UNIWERSYTET WARSZAWSKI
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa
tel.: (0 22) 55 44 486
faks: (0 22) 55 44 300

dr hab. Piotr Rybka
e-mail: rybka@mimuw.edu.pl

Warszawa, 7. maja 2007 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr E.Kruglenko
Analiza Funkcjonałów Niewypukłych Charakteryzujących Mikromagnetyki

Przedłożona rozprawa pani mgr Eleonory Kruglenko ma charakter interdyscyplinarny: wprowadza w fizykę zjawisk mikromagnetycznych, prezentuje narzędzia matematyczne, (są nimi tutaj rachunek wariacyjny i teoria miar Younga), rozważa dyskretyzację modelu łącznie z eksperymentem numerycznym a na koniec przedstawia analizę ściśle matematyczną nowego modelu.

Rozprawa zaczyna się od prezentacji fizyki mikromagnetyzmu i jego statycznych modeli matematycznych. Dużo uwagi Autorka poświęca materiałom, których właściwości sprężyste zależą od wektora namagnesowania, a szczególnie stopy z pamięcią kształtu. Z uwagi na brak dostatecznych kompetencji w dziedzinie fizyki ograniczę swoje opinie w tej sprawie. Nadmienię, że z mojego punktu widzenia ten rozdział jest bardzo dobrze przygotowany i był dla mnie bardzo pouczającą lekturą.

Następny rozdział jest poświęcony matematycznym narzędziom badania mikromagnetyzmu. Ponieważ rozważane w pracy modele są statyczne, to ich matematyczny opis prowadzi do zagadnień minimalizowania funkcjonałów energii całkowitej. Innymi słowy autorka posługuje się językiem rachunku wariacyjnego. Jednakże, stosowanie metod bezpośrednich rachunku wariacyjnego wiąże się z istotnymi trudnościami związanymi z brakiem wypukłości. Po pierwsze, funkcja gęstości energii anizotropii ϕ nie może być wypukła z uwagi na silną anizotropię zagadnień magnetycznych. Po drugie ograniczenie nakładane na wektor magnetyzacji $\mathbf{m}$ jest niewypukłe, jest to bowiem

$$|\mathbf{m}(x)| = 1. \tag{1}$$

Pani Kruglenko pokazuje jak sama tylko niewypukłość ϕ prowadzi to silnie oscylujących ciągów minimalizujących. Przedstawia następnie, że naiwne podejście polegające na uwypukleniu ϕ jest niewłaściwe. Tym samym Autorka uzasadnia rozpatrywanie teorii miar Younga, które można określić jako statystyki oscylacji. Szczególną odmianą miar Younga są tzw. gradientowe miary Younga, które służą do mierzenia oscylacji gradientów ciągów minimalizujących.

Potem, w rozdziale czwartym jest szczegółowo badany model mikromagnetyka. Zaczyna od pokazania, że relaksacja niewypukłego modelu za pomocą uwypuklenia funkcji gęstości anizotropii nie jest właściwa. Po pierwsze, nie wiadomo, czy minimalna wartość zrelaksowanej energii jest równa kresowi dolnemu energii niezrelaksowanej. Po drugie, w ten sposób nie można uzyskać informacji o mikrostrukturze wektora namagnesowania, ani nie wiadomo, czy jest spełniony warunek (1).

Autorka podaje za literaturą przykład rozwiązania zagadnienia wariacyjnego dla materiałów nieodkształcalnych za pomocą miar Younga, dzięki czemu udaje się odtworzyć oscylacje wektora magnetyzacji. Jednak zasadniczym celem autorki w tym rozdziale jest dyskretyzacja zagadnienia wariacyjnego zrelaksowanego za pomocą miar Younga. Jest to bardzo ciekawe zagadnienie numeryczne. Aby uzyskać metodę numeryczną pozwalającej na uchwycenie obiektów nielokalnych jakimi są miary, autorka wykorzystuje idee Kružika-Prohla i Prohla. W praktyce miary są przybliżane za pomocą funkcji prostych. Ten pomysł prowadzi do wypukłych zagadnień teorii sterowania, których rozwiązania są przybliżeniami miar Younga. Wprawdzie można dla tej metody podać błąd obliczeń, lecz uzyskanie zadowalającej dokładności obliczeń wymaga pracy z ogromną ilością zmiennych. Dlatego Autorka posiłkuje się wzorem Roubička ideą zbioru aktywnego, co pozwala istotnie ograniczyć nośnik przybliżanej miary Younga a co za tym idzie, ilość zmiennych. Kluczem jest możliwość wybierania zbioru aktywnego. Efektem końcowym jest algorytm obliczeniowy, a co szczególnie ważne autorka podaje błąd obliczeń, tj. podaje oszacowanie wartości minimum funkcjonału energii.

Następny rozdział jest poświęcony przedstawieniu wyników symulacji numerycznych przeprowadzonych w oparciu o algorytm z rozdziału 4. Realizacja algorytmu w istocie jest bardzo złożona, bo zagadnienie wymaga znalezienia skalarnego potencjału pola namagnesowania, tj. rozwiązania równania Maxwella, co w praktyce oznacza rozwiązywanie równania Poissona w obszarze zewnętrznym. Dla prostoty p. Kruglenko rozpatruje obszar dwuwymiarowy. Autorka wykonała należycie symulacje numeryczne, znajdując zgodną z oczekiwaniami mikrostrukturę zależną od przyłożonego zewnętrznego pola magnetycznego.

Wprawdzie wyniki przedstawione w rozdziale czwartym nie są oryginalne, są jednak opracowane na podstawie szeregu źródeł. Przede wszystkim, jak pokazują udane symulacje numeryczne, Autorka biegle posiadła umiejętność dyskretyzacji ważnych i ciekawych zagadnień wymagających użycia miar Younga i ich numerycznej analizy. Jest to szczególnie istotne w pracy o charakterze stosowalnym i inżynierskim.

Ostatni rozdział jest poświęcony matematycznej analizie nowego modelu sprężystego mikromagnetyka, który ma pamięć kształtu. Jest on modyfikacją modelu rozpatrywanego przez Rybkę i Luskina. Modyfikacja polega na dodaniu członu, który penalizuje odstępstwo od nieściśliwości, stąd i nazwa modelu „prawie nieściśliwy". Mianowicie, Autorka bada

$$E^{\epsilon}_{calk}(\mathbf{m}, y) = E_{calk}(\mathbf{m}, y) + \frac{1}{\epsilon}(\psi(\det y) - \psi(1)).$$

Dodatkową trudnością jest tu zmienność dziedzin wektorów magnetyzacji.

Samo istnienie rozwiązań wariacyjnego modelu prawie nieściśliwego materiału magnetycznego nie wymaga wprowadzenia nowych metod. Uzyskuje się to bowiem za pomocą narzędzi wyłożonych w pracy Rybki i Luskina. Aby uczynić własną pracę spójną Autorka szczegółowo przedstawia wyniki tam zawarte. Pozwalają też one na dalszą analizę E^{ϵ}_{calk}. Celem mgr Kruglenko jest dokonanie przejścia granicznego, gdy ϵ dąży do zera, tj. materiał graniczny jest nieściśliwy. Jest to oryginalne i bardzo ciekawe zagadnienie. Nie wiemy, czy wariacyjny model magnetycznego nieściśliwego materiału ma rozwiązanie, bo wymaga on spełnienia dodatkowego ograniczenia jakim jest

$$\det Dy(x) = 1.$$

Ten warunek czyni graniczne zagadnienie wariacyjne dużo trudniejszym. Autorka pokazuje wynik warunkowy, głoszący iż, jeśli istnieje rozwiązanie zagadnienia wariacyjnego dla magnetycznego nieściśliwego materiału, to jest ono granicą rozwiązań zagadnień dla magnetycznego prawie nieściśliwego materiału.

Autorka nie przedstawiła zbyt wielu oryginalnych wyników teoretycznych. Lecz wspomniany wynik o zbieżności modelu prawie nieściśliwego uważam za bardzo ciekawy i warto opublikowania, mimo warunkowego charakteru. Bierze się to stąd, że sam model jest oryginalny i ciekawy. Jednak walor przedstawionej pracy polega na nietrywialnym połączeniu teorii fizycznej, modelowania matematycznego, analizy numerycznej i symulacji komputerowych. Jak wspomniałem wcześniej, Autorka wykazała się biegłością w analizie numerycznej dyskretyzacji zagadnień wymagających stosowania miar Younga. Biorąc to wszystko pod uwagę stwierdzam, że praca spełnia ustawowe wymagania i wnoszę o dopuszczenie p. mgr Kruglenko do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Piotr Rybka
profesor UW