Recenzja
rozprawy doktorskiej mgr Barbary Gołubowskiej pt.

Ciało afinicznie sztywne w zakrzywionych przestrzeniach i rozmaitościach o stałej krzywiźnie

Przedstawiona mi do recenzji rozprawa doktorska została napisana w Zakładzie Teorii Ośrodków Ciągłych Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN pod kierunkiem prof. dr hab. Jana Jerzego Sławianowskiego. Najogólniej mówiąc, praca dotyczy ruchu na rozmaitościach Riemanna "małych" ciał (a w granicy punktów materialnych) z wewnętrznymi stopniami swobody. Wewnętrzne stopnie swobody związane są z obrotami oraz z deformacjami ciał. Zagadnienia omówione w pracy stanowią kontynuację wieloletnich badań promotora pracy i wielu jego współpracowników. Problemy tego typu mają już dość długą historię i obszerną literaturę.

Metody matematyczne wykorzystywane w pracy najogólniej można zaliczyć do geometrii różniczkowej, w tym do teorii wiązek głównych, grup Liego i teorii koneksji. Bardziej szczegółowo, autorka używa wiązek ogólnych baz liniowych (dla ciał deformowalnych) i wiązek baz ortonormalnych (dla ciał metrycznie sztywnych). Bazami wiązek są rozmaitości riemannowskie i pseudoriemannowskie.

Rozprawa mgr Gołubowskiej liczy w sumie 102 strony (6 + 96). Składa się z Wprowadzenia, sześciu części i bibliografii zawierającej 102 pozycje. Trzon pracy stanowią części 3 i 4 (zwłaszcza część 4), w których autorka przedstawiła swoje główne wyniki.

Część pierwsza zatytułowana *Wstępne pojęcia mechaniki ciała afinicznie sztywnego* dotyczy głównie *kinematyki*, najpierw ciała rozciągłego w przestrzeni Euklidesowej, gdzie ma sens pojęcie ciała sztywnego lub afinicznie sztywnego (tzn. deformowalnego jednorodnie). Następnie Autorka przechodzi do opisu kinematyki ciała w przestrzeni Riemanna, gdzie nie można utrzymać pojęcia rozciągłego ciała sztywnego. Można jednak wprowadzić pojęcie ciała infinitezymalnie sztywnego, tzn. "małego" ciała (ciała próbnego) z doczepioną bazą liniową wektorów stycznych. Baza ta jest potrzebna do opisu wewnętrznych stopni swobody ciała próbnego (przestrzeń styczna do rozmaitości jest przestrzenią liniową). Autorka definiuje w tej części pojęcie przestrzeni konfiguracyjnej dla przyszłych układów oraz podaje ogólne formuły na energie kinetyczne dla różnych typów ruchów. W pierwszym zdaniu na str. 14 ewidentnie zabrakło słowa "nie".

Część druga pracy zatytułowana *Próbne ciało w przestrzeni Riemanna — mechanika ciała afinicznie sztywnego* poświęcona jest dynamice układów opisanych w części pierwszej. Szczególna uwaga została położona na dynamikę związaną z wewnętrznymi stopniami swobody.

Część trzecia pracy nosi tytuł *Trójwymiarowa sfera zanurzona w* $\mathbb{R}^4$. Opis ruchu cząstki na trójwymiarowej sferze $S^3(0,R)$ zanurzonej w $\mathbb{R}^4$ z metryką Euklidesową znacznie upraszcza fakt, że sferę o promieniu 1, tzn. $R=1$, można utożsamić z grupą SU(2), która jest podwójnym nakryciem grupy $SO(3,\mathbb{R})$. Można więc było wykorzystać własności grup Liego, algebr Liego i formę Killinga. Autorka wykorzystała również reprezentację $S^3(0,R) \in \mathbb{R}^4$ jako kulę o promieniu πR zanurzoną w $\mathbb{R}^3$ i odpowiednio do tego dostosowała parametryzację dla tej rozmaitości.

Nie rozumiem, dlaczego pod koniec tej części, od str. 37 do końca, znalazł się tekst rozpoczynający się słowami "Naszym celem jest .... Autorka tego nie wyjaśnia. Tekst ten powinien raczej znaleźć się w następnej części.

Zasadniczą część rozprawy stanowi CZĘŚĆ 4 zatytułowana *Modele dwuwymiarowe, zagadnienia całkowalne*. W tej częśći pracy mgr Gołubowska rozważa ruchy infinitezymalnych ciał sztywnych i deformowalnych afinicznie dla trzech przypadków 2-wymiarowych rozmaitościach Riemanna, mianowicie dla ciał poruszających się

- na sferze $S^2(0,R) \in \mathbb{R}^3$,
- na pseudosferze $H^{2,2,+} \in \mathbb{R}^3$,
- na torusie $T(0;r,R) \in \mathbb{R}^3$.

Dwie pierwsze powierzchnie są rozmaitościami Riemanna o stałej krzywiźnie, odpowiednio dodatniej i ujemnej. Są więc przestrzeniami symetrycznymi o maksymalnej liczbie wektorów Killinga (maksymalnie-wymiarowej grupie izometrii). Torus nie należy do tej klasy. Ponieważ nazwa pseudosfera występuje w różnych kontekstach, należało zaznaczyć, że chodzi o pseudosferę zanurzoną w $\mathbb{R}^3$ z metryką typu metryki Minkowskiego.

Analizę ruchów na tych trzech powierzchniach Autorka zaczyna od przypadu ruchu 2-wymiarowych ciał sztywnych, tzn. mających tylko jeden wewnętrzny stopień swobody (obroty). Na początek mgr Gołubowska przytacza odpowiednie tensory metryczne. W formie metrycznej dla torusa występuje człon $r \sin \psi$, który w wyrażeniach otrzymanych przy pomocy tej formy został błędnie, acz prawie systematycznie, zamieniony na $r \cos \psi$ (czasami tylko na $\cos \psi$). Dla sfery r oczywiście nie jest wielkością wektorową (jak błędnie zaznaczono na rysunku).

Mając formy metryczne Autorka podaje wyrażenia na energie kinetyczne dla translacyjnych stopni swobody. Następnie używa baz ortonormalnych w przestrzeniach stycznych do określenia energii kinetycznych odpowiadających wszystkim (translacyjnym i rotacyjnym) stopniom swobody. Do analizy ruchu p. Gołubowska używa równania Hamiltona-Jacobiego. Oblicza zmienne działania najpierw dla ogólnego potencjału $V(r)$ odpowiadającego tylko translacyjnemu stopniowi swobody, a następnie oblicza funkcje działania dla kilku zapostulowanych konkretnych postaci funkcji $V(r)$.

Procedura ta jest następnie uogólniona na układy, w których oprócz obrotów dopuszczone są również deformacje jednorodne. Liczba wewnętrznych stopni swobody rośnie wówczas do czterech. Ponadto Autorka rozważa potencjały, które zależą nie tylko od translacyjnymych, ale również od wewnętrznymch stopni swobody, czyli V ma ogólną postać $V = V_{\mathrm{tr}} + V_{\mathrm{int}}$, gdzie V_{int} można wyrazić za pomocą tensora deformacji ciała.

Jako przypadki szczególne mgr Gołubowska analizuje następujące podklasy (modele):

- zagadnienie podwójnie izotropowe, tzn. gdy tensor bezwładności jest izotropowy,
- model ciała jednorodnie deformowalnego, nieściśliwego,
- model z afinicznie niezmienniczą energią kinetyczną,
- model ciała nieściśliwego z afinicznie niezmienniczą funkcją energi.

Dla każdego modelu mgr Gołubowska zaproponowała po kilka konkretnych potencjałów. Wybór potencjałów był podyktowany bardziej względami matematycznymi niz fizycznymi. Autorce rozprawy chodziło przede wszystkim o separowalność funkcji działania i o całkowalność równań ruchu.

Nie wdając się w szczegółową analizę wyznaczania rozwiązań dla poszczególnych modeli można stwierdzić, że ich wspólną cechą było zastosowanie nieholonomicznego pola baz liniowych (na wyżej wymienionych rozmaitościach) do właściwego skonstruowania dających się efektywnie użyć współrzędnych uogólnionych (w tych rozmaitościach baz). Dla modeli dwuwymiarowych p. Gołubowska znalazła klasę potencjałów, dla których zagadnienie jest całkowane (ponieważ jest separowalne), a które jednocześnie można zinterpretować jako opisujące nieliniowe drgania sprężyste w wewnętrznych stopniach swobody. Całkowanie tych modeli z zaproponowanymi potencjałami można sprowadzić do kwadratur, tzn. scałkować je analitycznie przy pomocy zmiennych działania. Użycie baz nieholonomicznych jest w zasadzie niezbędne w mechanice infinitezymalnego żyroskopu, gdy składowe wektorów bazy reprezentującej konfiguracje nie są niezależne (baza jest ortonormalna), ale także w przypadku infinitezymalnego ciała deformowalnego jednorodnie, ponieważ inaczej nie da się efektywnie opisać sprzężenia między obrotami i deformacjami. W ten sposoób można użyć współrzędnych uogólnionych, w pewnym sensie indukowanych przez współrzędne na grupie obrotów. W konsekwencji otrzymuje się wzory podobne (chociaż w istotnych szczegółach inne) do tych dla rozciągłego ciała w przestrzeni płaskiej.

Najsłabszą stroną pracy jest jej strona redakcyjna. Niektóre zdania są niekompletne, gdzie indziej dwa lub trzy zdania są sklejone w jedno. Interpunkcja jest dosyć stochastyczna i czasami utrudnia zrozumienie niektórych zdań. Im bliżej końca pracy, tym wyraźniej widać pośpiech przy jej redagowaniu. W części 1 i 2 pracy jest dużo pomyłek w indeksach we wzorach. W niektórych wzorach są błędy, ponieważ (jak można sądzić) Autorka przekopiowywała wcześniej występujące wzory i nie dokonała w nich wszystkich niezbędnych zmian. Gdyby Autorka ponumerowała większą ilość wzorów, zwłaszcza w części 4, to nie musiałaby powtarzać pewnych uniwersalnych wyrażeń, np. tensorów metrycznych czy formuł na translacyjną część energii kinetycznej T_{tr}. Odwołania do wcześniejszych wzorów czasami są pomylone. Na str. 69 dla torusa pojawił się $\cosh \psi$ zamiast $\cos \psi$. Dodatek (CZĘŚĆ 6) nie jest napisany starannie.

Mgr B. Gołubowska jest autorką pięciu prac i współautorką trzech prac. Pięć z nich ukazało się w *Reports on Mathematical Physics*, i po jednej w *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* i w *Pracach IPPT*. Jej dorobek w zakresie publikacji wyników jest więc znaczny.

Ocena końcowa pracy

W podsumowaniu chciałbym stwierdzić, że rozprawa mgr B. Gołubowskiej dotyczy aktualnych i zaawansowanych problemów mechaniki, i ogólniej fizyki teoretycznej. Zawiera bardzo bogaty materiał i zastosowane w niej są nowoczesne i zaawansowane metody matematyczne. Otrzymane wyniki stanowią istotny wkład w badanie dynamiki ciał ze strukturą wewnętrzną. Moim zdaniem mgr B. Gołubowska jest przygotowana do samodzielnego stawiania i rozwiązywania problemów fizycznych. Uważam, że przedstawiona mi do oceny praca spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę więc o dopuszczenie mgr Barbary Gołubowskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Dr hab. Ryszard Mrugała
prof. nadzw. UMK
Instytut Fizyki UMK
ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń

Toruń, 30 czerwca 2005 r.