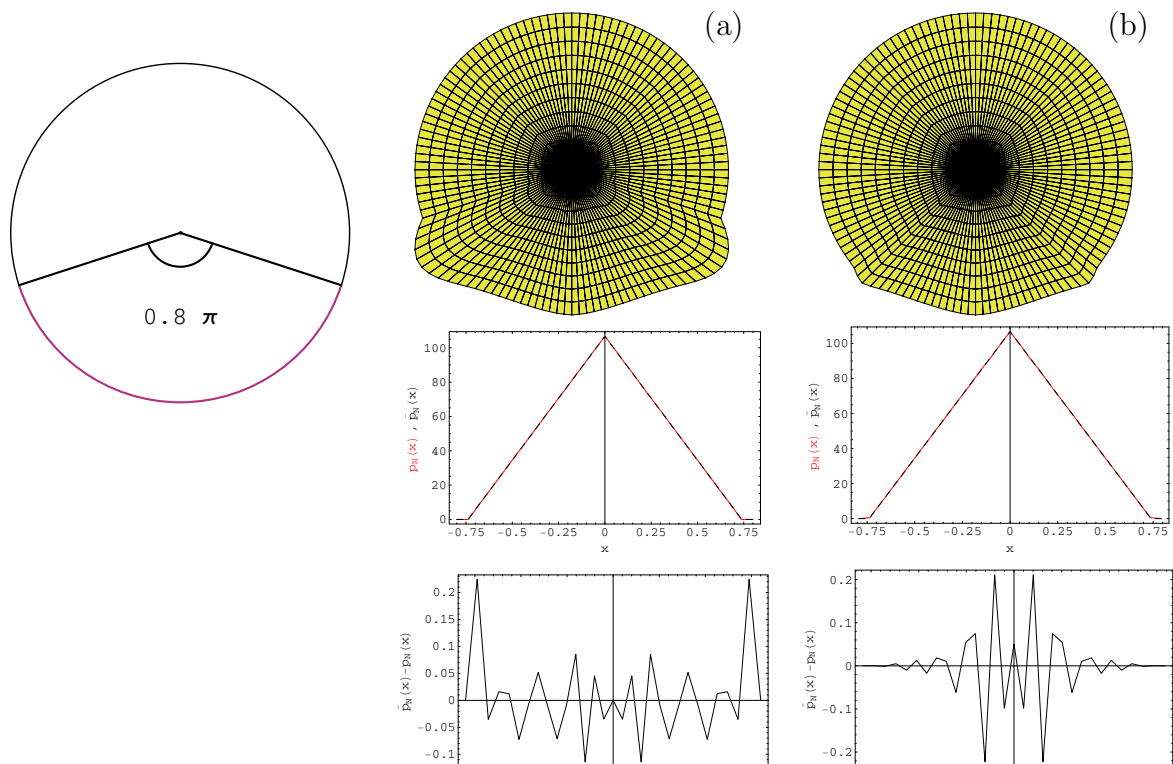
Przedstawiony powyżej problem optymalizacyjny pozostawia pewną dowolność w wyborze konkretnej przestrzeni rozwiązań (dopuszczalnych kształtów powierzchni bocznej uszczelki). Odpowiedni wybór owej przestrzeni jest istotny zarówno dla jakości otrzymanych wyników jak i dla samego przebiegu procesu optymalizacji. Poniżej poruszono ten temat, przedstawiając wpływ zmiany przestrzeni rozwiązań na rozwiązanie zagadnienia optymalizacyjnego.

Przeprowadzono studium przypadków, rozpatrując trzy niezależne czynniki mające wpływ na kształt owej przestrzeni. Pierwszym czynnikiem jest liczba parametrów kształtu ϕ_i , drugim – wybór wycinka brzegu, którego kształt podlega optymalizacji (parametry δ oraz γ), natomiast trzecim czynnikiem jest wybór konkretnej bazy funkcji B-sklejanych B^i (dopuszczono dwa rodzaje funkcji: stopnia 2 oraz stopnia maksymalnego).

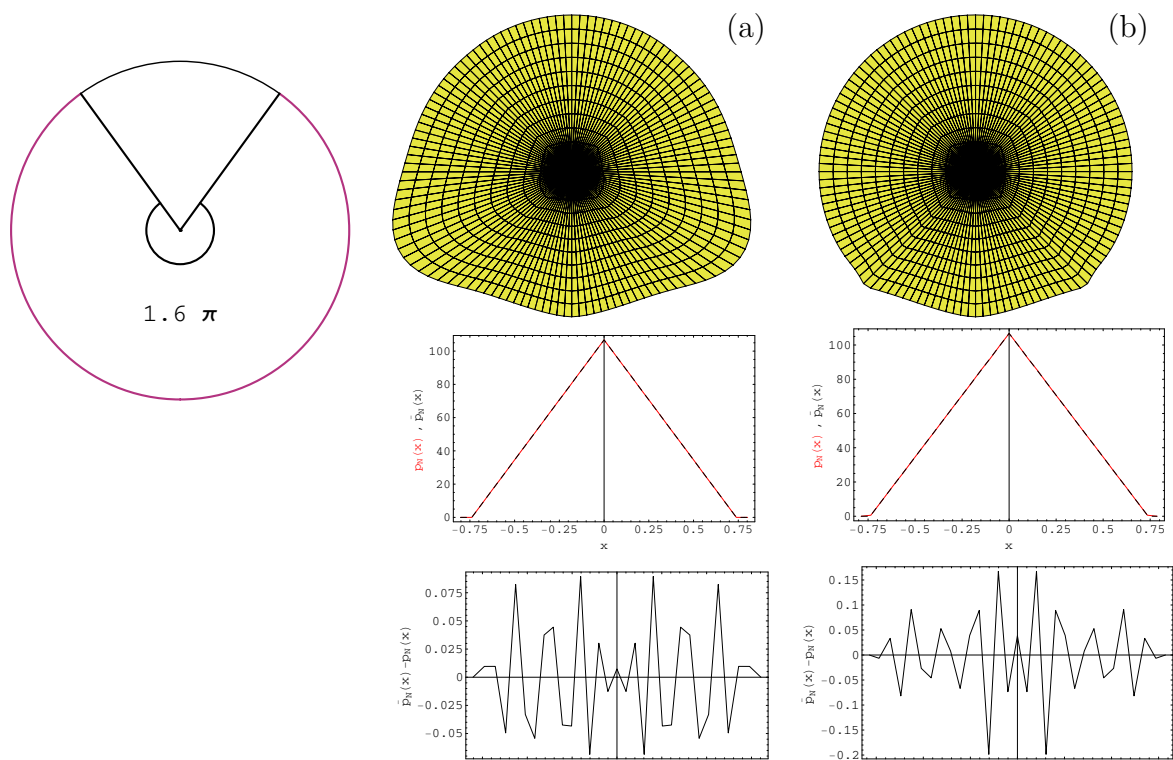
Punktem startu do procesu optymalizacji w każdym z badanych przypadków był zestaw parametrów $\phi_i = 1$, odpowiadający kształtowi kołowemu o promieniu R_0 . Liczba parametrów ustalana była proporcjonalnie do rozwartości kąta określającego optymalizowany fragment tak, aby zachować określoną ich gęstość w przeliczeniu na cały obwód. Rozpatrywane były trzy różne gęstości: 20, 40 i 80 parametrów.

Przeanalizowano cztery różne pary parametrów δ oraz γ , opisujących różne wycinki brzegu uszczelki. Rysunki 7.4.3–7.4.6 przedstawiają optymalne kształty oraz odpowiadające im rozkłady ciśnień p_N i różnice $\bar{p}_N(x_i) - p_N(x_i)$ przy stałej gęstości parametrów ϕ_i (40 parametrów w przeliczeniu na obwód) dla różnych par (δ, γ) oraz dla różnych typów parametryzacji. Można zauważyć, że parametryzacja kształtu krzywymi B-sklejanych stopnia 2 daje w wyniku optymalizacji bardziej intuicyjne kształty. Wynika to z bardziej lokalnego wpływu parametrów na kształt krzywych B-sklejanych niskiego stopnia. Z kolei w przypadku przedstawionym na rys. 7.4.6 przestrzeń funkcji kształtu jest dobrana niewłaściwie, co uniemożliwia osiągnięcie satysfakcjonujących wyników optymalizacji.

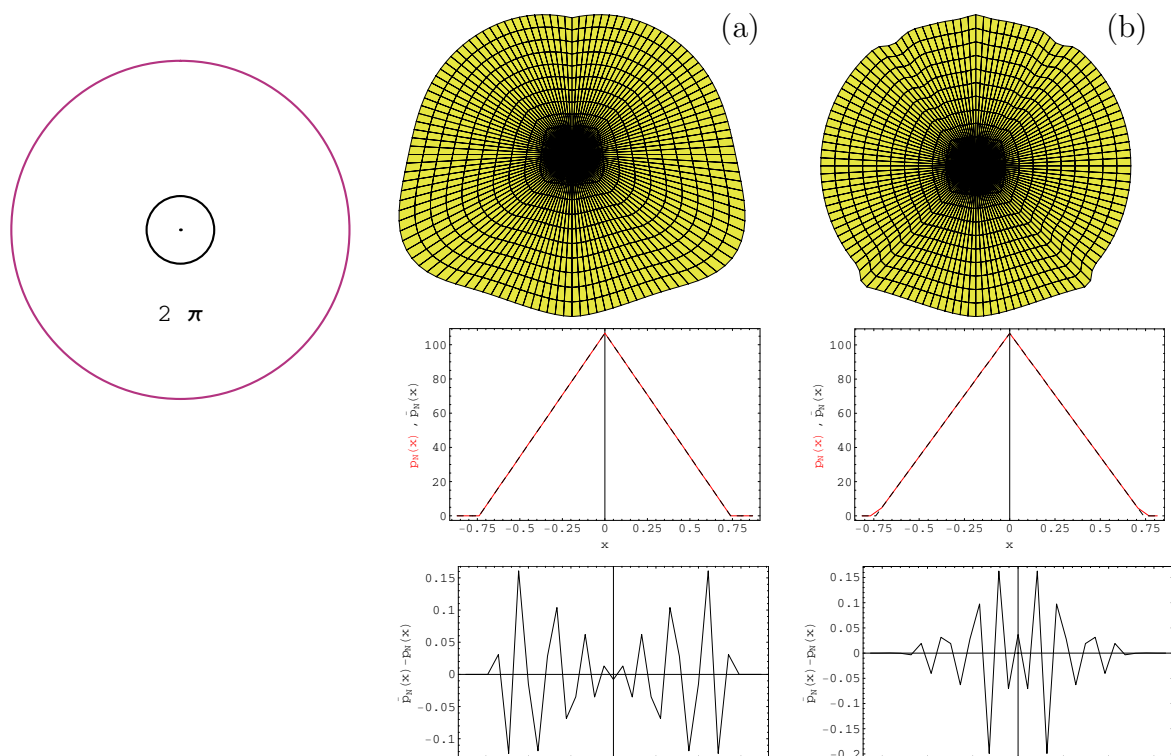
Tabela 7.4.1 przedstawia wpływ zwiększania liczby parametrów na zbieżność metody BFGS oraz na optymalną wartość funkcji celu dla różnych rodzajów parametryzacji (dla $(\delta, \gamma) = (0, \pi)$). Optymalna wartość funkcji celu J spada wraz ze wzrostem liczby parametrów kształtu ϕ_i . Zwróćmy jednak uwagę na fakt, że tylko w przypadku parametryzacji krzywymi B-sklejanych stopnia 2 spadek wartości J jest wyraźny.



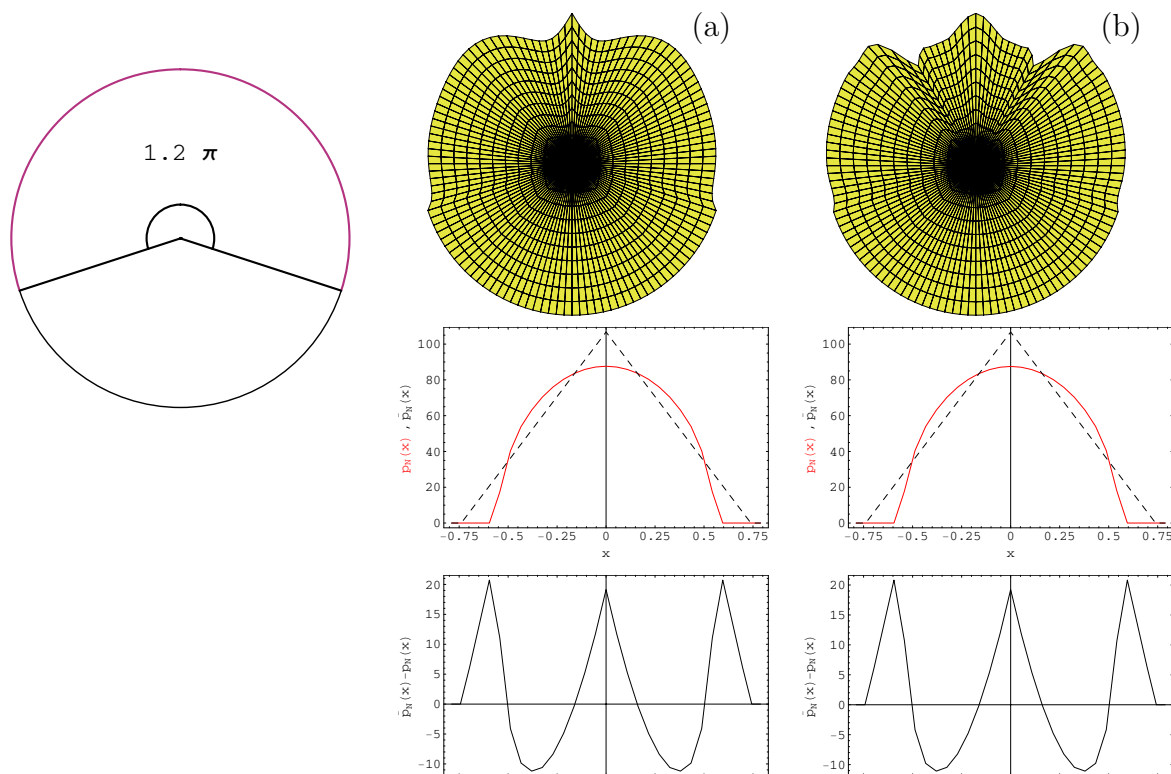
Rysunek 7.4.3: Optymalne kształty dla $\delta = 0$, $\gamma = 0.4\pi$ oraz dla różnych typów parametryzacji: (a) Béziera, (b) B-sklejana. Pokazano optymalny kształt w konfiguracji początkowej, rozkład ciśnień oraz błąd $\bar{p}_N - p_N$.



Rysunek 7.4.4: Optymalne kształty dla $\delta = 0$, $\gamma = 0.8\pi$ oraz dla różnych typów parametryzacji: (a) Béziera, (b) B-sklejana. Pokazano optymalny kształt w konfiguracji początkowej, rozkład ciśnień oraz błąd $\bar{p}_N - p_N$.



Rysunek 7.4.5: Optymalne kształty dla $\delta=0$, $\gamma=\pi$ oraz dla różnych typów parametryzacji: (a) Bézier, (b) B-sklejana. Pokazano optymalny kształt w konfiguracji początkowej, rozkład ciśnień oraz błąd $\bar{p}_N - p_N$.



Rysunek 7.4.6: Optymalne kształty dla $\delta = 0.4\pi$, $\gamma = \pi$ oraz dla różnych typów parametryzacji: (a) Bézier, (b) B-sklejana. Pokazano optymalny kształt w konfiguracji początkowej, rozkład ciśnień oraz błąd $\bar{p}_N - p_N$.

Tabela 7.4.1: Wpływ liczby parametrów kształtu na osiągnięte minimum funkcji celu J_{opt} oraz na liczbę iteracji metody BFGS.

Rodzaj parametryzacji	J_{opt} / liczba iteracji BFGS		
	20 parametrów	40 parametrów	80 parametrów
B-spline rzędu 2	$3.8 \cdot 10^{-4} / 21$	$1.5 \cdot 10^{-5} / 25$	$3.4 \cdot 10^{-12} / 25$
Bézier	$2.9 \cdot 10^{-5} / 42$	$1.4 \cdot 10^{-5} / 41$	$3.3 \cdot 10^{-6} / 38$

Rysunek 7.4.7 przedstawia przebieg procesu optymalizacji dla jednego z przykładów. Widoczny jest spadek wartości funkcji celu o kilka rzędów wielkości.

Warto w tym miejscu jeszcze raz podkreślić, że do wyznaczania niejawnych pochodnych stosowana jest Analiza Wrażliwości. Przy kilkudziesięciu parametrach kształtu, zastosowanie metody FDM wymagałoby kilkudziesięciokrotnie dłuższego czasu obliczeń dla całego procesu optymalizacji.

7.5. Optymalizacja wstępnego kształtu odkuwki w procesie spęczania

W pracach Fourmenta i in. (1996), Srikantha i Zabarasa (2000) oraz Stupkiewicza (2003) rozwiązano dwuwymiarowy problem odwrotny znalezienia wstępnego kształtu powierzchni bocznej sprężysto-plastycznej próbki tak, żeby w procesie spęczania otrzymać próbkę o przekroju prostokątnym (rys. 7.5.1). W niniejszym podrozdziale rozpatrujemy analogiczny problem. Rozszerzenie polega na badaniu zagadnienia trójwymiarowego oraz na uwzględnieniu sprężystych deformacji matrycy. Podobny, trójwymiarowy problem optymalizacyjny kontaktu próbki o eliptycznej podstawie ze sztywnym narzędziem rozwiążali niedawno Acharjee i Zabarasa (2006).

Definicja problemu

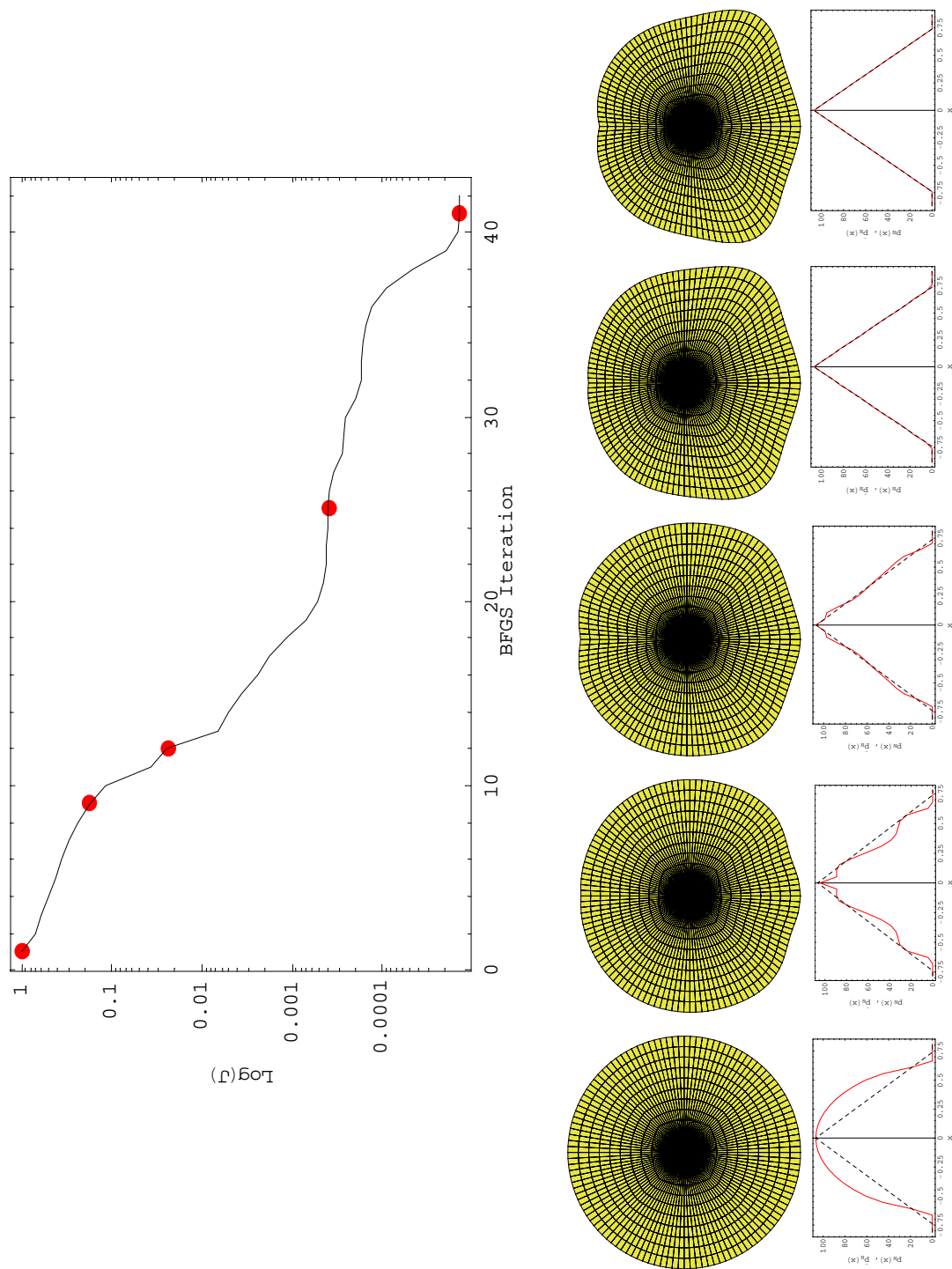
Początkową geometrię zadania (kształt nieoptymalizowany) przedstawiono na rys. 7.5.2. Prostopadłościenna sprężysto-plastyczna próbka o wymiarach $h_0 \times w_0 \times w_0$, gdzie $h_0 = \frac{3}{2} [cm]$, $w_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} [cm]$, zostaje ściśnięta przez sprężyste szczęki do $2/3$ wysokości. Do opisu właściwości materiału, z którego wykonana jest próbka, zastosowano model sprężysto-plastyczności z warunkiem Hubera-Misesa, bazujący na multiplikatywnym rozkładzie tensora gradientu deformacji na część sprężystą i plastyczną. Przyjęto nieliniowe umocnienie izotropowe (Simo i Hughes, 1998) według wzoru:

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + K\alpha + (\sigma_y^{inf} - \sigma_y^0)(1 - e^{-\delta\alpha}),$$

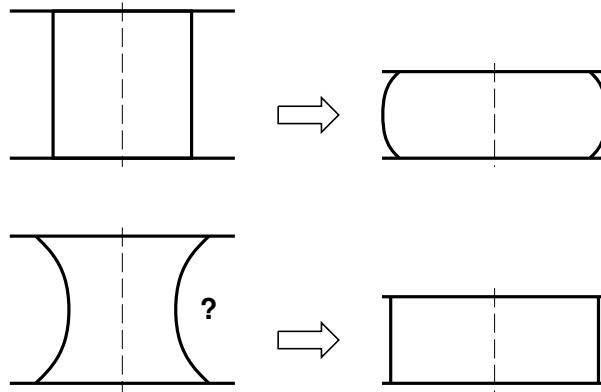
gdzie α jest miarą skumulowanego odkształcenia plastycznego. Przyjęto następujące wartości parametrów materiałowych:

$$\begin{aligned} E &= 206.9 [GPa], & \nu &= 0.3, & \sigma_y^0 &= 0.45 [GPa], \\ \sigma_y^{inf} &= 0.6 [GPa], & K &= 0.5 [GPa], & \delta &= 0.01. \end{aligned}$$

Do dyskretyzacji obszaru sprężysto-plastycznego wykorzystano 8-węzłowe elementy skończone opracowane przez prof. J. Korelca, dostępne w bibliotece *AceFEM*. W ele-



Rysunek 7.4.7: Kolejne przybliżenia optymalnego kształtu w wybranych krokach metody BFGS. Parametryzacja kształtu krzywymi Bézier, dla $\delta=0$, $\gamma=\pi$.



Rysunek 7.5.1: Schemat problemu optymalizacji wstępnego kształtu odkuwki.

mentach tych zastosowana jest technika polegająca na selektywnym całkowaniu numerycznym i rozwinięciu funkcji kształtu w szereg Taylora, co zapobiega efektom blokowania (*volumetric locking*, *shear locking*). Właściwości sprężyste szczęk określono jako $E = 210 [GPa]$, $\nu = 0.3$. Użyto modelu tarcia Coulomba ($\mu = 0.3$). Zastosowano metodę wygładzania powierzchni narzędzia płatami Bézier opartymi na 16 węzłach.

Po spłaszczeniu, widoczne jest niejednorodne odkształcenie boków próbki (wybrzuzenia) spowodowane działaniem sił tarcia, oraz w niewielkim stopniu z powodu sprężystego odkształcenia szczęk (rys. 7.5.2). Celem postawionego problemu optymalizacyjnego jest znalezienie takiego początkowego kształtu próbki, aby po ściśnięciu otrzymać płaskie boki o zadanej szerokości $w = 1$. Powyższe zdanie można zapisać w sposób formalny za pomocą funkcji celu:

$$J = \sum_i (x_i - w/2)^2$$

gdzie $x_i = X_i + u_i$ są to współrzędne x -owe węzłów leżących na jednym z boków² zdeformowanej próbki³.

Parametryzacja kształtu próbki

Aby móc modyfikować początkowy kształt próbki, należy określić sposób parametryzacji tego kształtu. Wprowadzimy najpierw funkcję skalującą:

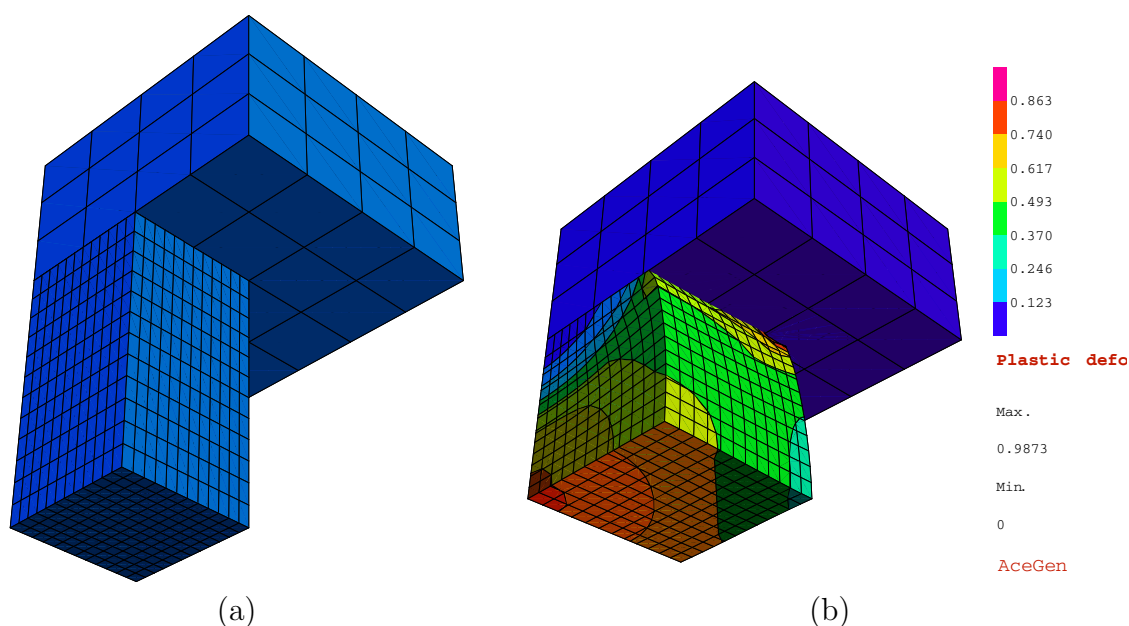
$$\chi(\xi_1, \xi_2; \phi_{ij}) := \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M B_M^i(\xi_1) B_M^j(\xi_2) \phi_{ij}$$

gdzie $(\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$ są współrzędnymi parametryzacji, ϕ_{ij} jest macierzą $M \times M$ parametrów, natomiast $B_M^i(\xi)$ jest *bazą Bernstein'a* stopnia M (3.15). Parametryzacji będzie podlegał kształt powierzchni bocznej próbki. Kształt aktualny określimy jako transformację kształtu referencyjnej prostopadłościennej próbki względem osi OZ przy pomocy funkcji skalującej χ (por. rys. 7.5.3). Dla przejrzystości przedstawiona zostanie transformacja jedynie dla wycinka $\{(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) \mid \hat{X} \geq |\hat{Y}|\}$:

$$\mathbf{X}((\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}); \phi_{ij}) := (\hat{X}, \hat{Y}, 0) \cdot \chi\left(\frac{\hat{Y}}{\hat{X}}, \frac{2\hat{Z}}{h_0}; \phi_{ij}\right) + (0, 0, \hat{Z}) \quad (7.3)$$

²Korzystając z symetrii zadania wystarczy wziąć pod uwagę tylko jeden bok.

³Układ współrzędnych przyjęto tak, że płaszczyzny symetrii próbki przecinają się w początku układu.



Rysunek 7.5.2: Próbką nieoptymalizowaną: (a) przed deformacją, (b) pole skumulowanego odkształcenia plastycznego w konfiguracji odkształconej.

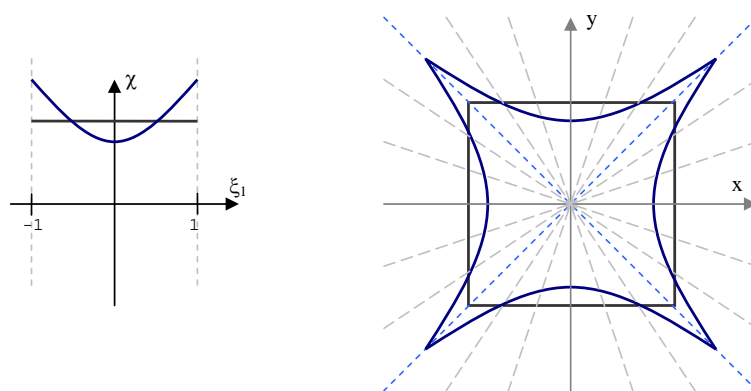
gdzie h_0 jest wysokością próbki, natomiast wielkości z daszkiem oznaczają współrzędne referencyjnego, prostokątnego kształtu (por. rys. 7.5.4). Korzystając z faktu że problem jest symetryczny, możemy ograniczyć liczbę parametrów kształtu. Prawdziwe są bowiem zależności

$$\phi_{i,j} = \phi_{M+1-i,j} = \phi_{i,M+1-j},$$

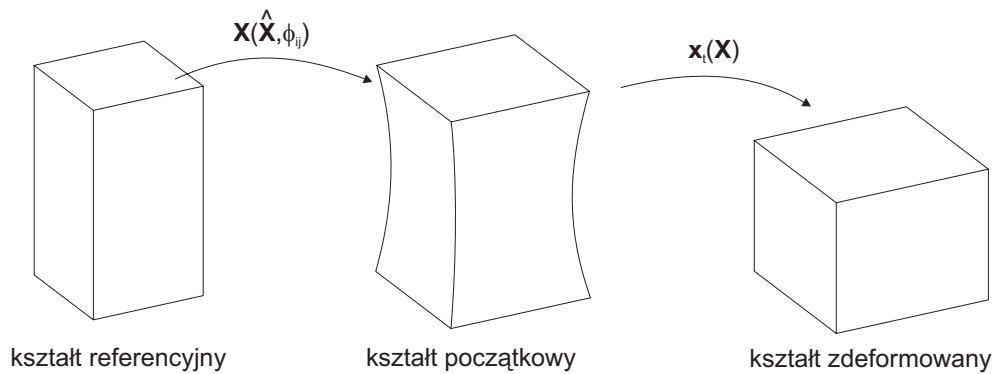
z których wynika, że zamiast M^2 parametrów kształtu potrzebujemy ich jedynie $(\lceil M/2 \rceil)^2$, gdzie funkcja $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą od x .

Chcąc zastosować gradientowy algorytm minimalizacyjny BFGS, potrzebne jest określenie gradientu funkcji celu J względem parametrów kształtu ϕ_{ij} . Uwzględniając niejawne zależności, funkcję celu zapiszemy jako

$$J(\phi_{ij}) = \sum_k (X_k(\phi_{ij}) + u_k(\phi_{ij}) - w/2)^2.$$



Rysunek 7.5.3: Schemat parametryzacji kształtu próbki. Punkty prostokątnej, referencyjnej geometrii zostają przeskalowane w kierunku promieniowym za pomocą funkcji χ (widoczny przekrój płaszczyzną XY).



Rysunek 7.5.4: Parametryzacja kształtu próbki. Kształt referencyjny, początkowy i zdeformowany.

Stąd, gradient J przedstawia się następująco:

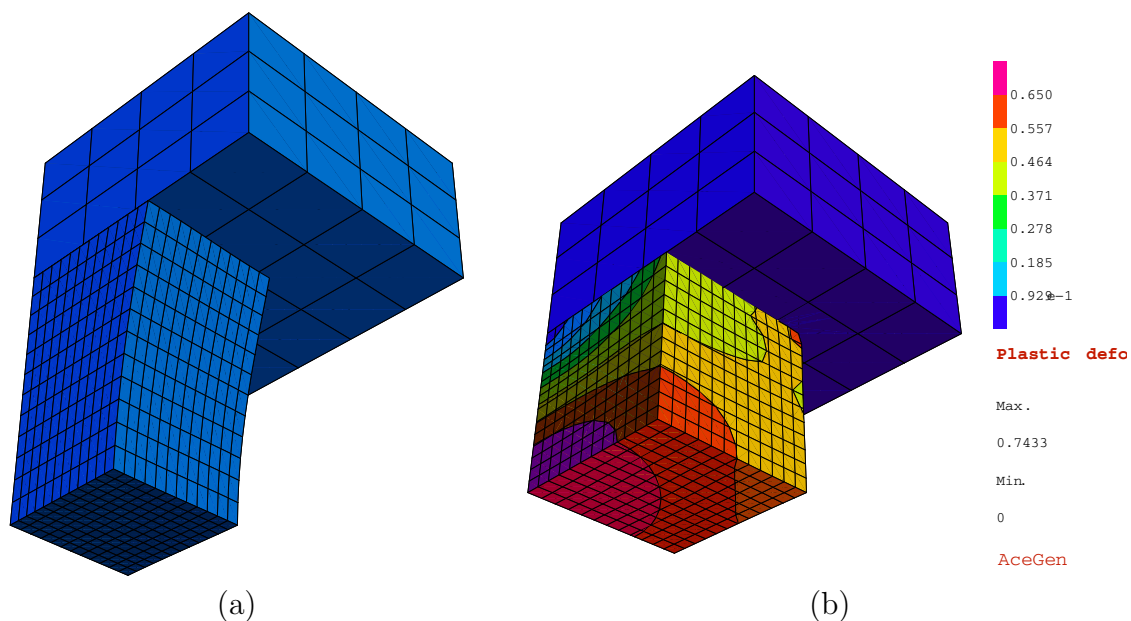
$$\frac{dJ}{d\phi_{ij}} = 2 \sum_k \left(\frac{\partial X_k}{\partial \phi_{ij}} + \frac{du_k}{d\phi_{ij}} \right) (X_k + u_k - w/2).$$

Pochodne $\partial X_k / \partial \phi_{ij}$ występujące po prawej stronie powyższego równania można wyznaczyć korzystając z jawnej zależności (7.3), natomiast pochodne $du_k / d\phi_{ij}$ (wrażliwość przemieszczeń) mają charakter niejawny i wyznaczono je przy pomocy Analizy Wrażliwości.

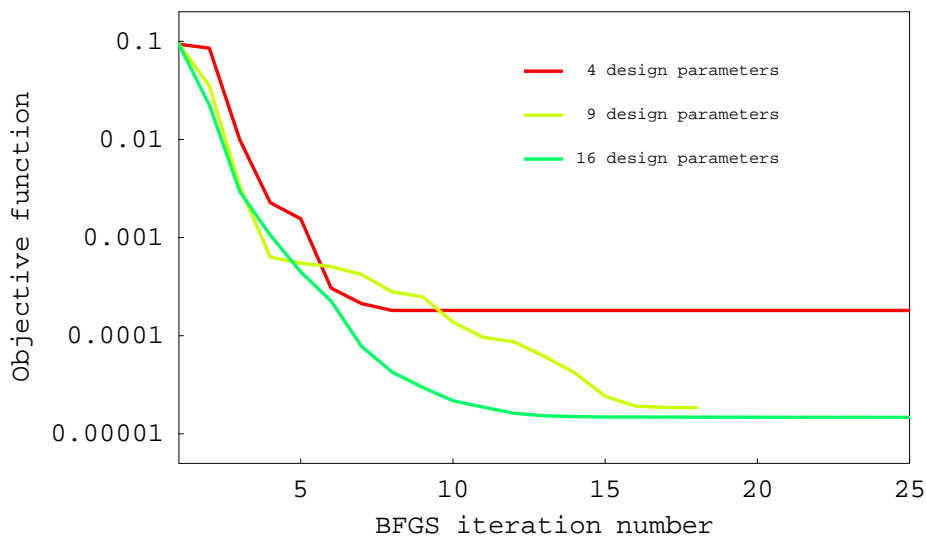
Wyniki optymalizacji

Niniejsze zagadnienie rozwiązano minimalizując funkcję celu J metodą BFGS. Na rys. 7.5.5 przedstawiono rozwiązanie, na którym widać oczekiwany prostopadłościenny kształt próbki po odkształceniu.

Przeprowadzono również studium przypadków używając różnej liczby parametrów kształtu (4, 9 i 16 parametrów). Rysunek 7.5.6 przedstawia wykres zbieżności metody BFGS w zależności od liczby parametrów. Zwiększenie liczby parametrów pozwala osiągnąć mniejszą wartość funkcji celu, przy czym różnica pomiędzy przypadkiem zastosowania 9 i 16 parametrów jest bardzo niewielka. Dodatkowo można zauważyć, że wartość funkcji celu dla optymalnego kształtu jest o kilka rzędów niższa niż dla kształtu początkowego, a także że zbieżność metody BFGS jest osiągnięta w kilkunastu krokach. Tak dobra zbieżność jest wynikiem wykorzystania metod gradientowych. Obliczenia można było przeprowadzić w sposób efektywny dzięki temu, że do wyznaczania wymaganych gradientów zastosowano Analizę Wrażliwości.



Rysunek 7.5.5: Próbkę zoptymalizowaną (16 parametrów kształtu): (a) przed deformacją, (b) pole skumulowanego odkształcenia plastycznego w konfiguracji odkształconej.



Rysunek 7.5.6: Wartość funkcji celu w kolejnych krokach metody BFGS (dla 4, 9 i 16 parametrów kształtu).

Rozdział 8

Zakończenie

Podsumowanie

Zastosowano Analizę Wrażliwości do ogólnego przypadku kontaktu z tarciem trójwymiarowych ciał odkształcalnych w zakresie dużych deformacji i poślizgów. Do regularyzacji warunków kontaktowych wykorzystano metodę rozszerzonych mnożników Lagrange'a, zaś w sformułowaniach dyskretnych użyto różnych sposobów wygładzania powierzchni kontaktowych. Przedstawiono szereg przykładów numerycznych wykazujących poprawność i efektywność rozwiązań zarówno dla problemu bezpośredniego jak i dla problemu wrażliwości. Osiągnięcie wysokiej zgodności rozwiązań problemu wrażliwości uzyskanych dwiema niezależnymi metodami pozwala wnioskować o poprawności stosowanych metod. Rozwiązano dwa problemy optymalizacyjne, będące ilustracją możliwości wykorzystania Analizy Wrażliwości.

Osiągnięcie zamierzonego celu wymagało rozszerzenia istniejącego środowiska MES – *AceFEM* – o infrastrukturę niezbędną do rozwiązywania zagadnień kontaktowych. Składało się na to m. in. opracowanie odpowiednich struktur danych oraz implementacja procedury globalnego wyszukiwania kontaktu. Korzystając z możliwości środowiska *AceGEN/AceFEM*, opracowano szablony elementów kontaktowych bazujące na postaci słabej zagadnienia kontaktowego z tarciem, zregularyzowanej metodą rozszerzonych mnożników Lagrange'a. Na podstawie szablonów stworzono szereg dwu- i trójwymiarowych elementów kontaktowych, różniących się sposobami parametryzacji powierzchni *master*.

W pracy, zaproponowano również własny schemat wygładzania, bazujący na parametryzacji płacami Bézier opartymi na 9 węzłach. Przeprowadzono analizę porównawczą kosztu czasowego obliczeń przy wykorzystaniu trójwymiarowych elementów kontaktowych różniących się parametryzacją powierzchni. Z analizy wynika, że w porównaniu z płacami Bézier opartymi na 16 węzłach, zaproponowana parametryzacja daje niższą złożoność czasową procedur elementów oraz lepsze własności zbieżności procesu iteracyjnego.

W rozprawie przeanalizowano także dwa aspekty związane z dyskretyzacją mogące wpływać na ciągłość zmiennych kinematycznych: poprawność wyszukiwania par kontaktowych oraz przyjęcie odpowiedniego przybliżenia dla miary długości poślizgu. Jest to o tyle istotne, że nieciągłość zmiennych kinematycznych może powodować problemy ze zbieżnością oraz być przyczyną niepoprawnych rozwiązań problemu wrażliwości.

Reasumując, do najważniejszych oryginalnych osiągnięć niniejszej rozprawy należy zaliczyć:

- przeprowadzenie Analizy Wrażliwości dla złożonych sformułowań zagadnień kon-

taktowych z tarciem,

- rozbudowę środowiska *AceFEM* o infrastrukturę niezbędną do analizy zjawisk kontaktowych
- implementację szablonów dla dwu- i trójwymiarowych elementów kontaktowych,
- zaproponowanie i zastosowanie własnego schematu wygładzania powierzchni kontaktowej.

Zastosowania efektów badań

Środowiska *AceGEN* i *AceFEM*, wraz z wprowadzoną w ramach niniejszej rozprawy obsługą zagadnień kontaktowych, należą do puli modułów dodatkowych programu *Mathematica*. Dzięki temu efekty niniejszej pracy są szerzej dostępne dla środowiska naukowego i mogą stanowić przyczynek do dalszych badań w zakresie mechaniki kontaktu oraz analizy wrażliwości dla zagadnień kontaktowych.

Rozbudowana w ramach niniejszej pracy infrastruktura środowiska *AceFEM* oraz opracowane szablony elementów kontaktowych były wykorzystane do rozwiązania szeregu problemów kontaktowych z tarciem w ramach grantu IMPRESS (5PR UE). Stanowiły również podstawę do opracowania elementów skończonych dla bardziej zaawansowanych modeli kontaktowych, włączając w to sprzężone efekty termomechaniczne rozpatrywane w ramach projektu ENLUB (5PR UE). Analiza wrażliwości i optymalizacja dla problemów kontaktowych zostały również wykorzystane dla celów projektu PROHIPP (6PR UE).

Możliwości rozszerzenia badań

Wyniki otrzymane w ramach niniejszej pracy stanowią dobrą podstawę do dalszych badań związanych z analizą wrażliwości dla problemów kontaktowych. Poniżej przedstawiono dwa wybrane kierunki rozwoju, które są interesujące ze względu na możliwe zastosowania.

Bardzo pożyteczne mogłoby być zaadoptowanie podejścia opartego na elemencie mortarowym (Puso i Laursen, 2004; Puso i in., 2008), a następnie przeprowadzenie dlań analizy wrażliwości. Podejścia symetryczne i quasi-symetryczne, w skład których wchodzi metoda elementu mortarowego, mają wiele korzystnych własności w porównaniu do, zazwyczaj stosowanych, podejść *node-to-segment*. Oprócz tego, że techniki symetryczne bardziej równomiernie przenoszą oddziaływania kontaktowe, to również dają możliwość zastosowania ich do zagadnień uwzględniających kontakt w obrębie jednego ciała (*self-contact*). Przeprowadzenie powyższej analizy wiązałoby się z potrzebą modyfikacji w algorytmie globalnego wyszukiwania kontaktu, tak aby wyszukiwał potencjalnie “przecinające się” segmenty i na tej podstawie tworzył odpowiednie pary kontaktowe. Wymagana by była również implementacja procedur dla elementów mortarowych, co można by wykonać przy wykorzystaniu możliwości przetwarzania symbolicznego środowiska *AceFEM*.

Ciekawym zagadnieniem mogłoby być również wyznaczenie wrażliwości wyższego rzędu (por. Dems i Mróz, 1985; Haftka i Mróz, 1986), tj. macierzy drugich pochodnych mieszanych rozwiązania po parametrach zadania. Podobnie jak dla wrażliwości pierwszego rzędu, ową wrażliwość można by wyznaczyć stosując metodę DDM. Wtedy

rozwiązanie, bazujące na wrażliwości pierwszego rzędu, wymagałoby wyznaczenia pochodnych jeszcze wyższego rzędu. Przekładałoby się to na wzrost złożoności zadania oraz mogłoby stanowić o jeszcze niższej regularności rozwiązania.

Jednym z możliwych zastosowań dla wrażliwości drugiego rzędu jest jej użycie w celu wykorzystania metody Newtona (metody stycznych) zamiast metod gradientowych do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych. W pewnych warunkach dawałoby to lepszą zbieżność procesu optymalizacyjnego aczkolwiek mogłoby być nieskuteczne z powodu wyższego kosztu wyznaczenia pochodnych drugiego rzędu oraz ich niskiej regularności. Innym ciekawym zastosowaniem jest możliwość określenia funkcji celu w problemie optymalizacyjnym tak, aby zawierała w swojej definicji wrażliwości pierwszego rzędu. Pozwoliłoby to na rozwiązywanie szerszej klasy zagadnień optymalizacyjnych. Jednym z przykładów takiego zagadnienia jest problem znalezienia takiego kształtu matrycy aby zminimalizować wrażliwość kształtu produktu końcowego na niedokładności wykonania prefabrykatów w procesie kucia. Jako że w definicji funkcji celu występowałby już gradient pierwszego rzędu, to wykorzystanie metod gradientowych do rozwiązania tego zagadnienia wymagałoby obliczenia wrażliwości drugiego rzędu.

Bibliografia

- [1] ACHARJEE, S., AND ZABARAS, N. The continuum sensitivity method for the computational design of three-dimensional deformation processes. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 195 (2006), 6822–6842.
- [2] ALART, P., AND CURNIER, A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 92 (1991), 353–375.
- [3] ANTUNEZ, H., AND KLEIBER, M. Sensitivity of forming processes to shape parameters. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 137 (1996), 189–206.
- [4] BELYTSCHKO, T., DANIEL, W., AND VENTURA, G. A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 55, 1 (2002), 101–125.
- [5] BENSON, D., AND HALLQUIST, J. A single surface algorithm for contact searching. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 91 (1990), 141–163.
- [6] BERTSEKAS, D. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, MA, USA, 2003.
- [7] BRUNEEL, H., AND DE RYCKE, I. Quicktrace: a fast algorithm to detect contact. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 54 (2002), 299–316.
- [8] BURCZYŃSKI, T., BONNET, M., FEDELINSKI, P., AND NOWAKOWSKI, M. Sensitivity analysis and identification of material defects in dynamical systems. *Syst. Anal. Modelling Simul.* 42 (2002), 559–574.
- [9] BURCZYŃSKI, T., AND KUŚ, W. Rozproszone algorytmy ewolucyjne w kuciu dwuetapowym matrycowym. In *Proc. KomPlasTech* (2004).
- [10] CURNIER, A. A theory of friction. *Int. J. Sol. Struct.* 20 (1984), 637–647.
- [11] CURNIER, A. *Computational methods in solid mechanics*. Swiss Federal Institute of Technology, 1993.
- [12] CURNIER, A., HE, Q.-C., AND TELEGA, J. Formulation of unilateral contact between two elastic bodies undergoing finite deformations. *C. R. Acad. Sci. Paris* 314, Serie II (1992).
- [13] DE SOUZA NETO, E., PERIĆ, D., DUTKO, M., AND OWEN, D. Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. *Int. J. Sol. Struct.* 33 (1996), 3277–3296.

-
- [14] DEMS, K., AND MRÓZ, Z. Variational approach to first- and second-order sensitivity analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 21 (1985), 637–646.
- [15] DEMS, K., AND MRÓZ, Z. On shape sensitivity approaches in the numerical analysis of structures. *Struct. Optimization* 6 (1993), 86–93.
- [16] DOLTSINIS, I., AND RODIČ, T. Process design and sensitivity analysis in metal forming. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 45 (1999), 661–692.
- [17] ENLUB. Development of new environmentally acceptable lubricants, tribological tests and models for European sheet forming industry. FP5-GROWTH project G1RD-CT-2002-00740.
- [18] EVANS, L. *Równania Różniczkowe Cząstkowe*. PWN, 2002.
- [19] FENG, Y., AND OWEN, D. An augmented digital tree algorithm for contact detection in computational mechanics. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 55 (2002), 159–176.
- [20] FOURMENT, L., BALAN, T., AND CHENOT, J. Optimal design for non-steady-state metal forming processes — II. Application of shape optimization in forging. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 39 (1996), 51–65.
- [21] GAO, Z., AND GRANDHI, R. Sensitivity analysis and shape optimization for perform design in thermo-mechanical coupled analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 45 (1999), 1349–1373.
- [22] HAFTKA, R., AND MRÓZ, Z. First- and second-order sensitivity analysis of linear and nonlinear structures. *AIAA J.* 24 (1986), 1187–1192.
- [23] HALLQUIST, J., GOUDREAU, G., AND BENSON, D. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 51 (1985), 107–137.
- [24] IMPRESS. Improvement of precision in forming by simultaneous modelling of deflections in workpiece-die-press system. FP5-GROWTH project G1RD-CT-2000-02002.
- [25] *Intel Math Kernel Library Reference Manual*. <http://www.intel.com/>.
- [26] JANKOWSKA, J., AND JANKOWSKI, M. *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, vol. 1. WNT, 1981.
- [27] JANKOWSKI, M. *Elementy grafiki komputerowej*. WNT, 2006.
- [28] JOHNSON, K. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [29] KIM, N., , AND YI, K. CHOI, K. A material derivative approach in design sensitivity analysis of three-dimensional contact problems. *Int. J. Sol. Struct.* 39 (2002), 2087–2108.
- [30] KLARBRING, A. Derivation and analysis of rate boundary-value problems of frictional contact. *Eur. J. Mech. A/Solids* 9, 1 (1990), 53–85.

-
- [31] KLARBRING, A. Large displacement frictional contact: a continuum framework for finite element discretization. *Eur. J. Mech. A/Solids* 14, 2 (1995), 237–253.
- [32] KLEIBER, M. *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*. PWN, 1989.
- [33] KLEIBER, M. Shape and non-shape structural sensitivity analysis for problems with any material and kinematic non-linearity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 108 (1993), 73–97.
- [34] KLEIBER, M., ANTUNEZ, H., HIEN, T., AND KOWALCZYK, P. *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*. Wiley, Chichester, 1997.
- [35] KLEIBER, M., AND SOSNOWSKI, W. Parameter sensitivity analysis in frictional contact problems of sheet metal forming. *Comp. Mech.* 16 (1995), 297–306.
- [36] KONYUKHOV, A., AND SCHWEIZERHOF, K. On the solvability of closest point projection procedures in contact analysis: Analysis and solution strategy for surfaces of arbitrary geometry. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 197 (2008), 3045–3056.
- [37] KORELC, J. Multi-language and multi-environment generation of nonlinear finite element codes. *Engineering with Computers* 18 (2002), 312–327.
- [38] KORELC, J. AceGEN and AceFEM user manuals. Available at <http://www.fgg.uni-lj.si/Symech/>, 2008.
- [39] KORELC, J., LENGIEWICZ, J., AND STUPKIEWICZ, S. A study of symbolic description, numerical efficiency and accuracy of 2D and 3D contact formulations. In *Analysis and Simulation of Contact Problems* (2006), vol. 27 of Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer.
- [40] KOWALCZYK, P. *Sensitivity Analysis in Finite Element Computations of Elasto-Plasticity*. IPPT PAN, 2006.
- [41] KOWALCZYK, P., AND KLEIBER, M. Shape sensitivity in elasto-plastic computations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 171 (1999), 371–386.
- [42] KRSTULOVIĆ-OPARA, L. *A C^1 -continuous formulation for finite deformation contact*. PhD thesis, Institute für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 2001.
- [43] KRSTULOVIĆ-OPARA, L., WRIGGERS, P., AND KORELC, J. A C^1 -continuous formulation for 3D finite deformation frictional contact. *Comp. Mech.* 29, 1 (2002), 27–42.
- [44] LAURSEN, T. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [45] LAURSEN, T., AND SIMO, J. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 36, 20 (1993), 3451–3485.

-
- [46] LENGIEWICZ, J., STUPKIEWICZ, S., KORELC, J., AND RODIČ, T. DDM-based sensitivity analysis and optimization for smooth contact formulations. In *Analysis and Simulation of Contact Problems* (2006), vol. 27 of Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer.
- [47] MCDEVITT, T., AND LAURSEN, T. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 48 (2000), 1525–1547.
- [48] MICHALERIS, P., TORTORELLI, D., AND VIDAL, C. Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 37 (1994), 2471–2499.
- [49] MICHAŁOWSKI, R., AND MRÓZ, Z. Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. *Arch. Mech.* 30 (1978), 259–276.
- [50] MINDLIN, R., AND DERESIEWICZ, H. Finite element calculation of thermal coupling between workpiece and tools in forging. *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 20 (1953), 327–344.
- [51] MULLER, H., AND NAU, B. *Fluid Sealing Technology*. Marcel Dekker, 1998.
- [52] MUNJIZA, A., ROUGIER, E., AND JOHN, N. Mr linear contact detection algorithm. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 66 (2006), 46–71.
- [53] OGDEN, R. On eulerian and lagrangean objectivity in continuum mechanics. *Arch. Mech.* 36 (1984), 207–218.
- [54] OGDEN, R. *Nonlinear Elasticity with Application to Material Modelling*. IPPT PAN, 2003.
- [55] OSTROWSKA-MACIEJEWSKA, J. *Mechanika Ciał Odkształcalnych*. IPPT PAN, 1994.
- [56] PIETRZAK, G. *Continuum mechanics modelling and augmented Lagrangian formulation of large deformation frictional contact problems*. PhD thesis, Lausanne, EPFL, 1997.
- [57] PIETRZAK, G., AND CURNIER, A. Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented Lagrangian treatment. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 177, 3–4 (1999), 351–381.
- [58] PRESS, W., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W., AND FLANNERY, B. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [59] PROHIPP. New design and manufacturing processes for high pressure fluid power products. FP6 project NMP 2-CT-2004-505466.
- [60] PUSO, M., AND LAURSEN, T. A 3D contact smoothing method using Gregory patches. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 54 (2002), 1161–1194.
- [61] PUSO, M., AND LAURSEN, T. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 193 (2004), 601–629.

-
- [62] PUSO, M., AND LAURSEN, T. A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 193 (2004), 4891–4913.
- [63] PUSO, M., LAURSEN, T., AND SOLBERG, J. A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 197 (2008), 555–566.
- [64] SIGNORINI, A. Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata. *Rend. di Matem. e delle sue appl.* 18 (1959).
- [65] SIMO, J., ARMERO, F., AND TAYLOR, R. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 110 (1993), 359–386.
- [66] SIMO, J., AND HUGHES, T. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [67] SIMO, J., AND LAURSEN, T. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Comp. Struct.* 42 (1992), 97–116.
- [68] SOLBERG, J., JONES, R., AND PAPADOPOULOS, P. A family of simple two-pass dual formulations for the finite element solution of contact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 196 (2007), 782–802.
- [69] SOLBERG, J., AND PAPADOPOULOS, P. An analysis of dual formulations for the finite element solution of two-body contact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 194 (2005), 2734–2780.
- [70] SRIKANTH, A., AND ZABARAS, N. Shape optimization and preform design in metal forming processes. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 190 (2000), 1859–1901.
- [71] STADLER, M., AND HOLZAPFEL, G. Subdivision schemes for smooth contact surfaces of arbitrary mesh topology in 3d. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 60 (2004), 1161–1195.
- [72] STADLER, M., HOLZAPFEL, G., AND KORELC, J. C^n continuous modelling of smooth contact surfaces using NURBS and application to 2D problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 57, 15 (2003), 2177–2203.
- [73] STUPKIEWICZ, S. Extension of the node-to-segment contact element for surface-expansion-dependent contact laws. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 50 (2001), 739–759.
- [74] STUPKIEWICZ, S. Augmented lagrangian formulation and sensitivity analysis of contact problems. In *Complas VII: 7th International Conference on Computational Plasticity* (2003), E. Onate and D. Owen, Eds. proceedings on CD.
- [75] STUPKIEWICZ, S., KORELC, J., DUTKO, M., AND RODIČ, T. Shape sensitivity analysis of large deformation frictional contact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 191 (2002), 3555–3581.
- [76] SZELIGA, D., GAWAD, J., AND PIETRZYK, M. Inverse analysis for identification of rheological and friction models in metal forming. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 195 (2006), 6778–6798.

- [77] TARDIEU, N., AND CONSTANTINESCU, A. On the determination of elastic coefficients from indentation experiments. *Inverse Problems* 16 (2000), 577–588.
- [78] WOLFRAM, S. *The Mathematica Book, 4th ed.* Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.
- [79] WRIGGERS, P. *Computational Contact Mechanics.* Wiley, Chichester, 2002.
- [80] WRIGGERS, P., VU VAN, T., AND STEIN, E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Comp. Struct.* 37 (1990), 319–331.
- [81] YANG, B., AND LAURSEN, T. A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations. *Comp. Mech.* 41 (2008), 189–205.
- [82] ZABARAS, N., BAO, Y., SRIKANTH, A., AND FRAZIER, W. A continuum Lagrangian sensitivity analysis for metal forming processes with applications to die design problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 48 (2000), 679–720.
- [83] ZHAO, G., WRIGHT, E., AND GRANDHI, R. Preform die shape design in metal forming using an optimization method. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 40 (1997), 1213–1230.
- [84] ZHONG, Z. *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems.* Oxford University Press, 1993.
- [85] ZIENKIEWICZ, O., AND TAYLOR, R. *The Finite Element Method*, 5th ed. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.