

mgr inż. Robert Konowrocki

---

Oddziaływanie koła z drogą  
z uwzględnieniem poślizgów bocznych

rozprawa doktorska

promotor: doc. dr hab. inż. Czesław Bajer

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>4</b>
1.1	Cel i zakres pracy . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Zjawiska towarzyszące toczeniu</b>	<b>12</b>
2.1	Obciążenia w strefie kontaktu . . . . .	13
2.2	Analiza numeryczna . . . . .	19
2.2.1	Analiza dynamiczna metodą elementów czasoprzestrzennych . . . . .	21
2.2.2	Analiza statyczna metodą elementów skończonych . . . . .	26
2.3	Zagadnienie falowe w kole ogumionym . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Przegląd literatury</b>	<b>42</b>
3.1	Klasyczne prawa tarcia . . . . .	42
3.2	Tarcie toczne . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Drgania wywołane tarciem</b>	<b>58</b>
4.1	Opis zjawiska . . . . .	58
4.2	Badane samowzbudności – przypadki literaturowe . . . . .	59
4.3	Modelowanie układów z tarciem . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Stanowisko badawcze</b>	<b>70</b>
5.1	Wstępne stanowisko pomiarowe . . . . .	70
5.2	Opis stanowiska badawczego i układu pomiarowego . . . . .	71
5.3	Pary cierne . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Wyniki eksperymentalne</b>	<b>80</b>
6.1	Para cierna koło poliamidowe – taśma poliestrowa . . . . .	82
6.2	Para cierna koło stalowe – taśma poliestrowa . . . . .	93

6.3	Interpretacja obserwowanych przebiegów drgań . . . . .	95
6.4	Para cierna koło aluminiowe – poliester . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Opis teoretyczny ruchu bocznego koła</b>	<b>110</b>
7.1	Model matematyczny . . . . .	110
<b>8</b>	<b>Podsumowanie i wnioski</b>	<b>125</b>

# Rozdział 1

## Wstęp

Tarcie jest jednym z najbardziej powszechnych zjawisk towarzyszących wszelkiemu ruchowi i bezruchowi. Występuje w przyrodzie w różnych ośrodkach i dotyczy ciał we wszystkich stanach skupienia. Interesującym nas rodzajem tarcia, ze względu na tarcie w maszynach, jest tarcie suche. Nieodłącznie towarzyszy ono wytwarzaniu i eksploatacji układów mechanicznych i w sposób szczególny wpływa na ich niezawodność, trwałość i pracę. Tarcie możemy postrzegać w różnych aspektach: pozytywnych lub negatywnych. Do cech pozytywnych zaliczamy zdolność poruszania się pojazdów, chód człowieka, przenoszenie napędu przez elementy cierne (sprzęgła, hamulce), wzbudzenie drgań strun w instrumentach smyczkowych, obróbkę materiałów, procesy skrawania, tłumienie drgań przy pomocy tłumików tarciovych [53]. Do cech negatywnych natomiast zaliczymy zużycie elementów współpracujących cierne, generowanie hałasu, wywoływanie nieprzewidywanych zachowań układów mechanicznych ze względu na zmienną siłę oporów, która w istotny sposób wpływa na zjawiska dynamiczne i samą dynamikę układów mechanicznych. Tarcie zwykle tłumi drgania, jednak w pewnych warunkach może być źródłem ich powstawania. Mówimy wówczas o samowzbudności generowanej tarcie. Szkodliwe zjawisko drgań samowzbudnych związane jest z okresowym dopływem energii ze źródła o działaniu ciągłym. Dopływ sterowany jest ruchem układu przez sprzężenie zwrotne. W ten sposób pomimo strat w układzie mechanicznym mogą pojawić się niezanikające drgania okresowe.

Samowzbudność wywoływana tarcie może również pojawić się w transporcie drogowym i lotniczym. W przypadku transportu drogowego pojawia się w obszarze kontaktu bieżnika koła z drogą, a w przypadku kolei, w miejscu kontaktu koła pojazdu



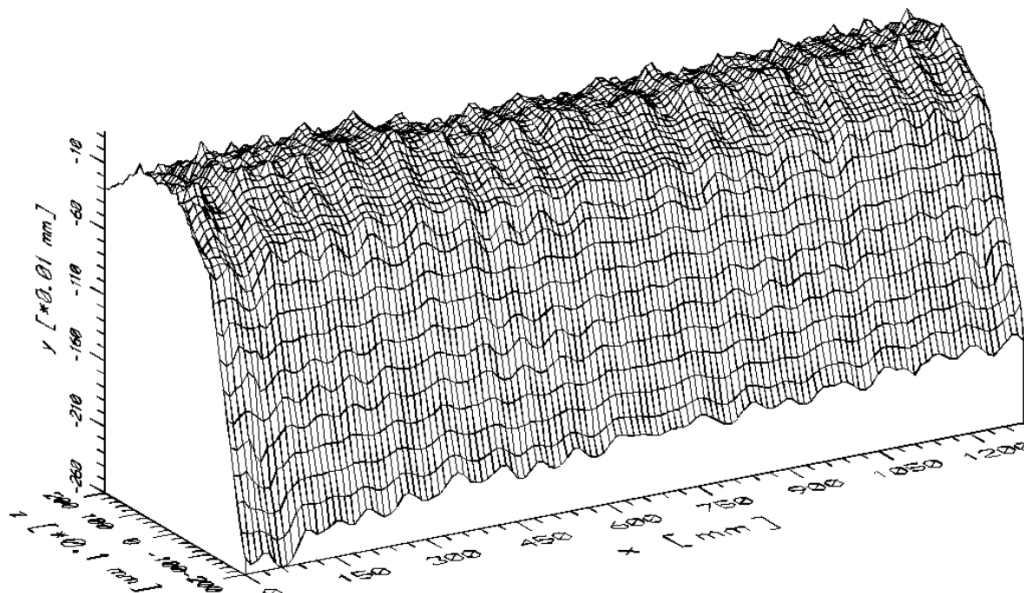
Rysunek 1.1: Widok korugacji na szynie i kole kolejowym.

szynowego z szyną. Zjawisko takie może wywołać bardzo szybkie zużycie, a nawet uszkodzenie współpracujących powierzchni. Przykładem może być niekorzystne faliste zużycie warstwy powierzchniowej kół i szyn (rys. 1.1, 1.2).

Kolejnym przykładem wpływu tarcia na drgania samowzbudne jest zaburzenie płynności ruchu względnego. Wywoływane jest ono gwałtowną zmianą prędkości poślizgu elementów trących, będących w kontakcie (zjawisko utwierdzenie–poślizg, ang. *stick-slip*). Znaczenie tego zjawiska wzrasta wraz ze wzrostem prędkości pojazdów drogowych i kolejowych. Tarcie, które sprzyja powstaniu ww. efektu, charakteryzuje się maksymalną siłą w chwili utraty przyczepności. Znacznie przewyższa ona siłę podczas poślizgu przy małej prędkości względnej elementów. Wpływa to z kolei na wzrost zużycia współpracujących elementów, m.in. korugację kół i szyn kolejowych, oraz generowanie hałasu. W niektórych przypadkach może wywołać zaburzenie stateczności ruchu pojazdu.

Wzrastające wymagania stawiane przez użytkowników maszynom, urządzeniom i technologiom produkcji, związane są z potrzebą zapewnienia wysokiej dokładności, cichobieżności, trwałości, niezawodności i stabilnej eksploatacji. Z tego powodu pojawia się potrzeba pogłębienia wiedzy i doświadczenia na temat procesów i zjawisk fizycznych towarzyszących ruchowi, a tym samym występującego tam tarcia.

Innym efektem występującym w rzeczywistości, wywołanym drganiami samowzbudnymi, jest zjawisko wężykowania pojazdu, tzw. chybotanie kół (efekt *shimmy*). Tor jazdy koła ma kształt sinusoidalny względem toru jazdy całego pojazdu. Efekt ten charakteryzuje się niepożądanymi drganiami samowzbudnymi ogumionego koła pojazdu



Rysunek 1.2: Widok korugacji zmierzonych na powierzchni szyny [28].

w kierunku prostopadłym do kierunku jazdy. Może on występować w samolotach (drżania samonastawnego podwozia przednich i tylnych kół przy starcie, lądowaniu lub kołowaniu), w motocyklach i rowerach (wibracje przedniego zawieszenia względem osi główki ramy) oraz w samochodach (drżania przedniego zawieszenia). Objawia się to „myszkowaniem” zawieszenia (np. w motocyklu) lub wibracjami odczuwalnymi na kierownicy samochodu. Zjawisko to w zasadzie może pojawiać się w warunkach ustalonego lub wolnozmiennego ruchu.

Zjawisko wężykowania o niewielkiej amplitudzie nie jest niebezpieczne. Przy wzroście amplitudy powyżej wartości krytycznej ruch pojazdu staje się niestabilny. Przyczyną powstawania zjawiska wężykowania może być: geometria zawieszenia, prędkość, najechanie na nierówność lub koleinę, odciążenie przedniego koła.

Zjawisko wężykowania badane było już w latach 40-tych. W pracach [108, 68, 15] autorzy zajmowali się rozważaniem teoretycznym problemu przy podwoziu składającym się z dwóch kół połączonych wspólną osią. Badacze w pracy [15] wykorzystali formalizm Lagrange’a, wprowadzając nieliniowe równania o czterech stopniach swobody. Opisywały one ruch obrotowy podwozia wokół osi obrotu, sztywność boczną i skrętną goleni oraz sztywność obwodową kół. W równaniach nieliniowość uzyskali przez założenie dużych odkształceń. W pracach tych toczenie odbywało się bez pośli-

zgu.

Segal w pracy [98] rozpatrywał dwa modele oddziaływania koła ogumionego (opony) z podłożem. Pierwszy z nich to obciążona belka spoczywająca na sprężystym podłożu, drugi to łańcuch, również podparty sprężystością. Łańcuch w drugim modelu symulował równoleżnik opony. Porównując oba modele autor przedstawił niewielką różnicę w wynikach. Dzięki temu udowodnił, że bez większej straty jakości wyników, do analizy można zastosować prosty model łańcucha. Model ten opisuje odkształconą linię równoleżnikową opony w strefie kontaktu z podłożem. Segal określił moment oraz siłę boczną przy wybranym położeniu śladu opony w stosunku do środka jej osi. Uzyskany model można wykorzystać do badania zjawiska wężykowania. Autor, upraszczając problem, pominął poślizg przy opisie toczenia.

Pacejka [83, 84, 85] stworzył teorię opisującą zjawisko *shimmy*, wprowadzając efekt poślizgu. Założył, że opona w pewnej strefie kontaktu z podłożem przemieszcza się względem niego. Takie podejście nie zostało zaakceptowane przez innych badaczy. Powodem była trudność w określeniu wartości dużej liczby parametrów oraz skomplikowany opis zjawiska.

Ho i Lai w pracy [57] zaprezentowali model o dwóch stopniach swobody, z których jednym było wychylenie koła, a drugim sztywność goleni. W analizie założyli niewyważenie koła i przy takim podejściu wyznaczyli prędkość krytyczną toczącego się koła.

W latach 1971 i 1972 Rogers opublikował prace [93, 94], w których sformułował różnicowe równania więzów, opisujące oponę toczącą się po podłożu. Równania powstały dzięki porównaniu charakterystyk częstotliwościowych, otrzymanych z rozwiązań teoretycznych i z eksperymentu. Rogers stwierdził, że model zaproponowany przez Pacejkę [83] jest zbyt skomplikowany do analizy i badania zjawiska *shimmy* w przypadku praktycznych zastosowań.

Rosyjscy badacze Nejmark i Fufajew w jednym z rozdziałów monografii [80] opisali badania stateczności ruchu toczących się układów. Wykorzystując metodę Kiełdysza badali ruch takich układów jak: podwozie samolotu, przednie zawieszenie samochodu i motocykla oraz widelec roweru.

Na koło toczące się po drodze lub torze działają złożone obciążenia. Zjawiska dynamiczne powodują zmiany w relacjach poszczególnych składowych. Niektóre siły

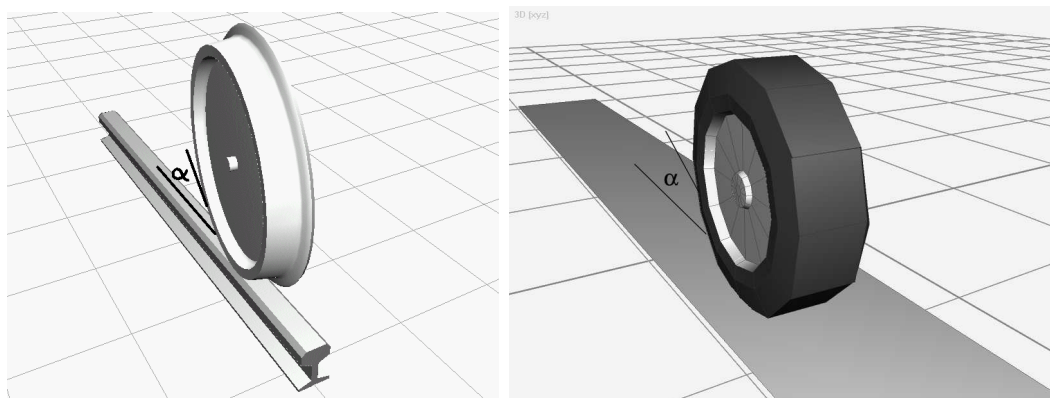
działają w sposób zbliżony do stacjonarnego, inne w sposób oscylacyjny, lub krótkookresowy, np. przy przejeździe przez nierówności. Naprężenia wypadkowe w strefie kontaktu koła i szyny, przy niekorzystnym nałożeniu się wielu czynników, mogą osiągać i przekraczać granicę plastyczności. W takich przypadkach może dochodzić do trwałych deformacji, szybszego zużycia, a nawet uszkodzeń. Jednym ze zjawisk działających oscylacyjnie i długookresowo jest właśnie toczenie się koła z poślizgiem bocznym. W tym zjawisku tarcie odgrywa rolę decydującą.

## 1.1 Cel i zakres pracy

Z uwagi na znaczenie tarcia oraz trudności związane z opisem matematycznym zjawisk, niniejsza praca ma charakter eksperymentalno–teoretyczny. Ma na celu eksperymentalne zbadanie zjawiska drgań w ruchu obrotowym koła z wpływem siły bocznej. W pracy zajęto się analizą dynamiczną zjawisk towarzyszących toczeniu koła po drodze lub torze, przy jednoczesnym oddziaływaniu czynników wywołujących poślizg w kierunku prostopadłym do kierunku toczenia. Przypadki takie występują przy toczeniu się koła kolejowego po szynie na odcinkach prostych w przypadku oddziaływania wiatru, a także w przypadku drgań wywołanych odkształcalnością zestawów kołowych i szyn. Występowanie poślizgów bocznych przy jeździe po łukach spowodowane jest różnicą promieni krzywizn obu szyn oraz oscylacjami obrotowymi zestawu kołowego w płaszczyźnie toru. Na skutek ukośnego ustawienia płaszczyzn kół względem chwilowego kierunku toczenia dochodzi do bocznych poślizgów w strefie kontaktu koła z drogą lub szyną (rys. 1.3). Oscylacje te niekorzystnie wpływają na zużycie koła i szyny oraz powodują hałas [20]. Uwzględniając oscylacyjny charakter wyżej wzmiankowanych drgań i nałożenie się sił w strefie kontaktu tocznego koła–nawierzchnia z obwodowymi naprężeniami własnymi w kole kolejowym, oszacujemy ich wpływ na trwałe zużycie i deformacje powierzchni koła. Deformacje te mogą powstać w wyniku przekroczenia granicy plastyczności w kole lub szynie.

Celem pracy jest zbadanie zjawiska oddziaływania koła z drogą w trakcie toczenia, z uwzględnieniem poślizgów bocznych. Zamiarem było wykazanie oscylacyjnego ruchu koła, poprzecznie do kierunku toczenia. Oscylacje te w pewnych warunkach mogą





Rysunek 1.3: Ukośne ustawienie płaszczyzny koła kolejowego i ogumionego względem kierunku jazdy (toczenia).

zwiększać trwałe faliste zużycie powierzchni tocznych kół i szyn. Praca ma również na celu potwierdzenie tej hipotezy.

Gruntowne badania zjawisk dynamicznych zachodzących w strefie kontaktu wymagałyby skomplikowanej i kosztownej aparatury pomiarowej. Taką nie dysponowano. Badania dynamiczne dotyczyły modelu koła i drogi. Z uwagi na doświadczenia Zakładu, w którym realizowano badania, szczególną uwagę poświęcono toczeniu się koła kolejowego po szynie. Część badań symulacyjnych odniesiono do obiektów rzeczywistych.

W drugim rozdziale pracy przedstawione zostaną zjawiska dynamiczne związane z toczeniem się koła kolejowego po szynie, oraz powstawanie falistego zużycia (korugacji). Wyznaczono oddziaływanie dynamiczne między kołem a szyną oraz wpływ składowych naprężeń, w tym wywołanych siłami bocznymi, na odkształcenia trwałe. Część zagadnień została opracowana na podstawie własnych analiz i obliczeń, a wnioski płynące z analizy spowodowały potrzebę dalszego gruntownego zbadania zjawisk wywołanych bocznymi siłami i bocznymi poślizgami. Przedstawiony również zostanie problem propagacji fali bieżącej w kole ogumionym, który również wywołuje niestabilność ruchu podczas jazdy.

W rozdziale trzecim dokonano przeglądu literatury dotyczącej tarcia w ujęciu makroskopowym i mikroskopowym. Przytoczono wiele prac badaczy zajmujących się modelowaniem zjawiska tarcia. Przedstawiono modele fizyczne i matematyczne układów mechanicznych z tarciami. Poruszono również temat tarcia tocznego i sposobu jego opisu. Sklasyfikowano teorie i hipotezy tarcia w trzech grupach: mechaniczne, mole-

kularne i molekularno–mechaniczne.

Rozdział czwarty opisuje zjawisko samowzbudności drgań. Podano w nim metody badań drgań samowzbudnych. Przedstawiono postać matematyczną przykładowych modeli opisujących drgania samowzbudne z udziałem tarcia. Odniesiono je do przykładowych rezultatów z symulacji, przeprowadzonych z udziałem analizowanych modeli, zaczerpniętych z literatury.

W rozdziale piątym opisano stanowisko badawcze i bezstykowy system pomiarowy, wykorzystany do badań eksperymentalnych. Przedstawiono przyjęte do badań rzeczywiste pary cierne oraz ich własności materiałowe i parametry geometryczne.

Rozdział szósty omawia wyniki pomiarów eksperymentalnych. Wyniki te przedstawiają charakterystyki dynamiczne, fazowe i widmowe, uzyskane z użyciem danych par ciernych. Na podstawie tych informacji oszacowany został wpływ kąta płaszczyzny bocznej koła, prędkości toczenia oraz siły pionowej, na zmiany jakościowe i ilościowe wyników.

Rozdział siódmy przedstawia teoretyczny model ruchu, opisujący obroty i przemieszczenia boczne toczącego się koła. Przedstawia on wyniki symulacji numerycznej uzyskanej z wykorzystaniem zaproponowanego modelu oraz porównania z wynikami badań eksperymentalnych.

Rozdział ósmy prezentuje spostrzeżenia wynikające z badań eksperymentalnych i numerycznych oraz nasuwające się na ich podstawie wnioski i jest podsumowaniem pracy.

W pracy wykazano, że w czasie toczenia koła po drodze, zmiana ukośnego ustawienia płaszczyzny koła  $\alpha$  względem kierunku jazdy wywołuje drgania o charakterze okresowym. Z tych drgań można wyodrębnić dwa dominujące okresy drgań. Oscylacje te powstają w kierunku osiowym toczącego się koła. Zbadano zależność przebiegów wyżej wymienionych drgań od zmiany kąta  $\alpha$ , nacisku pionowego  $N$  oraz prędkości toczenia.

Z badań eksperymentalnych wynika, że wraz ze wzrostem prędkości jazdy następuje zmniejszenie amplitudy drgań o wyższej częstotliwości, w przeciwieństwie do drgań o niższej częstotliwości, których amplitudy niewiele się zmieniają. Wzrost prędkości jazdy wywołuje także zwiększenie siły bocznej działającej na koło. Objawia się to przesunięciem amplitud drgań w kierunku większych wartości. Zmiana kąta  $\alpha$  ma również znaczący wpływ na generowane drgań osiowych. Jego wzrost wpływa na zwiększenie

wartości przemieszczenia osiowego, podobnie jak w przypadku wzrostu prędkości jazdy  $v$ . Przy małym kącie  $\alpha$  i prędkości jazdy  $v$  pojawia się zjawisko przylegania–poślizgu, które zanika ze wzrostem obu parametrów. Zmiana siły pionowej  $N$  wywołuje z kolei przesunięcie fazowe między dwoma dominującymi okresami drgań, przy danej parze ciernej. Innym efektem jest oddalanie się przemieszczeń od położenia równowagi wraz ze wzrostem siły nacisku pionowego oraz wzrost amplitudy przemieszczenia w kierunku osiowym, tak jak w przypadku wzrostu prędkości jazdy i kąta  $\alpha$ .

Ważne spostrzeżenie dotyczy zależności częstości drgań osiowych od bezwładności obrotowej koła. Zmiana stosunku bezwładności obrotowej do liniowej wpływa na zmianę stosunku dwóch składowych częstości drgań.

Wnioski z przeprowadzonych badań można wykorzystać w praktyce do ograniczenia zużycia kół, obniżenia poziomu hałasu oraz zmniejszenia dokuczliwych dla człowieka drgań o częstotliwościach  $20 \div 30$  Hz, przenoszonych na otaczające obiekty budowlane.

## Rozdział 2

### Zjawiska towarzyszące toczeniu

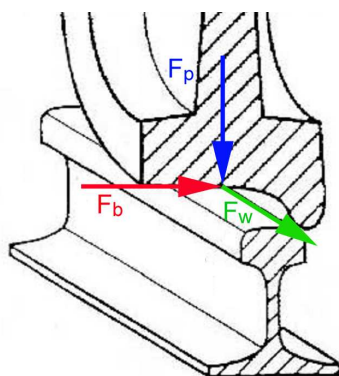
Toczenie się koła po sztywnym lub odkształcalnym podłożu jest procesem bardzo złożonym. Przede wszystkim występują w nim zjawiska dynamiczne, falowe, które, wraz z obciążeniem statycznym, powodują zużycie lub uszkodzenie kół oraz podłoża. Układy mechaniczne zwykle projektuje się do przenoszenia obciążeń statycznych, powiększonych o wpływ efektów dynamicznych w formie pewnych dynamicznych nadwyżek. Rzadko na etapie projektowania uwzględnia się wpływ efektów dynamicznych, wynikających bezpośrednio z analizy zjawisk. W dalszej części pokażemy, że zjawiska dynamiczne bardzo mocno wpływają na końcowy stan naprężeń w trakcie eksploatacji. Zjawisko oscylacyjnego ruchu bocznego koła jest dodatkowym czynnikiem, sumującym się z pozostałymi czynnikami wpływającymi na zużycie. W praktyce wartość sił poziomych wynikających z bocznych poślizgów w trakcie toczenia może osiągnąć liczbowo znaczną część wartości obciążenia pionowego.

W niniejszym rozdziale zaprezentowane zostaną stany obciążeń występujące w kole i nawierzchni oraz strefie ich kontaktu. Rozpatrzymy poziom naprężeń własnych w kole, w wybranych sytuacjach eksploatacyjnych, oraz wpływ składowych sił działających w strefie kontaktu koła i szyny na zmiany naprężeń własnych. Badania przeprowadzono na podstawie symulacji komputerowych oraz rozważań analitycznych. Wykazano, że każda ze składowych sił w strefie kontaktu (rys. 2.1) przyczynia się do powstania lub utrwalenia niekorzystnych zjawisk.

## 2.1 Obciążenia w strefie kontaktu

Celem analizy jest określenie wpływu obciążeń powstających podczas eksploatacji układu koło–szyna na zużycie jego elementów. W wyniku działających obciążeń nastąpić może uplastycznienie materiału w strefie kontaktu, wywołujące powstanie trwałych nierówności na powierzchni tocznej koła i w główce szyny. Wynika to z faktu, że na układ pojazd szynowy–tor działają wielorakiego typu obciążenia. Możemy je podzielić na następujące grupy:

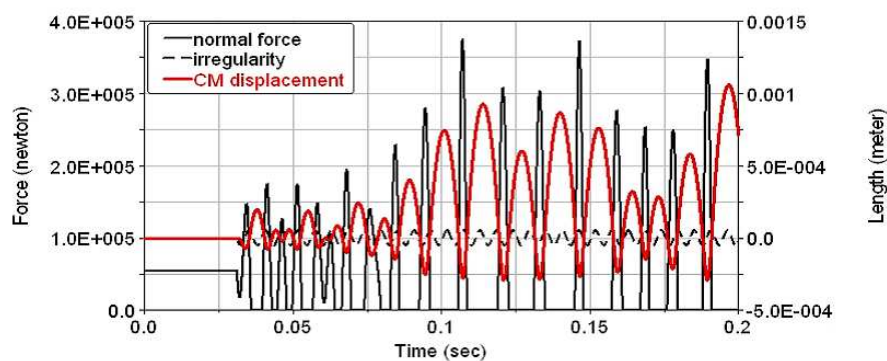
- obciążenie pionowe  $F_p$ , wywołane ciężarem własnym pojazdu szynowego oraz obciążenie dynamiczne wywołane oscylacyjnym ruchem pionowym; obciążenie pionowe może zwiększyć się w wyniku przejazdu przez lokalne nierówności,
- obciążenie poziome  $F_w$  w kierunku jazdy, wywołane rozpędzaniem się bądź hamowaniem pojazdu,
- obciążenie poziome  $F_b$  prostopadłe do kierunku jazdy, wywołane parciem wiatru na pojazd szynowy, siłami odśrodkowymi przy jeździe po łukach, oporem toru w oscylacyjnym ruchu bocznym wagonów, oddziaływaniem podczas mijania się dwóch jadących pociągów,
- naprężenia wewnętrzne w materiale: naprężenia własne, powstałe w kole lub szynie podczas procesu produkcyjnego lub eksploatacji.



Rysunek 2.1: Wektory rozpatrywanych obciążeń, działających w strefie kontaktu.

**Obciążenie pionowe.** Statyczne obciążenia pionowe wywołane pojazdem szynowym mieszczą się w zakresie  $100 \div 225$  kN na oś (tramwaj, wagon towarowy). Mogą one wzrastać na skutek niedoskonałości powierzchni tocznej szyny i koła oraz występowania

małych nierówności powierzchni o amplitudzie kilkunastu mikrometrów [72, 38, 37, 39]. Właśnie te lokalne nierówności mogą wywoływać impulsy o dużych wartościach przyspieszeń i sił w strefie współpracy koła z szyną (rys. 2.2). Wartości tych sił są znaczne, porównywalne z siłami statycznego nacisku koła na szynę. W efekcie mogą podwajać naprężenia normalne w strefie kontaktu, w porównaniu z naprężeniami wynikającymi z obciążeń statycznych [12]. Na rysunku 2.2 linią przerywaną zaznaczono falistą nierówność szyny o amplitudzie 0,1 mm. Cienką linią ciągłą zaznaczono siłę normalną uzyskaną z symulacji komputerowej. Osiąga ona chwilową wartość  $370 \div 380$  kN, mimo stosunkowo niskiej prędkości przejazdu. Przy wyższych prędkościach wartości te znacznie rosną.

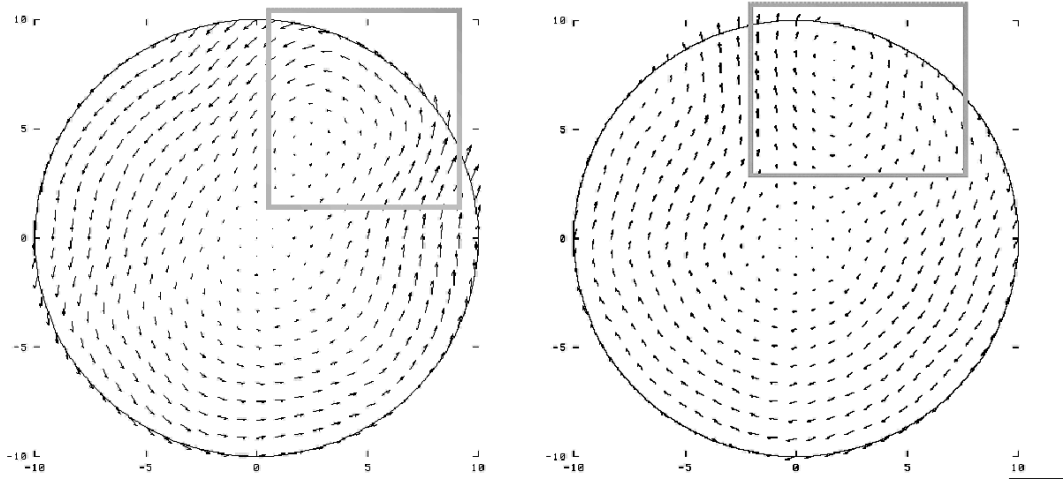


Rysunek 2.2: Przykładowe wykresy sił w strefie kontaktu koła z szyną przy prędkości jazdy 9 m/s [72].

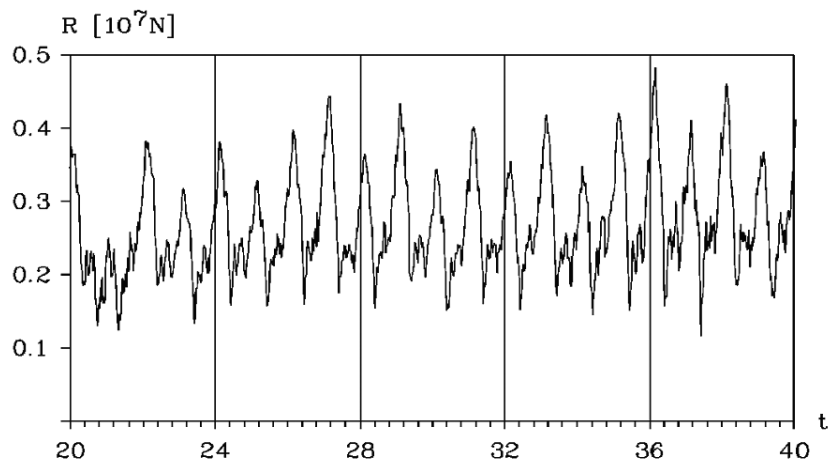
Toczenie idealnego koła po nieskończenie sztywnym podłożu wywołuje oscylacyjny ruch materiału w obszarze koła. Wynikiem jest chwilowa poligonizacja obwodu, a to z kolei zwiększa siły w strefie kontaktu. Zjawisko przebiega w sposób zbliżony do omówionego wcześniej toczenia koła z trwałymi nierównościami. Z prac [10, 11] wynika, że toczenie wywołuje w takim przypadku oscylacyjny ruch masy w kierunku obwodowym oraz powstanie fal typu Rayleigha (rys. 2.3). Mimo że ruch środka koła przebiega w sposób stacjonarny, obserwujemy znaczne oscylacje siły kontaktu (rys. 2.4).

W podrozdziale 2.2.1 przedstawione zostaną wyniki własnych obliczeń symulacyjnych, potwierdzających wcześniejsze wnioski.

**Obciążenia poziome w kierunku jazdy.** Obciążenia te występują wprawdzie okresowo, ale mogą również znacząco oddziaływać na zjawiska w strefie kontaktu przy hamowaniu. Przykładem pojawienia się takiego obciążenia jest np. zjazd pociągu na



Rysunek 2.3: Pole prędkości w toczącym się kole.



Rysunek 2.4: Zmiana siły normalnej w strefie kontaktu podczas toczenia [10].

długim odcinku zbrocza o niewielkim pochyleniu. W takim przypadku w wyniku długotrwałego hamowania powstaje składowa pozioma siły, sumująca się z pozostałymi składowymi. Obciążenie to występuje zarówno w konstrukcjach z klockami dociskowymi do obręczy kół, jak i w przypadku hamulców tarczowych. Zbliżony efekt otrzymujemy podczas rozbiegania pojazdu. Zwrot siły w takim przypadku jest przeciwny do opisanego powyżej.

W pracach [10, 11, 13] potwierdzono wpływ zjawiska fali bieżącej na powstanie oscylacyjnych sił stycznych w strefie kontaktu koło–szyna. W wyniku analizy zagadnień kontaktowych z wykorzystaniem modelowania numerycznego potwierdzono wyniki związane ze zmianami składowych sił w strefie kontaktu w kierunku stycznym.

**Obciążenia poziome boczne.** Następną składową obciążenia, działającą w strefie kontaktu, jest siła boczna. Kierunek działania tej siły zwrócony jest prostopadle do kierunku jazdy. Obciążenie to może być wywołane kilkoma czynnikami:

- działaniem wiatru na powierzchnię boczną pociągu,
- różnicą prędkości kątowych prawego i lewego koła, wywołaną różnymi promieniami krzywizn obu szyn na łuku,
- drganiami wywołanymi odkształcalnością zestawów kołowych i szyn,
- naprężeniami własnymi, wpływającymi na zmianę kąta płaszczyzny toczonej w strefie kontaktu.

Oddziaływanie wiatru na pojazd wywołuje boczne przemieszczenie koła względem szyny. Osiągając skrajną pozycję, koło obrzeżem uderza w szynę po której się porusza. Następuje ruch w kierunku przeciwnym do kierunku wiatru, wywołujący oscylację.

Z badań na stanowisku eksperymentalnym zaobserwowano zjawisko ruchu oscylacyjnego w kierunku poprzecznym do kierunku jazdy. Oscylacje te wywoływane są ukośnym ustawieniem płaszczyzny koła w stosunku do tymczasowego kierunku toczenia. Zjawisko to zostanie dokładnie omówione w rozdziale piątym, a wyniki przedstawione w rozdziale szóstym pracy.

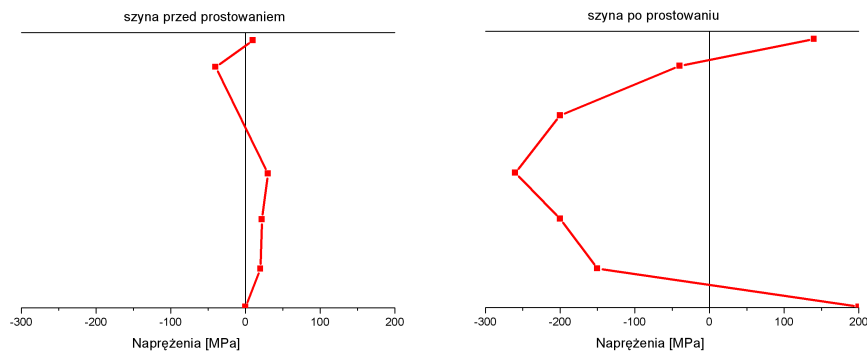
**Naprężenia własne.** Z definicji naprężenia własne są naprężeniami równoważącymi się wewnątrz elementu, na który nie oddziałują żadne obciążenia zewnętrzne. Można powiedzieć, że są miarą energii sprężystej zgromadzonej w określonym obszarze



ciała i stanowią dodatkowe obciążenia elementu stalowego. Szereg wyników obserwacji i eksperymentów wskazuje, iż naprężenia wewnętrzne mogą mieć negatywny lub pozytywny wpływ na koła i szyny kolejowe. Do niepożądanych zaliczyć można rozwój pęknięć lub zmęczenie materiału. W pracach [27, 103] wykazano wpływ naprężeń na uszkodzenia szyn i kół, przyspieszający rozwój typowych defektów występujących w tych elementach. Efekt pożądanym to zwiększenie wytrzymałości materiału na powierzchni, wynikający z obecności naprężeń ściskających w stalowych elementach.

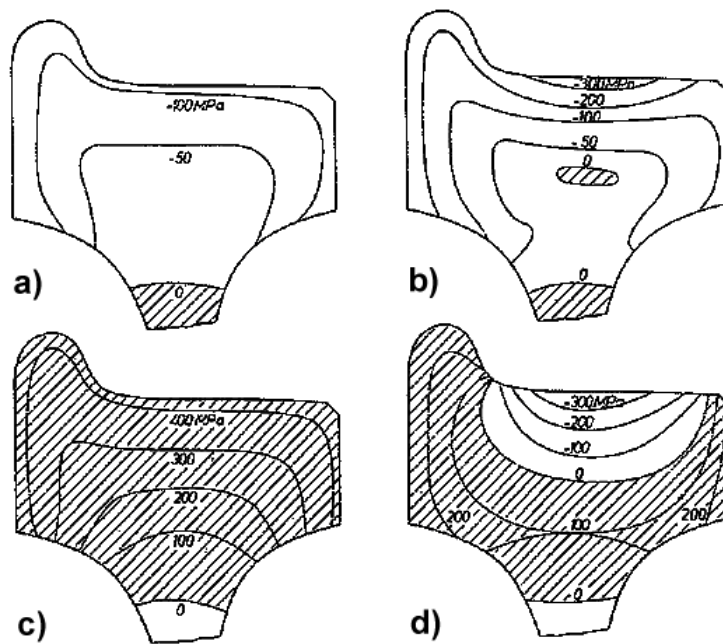
Naprężenia własne powstają już w trakcie procesu produkcyjnego szyn i kół kolejowych oraz przy eksploatacji (rys. 2.6). W czasie produkcji szyn naprężenia te mogą pojawić się w wyniku kształtowania na zimno (rys. 2.5), obróbki cieplnej (naprężenia termiczne), jak również mogą być wywołane przemianami fazowymi o niejednorodnym charakterze, np. przemiany austenitu w ferryt i perlit.

Prostowanie szyn w hucie polega na przechodzeniu kształtowników szynowych przez pięć lub siedmiorolkowe prostownice, celem nadania im określonego kształtu. Naprężenia pojawiające się w wyniku prostowania osiągają wartości około 200 MPa (rys. 2.5).



Rysunek 2.5: Rozkład naprężeń własnych w osi przekroju poprzecznego przed i po procesie prostowania [76].

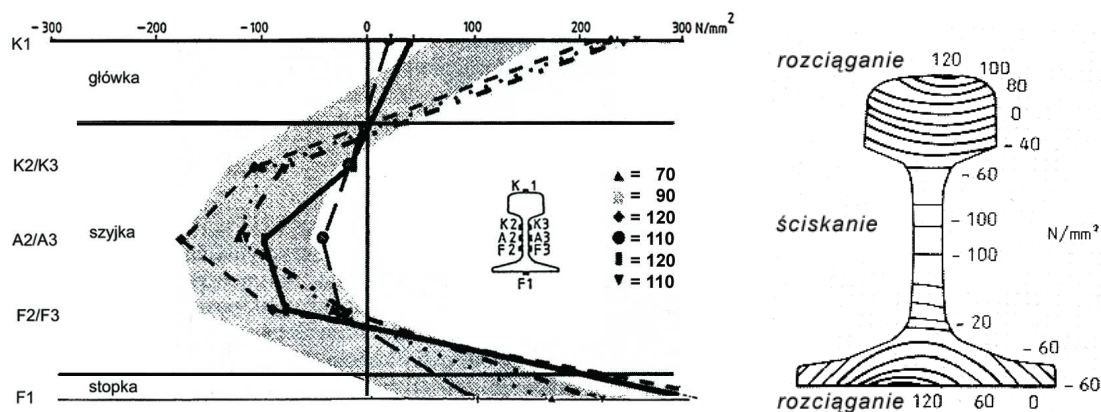
Podczas eksploatacji naprężenia powstające w kołach kolejowych i szynach mogą wynikać ze zgniotu w strefie kontaktu. Zgniot ten wywołuje redystrybucję naprężeń własnych w strefie przypowierzchniowej główki szyny oraz w wieńcu koła. Czynnikiem wpływającym na rozkład naprężeń własnych mogą być: duży przebieg eksploatacyjny, gwałtowne hamowanie lub przyspieszanie. Wpływ takich czynników w przypadku koła ilustrują przedstawione rozkłady naprężeń (rys. 2.6). Zwykle w wieńcu nowo wyprodukowanego koła naprężenia własne ściskające mają rozkład jak na rysunku 2.6a. Podczas



Rysunek 2.6: Naprężenia własne w wieńcu kół kolejowego: a) stan przed eksploatacją, koło nowe, b) po przebiegu około 200 000 km, c) po intensywnym hamowaniu, d) po intensywnym hamowaniu i dalszej eksploatacji [104].

normalnej eksploatacji, wskutek dużych nacisków na powierzchniach kontaktu koło–szyna, następuje narastający zgniot plastyczny w warstwie powierzchniowej i w efekcie od powierzchni tocznej rozbudowują się obszary naprężeń ściskających (rys. 2.6b). W przypadku wystąpienia nagłego hamowania przy dużej szybkości lub długiego, ciągłego hamowania, np. przy zjeździe z pochyłości w terenach górskich, następuje znaczne nagrzanie wieńca koła i w konsekwencji powstanie w nim naprężeń rozciągających (rys. 2.6c), mogących powodować pęknięcia. Dalsza eksploatacja bez intensywnego hamowania prowadzi do ponownego narastania zgniotu plastycznego przy powierzchni tocznej oraz powstania obwodowych naprężeń ściskających. Mogą one być otoczone pozostałymi po udarze cieplnym naprężeniami rozciągającymi, co jest widoczne na rysunku 2.6d.

Obecność wewnętrznych naprężeń może wywoływać w wielu przypadkach nieprzewidywalne zachowanie konstrukcji.



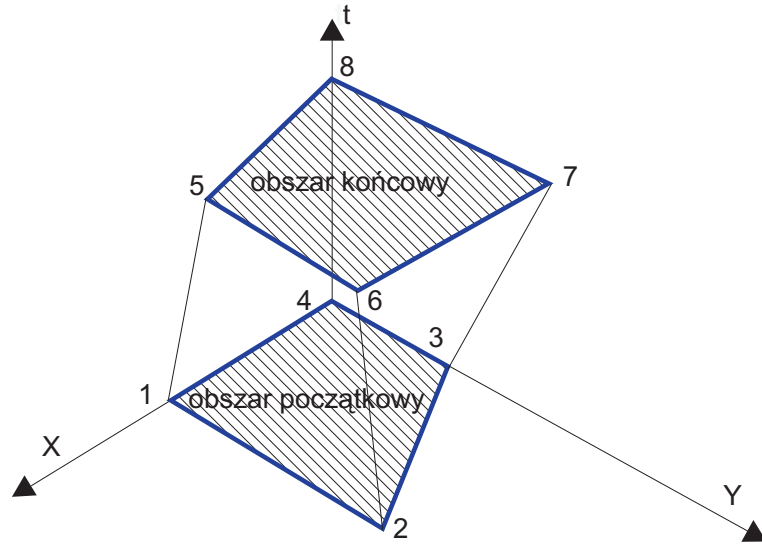
Rysunek 2.7: Wykres wzdłużnych naprężeń własnych w nieeksploatowanych szynach wykonanych ze stali szynowej różnych gatunków oraz przykład rozkładu naprężeń własnych w przekroju szyny [27, 47].

## 2.2 Analiza numeryczna

Metody numeryczne są wygodnym narzędziem w badaniu zjawisk mechaniki, gdyż umożliwiają stosunkowo szybkie i dokładne uzyskanie wyników oraz powtórzenie obliczeń przy zmienionych parametrach. W związku z tym wstępna analiza numeryczna ułatwia uzyskanie wyobrażenia o przebiegach złożoności analizowanych zjawisk. Metody dyskretne opierające się na dyskretyzacji podobszarów, jak metoda elementów skończonych (MES), czy metoda różnic skończonych (MRS), ułatwiają analizę zadań trudnych do rozpatrywania na drodze czysto analitycznej. Mamy tu na myśli zadania o nieregularnym kształcie, o skomplikowanym układzie obciążeń i złożonych warunkach brzegowych. W przypadku takich zadań możliwe jest uzyskanie choćby poglądowych wyników przy stosunkowo małym nakładzie pracy, w przeciwieństwie do metod analitycznych, których stosowanie ogranicza się do wąskiej klasy zadań. Metoda elementów skończonych, bardzo popularna w rozwiązywaniu zadań z fizyki matematycznej, stosowana jest obecnie niemal we wszystkich typach zadań inżynierskich. W naszym przypadku dotyczy to statyki i dynamiki konstrukcji. Idea metody elementów skończonych (MES) polega na dyskretyzacji obszaru konstrukcji na podobszary, tzw. elementy skończone. W zależności od charakteru postawionego zadania, statycznego lub dynamicznego, prowadzi do rozwiązania układu równań algebraicznych lub ciągu układów równań [110, 59]. Zadania dynamiczne rozwiązuje się jako ciąg zadań statycznych. Klasyczne podejście do rozwiązywania zadań dynamiki konstrukcji metodą elementów

skończonych polega na oddzieleniu zmiennych przestrzennych od zmiennej czasu. Zadanie dyskretyzowane w przestrzeni, sprowadzane jest do układu równań algebraicznych. Równania te zawierają, jako niewiadome, przyspieszenia, prędkości i przemieszczenia. Pochodne z kolei poddawane są całkowaniu metodami numerycznymi (Rungego–Kutty, Newmarka). W ten sposób otrzymuje się rozwiązania w zdyskretyzowanym czasie, w kolejnych chwilach  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ . MES charakteryzuje się stacjonarnością dyskretyzacji konstrukcji, a to narzuca pewne ograniczenia. Wady tej pozbawiona jest metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych (MECz) [10, 8, 7, 67, 66]. Metoda ta rozwijana była w ostatnim czasie również w Zakładzie Sterowania i Dynamiki Układów IPPT i zastosowana do dynamicznych zagadnień kontaktowych. Cechą charakterystyczną metody jest możliwość zastosowania niestacjonarnego podziału konstrukcji. Szczególnie w zagadnieniach kontaktowych, gdy zjawiska związane z kontaktem odgrywają istotną rolę w końcowych wynikach, MECz z niestacjonarnym podziałem konstrukcji wykazuje swoje zalety. Umożliwia ciągły w czasie opis charakterystycznych zjawisk (w naszym przypadku warunków kontaktu i tarcia). Ważną zaletą metody jest możliwość, w sposób ciągły, zagęszczania i rozrzedzania podziału siatki w zależności od przebiegu zjawiska. Zaleta ta wykorzystywana jest w szczególności przy przemieszczaniu się strefy kontaktu, wokół której oczekujemy rozwiązania ze zwiększoną dokładnością. W przeciwieństwie do tego, MES umożliwia jedynie nieciągłą zmianę siatki w czasie.

W dalszej części rozdziału przedstawiona zostanie analiza dynamiczna MECz zjawisk występujących w trakcie toczenia się koła po nieskończone sztywne podłoże. Następnie przedstawiona będzie statyczna analiza MES rozkładu naprężeń wewnętrznych w kole kolejowym, ze szczególnym uwzględnieniem kontaktu koła z szyną. Oprogramowanie do analizy dynamicznej MECz zostało wykonane we własnym zakresie. Ze względu na zakres pracy, ograniczono się tu do analizy zadań płaskiego stanu naprężenia. Bardziej zbliżoną do rzeczywistej geometrii koła umożliwiła analiza pakietem ANSYS. Z jego użyciem wykonano trójwymiarowy model koła, jednak ze względu na ograniczenia istniejące w tym pakiecie analizę ograniczono do zagadnienia statycznego. Zagadnienie dynamicznego toczenia w pakiecie Ansys nie jest możliwe do zrealizowania w prosty sposób.



Rysunek 2.8: Obszary przestrzenne ograniczające obszar czasoprzestrzenny.

### 2.2.1 Analiza dynamiczna metodą elementów czasoprzestrzennych

Metoda elementów czasoprzestrzennych jest uogólnieniem metody elementów skończonych. Jak wspomniano we wprowadzeniu do rozdziału 2.2, dzięki funkcjom interpolacyjnym (funkcjom kształtu) opisanym w przestrzeni rzeczywistej  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i w czasie  $t$ , możemy stosować niestacjonarną dyskretyzację konstrukcji. Elementy skończone mogą zmieniać w pewnym zakresie swoją geometrię w kolejnych krokach obliczeniowych (rys. 2.8). W metodzie elementów czasoprzestrzennych interpolacja wartości funkcji na podstawie parametrów węzłowych może być zapisana następująco:

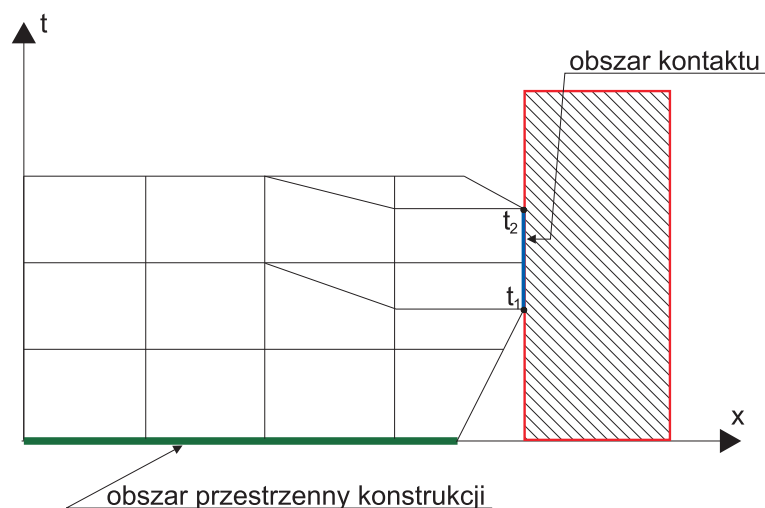
$$q(x, t) = \mathbf{N}(x, t) \mathbf{q}_e , \quad (2.1)$$

w odróżnieniu od metody elementów skończonych, w której zmienne przestrzenne i czas są rozseparowane:

$$q(x, t) = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{T}(t) \mathbf{q}_e . \quad (2.2)$$

$\mathbf{N}(x, t)$ ,  $\mathbf{N}(x)$  i  $\mathbf{T}(t)$  są funkcjami interpolacyjnymi, zależnymi od odpowiednich argumentów, a  $\mathbf{q}_e$  jest wektorem parametrów węzłowych. W szczególnym przypadku (2.1) może mieć postać (2.2).

Swobodne kształtowanie siatki podziału czasoprzestrzeni jest szczególnie przydatne w zagadnieniach kontaktowych [10]. Można lokalnie zagęścić siatkę podziału w czasie i tym samym uzyskać możliwość umieszczenia węzła przestrzennego siatki w sposób



Rysunek 2.9: Jednowymiarowy obszar przestrzenny w kontakcie z przeszkodą — rozwój siatki czasoprzestrzennej w strefie kontaktu.

spełniający warunki brzegowe (rys. 2.9). Punkty  $t_1$  i  $t_2$  ograniczają obszar kontaktu w czasie. Punkt  $t_1$  można łatwo wyznaczyć mając odpowiednie przemieszczenia i prędkości węzłów. Punkt  $t_2$  wyznaczany jest iteracyjnie, choć nie wymaga się tu wysokiej dokładności wyznaczenia chwili  $t_2$ .

W dalszej części przedstawimy sformułowanie metody elementów czasoprzestrzennych w przypadku płaskiego stanu naprężenia oraz wyniki obliczeń, wykazujące falowy charakter zjawisk towarzyszących toczeniu.

#### Płaski stan naprężenia w metodzie elementów czasoprzestrzennych

Wyprowadzenie odpowiednich macierzy charakterystycznych metody całkowania równania różniczkowego ruchu uzyskamy wykorzystując podobne wyprowadzenia zaczerpnięte z literatury [9].

Odształcenia  $\varepsilon$  określamy jako

$$\varepsilon = \mathcal{D}\mathbf{u} , \quad (2.3)$$

gdzie  $\mathcal{D}$  jest operatorem różniczkowym

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\text{grad} + \text{grad}^T) , \quad (2.4)$$

a naprężenia  $\sigma$  jako

$$\sigma = \mathbf{E}\varepsilon , \quad (2.5)$$

oraz przyjmiemy dystrybucję wirtualnych prędkości  $\mathbf{v}^*$ . Wówczas równanie pracy wir-

tualnej, wyrażone w prędkościach, przyjmie następującą postać:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*)^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \eta_z \mathbf{v} d\Omega = 0 . \quad (2.6)$$

Przemieszczenie  $\mathbf{u}(t)$  określa się całką prędkości, z uwzględnieniem przemieszczenia początkowego w kroku obliczeniowym, jako stałej całkowania

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v} dt . \quad (2.7)$$

Po uwzględnieniu (2.3), (2.5) i (2.7) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathcal{D}\mathbf{v}^*)^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{u}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \left[ (\mathcal{D}\mathbf{v}^*)^T \mathbf{E} \mathcal{D} \int_0^t \mathbf{v} dt \right] d\Omega + \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \eta_z \mathbf{v} d\Omega = 0 . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Wprowadzamy formuły interpolacyjne:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} \quad \text{i} \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{N}^*\dot{\mathbf{q}} , \quad (2.9)$$

i ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{\Omega} \left[ (\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \mathbf{E} \mathcal{D} \int_0^t \mathbf{N} dt \right] d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}^*)^T \eta_z \mathbf{N} d\Omega \right\} \dot{\mathbf{q}} + \\ + \int_{\Omega} (\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Funkcję prędkości wirtualnej można przyjąć w różnej postaci. Tu zastosowano funkcje jako dystrybucje Diraca [9], z argumentem w chwili  $t = \alpha h$ . Możemy sterować własnościami procedury za pomocą parametru  $\alpha$ .

W przypadku równania (2.10) obszary całkowania upraszczają się z objętości czasoprzestrzennej  $\Omega$  do powierzchni czasoprzestrzennej (objętości rzeczywistej)  $V(\alpha h)$ . Pierwsza całka zawiera składnik całkowany w granicach  $[0, t]$ . Z uwagi na powyższe wnioski dotyczące całki z dystrybucji, pozostaje dokonać całkowania w granicach  $[0, \alpha h]$ . Przyjęcie liniowych funkcji podcałkowych  $\mathbf{N}$  pozwala wyznaczyć średnią wartość podcałkową przy  $t = \alpha h/2$  i przemnożyć przez długość przedziału  $\alpha h$ . Wówczas macierz sztywności, bezwładności i wektor naprężeń początkowych, opisujące element czasoprzestrzenny mają postać następującą:

$$\mathbf{K} = \iint_{V_{\alpha h}} (\mathcal{D}\mathbf{N}_{\alpha h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h/2) dV \cdot \alpha h , \quad (2.11)$$

$$\mathbf{M} = \iint_{V_{\alpha h}} \mathbf{N}_{\alpha h}^T(\mathbf{x}) \rho \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h)}{\partial t} dV, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{Z} = \iint_{V_{\alpha h}} \mathbf{N}_{\alpha h}^T(\mathbf{x}) \eta_z \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h) dV, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{s} = \iint_{V_{\alpha h}} (\mathcal{D}\mathbf{N}_{\alpha h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV. \quad (2.14)$$

$V_{\alpha h}$  oznacza przekrój elementu czasoprzestrzennego w chwili  $t = \alpha h$ .  $\mathbf{N}_{\alpha h}$  jest macierzą funkcji interpolujących, określonych na powierzchni  $V_{\alpha h}$ ,  $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \cdot)$  zaś jest macierzą funkcji interpolujących w objętości  $\Omega$ , wyznaczonych w określonej chwili. Zmiana granic całkowania daje jeszcze łatwiejsze do numerycznych obliczeń formuły określające macierze charakterystyczne. Macierze (2.11), (2.12) i (2.13) mają wymiar  $N \times 2N$  ( $N$  – całkowita liczba stopni swobody). Wiążą one chwile  $t_i$  i  $t_{i+1}$ .

W przypadku szczególnym stacjonarnej dyskretyzacji macierze powyższe upraszczają się do następujących wynikowych macierzy:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho b}{h} \left[ \begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right] = \frac{1}{h} [-\mathbf{M}_{stat} \mid \mathbf{M}_{stat}] \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{Nh}{b} \left[ \begin{array}{cc|cc} \alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & -\alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & \frac{\alpha^2}{2} & -\frac{\alpha^2}{2} \\ -\alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & \alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & -\frac{\alpha^2}{2} & \frac{\alpha^2}{2} \end{array} \right] = \\ &= h \left[ \alpha(1 - \frac{\alpha}{2})\mathbf{K}_{stat} \mid \frac{\alpha^2}{2}\mathbf{K}_{stat} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

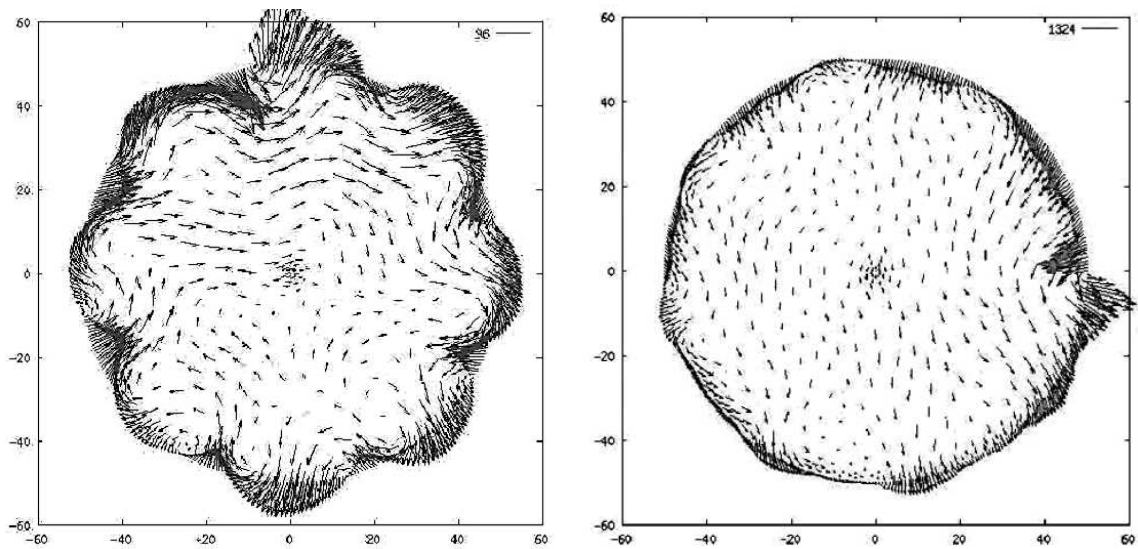
$$\mathbf{C} = \eta b \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{6} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{6} \\ \frac{1-\alpha}{6} & \frac{1-\alpha}{3} & \frac{\alpha}{6} & \frac{\alpha}{3} \end{array} \right] = [(1 - \alpha)\mathbf{C}_{stat} \mid \alpha\mathbf{C}_{stat}] \quad (2.17)$$

Końcowa postać równania ruchu opisuje równowagę sił na brzegu obszaru  $\Omega$ . Wektor węzłowych prędkości  $\dot{\mathbf{q}}$  zawiera prędkości  $\dot{\mathbf{q}}_a$  w chwili początkowej  $t = 0$  oraz  $\dot{\mathbf{q}}_p$  w chwili końcowej  $t = h$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{C} + \mathbf{K}) \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{array} \right\} + \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Otrzymujemy równanie macierzowe, w którym niewiadomą jest  $\dot{\mathbf{q}}_p$ .  $\mathbf{M}_{stat}$ ,  $\mathbf{C}_{stat}$  i  $\mathbf{K}_{stat}$  są statycznymi macierzami bezwładności, tłumienia i sztywności. Dotyczy to szczególnego przypadku stacjonarnej podziału konstrukcji na przestrzenne elementy skończone. Program komputerowy oparty na sformułowaniu czasoprzestrzennym wykorzystano do analizy toczenia się koła z tarcie, po sztywnym podłożu. Obliczenia

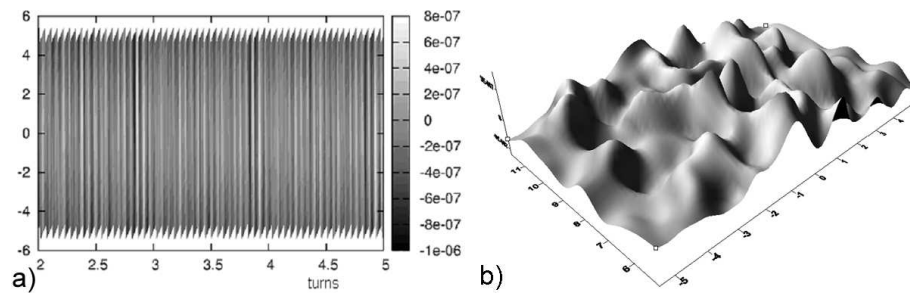




Rysunek 2.10: Przebiegi pól prędkości w trakcie pierwszego i ósmego obrotu, na podstawie symulacji komputerowej.

dotyczyły zadania podobnego do przedstawionego w pracy [11], lecz uwzględniały tarcie w strefie kontaktu.

Przedstawione zostaną wybrane wyniki numerycznej symulacji toczenia się koła, opisanego w płaskim stanie naprężenia, po nieskończenie sztywnym podłożu. Przyjęto jednostronne warunki kontaktu z podłożem oraz zastosowano prawo tarcia suchego w strefie kontaktu. Rys. 2.10 pokazuje pola prędkości w dwóch wybranych chwilach. Rys. 2.11 przedstawia prędkość styczną w strefie kontaktu bez uwzględnienia tarcia oraz z tarcie suchym. W pierwszym przypadku obserwujemy efekt oscylacyjnego obrotu materiału koła wokół osi obrotu. Skutkiem tego jest również oscylacja prędkości w strefie kontaktu, uwidoczniiona na rysunku w postaci pasm. W przypadku uwzględniającym tarcie obserwowane zjawisko w strefie kontaktu jest bardziej złożone. Poszczególne podobszary przemieszczają się z różną prędkością i dochodzi do lokalnych zmian rozkładu prędkości. Efekt ten potwierdza fakt, że w przypadku toczenia istotny wpływ na zjawiska w strefie kontaktu mają efekty dynamiczne wywołane tarcie.



Rysunek 2.11: Prędkość styczna w strefie kontaktu a) bez tarcia (oś pozioma – nr obrotu koła, oś pionowa – współrzędna strefy kontaktu), b) w przypadku nieliniowego modelu tarcia.

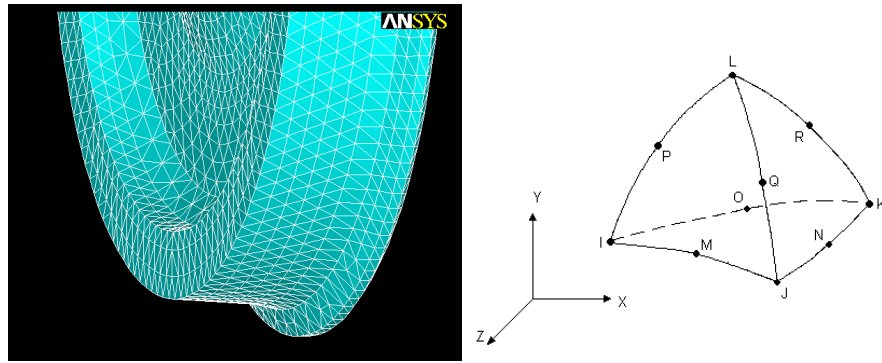
## 2.2.2 Analiza statyczna metodą elementów skończonych

Dokonano numerycznej analizy stanu naprężeń w kole w strefie kontaktu koła z szyną. Analizę przeprowadzono metodą elementów skończonych. Do symulacji wykorzystano program ANSYS oraz jego moduł obliczeniowy pod nazwą ANSYS/Mechanical<sup>1</sup>. Pakiet ten jest narzędziem programistycznym przeznaczonym do analiz wytrzymałościowo-termicznych. Oprogramowanie udostępnia pełen zestaw liniowych oraz nieliniowych elementów skończonych i modeli materiałowych [105, 43].

W metodzie elementów skończonych, jako stan początkowy, zadać można pewne pole naprężeń, wynikające z naprężeń wewnętrznych w obszarze koła. Teoretycznie możliwe jest wprowadzenie początkowych naprężeń w każdym elemencie skończonym. Jest to jednak trudne do zrealizowania w prosty sposób w układzie globalnym ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Dyskretyzacja koła na trójwymiarowe elementy skończone może być wprawdzie łatwo zrealizowana w układzie biegunowym, jednak w takim układzie w systemie Ansys nie można zadać naprężeń początkowych. Jest to poważnym ograniczeniem systemu w zastosowaniu do zadań przez nas realizowanych. Praktycznie niewykonalne byłoby wprowadzanie naprężeń początkowych w układzie kartezjańskim, element po elemencie. Wobec tego podjęto próbę zastąpienia zadania zadaniem równoważnym, w którym naprężenia wewnętrzne o rozkładzie biegunowym wprowadzane są przez naprężenia wywołane zadaniem rozkładem temperatur.

Przy budowie trójwymiarowego modelu numerycznego koła zastosowano dyskretyzację elementami czworobocznymi o kwadratowej zmienności funkcji kształtu (rys.

<sup>1</sup>Grant obliczeniowy MEiN/SGI2800/PAN/096/2006, realizowany w ACK Cyfronet AGH



Rysunek 2.12: Dyskretyzacja koła kolejowego oraz element zastosowany w dyskretyzacji modelu numerycznego.

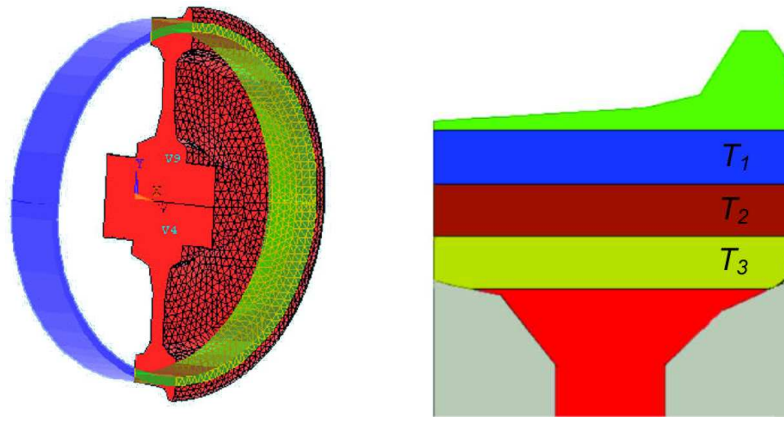
2.12). Zapewniają one stosunkowo wysoką dokładność obliczeń mimo niewielkiej liczby elementów. Przy dyskretyzacji przyjęto kilka wariantów siatek o układzie zbliżonym do prezentowanej na rysunku 2.12. Liczba węzłów wynosiła tu 75433, a liczba elementów 48044. Przyjęto materiał charakteryzujący się następującymi parametrami: moduł Younga  $E=2,1 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, liczba Poissona  $\nu = 0,3$ , współczynnik rozszerzalności termicznej w kierunkach  $x$  i  $y$   $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-5}$  1/K.

Istnienie obwodowych naprężeń uwzględniono przez wprowadzenie do wnętrza koła obciążonych termicznie warstw w formie pierścieni (rys. 2.13). Warstwy te zostały obciążone temperaturami:  $T_1 = 17^\circ$ ,  $T_2 = 50^\circ$ ,  $T_3 = 60^\circ$ , by symulować naprężenie wewnętrzne o wartości 100 MPa, a w przypadku naprężenia 400 MPa, odpowiednio:  $T_1 = 67^\circ$ ,  $T_2 = 200^\circ$ ,  $T_3 = 237^\circ$ . Taka metoda wprowadzenia wewnętrznych naprężeń jest pewnym uproszczeniem, ze względu na równomierny rozkład naprężeń na obwodzie, co nie odpowiada ściśle rzeczywistości.

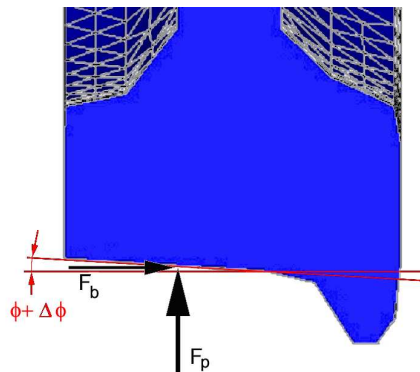
Obciążenia dynamiczne działające na koło w strefie kontaktu przyjęto jako quasi-statyczne, przez wprowadzenie współczynnika dynamicznego. W naszym przypadku dawał on wartość dwukrotnie większą od wartości obciążenia statycznego.

### Wyniki badań numerycznych

Po przeprowadzeniu badań numerycznych uzyskano wyniki określające zmiany wewnętrznej geometrii i wewnętrznego stanu naprężeń. Na tej podstawie określono zmianę kąta nachylenia powierzchni toczonej koła kolejowego  $\phi$  oraz rozkład naprężeń. Analizę rozkładu naprężeń wewnętrznych wykonano z uwzględnieniem granicy plastyczności



Rysunek 2.13: Przekrój modelu koła z jednym pierścieniem oraz podział wieńca na warstwy obciążane termiczne.

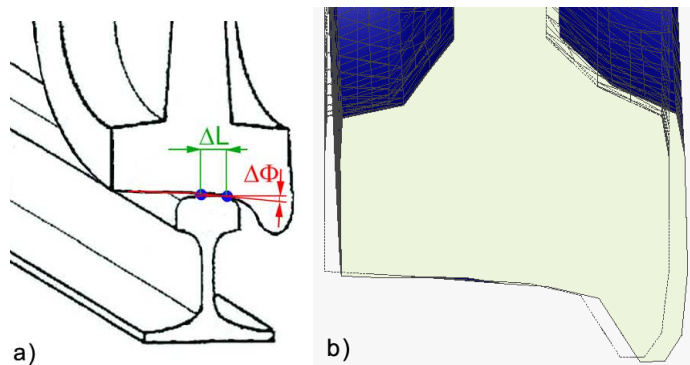


Rysunek 2.14: Układ sił działających na obręcz koła w strefie kontaktu, wykorzystany do symulacji numerycznej obciążeń statycznych i dynamicznych.

w przyjętym modelu materiału koła.

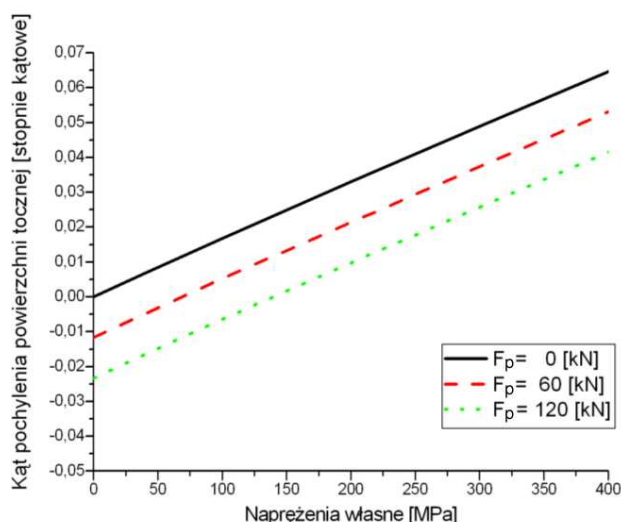
Przyjęto następujący schemat obliczeń. Pierwszy etap dotyczył koła nieobciążonego siłami zewnętrznymi. Zbadano wpływ zmian wartości naprężeń własnych w zakresie 0–400 MPa, z przyrostem co 100 MPa. W następnym etapie obciążono koło siłą pionową o wartości  $F_p = F_s = 60$  kN (gdzie:  $F_s$  – obciążenie statyczne przy postoju) i siłą boczną wynikającą ze współczynnika tarcia, o wartości  $F_b = 24$  kN. Ostatnim etapem było wprowadzenie obciążeń w strefie kontaktu, wywołanych oddziaływaniem dynamicznym  $F_p = F_{dyn}$  koła z drogą podczas jazdy. Założono, że obciążenie dynamiczne ma wartość dwukrotnie większą od obciążenia statycznego, czyli  $F_{dyn} = 120$  kN. Po zakończeniu poszczególnych etapów symulacji wyznaczono przyrost kąta obrotu  $\phi$  obręczy koła, odpowiadający powyższemu przypadkowi obciążeń. Zmiany kąta  $\phi$  powierzchni tocznej obręczy koła określono śledząc dwa charakterystyczne węzły na tej powierzchni (rys. 2.15 a).

Rysunek 2.15 b pokazuje, że wraz ze wzrostem obwodowych naprężeń własnych



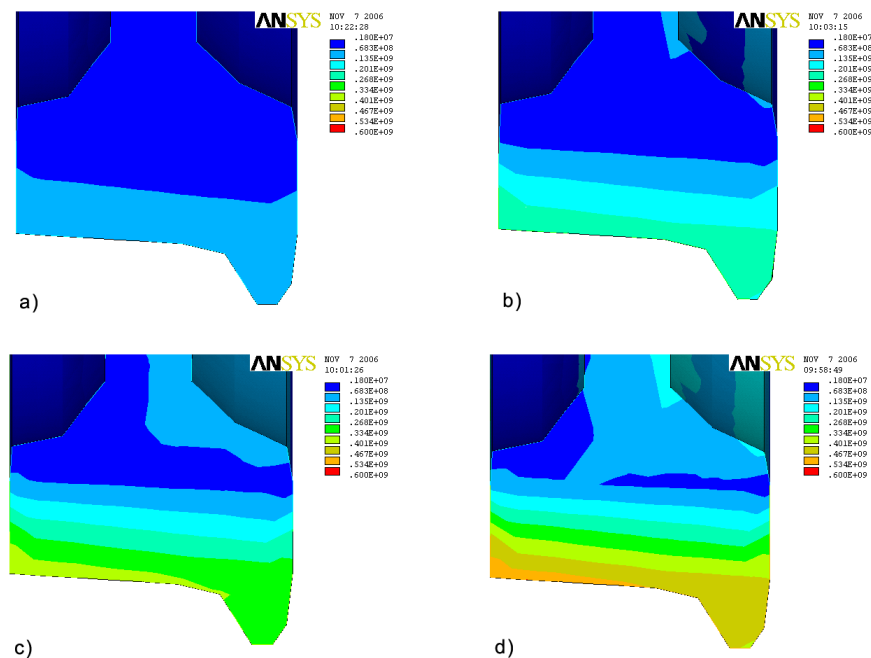
Rysunek 2.15: Zmiana pochylenia płaszczyzny toczonej koła wywołana zmianą obwodowych naprężeń własnych: a) schemat pomiaru przyrostu kąta  $\phi$ , b) skrzywienie wieńca – wynik symulacji w przypadku naprężeń obwodowych równych 200 MPa oraz siły pionowej 60 kN i bocznej 24 kN.

wzrasta obrót wieńca koła kolejowego. Zjawisko to jest związane z niesymetrycznym kształtem przekroju poprzecznego wieńca koła oraz wpływem siły pionowej  $F_p$  i bocznej  $F_b$  w strefie kontaktu (rys. 2.14).



Rysunek 2.16: Wpływ wartości obciążenia  $F_p$  oraz obwodowych naprężeń własnych na kąt pochylenia powierzchni toczonej koła.

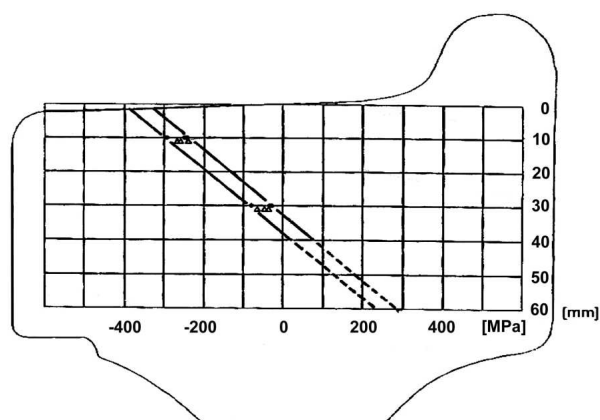
Na rysunku 2.16 pokazana jest zmiana kąta powierzchni toczonej koła przy obciążeniach zewnętrznych  $F_p = 0$  kN,  $F_p = 60$  kN i  $F_p = 120$  kN oraz jednocześnie wpływ zmian obwodowych naprężeń własnych. Z wykresów widać, że wzrost naprężeń własnych w przyjętym zakresie wywołuje zmianę pochylenia powierzchni toczonej koła w przedziale od  $-0,025^\circ$  do  $0,065^\circ$ . Siły zewnętrzne przyłożone w strefie kontaktu w analizowanym przypadku przeciwdziałają odchyleniu powierzchni toczonej. Wynika



Rysunek 2.17: Pola naprężeń  $I_2$  wywołane naprężeniami własnymi o intensywności a) 100 MPa, b) 200 MPa, c) 300 MPa, d) 400 MPa.

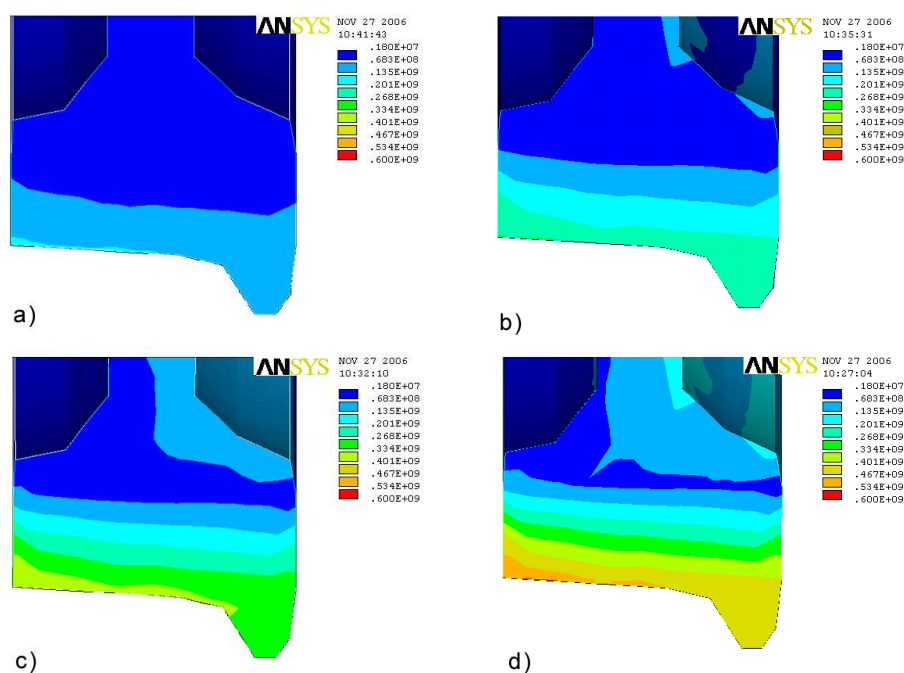
to z lokalizacji strefy kontaktu. Gdyby strefa ta ulokowana była bliżej obrzeża koła, siły kontaktowe  $F_p$  i  $F_b$  wywoływałyby odchylenia płaszczyzny toczonej w kierunku zgodnym z kierunkiem odchyżeń wywołanych naprężeniami własnymi. Wartości zmiany kąta  $\phi$  są małe, ale mają wpływ na lokalizację strefy kontaktu koło–szyna.

Po określeniu wpływu zewnętrznych sił oraz naprężeń własnych na zmiany położenia płaszczyzny toczonej koła, wyznaczono rozkład naprężeń. Wykresy przedstawione na rys. 2.17 ilustrują rozkłady pól naprężeń wywołane tylko naprężeniami własnymi. Widać na nich warstwowy rozkład naprężeń, których eksperymentalne potwierdzenie ilustruje zaczerpnięty z literatury rysunek 2.18 [18]. Wyniki eksperymentalne uży-



Rysunek 2.18: Naprężenia własne w wieńcu koła zmierzone metodą inwazyjną z wykorzystaniem układu tensometrów [18].

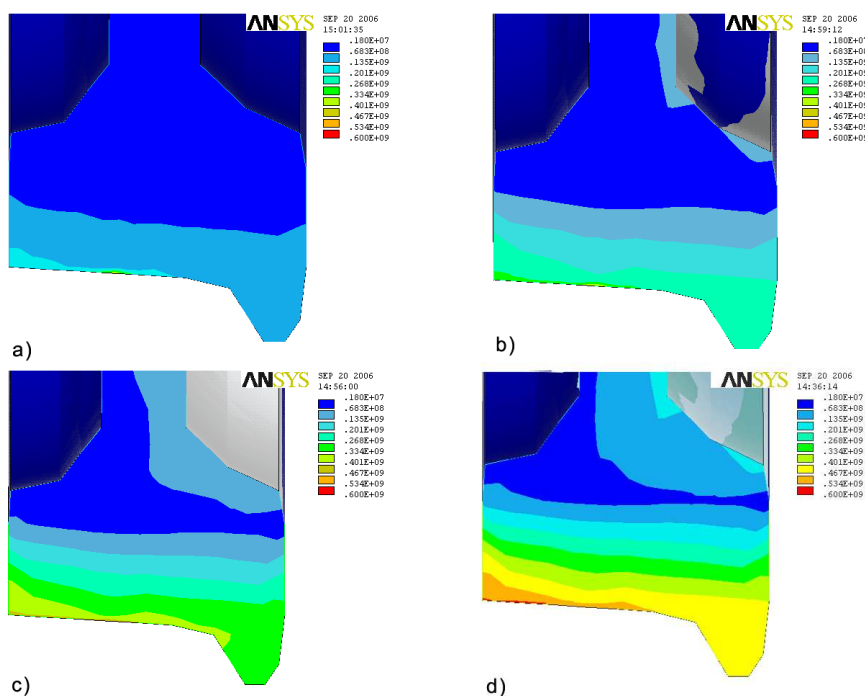
skane zostały metodą inwazyjną. Pomiaru naprężeń własnych dokonano w przekroju poprzecznym koła kolejowego, na którym naklejono tensometry. Następnie wykonano nacięcia w kierunkach pionowym i poziomym w celu „odpuszczenia” naprężeń. Przebiegi nacięć zbliżone były do siatki pomiarowej pokazanej na rys. 2.18. W wyniku nacięć materiał zrelaksował się i na tensometrach pojawiły się odkształcenia wywołane naprężeniami zgromadzonymi w wieńcu koła. Jakościowa zgodność wyników pozwoliła założyć, że zaproponowany model jest poprawny i można go zastosować w dalszej analizie uwzględniającej siły zewnętrzne.



Rysunek 2.19: Rozkład drugiego niezmiennika naprężeń  $I_2$  wywołanego obciążeniem pionowym statycznym  $F_{stat} = 60$  kN oraz bocznym  $F_b = 24$  kN w punkcie kontaktu oraz naprężeniami własnymi o intensywności a) 100 MPa, b) 200 MPa, c) 300 MPa, d) 400 MPa.

Wykresy prezentowane na rysunku 2.19 ilustrują rozkład naprężeń w wieńcu koła przy statycznym obciążeniu zewnętrznym  $F_p = 60$  kN i  $F_b = 48$  kN w strefie kontaktu oraz przy obwodowych naprężeniach wewnętrznych. Siła w strefie kontaktu charakteryzuje się niezmienną wartością, a zmienia się jedynie obwodowe naprężenie własne, wzrastające co 100 MPa. Zakres zmian wynosi od 0 do 400 MPa, jak w poprzednim przypadku. Z wyników przedstawionych na rys. 2.19 widać, że w żadnym przypadku naprężenia nie osiągają wartości przekraczającej granicę plastyczności.

W przypadku kolejnych wyników, przy założeniu obciążenia dynamicznego  $F_p = 120$  kN i  $F_b = 48$  kN oraz wpływu obwodowych naprężeń wewnętrznych od 0 do 300 MPa, naprężenia w wieńcu koła również mieszczą się w bezpiecznym zakresie poniżej granicy plastyczności (rys. 2.20 a, b, c). W przypadku ściskających, obwodowych naprężeń własnych w wieńcu wartości o 400 MPa (rys. 2.20 d) w strefie kontaktu występuje wyraźny obszar, w którym następuje przekroczenie granicy plastyczności. Oznaczono go kolorem czerwonym.



Rysunek 2.20: Rozkład drugiego niezmiennika naprężeń  $I_2$ , wywołany obciążeniem dynamicznym pionowym  $F_{dyn} = 120$  kN oraz bocznym  $F_b = 48$  kN w punkcie kontaktu i obwodowymi naprężeniami własnymi o wartościach a) 100 MPa, b) 200 MPa, c) 300 MPa, d) 400 MPa.

W analizowanym przypadku zastosowano uproszczenia. Do nich możemy zaliczyć punkt przyłożenie siły w obszarze kontaktu. W praktyce strefa ta ma kształt elipsy, na powierzchni której obciążenie rozłożone jest nierównomiernie. W naszym przypadku są to trzy wartości sił przyłożone do węzłów siatki. Z tego powodu rozkład sił może odbiegać od rzeczywistego. Kolejnym uproszczeniem są naprężenia wewnętrzne, narastające w rzeczywistości łagodnie wraz z promieniem koła. W rzeczywistości rozkład ich jest nierównomierny, w przeciwieństwie do analizowanego modelu, w którym równomiernie rozłożone pierścienie obrazowały oddziaływanie naprężeń własnych.

Ze względu na oscylacyjny charakter obciążeń zewnętrznych oraz nierównomierny



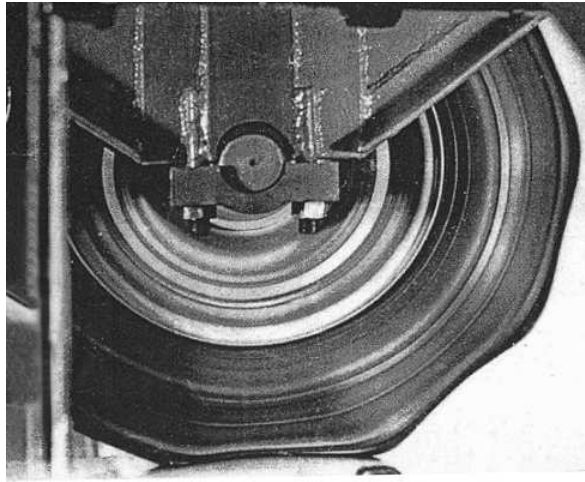
rozkład naprężeń, możliwe jest wystąpienie zjawisk niepożądanych. Przekroczenie krytycznych wartości ściskających naprężeń obwodowych może mieć duży wpływ na proces falistego zużycia powierzchni tocznej, poligonalizację kół kolejowych oraz korugację szyn (rys. 1.1, 1.2), jak również zużycie plastyczne.

Kolejnym uproszczeniem jest przyjęcie rozkładu naprężeń wewnętrznych równomiernie wzdłuż obwodu koła. W rzeczywistości rozkład ten zależy od wielu czynników i nie jest równomierny. Metoda badań oraz wyniki uzyskane w wyniku analizy numerycznej znalazły praktyczne wykorzystanie przy ocenie wpływu wybranych parametrów na zużycie kół w wagonach Metra Warszawskiego.

## 2.3 Zagadnienie falowe w kole ogumionym

Zjawiska podobne do opisanych w rozdziale 2.1, a przedstawione na rysunkach 2.2, 2.3, obserwuje się także podczas toczenia się koła ogumionego. Poniżej dokonana zostanie analiza zjawiska powstawania fali bieżącej w oponie. W przypadku tym dochodzi do zwiększonych deformacji i przyspieszonego zużycia ogumienia. W rzeczywistości jest ono bardziej złożone, z uwagi na skończoną odkształcalność opony, złożone zjawiska zachodzące w strefie kontaktu z podłożem oraz złożone związki konstytutywne. W dalszej części wykażemy jedynie, że do wspomnianego efektu falowego dojść może przy zwykłej eksploatacji ogumionych kół.

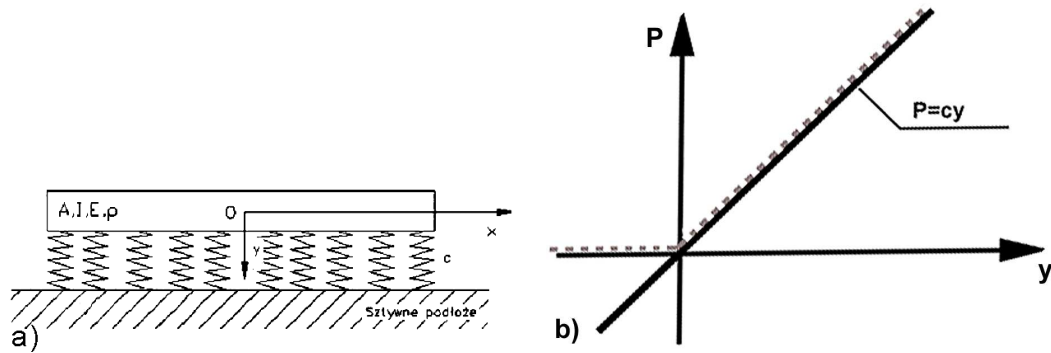
Ogumienie pojazdu samochodowego jest elementem, który znajduje się w bezpośrednim kontakcie z nawierzchnią drogi i przenosi obciążenie wynikające z wymuszenia kinematycznego pojazdu. Właściwości opony pojazdu samochodowego wpływają bezpośrednio na bezpieczeństwo czynne kierowcy oraz pasażerów. Stąd ogumienie ciągle stanowi przedmiot badań i prac rozwojowych, czego wynikiem jest wprowadzanie nowych materiałów i technologii wytwarzania, prowadzących do poprawienia właściwości jezdnych i eksploatacyjnych, jak np. zmniejszenia masy opony, zużycia i odkształceń. Ruch toczny koła wywołuje dyssypację energii związaną z tarciem poślizgowym w łożyskach, tłumienie postaciowe związane z uginaniem się opony oraz straty wentylacyjne. Po osiągnięciu pewnej granicznej prędkości toczenia zaczyna mocno wzrastać energia dyssypowana. Zjawisko to jest spowodowane generowaniem fal bieżących w oponie (rys. 2.21). Prędkość, przy której zaczyna propagować się fala bieżąca w oponie nazywana jest prędkością krytyczną (w literaturze można spotkać określenie „fala stojąca” [36],



Rysunek 2.21: Fala bieżąca w oponie — widoczne deformacje promieniowe [36].

które nie jest poprawne, gdyż kształt zaburzeń jest niezmienny względem otoczenia i nie ma węzłów). Propagacja fal w oponie wpływa na przyczepność i stabilność ruchu pojazdu. Wskutek ruchu falowego powstają niepożądane drgania koła. Powodują one uszkodzenie opony i przenoszą się na nadwozie pojazdu. Nadmierne odkształcenia bieżnika wywołują szybkie nagrzewanie się opony, mogące prowadzić do rozwarstwienia. Poprawne określenie prędkości krytycznej oraz oszacowanie wpływu parametrów opony na tą wielkość jest ważnym zagadnieniem w budowie opon. Prędkość krytyczną można wyznaczyć doświadczalnie. Na ogół jednak jest to badanie sprawdzające, które wiąże się z poważnymi kosztami, a uzyskane wyniki badań dotyczą wówczas konkretnych rozwiązań opony samochodowej. Bardziej uniwersalnym rozwiązaniem wydaje się budowa modelu fizycznego i matematycznego oddziaływania opony z drogą. Przy pomocy tych modeli można oszacować właściwości dynamiczne opon w funkcji różnych parametrów.

**Model ogumienia koła pojazdu samochodowego.** Przyjęty model obliczeniowy powinien możliwie dokładnie odzwierciedlać obiekt rzeczywisty, a jednocześnie powinien być prosty. Rozpatrując koło samochodu uwzględnić należy także fakt, że sztywność opony jest znacznie mniejsza od sztywności obręczy. W analizie odkształceń promieniowych koła można wpływ odkształceń obręczy pominąć. Opona radialna zbudowana jest z dwóch charakterystycznych elementów. Element czołowy opony stanowią: opasanie, ekran i bieżnik, tworzące sztywny pas materiału opony, pracujący przede wszystkim na zginanie, oraz sprężysty bok wykonany z materiału



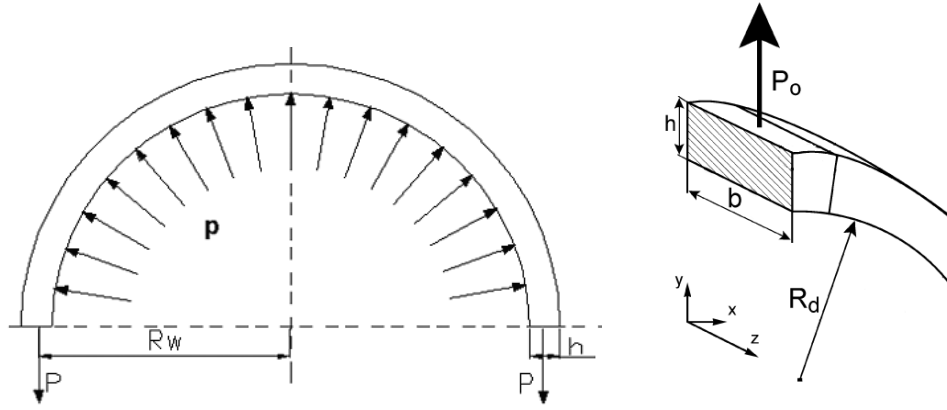
Rysunek 2.22: a) Belka prosta modelu Bernoulliego–Eulera na sprężystym podłożu Winklera i b) charakterystyka tego podłoża modelu dwustronnego (linia ciągła) i modelu jednostronnego (linia przerywana).

osnowy pokrytego gumą. Przyjmujemy na podstawie pracy [21], że różnica w wynikach koła opisanego zakrzywioną belką w stosunku do modelu opisanego belką prostą wynosić może około 10%. Zakładamy, że pas czołowy opony (bieżnik) będzie opisany belką prostą (rys. 2.22 a) typu Bernoulliego–Eulera. Parametrami belki są:  $I$  – moment bezwładności przekroju poprzecznego,  $A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego,  $E$  – moduł Younga materiału bieżnika,  $r$  – gęstość materiału. Belka prosta Bernoulliego–Eulera dobrze odzwierciedla właściwości rzeczywistego elementu w analizie statycznej oraz przy wymuszeniach o częstotliwościach poniżej 500 Hz. Jest to zakres wystarczający w przypadku koła samochodu. Bok opony i działanie ciśnienia przedstawimy jako sprężyste podłoże Winklera o stałym współczynniku sztywności  $c$ . Tak więc uproszczonym modelem opony będzie belka prosta typu Bernoulliego–Eulera na sprężystym podłożu Winklera [21, 81]. W oddziaływaniu koła z drogą uwzględniamy więzy jednostronne.

**Równanie ruchu w przypadku modelowania bieżnika opony prostą belką Bernoulliego-Eulera.** Równanie drgań swobodnych w przypadku przyjętego modelu belki ma postać następującą

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + cy + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2.19)$$

gdzie:  $EI$  – sztywność na zginanie,  $P$  – siła obwodowa,  $c$  – współczynnik sprężystości boku opony,  $\rho$  – gęstość masy,  $A$  – przekrój poprzeczny pasa bieżnika. Rozwiązanie



Rysunek 2.23: Schematy rozkładu ciśnienia  $p$  i sił masowych  $P$  i  $P_o$  w bieżniku opony.

równania (2.19) przyjmujemy w postaci falowej

$$y(x, t) = Be^{ik(x-vt)}, \quad (2.20)$$

gdzie:  $B$  – oznacza amplitudę fali,  $k$  – jest liczbą falową,  $v$  – oznacza prędkość fazową fali,  $t$  – czas. Podstawiając (2.20) do równania (2.19) otrzymujemy

$$(EIk^4 + Pk^2 - \rho Av^2 k^2 + c)(Be^{ik(x-vt)}) = 0. \quad (2.21)$$

Wówczas, równanie charakterystyczne przyjmuje postać

$$(EIk^4 + Pk^2 - \rho Av^2 k^2 + c) = 0. \quad (2.22)$$

Z powyższego równania wyznaczmy prędkość fazową fali w bieżniku opony. Aby określić parametry równania (2.22) należy wyznaczyć siłę obwodową działającą w oponie. Odpowiadająca jej siła wzdłużna  $P$  w przekroju poprzecznym przyjętego modelu opony wywołana jest składową obwodową ciśnienia działającego w kierunku radialnym oraz siłą odśrodkową działającą na elementy opasania i bieżnika (rys. 2.23). Siła wywołana ciśnieniem ma wartość stałą zależną od ciśnienia w oponie (oraz temperatury), a siła odśrodkowa zależy od prędkości kątowej koła, a tym samym od prędkości obwodowej bieżnika. W omawianym przypadku cała siła działająca wzdłuż  $P$  wyznaczamy drogą prostego sumowania

$$P = P_c + P_o, \quad (2.23)$$

gdzie:  $P_c$  – oznacza składową obwodową wywołaną ciśnieniem, a  $P_o$  – oznacza składową obwodową siły odśrodkowej.

Siły obwodowe  $P_c$  i  $P_o$  wyznaczamy na podstawie statycznego warunku równowagi wycinka elastycznego pierścienia reprezentującego oponę poddaną sile radialnej. Wówczas

stosując podstawy bezmomentowej (błonowej) teorii sprężystości, po zbilansowaniu sił działających w kierunku radialnym otrzymujemy

$$P_c = bpR, \quad P_o = \rho Av_1^2, \quad (2.24)$$

gdzie:  $b$  – oznacza szerokość bieżnika,  $p$  – jest ciśnieniem w oponie [ $\text{N/m}^2$ ],  $R$  – uśredniony promień opony,  $v_1$  – oznacza prędkość liniowa pojazdu,  $\rho$  – gęstość materiału [ $\text{kg/m}^3$ ],  $A$  – pole przekroju poprzecznego pasa opony w omawianym przypadku przekrój poprzeczny belki.

Podstawiając (2.24) do (2.22) dostajemy wyrażenie określające prędkość fazową.

$$v^2 = \frac{EIk^4 + Rbpk^2 + \rho Av_1^2 k^2 + c}{\rho Ak^2}. \quad (2.25)$$

Następnie wyznaczamy pochodną funkcji (2.25) w celu określenia wartości prędkości krytycznej

$$\frac{d(v^2)}{dk} = \frac{2(EIk^4 - c)}{\rho Ak^3}. \quad (2.26)$$

Z warunku  $\frac{dv}{dk} = 0$  otrzymujemy cztery pierwiastki, z których dwa podano poniżej

$$k = \pm \sqrt[4]{\frac{c}{EI}}. \quad (2.27)$$

Dwa następne pierwiastki mają złożoną postać. Prowadzą jednak do trywialnych rozwiązań  $v_{kr} = 0$ . Poniżej przedstawiamy prędkość krytyczną uzyskaną przy  $k$  określonym zależnością (2.27).

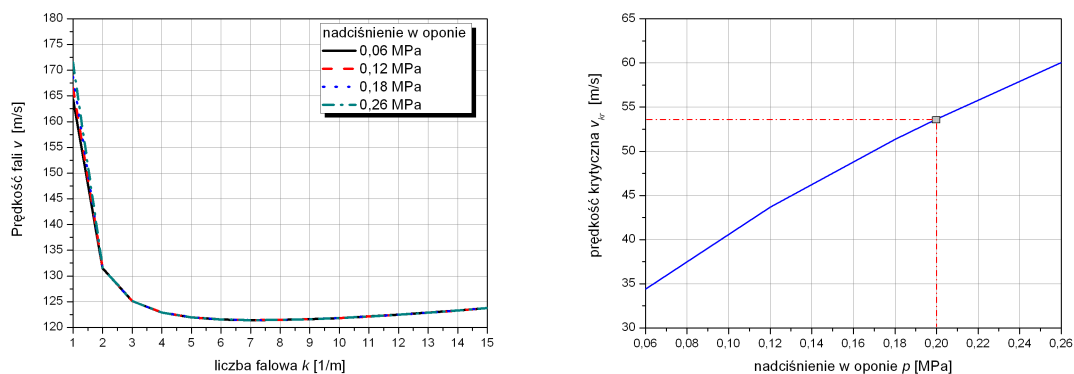
$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2\sqrt{EIc}}{\rho A} + \frac{pbR}{\rho A} + v_1^2}. \quad (2.28)$$

W przypadku zerowej prędkości jazdy  $v_1 = 0$  oraz ciśnienia  $p = 0$  otrzymujemy dobrze znany wzór określający prędkość krytyczną w belce Eulera umieszczonej na podłożu sprężystym

$$v_{kr} = \sqrt[4]{\frac{4EIc}{\rho^2 A^2}}. \quad (2.29)$$

W praktyce wzór (2.29) może być stosowany np. do określenia prędkości krytycznej w torze kolejowym.

**Przykłady analizy wybranych opon samochodowych.** Przyjęto do analizy oponę typu Vivo firmy Dębica, posiadająca budowę radialną. Jest ona przeznaczona do samochodu osobowego klasy średniej, o rozmiarach: 175/65R14 Seria 65 i symbolu prędkości  $T$ , umożliwiającą jazdę z prędkością 190 km/h. Maksymalne ciśnienie nominalne



Rysunek 2.24: Zależność prędkości fali  $v$  od liczby falowej  $k$  przy różnych wartościach ciśnienia  $p$  w oponie Vivo firmy Dębica ( $0,06 \div 0,26$  MPa) oraz zależność prędkości krytycznej  $v_{kr}$  od nadciśnienia  $p$  w oponie.

w oponie wynosi  $0,25$  MPa, a maksymalne przenoszone obciążenie to  $475$  kg. Czoło osnowy opony składa się z warstwy kordu poliestrowego, warstwy kordu poliamidowego i dwóch warstw kordu stalowego, bok opony zbudowany jest z jednej warstwy kordu poliestrowego.

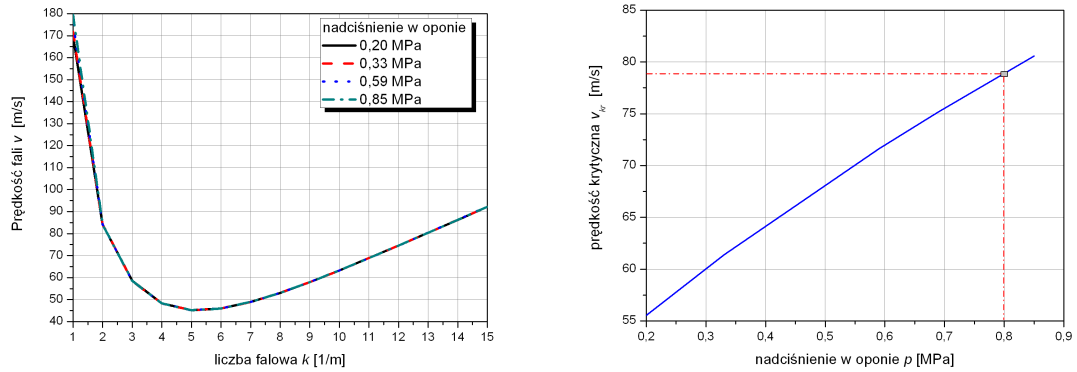
Przyjęto następujące parametry materiału opony opisanej belką Bernoulliego–Eulera:  $h = 0,014$  m,  $b = 0,175$  m,  $E = 4,5 \cdot 10^8$  Pa,  $\rho = 1700$ , kg/m<sup>3</sup>,  $R_d = 0,288$  m,  $c = 50000$  N/m<sup>2</sup> (przybliżona wartość  $c$  wyznaczona eksperymentalnie przez autora).

Przy powyższych parametrach prędkość propagacji fali określimy zależnością

$$v = \sqrt{\frac{18,18k^4 + (0,05p + 4,17v_1^2)k^2 + 50000}{4,17k^2}}. \quad (2.30)$$

Na rysunku 2.24 przedstawiono zależność  $v = f(k)$  przy różnych wartościach ciśnienia  $p$  w oponie oraz prędkości jazdy  $v_1 = 50$  m/s. Przedstawiono też prędkość krytyczną  $v_{kr}$ , w zależności od ciśnienia w oponie. Prędkość krytyczna została wyznaczona z warunku ekstremum zależności (2.30).

Do kolejnej analizy przyjęto oponę wyprodukowaną przez firmę Dębica o nazwie handlowej 4 EVER D 640. Opona ta ma następujące wymiary: 315/80 R 22.5 TL oraz indeks prędkości L (do 120 km/h). Jest to opona przeznaczona na oś kierowaną pojazdu, ma drogową rzeźbę bieżnika (D), konstrukcję radialną (R) i budowę całostalową. Oznacza to, że czoło osnowy składa się z 5 warstw kordu stalowego. Maksymalne ciśnienie to  $0,85$  MPa, maksymalne obciążenie przeniesione przez tę oponę w układzie



Rysunek 2.25: Zależność prędkości fali  $v$  od liczby falowej  $k$  przy różnych wartościach ciśnienia  $p$  w oponie 4EVER D640 firmy Dębica ( $0,2 \div 0,85$  MPa) oraz zależność prędkości krytycznej  $v_{kr}$  od nadciśnienia  $p$  w oponie.

pojedynczym (indeks – 154) wynosi 3750 kg, a w układzie podwójnym (koła bliźniacze, indeks – 150) — 3350 kg.

Przyjmujemy następujące parametry materiału opony modelowanej belką Bernoulliego–Eulera:  $h = 0,039$  m,  $b = 0,315$  m,  $E = 6,5 \cdot 10^8$  Pa,  $\rho = 2200$ , kg/m<sup>3</sup>,  $R_d = 0,45$  m,  $c = 750000$ , N/m<sup>2</sup> ( $c$  wyznaczono eksperymentalnie).

Przy powyższych parametrach prędkość fazowa wyrazi się równaniem

$$v = \sqrt{\frac{1008k^4 + (0,14p + 27,03v_1^2)k^2 + 750000}{27,03k^2}}. \quad (2.31)$$

Na rysunku 2.25 przedstawiona została zależności  $v = f(k)$ , przy różnych wartościach ciśnienia w oponie i prędkości jazdy  $v_1 = 30$  m/s. Zilustrowano też zależność prędkości krytycznej  $v_{kr}$  od ciśnienia. Prędkość krytyczna została określona w punkcie ekstremum funkcji 2.31.

W niniejszej analizie opona została opisana w uproszczeniu modelem belki Bernoulliego–Eulera. Część zjawisk została świadomie pominięta. Pominięto np. wpływ obciążenia pojazdu, zaniedbano zjawiska tarcia. Analiza miała na celu przedstawienie metody analitycznej określania wpływu wybranych parametrów ogumienia na własności trakcyjne, a w szczególności na prędkość propagacji fali bieżącej. W wyniku rozważań analitycznych określono wpływ wybranych parametrów na prędkość propagacji fali bieżącej w oponie. Wykazano, że wzrost ciśnienia powoduje wzrost prędkości krytycznej, a to z kolei wzrost amplitudy fali bieżącej. I tak w przypadku opony pojazdu

osobowego prędkość dopuszczalna podana w indeksie prędkości (symbol T) wynosi 190 km/h. Przy znormalizowanym ciśnieniu 0,2 MPa sprężysta fala bieżąca ma prędkość krytyczną 195 km/h (rys. 2.25). Na tej podstawie należy stwierdzić, że dopuszczalna prędkość określona przez producenta jest prędkością bezpieczną lecz zbyt zbliżoną do wartości, w której powstaje prędkość krytyczna propagacji fali. Zbieżność ta może wynikać z faktu, że modelowanie jest zbyt uproszczone lub przyjęte parametry nie odpowiadają rzeczywistym cechą i własnością materiałów. W przypadku ogumienia pojazdu ciężarowego prędkość fali bieżącej (280 km/h) jest w przybliżeniu 2,3 raza większa niż prędkość dopuszczalna ustalona przez producenta.

Innym parametrem mającym wpływ na prędkość propagacji fali bieżącej jest moduł Younga. Jego wzrost zwiększa prędkość krytyczną. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku momentu bezwładności przekroju. Zwiększenie sztywności materiału opony również wpływa na wzrost prędkości propagacji fali bieżącej. Widoczne jest to w przypadku opony pojazdu ciężarowego, w której, jak już wspomniano wcześniej, sprężysta fala bieżąca ma znacznie większą prędkość od dopuszczalnej prędkości jazdy.

Kolejnym parametrem mającym wpływ na prędkość propagacji fali w oponie jest jej gęstość masy, a dokładniej gęstość masy pasa opony modelowanego belką Bernoulliego–Eulera. Wzrost gęstości masy powoduje nie tylko zmniejszenie prędkości krytycznej fali bieżącej, ale również wzrost siły odśrodkowej i w konsekwencji wzrost siły napinającej pas. Zwiększa to prędkość propagacji fali sprężystej przy wzroście prędkości jazdy. Rozpatrywany model opony stanowi wstępną analizę zachodzących zjawisk i pozwala na ocenę wpływu wybranych parametrów ogumienia pojazdów samochodowych. Porównując otrzymane wyniki z wynikami badań doświadczalnych [39] należy zauważyć ich jakościową zgodność. Analizując wyniki autorów cytowanej pracy nasuwają się następujące wnioski. W miarę wzrostu prędkości obrotowej koła następuje promieniowe zwiększenie wymiaru opony, zwiększające siłę i powierzchnię styku opony z bębniem. Efekt ten powoduje zwiększenie tarcia, a to wywołuje wzrost temperatury opony. Osiągając prędkość krytyczną, przed powierzchnią kontaktu powstają fale o względnie małych amplitudach i małych długościach, znikające szybko wraz ze wzrostem odległości od krawędzi styku. Fale bieżące o większych amplitudach powstają za obszarem kontaktu z podłożem. Amplitudy tych fal maleją w miarę zwiększania odległości od punktu styku. Wzrost prędkości jazdy zwiększa wartość amplitud i długości fal. Wówczas temperatura opony rośnie, a to może prowadzić do zniszczenia opony.



W rozdziale wykazano, że w trakcie toczenia się koła występują zjawiska dynamiczne, wpływające mocno na chwilowy stan sił w strefie kontaktu, a w ślad za tym na trwałe deformacje i zużycie powierzchni tocznych w formie falistych ubytków lub trwałych odkształceń.

# Rozdział 3

## Przegląd literatury

Rozdział niniejszy zawiera przegląd prac i teorii dotyczących procesu tarcia suchego oraz tarcia tocznego.

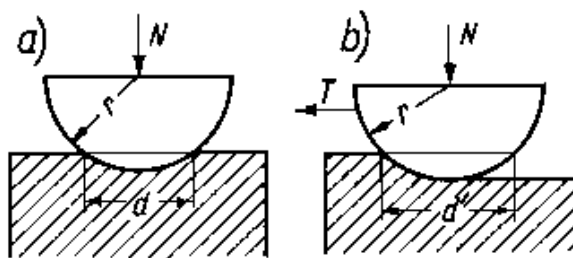
Teorie tarcia dotyczą zjawisk zachodzących na powierzchni kontaktu między dwoma ciałami i wynikają ze złożonej natury procesu. Siły tarcia można również traktować jako siły przeciwdziałające ruchowi, niezależnie od przyczyn, które je powodują. Na gruncie procesów tarcia suchego, zaliczanego do teorii tarcia kinetycznego ciał stałych, powstały hipotezy, z których istotne zostaną przedstawione i omówione poniżej.

### 3.1 Klasyczne prawa tarcia

Tarcie jest złożonym procesem fizycznym obejmującym zespoły różnorodnych zjawisk, zależnych od parametrów powierzchni pary ciernej, warunków, w jakich odbywa się proces, jego kinematyki i dynamiki oraz, co jest dosyć istotne, własności trących się elementów (ciał w kontakcie ciernym). Ze względu na dużą liczbę zmiennych parametrów, od których zależy proces tarcia, nie udało się dotąd opisać zjawiska ogólnym prawem. Wiadomo, że zewnętrzne tarcie suche ma miejsce na niesmarowanych powierzchniach ciał stałych, które podczas kontaktu przemieszczają się względem siebie.

Pierwszych prób tworzenia prawa tarcia podjął się w XVI wieku Leonardo da Vinci. Na podstawie badań przeprowadzonych w 1508 roku [75] za pomocą zwiniętej w zwój liny, którą rozciągał pod wpływem przyłożonej siły, sformułował tezę, iż ciała o bardzo gładkiej powierzchni charakteryzują się mniejszym oporem tarcia. Teza ta, niestety, ogranicza się tylko do wąskiej grupy materiałów.

W zależności od tego co uznamy za zjawisko wiodące w modelu tarcia, możemy



Rysunek 3.1: Model Bowdena do obliczania siły tarcia suchego: a) brak ruchu, b) siła tarcia w ruchu [61].

istniejące teorie i hipotezy podzielić na następujące grupy:

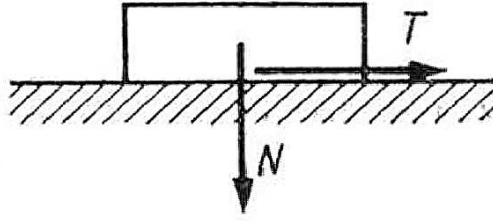
- mechaniczne (Amontonsa, Ernsta i Merchanta, Bowdena, Epifanowa),
- molekularne (Tomlinsona, Dieriagina, Brillouina),
- molekularno-mechaniczne (Amontonsa-Coulomba, Kragielskiego).

Bowden zaproponował teorię opartą na hipotezie, która uwzględnia charakter plastyczny odkształceń rzeczywistej powierzchni styku trących się elementów stałych. Na podstawie otrzymanych wyników badań wysunął hipotezę, że wartość współczynnika tarcia oraz charakter uszkodzeń powierzchniowych, powstałych przy tarcu ślizgowym, są określone głównie względnymi wartościami własności fizycznych trących się powierzchni ciał stałych. Charakter ich oddziaływania zależy od stosunku twardości, a przy dużych wartościach pracy sił tarcia również od temperatury obszarów styku, uzależnionej od obciążenia, twardości oraz od temperatury topnienia trących się materiałów.

Przy ślizganiu się twardego ciała o kształcie półkulistym po powierzchni płaskiej metalu o znacznie mniejszej twardości i obciążonego siłą normalną  $N$ , na początku procesu następuje zagłębienie ruchomej próbki w materiał przeciwpróbki (rys. 3.1a) i zwiększenie powierzchni rzeczywistego styku. Jeśli powierzchnia rzeczywistego kontaktu jest tak duża, iż przy zadanym obciążeniu dalsze odkształcenie plastyczne już nie następuje, wówczas pole rzutu powierzchni styku  $S$  na płaszczyznę jest wyrażone poniższą zależnością

$$S = N/R_e, \quad (3.1)$$

gdzie  $R_e$  jest granicą plastyczności materiału o mniejszej twardości.



Rysunek 3.2: Rozkład sił wg Amontonsa.

Bowden przyjął uproszczenie, mówiące że powierzchnia styku jest idealnie gładka, a rzeczywista powierzchnia styku jest równa nominalnej powierzchni styku. Uzasadnienie takiego założenia wynika z faktu, że chropowata powierzchnia ruchomej próbki ma zakończenia występow także w kształcie półkulistym (rys. 3.1 b). Siła tarcia według Bowdena i Tabora składa się z siły  $P_s$  niezbędnej do ścięcia powstających metalicznych połączeń i siły  $P_w$ , potrzebnej do stworzenia zagłębienia w miękkim metalu

$$T = P_s + P_w, \quad (3.2)$$

gdzie:

$P_s$  – siła ścinania metalicznych połączeń,  $P_s = S \cdot t_{pt}$ ,

$t_{pt}$  – wytrzymałość na ścinanie metalicznych połączeń w kierunku stycznym do płaszczyzny tarcia,

$S$  – pole rzutu powierzchni styku na płaszczyznę,

$P_w$  – siła wyciskania bruzdy w miększym metalu,  $P_w = S_w \cdot p_w$ ,

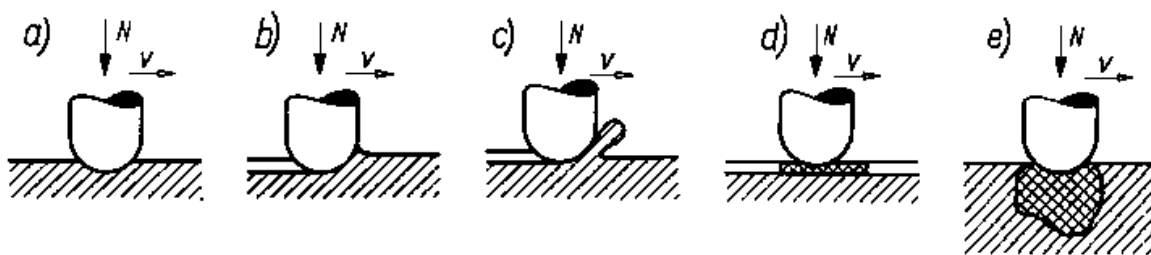
$S_w$  – przekrój poprzeczny bruzdy tarcia,

$p_w$  – średni jednostkowy opór wywołany wyciskaniem metalu.

W 1699 roku francuski fizyk Amontons sformułował prawo tarcia suchego na podstawie badań doświadczalnych [1]. Zaproponowana przez niego teoria mówiła, że siła tarcia jest proporcjonalna do siły normalnej, działającej prostopadle do powierzchni styku ciał trących (rys. 3.2), z bezwymiarowym współczynnikiem proporcjonalności  $\mu$ , niezależnym od obciążenia [100]

$$T = \mu N. \quad (3.3)$$

Amontons stwierdził, że siła tarcia zależy od nacisku jednostkowego, czasu i prędkości ślizgania przy tarcu ruchowym. Prawo to zakłada, że trące się ciała są idealnie sztywne i dlatego nie obowiązuje ono przy materiałach plastycznych i półplastycznych.



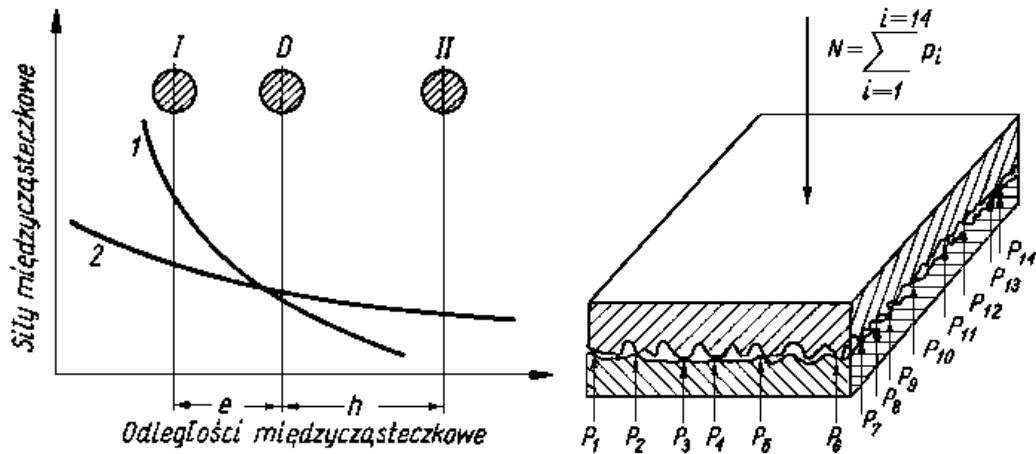
Rysunek 3.3: Modele styku trących się powierzchni.

W przypadku takich materiałów wpływ obciążenia zewnętrznego wywołuje odkształcenia plastyczne stykających się nierówności (rys. 3.3), a zatem rośnie powierzchnia rzeczywistego styku i siły adhezji zwiększają wartość współczynnika tarcia, czego nie uwzględnia wzór Amontonsa.

W XVIII wieku mechaniczna teoria tarcia suchego według Amontonsa została zmodyfikowana przez jego rodaka, Coulomba. Coulomb poszerzył formułę Amontonsa o poprawkę  $A$ , która uwzględniała molekularne oddziaływanie podczas tarcia (szczepność) powierzchni trących się ciał.

$$T = \mu N + A. \quad (3.4)$$

Autor przyjął wartość parametru  $A$  jako stałą w przypadku płaskich powierzchni, nie uzależniając jej od wartości nacisku normalnego ani od jakości powierzchni styku. Nie uwzględnił faktu, że parametr  $A$  zależy od stopnia zbliżenia powierzchni trących i od wartości pola styku. Po przeprowadzeniu dalszych badań, w pracy z 1809 roku Coulomb zaobserwował, że siła tarcia statycznego zależy od czasu przylegania współpracujących powierzchni. Tomlinson w 1929 roku po przeprowadzonych badaniach eksperymentalnych wysunął teorię, że tarcie jest rezultatem molekularnego oddziaływania powierzchni trących się ciał. Trące się powierzchnie są chropowate. Z tego powodu poszczególne punkty materialne tych powierzchni będą w różnych odległościach od siebie. Jedne cząsteczki ciał będą się przyciągały, a inne odpychały. Tylko w pewnych przypadkach siły przyciągające będą dominować i między ciałami będzie zachodzić „sklejenie”. Według teorii Tomlinsona, suma sił przyciągających jest mała i można ją pominąć. Obciążenie normalne  $N$  jest zrównoważone siłami odpychania (rys. 3.4) [61].



Rysunek 3.4: Modele Tomlinsona działania sił międzycząsteczkowych (1 – siły odpychające, 2 – siły przyciągające) oraz równoważenia siłami odpychającymi obciążenia normalnego [61].

$$N = \sum_{i=1}^{14} P_i, \quad (3.5)$$

gdzie  $P_i$  jest jednostkową siłą odpychającą między cząsteczkami.

Przy przesuwaniu jednego ciała względem drugiego siły odpychania przechodzą w siły przyciągania, a te ostatnie przeciwstawiają się ślizganiu. Przy ślizganiu jedne cząsteczki odrywają się od drugich, wychodzą ze strefy odpychania, a inne wstępują w te strefy. Ta ciągła zmiana par cząsteczek i tworzenie się nowych wiązań molekularnych powoduje rozproszenie energii  $E$ . Zależność współczynników tarcia według teorii Tomlinsona przyjmuje postać:

$$\mu = kE/npx, \quad (3.6)$$

gdzie:

$k$  – liczba stykających się par cząsteczek,

$E$  – średnia energia zużyta na rozerwanie pary cząsteczek,

$n$  – liczba par cząsteczek,

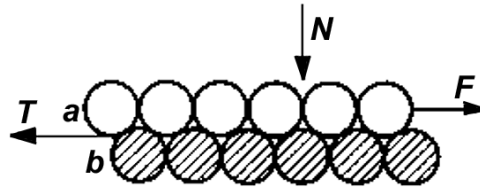
$p$  – siła odpychająca,

$x$  – jednostka drogi.

Z zależności (3.6) wynika, że wartość współczynnika tarcia jest wprost proporcjonalna do średniej wartości energii, którą wydatkowano na rozerwanie pary cząstek, a odwrotnie proporcjonalna do iloczynu siły odpychania i odległości poszczególnych par

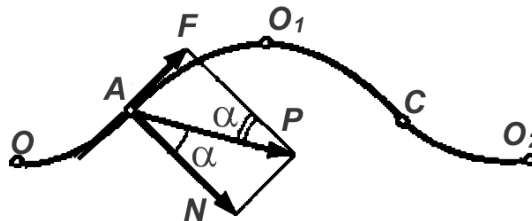
cząsteczek. Podejście Tomlinsona przeczy prawu Amontonsa-Coulomba, które wyraża niezmiennosc współczynnika tarcia przy zmianie nacisku jednostkowego.

Deriagin przyjął w swojej teorii, że tarcie jest związane z molekularną chropowatością ciała, zależną od struktury materiału. Struktura i ułożenie atomów w czasie ruchu jednego ciała po drugim nie zmieniają się i dlatego proces tarcia można przedstawić jako pokonywanie chropowatości molekularnej. Rysunek 3.5 ilustruje idealne położenie atomów w płaszczyźnie kontaktu dwóch ciał.



Rysunek 3.5: Modele przedstawiający chropowatość molekularną [61].

Na rysunku 3.6 pokazany jest schematycznie molekularny mechanizm tarcia. Ciało górne pod działaniem obciążenia  $N$  (rys. 3.5) zajmuje ustalone położenie, przy którym jego środek ciężkości jest położony najbliżej punktu  $A$ . Oddziaływanie siły  $F$  wywołuje



Rysunek 3.6: Siły według Deriagina podczas tarcia w obszarze styku atomów [61].

zmianę położenia ciała górnego w nową lokalizację, a jego środek ciężkości podczas pokonywania chropowatości molekularnej wykonuje ruch po krzywej  $AO_1C$  (rys. 3.6). Wychodząc z warunku równowagi otrzymujemy zależność (np. w punkcie  $A$ )

$$\frac{F}{N} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.7)$$

Jeśli  $F/N = \operatorname{tg} \alpha_{max}$ , gdzie  $\alpha_{max}$  jest maksymalnym kątem pochylenia stycznej do linii  $AO_1C$ , wówczas

$$\frac{F}{N} = \operatorname{tg} \alpha_{max} = \mu, \quad (3.8)$$

gdzie  $\mu$  jest statycznym współczynnikiem tarcia.

Jeżeli  $F/N \geq \text{tg } \alpha_{max}$ , wówczas równowaga będzie zachwiana i rozpocznie się poślizg ciała górnego po dolnym. Uwzględniając siły adhezji w czasie poślizgu, możemy siłę tarcia zapisać relacją (3.9), w której  $N_0$  oznacza siły przyciągania molekularnego

$$T = (N + N_0) \cdot \mu. \quad (3.9)$$

Po przekształceniu, obliczeniowy współczynnik tarcia przyjmnie postać

$$\mu_0 = \frac{T}{N} = \mu \left(1 + \frac{N_0}{N}\right), \quad (3.10)$$

gdzie  $\mu$  jest rzeczywistym stałym współczynnikiem tarcia.

Siły przyciągania molekularnego  $N_0$  mogą mieć wartość rzędu  $N$  przy małym obciążeniu. W przypadku dużych obciążeń, a więc i przy dużych rzeczywistych powierzchniach styku wartość  $N_0$  wzrasta proporcjonalnie w miarę zwiększania rzeczywistej powierzchni styku.

Zakładając, że  $N_0 = p_0 \cdot S_r$  można wzór (3.9) opisujący siłę tarcia  $T$  przedstawić w następującej postaci:

$$T = \mu(N + p_0 \cdot S_r), \quad (3.11)$$

gdzie:  $p_0$  – jednostkowa siła przyciągania molekularnego,  $S_r$  – rzeczywista powierzchnia styku, zmienna wraz ze zmianą obciążenia  $N$  (rys. 3.5).

W hipotezie Deriagina uwzględnione są siły przyciągania międzyatomowego, które są uzasadnione w przypadku tarcia płytek wzorcowych (przy dużej gładkości powierzchni). Brak jest uwzględnienia własności fizycznych materiału trących się powierzchni oraz ich niszczenia przez ścieranie, szepienie, odkształcenie lub nierówności. W rzeczywistości niszczenie powierzchni trących zmienia gładkość, a tym samym zaburza założenia Deriagina.

Zależność współczynnika tarcia od nacisku udowodnił, po przeprowadzeniu badań, Rennie [91], a Conti w pracy [42] wykazał zależność współczynnika tarcia od prędkości ruchu względnego. Relację tę potwierdził również badacz rosyjski Pietrow [87]. Kragielski [73] oprócz powyższych związków dowiódł również, że współczynnik tarcia zależy od chropowatości powierzchni i wartości pola nominalnej powierzchni styku elementów będących w kontakcie.

Do mechanicznych teorii tarcia suchego zalicza się również teorię Bowdena i Tabora [32]. Autorzy swoją teorię oparli na założeniu uwzględniającym plastyczne odkształ-



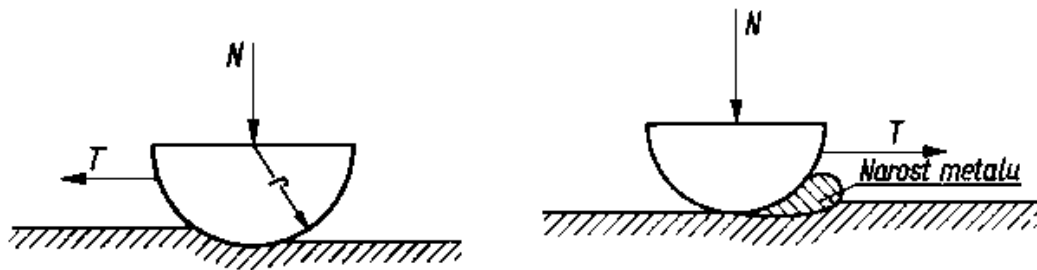
cenie rzeczywistej powierzchni styku trących się ciał. Teoria ta mówi o tworzeniu i zrywaniu szczepień występujących na powierzchni styku. Opory tarcia równe są wówczas sumie oporów ścinania nierówności i przepychania odkształconego materiału (rys. ??).

Teorię Bowdena i Tabora rozwinął Epifanow, który założył, że ścięcie metalu przy przesuwaniu jednej powierzchni po drugiej następuje nie tylko w punktach rzeczywistego styku, lecz także na powierzchni  $S_o$ , kilkakrotnie przekraczającej sumaryczną powierzchnię rzeczywistego styku. Przed przednią częścią suwaka tworzy się narost metalu, a ślizganie zachodzi nie w rzeczywistej płaszczyźnie styku suwaka i próbki płaskiej, lecz wewnątrz próbki (rys. 3.7). Wielkość rzeczywistej powierzchni ścięcia można określić badając szerokość i głębokość bruzdy powstałej w wyniku tarcia [61, 46]. Badania te doprowadziły do powstania klasycznych praw tarcia ujętych przez Moore'a w następujący punktach:

- siła tarcia  $F$  jest proporcjonalna do siły nominalnej  $N$ ,
- siła tarcia nie zależy od nominalnej powierzchni styku określonej przez wymiary nominalne,
- współczynnik tarcia statycznego jest większy niż tarcia kinetycznego  $\mu_s > \mu_k$ ,
- współczynnik kinetyczny tarcia zależy od prędkości względnej poślizgu,
- siła tarcia podczas poślizgu ma ten sam kierunek co wektor prędkości względnej, a zwrot przeciwny.

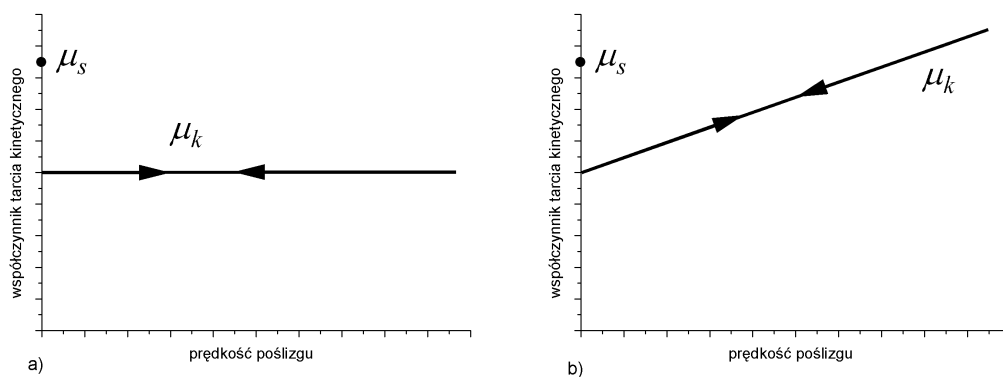
Z biegiem lat i dzięki kolejnym badaniom okazało się, że niektóre z powyższych praw mają wady. Moore na podstawie swoich dalszych badań eksperymentalnych dowiódł, że w przypadku materiałów sprężystych i lepkosprężystych niepoprawne jest założenie braku zależności siły tarcia od normalnej powierzchni styku.

We współczesnej wiedzy o tarcu można wyróżnić dwa podstawowe nurty, którym początek dały prace Bowdena i Tabora oraz Kragielskiego. Powstały również inne teorie, na przykład Rabinowicza [90], podkreślająca rolę energii powierzchniowej, czy Rubinsteina, zbudowana na zjawisku adhezji, w której proponuje się prawa deformacji nierówności powierzchni. Inni badacze uwzględniają pracę plastyczną wykonaną w polu bliskim powierzchni kontaktu. Michałowski i Mróz analizowali mechanizmy działające na powierzchni kontaktu, wykorzystując analogię z prawami płynięcia plastycznego [79]. Badania dotyczyły również uproszczonych modeli, w których ciała przyjęto jako



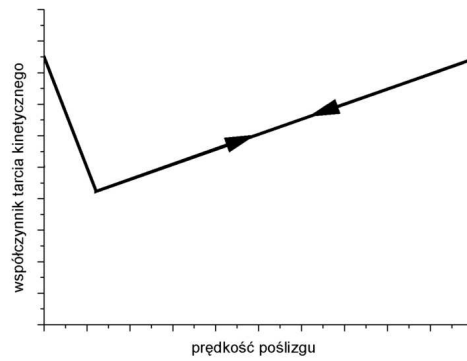
Rysunek 3.7: Zagiębanie i przesuwanie narostu metalu podczas ruchu elementu — model Epifanowa [61].

bryły sztywne, a siły tarcia traktowano jako przeciwdziałające względnemu ruchowi ciał w kontakcie, zależnie od prędkości względnej.

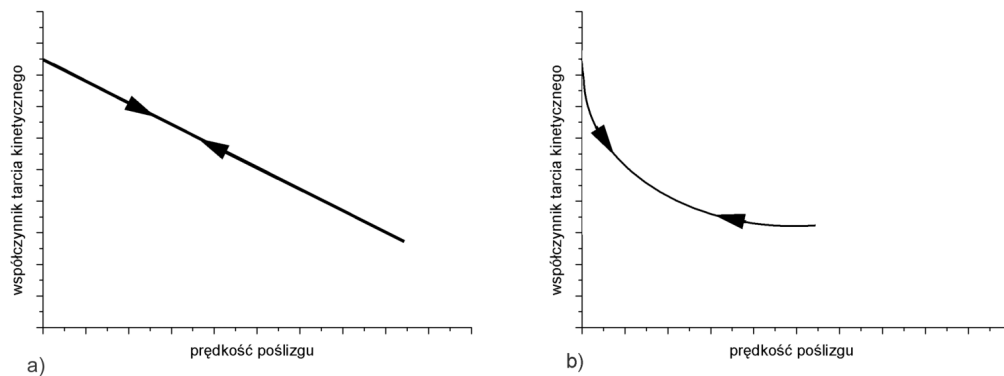


Rysunek 3.8: Modele tarcia suchego.

Wielu badaczy zajmujących się tematyką tarcia wykazało zależność siły tarcia od prędkości ruchu względnego [82], budując na podstawie tych założeń modele tarcia w dużym stopniu odbiegające od siebie. Przedstawione są one na rysunkach 3.8, 3.9, 3.10, 3.11. Przebiegi te ilustrują modele tarcia w różnych eksperymentach. Na wykresach (rys. 3.8) wartości współczynnika tarcia statycznego są większe od wartości współczynnika tarcia kinetycznego. W przypadku modelu pokazanego na rysunku 3.8a założono również brak zmiany współczynnika tarcia kinetycznego od prędkości poślizgu. Dzięki takiemu założeniu zdefiniowano uogólniony model Coulomba [89]. Derjaguin (rys. 3.8b) przyjął założenie rosnącego współczynnika tarcia wraz ze wzrostem prędkości poślizgu. Model, którego charakterystykę tarcia ilustruje wykres na rysunku 3.9 podany przez Brockleya [33], prezentuje dwustanowy współczynnik tarcia. Odmienne modele (rys. 3.10) zaproponowali inni badacze [16]. W przypadku pierwszym na wykresie a współczynnik tarcia malał liniowo, w drugim (rys. 3.10b) malał kwadratowo.



Rysunek 3.9: Model tarcia zaproponowany przez Brockleya.

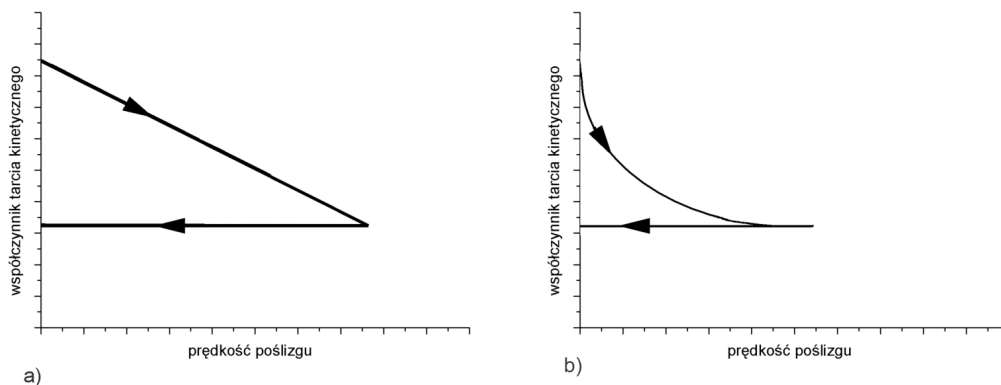


Rysunek 3.10: Przebiegi tarcia suchego.

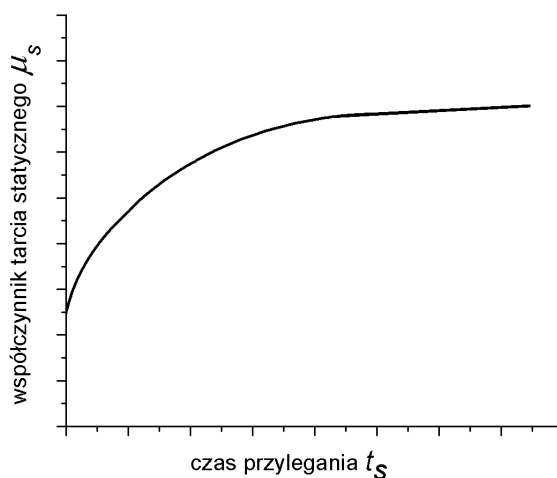
Po przeprowadzeniu kolejnych badań, Bell i Burdekin uzyskali model o charakterystyce tarcia w postaci pętli złożonej odcinkami liniowo (rys. 3.11a). Bardzo podobną pętlę analizowali Bo i Pavelescu [17] (rys. 3.11b). Różnica polegała na tym, że współczynnik tarcia kinetycznego malał wzdłuż paraboli przy wzroście prędkości poślizgu, natomiast w fazie opóźnienia miał stałą wartość, tak jak w przypadku modelu Bella i Burdekina. Po zapoznaniu się z kilkoma powyższymi modelami widać znaczące różnice w przebiegach charakterystyk współczynników tarcia kinetycznego różnych autorów.

Bardzo dobrą zgodność wyżej wymienieni badacze uzyskali przy przebiegu charakterystyki zmiany współczynnika tarcia statycznego od wartości czasu przylegania ciała do podłoża [90, 33, 45]. We wszystkich przebadanych przypadkach obserwowali jakościowo zgodne zjawisko wzrostu tarcia statycznego w miarę zwiększania czasu przylegania (rys. 3.12).

W 1991 roku Sikora [99] przeprowadził badania przyjmując inne modele tarcia. Charakterystyki tarcia analizowanych przez niego modeli zilustrowane są na rysunkach 3.8÷3.11. Przedstawiają one odcinkami liniowe zależności kinetycznej siły tarcia  $F$  od



Rysunek 3.11: Modele tarcia suchego a) Bella i Burdekina, b) Bo i Pavelescu.



Rysunek 3.12: Tarcie statyczne zależne od czasu przylegania.

prędkości względnej  $w$ . Do własnych badań autor przyjął bezwymiarowe wielkości:

$$w = \dot{x} - s, \quad \dot{x} = dx/dt, \quad x = KX/F_0, \quad s = S(\sqrt{KM})/F_0, \quad f = F/F_0, \quad (3.12)$$

gdzie:

$x$  – przemieszczenie bezwzględne ciała o masie  $M$ ,

$\dot{x}$  – prędkość bezwzględna ciała o masie  $M$ ,

$S$  – prędkość unoszenia ciała o masie  $M$ ,

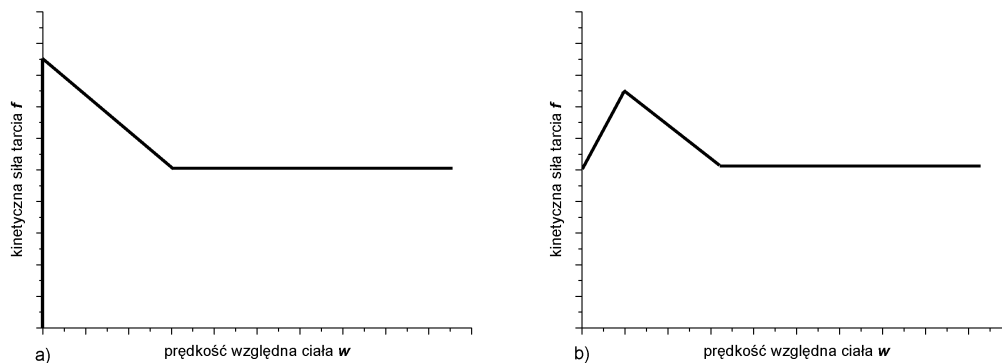
$w$  – prędkość ruchu względnego ciała,

$F_0$  – wybrana jednostka siły (ciężar ciała lub siła normalna),

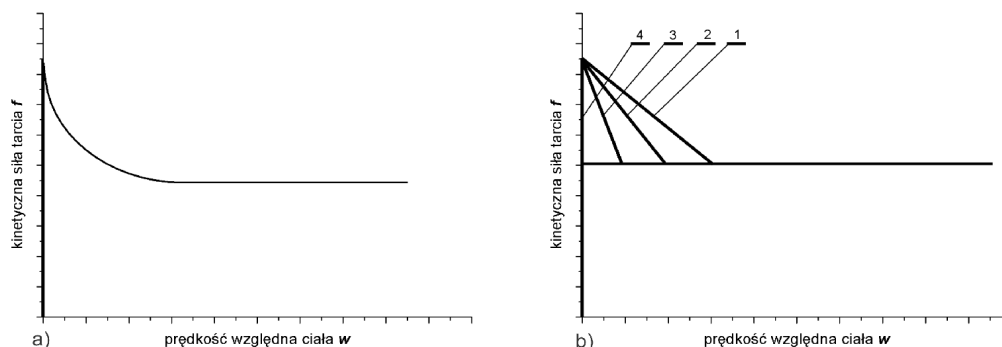
$K$  – sztywność układu,

$X$  – przemieszczenie.

Na podstawie badań doświadczalnych par ciernych stal–żeliwo i żeliwo–żeliwo, Brockley i Ko [34] przyjęli model przedstawiony na rysunku 3.13b.



Rysunek 3.13: Tarcia suche opisywane liniowymi odcinkami.



Rysunek 3.14: Liniowe modele tarcia suchego a) model wg Barwela, b) cztery inne modele tarcia (1÷4).

Barwel [14] dobrał zależności kinetycznej siły tarcia od prędkości względnej (3.13) na podstawie wyników badań doświadczalnych i opisał je funkcją:

$$f = c(w)^{-1/2}. \quad (3.13)$$

Charakterystyka tarcia opisująca ten model pokazana jest na rysunku 3.14a.

Charakterystyka tarcia zilustrowana na rysunku 3.14b przedstawia przypadki modeli biliniowych, o różnych kątach nachylenia odcinków liniowych opadającej charakterystyki tarcia.

Kolejny model tarcia (rys. 3.15) podobny jest do modelu Bella i Burdekina (rys. 3.8a). Różni się jednak sposobem określenia statycznej siły tarcia. Siłę tę opisuje zależność

$$F_s = F_0 + A \cdot \exp\left(-\Gamma \frac{dP}{d\tau}\right), \quad (3.14)$$

gdzie:  $P$  – siła działająca na masę,  $A$  – pole powierzchni kontaktu,  $dP/d\tau$  – prędkość zmiany siły działającej na masę,  $\Gamma$  i  $F_0$  – stałe, oraz

$$P = KS\tau + P_0, \quad (3.15)$$

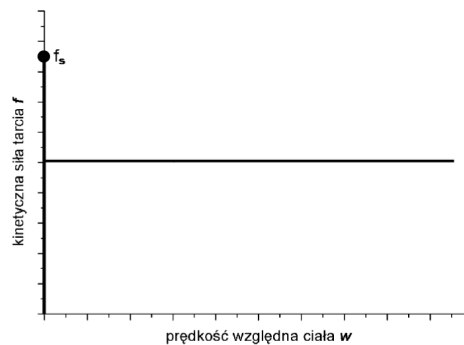
gdzie:  $P_0$  – wstępna siła działająca na masę,  $K$  – sztywność sprężyny,  $S$  – prędkość unoszenia,  $\tau$  – czas.

Uwzględniając wielkości bezwymiarowe (3.12) i zależność (3.14) definiującą tarcie statyczne otrzymujemy postać następującą, opisującą statyczną wartość siły tarcia  $f_s$

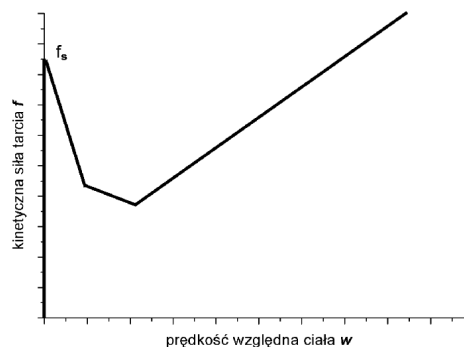
$$f_s = f_0 + f_a \cdot \exp(\gamma s). \quad (3.16)$$

gdzie:  $s$  – bezwymiarowa prędkość unoszenia,  $f_0$ ,  $f_a$  i  $\gamma$  – stałe bezwymiarowe.

Model tarcia w postaci równania (3.16) był badany i analizowany przez Vatta [107]. Rys. 3.15 pokazuje przyjęty przez niego model tarcia, z uwidocznioną wartością statycznej siły tarcia  $f_s$ . Przykładowe wartości parametrów, to:  $f_0 = 1,5$ ,  $f_a = 0,5$ ,  $\gamma = 3$ .



Rysunek 3.15: Liniowy model tarcia według Vatta.



Rysunek 3.16: Przebieg odcinkami liniowego modelu tarcia suchego.

Wykres na rysunku 3.16 pokazuje model, w którym statyczna siła tarcia opisywana jest równaniem (3.16). Z przebiegu charakterystyki widać, iż w chwili zerwania adhezji na powierzchni oddziałujących ciał występuje zmiana nachylenia pewnej części trajektorii tarcia. Ten model tarcia często stosowany jest w analizie numerycznej par ciernych stal – stal.

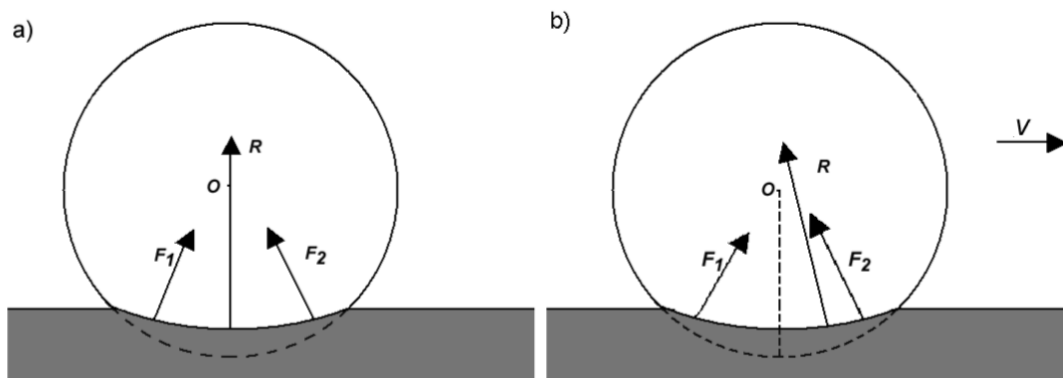
Z przedstawionych powyżej charakterystyk zaczerpniętych z literatury wynika, że istnieje duże zróżnicowanie modeli opisujących zależność współczynnika tarcia kinetycznego od prędkości poślizgu (rys. 3.8, 3.9, 3.10, 3.11) lub kinetycznej siły tarcia od prędkości względnej (rys. 3.13, 3.14, 3.15). Zależnie od modelu mogą przyjmować postać: funkcji monotonicznej, funkcji stałej, funkcji niejednoznacznej, funkcji zależnej od znaku przyspieszenia przedziałami lub w całym zakresie zmian prędkości. Różnice w modelach pokazanych powyżej dowodzą złożoności zjawiska tarcia, zależnego w dużym stopniu od badanych materiałów oraz zróżnicowanej budowy stanowisk eksperymentalnych.

## 3.2 Tarcie toczne

Wynalezienie koła było jednym z największych osiągnięć ludzkości, z którego korzystamy w otaczającej nas rzeczywistości. Toczenie koła nie występowałoby bez udziału tarcia. To właśnie tarcie umożliwia toczenie koła po nawierzchni.

Pierwsze podstawowe badania tarcia przy swobodnym toczeniu przeprowadził irlandzki inżynier O. Reynolds w 1875 roku [92]. Wykazał on, że metalowy walec toczący się po gumowym podłożu przebywa podczas jednego obrotu odległość mniejszą od jego obwodu. Przypisał to poślizgowi między walcem a gumą. Przyjął, że ten nieznanый poślizg wywołuje opór przeciwko toczeniu. Ten rodzaj poślizgu nazwano na jego cześć poślizgiem Reynoldsa.

Istnienie sił tarcia poślizgowego utrudnia przesuwanie jednego ciała po drugim, przyhamowując je. Niestety, bez ich udziału nie wystąpi toczenie, ponieważ to moment siły tarcia wywołuje ruch obrotowy. Z drugiej strony toczenie ciała jest hamowane przez tarcie toczne, o zupełnie innej naturze. Tarcie toczne istnieje w punktach styku, w których odkształcenie sprężyste materiału wywołuje styk strefowy w pewnym obszarze. W strefie styku występuje tarcie ślizgowe zewnętrzne na granicy styku oraz wewnętrzne w odkształcanej objętości warstwy wierzchniej trących się ciał. Dlatego pojawienie się tarcia tocznego uzależnione jest od odkształcenia powierzchni, po której toczy się koło oraz samej powierzchni toczącego się koła. Zjawisko toczenia ilustruje schematyczny rysunek 3.17. Schemat sił na rysunku 3.17a przedstawia sytuację, kiedy tarcie toczne nie występuje. Idealnie sprężyste koło toczące się po sprężystym podłożu wywołuje symetryczne odkształcenia. Z tego powodu pojawiają się wypadkowe siły  $F_1$ ,

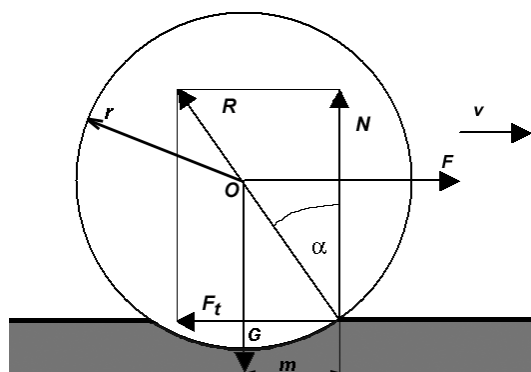


Rysunek 3.17: Rozkład sił między kołem i podłożem a) bez tarcia, b) z tarcie.

$F_2$ , działające na obie stykające się z podłożem strefy kontaktowe koła. Siły te mają równe wartości i działają symetrycznie względem pionowej płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu koła. Z sił tych powstaje wypadkowa siła reakcji  $R$  podłoża na nacisk, przechodząca przez oś obrotu. W takim przypadku moment siły  $R$  jest równy zero i nie zmienia prędkości obrotowej toczącego się ciała. W rzeczywistości nie istnieją idealnie sprężyste odkształcenia. W takim przypadku siły reakcji podłoża  $F_2$  od strony na którą naciera toczące się ciało, są większe od siły  $F_1$  i nie działają symetrycznie (rys. 3.17b). Z tych powodów wypadkowa siła  $R$  nie przechodzi przez oś obrotu i wywiera na toczące się ciało niezerowy moment siły. Moment ten zmniejsza prędkość kątową, a więc prędkość toczenia się ciała. Przy ruchu posuwistym hamujący wpływ na ruch ma siła wynikająca z nacisku ciała na podłoże, natomiast podczas toczenia istotne znaczenie ma moment siły związany z reakcją  $R$ .

W rzeczywistości powierzchnia styku z podłożem po którym toczy się koło jest na ogół mała. Dlatego siła  $R$  jest niemal pionowa. Kąt  $\alpha$  między nią a pionem ma wartość bliską zero,  $\alpha \approx 0$ . Na rysunku 3.18 przedstawiony jest rozkład sił z kątem  $\alpha$  o przesadnie dużej wartości, by lepiej zilustrować zachodzące w zjawisku relacje sił. Toczące się koło zgniata materiał podłoża, który stawia opór w strefie styku. Reakcja normalna  $N$ , równoważąca siłę normalną obciążającą koło, jest przesunięta w kierunku ruchu koła od jego osi symetrii o pewną wartość  $m$ . Oprócz siły normalnej istnieje również reakcja pozioma  $F_t$ , wywołana siłą ciągnącą  $F$ , której moment powoduje hamowanie ruchu obrotowego. W przypadku bardzo małego tarcia tocznego, gdy koło toczy się pod wpływem siły  $F$ , momenty sił  $F_t$  i  $N$  muszą być równe (toczenie nie jest hamowane).





Rysunek 3.18: Rozkład sił między kołem i podłożem w przypadku toczenia wywołanego zewnętrzną siłą ciągnącą  $F$ .

Moment siły tarcia  $F_t$  wynosi:

$$M_{F_t} = F_t \cdot r \cdot \cos \alpha = F_t \cdot r \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \approx F_t \cdot r. \quad (3.17)$$

Ponieważ kąt  $\alpha$  w porównaniu do kąta  $90^\circ$  jest mały i można go zaniedbać, a  $\sin 90^\circ = 1$ , to moment siły  $N$  wynosi:

$$M_N = N \cdot r \cdot \sin \alpha = N \cdot m. \quad (3.18)$$

Porównując oba momenty  $M_N$  i  $M_{F_t}$  otrzymamy zależność opisującą siłę tarcia:

$$F_t = m \cdot \frac{N}{r}. \quad (3.19)$$

Współczynnik tarcia tocznego  $m$  jest liczbowo równy połowie długości strefy styczności z podłożem toczącego się koła. Fizycznie określić go można jako ramię działania składowej pionowej  $N$  momentu siły reakcji  $R$  nacisku koła na drogę. Ramię to równe jest  $m = r \cdot \sin \alpha$ . Wartość współczynnika tarcia tocznego zależy od własności sprężysto–plastycznych materiałów oraz wartości obciążenia [30, 56]. Współczynnik ten ma wymiar długości i jest podawany w metrach. Siła tarcia tocznego może zależeć od wielkości odkształcenia toczącego się koła i powierzchni po której się toczy, oraz promienia koła [64, 63]. Wartość obliczeniowego współczynnika tarcia tocznego w zastosowaniach technicznych mieści się w przedziale  $(0, 0005 \div 0, 05)$ .

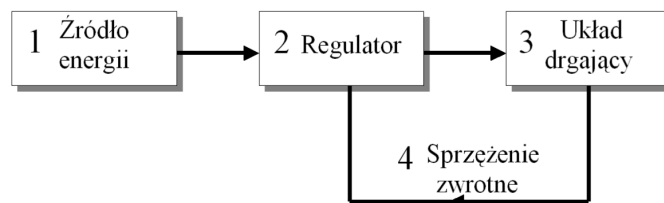
# Rozdział 4

## Drgania wywołane tarciem

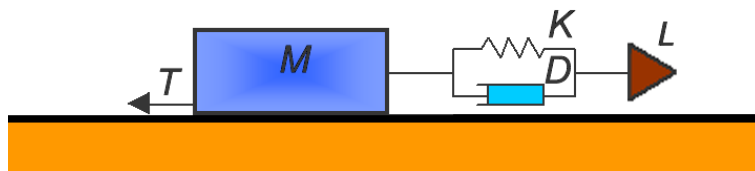
### 4.1 Opis zjawiska

Zjawisko drgań samowzbudnych wywołanych tarciem suchym jest szeroko opisane w literaturze. Napisano wiele prac, w których dokładnie wyjaśniono mechanizm jego powstawania oraz szczegółową analizę.

Drgania samowzbudne występują w układach, w których pojawia się dopływ energii z zewnątrz, powodujący ich narastanie lub kompensujący tylko straty i podtrzymujący drgania okresowe. Sposób dopływu energii w takim przypadku jest regulowany przez sam układ drgający. Ogólnie układ generujący drgania samowzbudne można przedstawić według schematu blokowego przedstawionego na rys. 4.1. Może on opisywać model drgań samowzbudnych w przypadku gdy element 3 będzie nieliniowy, natomiast 1 i 2 mogą być liniowe. Dzięki istnieniu sprzężenia zwrotnego, w układzie zachodzi dwustronne wzajemne oddziaływanie między elementem regulacyjnym i układem drgającym. Umożliwia to powstanie niezanikających drgań okresowych, pomimo strat zachodzących w układzie.



Rysunek 4.1: Schemat blokowy przedstawiający elementy układu samowzbudnego.



Rysunek 4.2: Schemat ciała  $M$  przesuwanego po podłożu.

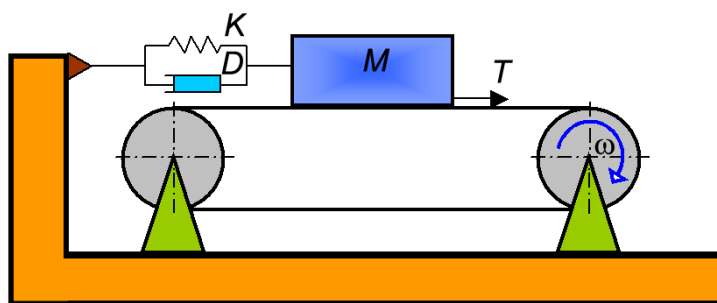
## 4.2 Badane samowzbudności – przypadki literaturowe

Pierwsze drgania samowzbudne wywołane tarciem zostały zaobserwowane i opisane już w XIX wieku [42]. Zauważono charakterystyczną prawidłowość związaną z tarciem, sprzyjającą powstawaniu drgań samowzbudnych przyleganie–poślizg. Stwierdzono, iż maksymalna siła tarcia podczas zerwania przylegania jest większa niż w czasie poślizgu przy bardzo małej prędkości względnej.

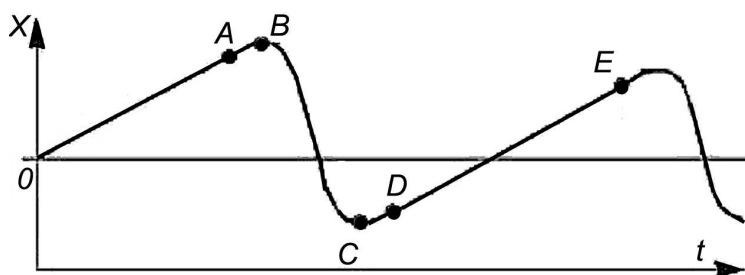
Z biegiem lat kolejni naukowcy przeprowadzali badania drgań samowzbudnych generowanych tarciem. Leben, Bowden i Tabor [32, 29, 31] analizowali przypadek drgań samowzbudnych w układach mechanicznych. Zastosowali do badań model eksperymentalny, składający się ze sztywnego pojedynczego ciała spoczywającego na podłożu. Ciało to było ciągnięte za pośrednictwem cięgna lepkosprężystego, opisanego modelem Voigta (rys. 4.2), przymocowanego do elementu  $L$ , który przesuwany był ze stałą prędkością.

Drgania samowzbudne ciała o masie  $M$  powstawały w wyniku przemieszczenia elementu  $L$  oddziałującego na cięgno. W miarę wzrostu przemieszczenia, napięcie sprężyny zwiększało swoją wartość do chwili osiągnięcia wartości siły przyczepności (adhezji). Ruch ciała (poślizg) względem podłoża w kierunku ciągnięcia następował wskutek zerwania przyczepności i z udziałem bezwładności masy  $M$ . Po zrównoważeniu się sił ciało ponownie zatrzymywało się i cykl powtarzał się, w miarę przemieszczania elementu  $L$ . Autorzy, jako przyczynę powstawania wspomnianych drgań, przyjęli okresowe zgrzewania w obszarze styku współpracujących powierzchni.

Innym równoważnym modelem eksperymentalnym do badań drgań typu przyleganie–poślizg, był układ z masą  $M$  położoną na taśmie taśmociągu (rys. 4.3). Proces wzbudzenia drgań samowzbudnych w takim modelu przebiegał podobnie jak w poprzednim przypadku. Taśma przesuwając się ze stałą prędkością przemieszczała ciało  $M$ , skutkiem czego było zwiększenie napięcia w cięgnie lepkosprężystym. Gdy napięcie prze-



Rysunek 4.3: Schemat ciała  $M$  na ruchomej taśmie.

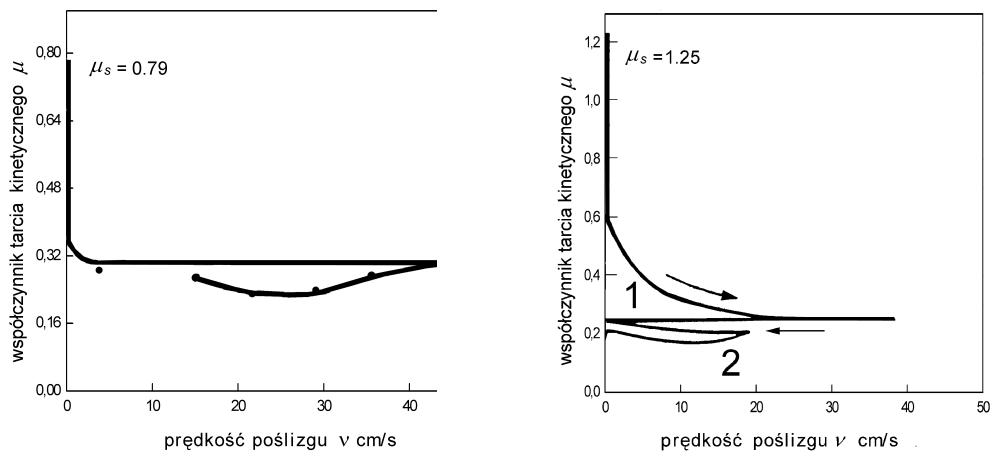


Rysunek 4.4: Przykładowe przemieszczenie ciała podczas drgań samowzbudnych typu przyleganie–poślizg.

kroczyło wartość siły przyczepności, następował poślizg wsteczny (w kierunku przeciwnym do ruchu taśmy). Kolejnym etapem wywołanym przeciwstawnym działaniem siły sprężyny i tarcia kinetycznego było przejście do poślizgu zgodnego (w kierunku poruszającej się taśmy). Poślizg zgodny trwał do momentu osiągnięcia równowagi sił działających na ciało  $M$ , po czym ponownie ruch masy odbywał się bez poślizgu z prędkością taśmy, do chwili kolejnego zerwania adhezji. Przykładowy fragment przebiegu drgań samowzbudnych typu przyleganie–poślizg prezentuje rysunek 4.4.

Ruch w omówionych modelach rzeczywistych przebiega cyklicznie, a powstające drgania samowzbudne zależą w dużym stopniu od własności par ciernych (taśmy, podłoża i ciała o masie  $M$ ), prędkości ruchu względnego i własności cięgna lepkosprężystego (sztywność  $K$  i tłumienie  $D$ )

Badacz amerykański Stoker [102] i rosyjski Babakow [6] również zajmowali się analizą układu o jednym stopniu swobody. W ich badaniach model tarcia charakteryzował się opadającą wartością współczynnika tarcia, pomiędzy drgającą masą a ruchomą taśmą.

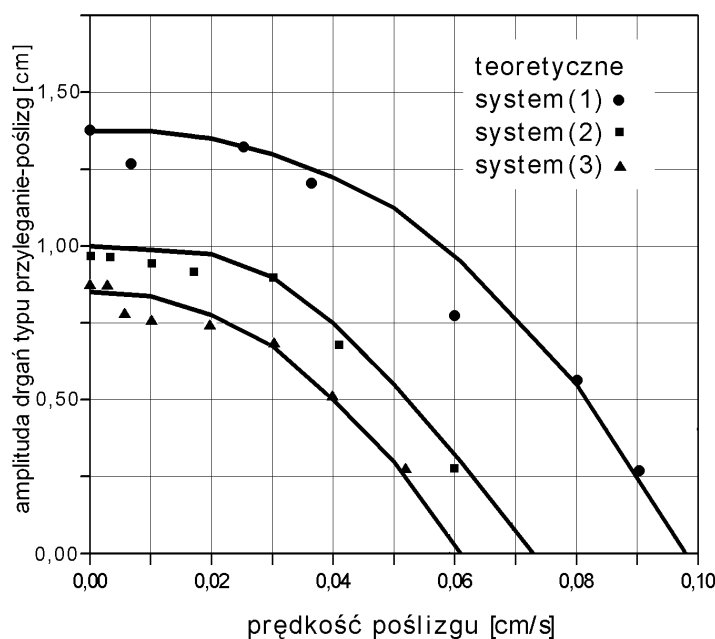


Rysunek 4.5: Zmiana współczynnika tarcia kinetycznego w zależności od prędkości poślizgu [96].

Thomas [106] i Well [109] analizując zblizony model, wysnuli wniosek, iż znaczna nadwyżka siły tarcia statycznego w stosunku do wartości siły tarcia kinetycznego wzmaga powstawanie drgań o charakterze przyleganie–poślizg. Zaobserwowali wzrost siły tarcia statycznego ze wzrostem czasu przylegania i prędkości zmiany przyłożonej siły, zależnej od prędkości względnej. Zauważyli również, iż następuje zmniejszenie amplitudy drgań i wzrost częstości w miarę zwiększenia prędkości względnej.

W pracy [96] Samson, Ress, Morgan i Muskat przeprowadzili badania eksperymentalne modelu pokazanego na rysunku 4.2. Podczas badań mierzyli przebieg zmienności siły i prędkość względną w czasie. Pomiary te pozwoliły wyznaczyć zmienność siły tarcia od prędkości względnej. Zaobserwowali, że w czasie jednego cyklu zależność ta prezentuje na charakterystyce pętlę. Podczas opóźnienia siła tarcia jest mniejsza niż przy przyspieszaniu. Stwierdzono też, że pole powierzchni pętli maleje w kolejnych cyklach (rys. 4.5).

Cameron, Potter i Brockley [33] przyjęli model tarcia o charakterystyce opadającej wraz ze wzrostem prędkości względnej, do pewnej granicznej wartości. Po osiągnięciu jej następował wzrost siły tarcia. Zwiększenie współczynnika tarcia statycznego uzależnili, jak i inni badacze, od czasu przylegania. Wartość współczynnika tarcia wzrastała wraz ze wzrostem czasu przylegania. Po przeprowadzonych badaniach wyznaczono ciekawą charakterystykę zmiany wartości amplitudy drgań od prędkości względnej, przy różnych współczynnikach tłumienia. Otrzymane przebiegi potwierdziły obserwację in-



Rysunek 4.6: Zmiana amplitudy drgań typu przyleganie–poślizg w zależności od prędkości poślizgu, przy różnym tłumieniu układu [33].

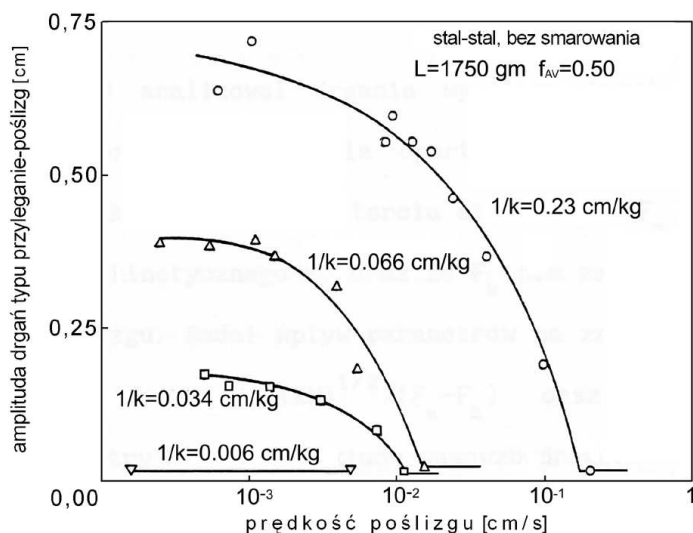
nych naukowców, iż amplituda drgań maleje wraz ze zwiększeniem prędkości względnej (rys. 4.6).

Przebiegi podobne jakościowo do charakterystyk pokazanych na rysunkach 4.6 otrzymanych przez Brockleya i innych, uzyskał też Rabinowicz [90]. Wyznaczył eksperymentalnie zależności amplitudy drgań typu przyleganie–poślizg od zmiany prędkości poślizgu. Badania różniły się od poprzednich jedynie sprężystością badanego układu. Otrzymane wyniki badań przedstawia rysunek 4.7.

Warlow-Davis i Schnurman [97] przyjęli inną teorię wyjaśniającą powstawanie drgań samowzbudnych. Związana jest ona ze zjawiskiem elektrostatyki. Autorzy mechanizm generowania ww. drgań tłumaczą zmianą ilości ładunków elektrostatycznych. Odbywa się ona na powierzchniach oddziałujących ciernie ciał. Skutkiem tego występują przyhamowania i przyspieszenia ciała będącego w ruchu.

Brok [35] opierając się na klasycznych prawach tarcia, modelu tarcia jak na rysunku 3.11a oraz równaniu ruchu:  $m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f(x, \dot{x}, t)$ , badał drgania wywołane zjawiskiem tarcia. Opis uzależnił od dwóch parametrów:  $\Phi$  i  $c$

$$\Phi = \frac{\sqrt{KM}}{F_s - F_k}, \quad c = \frac{D}{2\sqrt{KM}},$$



Rysunek 4.7: Zmiana amplitudy drgań typu przyleganie–poślizg w zależności od prędkości poślizgu, przy różnych wartościach współczynnika sprężystości układu badanego [90].

gdzie:  $F_s$  – statyczna siła tarcia,  $F_k$  – kinetyczna siła tarcia.

Wynikiem przeprowadzonych badań było otrzymanie wartości krytycznych parametrów  $\Phi$  i  $c$ , które dawały możliwość sterowania powstawaniem i zanikaniem drgań samowzbudnych. Dzięki przyjęciu odpowiednich wartości parametrów  $\Phi$  i  $c$  można zmieniać przebiegi drgań, doprowadzając do ich zaniku.

Taki sam model tarcia oraz podejście zastosowali we własnych badaniach Deriagin, Pusz i Tołstoj [44]. Teorię bifurkacji układów ciągłych wykorzystali do opisu drgań samowzbudnych Kazarinoff i Wan [65]. Badany przez nich model miał jeden stopień swobody. Masa spoczywała na ruchomym pasie i umocowana była do nieruchomej ściany lepkosprężystym cięgnem (rys. 4.3).

Hunt, Torbe i Spencer przeprowadzili badania eksperymentalne na zmodyfikowanej do celów pomiarowych obrabiarce. W pracy [58] wysunęli hipotezę, że współczynnik tarcia kinetycznego zależy od przyspieszenia. Autorzy zaobserwowali, że przy stałej wartości prędkości względnej  $w$  wartość współczynnika tarcia była mniejsza od wartości współczynnika tarcia otrzymanego, gdy tylko chwilami prędkość odpowiadała wartości zadanej prędkości względnej. Przebieg charakterystyki tarcia opisującej przeprowadzone badania zbliżony jest jakościowo do wykresu  $b$  z rysunku 3.13. Wartość

współczynnika tarcia wzrasta przy małej prędkości, a następnie maleje, osiągając wartość ustaloną.

Lenkiewicz [77] i Grudziński [54] wykazali dwustronną zależność między tarcie a drganiami. Zależność ta mówiła, że tarcie może wywoływać powstawanie drgań, a drgania mogą zmieniać siłę tarcia. Badacze analizowali przypadki tarcia suchego oraz tarcia z warstwą smaru pomiędzy trącymi materiałami. Współzależność tarcia i drgań objawiła się zmniejszeniem wartości siły tarcia i zmianami postaci drgań samowzbudnych, w sytuacji oddziaływania na układ drgań wymuszonych. Przykładem zastosowania tego przypadku może być metoda stabilizacji pozycjonowania manipulatorów linii montażowych.

Uogólnienia teorii powstawania drgań relaksacyjnych dokonali w swoich pracach Iszliński, Kragielski i Kostierin. W pracy [74] autorzy założyli, iż tarcie statyczne uzależnione jest od czasu adhezji ciał współpracujących, natomiast współczynnik tarcia kinetycznego zależy od prędkości ruchu względnego i opisany jest równaniem

$$\mu(w) = (c_1 + c_2 w) \cdot \exp(-c_3 w) + c_4, \quad (4.1)$$

gdzie  $c_1, c_2, c_3, c_4$  są stałymi, które wyznaczono eksperymentalnie.

W pracy [60] Iszliński i Kragielski przyjęli, że siła tarcia statycznego zależy od czasu przylegania, a siła tarcia kinetycznego ma stałą wartość. Siłę tarcia statycznego opisuje zależność

$$F_s = F_0 - (F_0 - F_k) \cdot \exp(-\Gamma \tau), \quad (4.2)$$

gdzie  $\Gamma$  i  $F_0$  są stałymi,  $F_0 > F_k$ , a  $\tau$  jest czasem przylegania.

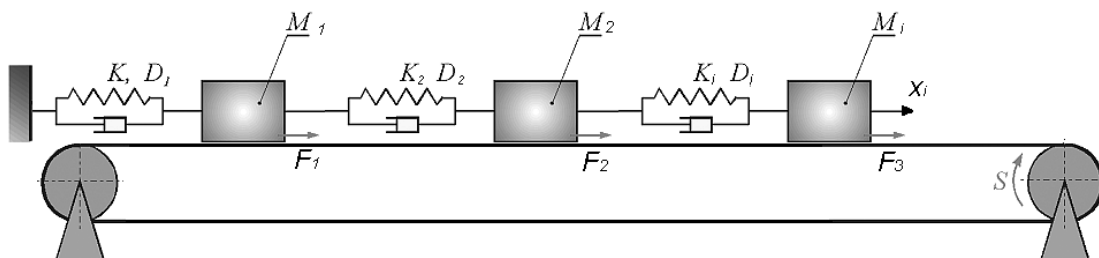
Teorie zaproponowane przez powyższych badaczy mówią, iż drgania samowzbudne powstają w układach sprężystych w przypadku, gdy:

- charakterystyki współczynnika tarcia zależą od prędkości względnej i mają malejącą wartość w pewnym przedziale prędkości,
- współczynnik tarcia statycznego ma większą wartość niż współczynnik tarcia kinetycznego,
- współczynnik tarcia statycznego zależy od czasu przylegania.



## 4.3 Modelowanie układów z tarciem

Do analizy drgań samowzbudnych w rzeczywistych układach mechanicznych o ruchu wzdłużnym wykorzystuje się często modele zespolonych sztywnych mas, połączonych ciągnami lepkosprężystymi. W modelach tych masy oddziałują ciernie z podłożem, w tym przypadku z nieodkształcalną taśmą taśmociągu (rys. 4.8). Na tym rysunku



Rysunek 4.8: Poglądowy schemat układu wielomasowego do badania drgań samowzbudnych w układach translacyjnych [95].

symbole oznaczają następujące wielkości fizyczne:

- $F_i$  – siła tarcia działająca na ciało o masie  $M_i$ ,
- $S$  – prędkość kątowna rolki, odpowiadająca prędkości taśmy  $V_0$ ,
- $X_i$  – wychylenie ciała o masie  $M_i$  ze stanu równowagi,
- $K_i$  – stała sprężystości  $i$ -tej sprężyny,
- $D_i$  – stała tłumienia lepkiego.

Układ pozostaje w stanie równowagi, jeśli napięcia sprężyn są sobie równe. Ruch takiego modelu teoretycznego możemy opisać równaniem ruchu (4.3). Zakładając zależność siły tarcia oddziałującej między poszczególnymi masami od prędkości taśmy, możemy napisać zależność

$$M_i \ddot{X}_i = -K_i(X_i - X_{i-1}) - D_i(\dot{X}_i - \dot{X}_{i-1}) + K_i(X_{i+1} - X_i) + D_{i+1}(\dot{X}_{i+1} - \dot{X}_i) + F_i(V_{wzgl}) \quad (4.3)$$

$$V_{wzgl} = \dot{X}_i - V_0, \quad (4.4)$$

w której  $\dot{X}_i$  i  $\ddot{X}_i$  są odpowiednio prędkością i przyspieszeniem względem czasu  $\tau$

$$\dot{X}_i = \frac{dX}{d\tau}, \quad \ddot{X}_i = \frac{d^2X}{d\tau^2}. \quad (4.5)$$

Wprowadzając do układu wielkości bezwymiarowe:

$$t = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad x_n = \frac{K_n X_n}{F_0}, \quad d_n = \frac{D_n}{\sqrt{K_n M_n}}, \quad v = \frac{V_0 \sqrt{K_n M_n}}{F_0}, \quad v_{wzgl} = \dot{x}_i - v, \quad k_i = \frac{K_i}{K_n}, \quad m_i = \frac{M_i}{M_n}, \\ f_i = \frac{F_i V_{wzgl}}{F_0}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{M_n}{K_n}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

możemy rozpatrywany przypadek uogólnić. Uogólnienie takie pozwala przeprowadzić analizę w szerszym zakresie.

$F_0$  jest jednostkową siłą,  $\tau_0$  jest bezwymiarową jednostką czasu.

Równanie 4.3 przy uwzględnieniu wprowadzonych wielkości bezwymiarowych można zapisać zależnością

$$m_i \ddot{x}_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) - d_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + k_i(x_{i+1} - x_i) + d_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + f_i(v_{wzgl}), \quad (4.6)$$

lub krócej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}). \quad (4.7)$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(v_{wzgl1}) \\ f(v_{wzgl2}) \\ \dots \\ \dots \\ f(v_{wzgln}) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

$\mathbf{M}$  jest diagonalną macierzą bezwładności o elementach  $m_i$ ,  $\mathbf{K}$  – macierzą sztywności o elementach  $k_i$ ,  $\mathbf{D}$  – macierzą tłumienia o elementach  $d_i$ . Równanie (4.7) umożliwia opis układu rzeczywistego z założonym tarciem oraz z modelem tarcia otrzymanym eksperymentalnie.

Tworząc modele układów wykonujących ruch obrotowy, zamiast taśmy możemy wprowadzić tarczę (rys. 4.9). Zastępujemy przemieszczenia wzdluzne kątowymi oraz dodajemy parametry opisujące masowy moment bezwładności. Po takich modyfikacjach uzyskujemy równania ruchu opisujące układ rotacyjny w następującej postaci

$$I_i \ddot{\Phi}_i = -RK_i(\Phi_i - \Phi_{i-1}) - R^2 D_i(\dot{\Phi}_i - \dot{\Phi}_{i-1}) + RK_{i+1}(\Phi_{i+1} - \Phi_i) + \quad (4.9) \\ + R^2 D_{i+1}(\dot{\Phi}_{i+1} - \dot{\Phi}_i) + RF_I(V_{wzgl_i}),$$

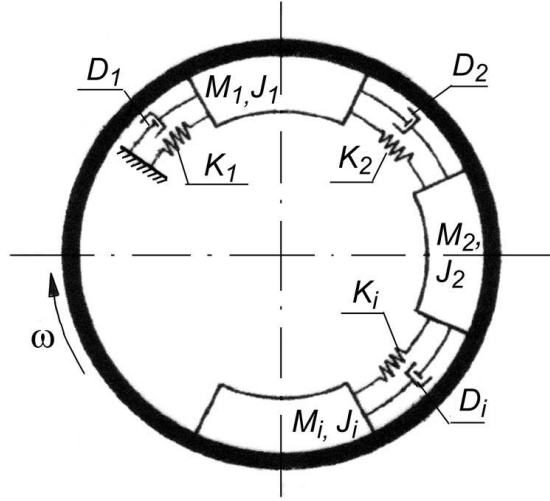
$$I_i \ddot{\Phi}_i = -M_{ki} - M_{di} - M_{Fi}, \quad (4.10)$$

oraz

$$I = M_i R^2, \quad M_{di} = D_i R^4 \dot{\Phi}_i, \quad M_{ki} = K_i R^2 \Phi_i, \quad M_{Fi} = F_i R \Phi_i, \quad (4.11)$$

gdzie:

$I_i$  – masowy moment bezwładności,



Rysunek 4.9: Przykładowy schemat stanowiska z układem wielomasowym do badania drgań samowzbudnych w układach obrotowych [50].

$M_i$  – masa  $i$ -tego trącego się ciała,

$\Phi_i$  – kątowne przemieszczenie  $i$ -tej masy  $M$ ,

$K_i$  – sztywność zredukowana do promienia  $R$  powierzchni tarcia,

$D_i$  – tłumienie zredukowane do promienia  $R$  powierzchni tarcia.

Wprowadzając bezwymiarowe zależności

$$\tau_0 = \sqrt{I_n/K_n \cdot R^2} = \sqrt{M_n/K_n}, \quad t = \tau/\tau_0, \quad x_i = K_i R \cdot \Phi_i/F_0, \quad (4.12)$$

$$d_i = D_i \cdot R/\sqrt{K_i \cdot I_i} = D_i/\sqrt{K_i \cdot M_i}, \quad v_{wzgl_i} = \frac{V_0 \sqrt{K_i \cdot I_i}}{R \cdot F_0} = V_0 \sqrt{K_i \cdot M_i}, \quad (4.13)$$

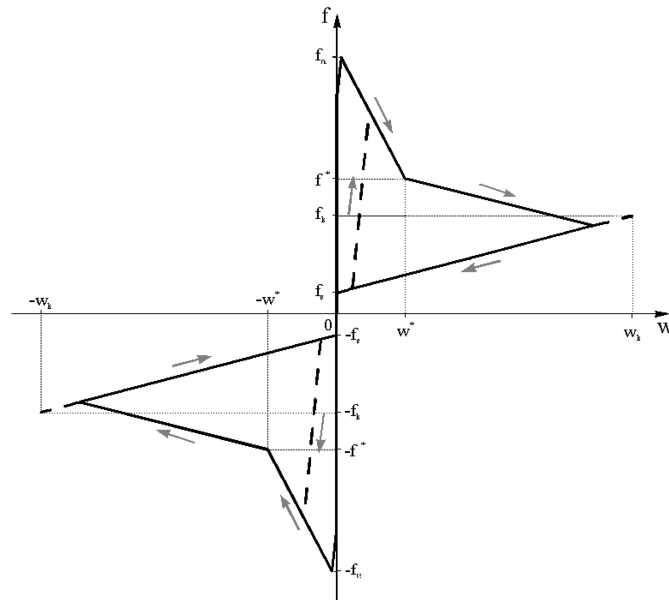
do równania (4.10) otrzymamy ostatecznie równanie równorzędne z (4.3)

$$M_i \ddot{X}_i = -K_i(X_i - X_{i-1}) - D_i(\dot{X}_i - \dot{X}_{i-1}) + K_i(X_{i+1} - X_i) + D_{i+1}(\dot{X}_{i+1} - \dot{X}_i) + F_i(V_{wzgl}). \quad (4.14)$$

Można spostrzec, iż oba modele opisane są przez to samo równanie ruchu.

W literaturze rozpatrywano też inne modele układów z tarciami w warunkach translacyjnych [58, 95, 101, 55, 49, 70, 69, 71] i w warunkach rotacyjnych [41, 78, 51].

Należy również wspomnieć o badaniach tarcia w systemach hamujących. Awrejcewicz, Piec, Jankowski, Furmanik, Prącik analizowali eksperymentalnie takie przypadki [3, 5, 48, 52, 62, 86, 40, 4]. Wykorzystując wyniki ze stanowisk doświadczalnych proponowali własne modele tarcia i wykorzystywali je do symulacji tarcia podczas hamowania.



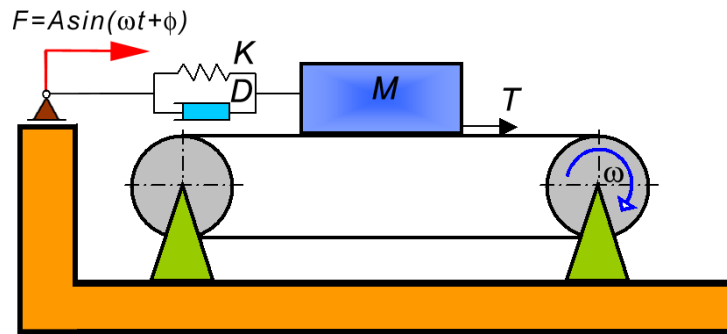
Rysunek 4.10: Model tarcia suchego pary ciernej poliester–stal [95].

Jednym z układów mechanicznych, złożonych z zespołu mas oddziałujących ze sobą lepkosprężystości i ciernie z taśmą taśmociągu, opisują prace [95, 24, 25]. Za cel autorzy postawili sobie opis zjawisk drgań typu przyleganie–poślizg i quasi-harmonicznych. Dokonali tego po przeprowadzeniu badań na stanowisku eksperymentalnym, zbudowanym z taśmociągu, grupy mas połączonych ze sobą za pośrednictwem sprężyn i systemu optycznego, służącego akwizycji danych z pomiaru. Pomiar optyczny umożliwił zarejestrowanie przemieszczeń wzdłużnych poszczególnych mas, niezaburzonych instrumentem pomiarowym. Wyniki przemieszczeń umożliwiły uzyskanie charakterystyk dynamicznych, a dzięki nim określenie statycznej i dynamicznej siły tarcia. Wielkości te pozwoliły na sformułowanie modelu tarcia suchego pary ciernej stal–poliester. Charakterystykę tarcia opisującą uzyskany model ilustruje rysunek 4.10.

Przeprowadzone badania symulacyjne zaproponowanego modelu tarcia suchego wykazały duży wpływ prędkości względnej na zachowanie drgań samowzbudnych układu. Wzrastająca prędkość względna powoduje przejście między jakościowo różnymi rodzajami drgań o różnej częstotliwości. Przykładem jest charakterystyczny efekt przypadku bifurkacji Hopfa. Ze wzrostem prędkości rozwiązanie w postaci cyklu granicznego drgań typu przyleganie–poślizg zamienia się w rozwiązanie stacjonarne drgań quasi-harmonicznych bez fazy przylegania. Przy dalszym zwiększaniu prędkości drgania samowzbudne zanikają. Układ zmierza do stanu stacjonarnego, w którym prędkość względna przyjmuje stałą wartość równą prędkości unoszenia. Pojawia się stabilny

poślizg.

Analizę drgań ciała spoczywającego na taśmie taśmociągu zajmowali się Popp i Stelter [88], Bogacz i Ryczek [26, 23, 22]. Ich badania różniły się od opisanych na początku rozdziału 4.3 tym, że wprowadzili zewnętrzną siłę harmoniczną oddziałującą na badany element (rys. 4.11). Autorzy uzyskali różne zależności opisujące drgania typu przyleganie–poślizg. Przedstawiono w nich podejścia z wykorzystaniem teorii chaosu. Podejścia te były odmiennie realizowane w obu przypadkach. Wynikało to z zastoso-



Rysunek 4.11: Schematyczne stanowisko do badań drgań samowzbudnych z zewnętrznym wymuszeniem harmonicznym.

wania różnych modeli tarcia w analizowanych przypadkach.

Modelowanie układu ciągłego z uwzględnieniem tarcia przeprowadzili Bogacz, Brzozowski i Popp [19]. Zajęli się oni badaniem wpływu trzech różnych modeli tarcia na wyniki uzyskane z analizy układu ciągłego. Układem tym był sztywny walec, spoczywający na sprężystym pasie taśmociągu, będący w kontakcie tocznym.

Z prac cytowanych w rozdziałach 3.1 i 4.3 widać, że metody wykorzystywane do opisu układów drgających z tarcieciem oraz sam sposób analizy siły tarcia wpływa na uzyskane wyniki. Z tego powodu należy razem z badaniami teoretycznymi przeprowadzać badania eksperymentalne. Dzięki takiemu podejściu możliwe jest oddzielenie zjawisk wywołanych efektami obliczeniowymi od zjawisk fizycznych pochodzących od analizowanych modeli rzeczywistych.

# Rozdział 5

## Stanowisko badawcze

W celu poznania zjawiska poślizgu bocznego, zbudowano stanowisko pomiarowe. Dzięki badaniom wstępnym dostrzeżono wady stanowiska oraz stwierdzono potrzeby zbadania wpływu dodatkowych parametrów. Zaobserwowane wady przyczyniły się do modyfikacji stanowiska eksperymentalnego. Dokonane zmiany pozwoliły uzyskać lepszą powtarzalność wyników i umożliwiły uzależnienie badanego zjawiska od zmian dodatkowych parametrów.

### 5.1 Wstępne stanowisko pomiarowe

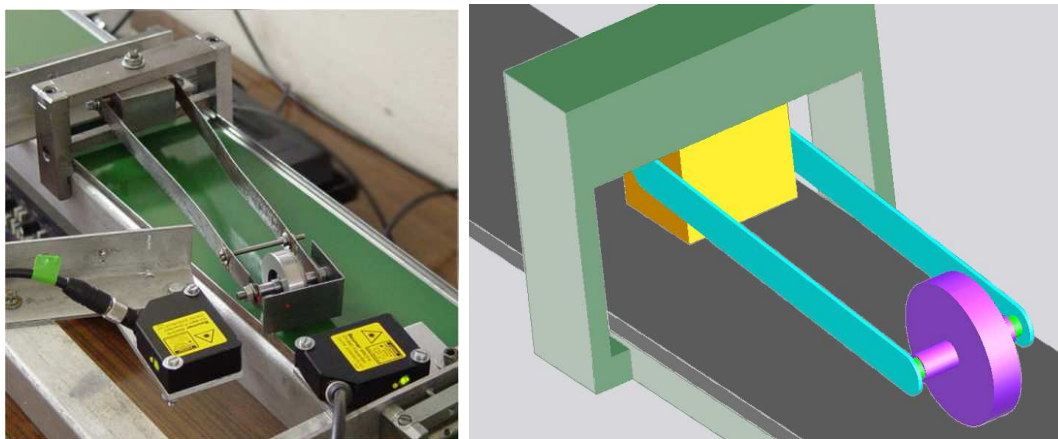
Wstępne pomiary wykonano na zbudowanym stanowisku pomiarowym, pokazanym na rysunku 5.1. Składało się ono z taśmociągu, układu pomiarowego oraz badanego modelu. Konstrukcja zawieszenia badanego układu koło – nawierzchnia opierała się na sprężynach płaskich. Za ich pośrednictwem obiekt badany mocowano do uchwyty. Uchwyt umożliwiał obrót względem stojaka zamocowanego na obudowie taśmociągu i na regulowaną zmianę kąta między płaszczyzną koła a kierunkiem ruchu taśmy. Do obudowy taśmociągu przymocowane były laserowe przetworniki odległości. Za ich pomocą dokonywano bezstykowego pomiaru przemieszczenia bocznego i quasi-wzdłużnego. Wadą takiego rozwiązania była konieczność rejestrowania składowych odbywającego się po łuku przemieszczenia badanego koła.

Wstępne wyniki wykazały wielookresowy charakter drgań. Na rysunku 5.2 pokazano przykładowe wstępne wyniki: trajektorię fazową, przemieszczenia i prędkości przemieszczeń w czasie oraz analizę amplitudowo–częstotliwościową. Wprawdzie widoczna jest dominacja dwóch częstości, to jednak dostrzegalny jest też udział częstości

z szerokiego zakresu.

Zbyt wiotki układ sprężyn umożliwiał niekorzystne pochylenie płaszczyzny bocznej koła względem płaszczyzny pionowej. To wpływało na zmianę powierzchni kontaktu koła z podłożem. Z uwagi na możliwości ustalania siły docisku w bardzo małym zakresie wartości, konsekwencją pochylenia bocznego była zmiana siły tarcia nie wynikająca z obserwowanego zjawiska, a z niedoskonałości stanowiska badawczego. Trudno było zachować powtarzalność odczytów. Jednocześnie trudno było zbadać wpływ siły nacisku koła na przebieg zjawiska, gdyż, jak wspomniano wyżej, ta nie była regulowana w sposób płynny.

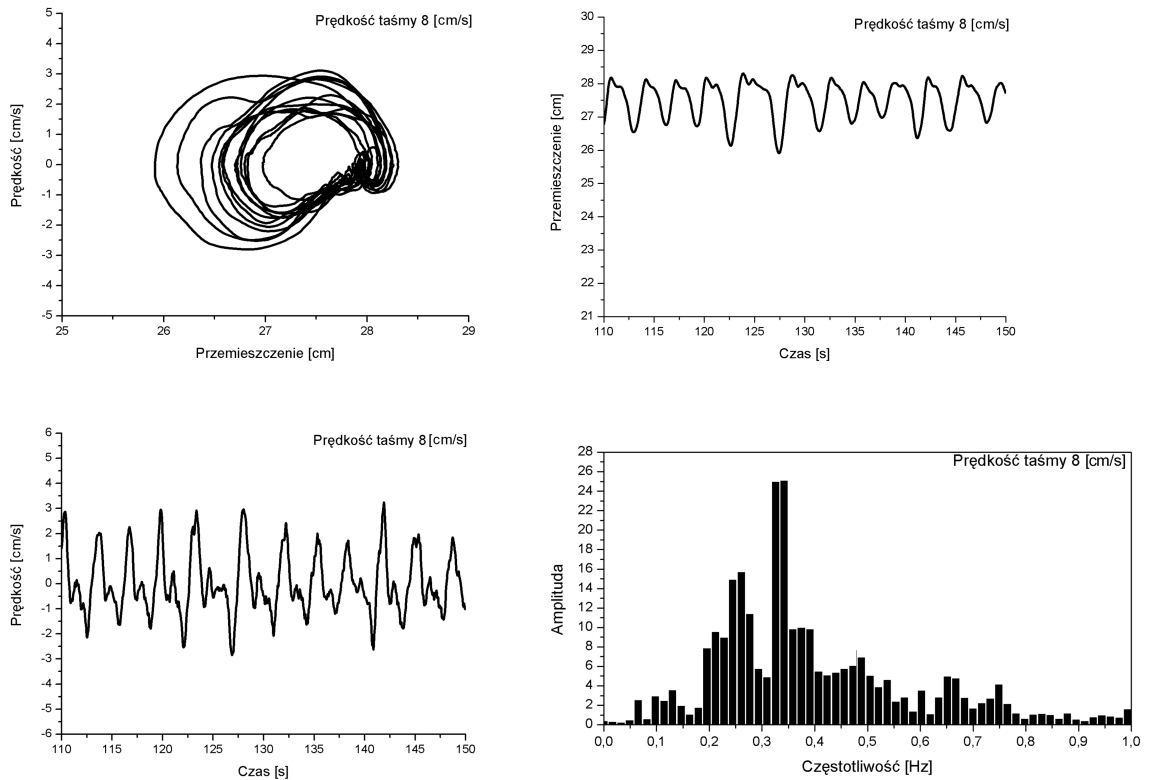
Stanowisko badawcze w dalszym etapie prac udoskonalono. Wyeliminowano tym samym wpływ wad jego konstrukcji na wyniki. Mimo konieczności przebudowy stanowiska i zastąpienia zasadniczej części mocowania koła zupełnie innym układem mechanicznym uzyskano potwierdzenie zjawiska drgań dwukresowych przy toczeniu z poślizgiem bocznym, niezależnie od konstrukcji stanowiska badawczego.



Rysunek 5.1: Wstępne stanowisko badawcze.

## 5.2 Opis stanowiska badawczego i układu pomiarowego

Usunięcie wad stanowiska badawczego wymagało znacznej jego przebudowy. Zmieniono całkowicie sposób mocowania koła oraz jego docisk do taśmy. Uzyskano wymaganą stabilność mocowania elementów tocznych oraz możliwość regulacji siły docisku koła do taśmy w bardzo dużym zakresie. Uzyskano oczekiwaną powtarzalności wyników. Dzięki temu możliwe było przeprowadzenie badań wielu par ciernych. Stosowano taśmy po-



Rysunek 5.2: Wyniki zmierzone na wstępnym stanowisku badawczym (rys. 5.1): wykres fazowy, przemieszczenie, prędkość oraz analiza amplitudowo–częstotliwościowa przy kącie  $\phi = 6^\circ$  i prędkości taśmy  $v = 8$  cm/s.

liestrowe o różnej twardości oraz o różnej fakturze powierzchni: od całkowicie gładkiej, poprzez chropowate, o fakturze jedwabistej, do powierzchni granulowanych, gruboziarnistych. Do szczegółowych badań wybrano najbardziej charakterystyczne materiały: taśmę o gładkiej powierzchni oraz koła wykonane ze stali, aluminium i poliamidu.

W budowie stanowiska należy wyszczególnić trzy główne elementy: przenośnik taśmowy, tor pomiarowy oraz badany model (rys. 5.3). Przenośnik został wykonany przez niemiecką firmę PH Schwarz. Długość bieżni wynosiła 2050 mm, jej szerokość 120 mm, a masa własna 72 kg. Duża masa zmniejszała możliwość niepożądanych drgań przenośnika podczas badań. Taśma rozpięta była na dwóch rolkach o średnicy 50 mm. Jedna z nich napędzana była silnikiem elektrycznym o mocy 270 W. Możliwa była płynna regulacja prędkości obrotów silnika w zakresie odpowiadającym przesuwowi taśmy z prędkością od 1 do 30 cm/s. Stosowano taśmy poliestrowe na osnowie płóciennej, o długości 4170 mm, szerokości 120 mm i grubości 2 mm. Taśma poliestrowa była jednym z elementów pary ciernej. Drugim było koło wykonane z metalu lub tworzywa

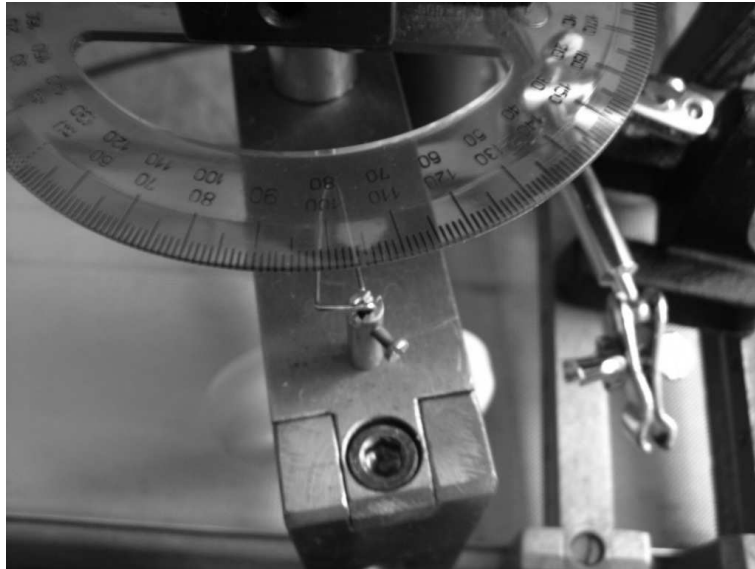




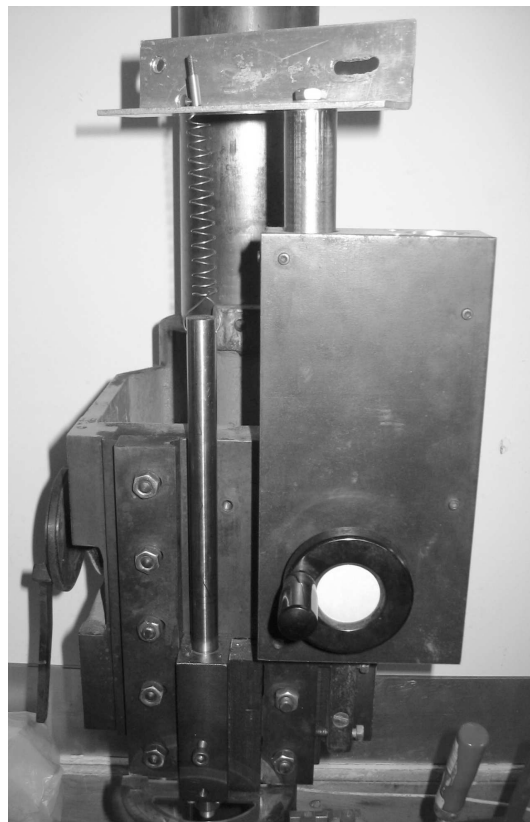
Rysunek 5.3: Stanowisko badawcze.

sztucznego, osadzone na mosiężnej tulei nałożonej na oś. Dwie jednakowe sprężyny śrubowe, umieszczone po obu stronach koła, przywracały je wraz z tuleją do położenia równowagi. Zmianę kąta płaszczyzny bocznej koła względem kierunku przesuwu taśmy, w przedziale  $\pm 30^\circ$  umożliwiał obrotowy uchwyt mocujący (rys. 5.4). Stanowisko dawało także możliwość regulacji pionowego docisku koła do taśmy. Realizowane było to przez odciążenie całego układu obciążonego ciężarem własnym za pośrednictwem liniowej sprężyny zamontowanej do ruchomego wysięgnika (rys. 5.5). Dokonując pomiaru pionowego przemieszczenia wysięgnika i znając ciężar zawieszono urządzenia, określano pionowy nacisk wywierany przez koło na taśmę.

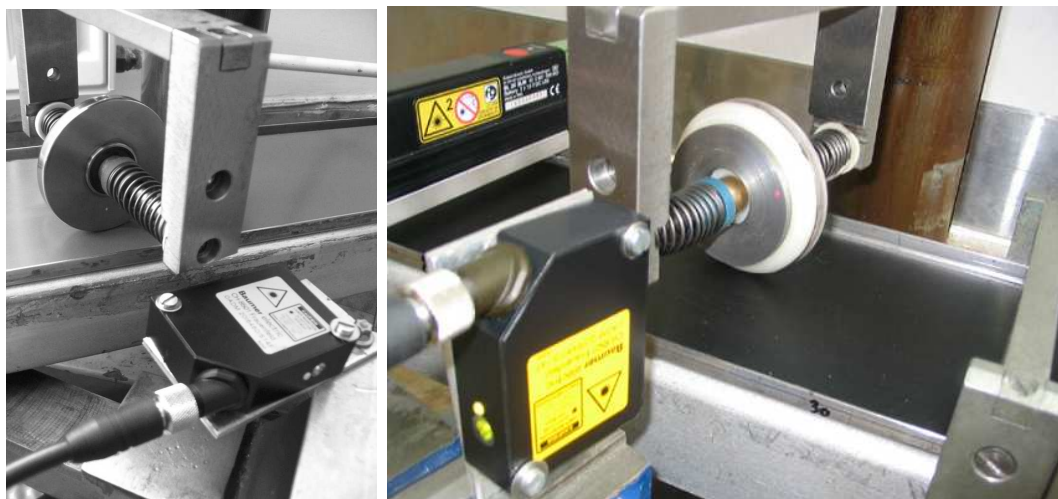
Zasada działania przetwornika odległości polega na ocenie kontrastu i rozproszenia odbitej wiązki wyemitowanego światła lasera. W miarę zmiany odległości plamka światła laserowego zmienia swoje parametry w obszarze centralnym i brzegowym. Ocena tych zmian i ich wzajemny stosunek były podstawą do wytworzenia przez przetwornik analogowego sygnału napięcia lub natężenia prądu. W dalszym etapie zewnętrzny przetwornik analogowo–cyfrowy 12-bitowej rozdzielczości umożliwiał zapis przemieszczeń w formie tablic liczbowych. Stablicowany sygnał podlegał wstępnej ocenie oraz wygładzeniu przez uśrednienie 9 – 15 kolejnych wartości. Przyjmując, że na jeden cykl



Rysunek 5.4: Regulacja kąta i jego pomiar między płaszczyzną koła a napędzającą taśmą taśmociągu.



Rysunek 5.5: Elementy stanowiska badawczego regulujące siłę nacisku przez odciążenie układu (uchwyt+koło) sprężyną śrubową oraz charakterystyka sprężyny.



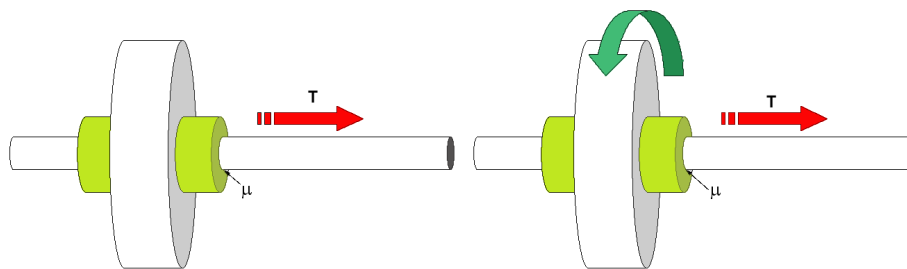
Rysunek 5.6: Czujnik laserowy przemieszczenia.

drgań przypadało kilka tysięcy odczytów, zastosowane wygładzenie nie zmieniało charakteru ani wartości podstawowych parametrów zarejestrowanego sygnału. Otrzymane w ten sposób wyniki pozwoliły wykreślić charakterystyki dynamiczne, umożliwiające analizę zjawisk i procesów zachodzących w badanym układzie oraz umożliwiły stworzenie modelu matematycznego, którym można je opisać.

W celu uniknięcia błędów grubych i przypadkowych, przed każdym cyklem pomiarowym aparatura była włączona przez 30 minut, w celu wygrzania urządzeń oraz pary ciernej. Kolejną procedurą uniknięcia błędu grubego było każdorazowe, przed rozpoczęciem i po zakończeniu serii pomiarowej, kalibrowanie toru pomiarowego. Pomiar powtarzano parokrotnie w ustalonych warunkach pracy stanowiska eksperymentalnego.

Aby móc w analizie wyników oraz opisie zjawiska pominąć tarcie między mosiężną tuleją a osią koła, wypolerowano oś i wnętrze tulei. Dodatkowo strefa kontaktu tulei z osią została nasmarowana oliwką techniczną, minimalizującą tarcie.

Przed rozpoczęciem analizy zbadana została statyczna i kinetyczna siła tarcia w ruchu wzdłużnym, wzdłużno-obrotowym i obrotowym, między tuleją a osią (rys. 5.7). Odpowiednie wartości zamieszczone zostały w tabelicy 5.1. Ze względu na małą względną wartość tarcia między tuleją a osią, pominiemy jego wpływ na badane zjawisko i skupimy się na tarcu w strefie kontaktu koła z taśmą.



Rysunek 5.7: Dwa przypadki ruchu: wzdluzny, wzdluzno-obrotowy, przyjete przy pomiarze sily tarcia miedzy miedziana tuleja a osia obrotu.

Tablica 5.1: Wartości zmierzonych sił tarcia i momentu sił między tuleją i osią.

ruch	koło poliamidowe (siła, moment siły)	koło stalowe (siła, moment siły)	koło aluminiowe (siła, moment siły)
wzdłużny	0,58 N	1,23 N	1,18 N
wzdłużny z obrotem	0,23 N	0,48 N	0,51 N
obrotowy	0,0026 Nm	0,0058 Nm	0,0047 Nm

### 5.3 Pary cierne

Podczas wstępnych eksperymentów zbadano trzy koła wykonane z różnych materiałów, które tworzyły pary cierne z taśmami o różnych właściwościach (rys. 5.8). Ostatecznie do badań zostały wybrane trzy pary cierne. Tworzyły je trzy koła wykonane z różnych materiałów i jedna taśma, która stanowiła wspólną bazę odniesienia par ciernych. Taśmą wybraną do badań była czarna taśma pokazana na rysunku 5.8. Wykonana została z dwóch elementów struktury nośnej oraz warstwy powierzchniowej. Strukturą nośną było płótno, na które nałożono warstwę poliestrową. Warstwa ta stanowiła jeden z elementów badanych par ciernych.

Drugim elementem były koła wykonane z różnych materiałów (rys. 5.9), takich jak: aluminium (Al), poliamid (PA 6G) i stal (St6). Koło stalowe wykonano jako stalową obręcz osadzoną na poliamidowym trzonie. Koła miały jednakowe wymiary geometryczne: średnicę 75 mm i szerokość 15 mm (rys. 5.10). Mimo tych samych wymiarów każde koło miało inną masę i moment bezwładności. Liczbowe zestawienie prezentuje tablica 5.2. Dodatkowo tuleja miała masę 32,0 g. Krawędź koła od strony

Tablica 5.2: Masy i momenty bezwładności badanych kół.

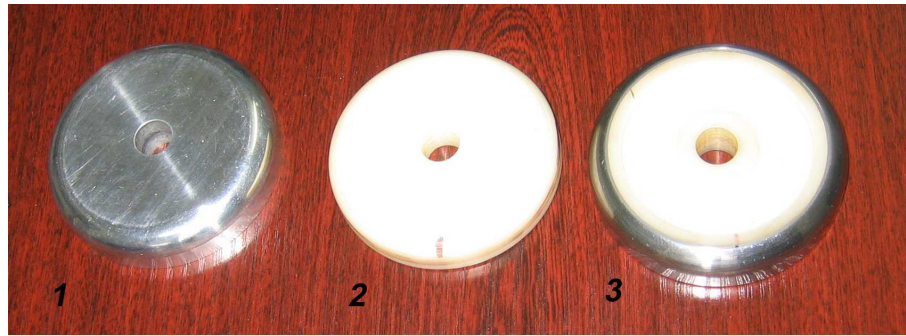
koło	masa [g]	moment bezwładności [ $\text{g}\cdot\text{cm}^2$ ]
poliamidowe	54,9	400
stalowe	174,9	2100
aluminiowe	173,0	1250

nabiegającej taśmy została zaokrąglona (sfazowana). Zaokrąglenie miało promień 9,5 mm i wykonane zostało w celu uniknięcia wcinania się ostrej krawędzi koła w taśmę. Wcinanie to zaburzałoby mierzone drgania samowzbudne.

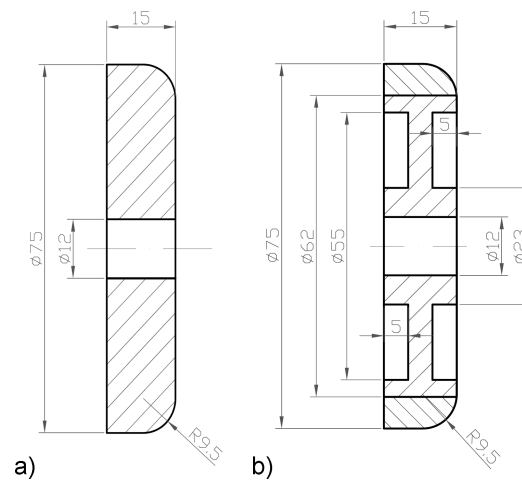


Rysunek 5.8: Taśmy poliestrowe wykorzystane do wstępnych badań.

Zmierzono statyczne i kinetyczne współczynniki tarcia poszczególnych par ciernych. Wyniki ilustrują charakterystyki na rysunku 5.11. Charakter przebiegów współczynnika tarcia poszczególnych par ciernych jest podobny. Każda para cierna ma największą wartość przy prędkości względnej równej zero. Wartości współczynników tarcia statycznego par ciernych wynoszą: aluminium – poliester 0,87, poliamid – poliester 0,44 oraz stal – poliester 0,42. Z przebiegów widać, że przy wzroście prędkości taśmy zmniejsza się wartość współczynnika tarcia kinetycznego. Współczynnik ten osiąga minimum przy pewnej prędkości, następnie jego wartość wzrasta w miarę wzrostu prędkości taśmy. Jedynym wyjątkiem jest para cierna poliamid – poliester, w przypadku której wartość współczynnika tarcia kinetycznego osiąga stałą wartość od pewnej prędkości taśmy.

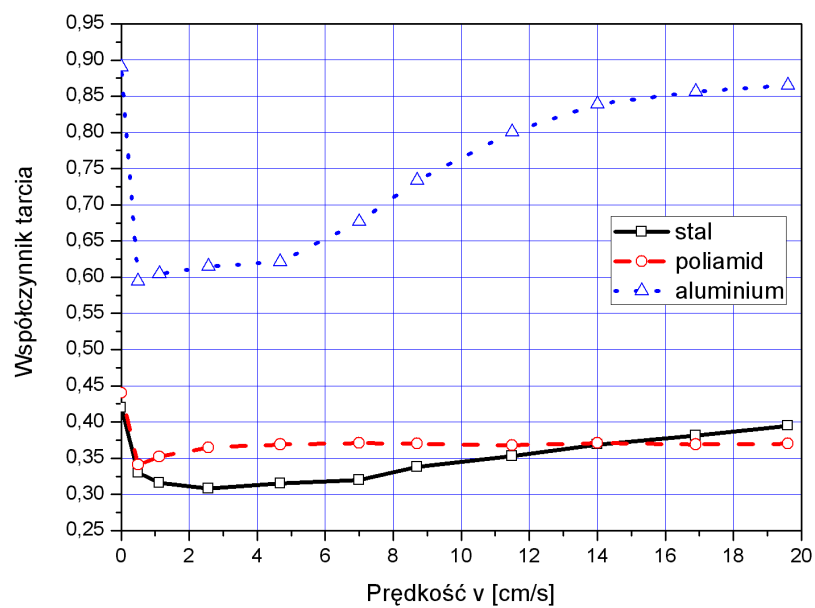


Rysunek 5.9: Koła wykorzystane w badaniach, 1 – aluminium, 2 – poliamid, 3 – poliamid ze stalową obręczą.

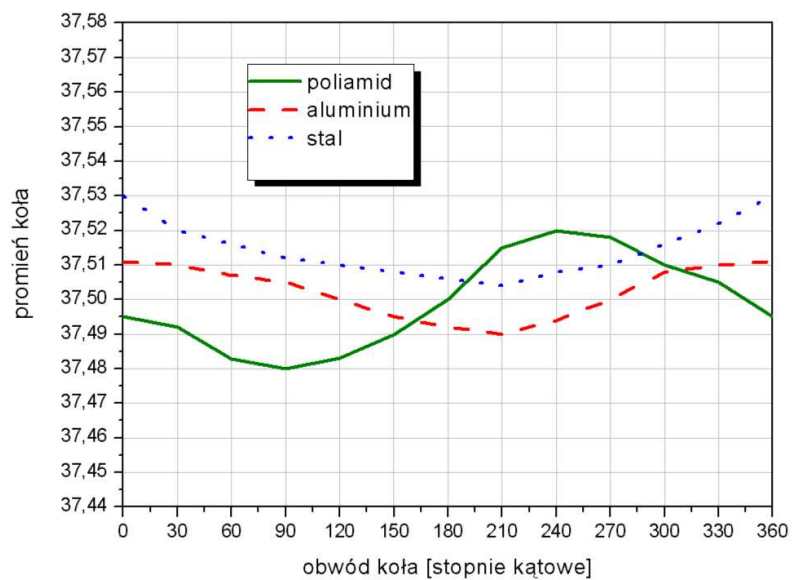


Rysunek 5.10: Przekroje poprzeczne kół wykorzystanych w badaniach a) aluminium, poliamid, b) poliamid ze stalową obręczą.

Zmierzono również obwiednie kół. Zrobiono to, by upewnić się, że niedoskonałość kołowego profilu nie będzie wywoływała drgań pionowych, wpływających na zmianę siły nacisku oraz tarcia. Pomiarów dokonano za pomocą czujnika laserowego, wykorzystywanego przy pomiarach przemieszczenia osiowego koła. W czasie pomiaru koło obracało się, a wiązka lasera skierowana była w kierunku promieniowym i odbijała się od powierzchni tocznej. Wyniki pomiarów przedstawiono na rysunku 5.12. Do zmierzonych wartości dodany został nominalny promień kół. Odchyłki wymiarowe od kształtu kołowego wynoszą: w przypadku koła aluminiowego  $\pm 0,010$  mm, w przypadku koła poliamidowego  $\pm 0,020$  mm i w przypadku koła stalowego  $\pm 0,012$  mm.



Rysunek 5.11: Przebiegi współczynnika tarcia badanych par ciernych: stal – poliester, poliamid – poliester, aluminium – poliester.



Rysunek 5.12: Kształt powierzchni tocznej badanych kół.

# Rozdział 6

## Wyniki eksperymentalne

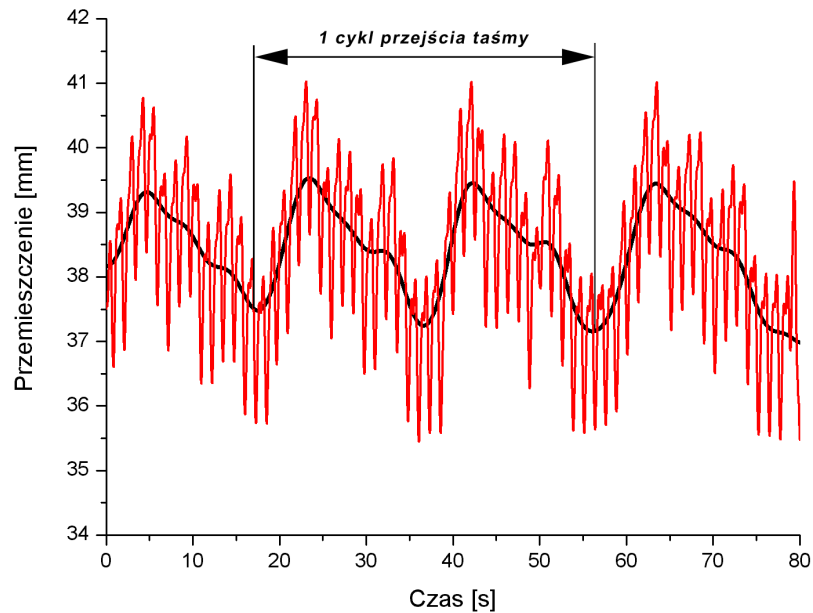
Poniżej zostaną przedstawione wybrane wyniki pomiarów, zarejestrowane na stanowisku badawczym. Metoda pomiaru oraz pary cierne opisane zostały w rozdziałach 5.2 i 5.3. W celu udokumentowania zjawisk wybrano charakterystyczne wyniki i zaprezentowano je w formie zestawienia charakterystyk fazowych, przemieszczeń koła i prędkości w kierunku osiowym. Prezentacja drgań na płaszczyźnie fazowej umożliwiła poznanie typu drgań. Przestrzeń fazowa pozwoliła określić wstępnie stabilność, cykle graniczne oraz wielookresowość zmierzonych przebiegów. Wykorzystanie do analizy widmowej szybkiej transformacji Fouriera umożliwiło wyznaczenie dominujących częstości drgań. Wyniki przemieszczeń i prędkości otrzymano po zastosowaniu odpowiednich procedur identyfikacji oraz odpowiedniej filtracji sygnału zmierzonego.

Skale wykresów zostały dobrane tak, by można było zestawiać wykresy i zaprezentować zmiany drgań, w zależności od zmian w danej grupie parametrów regulacyjnych. W niektórych przypadkach takie wyskalowanie jednak nieco utrudniało prezentowanie charakteru drgań na wykresach (rys. 6.8, 6.25).

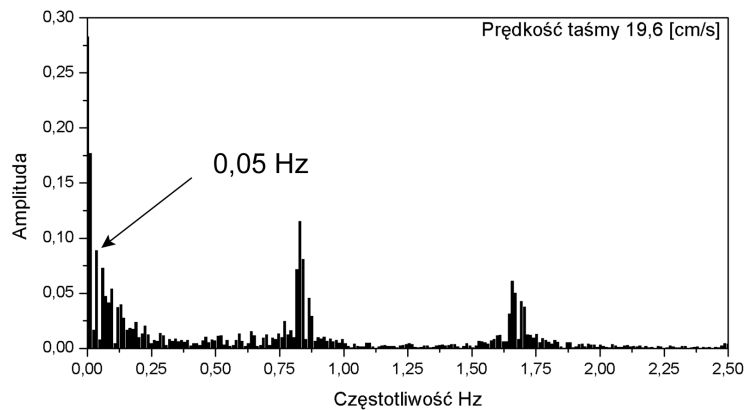
We wszystkich wynikach, w jednym pełnym cyklu przejścia taśmy taśmociągu pojawiła się podwójna fala. Efekt ten obserwowano w podobnym zakresie w przypadku wszystkich taśm poliestrowych. Cykl przejścia taśmy rozumiemy jako przebycie drogi równej obwodowi taśmy (rys. 6.1). Na wykresie przedstawiono przykładowy przebieg drgań zaznaczony linią czerwoną przy parametrach układu: prędkości taśmy  $v = 19,6$  cm/s i kąt  $\alpha = 10^\circ$ . Linia czarna przedstawia ten sam sygnał przetworzony przez filtr odcinający częstości powyżej 0,1 Hz. Przebieg sygnału przy takich parametrach układu badanego miał częstość 0,05 Hz. Generowanie tego typu zjawiska można wytłumaczyć



przejściem połączenia taśmy przez rolki taśmociągu. Mimo nieziennej grubości, połączenie taśmy było sztywniejsze od pozostałej jej części i wywoływało chwilowy wzrost naciągu wzdłużnego. Zmiana naciągu powodowała zaburzenie w postaci fali przedstawionej na rysunku 6.1. Fala ta mieści się w zakresie niskich częstotliwości (rys. 6.2) i została pominięta w analizie.



Rysunek 6.1: Przykładowy przebieg przemieszczenia osiowego w czasie, z charakterystyczną falą o niskiej częstotliwości.



Rysunek 6.2: Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa przemieszczeń koła poliamidowego w przypadku przebiegu z rysunku 6.1.

## 6.1 Para cierna koło poliamidowe – taśma poliestrowa

W niniejszym rozdziale zaprezentowano wybraną część wyników uzyskanych z pomiaru ruchu osiowego koła poliamidowego, toczącego się po ruchomej taśmie poliestrowej. Ruch ten obserwujemy na płaszczyźnie fazowej oraz wykresach przemieszczeń i prędkości względem czasu.

Do dalszych analiz wybrano charakterystyczne fragmenty odczytów. Wycinki odpowiadające podstawowemu okresowi drgań uwidoczniono na wykresach fazowych linią pogrubioną. Poniżej wyszczególnione zostaną cechy charakterystyczne uzyskanych wyników, pozwalające na wychwycenie prawidłowości. Będzie to pomocne w uzyskaniu matematycznego opisu zjawisk, podanego w rozdziale 7.1.

Na wstępie należy zauważyć, że drgania mają dwuokresowe przebiegi. Uwidaczniają to wszystkie wykresy przemieszczeń w czasie. Przykładowy rozkład częstotliwości pokazany na rys. 6.2 grupuje częstotliwości w dwóch obszarach. Drgania dwuokresowe występują w całym przedziale zmian parametrów regulacyjnych stanowiska. Udział obu grup składowych drgań jest różny i zależy od prędkości przesuwu taśmy. Wzrost prędkości zwiększa amplitudę drgań o niskiej częstotliwości, a zmniejsza amplitudę wyższych częstotliwości. Uwidocznione jest to na rysunkach 6.5÷6.7.

Drugim charakterystycznym zjawiskiem uwidocznionym na wykresach jest występowanie efektu przylegania koła do taśmy. Zjawisko przylegania i poślizgu występuje przy niskich prędkościach taśmy  $v$  i przy małym kącie  $\alpha$ . Zaznaczono to linią prostą na wykresach fazowych (rys. 6.8 i 6.23). Można zaobserwować, że w przypadku kątów  $4^\circ$  i  $6^\circ$  zjawisko przylegania i poślizgu występuje tylko przy prędkości niskiej  $v = 7 \text{ cm/s}$  i sile nacisku  $N = 8,5 \text{ N}$ .

Wzrost nacisku  $N$  wywołuje spadek amplitudy drgań obu składowych (rys. 6.7, 6.10, 6.13). Dokładniej uwidocznia to rysunek 6.3, porównujący tylko wykresy fazowe przy różnych siłach  $N=4,25, 8,5, 13,7 \text{ N}$ , stałym kącie  $\alpha = 10^\circ$  i prędkości taśmy  $v=14,0 \text{ cm/s}$ . Należy zaznaczyć przyjęcie różnej skali na osiach wykresów (rys. 6.3). Innym zjawiskiem wywołanym wzrostem nacisku jest zmiana fazy składowej wyższej częstotliwości (rys. 6.3). Na wykresach fazowych widoczne jest przemieszczenie fazowe tej składowej.

Kolejnym spostrzeżeniem jest oddalanie się przemieszczeń od położenia równowagi wraz ze wzrostem siły nacisku. Ilustrują to choćby wykresy fazowe (rys. 6.5, 6.8, 6.11 lub rys. 6.7, 6.10, 6.13), zestawione przy jednakowych kątach  $\alpha = 4^\circ$  i  $10^\circ$  oraz dwóch

naciskach pionowych  $N = 4, 25$  i  $13,7$  N.

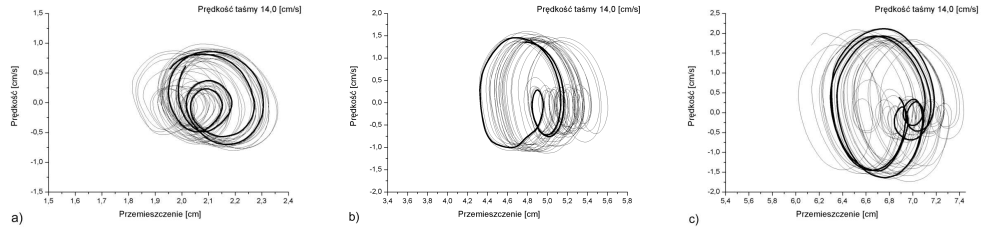
Wzrost kąta  $\alpha$  wpływa na wzrost amplitudy drgań wyższych częstotliwości w zakresie niskich prędkości przesuwu taśmy  $v$ . Uwidaczniają to rysunki 6.8, 6.9 i 6.10 w przypadku siły nacisku  $N=8,5$  N. Czytelniej przedstawiają tę zależność zestawione płaszczyzny fazowe przy prędkości taśmy  $v = 19,6$  cm/s, nacisku  $N=13,7$  N i trzech kątach  $\alpha$  (rys. 6.4). Wzrost kąta od  $4^\circ$  do  $10^\circ$  przy prędkościach przesuwu taśmy w zakresie  $7 \div 19,6$  cm/s wywołuje wzrost amplitudy od  $0,4$  cm do  $0,8$  cm. Wzrost kąta  $\alpha$  wpływa proporcjonalnie na przesunięcie wykresu przemieszczeń względem położenia równowagi. Wykres przesuwa się zgodnie z kierunkiem ruchu taśmy, podobnie jak w przypadku wzrastającej siły nacisku  $N$  (rys. 6.4).

Ważną cechą charakterystyczną zarejestrowanych drgań jest wzrost częstotliwości wraz ze wzrostem prędkości przesuwu taśmy. Zależność ta jest oczekiwana. W przypadku drgań idealnego układu oscylatora wzbudzanego tarciem suchym, długość fali kreślonej na powierzchni taśmy byłaby stała, a częstotliwość drgań wprost proporcjonalna do prędkości. W prezentowanych wynikach zaobserwowano początkowo znaczny wzrost częstotliwości wraz ze wzrostem prędkości taśmy w zakresie małych prędkości, a następnie mniejszy, stały wzrost, proporcjonalny do prędkości. Na podstawie wykresów analizy amplitudowo–częstotliwościowej, pokazanej na rysunku 6.14 przy prędkościach  $7,0$ ,  $14,0$  i  $19,6$  cm/s, oraz innych, niezamieszczonych w pracy, uzyskanych przy innych prędkościach, sporządzono wykres zależności częstotliwości drgań od prędkości, przy stałym kącie i sile nacisku (rys. 6.15). Zauważyć można prostoliniowość wykresu, za wyjątkiem zakresu niskiej prędkości (do  $2$  cm/s). Przy małych prędkościach zarejestrowane charakterystyki nie były w dostatecznym stopniu powtarzalne. Mimo tego po pewnym uśrednieniu najbardziej wiarygodnych odczytów na wykresie pokazano punkty wykazujące dążenie wykresu do początku układu współrzędnych.

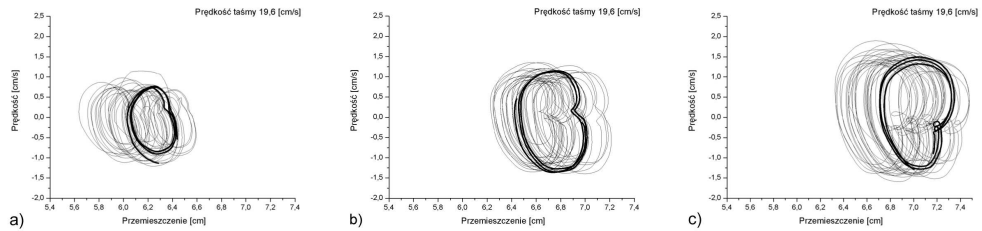
W dalszej części pracy, w rozdziale 6.3, zajęto się uzasadnieniem takiego przebiegu zjawiska.

W przypadku małych prędkości przesuwu taśmy odczyty znacznie różniły się od siebie. Zmniejszające się okresy przylegania mocno obniżyły powtarzalność wyników oraz negatywnie wpływały na możliwość precyzyjnego wyznaczenia częstotliwości. Charakterystyczny był spadek częstotliwości drgań wraz ze zmniejszeniem prędkości taśmy, zdecydowanie większy niż w zakresie wysokich prędkości (rys. 6.15).

Do badania nieliniowych układów dynamicznych pomocne jest zastosowanie pew-

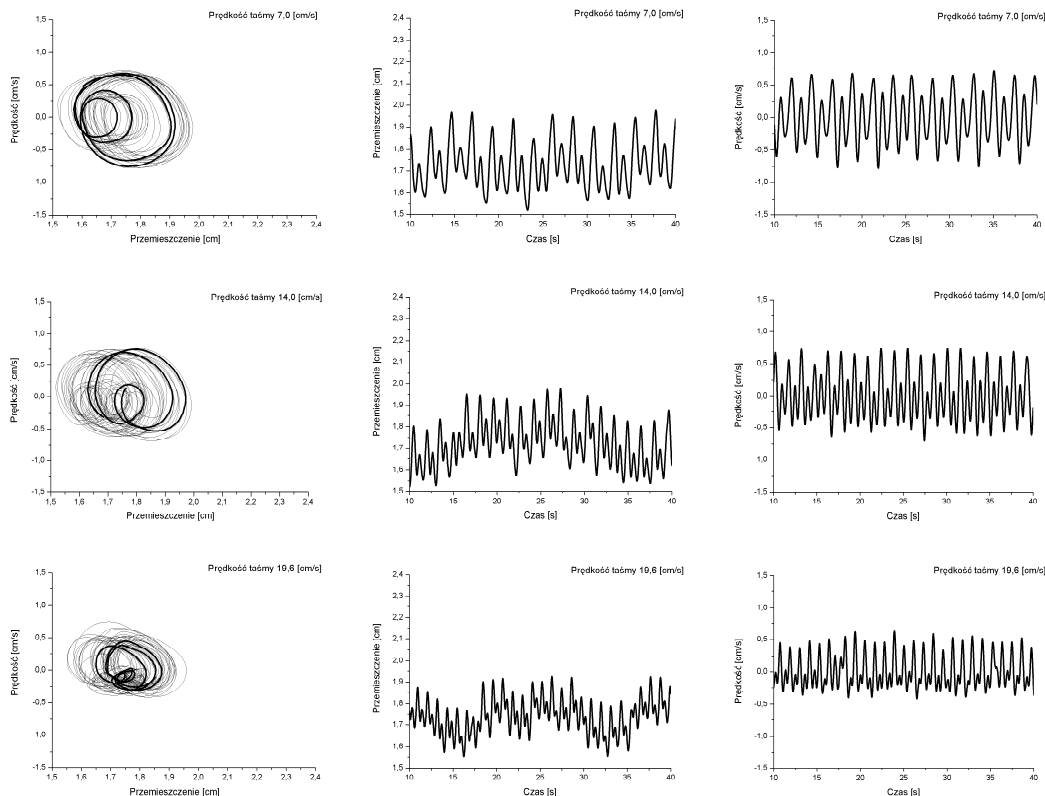


Rysunek 6.3: Trajektorie fazowe ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$  i prędkości taśmy  $v = 14,0$  cm/s, przy trzech różnych naciskach pionowych: a)  $N = 4,25$  N, b)  $N = 8,5$  N, c)  $N = 13,7$  N.

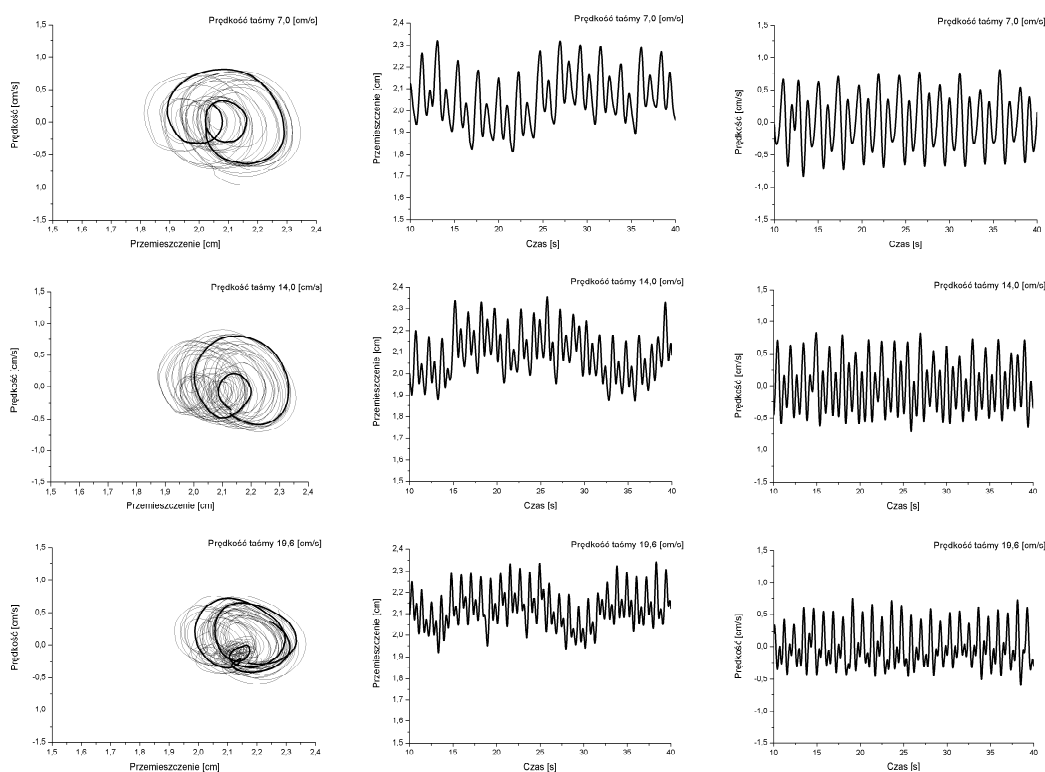


Rysunek 6.4: Trajektorie fazowe ruchu koła poliamidowego przy stałej prędkości taśmy  $v = 19,6$  cm/s i maksymalnej sile pionowego nacisku  $N = 13,7$  N oraz trzech wartościach kąta  $\alpha$ : a)  $\alpha = 4^\circ$ , b)  $\alpha = 6^\circ$ , c)  $\alpha = 10^\circ$ .

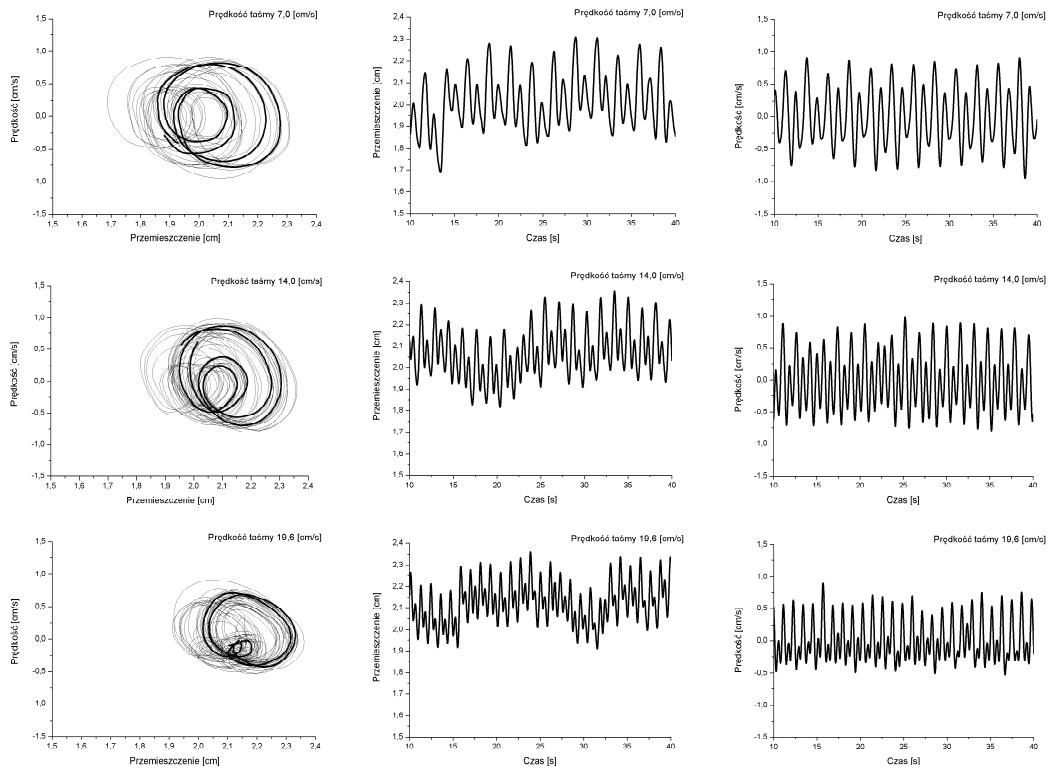
nego odwzorowania punktowego, bazującego na odwzorowaniu Poincaré (przekrój Poincaré, cięcie Poincaré) [2]. Idea takiego podejścia polega na wprowadzeniu płaszczyzny, która przecina powracający potok fazowy, nigdzie nie stykając się z żadną trajektorią tego potoku (rys. 6.16). Trajektorija  $K$  leży w trójwymiarowej przestrzeni, a punkty przecięcia z płaszczyzną  $A$  należą do niej. Zaletą tego przekroju jest obniżenie wymiaru analizowanej przestrzeni o jeden (otrzymane punkty leżą w płaszczyźnie). Na wykresach (rys. 6.17) pokazane zostały trajektorie fazowe koła poliamidowego, zmierzone przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy 14,0, 19,6 cm/s i nacisku  $N = 8,5$  N. Punkty kwadratowe naniesione na nie ilustrują zbiory powstałe przez wyodrębnienie z uzyskanych wyników punktów przypadających na poszczególne chwile pełnego obrotu badanego koła. Z map tych można wysnuć wniosek, że obserwowane drgania wzbudzone tarciem nie zależą w żadnym stopniu od cyklu obrotowego koła. Dowodzi tego fakt, że punkty tworzące mapę nie są zgromadzone w sąsiedztwie, lecz rozłożone wzdłuż całej trajektorii fazowej. W przypadku gromadzenia się w jednym małym obszarze, można by podejrzewać np. istnienie nierówności na kole. Nierówność ta mogłaby wywoływać zaburzenie, cyklicznie wpływające na mierzone drgania.



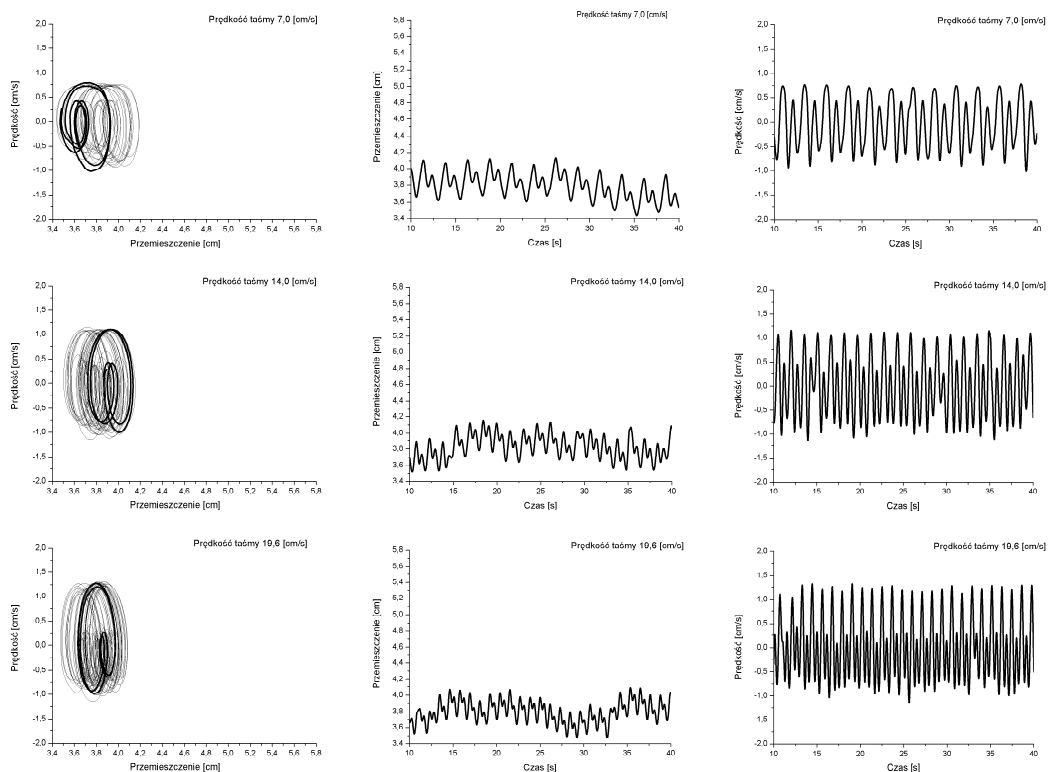
Rysunek 6.5: Wyniki pomiarów ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 4,25$  N.



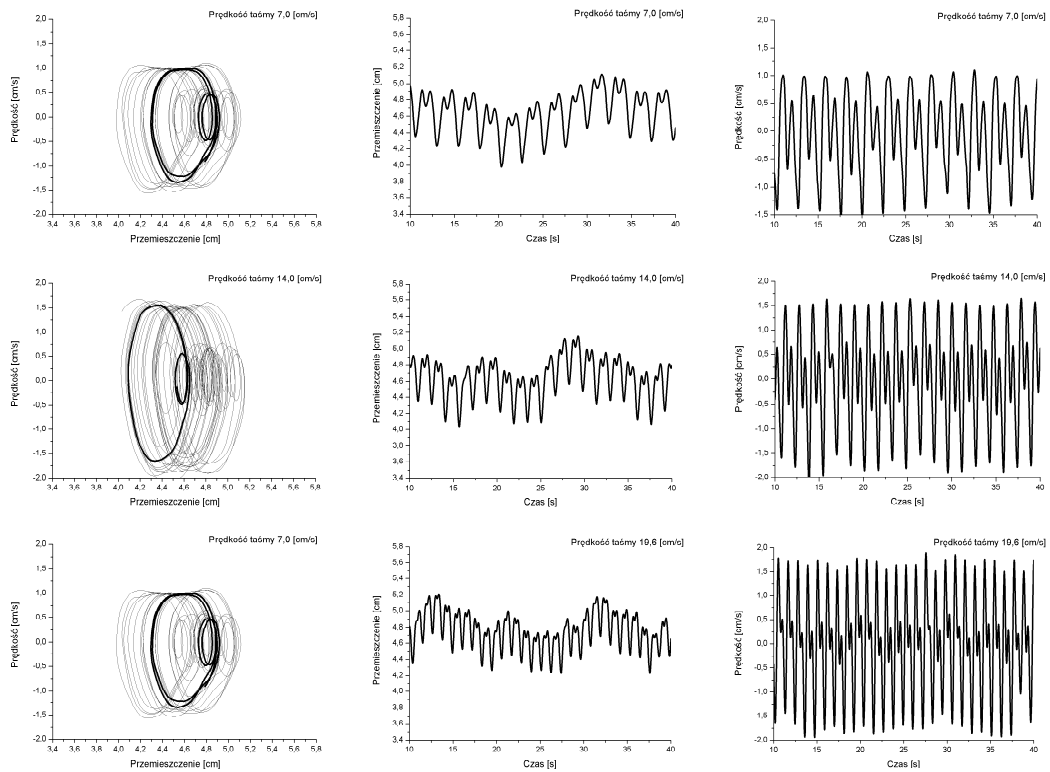
Rysunek 6.6: Wyniki pomiarów ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 6^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 4,25$  N.



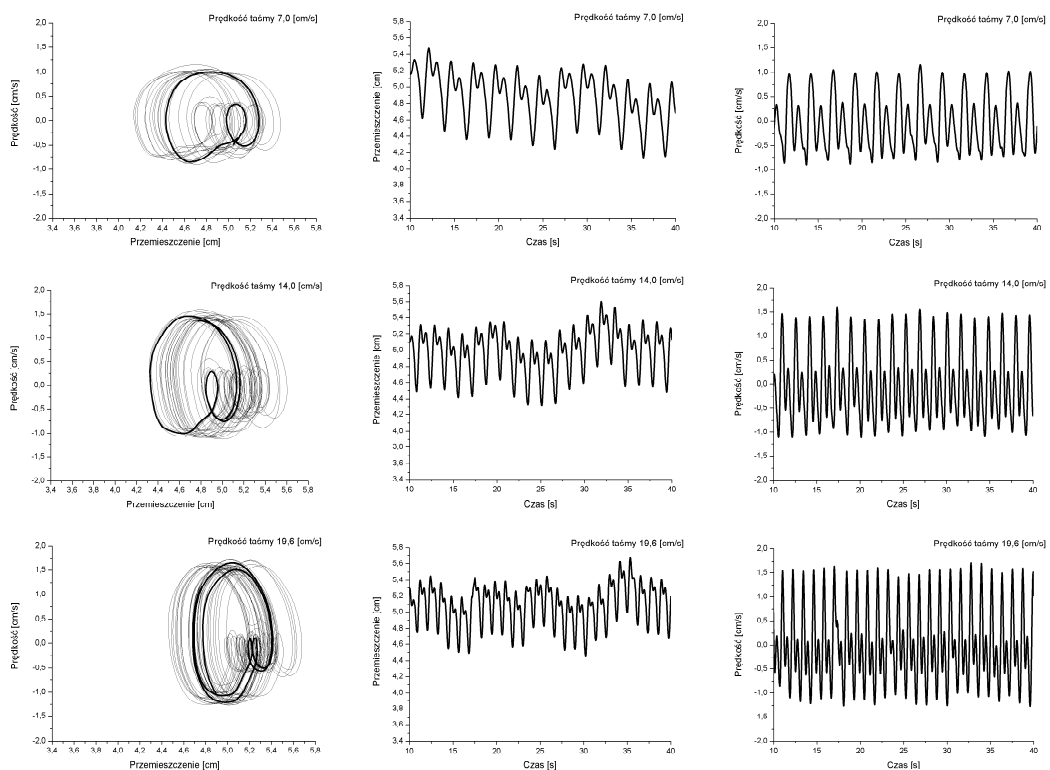
Rysunek 6.7: Wyniki pomiarów ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 4,25$  N.



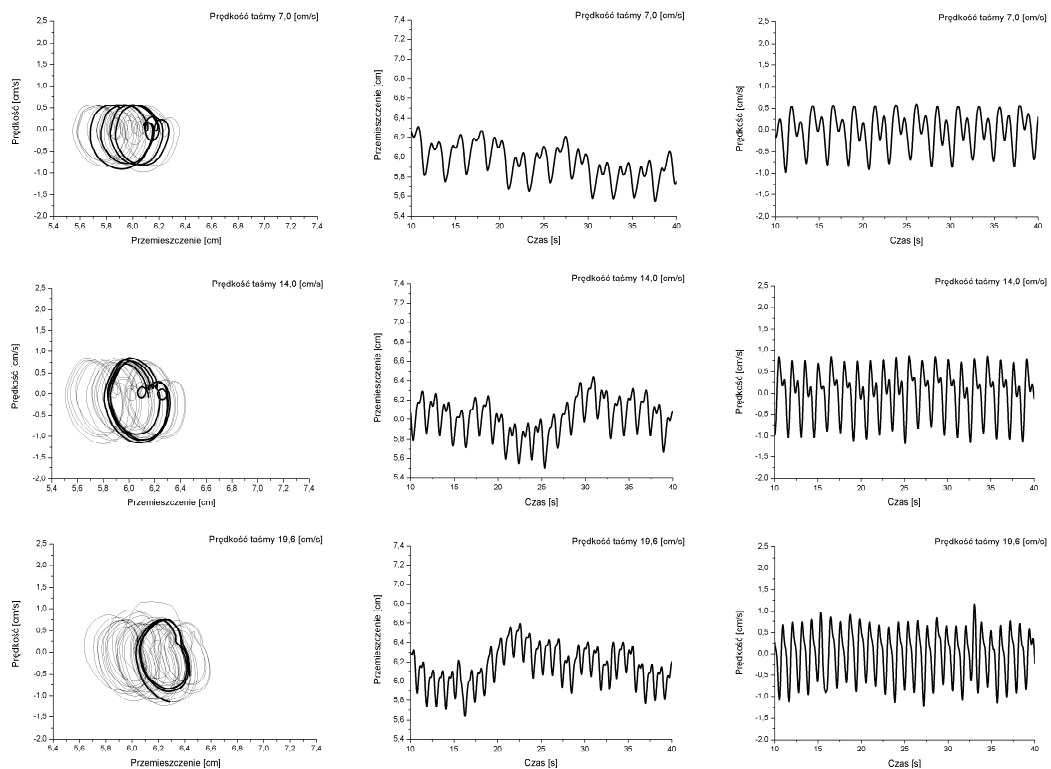
Rysunek 6.8: Wyniki pomiarów ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 8,5$  N.



Rysunek 6.9: Wyniki pomiarów ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 6^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 8,5$  N.

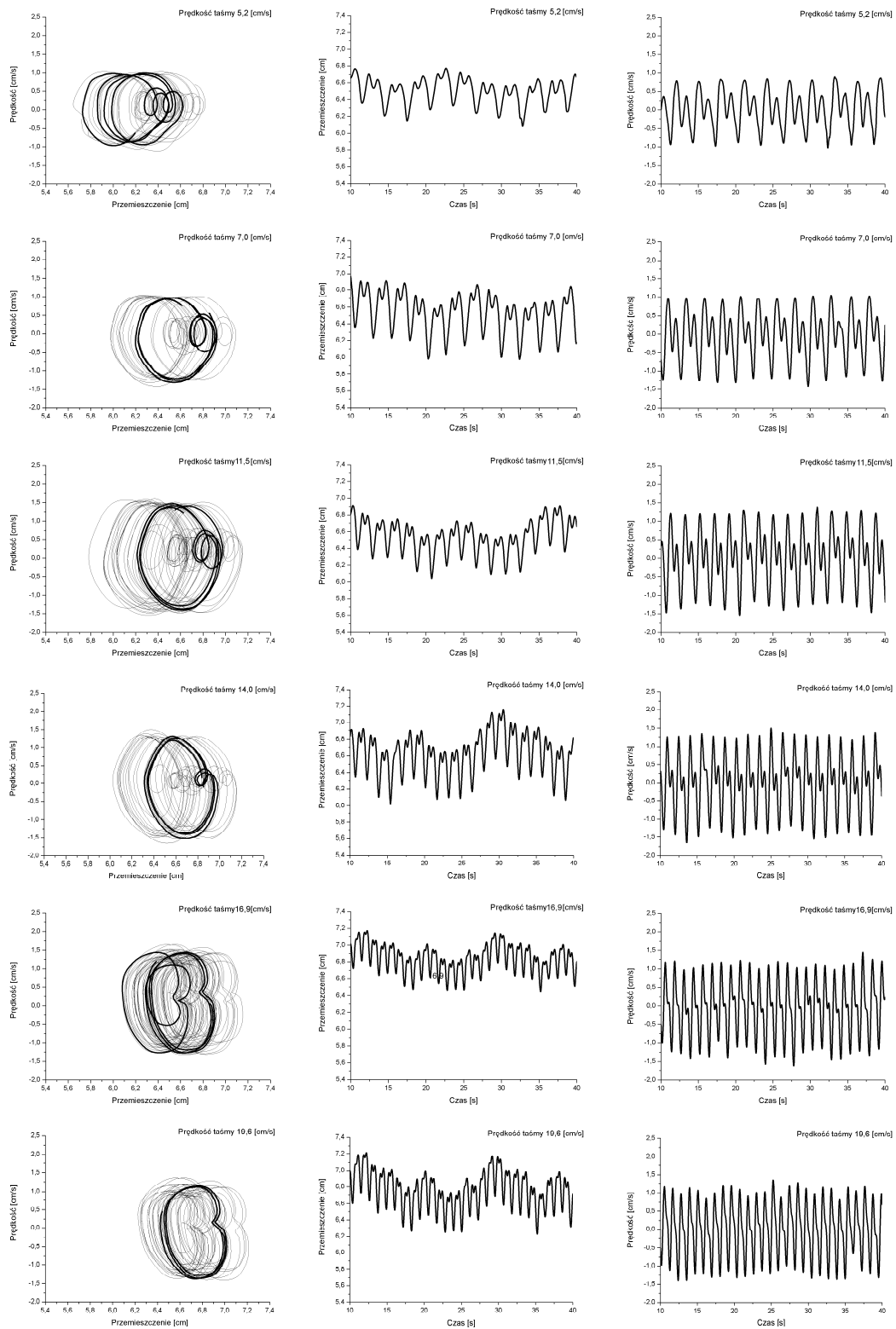


Rysunek 6.10: Wyniki pomiarów ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 8,5$  N.

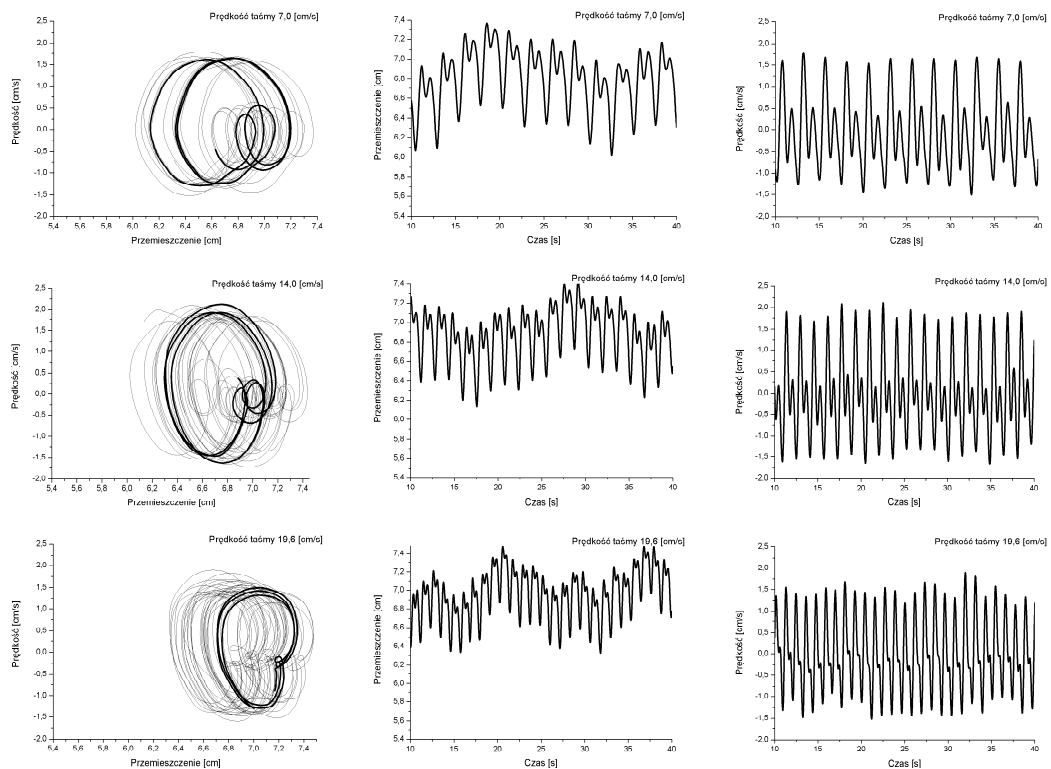


Rysunek 6.11: Wyniki pomiarów ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 13,7$  N.

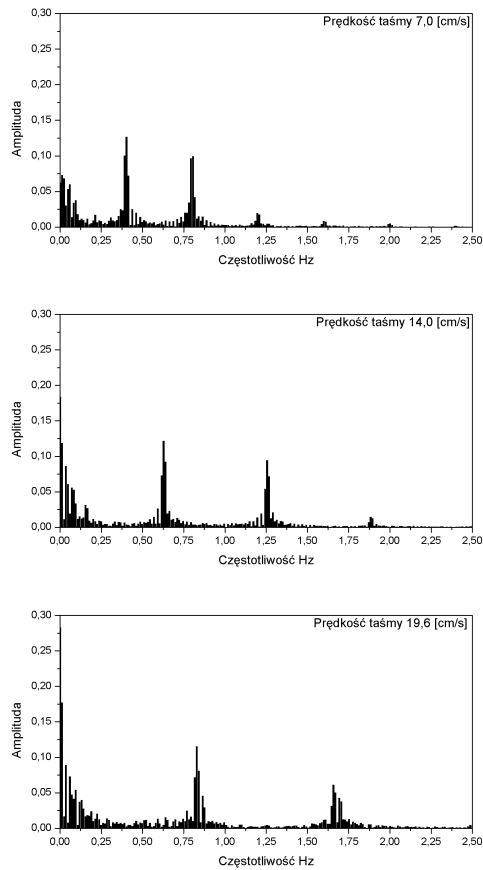




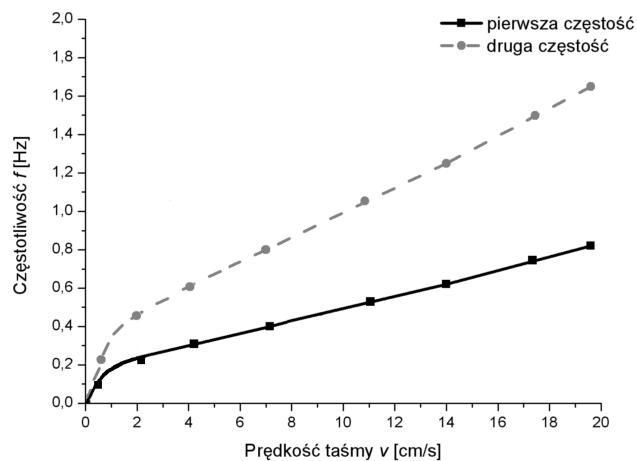
Rysunek 6.12: Wyniki pomiarów ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 6^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 5,2, 7,0, 11,5, 14,0, 16,9, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 13,7$  N.



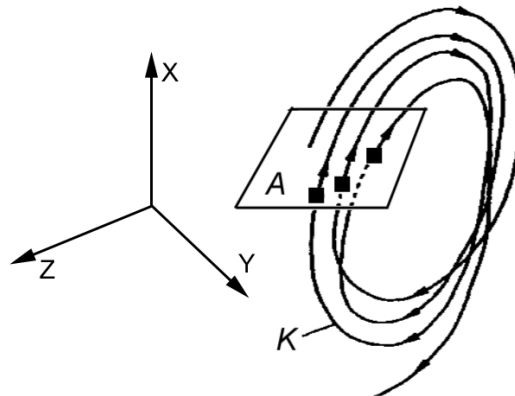
Rysunek 6.13: Wyniki pomiarów ruchu koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 13,7$  N.



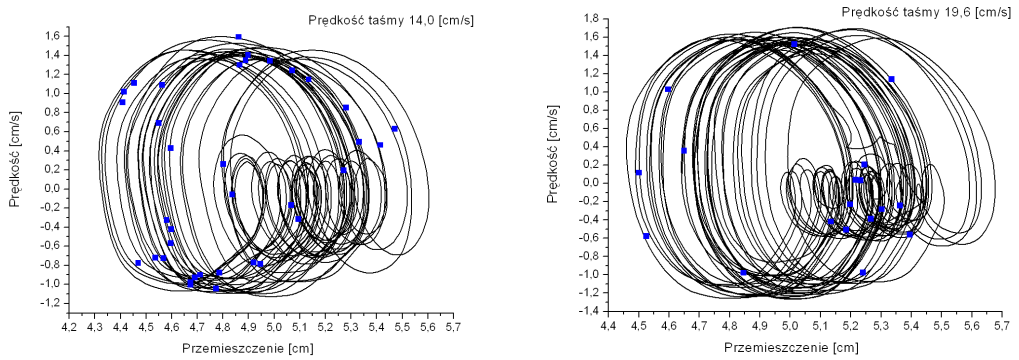
Rysunek 6.14: Analiza amplitudowo–częstotliwościowa przemieszczenia koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku  $N = 8,5$  N.



Rysunek 6.15: Zmiana częstości dominujących okresów drgań przy zmianie prędkości taśmy  $v$ , przy kącie  $\alpha = 10^\circ$  i nacisku pionowym  $N = 8,5$  N.



Rysunek 6.16: Schemat płaszczyzny Poincaré.



Rysunek 6.17: Wykresy przestrzeni fazowej koła poliamidowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 14,0, 19,6 \text{ cm/s}$  i nacisku  $N = 8,5 \text{ N}$  oraz ich mapy Poincaré (kwadraty).

## 6.2 Para cierna koło stalowe – taśma poliestrowa

Drgania pary ciernej złożonej ze stalowego koła i poliestrowej taśmy, podobnie jak w przypadku pary poliamid – poliester, ma charakter drgań dwuokresowych. Do dalszych analiz wybrano charakterystyczne fragmenty odczytów. Wycinki odpowiadające podstawowemu okresowi drgań uwidoczniono na wykresach fazowych linią pogrubioną. Poniżej wyszczególnione zostaną cechy charakterystyczne uzyskanych wyników, pozwalające na pokazanie prawidłowości. Będzie to pomocne w uzyskaniu matematycznego opisu zjawisk, podanego w rozdziale 7.1.

Pierwszą ważną cechą drgań jest wspomniana wcześniej dwuokresowość. Uwidaczniają to wszystkie wykresy przemieszczeń w czasie. Udział obu składowych drgań jest różny i zależy od prędkości przesuwu taśmy. Wzrost prędkości zwiększa zdecydowanie amplitudę drgań o niskiej częstotliwości w stosunku do amplitudy drgań o wyższej częstotliwości. Uwidocznione jest to na rysunkach 6.22÷6.24 w przypadku prędkości 19,6 cm/s. Zjawisko to jest niezależne od siły nacisku.

Drugim charakterystycznym zjawiskiem uwidocznionym na wykresach jest występowanie efektu przylegania koła do taśmy. Zjawisko przylegania i poślizgu występuje przy niskich prędkościach taśmy  $v$  i przy małym kącie  $\alpha$ . Zaznaczono to linią prostą na wykresach fazowych (rys. 6.22 i 6.23). Można zaobserwować, że w przypadku małego kąta  $\alpha = 4^\circ$  zjawisko przylegania i poślizgu występuje przy prędkościach niskich i średnich (rys. 6.22), a przy kącie  $\alpha = 6^\circ$  można je zaobserwować tylko przy małej prędkości (rys. 6.23).

Wzrost nacisku  $N$  wywołuje spadek amplitudy drgań niskiej częstotliwości. Uwidocznia to porównanie wykresów (rys. 6.23 i 6.26). Przy sile  $N=9,7$  N waha się ona od 0,8 cm przy prędkości 7 cm/s do 0,4 cm przy prędkości 19,6 cm/s, a przy sile  $N=14,9$  N mieści się w przedziale 0,5 cm przy prędkości 7 cm/s, do 0,3 cm/s przy prędkości 19,6 cm/s. Wykresy 6.24 i 6.27 pokazują tę samą zależność przy innym w tym przypadku kącie  $\alpha = 10^\circ$ .

Kolejnym spostrzeżeniem jest oddalanie się przemieszczeń od położenia równowagi wraz ze wzrostem siły nacisku. Ilustrują to choćby wykresy fazowe z rysunków 6.23 i 6.26 oraz 6.24 i 6.27, dobrane przy jednakowych prędkościach taśmy i jednakowych kątach  $\alpha$ .

Wzrost kąta  $\alpha$  wpływa na wzrost amplitudy drgań wyższych częstotliwości w zakresie niskich prędkości przesuwu taśmy  $v$ . Uwidaczniają to rysunki 6.25 i 6.27 w przypadku siły nacisku  $N=14,9$  N. Wzrost kąta od  $4^\circ$  do  $10^\circ$  wywołuje wzrost amplitudy od 0,2 cm do 0,6 cm. Przy wyższych prędkościach taśmy opisany efekt nie występuje, a amplituda waha się w przedziale  $0,29 \div 0,31$  cm. Wzrost kąta  $\alpha$  wpływa proporcjonalnie na przesunięcie wykresu przemieszczeń względem położenia równowagi. Wykres przesuwu się zgodnie z kierunkiem ruchu taśmy, podobnie jak w przypadku wzrastającej siły nacisku  $N$ .

Należy zwrócić uwagę na zaburzenia przylegania, uwidocznione na wykresach trajektorii fazowej na rys. 6.24 przy  $\alpha = 10^\circ$  i  $v = 7$  cm/s. Rysunek 6.21 pokazuje wspomniany wykres wraz ze schematem wyodrębniającym z obszaru przylegania pewien podobszar charakteryzujący się poślizgiem (linia przerywana).

Podobny efekt zaobserwowano na rysunkach 6.26. W obu przypadkach występuje on przy małej prędkości taśmy ( $v=7$  cm/s). Jednoznacznej przyczyny nie można tu podać. Można rozważyć dodatkowe wymuszenie wywołane niedoskonałością mechanizmów stanowiska badawczego. Dokładne zbadanie przyczyn wymagałoby bardziej dokładnych przyrządów pomiarowych, innego typu, niż będące w dyspozycji podczas badań.

Podobnie jak w rozdziale poprzednim, wykresy Poincaré (rys. 6.30) wykazują niezależność drgań osiowych koła od jego obrotów.

Ważną cechą charakterystyczną zarejestrowanych drgań jest wzrost częstotliwości wraz ze wzrostem prędkości przesuwu taśmy. Zależność ta jest spodziewana. Długość fali kreślonej na powierzchni ruchomej taśmy przez oscylacje wywołane nagarnianiem ku krawędzi taśmy ukośnie ustawionego koła byłaby stała w przypadku pozbawionym efektów dynamicznych i złożonego prawa tarcia. Częstotliwość oscylacji byłaby proporcjonalna do prędkości. W prezentowanych wynikach zaobserwowano początkowo znaczny wzrost częstotliwości wraz ze wzrostem prędkości taśmy w zakresie małych prędkości, a następnie mniejszy, stały wzrost, proporcjonalny do prędkości. Na podstawie wykresów analizy amplitudowo–częstotliwościowej, pokazanej na rysunku 6.28 przy prędkościach 7,0, 14,0 i 19,6 cm/s, oraz innych, niezamieszczonych w pracy, wykonanych przy innych prędkościach, sporządzono wykresy zależności częstotliwości drgań od prędkości, przy stałym kącie i sile nacisku (rys. 6.29). Zauważyć można prostoliniowość wykresu, za wyjątkiem małej prędkości (do 2 cm/s). Przy małych prędkościach zarejestrowane charakterystyki nie były w dostatecznym stopniu powtarzalne. Mimo tego po pew-

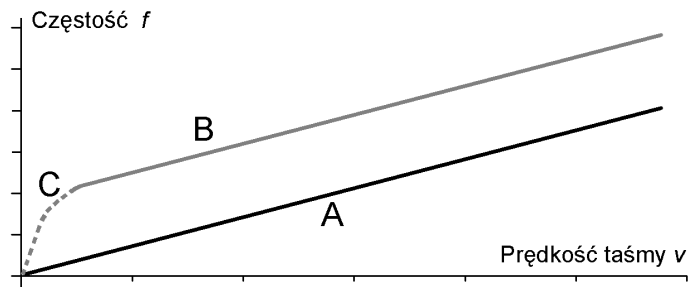
nym uśrednieniu najbardziej wiarygodnych odczytów na wykresie pokazano punkty wykazujące zmierzanie wykresu do początku układu współrzędnych.

W dalszej części zajęto się analizą wykresu 6.29. Przyjęto próbę interpretacji matematycznej i fizycznej pokazanego zjawiska.

### 6.3 Interpretacja obserwowanych przebiegów drgań

Pokażemy wpływ prędkości taśmy na częstotliwość drgań. Wykażemy obszary z przyleganiem oraz obszary z udziałem pełzania.

Prostą przesuniętą na wykresie  $f(v)$  (rys. 6.18) opisujemy funkcją liniową (linia B).



Rysunek 6.18: Zależność częstotliwości drgań od prędkości taśmy taśmociągu.

$$f = k_{\alpha} \cdot v + b. \quad (6.1)$$

Dobieramy najpierw wartość stałej  $b$ , a następnie zbadamy długość fali rzeczywistej

$$f = \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \cdot v + \frac{v}{\lambda(v)}, \quad (6.2)$$

gdzie:

$\lambda_{\alpha}$  – długość fali bez efektu przylegania/płynięcia,

$v$  – prędkość taśmy,

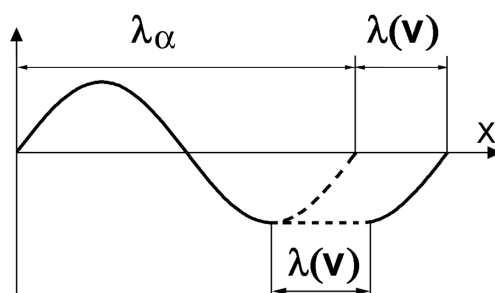
$\lambda(v)$  – przyrost długości fali, wywołany przyleganiem.

Ponieważ funkcja 6.1 jest liniowa, więc

$$\lambda(v) = \frac{v}{b}. \quad (6.3)$$

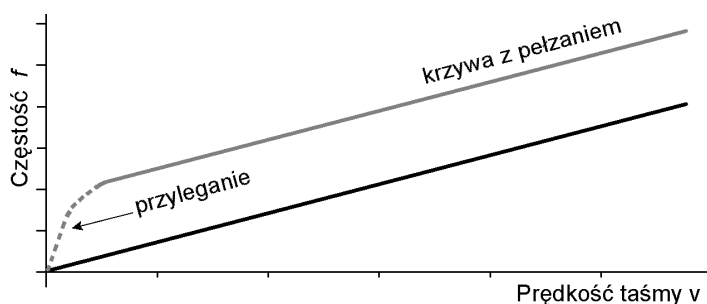
Łączna długość fali (rys. 6.19) wynosi

$$\lambda = \lambda_{\alpha} + \lambda(v) = \lambda_{\alpha} + \frac{v}{b}. \quad (6.4)$$



Rysunek 6.19: Schemat ukazujący wydłużenie fali w jednym cyklu drgań, wywołane przyleganiem/pełzaniem.

Ponieważ przyrost długości fali jest wprost proporcjonalny do prędkości, mamy do czynienia ze zjawiskiem pełzania. Przy bardzo małych prędkościach pełzanie ustępuje na rzecz przylegania. Rozpatrzmy sytuację z obszaru „C” na rysunku 6.18. Bardziej



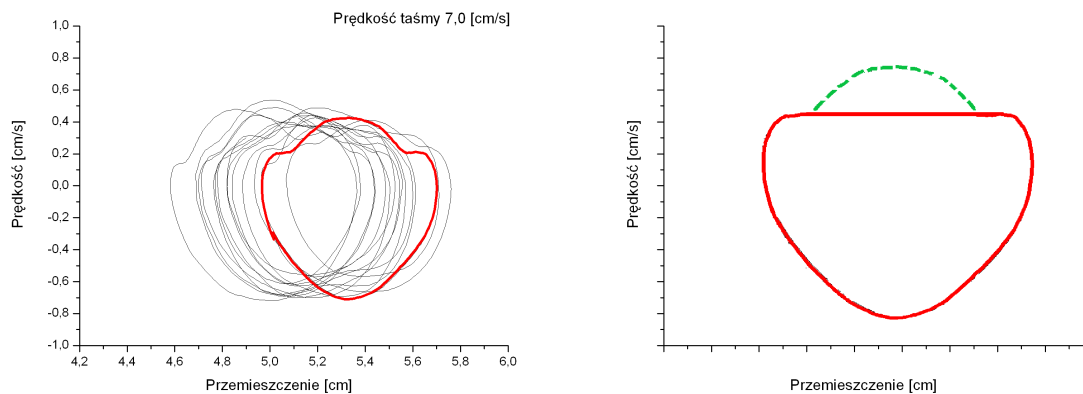
Rysunek 6.20: Krzywa zależności częstości drgań  $f$  od prędkości taśmy  $v$  z lokalizacją wpływu przylegania i pełzania oraz prosta bez udziału tych zjawisk.

stromy odcinek (oznaczony linią przerywaną) opisuje prosta

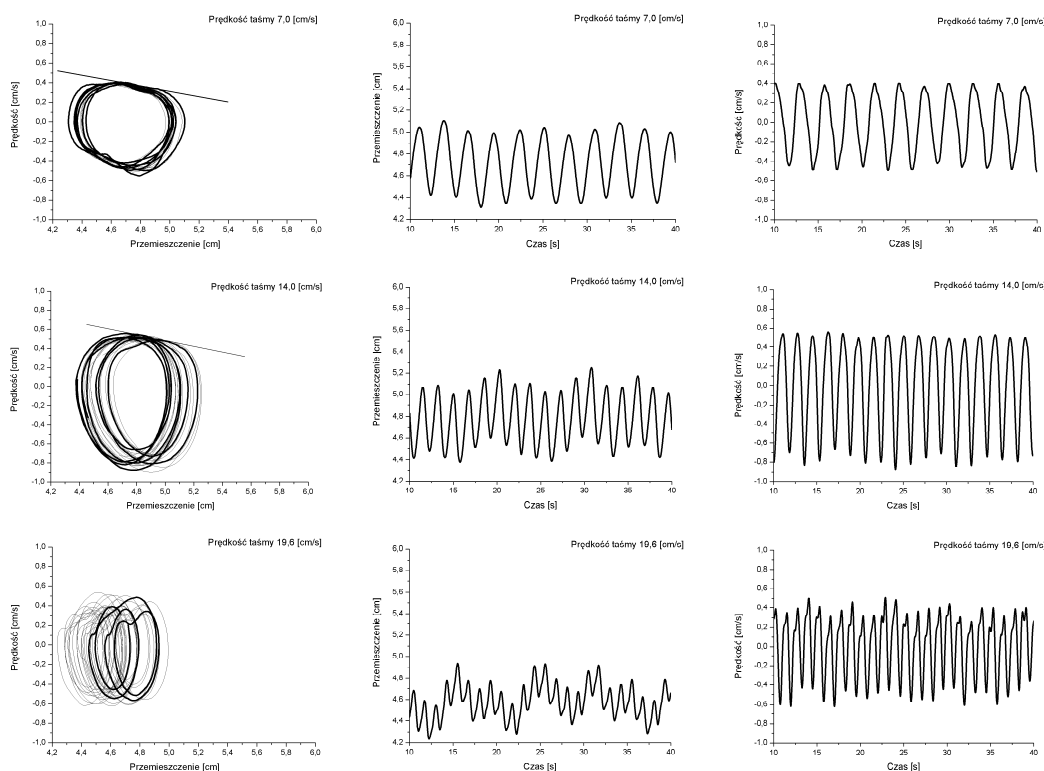
$$f = (k_\alpha + k) \cdot v = \frac{1}{\lambda_\alpha} \cdot v + k \cdot v \quad (6.5)$$

Widzimy, że przyrost długości fali  $\lambda_\alpha$  jest stały. W tym przypadku mamy do czynienia z przyleganiem. W miarę wzrostu prędkości zmniejsza się udział tego zjawiska, a rośnie efekt pełzania.

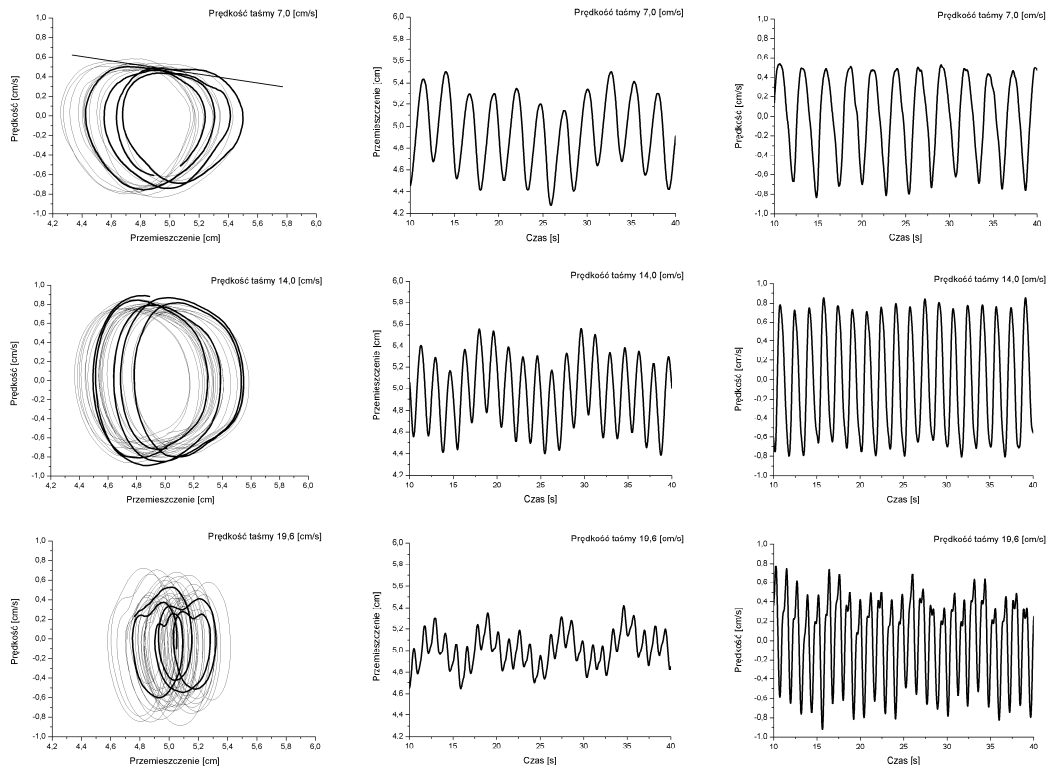




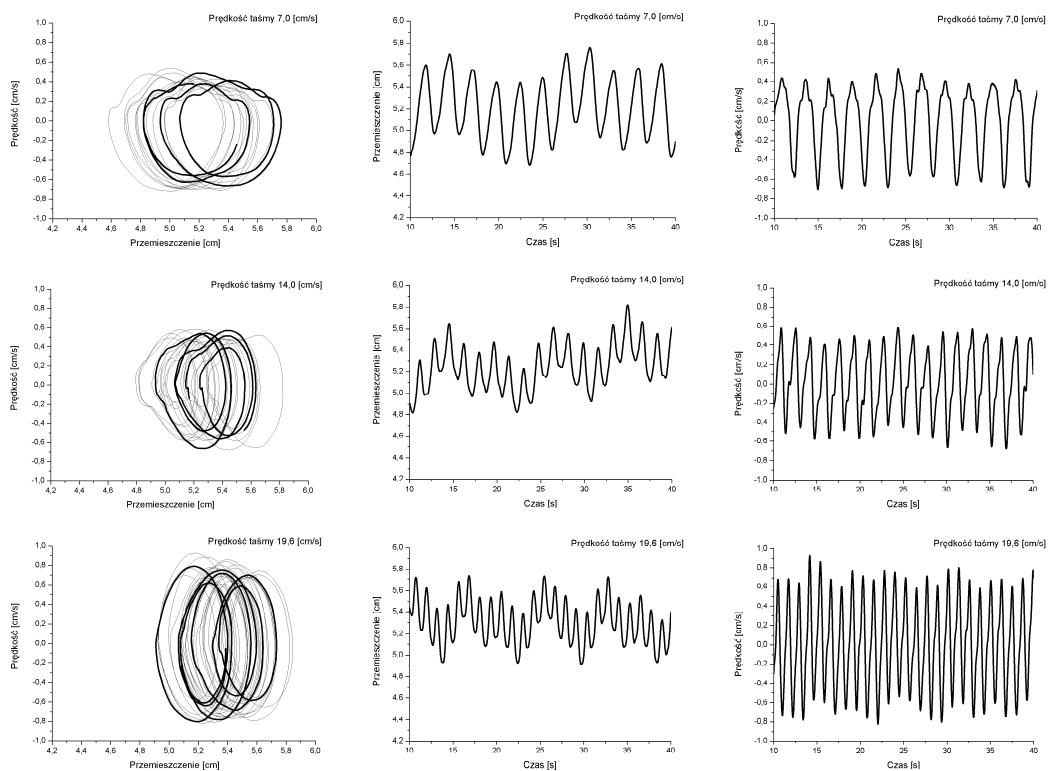
Rysunek 6.21: Wykres płaszczyzny fazowej ruchu koła stalowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 9,7$  N oraz schematyczna trajektoria fazowa drgań typu przyleganie-poślizg z fazą dodatkowego wymuszenia – przerywana linia.



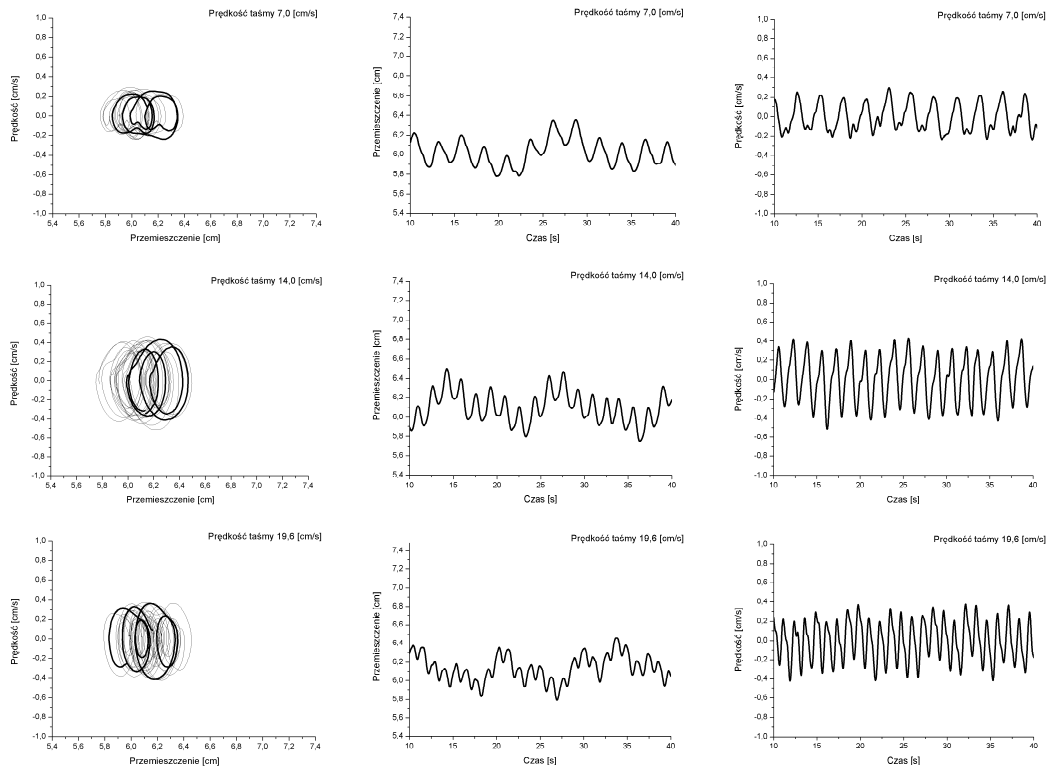
Rysunek 6.22: Wyniki pomiarów ruchu koła stalowego przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 9,7$  N (linią prostą wskazano zjawisko pełzania).



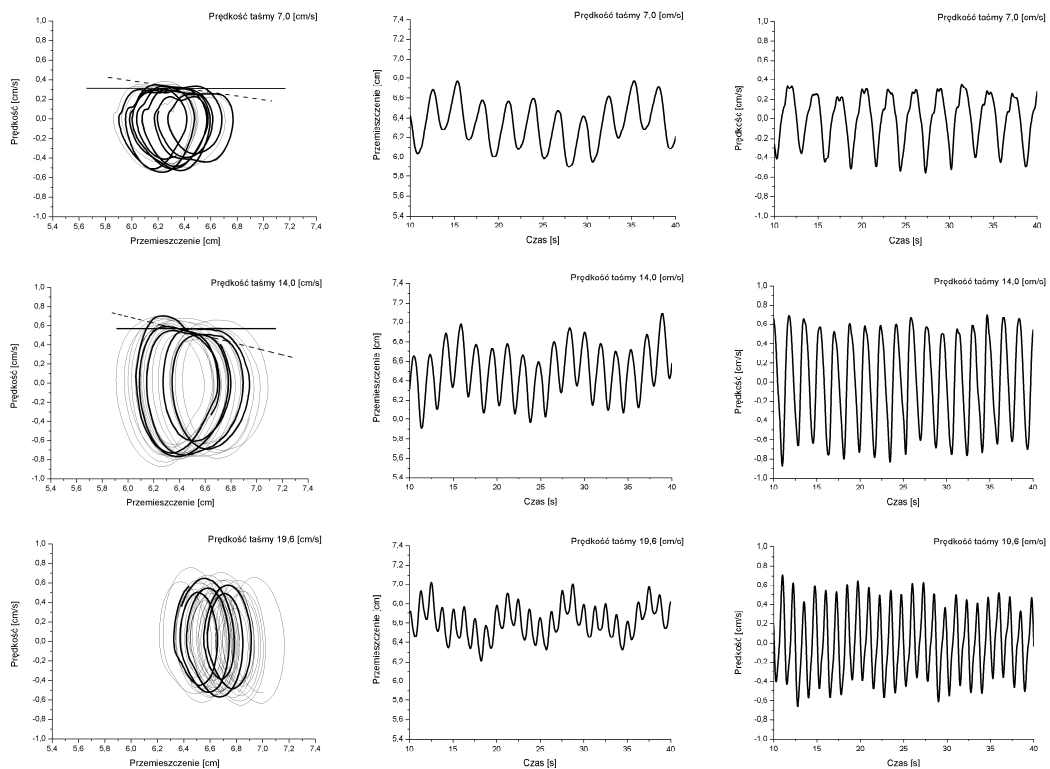
Rysunek 6.23: Wyniki pomiarów ruchu koła stalowego przy kącie  $\alpha = 6^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7, 0, 14, 0, 19, 6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 9, 7$  N (linę prostą wskazano zjawisko pełzania).



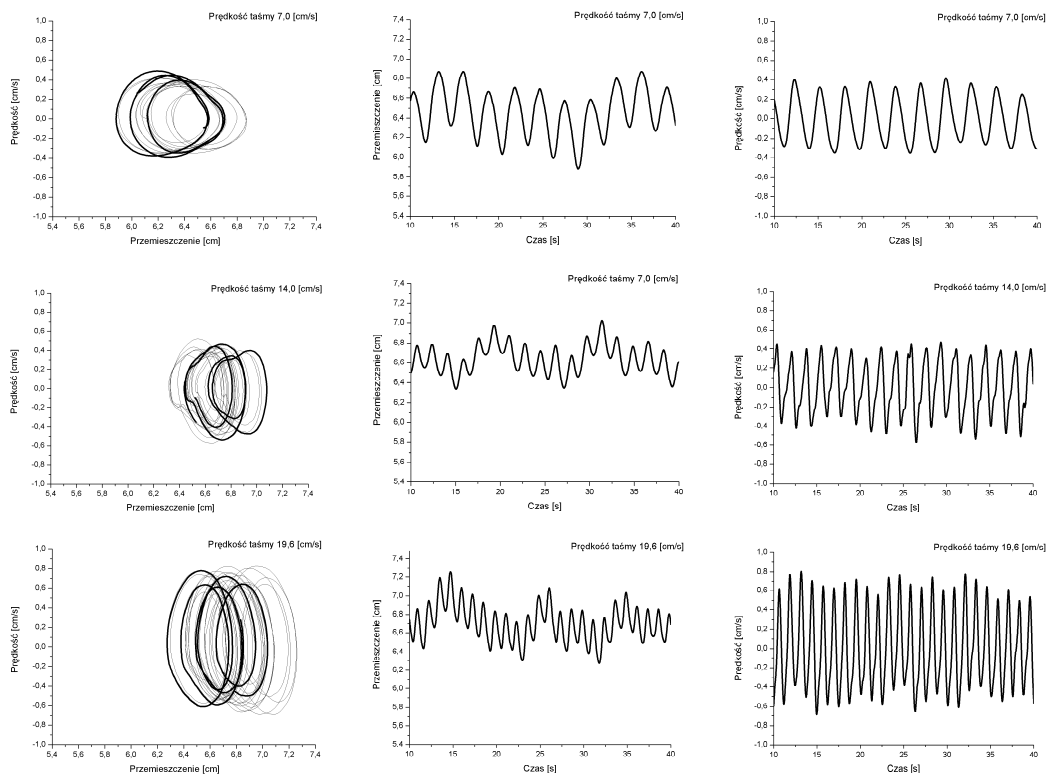
Rysunek 6.24: Wyniki pomiarów ruchu koła stalowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7, 0, 14, 0, 19, 6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 9, 7$  N.



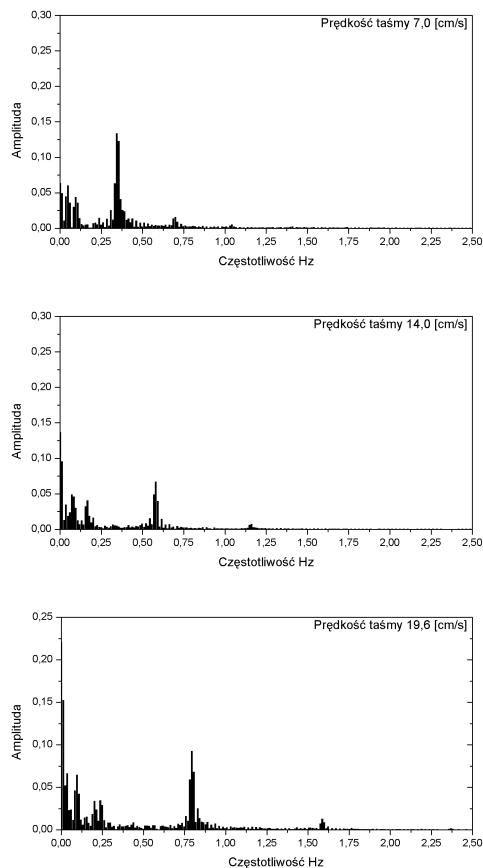
Rysunek 6.25: Wyniki pomiarów ruchu koła stalowego przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 14,9$  N.



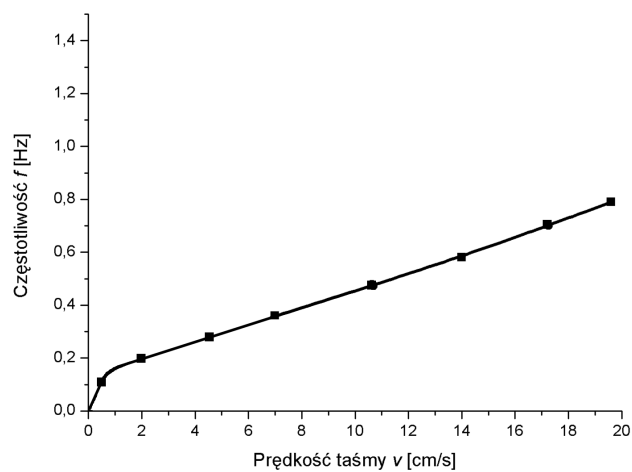
Rysunek 6.26: Wyniki pomiarów ruchu koła stalowego przy kącie  $\alpha = 6^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 14,9$  N (liną prostą ciągłą wskazano zjawisko przylegania, a liną przerywaną zjawisko pełzania).



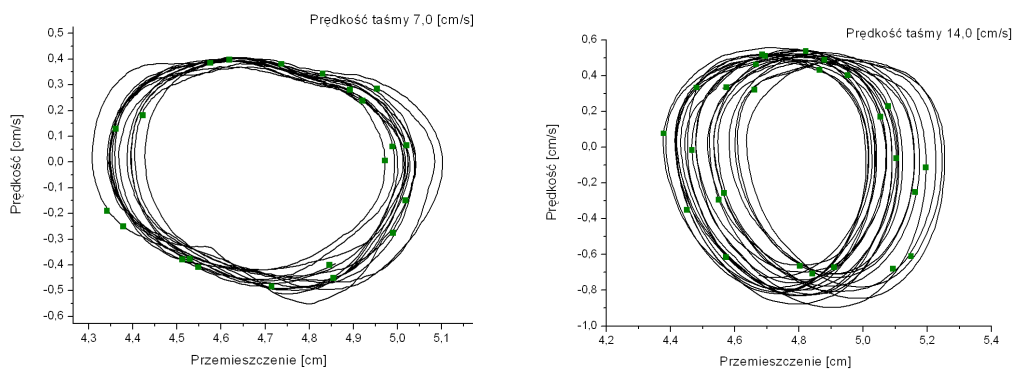
Rysunek 6.27: Wyniki pomiarów ruchu koła stalowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7, 0, 14, 0, 19, 6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 14, 9$  N.



Rysunek 6.28: Analiza amplitudowo–częstotliwościowa przemieszczenia koła stalowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 9,7$  N.



Rysunek 6.29: Zmiana częstości pod wpływem zmian prędkości taśmy  $v$  przy kącie  $\alpha = 10^\circ$  i nacisku pionowym  $N = 13,7$  N



Rysunek 6.30: Wykresy przestrzeni fazowej koła stalowegoo przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0$  cm/s i nacisku  $N = 9,7$  N oraz ich mapy Poincaré (kwadraty).

## 6.4 Para cierna koło aluminiowe – poliester

Rozdział ten prezentuje wyniki badań pary czarnej aluminium – poliester. Para ta wykazuje podobny jak przy dwóch poprzednich przypadkach (poliamid – poliester i stal – poliester) charakter drgań dwuokresowych. Występują tutaj podobne relacje wpływu zmian parametrów regulacyjnych stanowiska ( $v$ ,  $\alpha$  i  $N$ ) na charakter osiowych drgań koła, jak opisane w rozdziałach 6.1 i 6.2.

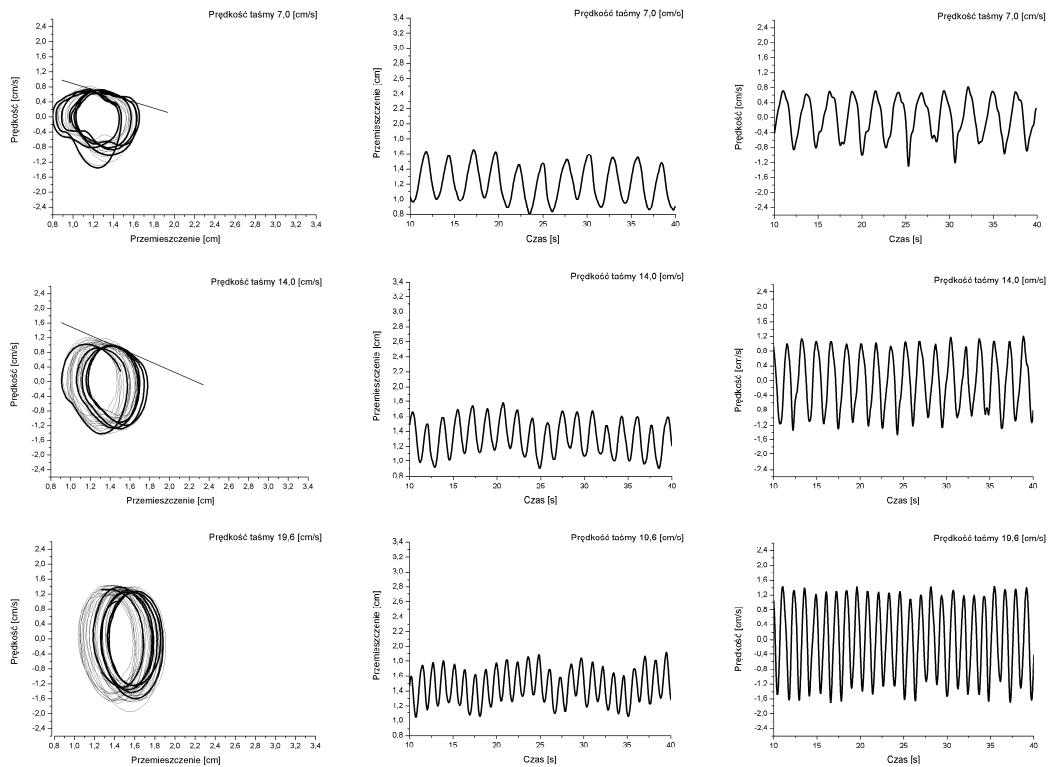
Udział obu składowych drgań jest różny i zależy od prędkości przesuwu taśmy. Wzrost tej prędkości zmniejsza amplitudę drgań o niskiej i wyższej częstotliwości. Ilustrują to wykresy przemieszczeń na rysunkach 6.31÷6.33 w przypadku siły nacisku  $N=4,25$  N. Zjawisko to jest ponadto niezależne od siły nacisku.

Wzrost nacisku  $N$  wywołuje spadek amplitudy drgań wyższej częstotliwości. Uwidocznia to porównanie wykresów rys. 6.33 i 6.36 przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ . Przy sile  $N=4,25$  N amplituda waha się od 1,0 cm przy prędkości 7 cm/s do 0,8 cm przy prędkości 19,6 cm/s, a przy sile  $N=13,7$  N jest w przedziale od 0,7 cm przy prędkości 7 cm/s do 0,5 cm/s przy prędkości 19,6 cm/s. Wykresy 6.31 i 6.34 wskazują tę samą zależność przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ .

Trzecim spostrzeżeniem jest oddalanie się przemieszczeń od położenia równowagi wraz ze wzrostem siły nacisku. Ilustrują to choćby wykresy fazowe i przemieszczeń na rysunkach 6.32 i 6.35 oraz 6.33 i 6.36, wybrane przy jednakowych prędkościach taśmy  $v$  i jednakowych kątach  $\alpha$ .

Kolejnym charakterystycznym zjawiskiem uwidocznionym na wykresach jest występowanie efektu pełzania koła po taśmie. Zjawisko pełzania występuje przy niskich prędkościach taśmy  $v$  i przy małym kącie  $\alpha$ . Wystąpienie pełzania zaznaczono linią prostą na wykresach fazowych (rys. 6.31, 6.32 i 6.34, 6.35). Przy prędkościach niskich i średnich, przy małym kącie  $\alpha = 4^\circ$ ; występuje zjawisko przylegania i poślizgu (rys. 6.31 i 6.34). Przy kącie  $\alpha = 6^\circ$  pełzanie można zaobserwować tylko przy małych prędkościach (rys. 6.32, 6.35).

Wzrost kąta  $\alpha$  wpływa na zwiększenie amplitudy drgań wyższych częstotliwości w zakresie niskich prędkości przesuwu taśmy  $v$ . Uwidaczniają to rysunki 6.34 i 6.36 przy sile nacisku  $N=13,7$  N. Wzrost kąta od  $4^\circ$  do  $10^\circ$  wywołuje wzrost amplitudy od 0,5 cm do 0,7 cm. Przy wyższych prędkościach taśmy opisany efekt nie występuje, a amplituda waha się wokół wartości 0,5 cm. Wzrost kąta  $\alpha$  wpływa proporcjonalnie na



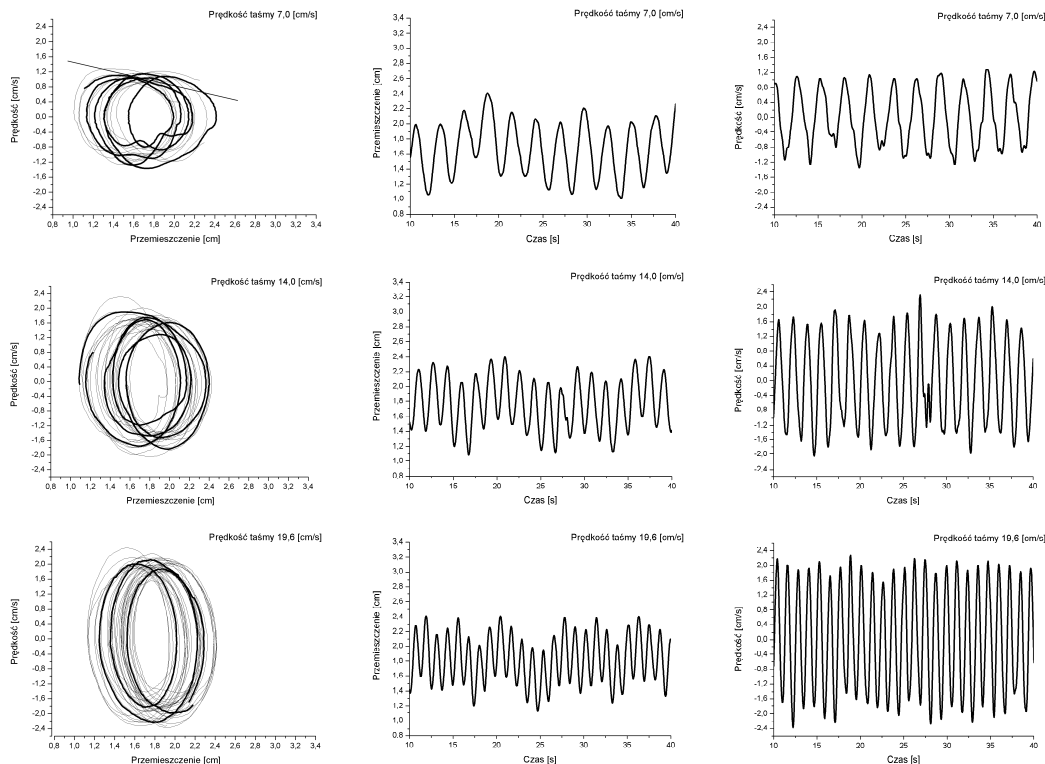
Rysunek 6.31: Wyniki pomiarów ruchu koła aluminiowego przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7, 0, 14, 0, 19, 6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 4, 25$  N (liną prostą wskazano zjawisko pełzania).

przesunięcie wykresu przemieszczeń względem położenia równowagi (rys. 6.37). Wykresy przesuwają się zgodnie z kierunkiem ruchu taśmy, podobnie jak w przypadku zwiększenia siły nacisku pionowego  $N$ .

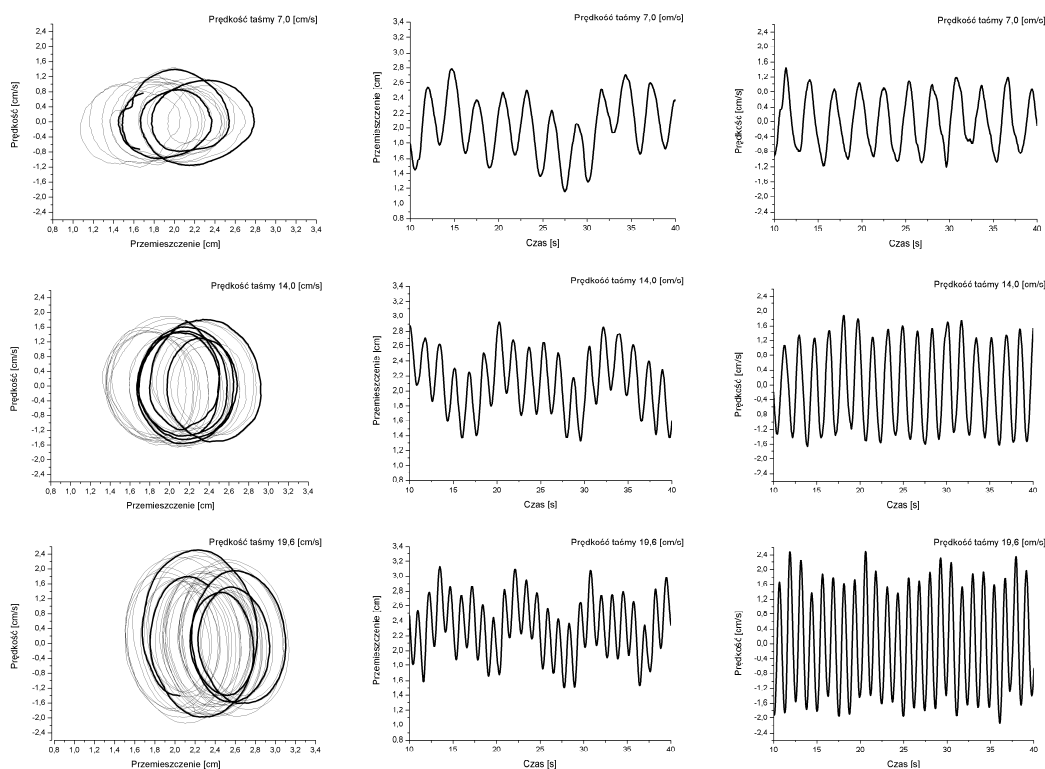
Ważną cechą charakterystyczną zarejestrowanych drgań, która powtarza się przy każdej parze cierniej jest wzrost częstości wraz ze wzrostem prędkości przesuwu taśmy. Podobnie jak w przypadku poprzednich par ciernych, jest to naturalne. W prezentowanych wynikach także widać początkowo znaczne zwiększenie częstości przy wzroście prędkości taśmy w zakresie małych prędkości, a następnie mniejszy, stały wzrost, proporcjonalny do prędkości (rys. 6.39). Wykres ten powstał na podstawie analizy amplitudowo–częstotliwościowej, przykładowo pokazanej na rysunku 6.38, oraz innych, wykonanych przy innych prędkościach.

Wykresy Poincaré (rys. 6.40) dowodzą niezależności drgań osiowych od obrotów koła.

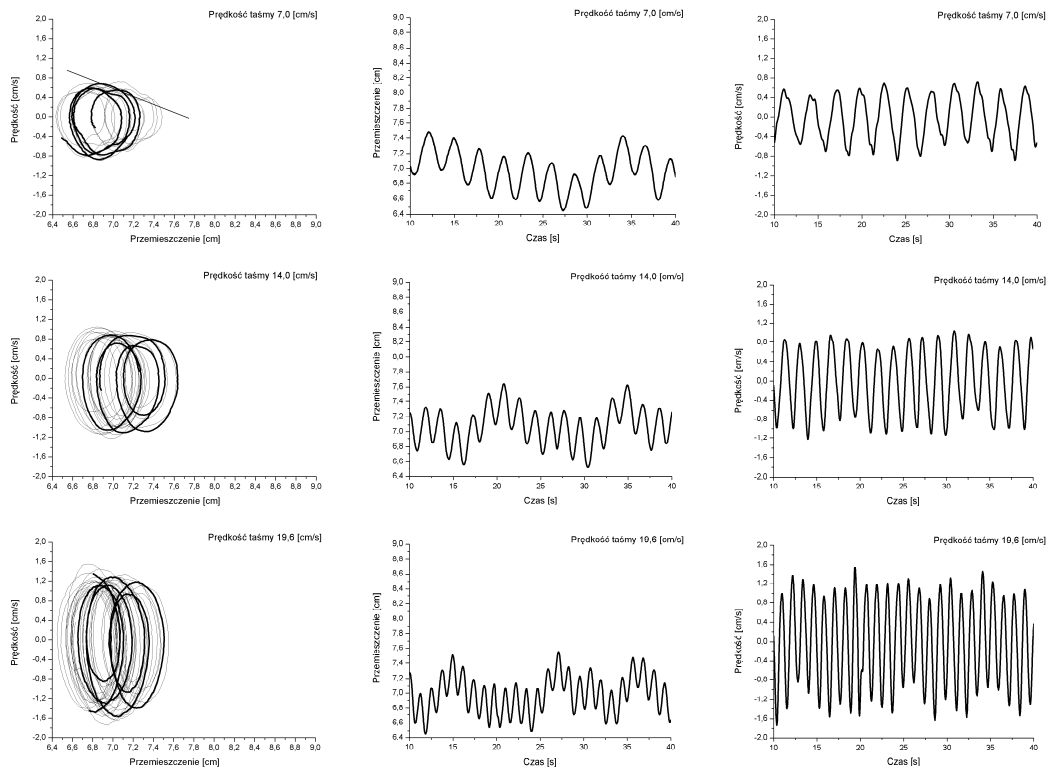




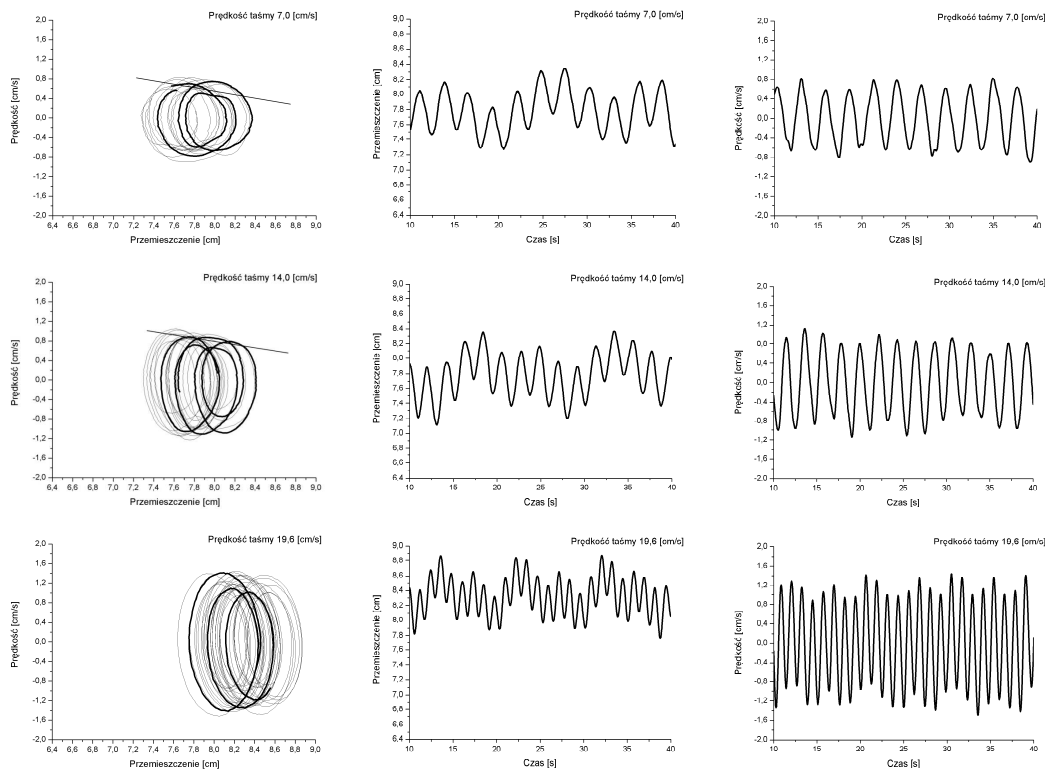
Rysunek 6.32: Wyniki pomiarów ruchu koła aluminiowego przy kącie  $\alpha = 6^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7, 0, 14, 0, 19, 6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 4, 25$  N (liną prostą wskazano zjawisko pełzania).



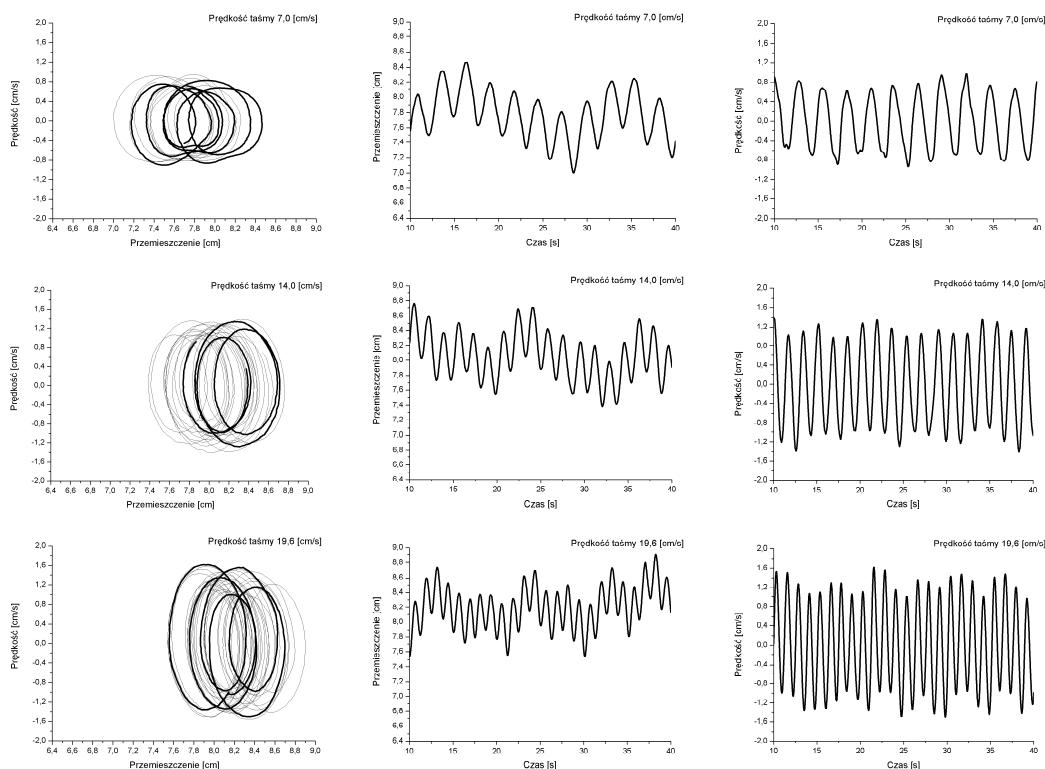
Rysunek 6.33: Wyniki pomiarów ruchu koła aluminiowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7, 0, 14, 0, 19, 6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 4, 25$  N.



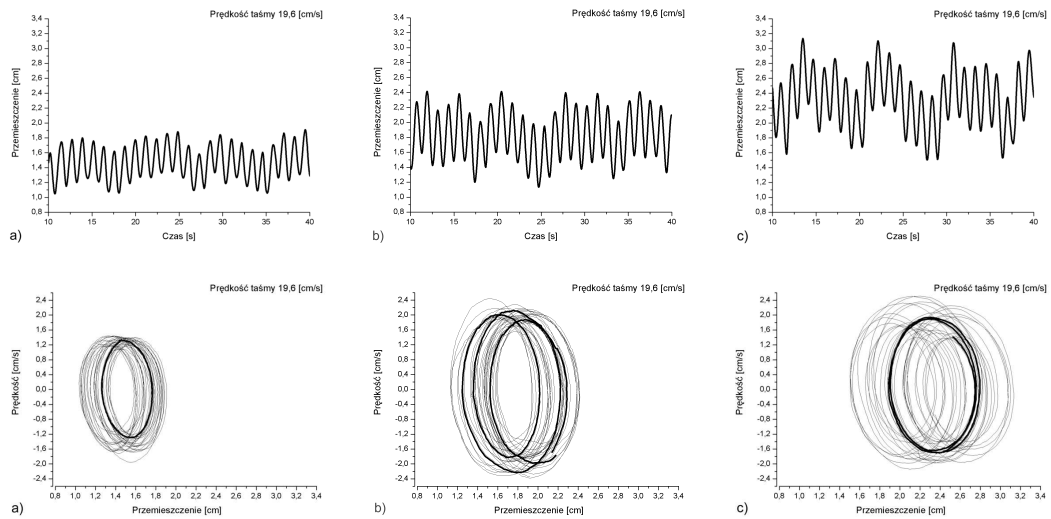
Rysunek 6.34: Wyniki pomiarów ruchu koła aluminiowego przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7, 0, 14, 0, 19, 6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 13, 7$  N (liną prostą wskazano zjawisko pełzania).



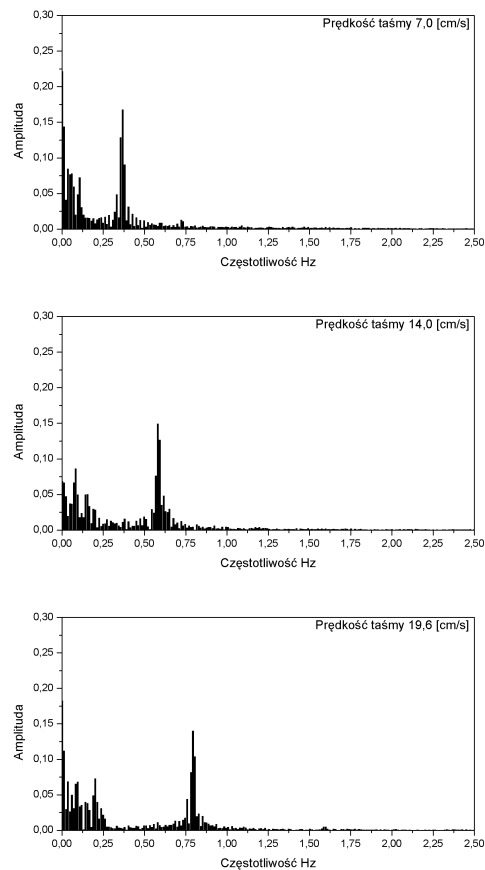
Rysunek 6.35: Wyniki pomiarów ruchu koła aluminiowego przy kącie  $\alpha = 6^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7, 0, 14, 0, 19, 6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 13, 7$  N (liną prostą wskazano zjawisko pełzania).



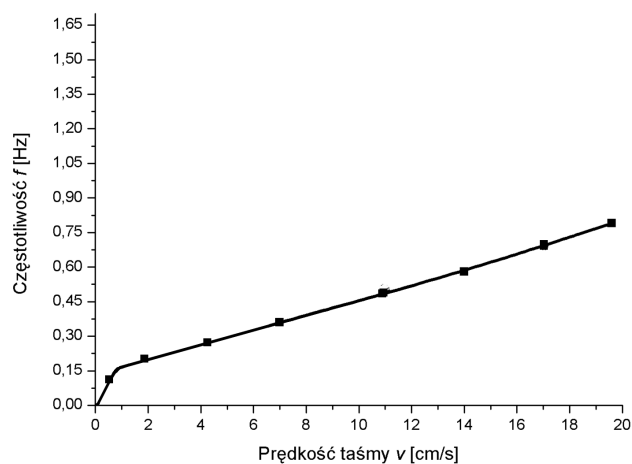
Rysunek 6.36: Wyniki pomiarów ruchu koła aluminiowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7, 0, 14, 0, 19, 6$  cm/s i nacisku pionowym  $N = 13, 7$  N.



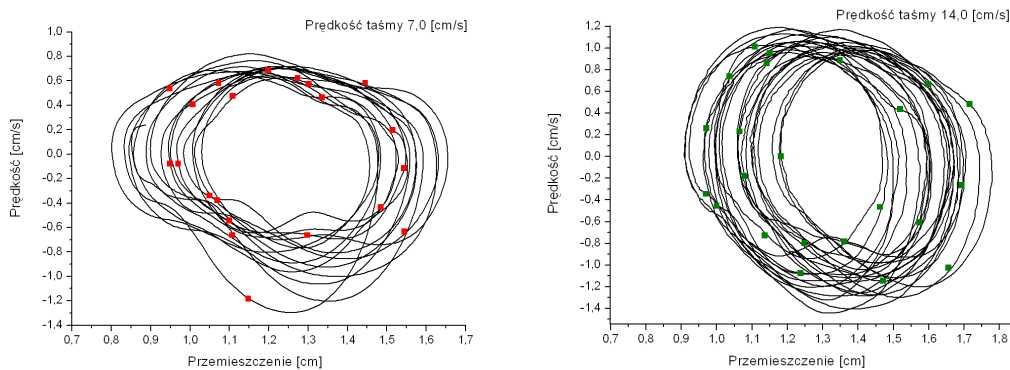
Rysunek 6.37: Wykresy przemieszczeń i obszary płaszczyzn fazowych w przypadku ruchu koła aluminiowego przy prędkości taśmy  $v = 19,6$  cm/s, nacisku pionowym  $N = 4,25$  N i kątach a)  $\alpha = 4^\circ$ , b)  $\alpha = 6^\circ$ , c)  $\alpha = 10^\circ$ .



Rysunek 6.38: Analiza amplitudowo-częstotliwościowa przemieszczeń koła aluminiowego przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ , nacisku pionowym  $N = 13,7$  N i prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0, 19,6$  cm/s.



Rysunek 6.39: Wykres częstotliwości drgań koła aluminiowego przy zmianie prędkości taśmy  $v$ , kącie  $\alpha = 10^\circ$ , nacisku pionowym  $N = 13,7$  N.



Rysunek 6.40: Obrazy płaszczyzn przestrzeni fazowej w przypadku koła aluminiowego przy kącie  $\alpha = 4^\circ$ , prędkości taśmy  $v = 7,0, 14,0$  cm/s i nacisku  $N = 8,5$  N oraz ich mapy Poincaré (kwadraty).

# Rozdział 7

## Opis teoretyczny ruchu bocznego koła

Analiza wyników eksperymentalnych wykazała dwuokresowy charakter drgań. Stąd też podjęto próbę opisu ruchu bocznego koła układem dwóch oscylatorów sprzężonych. W modelu fizycznym jeden stopień swobody odpowiada ruchowi obrotowemu koła, a drugi – ruchowi bocznemu, poprzecznemu. W obiektach rzeczywistych pierwszy odpowiada obrotowemu ruchowi oscylacyjnemu, wynikającemu z odkształcalności skrętnej osi, deformacjom materiału koła w strefie kontaktu, w kierunku stycznym, oraz odkształceń szyny kolejowej w kierunku wzdłużnym, pod wpływem m. in. zjawisk falowych, wywołanych choćby periodyczną strukturą toru. Drugi stopień swobody odpowiada bocznej odkształcalności koła kolejowego lub samochodowego oraz odkształcalności bocznej szyny.

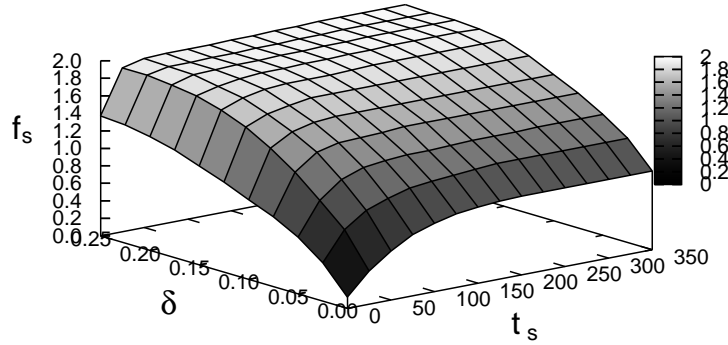
W przypadku stanowiska badawczego oba kierunki odkształceń mogą wynikać z odkształcalności wzdłużnej i bocznej polimerowego pasa oraz podatności sprężyny poziomej. Poniżej podjęta zostanie próba matematycznego ujęcia zjawiska.

### 7.1 Model matematyczny

Na podstawie zaobserwowanej dwuokresowości drgań zaproponowano matematyczny opis układu o dwóch stopniach swobody, odpowiadający charakterem odpowiedzi układowi badanemu:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) & f_{12}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \\ f_{21}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) & f_{22}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

Wektor przemieszczeń  $\mathbf{y}$  zawiera przemieszczenia  $y_1$  i  $y_2$ , a wektor prędkości  $\dot{\mathbf{y}}$  zawiera prędkości  $\dot{y}_1 = v_1$  i  $\dot{y}_2 = v_2$ . W modelu tym jeden stopień swobody odpowiada ru-



Rysunek 7.1: Dynamiczny współczynnik tarcia  $f_s$  w zależności od czasu przylegania  $t_s$  oraz prędkości narastania siły  $\delta$  [25].

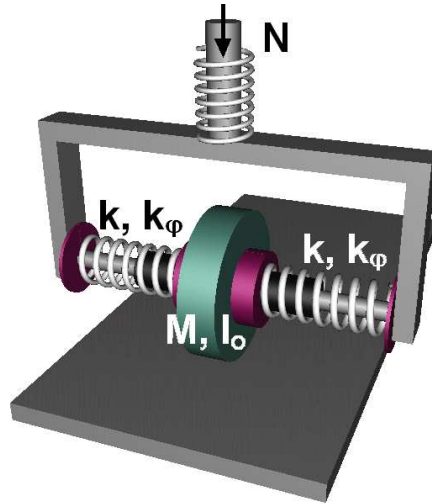
chowi poprzecznemu koła w kierunku jego osi, a drugi ruchowi obrotowemu. Macierze bezwładności i sztywności w tym układzie są stałe. Współczynniki macierzy tłumienia w ogólnym przypadku zależą od przemieszczeń oraz prędkości obu stopni swobody. Wzajemne sprzężenie stopni swobody przyjmujemy w postaci parametrycznych funkcji  $f_{ij}$ , które zostaną przedstawione w dalszej części rozdziału.

W naszych rozważaniach zaniedbujemy zależność tarcia od czasu przylegania  $t_s$  oraz prędkości narastania siły  $\delta$  (rys. 7.1). Okresowość ruchu uzależniamy od prędkości taśmy taśmociągu  $v$ , kąta  $\alpha$  między płaszczyzną koła a kierunkiem taśmy oraz nacisku  $N$ . Upraszczamy nasz model następującymi założeniami. Taśma i koło są ciałami sztywnymi, układ zawieszenia (sprężyny) ma linową charakterystykę sztywności osiowej  $k$  jak również skrętnej  $k_\varphi$  (rys. 7.2).

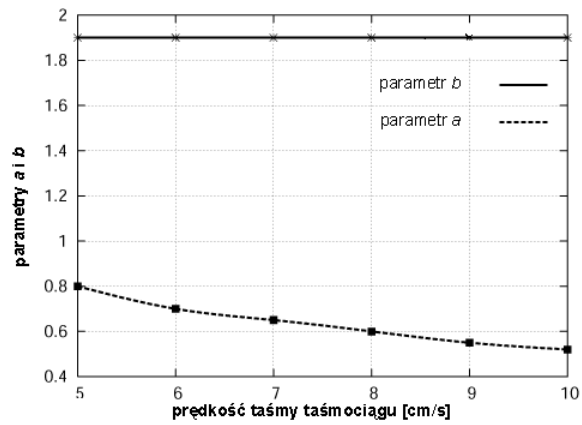
Ruch boczny koła możemy opisać następującymi równaniami:

$$y = \sin(t) + a \sin(2t + b), \quad \dot{y} = \cos(t) + 2a \cos(2t + b). \quad (7.2)$$

Opieramy się na wykresach fazowych wyników drgań koła poliamidowego. Dobieramy wartości współczynników  $a$  i  $b$ , zależnie od wybranego parametru toczenia (rys. 7.4). Przy różnej prędkości taśmy z zakresu  $v = 5 \div 10$  cm/s parametry  $a$  i  $b$  przyjmują wartości zebrane w tabelicy 7.1 i pokazane na rys. 7.3. Parametr  $a$  określa udział wyższej częstotliwości. Parametr  $b$  odpowiada przesunięciu fazowemu tej składowej drgań. Rysunek 7.3 pokazuje, że wraz ze wzrostem prędkości toczenia maleje udział wyższej częstotliwości drgań. Rysunek 7.5 przedstawia trajektorie fazowe wykreślone z uwzględnieniem osi czasu, na podstawie równań 7.1, z parametrami z tabelicy 7.1.



Rysunek 7.2: Schemat modelu badanego układu.

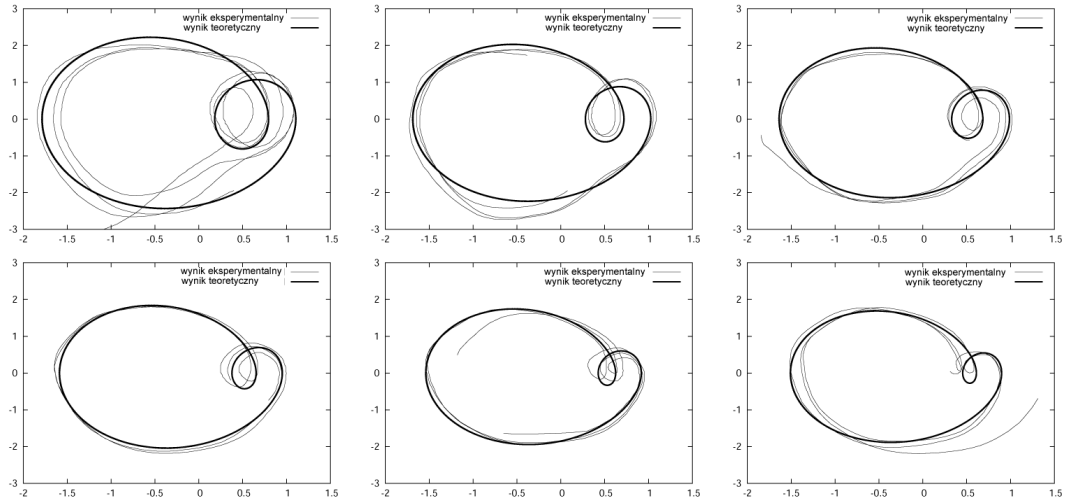


Rysunek 7.3: Zmiana parametrów  $a$  i  $b$  w zależności od prędkości taśmy.

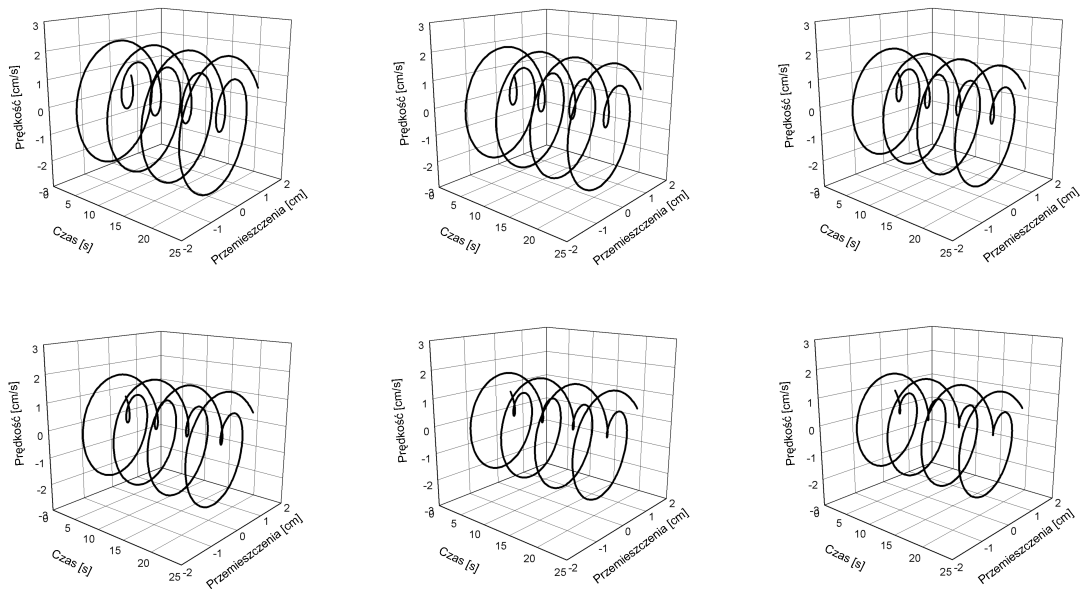
Tablica 7.1: Parametry  $a$  i  $b$  przy różnych prędkościach pasa transportera.

$v$ [cm/s]	5	6	7	8	9	10
$a$	0.80	0.70	0.65	0.60	0.55	0.52
$b$	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90





Rysunek 7.4: Teoretyczne (linia gruba) i eksperymentalne (linia cienka) wyniki w płaszczyźnie fazowej przemieszczenie–prędkość, przy kącie  $\alpha = 5^\circ$  i prędkości taśmy  $v = 5 \div 10$  cm/s.



Rysunek 7.5: Wykresy trajektorii fazowych z uwzględnieniem osi czasu, uzyskane z modelu teoretycznego przy parametrach  $a$  i  $b$  zestawionych w tabelicy 7.1.

Wykorzystując model 7.1 możemy opisać drgania typu przyleganie–poślizg. Przyjmijmy w równaniu różniczkowym ruchu przykładowe macierze  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Zastosowano też małe tłumienie numeryczne. Przyjęto warunki początkowe  $q_1 = q_2 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ , oraz w pierwszym kroku wymuszenie impulsowe  $F_2 = 1$ , działające w czasie  $\Delta t$ . W następnych krokach całkowania numerycznego wpływ tarcia wprowadzono jako obciążenie zewnętrzne  $F_2$

$$F_2 = -\text{sign}(v_2 - c_0)(c_1|v_2 - 1| - c_2)^2, \quad (7.4)$$

gdzie:  $v_2$  jest prędkością drugiego stopnia swobody, a  $c_0, c_1, c_2$  są stałymi. Przyjęto  $c_0 = 1, c_1 = 1/5, c_2 = 1/5$ . Równanie 7.3 opisuje układ dwóch oscylatorów o sztywności  $k_1 = 1$  i  $k_2 = 0,5$  oraz masach  $m_1 = 1$  i  $m_2 = 0,5$ . Wynik w płaszczyźnie fazowej  $x_2, v_2$  – przemieszczenia i prędkości drugiego stopnia swobody, pokazuje rysunek 7.6. Jeżeli wpływ tarcia w postaci 7.4 będzie mniejszy, to odcinek sklejenia uwidoczniamy na rysunku 7.6 w postaci linii prostej będzie mniejszy. Przyjmując stałe  $c_0 = 1, c_1 = 0,10, c_2 = 0,25$  otrzymujemy efekt bliski sklejeniu (rys. 7.7). Sposób dochodzenia do cyklu granicznego pokazuje rysunek (7.8).

Powyższe rozważania dotyczą cykli z fazą sklejenia–poślizgu. Podobne wyniki można otrzymać przy:

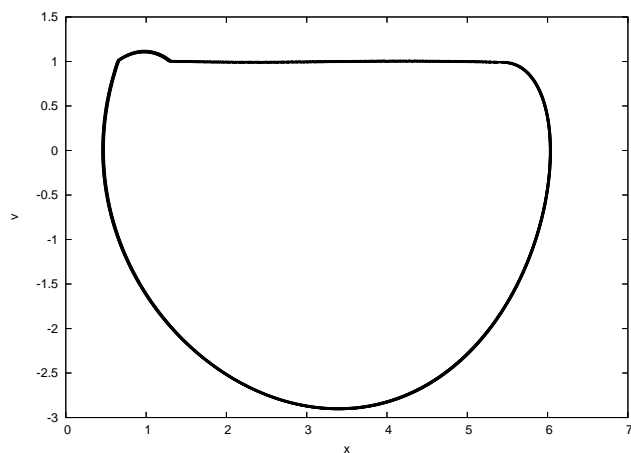
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

lecz należy ponownie dopasować współczynniki  $c_1, c_2$  oraz  $c_0$ .

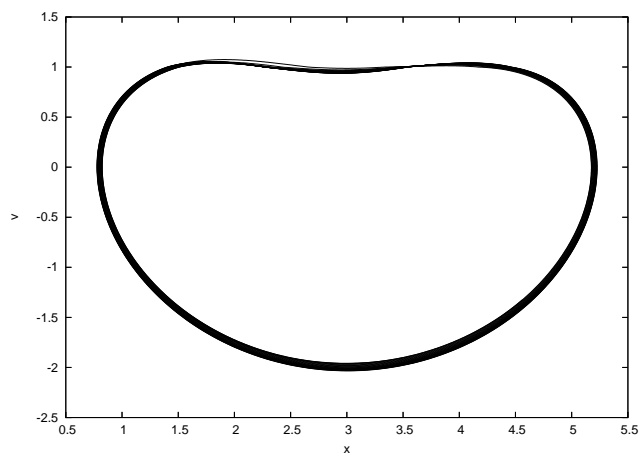
W przypadku koła stalowego postępujemy podobnie jak w przypadku koła poliamidowego. Przemieszczenia koła stalowego mają nieco inny charakter. Pętle na płaszczyźnie fazowej są przesunięte względem siebie i bardziej zaburzone od wyników koła poliamidowego (rys. 7.9 i 7.10).

Można przeprowadzić wiele symulacji, dobierając różne zestawy parametrów, aby uzyskać dobrą zgodność z wynikami eksperymentalnymi. Przykładowo przyjmijmy następujące warunki początkowe:  $q_1 = q_2 = 0, \dot{q}_1 = -0,2, \dot{q}_2 = 1,0$ . Zgodność z eksperymentem uzyskujemy przy  $f_{11} = f_{21} = f_{22} = 0$  i  $f_{12}$  w postaci

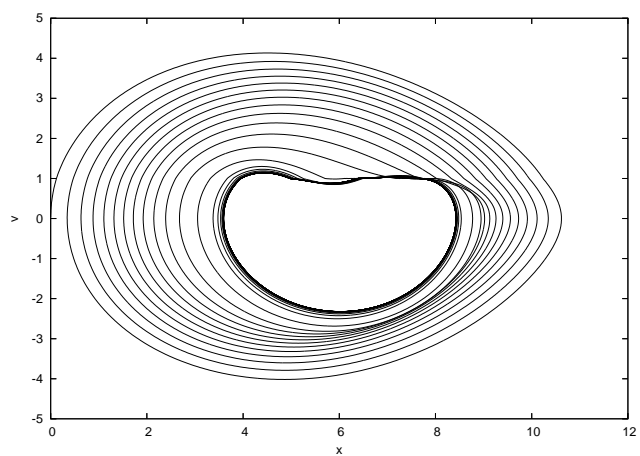
$$f_{12} = c_1 (|v_2| + c_2)^2 + c_3 q_2. \quad (7.6)$$



Rysunek 7.6: Trajektoria fazowa uzyskana z modelu teoretycznego, zbliżona do obrazu płaszczyzny fazowej drgań typu przyleganie-poślizg.



Rysunek 7.7: Obraz teoretycznej trajektorii fazowej.



Rysunek 7.8: Obraz granicznej płaszczyzny fazowej modelu teoretycznego.

Rozpatrzmy przypadek  $m_{11} = 16$ ,  $m_{22} = 1$ ,  $k_{11} = k_{22} = 1$  i  $c_1 = 24$ ,  $c_2 = -0,5$ ,  $c_3 = -18$  w funkcji 7.6. Prędkość  $v_2$  wnosi efekt tarcia.  $f_{12}$  wywołuje parametryczne wzbudzenie drgań. Ruch boczny koła stalowego można dobrze opisać zależnością

$$y = -\sin t + a \sin 2t + b \sin \frac{t}{4}, \quad \dot{y} = -\cos t + 2a \cos 2t + \frac{b}{4} \cos \frac{t}{4}. \quad (7.7)$$

Widzimy, że w tym przypadku wielokrotnością częstości podstawowej drgań jest liczba cztery, w przeciwieństwie do przypadku koła poliamidowego, gdzie mnożnikiem była liczba dwa.

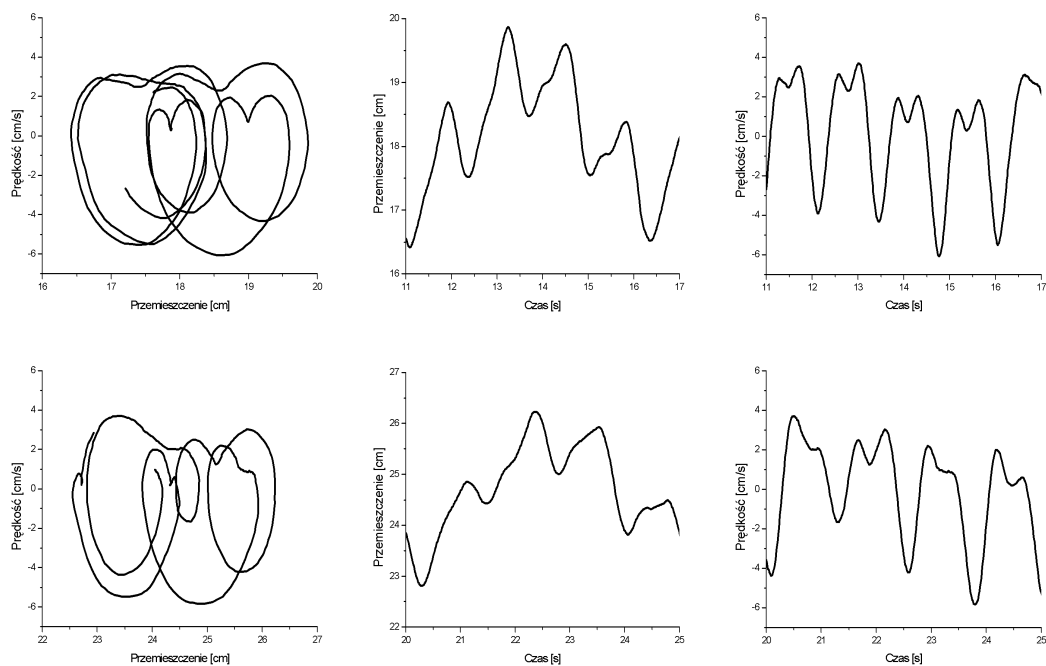
Porównajmy wyniki eksperymentalne (rys. 7.9 i 7.10) z wykresami funkcji (7.7), pokazanymi na rysunkach 7.14. Oba przypadki odpowiadają oscylacjom przy niskim nacisku, przy kącie  $10^\circ$  i  $15^\circ$ . Wykreślono je przy  $a = -0,35$ ,  $b = 1,4$  i  $a = -0,15$ ,  $b = 1,4$ . Można zauważyć, że trzeci człon wyrażenia (7.7) ze współczynnikiem  $b$  jest odpowiedzialny za drgania długookresowe (czterokrotnie dłuższe od okresu podstawowego np. rys. 7.13). Charakterystyczne drgania koła stalowego otrzymuje się dzięki dwóm pierwszym członom (7.7). Wykresy fazowe (rys. 7.11, 7.12) umożliwiają ocenę porównawczą przypadków teoretycznych pokazanych na rysunkach 7.13 i 7.14.

Najbardziej ogólny teoretyczny model uzyskuje się z równania 7.1. Zastosowano w tym przypadku całkowanie równania różniczkowego metodą elementów czasoprzestrzennych. Rys. 7.15 przedstawia wydruk przykładowego programu komputerowego w języku fortran. Umożliwia on uzyskanie stabelaryzowanych funkcji przemieszczeń oraz prędkości obu stopni swobody oraz wielkości  $f_{i,j}$ , odpowiadających m.in. sile tarcia. Danymi wejściowymi są:  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ , wartości początkowych przemieszczeń  $q_1$ ,  $q_2$  i prędkości  $v_1$ ,  $v_2$  oraz parametry opisujące funkcję  $f_{12}$ . Jako  $f_{12}$  przyjęto następujące wyrażenie

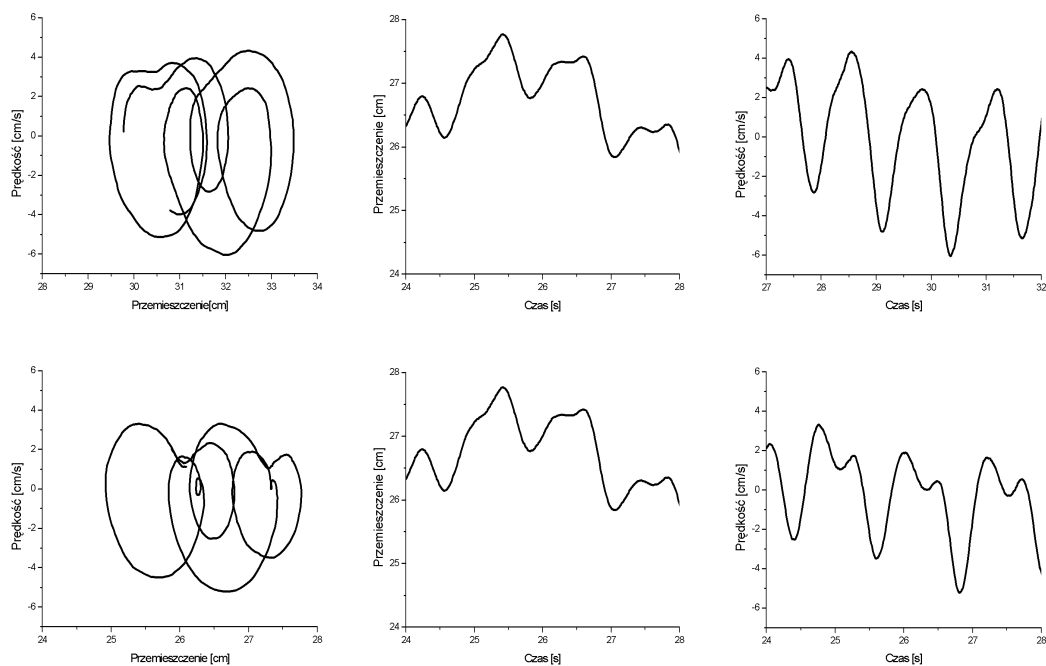
$$f_{12} = \text{sign}(v_2) \cdot [p_1(|v_2| - p_2)^2 + p_3]. \quad (7.8)$$

Pozostałe wartości  $f_{i,j}$  przyjęto równe zero. W zależności od parametrów  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  uzyskujemy różne prawa tarcia. Okazuje się, że zmiany jakościowe przebiegu funkcji (7.8) nie wpływają w istotny sposób na wyniki. Poniżej pokazane zostaną wybrane przebiegi drgań, wraz z trajektorią fazową oraz wykresem funkcji tarcia, przyjmowanej w obrazowanych zakresach prędkości ruchu.

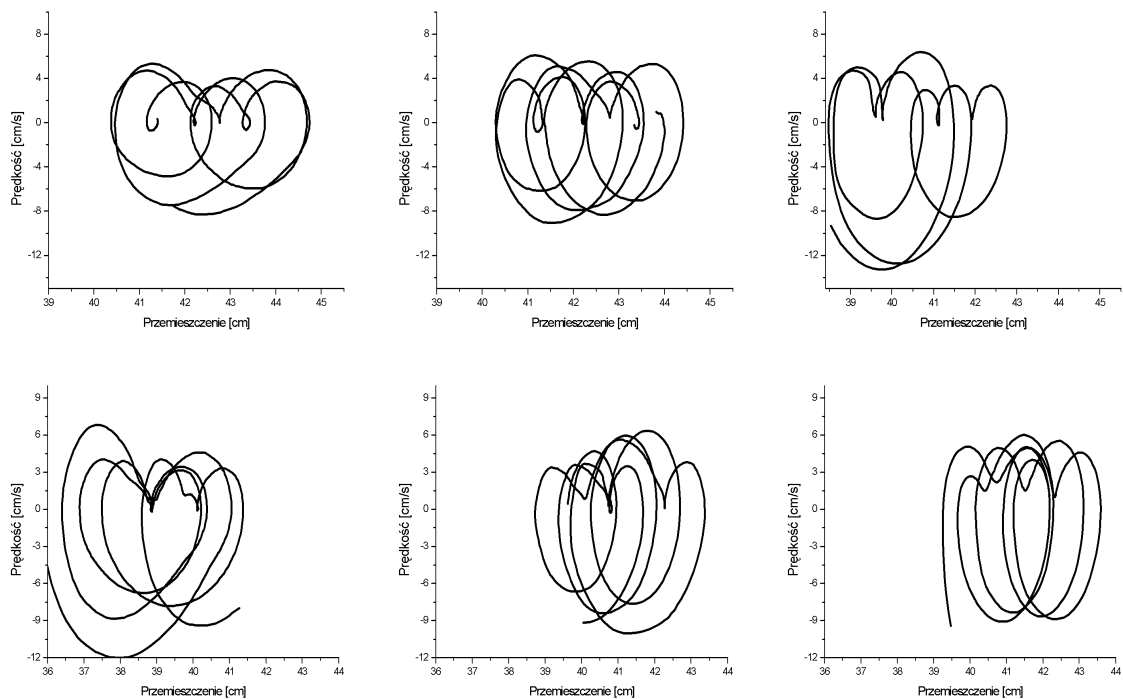
Rys. 7.16 pokazuje drgania przy stosunku  $m_1/m_2=1$  oraz jednakowych sztywnościach  $k_1=k_2=1$ , przy parametrach przyjętych w symulacji  $p_1=0$ ,  $p_2=0$ ,  $p_3=24$ ,  $v_1=3,0$



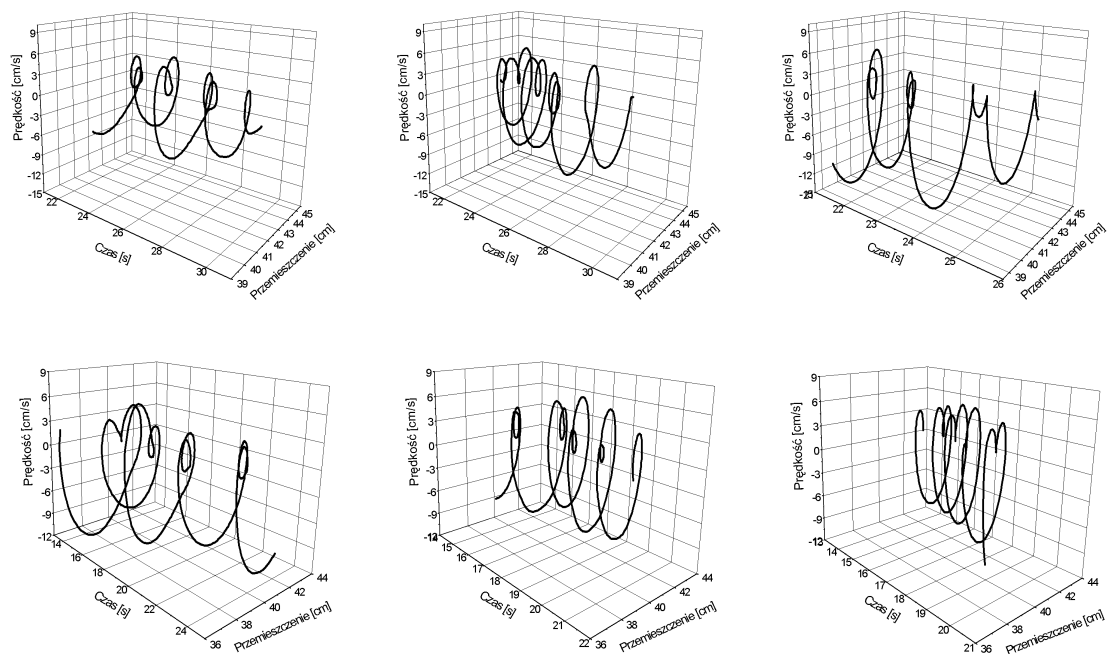
Rysunek 7.9: Para cierna stal – poliester: trajektoria fazowa, przemieszczenie i prędkość przy kącie  $\alpha = 10^\circ$ ; górny rząd wykresów zarejestrowany został przy minimalnej sile pionowego nacisku, a dolny przy maksymalnej.



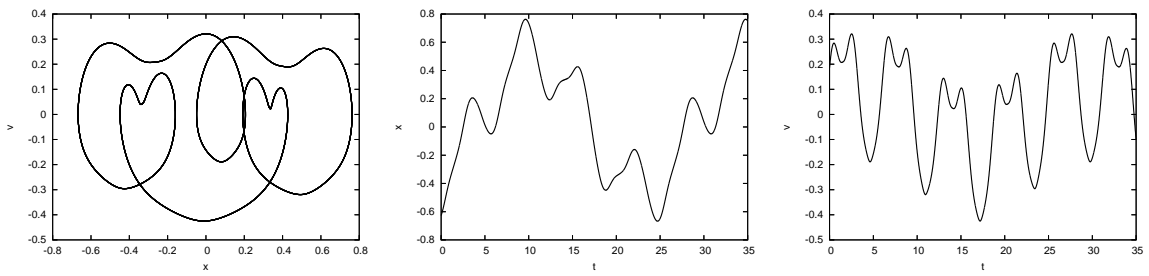
Rysunek 7.10: Para cierna stal – poliester: trajektoria fazowa, przemieszczenie i prędkość przy kącie  $\alpha = 15^\circ$ ; górny rząd wykresów zarejestrowany został przy minimalnej sile pionowego nacisku, a dolny przy maksymalnej.



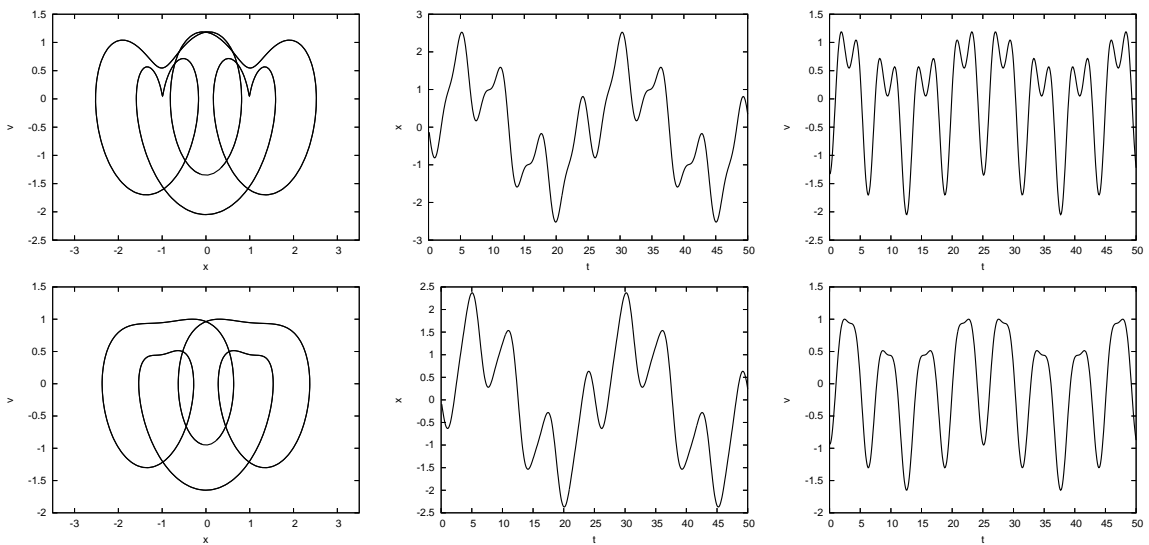
Rysunek 7.11: Eksperymentalne trajektorie fazowe przy kącie  $\alpha = 10^\circ$  (górny rząd) i kącie  $\alpha = 15^\circ$  (dolny rząd) oraz przy prędkości pasa  $v = 6, 8, 10$  cm/s.



Rysunek 7.12: Doświadczalne trajektorie fazowe z osią czasu przy kącie  $\alpha = 10^\circ$  (górny rząd) i  $\alpha = 15^\circ$  (dolny rząd) oraz przy prędkości pasa  $v = 6, 8, 10$  cm/s.



Rysunek 7.13: Obraz płaszczyzny fazowej, przemieszczenia i prędkości w czasie.

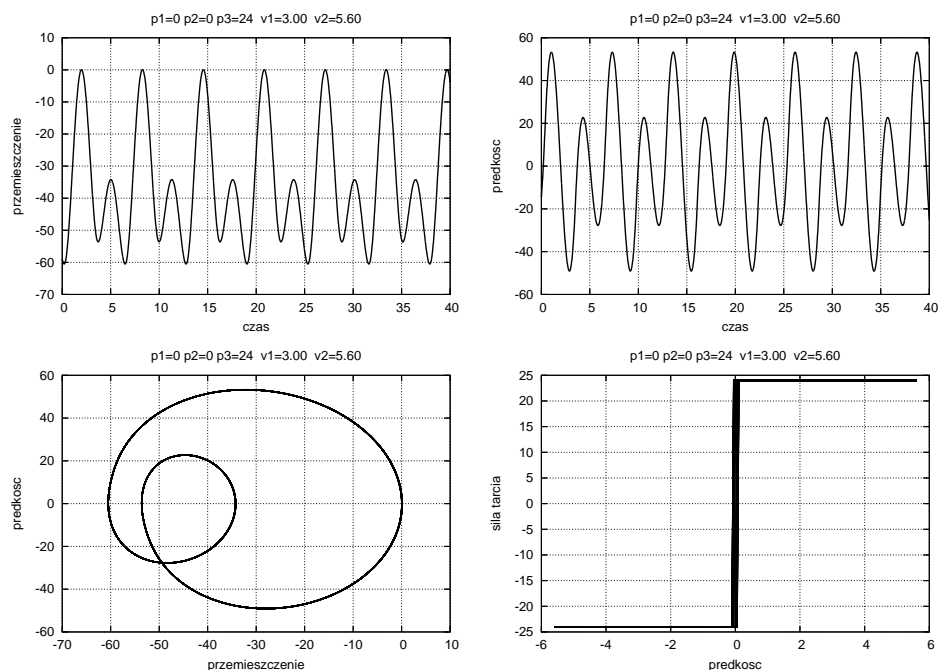


Rysunek 7.14: Obrazy płaszczyzn fazowych, przemieszczeń i prędkości w czasie odpowiadające teoretycznemu modelowi pary ciernej stal – poliester.

25.02.07 18:15	25.02.07 18:15	oscylacje.f	oscylacje.f	Strona 2/2
<pre> 7  if (czas.gt..3*tkon)write(*,7)it*h,q2(1),q2(2),v2(1),v2(2),xcs(1,2) c  format(f12.4,2(1p15.6),3(1p15.6)) c  \$Ily wezlowe do 14 ii=1,2   s(ii)=0. do 14 jj=1,2   s(ii)=s(ii)+xcs(ii,jj)*q2(jj) 14 c  przesunicie chwili i:=i+1 do 15 i=1,2   q1(i)=q2(i)   v1(i)=v2(i) 15  continue 100 end </pre>	<pre> program oscylacje implicit real*8(a-h,o-z) dimension a(2,2),b(2,2),v1(2),v2(2),q1(2),q2(2),f(2),s(2) x,xcs(2,2),xms(2,2),tkon,xk1,xk2,xm1,xm2/.01,.8,0.,.350.,1.,1.,1.,1./ data h,alfa,gamma,tkon,xk1,xk2,xm1,xm2/.01,.8,0.,.350.,1.,1.,1.,1./ beta=1.-alfa/(1.+gamma) do 1 i=1,2   v1(i)=0d0   v2(i)=0d0   q1(i)=0d0   q2(i)=0d0   s(i)=0d0   f(i)=0d0 1  continue open (1,file='dane.dat') read(1,*)p1,p2,p3,v1(1),v1(2) c----- do 100 it=1,int(tkon/h)   czas=it*h   f(1)=50.   f(2)=0. c  budowa macierzy struktury   xms(1,1)=xm1   xms(1,2)=0.   xms(2,1)=0.   xms(2,2)=xm2   xks(1,1)=xk1   xks(1,2)=0.   xks(2,1)=0.   xks(2,2)=xk2   xcs(1,1)=0.   xcs(1,2)=sign(p1*(abs(v1(2))-p2)**2+p3,v1(2))   xcs(2,1)=0.   xcs(2,2)=0. do 13 ii=1,2 do 13 jj=1,2   a(ii,jj)=xcs(ii,jj)*h*alfa*(1-alfa/2)-xms(ii,jj)/h   +xcs(ii,jj)*(1-alfa)   b(ii,jj)=xks(ii,jj)*h*alfa**2/2  +xms(ii,jj)/h   +xcs(ii,jj)*alfa 13  continue c  mnozenie F:=F-S*A*v1 do 19 i=1,2   f(i)=f(i)-s(i) do 11 j=1,2   f(i)=f(i)-a(i,j)*v1(j) 11  continue c  rozwiazanie ukladu rownan 2x2 w0=b(1,1)*b(2,2)-b(2,1)*b(1,2) w1=f(1)*b(2,2)-f(2)*b(1,2) w2=b(1,1)*f(2)-b(2,1)*f(1) v2(1)=w1/w0 v2(2)=w2/w0 c  przemieszczenia q2(1)=q1(1)+h*(1.-beta)*v1(1)+beta*v2(1) q2(2)=q1(2)+h*(1.-beta)*v1(2)+beta*v2(2) </pre>	<pre> 25.02.07 18:15 oscylacje.f if (czas.gt..3*tkon)write(*,7)it*h,q2(1),q2(2),v2(1),v2(2),xcs(1,2) format(f12.4,2(1p15.6),3(1p15.6)) \$Ily wezlowe do 14 ii=1,2   s(ii)=0. do 14 jj=1,2   s(ii)=s(ii)+xcs(ii,jj)*q2(jj) 14 przesunicie chwili i:=i+1 do 15 i=1,2   q1(i)=q2(i)   v1(i)=v2(i) 15  continue 100 end </pre>	<pre> 25.02.07 18:15 oscylacje.f program oscylacje implicit real*8(a-h,o-z) dimension a(2,2),b(2,2),v1(2),v2(2),q1(2),q2(2),f(2),s(2) x,xcs(2,2),xms(2,2),tkon,xk1,xk2,xm1,xm2/.01,.8,0.,.350.,1.,1.,1.,1./ data h,alfa,gamma,tkon,xk1,xk2,xm1,xm2/.01,.8,0.,.350.,1.,1.,1.,1./ beta=1.-alfa/(1.+gamma) do 1 i=1,2   v1(i)=0d0   v2(i)=0d0   q1(i)=0d0   q2(i)=0d0   s(i)=0d0   f(i)=0d0 1  continue open (1,file='dane.dat') read(1,*)p1,p2,p3,v1(1),v1(2) c----- do 100 it=1,int(tkon/h)   czas=it*h   f(1)=50.   f(2)=0. c  budowa macierzy struktury   xms(1,1)=xm1   xms(1,2)=0.   xms(2,1)=0.   xms(2,2)=xm2   xks(1,1)=xk1   xks(1,2)=0.   xks(2,1)=0.   xks(2,2)=xk2   xcs(1,1)=0.   xcs(1,2)=sign(p1*(abs(v1(2))-p2)**2+p3,v1(2))   xcs(2,1)=0.   xcs(2,2)=0. do 13 ii=1,2 do 13 jj=1,2   a(ii,jj)=xcs(ii,jj)*h*alfa*(1-alfa/2)-xms(ii,jj)/h   +xcs(ii,jj)*(1-alfa)   b(ii,jj)=xks(ii,jj)*h*alfa**2/2  +xms(ii,jj)/h   +xcs(ii,jj)*alfa 13  continue c  mnozenie F:=F-S*A*v1 do 19 i=1,2   f(i)=f(i)-s(i) do 11 j=1,2   f(i)=f(i)-a(i,j)*v1(j) 11  continue c  rozwiazanie ukladu rownan 2x2 w0=b(1,1)*b(2,2)-b(2,1)*b(1,2) w1=f(1)*b(2,2)-f(2)*b(1,2) w2=b(1,1)*f(2)-b(2,1)*f(1) v2(1)=w1/w0 v2(2)=w2/w0 c  przemieszczenia q2(1)=q1(1)+h*(1.-beta)*v1(1)+beta*v2(1) q2(2)=q1(2)+h*(1.-beta)*v1(2)+beta*v2(2) </pre>	Strona 2/2

Rysunek 7.15: Wydruk przykładowego programu całkowania układu dwóch równań różniczkowych.

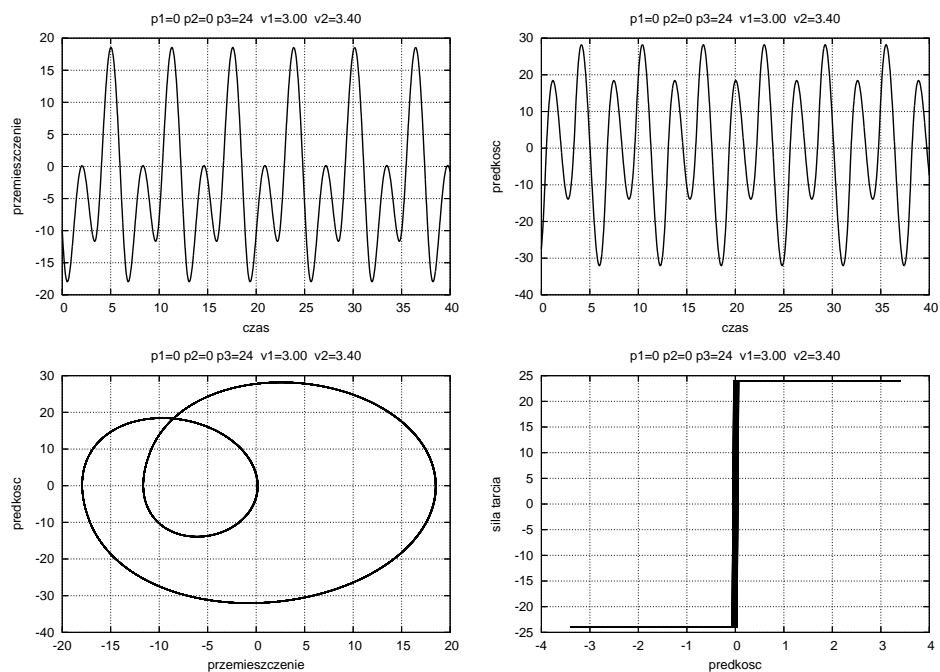




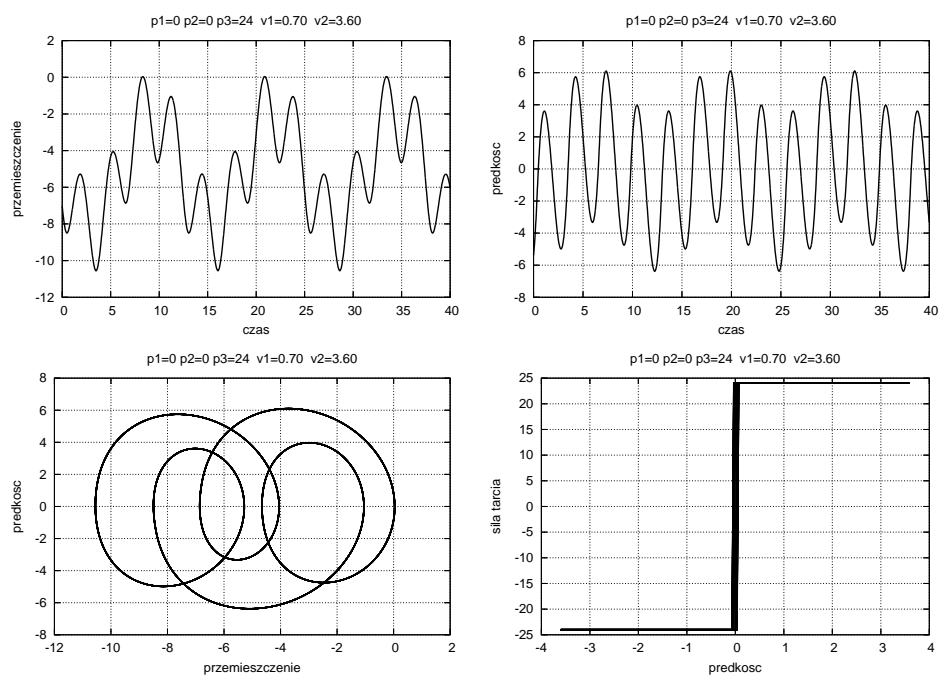
Rysunek 7.16: Przemieszczenia i prędkości w czasie oraz obraz płaszczyzny fazowej i siła tarcia w funkcji prędkości, przy  $m_1/m_2=1$  i parametrach  $p_1=0$ ,  $p_2=0$ ,  $p_3=24$ ,  $v_1=3,00$  i  $v_2=5,6$ .

i  $v_2=5,6$ . Rys. 7.17 pokazuje drgania w przypadku  $m_1/m_2=1$ , przy nieco innym zestawie parametrów. Otrzymane wykresy są analogiczne do uzyskanych przy parze ciernej poliamid–poliester (rys. 6.5÷6.7). Najlepiej uwidocznione jest podobieństwo trajektorii fazowych pokazanych na rys. 6.5.

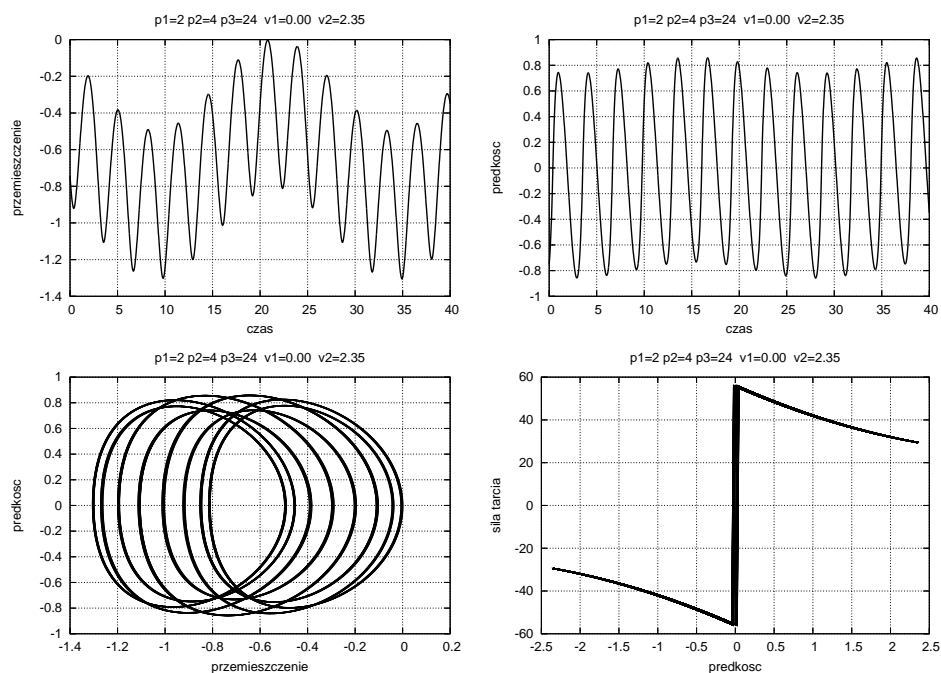
Zmiana stosunku obu mas  $m_1/m_2$ , przy zachowaniu sztywności, zmienia charakter wykresów. Przykładowe wykresy pokazano na rys. 7.18. Obraz fazowy zbliżony jest do wykresu uzyskanego z pomiarów drgań w przypadku koła z obręczą stalową (rys. 6.25). Rysunki 7.19, 7.20 i 7.21 pokazują drgania przy  $m_1/m_2=16$ , oraz  $p_1=0$ ,  $p_2=24$ ,  $v_1=3,0$ ,  $v_2=3,4$ . Dobłą zgodność widać przy porównaniu wyników teoretycznych (rys. 7.19) z eksperymentalnymi (rys. 6.23).



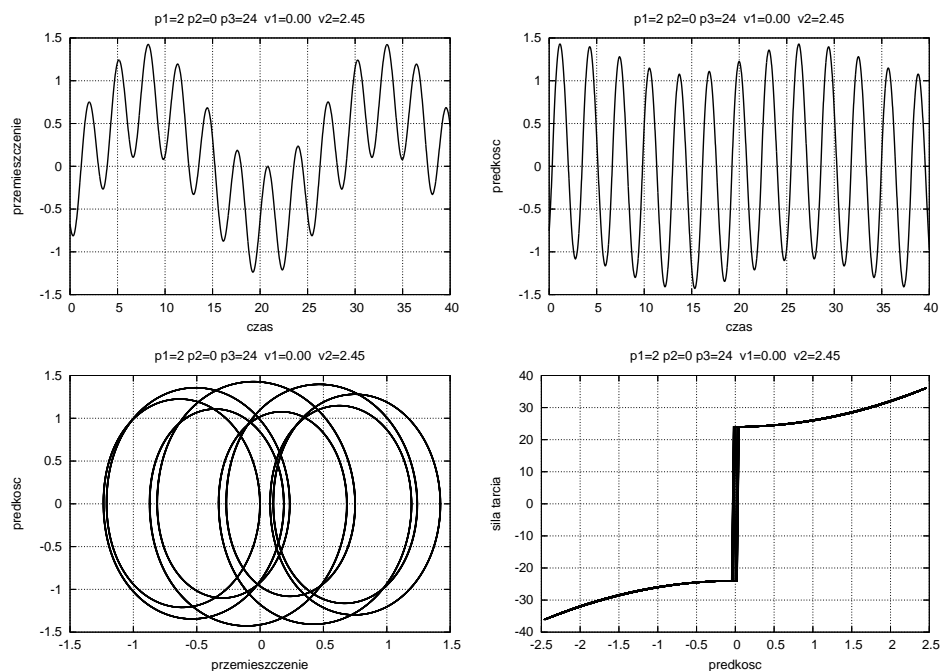
Rysunek 7.17: Przemieszczenia i prędkości w czasie oraz obraz płaszczyzny fazowej i siła tarcia w funkcji prędkości, przy  $m_1/m_2=1$  i parametrach  $p_1=0, p_2=0, p_3=24, v_1=3,00$  i  $v_2=3,4$ .



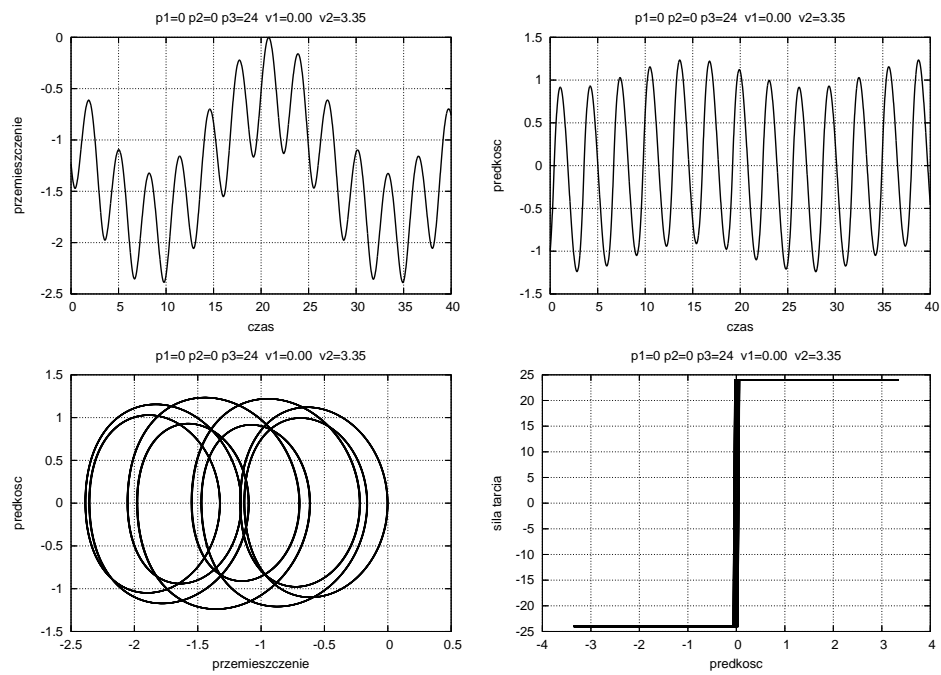
Rysunek 7.18: Przemieszczenia i prędkości w czasie oraz obraz płaszczyzny fazowej i siła tarcia w funkcji prędkości, przy stosunku  $m_1/m_2=4$ , przy parametrach  $p_1=0, p_2=0, p_3=24, v_1=0,70$  i  $v_2=3,60$ .



Rysunek 7.19: Przemieszczenia i prędkości w czasie oraz trajektoria płaszczyzny fazowej i siła tarcia w funkcji prędkości, przy  $m_1/m_2=16$  i parametrach  $p_1=2, p_2=4, p_3=24, v_1=0,00$  i  $v_2=2,35$ .



Rysunek 7.20: Przemieszczenia i prędkości w czasie oraz obraz płaszczyzny fazowej i siła tarcia w funkcji prędkości, przy parametrach  $p_1=2, p_2=0, p_3=24, v_1=0,00$  i  $v_2=2,45$ .



Rysunek 7.21: Przemieszczenia i prędkości w czasie oraz płaszczyzna fazowa i siła tarcia w funkcji prędkości, przy parametrach  $p_1=0$ ,  $p_2=0$ ,  $p_3=24$ ,  $v_1=0,00$  i  $v_2=3,35$ .

# Rozdział 8

## Podsumowanie i wnioski

W pracy zbadano zjawisko oscylacyjnego ruchu bocznego toczącego się koła, z uwzględnieniem poślizgów bocznych. W naturze efekt taki ma miejsce przy toczeniu się kolejowych zestawów kołowych po łukach, z uwagi na różne promienie krzywizn obu szyn, oraz na odcinkach prostych, w wyniku bocznego działania wiatru lub odkształcalności zestawów kołowych i szyn. Wstępne badania analityczne i numeryczne zjawisk dynamicznych występujących podczas toczenia wykazały, że wnoszą one istotny wkład do procesu eksploatacyjnego zużycia się powierzchni toczyńnych bądź są przyczyną uszkodzeń. Zjawisko oscylacji bocznej dotąd nie było dostatecznie zbadane ani opisane w literaturze. Wyniki eksperymentalne uzyskane w pracy na podstawie badań stanowiskowych wykazały dwuokresowy charakter drgań bocznych. Przeprowadzono wiele prób, wykorzystując różne pary cierne, w tym modele kół o różnych parametrach bezwładności. We wszystkich przypadkach zaobserwowano identyczne jakościowo zjawisko drgań dwuokresowych wzbudzanych tarciem. Dowodziła tego analiza amplitudowo – częstotliwościowa, wykazująca dwie podstawowe częstotliwości drgań.

W stanowisku badawczym zastosowano polimerowy pas, który mimo zakładanej sztywności wykazywał pewną niewielką odkształcalność w swojej płaszczyźnie. Odkształcalność ta, wraz z odkształcalnością elementów sprężystych stanowiska, odpowiadała obiektom rzeczywistym, w których mamy do czynienia z elementami podatnymi zarówno na obciążenia wzdłużne jak i boczne względem kierunku toczenia. Zaobserwowano, że w przypadku koła poliamidowego, stosunkowo lekkiego i o małym momencie bezwładności, otrzymujemy drgania o stosunku obu częstotliwości 2:1 (rys. 6.14). Znaczny był w tym przypadku udział składowej o wyższej częstotliwości. W przypadku

kół cięższych, zwłaszcza o większym momencie bezwładności, stosunek częstości obu składowych drgań wynosił od 2:1 do 4:1 (rys. 6.28). Można też było zaobserwować udział trzeciej częstości, dwu i czterokrotnie wyższej od podstawowej. W tym przypadku przyjmujemy, że zjawisko to, występujące przy niskich prędkościach, wywołane było efektem sklejenia i poślizgu, z chwilową utratą przylegania adhezyjnego w części obszaru kontaktu (rys. 6.24). Generalnie traktujemy ten rodzaj drgań jako dwuokresowe.

Istotnym zjawiskiem wykazanim eksperymentalnie i potwierdzonym analitycznie było zjawisko pełzania. Występowało ono w całym obszarze parametrów. Jest to wynik wpływu materiału poliestrowego pary ciernej.

Sformułowano model matematyczny zjawiska. Układ o dwóch stopniach swobody z powodzeniem realizował drgania uzyskane eksperymentalnie. Odpowiedni dobór parametrów pozwalał uzyskać wyniki zgodne z otrzymanymi z pomiarów. Wyniki symulacyjne wykazały, że na charakter rozwiązania prawo tarcia ma niewielki wpływ. Wznosząca, stała lub opadająca wraz z prędkością charakterystyka nie zmieniała praktycznie jakościowo wyników. Stąd wniosek, że rodzaj materiału zastosowany w parze ciernej nie zmienia dwuokresowego charakteru drgań.

W modelu matematycznym realizującym wymagane trajektorie ruchu nie można jednoznacznie wskazać, który stopień swobody odpowiada ruchowi obrotowemu koła, a który ruchowi bocznemu. Budowa modelu matematycznego odnosi się bezpośrednio do modelu fizycznego. W dalszych pracach należałoby zadbać o zgodność geometryczną i materiałową parametrów inercyjnych i sprężystych modelu matematycznego z modelem fizycznym. W przyjętym w pracy – można dopatrywać się powiązania niższej częstości z ruchem bocznym, osiowym, a wyższej częstości z ruchem obrotowym. W tym ostatnim przypadku elementem sprężystym jest odkształcalność taśmy poliestrowej w kierunku wzdłużnym, a bezwładnością – bezwładność obrotowa koła.

Badania eksperymentalne miały ograniczony zakres, z uwagi na złożoność zjawisk. Z pewnością wymagają one powtórzenia w skali rzeczywistej, z wykorzystaniem rzeczywistego koła kolejowego lub zestawu kołowego oraz szyny. Wówczas można byłoby wysnuć wnioski ilościowe, mogące być pomocne na etapie prac projektowych. Drugim punktem, na którym należałoby skupić uwagę w przyszłości, jest rozkład efektów dynamicznych związanych z tarciami w obszarze kontaktu. Zbadanie zjawisk w mi-

kroobszarach strefy kontaktu pomogłoby pogłębić wiedzę o analizowanym w niniejszej pracy zjawisku. Z pewnością dużo informacji może też dostarczyć prawidłowo przeprowadzona metodami komputerowymi symulacja.

# Bibliografia

- [1] M. Amontons. *De la résistance causée dans les machines, histoire de l'Academie Royale des Sciences avec les Mémoires de mathématique et de Physiqu.* Paris, 1699.
- [2] J. Awrejcewicz. *Tajemnice nie liniowej dynamiki.* Monografie. Politechnika Łódzka, Łódź, 1997.
- [3] J. Awrejcewicz. Dynamika regularna i chaotyczna w układzie o dwóch stopniach swobody. *XIX Sympozjum Vibration in Physical Systems*, pages 51–52, 2000.
- [4] J. Awrejcewicz and P. Olejnik. Stick–slip phase in system with friction. *Euroconf. on Comp. Mech. and Eng. Practice*, pages 114–119, 2001.
- [5] J. Awrejcewicz and P. Olejnik. Numerical analysis of self-excited by friction chaotic oscillations in two-degrees-of freedom system using exact hénon method. *Machine Dynamics Problems*, 26(4), 2002.
- [6] I.M. Babakow. *Teoria Drgań.* Moskwa, 1950.
- [7] Cz. Bajer. Triangular and tetrahedral space–time finite elements in vibration analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 23:2031–2048, 1986.
- [8] Cz. Bajer. Adaptive mesh in dynamic problem by the space–time approach. *Comput. Struct.*, 33(2):319–325, 1989.
- [9] Cz. Bajer. Space–time finite element formulation for the dynamical evolutionary process. *Appl. Math. and Comp. Sci.*, 3(2):251–268, 1993.
- [10] Cz. Bajer. Numeryczne modelowanie czasoprzestrzenne dynamicznych zagadnień kontaktowych. *Prace IPPT*, 5, Warszawa, 1997.



- [11] Cz. Bajer. The space-time approach to rail/wheel contact and corrugations problem. *Comp. Ass. Mech. Eng. Sci.*, 5(2):267–283, 1998.
- [12] Cz. Bajer and R. Bogacz. O symulacji generowania nierówności w dynamicznym zagadnieniu kontaktu tocznego metodą elementów czasoprzestrzennych. *IX Konf. Metody Komputerowe w Mechanice*, pages 23–30, 1989.
- [13] Cz. Bajer and R. Bogacz. Dynamic contact problem with friction by the use of the space–time element method. *ZAMM*, 70(6):T674–T676, 1990.
- [14] F. T. Barwell. *Lubrication of bearing*. Butterworths, London, 1956.
- [15] R.W. Beery and V.C. Tsien. Mathematical Analysis of Corotating Nose-Gear Simmy Phenomen. *TRUD*, 564, 1945.
- [16] R. Bell and M. Burdekin. A study of the stick-slip motion of machine tool feed drives. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 184(1):543–557, 1970.
- [17] L. C. Bo and D. Pavelescu. The friction-speed elation and its influence on the critical velocity of stick-slip motion. *Wear*, 82:277–289, 1982.
- [18] R. Bogacz. On elastic–plastic mechanism of generation of wheel–rail corrugation. *Proc. of the 5th Mini Conference "Vehicle System". Dynamics Identification and Anomalies*, 1996.
- [19] R. Bogacz, M. Brzozowski, and K. Popp. Zur reibungsmodellierung of rollkontakt. *ZAMM*, 70(6):T678–T680, 1990.
- [20] R. Bogacz and S. Dżuła. Dynamic model of rolling non-symmetric wheel vibration. *Scientific Papers*, 1(17):39–46, 2003.
- [21] R. Bogacz, M. Kocjan, and W. Kurnik. Drgania obręczy koła poddanego wymuszeniu ruchomą siłą oscylacyjną. *VII Warsztaty Naukowe PTSK. Symulacja w badaniach i rozwoju*, 2001.
- [22] R. Bogacz and B. Ryczek. Analiza doświadczalna drgań przyleganie-poślizg pary stal-poliester wzbudzanych tarciem. *XVII Symposium Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego*, 45:99–107, 1996.

- [23] R. Bogacz and B. Ryczek. Eksperymentalno-teoretyczne badania drgań wzbudzanych tarciem suchym. *Czasopismo Techniczne Politechnika Krakowska*, 10:99–107, 1996.
- [24] R. Bogacz and B. Ryczek. O badaniach teoretyczno-doświadczalnych dotyczących drgań samowzbudnych typu przyleganie poślizg. *Prace IPPT*, 8, 1996.
- [25] R. Bogacz and B. Ryczek. Dry friction self-excited vibrations analysis and experiment. *Eng. Trans.*, 45(3–4):487–504, 1997.
- [26] R. Bogacz and B. Ryczek. Drgania samowzbudno-wymuszone układu z kontaktem ciernym. *Mechanika. IX Sympozjum "Wpływu drgań na otoczenie"*, 83:31–40, 2001.
- [27] R. Bogacz and Z. Świdorski. Uszkodzenia eksploatacyjne szyn kolejowych wywołane wzajemnym, dynamicznym oddziaływaniem pojazdów szynowych z torem. *Problemy Kolejnictwa*, 136, 2002.
- [28] R. Bogacz, Z. Świdorski, and B. Ryczek. O wpływie obróbki laserowej szyny z falistym zużyciem na jej dalszą eksploatację. *Training Course LAPROMAT and CDSC*, pages 207–219, 2003.
- [29] F.P. Bowden and L. Leben. The nature of sliding and the analysis of friction. *Proc. Roy. Soc.*, 169:371–391, 1939.
- [30] F.P. Bowden and D. Tabor. The area of contact between stationary and moving surface. *Proc. Roy. Soc.*, 169(938):391–413, 1939.
- [31] F.P. Bowden and D. Tabor. *Friction and lubrication of solids*. Clarendon Press, Oxford, 1954.
- [32] F.P. Bowden and T. Tabor. The area of contact between stationary and between moving surfaces. *Proc. Roy. Soc.*, 169:391–413, 1939.
- [33] C. A. Brockley, R. Cameron, and A. F. Potter. Friction-induced vibration. *J. Lubr. Technol.*, 89:101–108, 1967.
- [34] C. A. Brockley and P. L. Ko. Quasi-harmonic friction-induced vibration. *J. Lubr. Technol. Trans. ASME*, 1970.

- [35] H. Brok. Fundamental mechanical aspect of boundary lubrication. *SAEJ*, 46(6):54–68, 1940.
- [36] A. Chatterjee, J.P. Cusumano, and J.D. Zolock. On contact-induced standing waves in rotating tires: experiment and theory. *Journal of Sound and Vibration*, 5(227), 1999.
- [37] A. Chudzikiwicz, J. Drożdziel, and B. Sowiński. Wpływ nierówności toru o różnym stanie utrzymania na reakcje dynamiczne pojazdu. *XIV Konferencja Naukowa Pojazdy Szynowe 2000*, 2:27–37, 2000.
- [38] A. Chudzikiwicz, J. Drożdziel, and B. Sowiński. The influence of wheel and rail rolling surfaces wear on railway vehicle dynamics. *The University of Western Ontario, Canadian Society for Mechanical Engineering*, 1(10), 2004.
- [39] A. Chudzikiwicz, T. Uhl, and K. Mendrok. Inverse identification problem - application to wheel-rail contact force measurement. *Archives of Transport*, 18(2), 2006.
- [40] S. Ścieszka. *Hamulce cierne: zagadnienia konstrukcyjne, materiałowe i trybologiczne*. Politechnika Śląska, Gliwice, 1998.
- [41] G. Cokerham and G. R. Symmons. Stability criterion for stick-slip motion using a discontinuous dynamic friction model. *Wear*, 40:113–120, 1976.
- [42] P. Conti. *Sull Resistenza di arttio*, volume 30. Atti. Roy. Acad. Lincei, Paris, 1875.
- [43] S. Łączek. *Wprowadzenie do systemu elementów skończonych ANSYS*. Wydawnictwo PK, Kraków, 1999.
- [44] B. V. Derjaguin, V. E. Push, and M. Tolstoi. Teoria skolżenija tverdykh tiel periodiceskimi ostanovkami. *Žurnal Technikceskiej Fiziki, Tom XXVI*, 6:1329–1342, 1956.
- [45] B. V. Derjaguin, V. E. Push, and M. Tolstoi. A theory of stick-slip sliding of solids. *Proc. Conf. on Lubrication and Wear. Inst.Mech.Eng.*, pages 257–268, 1957.

- [46] G.I. Epifanow. *O dwuczęściowym prawie tarcia*. AN SSRR, Moskwa, 1957.
- [47] C. Esveld. *Modern railway track*. PWN, W-Germany, 1989.
- [48] K. Furmanik. Experimental investigation of self excited friction vibrations into a friction brake. *5-th Mini Conference on Vehicle System Dynamics. Identification and Anomalies VSDIA '96*, pages 547–555, 1996.
- [49] K. Furmanik. Zagadnienie współpracy ciernej taśmy przenośnikowej z krążkiem centrującym. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn*, 4(124):9–21, 2000.
- [50] K. Furmanik. *Drgania wzbudzone tarciem suchym, Teoria, Eksperyment, Symulacja*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, AGH, Kraków, 2006.
- [51] K. Furmanik and M. Prącik. Results of laboratory investigations of mechanical system with dry friction. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn*, 2(114):185–192, 1998.
- [52] K. Furmanik and M. Prącik. Symulacja identyfikacji fenomenologicznej funkcji tarcia. *Symulacja w Badaniach i Rozwoju. PTSK*, 2(114):119–127, 1998.
- [53] J. Giergiel. *Tłumienie drgań mechanicznych*. PWN, Warszawa, 1990.
- [54] K. Grudziński. O problemach w modelowaniu tarcia w dynamice maszyn. *XXXVIII Symp. Mech. Stos.*, 10:123–136, 1999.
- [55] A. Halecki. About a method of experimental determination of the kinetic characteristics of the coefficient of dry friction in range of very small sliding velocities. *Trybologia*, 3:203–217, 1995.
- [56] M. Hebda. Pewne aspekty tarcia granicznego. I narada naukowo-techniczna pt.: Tarcie, zużycie i smarowanie maszyn. *Przegląd Techniczny*, 13, 1962.
- [57] F.H. Ho and J.L. Lai. Parametric study of a nosegear. *Journal of Aircraft*, 7(4):34–43, 1970.
- [58] J.B. Hunt, I. Torbe, and G.C. Spencer. The phase-plane analysis of sliding motion. *Wear*, 8:435–465, 1965.
- [59] J. Szmelter i inni. *Programy metody elementów skończonych*. Arkady, Warszawa, 1981.

- [60] A.J. Iszliński and I.V. Kragielski. O skaczkach pri trienii. *Techn.Fiz.*, 14(45):276, 1944.
- [61] J. Janecki and M. Hebda. *Tarcie, smarowanie i zużycie części maszyn*. Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa, 1972.
- [62] A. Jankowski. *Badanie procesu tarcia statycznego w hamulcach tarczowych górniczych maszyn wyciągowych. Praca doktorska*. Gliwice, 1991.
- [63] J.J. Kalker. Survey of wheel-rail rolling contact theory. *Vehicle System Dynamics*, 5:317–358, 1979.
- [64] J.J. Kalker. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Kluwr Academic Publisher, 1990.
- [65] N.D. Kazarinoff and Y.H. Wan. Theory and applications of Hopf bifurcation. *Cambridge University Press*, 1981.
- [66] Z. Kączkowski. O stosowaniu nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych. *Mechan. Teor. i Stos.*, 21(4):531–542, 1983.
- [67] Z. Kączkowski. O rozwiązywaniu pewnego dynamicznego problemu kontaktowego metodą elementów czasoprzestrzennych. *Zeszyty Nauk. PP, budownictwo*, 31:63–72, 1988.
- [68] M. Kiełdysz. Szimi pierodniego kolesa treżkolesnogo szassi. 564, 1945.
- [69] R. Konowrocki and Cz. Bajer. Investigation of the friction phenomenon in the wheel–road interaction. *XXII Symposium – Vibrations in physical systems*, 12:173–178, 2006.
- [70] R. Konowrocki and Cz. Bajer. Oddziaływanie koła z drogą z uwzględnieniem wpływu sił bocznych. *XVII Konferencja Naukowa, Pojazdy Szynowe*, pages 397–403, 2006.
- [71] R. Konowrocki, Cz. Bajer, and R. Bogacz. Badanie oddziaływania koła z drogą z uwzględnieniem poślizgów bocznych. *XXII Warsztaty Polskiego Towarzystwa Symulacji Komputerowej*, 12:124–131, 2005.

- [72] Z. Kowalska. Dynamic response to periodic excitation with short-pitch irregularities of railway wheels and rails. *Vibration in physical systems*, XXII:183–190, 2006.
- [73] I.V. Kragielski. *O wlijanii dawlenij i rozmiara powierchnosti na wieliczynu sily trienija*. Issledowanije w oblasti maszynowiedienija, Moskwa, 1944.
- [74] I.V. Kragielski and J. Kostierin. Relaksacjonnyje klebanija w uprogich systemach. *Trienie iznos w masinach*, 11:119–143, 1958.
- [75] I.V. Kragielski and V.S. Szczegrow. *Rozwitije nauki o trienii*. Moskwa, 1956.
- [76] J. Kukulski. Ocena naprężeń własnych w elementach nawierzchni kolejowej. *XVII Konferencja Naukowa, Pojazdy Szynowe 2006*, pages 405–412, 2006.
- [77] W. Lenkiewicz. Wpływ drgań wymuszonych na procesy tarcia metali. *Zeszyty naukowe AGH*, 26, 1967.
- [78] D. Michalopoulos and A. Dimarogonas. Stick-slip of rotor in fluid bearing at very low speed. *Wear*, 70:303–309, 1981.
- [79] R. Michałowski and Z. Mróz. Associated and non-associated sliding rule in contact friction problem. *Arch. Mech.*, 30:259–276, 1978.
- [80] J.I. Nejmank and N.A. Fufajew. *Dynamika układów nieholonomicznych*. PWN, Warszawa, 1967.
- [81] W. Nowacki. *Mechanika budowli*, volume 4. PWN, Warszawa, 1976.
- [82] J.T. Oden and J.A.C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1985.
- [83] H.B. Pacejka. *The wheel shimmy phenomenon*. Technological University of Delft, Holland, 1962.
- [84] H.B. Pacejka. Analysis of shimmy phenomenon. *The Institution Birdcage Walk, Westminster*, 180(2):114–119, 1966.
- [85] H.B. Pacejka. The wheel shimmy phenomenon, a teoretical and experimental investigation. *Technological University of Delft*, 170:80–87, 1966.

- [86] P. Piec. Analiza zjawisk kontaktowych typu stick-slip w miejscu styku koła z klockiem hamulcowym. *Z. 2-M Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej. Mechanika*, 187, 1995.
- [87] N. P. Pietrow. *Trienije w maszynach i wlijanie na niego smazywajuszczzej zidkosti, Opisanije i riezultaty opytow nad trienijem, zydownstiej i maszyn*, volume 30. Izv. Tiechnol. Instituta, Pietiersburg, 1886.
- [88] K. Popp and P. Stelter. Nonlinear oscillations of structures included by dry friction. *UTAM Symposium on Nonlinear Dynamics in Engineering Systems. Springer-Verlag.*, pages 233–240, 1990.
- [89] E. Rabinowicz. A study of stick-slip process. *Symp. on Friction and Wear*, pages 149–161, 1957.
- [90] E. Rabinowicz. *Friction and wear of materials*. Wiley, New York, 1965.
- [91] G. Rennie. Experiment on the friction and abrasion of the surface of solids. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 11:143, 1829.
- [92] O. Reynold. Mikropoślizg. *Phil. Trans.*, 166:155, 1879.
- [93] L.C. Rogers. Syntesis of tire equations for use in shimmy and other dynamic studies. *Journal of Aircraft*, 8(9):82–94, 1971.
- [94] L.C. Rogers. Theoretical tire equations for shimmy and other dynamic. *Journal of Aircraft*, 9(8), 1971.
- [95] B. Ryczek. *Drgania samowzbudne układów dyskretych wzbudzone tarciem suchym: teoria i weryfikacja. Praca doktorska*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki, PAN, Warszawa, 2001.
- [96] J.R. Samson, D.W. Ress, F. Morgan, and M. Muskat. Friction behavior during the slip portion of the stick-slip process. *J. Appl. Phys.*, 14:689–700, 1943.
- [97] R. Schurman and Warlow-Davis. The electrostatic component of the force of sliding friction. *Proc. Roy. Soc.*, 54(301):14, 1942.
- [98] L. Segal. Force and moment response of pneumatic tires to lateral motion inputs. *Journal of Engineering for Industry*, 1966.

- [99] J. Sikora. *Drgania w strefie kontaktu ciał z tarciem suchym w ujęciu dyskretnym. Praca doktorska*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki, PAN, Warszawa, 1991.
- [100] P. Solski and S. Ziemia. *Zagadnienia tarcia suchego*. PWN, Warszawa, 1965.
- [101] S. Stefański, J. Wojewoda, and K. Furmanik. Experimental and numerical analysis of self-excited friction oscillator. *PERGAMON-Chaos, Solition and Fractals*, 1(124):1691–1704, 2001.
- [102] J.J Stoker. *Nonlinear vibration*. Wiley, New York, 1950.
- [103] Z. Świdorski. Badania jakości i trwałości szyn kolejowych. *Problemy Kolejnictwa*, 125, 1997.
- [104] Z. Świdorski. Pękanie zmęczeniowe kół bezobrotowych kolejowych zestawów kołowych. *XXII Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego*, pages 453–458, 2006.
- [105] G. Krzesiński i P. Marek T. Zagrajek. *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Ćwiczenia z zastosowaniem systemu ANSYS*. Wydawnictwo PW, Warszawa, 2005.
- [106] S. Thomas. Vibration damped by solid friction. *Philos. Mag.*, 9:329, 1930.
- [107] F. Vatta. On the stick-slip phenomenon. *Mechanics Research Comunication*, 6(4):203–208, 1979.
- [108] B. von Schlippe and R. Dietrich. Das Flatter eines mit Luftreifen versehenen Rades. *Junkers Flugzeug und Motorenwerke, A.-G. TRUD*, 1943.
- [109] J.H. Wells. Kinematic boundary friction. *Engineer*, 147:455, 1929.
- [110] O.C. Zienkiewicz. *Metoda elementów skończonych*. Arkady, Warszawa, 1972.