Dr hab. Andrzej J. Turski
IPPT-PAN, Doc. Emerytowany

Warszawa, Czerwiec 25, 2005

Recenzja rozprawy doktorskiej pt.
„Ciało afinicznie sztywne w zakrzywionych przestrzeniach i rozmaitościach o stałej krzywiźnie"
Mgr-a Barbary GOŁUBOWSKIEJ

Geometria przekształceń afinicznych, to jeden z najlepiej zbadanych fragmentów matematyki. Często służy on do przybliżania bardzo skomplikowanych obiektów, np. fraktali i dynamiki ciał.

Należy wspomnieć, że współczesna grafika komputerowa i filmowa opiera się na modelach przekształceń afinicznych, analiza obrazów tomografii komputerowej- rezonansu magnetycznego mózgu, naczyń wieńcowych i serca często opiera się na modelach ciała „afinicznie sztywnego" w płaskich przestrzeniach Euklidesa, tj. przestrzeniach Riemanna o stałej krzywiźnie typu parabolicznego. Ruchy kończyn robotów modeluje się w oparciu o kinematykę i dynamikę ciała sztywnego i afinicznie deformowanego.

Przedmiotem rozprawy jest głównie inny aspekt modelu afinicznych stopni swobody. Chodzi o ruch „małych" ciał sztywnych i afinicznie deformowanych w zakrzywionych przestrzeniach Riemanna, a w szczególności modele dwuwymiarowe, które dla pewnej klasy potencjałów są ściśle rozwiązywalne analitycznie przy pomocy kwadratur.

Rozprawa składa się z 6-ciu Części i obszernej bibliografii zawierającej 102-ie pozycje.

Część 1 (18 str. i 4 rozdz.) zawiera wstępne pojęcia mechaniki ciała „afinicznie sztywnego". Przytacza się definicję ciała sztywnego (metrycznie) oraz afinicznie sztywnego. W znacznej części literatury anglojęzycznej nie funkcjonują terminy ciała „metrycznie sztywnego" i „afinicznie sztywnego". Sztywność nie jest zmieniana przymiotnikiem, natomiast dodaje się opis „deformowana afinicznie" i wtedy jest to „pseudo-sztywne ciało".

Następnie podano ogólną definicje przestrzeni konfiguracyjnej Q jako odpowiedniego iloczynu kartezjańskiego i obszernie omówiono konfigurację ciał w przestrzeni Riemanna. Zwracam uwagę na następujące ustalenia autorki ze względu na zasadnicze odniesienia do dalszej części pracy a w szczególności do jej części oryginalnej:

1° Odwzorowania afiniczne, w przestrzeni Riemana zachowują operację różniczkowania kowariantnego

2^o Na ogół nie można wprowadzić pojęcia ciała rozciągłego sztywnego lub afinicznie deformowanego w ogólnej przestrzeni Riemanna.

3^0 Można rozważać infinitezymalne (próbne, „małe") ciała sztywne z doczepioną bazą g – ortonormalną, lub infinitezymalne ciała afiniczne, tzn. punkt z *doczepioną baza ogólną.*

4^o W przypadku ciał rozciągłych w płaskiej przestrzeni opis jest możliwy i został zwięźle przedstawiony.

Wprowadzono dwa pola; ortonormalne baz liniowych i dualne ortonormalnych ko-baz oraz przedstawiono ich relacje. Zauważa się, że ortonormalność nie jest zasadniczo niezbędna, lecz ułatwia znacznie analizę problemu.

W celu opisu kinematyki w przestrzeni materialnej i fizycznej zdefiniowano tensory deformacji (Greena, Cauchy'ego, Lagrange'a i Eulera), symetrie kinematyczne, niezmienniki deformacji i kwadrupolowy, przestrzenny moment bezwładności.

Rozdział 3 tej Części poświęcony jest pojęciu energii kinetycznej T w przestrzeni konfiguracyjnej Q. Jedną z najważniejszych własności -dla dalszego postępu prac– są tu grupy symetrii dla modeli energii, tj. grupy izomerii odpowiednich struktur riemannowskich, (Q, Γ) gdzie Q – jest przestrzenią konfiguracyjną a Γ – efektywną metryką. W dalszej części Rozdz. 3, Cz. 1 omawia się model d'Alamberta, model izotropowy w przestrzeni fizycznej i afiniczny w przestrzeni mikromaterialnej oraz model afiniczny w przestrzeni i ciele. Jest to skrócony opis tego tematu zawarty w wielu pracach opublikowanych przez Autorkę i członków grupy badawczej J.J. Sławianowskiego. Na zakończenie Cz. 1 wprowadzono podstawowe informacje o metryce Killinga i iloczynie Cartana-Killinga.

<u>Uwagi Ad. Cz. 1.</u> Część ta ma wprowadzić pojęcia- w możliwie przejrzysty sposób, które mają znaleźć zastosowania w dalszej części pracy. Nie jestem przekonany, że taką rolę spełnia Rozdz. 3. Dla przykładu przytaczam następujące zdanie „ Kowariantna pochodna w sensie Γ i kowariantna pochodna w sensie Levi-Civita są takie same w przestrzeni Riemana, ale w przestrzeni Riemanna-Cartana – (M, Γ, g) gdzie $\nabla g = 0$, ale Γ nie jest symetryczne", *w którym nie mogę dopatrzyć się sensu. Nie tylko czytelnik może się pogubić, czytając ten rozdział. Również „buchalteria" indeksów nie została zachowana i mamy nadmiar indeksów „krótkie" i, np. wzory na str. 10, 11. W pracy Autorki, poz. Bib. [32], można znaleźć poprawne indeksowanie tych wzorów.*

<u>Część 2</u> (8 str. i 4 rozdziały). Próbne ciało w przestrzeni Riemanna i mechanika ciała afinicznie sztywnego.

Problem ruchu sztywnego i afinicznie sztywnego w odniesieniu do infinitezymalnych ciał w zakrzywionej przestrzeni Riemanna rozwiązuje się wprowadzeniem punktu materialnego odpowiednio z doczepioną bazą ortonormalną lub bazą ogólnego typu. Rozmaitość M jest tu przestrzenią fizyczną a elementy zbioru M symbolizują punkty geometryczne w przestrzeni położeń. Przestrzeń konfiguracyjna jest zbiorem liniowych odwzorowań przestrzeni mikromaterialnej $\Re^n$ w TM (wiązka styczna). Przestrzeń mikromaterialna jest przestrzenią Euklidesa. Każde ciało jest zbiorem punktów materialnych, a więc jest podzbiorem tej przestrzeni. W rozmaitości M (p. fizyczna) indeksy są podnoszone i opuszczane za pomocą metryki g a w przestrzeni materialnej za pomocą delty Kroneckera. Indeksowanie w przestrzeni materialnej odbywa się przy pomocy dużych liter łacińskich; A, B, C, ... natomiast w przestrzeni fizycznej przy pomocy małych liter łacińskich; i, j, k, ...Na podstawie pojęć wprowadzonych w Cz. 1 zapisuje się równania ruchu i stałe strukturalne.

Uwagi Ad. Cz. 2. Mechanikę ciała sztywnego i „afinicznie sztywnego" zapisuje się, dla „małych" ciał, w zakrzywionej przestrzeni Riemanna przy użyciu aparatu matematycznego o wysokim stopniu abstrakcji. Czytanie tej części rozprawy jest pouczające, choć nie jest łatwe i wymaga dobrej znajomości geometrii różniczkowej.

Część 3. (14 str., 2 rozdz.). Trójwymiarowa sfera zanurzona w $\Re^4$

W pierwszym rozdziale tej części rozważa się ruch punktu materialnego w przestrzeni trójwymiarowej wykorzystując pojęcia wprowadzone w poprzednich rozdziałach; metrykę Killinga, stałe strukturalne, ruch translacyjny i kątowy oraz symetrie. W następnym rozdziale tej części rozważa się zagadnienie trójwymiarowej sfery jako podrozmaitości w $\Re^4$. Sferę $S^3(0,R)$ parametryzuje się przy pomocy 3-ch współrzędnych sferycznych r,θ,φ zanurzając w $\Re^4$ tak, że suma kwadratów 4-ch współrzędnych $\vec{y}=[y^1,y^2,y^3,y^4]$ wynosi R^2. Celem jest analiza ruchu na dwuwymiarowej sferze w oparciu o geometrię trójwymiarowej grupy obrotów i mechanikę bąka symetrycznego w trzech wymiarach i bez ruchu translacyjnego. W przypadku infinitezymalnego bąka na sferze $S^2(0,R)$ problem sprowadza się do lewo-niezmienniczego układu, hamiltonowskiego z $SO(3,R)$ jako przestrzenią konfiguracyjną. W przypadku trójwymiarowej pseudosfery zagadnienie jest izomorficzne z lewo-niezmienniczym układem hamiltonowskim bazującym na grupie, Lorentza $SO(1,2)$ jako przestrzeni konfiguracyjnej. Zapisuje się energię kinetyczną ruchu translacyjnego i obrotowego na sferze i pseudosferze (przestrzeń Bolyai- Łobaczewskiego).

Na zakończenie tej części określa się energię kinetyczną na $SO(3,R)$ i $SO(1,2)$ niezmienniczą względem lewych regularnych translacji i względem prawych regularnych translacji elementami $SO(2,R)$ działającymi jako grupa obrotów względem trzeciej osi.

Uwagi Ad. Cz. 3. *Ta część zawiera wiele ciekawych i oryginalnych wyników. Wprowadzono i analizowano równania ruchu w oparciu o geometrycznie interpretowalne nawiasy Poissona bazowych zmiennych dynamicznych. Metodę tą można uznać za znacznie skuteczniejszą niż automatyczne posługiwanie się równaniami Eulera- Lagrange'a. Używając nawiasów Poissona otrzymuje się prosty opis sprzężenia między ruchem w wewnętrznych stopniach swobody a geometrią przestrzeni- spin jest sprzężony z tensorem krzywizny. Do oryginalnego wkładu Autorki należy pewno zaliczyć opracowanie metody analizy równań ruchu w oparciu o pole baz nieholonomicznych. Metoda ta pozwala na analizę ruchu infinitezymalnego żyroskopu. Otrzymuje się jawny opis oddziaływania między obrotami i skończonymi deformacjami. Otrzymane wzory mają pewne podobieństwo do wzorów, otrzymanych w następnej części rozprawy, opisujących ruch w płaskiej przestrzeni.*

Część 4. (44 str., 6 rozdziałów). Modele dwuwymiarowe, zagadnienia całkowalne

Ta część wraz z poprzedzającą częścią stanowi główny trzon rozprawy.

Rozpatruje się dwuwymiarowe ciało sztywne poruszające się w trzech przestrzeniach. Dwie pierwsze to przestrzeń Riemanna o stałej krzywiźnie, pierwsza typu eliptycznego- odpowiadająca geometrii sferycznej $(S^2(0,R))$ i typu hiperbolicznego- odpowiadająca geometrii pseudosferycznej (Bolyai- Łobaczewskiego) $(H^{2,2}(0,R))$. Trzecia przestrzeń to dwuwymiarowy torus $(T(0;r,R))$ o promieniach r i R. Mały promień torusa nie powinien się mylić ze zmienną radialną r z poprzednich przypadków. Przestrzenie te zobrazowano schematycznie rysunkami i podano wzory na kwadrat elementu długości łuku, pola baz E_A, prędkości kątowe, energię kinetyczną ruchu translacyjnego i obrotowego. Po wykonaniu transformacji Legandre'a otrzymano wzory dla energii w postaci dogodnej dla interpretacji jak i wyrażania ich przy pomocy zmiennych działania w trzech przypadkach; sfery, pseudosfery i torusa.

Posługując się równaniami Hamiltona- Jacobiego wyznacza się rozwiązania stacjonarne w przypadku sumacyjnie separowalnych zmiennych wraz ze zmiennymi działania J_q w postaci całek. Obliczenie tych całek jest możliwe, np. metodą zmiennej zespolonej (residua) przy odpowiednio zadanych potencjałach dla wewnętrznych stopni swobody modelujących drgania sprężyste. Procedura jest powtórzona dla pseudosfery i torusa.

W następnym rozdziale rozpatruje się przypadek deformacji jednorodnych. Tu nie ma konieczności nakładania więzów sztywności. Jednak w przypadku poszukiwania skończonych obrotów z dodatkowo nałożonymi infinitezymalnymi deformacjami przyjmuje się jako tło ruch żyroskopu opisanego względem aholonomicznego pola bazy E_A. Bez wewnętrznych stopni swobody, zagadnienie jest separowane dla potencjałów, których postać jest podana dla 3-ch rozważanych przypadków- sfera, pseudosfera i torus.

Rozdział 3 jest poświęcony zagadnieniu podwójnie izotropowemu, tzn. w przestrzeni fizycznej jak i w materialnej. Skutecznym narzędziem jest tu zastosowanie rozkładu dwubiegunowego otrzymanego za pośrednictwem diagonalizacji macierzy symetrycznej rozkładu biegunowego. W przypadku dwu-wymiarowym istnieje klasa podwójnie izotropowych modeli dających się ściśle traktować analitycznie dzięki pełnej separacji sumacyjnej zmiennych.

Równania Hamiltona-Jacobiego są traktowane dla przypadków separacji zmiennych przy ogólnej postaci potencjału separowanego za wyjątkiem torusa, dla którego tak ogólnej postaci potencjału nie można podać ze względu na niediagonalność macierzy G w naturalnych współrzędnych. Stosuje się modele „uniwersalnie separowane" na płaszczyźnie i modele potencjału zależne od zmiennej radialnej. Mając klasę potencjałów, przy których obliczone zostały zmienne działania, wyraża się energię przy pomocy tych zmiennych. Rozpatrzono model ciała jednorodnie deformowanego i nieściśliwego, którego przykładem praktycznym ma być kropla tłuszczu na powierzchni wody, lub plama ropy na powierzchni oceanu. Oczywiście przykład jest niezmiernie interesujący, ale daleki od porównania z wynikami pomiarowymi.

W dalszej części rozpatruje się interesujące zagadnienie, afinicznie niezmienniczego modelu energii kinetycznej. Dotychczas rozważano model niezmienniczy względem $g-$grupy izomerii działającej w przestrzeni stycznej i względem grupy ortogonalnej działającej w przestrzeni mikromaterialnej.

Ostatni rozdział tej części jest przeznaczony modelowi energii niezmienniczej dla ciała nieściśliwego.

Uwagi Ad. Cz. 4. Ta część nosi szczególnie konkretny charakter i stanowi główny i oryginalny wkład do tematu rozprawy.

Opracowano metodę analizy wraz ze ścisłym rozwiązaniem równań ruchu w oparciu o pole baz nieholonomicznych w przestrzeni, odpowiednio dopasowanej do struktury tensora *metrycznego. Metoda ta jest niezbędna w analizie ruchu infinitezymalnego żyroskopu, ponieważ pozwala na użycie współrzędnych uogólnionych związanych z geometrią grupy obrotów, np. kąty Eulera, wektor obrotu itp. W przypadku infinitezymalnego ciała sztywnego deformowanego afinicznie, lub jednorodnie pozwala to na efektywny opis oddziaływania między obrotami a skończonymi deformacjami. Otrzymane tu wzory, mimo pewnych różnic mają pewne podobieństwo do wzorów opisujących ruch w płaskiej przestrzeni. Przedyskutowano prosty model bąka poruszającego się w trójwymiarowej przestrzeni sferycznej, co może mieć znaczenie dla modeli wewnętrznych stopni swobody cząstek i kontinuum relatywistycznego z mikrostrukturą.*

Przykłady dotyczyły jednak głownie przestrzeni dwuwymiarowej, dla której mamy trzy stopnie swobody w przypadku infinitezymalnego ciała „afinicznie sztywnego". Jestem daleki od robienia zarzutu nierealności takiego założenia. Modele te mogą być stosowane w teorii płyt i powłok z mikrostrukturą i być może w zagadnieniach geofizyki, w opisie dynamiki płyt kontynentalnych, lub ruchu plam zanieczyszczeń, np. wycieki ropy naftowej po powierzchni zbiorników wody. Ciekawym wynikiem jest też to, że w przypadku nieściśliwym model czysto geodezyjny, bez potencjału, ale z afinicznie niezmienniczą energią kinetyczną może modelować drgania w wewnętrznych stopniach swobody. Dynamika nieliniowych drgań sprężystych jest wtedy zakodowana w samej formie energii kinetycznej.

Część 5 i 6 to Uwagi końcowe i dodatek opisujący metodę residuum, tj. obliczanie całek z funkcji posiadających punkty rozgałęzienia, metodą funkcji zmiennej zespolonej.

Te części pozostawiam bez komentarza.

Ocena ogólna

Przedstawiona do oceny rozprawa jest samodzielnym i oryginalnym rozwiązaniem postawionych zadań badawczych przy użyciu odpowiednio dostosowanych, zaawansowanych metod matematyki i mechaniki analitycznej. Praca jest oryginalnym wkładem do teorii układów dynamicznych zwłaszcza hamiltonowskich układów z symetriami. Autorka dostarczyła dowodów i świadectw skutecznego działania przy rozwiązywaniu złożonych problemów dynamiki ciał sztywnych i afinicznie deformowanych w zakrzywionych przestrzeniach Riemanna.

Jestem przekonany, że Mgr Barbara GOŁUBOWSKA jest kompetentnym badaczem naukowym w zakresie przedmiotu rozprawy i zasługuje na nadanie stopnia doktora nauk technicznych w zakresie mechaniki. Wnoszę o dopuszczenie Mgr-a Barbary Gołubowskiej do obrony publicznej.

Warszawa, dnia 2005-06-27

AJTurski

Andrzej J. Turski