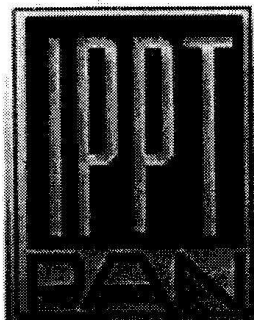


CIAŁO AFINICZNIE SZTYWNE W ZAKRZYWIONYCH  
PRZESTRZENIACH  
I ROZMAITOŚCIACH O STAŁEJ KRZYWIŹNIE

Barbara Gołubowska

ROZPRAWA DOKTORSKA

POLSKA AKADEMIA NAUK



WARSZAWA, ŚWIĘTOKRZYSKA 21  
2005

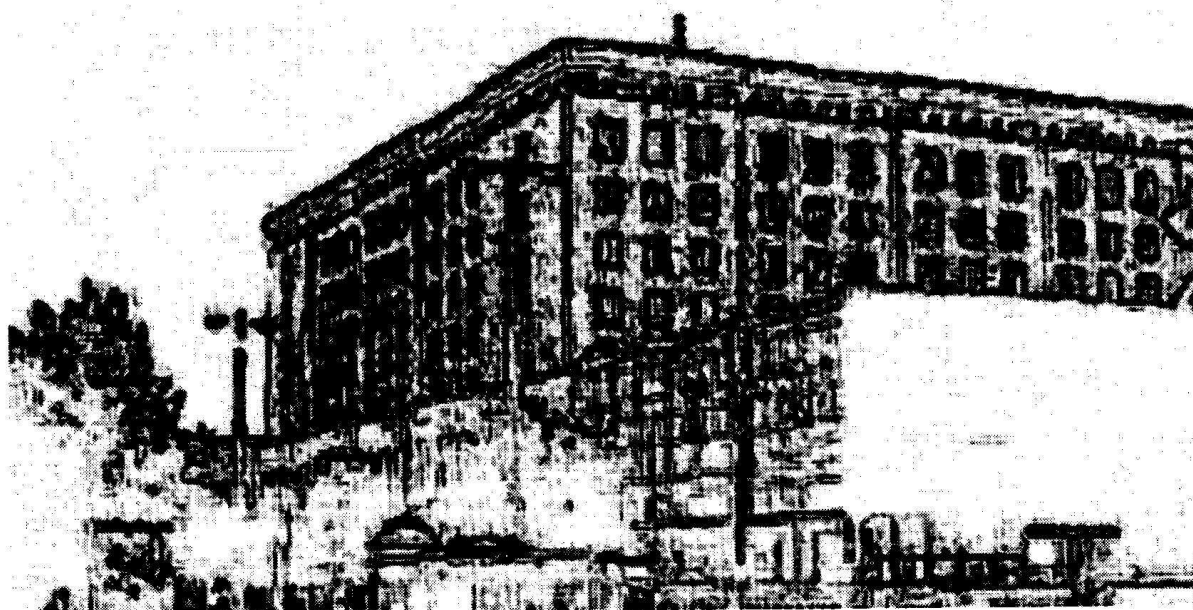
© Copyright by Barbara Gołubowska, 2005

POLSKA AKADEMIA NAUK  
...  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW  
TECHNIKI

Rozprawa doktorska

**"Ciało afinicznie sztywne w zakrzywionych przestrzeniach i  
rozmaiwościach o stałej krzywiznie"**

złożona w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki, w  
Zakładzie Teorii Ośrodków Ciągłych przez Barbarę Gołubowską.  
Promotorem pracy jest Profesor Doktor Habilitowany Jan Jerzy  
Sławianowski.



*Składam serdeczne podziękowanie promotorowi niniejszej rozprawy doktorskiej Panu Profesorowi Janowi J. Sławianowskiemu, za udzielanie cennych rad i wskazówek przy jej pisaniu.*



*Składam też serdeczne podziękowania moim przyjaciołom Wasylowi Kovalchukowi, Agnieszce Martens i Elizie Rożko, za ich przyjaźń, udzielane rady i poczucie humoru.*

*Barbara Gołubowska*

*Warszawa, Marzec 7, 2005*

## Motto

Fragment z autobiograficznej książki Stanisława M. Ulama "PRZYGODY MATEMATYKA" (wydawnictwo Prószyński i S-ka Warszawa 1996) rozdziału 15-go "Matematyka i nauka: myśli rozproszone".

...Matematyka to oczywiście pewien bardzo zwięzły sposób sformalizowania całego racjonalnego myślenia.....

Niektóre własności funkcji analitycznych liczb zespolonych okazują się nie tylko po prostu przydatne, lecz również zwiąża ne w bardzo fundamentalny sposób z fizycznymi własnościami materii: w hydrodynamice, przy opisie ruchu cieczy nieściśliwej (takiej jak woda), w elektrodynamice i w podstawach samej teorii kwantów.

Ogólna koncepcja przestrzeni została co prawda wywiedziona z fizycznej przestrzeni postrzeganej zmysłami, ale nie jest całkowicie przez nią podyktowana. Została uogólniona na przestrzeń  $n$ -wymiarową, gdzie  $n$  jest większe od trzech, a nawet na nieskończenie wiele wymiarów, co okazało się takie użyteczne jako język podstaw samej fizyki. Czy jest to cudowny przejaw potęgi ludzkiego umysłu? A może taka jest natura fizycznej rzeczywistości, która została nam tylko objawiona? Samo myślenie (a może było to odkrycie), że istnieją różne stopnie, różne rodzaje nieskończoności, miało nie tylko filozoficzny, lecz także ogromny psychologiczny wpływ na wrażliwe umysły....

## Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy doktorskiej jest sformułowanie i przeanalizowanie nowych modeli dotyczących układów mechanicznych z wewnętrznymi stopniami swobody. Szczególny nacisk jest położony na ruch w przestrzeniach o stałej krzywiznie. Jedną z motywacji dla tych badań jest teoria ośrodków ciągłych z mikrostrukturą, zwłaszcza mikropolarnych i mikromorficznych. Innej motywacji dostarcza Hamiltonowska mechanika układów całkowalnych, zwłaszcza układów z symetriami. Rozpatrywanymi obiektami są punkty materialne poruszające się w przestrzeni Riemanna i obdarzone dodatkową wewnętrzną strukturą, której geometria rządzona jest grupą Liego, np. grupą liniową, ortogonalną, rzutową lub konforemną. Rozpatrywane są modele dynamiczne niezmiennicze względem grupy działającej w rozmaitości wewnętrznych stopni swobody, a jednocześnie interpretowalne w języku teorii sprężystości. Szczególny nacisk położony jest na układy całkowalne, zmienne kątdziałanie i problemy degeneracji. Rozmaitości będące areną naszych modeli dynamicznych to z reguły rozmaitości algebraiczne, ze szczególnym naciskiem na przestrzenie Riemanna o stałej krzywiznie. Typowe teorie ośrodków z mikrostrukturą cierpią na brak dobrze sformułowanej dynamiki dla wewnętrznych stopni swobody. Używa się bardzo uproszczonych, prymitywnych modeli mających bardzo słabe uzasadnienie fizyczne i geometryczne. Naszym celem w tej pracy jest sformułowanie dobrze uzasadnionej dynamiki dla pojedynczego elementu, jakim jest punkt materialny z strukturą rządzoną przez grupę liniową (lub jej podgrupy) oraz grupę rzutową i być może konforemną. Szczególny nacisk jest położony na modele dynamiczne o wysokiej symetrii, zwłaszcza zupełnie całkowalne, a jednocześnie jakościowo zgodne z ogólnymi wymogami teorii sprężystości. Modele te mogą być punktem wyjścia do późniejszych badań nad relatywistycznym kontinuum z mikrostrukturą. Niezależnie od swych ewentualnych zastosowań, są one interesujące same w sobie, jako ciekawy, niezbadany dotychczas typ Hamiltonowskich układów całkowalnych. Zbadane zostaną m.in. zagadnienia degeneracji i zmienne kątdziałanie dla takich modeli. Z tego, co nam wiadomo, nikt dotychczas nie badał takich modeli, zwłaszcza w przypadku, gdy dynamiczna grupa symetrii pokrywa się z grupą rządzącą geometrią stopni swobody, nie jest zaś jej właściwą podgrupą.

## Spis treści

Część 1. Wstępne pojęcia mechaniki ciała afinicznie sztywnego	1
1. Przestrzeń konfiguracyjna	1
1.1. Konfiguracja ciała w przestrzeni Riemanna	2
2. Kinematyka- symetrie kinematyczne	6
3. Energia kinetyczna	9
3.1. Model d'Alemberta	10
3.2. Zagadnienie izotropowe w przestrzeni fizycznej i afiniczne w mikromaterialnej	11
3.3. Energia kinetyczna afiniczna w przestrzeni fizycznej oraz jednocześnie izotropowa w przestrzeni mikromaterialnej	14
3.4. Model afiniczny w przestrzeni i w ciele	16
4. Metryka Killinga - podstawowe informacje	17
Część 2. Próbne ciało w przestrzeni Riemanna - mechanika ciała afinicznie sztywnego	19
1. wstęp	19
2. Prędkość kątowna	21
3. Równania ruchu	23
4. Stałe strukturalne	25
Część 3. Trójwymiarowa sfera zanurzona w $\mathbb{R}^4$	27
1. $S^3(0, R)$ zanurzona w $\mathbb{R}^4$ - symetrie	27
2. Redukcja zagadnienia i parametryzacja przy użyciu kątów Eulera	36
Część 4. Modele dwuwymiarowe, zagadnienia całkowne	41
1. Ruch infinitezimalnego ciała metrycznie sztywnego	41
2. Deformacje jednorodne - wstęp	49
3. Zagadnienia podwójnie izotropowe	52
3.1. Proponowane modele potencjałów na płaszczyźnie $xy$	58
3.2. Model potencjału $V_r(r)$	60

3.3.	Energia wyrażona w zmiennych działanie	61
4.	Model ciała jednorodnie deformowalnego nieściśliwego	63
5.	Afinicznie niezmienniczy model energii kinetycznej.	68
5.1.	Modele potencjału na płaszczyźnie $\lambda \mu$	73
5.2.	Modele potencjału $V(r)$	74
5.3.	Energia wyrażona w zmiennych działanie	76
6.	Afinicznie niezmienniczy model energii - ciało nieściśliwe	77
6.1.	Proponowane modele potencjałów $V(\lambda)$	81
6.2.	Model potencjału $V_r(r)$	82
6.3.	Energia wyrażona w zmiennych działanie	83
Część 5. Uwagi końcowe		85
Część 6. Dodatek-metoda residuum		87
Bibliografia		91

## CZĘŚĆ 1

# Wstępne pojęcia mechaniki ciała afinicznie sztywnego

Każdą konfigurację ciała sztywnego lub afinicznie sztywnego można otrzymać z pewnej konfiguracji uznanej za wyjściową, standardową, przez działanie elementu odpowiedniej grupy ruchów: grupy izometrii (ruchów Euklidesowych) w przypadku zwykłego ciała (metrycznie) sztywnego, lub grupy ruchów afinicznych (w przypadku ciała afinicznie sztywnego). Z definicji ciało sztywne jest takim agregatem punktów materialnych w którym wszystkie relacje metryczne między elementami składowymi (odległości, kąty) są stałe podczas ruchu. Odpowiedzialna jest za to specyficzna struktura oddziaływań wewnętrznych formalnie opisywana przy pomocy odpowiednich sił reakcji nie wykonujących pracy na przemieszczeniach wirtualnych zgodnych z więzami. Głównym przedmiotem naszych zainteresowań jest pojęcie ciała afinicznie sztywnego tj. takiego, że wszystkie relacje afiniczne między punktami będą zachowane. Odległości między punktami materialnymi nie są już stałe. Natomiast zachowany jest zbiór prostych materialnych, ich równoległość oraz proporcje odcinków na danej prostej materialnej lub na prostych równoległych. Mówiąc językiem mechaniki ośrodków ciągłych: ciało takie jest deformowalne jednorodnie. Posługujemy się terminem ciało afinicznie sztywne, ale w użyciu jest też pseudo-rigid-body, przeważnie występuje w literaturze zagranicznej (ciało pseudoszttywne).

### 1. Przestrzeń konfiguracyjna

Mechanika Newtona, jej pierwotne aksjomaty i modele opierają się na pojęciu punktu materialnego poruszającego się w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej. Model ten jest powszechnie znany, jest on zadowalający na niezbyt wielkich obszarach przestrzeni fizycznej.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $M$  - Euklidesowa przestrzeń fizyczna, czyli zbiór punktów geometrycznych,
- $V$  - przestrzeń liniowa której elementami są wektory  $\nu$  określające przekształcenia translacji:  
 $M \rightarrow M$
- $\rightarrow$  - odwzorowanie  $M \times M \rightarrow V$



O strukturze  $(M, V, \rightarrow)$  zakładamy iż spełnia ona zwykle aksjomaty przestrzeni afinicznej. Wprowadzenie tensora metrycznego  $g \in V^* \otimes V^*$  wzbogaca strukturę o pojęcia metryczne, a struktura różniczkowa przestrzeni liniowej indukuje w  $M$  strukturę analitycznej różniczkowej.

Przejdźmy do opisu pojęcia ciała materialnego - rozciągliwego ciała deformowalnego. Punkt geometryczny jest idealizacją pojęcia położenia, tak samo punkt materialny idealizacją pojęcia małej porcji ciała. Ciało materialne będzie więc zbiorem takich punktów -  $N$ . Dalej  $N$  będziemy nazywać przestrzenią materialną.

Przestrzeń konfiguracyjna ciała  $Q$  z definicji jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni fizycznej  $M$  wykonywanym nad  $N$  jako zbiorem indeksów. W poniższej pracy rozważamy szczególny przypadek gdy  $N$  jest skończonym zbiorem  $N$  elementowym. Wtedy  $Q$  jest iloczynem kartezjańskim, punkty jego są  $N$  - elementowymi ciągami punktów przestrzeni  $M$ ,  $Q = M^N$ . Konfiguracjami ciała są elementy zbioru  $Q$ :

$$(1.1) \quad Q \ni (q_1 \dots q_N) = \varphi, \quad q_i = \varphi(i), \quad \varphi : N \rightarrow M.$$

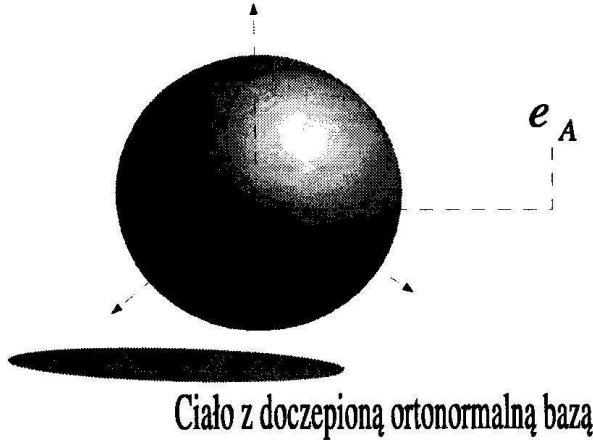
Tak wprowadzona przestrzeń konfiguracyjna zawiera konfiguracje osobliwe, ponieważ należą do niej wszystkie odwzorowania  $N \rightarrow M$ , a więc różne punkty materialne mogą zajmować to samo położenie. Konfiguracje takie wyklucza się z mechaniki ciał deformowalnych. Nasza konfiguracja jest injekcją  $N \rightarrow M$ , a więc punkty materialne nie będą zajmować tego samego położenia w  $M$ .

Wprowadźmy pojęcie transformacji Eulerowskich czyli przestrzennych (indukowanych przez transformacje przestrzeni fizycznej). Odwzorowanie  $\ell : M \rightarrow M$  działa na  $Q$  za pośrednictwem lewostronnej superpozycji, czyli jak następuje:

$$Q \ni \varphi \rightarrow \ell \circ \varphi$$

**1.1. Konfiguracja ciała w przestrzeni Riemanna.** Głównym tematem pracy jest ciało afinicznie sztywne, lub metrycznie sztywne w rozmaitościach o stałej krzywiznie, chociaż punktem wyjścia jest przypadek ogólnej przestrzeni Riemanna  $(M, g)$  o wymiarze  $n$ . Jak wiadomo grupa izometrii w  $(M, g)$  ma co najwyżej wymiar  $k = \frac{1}{2}n(n+1)$ . Ten maksymalny możliwy wymiar jest osiągalny w przestrzeni o stałej krzywiznie. Przeważnie jest niższy i jest raczej regułą, że w ogólnej przestrzeni Riemanna  $k = 0$ , w szczególności że nie ma żadnych nietrywialnych izometrii; nietrywialnych to znaczy różnych od odwzorowania tożsamościowego  $id_M$  ( $id_M(x) = x$  dla każdego  $x \in M$ ). To samo dotyczy odwzorowań afinicznych, tzn. zachowujących operację różniczkowania kowariantnego. W związku z tym nie możemy wprowadzić na ogół pojęcia rozciągliwego ciała metrycznie sztywnego, lub afinicznie sztywnego. Można jednak rozważać infinitezymalne (próbne) ciało metrycznie sztywne, tzn. punkt materialny z doczepioną bazą  $g$ -ortonormalną  $(\dots, e_A, \dots)$ , lub

infinitesimalne ciało afinicznie sztywne, t.zn. punkt z doczepioną ogólną bazą( $\dots, e_A, \dots$ ). Sytuację tę ilustruje rysunek poniżej.



W przypadku ciał rozciągliwych w płaskiej przestrzeni afinicznej opis jest znacznie prostszy. Niech  $(M, V, \rightarrow, g)$ , będzie Euklidesową przestrzenią fizyczną, zaś  $(N, U, \rightarrow, \eta)$  Euklidesową przestrzenią materialną. Symbole  $M, N$  oznaczają tu same przestrzenie jako zbiory punktów,  $V, U$  ich przestrzenie liniowe translacji,  $\rightarrow$  oznacza operację wektora wodzącego która parze punktów  $a, b \in M$  lub  $\in N$  przypisuje wektor translacji  $\overrightarrow{ab} \in V$  lub  $\in U$  przeprowadzającej  $a$  w  $b$ . Natomiast  $g \in V^* \otimes V^*$ ,  $\eta \in U^* \otimes U^*$  oznaczają symetryczne dodatnio określone iloczyny skalarne, tensory metryczne. W wielu zagadnieniach i wyrażeniach analitycznych wygodnie jest ustalić jakiś układ odniesienia w  $N$ , np. środek masy w przestrzeni materialnej  $N$  i wyróżnioną bazę w  $U$ - np. osie główne tensora bezwładności  $J$ . Wtedy  $N$  i  $U$  utożsamiamy z  $\mathbb{R}^n$ . Przestrzenią konfiguracyjną rozciągliwego ciała afinicznie sztywnego jest

$$Q = M \times LI(U, V),$$

iloczyn kartezjański przestrzeni fizycznej (położenie środka masy, ruch translacyjny) oraz  $LI(U, V) \subset L(U, V)$ , zbiór izomorfizmów liniowych  $U$  na  $V$ . Jeśli  $(x, \varphi) \in Q$  jest konfiguracją to punkt  $a^K$  zajmuje w  $M$  położenie o współrzędnych Eulerowskich

$$y^i = x^i + \varphi^i_K a^K.$$

Ruch opisujemy zależnością  $x^i, \varphi^i_K$  od czasu  $t$ . Tak opisujemy ruch afiniczny. W przypadku ciała metrycznie sztywnego  $\varphi$  jest liniową izometrią  $\varphi \in O(U, \eta, V, g)$ :

$$\eta_{AB} = g_{ij} \varphi^i_A \varphi^j_B.$$

Utożsamiając  $U$  z  $\mathbb{R}^n$  zastępujemy  $LI(U, V)$  przez  $F(V)$ -rozmaitość baz uporządkowanych (reperów) w  $V$ , bo  $LI(\mathbb{R}^n, V)$  jest kanonicznie tożsame z  $F(V)$ . Wtedy właściwie konfigurację opisujemy jako parę  $(x, e)$ - położenie środka masy w  $M$  i reper  $e = (\dots e_A \dots)$ , lub jego ko-reper dualny  $\tilde{e} = (\dots e^A \dots)$ ,  $\langle e^A, e_B \rangle = \delta^A_B$ . Jeśli ruch jest poddany więzom metrycznej sztywności (żyroskop), to  $e$  jest bazą ortonormalną

$$(e_A | e_B) = g(e_A, e_B) = g_{ij} e^i_A e^j_B = \delta_{AB}.$$

Gdy ruch jest sztywny  $e^i_A$  nie są niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi, gdyż spełniają powyższy układ r ównań. Wprowadźmy wtedy współrzędne uogólnione jako odpowiednie zmienne parametryzujące grupę obrotów  $SO(n, \mathbb{R})$ , np. dla  $n = 3$  kąty Eulera lub składowe wektora obrotu. W przypadku pełnego ruchu afinicznego  $e^i_A$  są niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi, ale nie zawsze najwygodniejszymi. Nie są one bowiem dostosowane do opisu oddziaływania między obrotowymi (żyroskopowymi) a czysto deformacyjnymi stopniami swobody. Sytuacja komplikuje się gdy opisujemy ruch infinitezimalnego ciała metrycznie lub afinicznie sztywnego w przestrzeni Riemanna  $(M, g)$ . Jak wspomniano przestrzeń konfiguracyjną utożsamiamy wtedy z rozmaitością (wiązką) baz liniowych FM, jeśli chodzi o ruch afiniczny i z rozmaitością (wiązką) baz ortonormalnych  $F(M, g)$ , gdy rozpatrujemy ruch metrycznie sztywny (infinitezimalny żyroskop). Ruch postępowy opisujemy za pomocą sparametryzowanej za pomocą czasu absolutnego krzywej w rozmaitości  $M$  (przestrzeni fizycznej). Ewolucję czasową wewnętrznych stopni swobody opisuje zadane wzdłuż tej krzywej pole baz liniowych (przy ruchu afinicznym) lub baz liniowych ortonormalnych (przy ruchu żyroskopowym). Analitycznie ruch jest opisywany przez funkcje  $x^i(t), e^i_A(t)$ , przy czym, w przypadku metrycznie sztywnym (żyroskopowym) te ostatnie spełniają tożsamościowo warunki:

$$g_{ij}(x(t)) e^i_A(t) e^j_B(t) = \delta_{AB}$$

Jak wspomniano, często wygodnie jest nadal (także w przypadku obiektów infinitezimalnych) posługiwać się pojęciami pochodzącymi z mechaniki sztywnych i deformowalnych ciał rozciągliwych. Wtedy właśnie używamy pojęcia przestrzeni mikromaterialnej, którą utożsamimy z  $\mathbb{R}^n$  (jeśli  $\dim M = n$ ). Jeśli ciało zajmuje w przestrzeni  $M$  położenie  $x \in M$  a jego konfigurację wewnętrzną (żyroskopową lub afiniczną) charakteryzuje baza  $e = (\dots, e_A, \dots)$  gdzie  $e_A = T_x M$  są wektorami zaczepionymi w punkcie  $x$  (elementami przestrzeni stycznej  $T_x M$ ), to wygodnie jest mówić, że konfigurację wewnętrzną opisuje izomorfizm liniowy  $\mathbb{R}^n$  na  $T_x M$ . Jest to ogólny izomorfizm w przypadku ciała afinicznie sztywnego lub izometria w przypadku żyroskopu. W języku tym wygodnie jest opisywać symetrie problemu, a przy tym zachowuje się pewną jedność pojęciową z mechaniką obiektów rozciągliwych.

Wprowadźmy pewne dodatkowe obiekty geometryczne ułatwiające zarówno analizę pojęciową zagadnienia, jak i dostarczające wygodnych narzędzi rachunkowych. Zadajmy mianowicie w rozmaitości  $M$  ortonormalny aholonomiczny układ odniesienia, czyli pole ortonormalnych baz liniowych

$$E = (E_1, \dots, E_A, \dots, E_n),$$

a tym samym równoważne mu pojęciowo pole dualne ortonormalnych ko-baz

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (E^1, \dots, E^A, \dots, E^n) \\ \langle E^A, E_B \rangle &= E^A_i E^i_B = \delta^A_B \end{aligned}$$

( $E^i_A E^A_j = \delta^i_j$ ). Ortonormalność rozumiemy w sensie metryki  $g$ , a więc w każdym punkcie  $x \in M$

$$g_x(E_{Ax}, E_{Bx}) = g_{ij}(x) E^i_A(x) E^j_B(x) = \delta_{AB}$$

Ortonormalność nie jest zasadniczo niezbędna, jest jednak czynnikiem niezwykle ułatwiającym analizę problemu, zwłaszcza zaś takich zagadnień jak oddziaływanie obrotów i deformacji.

Jeśli w pewnej chwili ciało zajmuje położenie  $x \in M$ , zaś jego wewnętrzna konfiguracja jest zadana przez bazę  $e$  w przestrzeni stycznej  $T_x M$

$$e = (e_1, \dots, e_A, \dots, e_n)$$

$e_A \in T_x M$ , to możemy wektory  $e_A$  wyrazić liniowo przez wektory zadanego pola baz  $E$  wzięte w tym samym punkcie  $x$ ,

$$e_A = E_B(x) \varphi^B_A$$

gdzie  $\varphi$  jest macierzą nieosobliwą. Przy zadanym raz na zawsze polu baz  $E$  konfiguracje zadane są więc przez pary  $(x, \varphi) \in M \times GL(n, \mathbb{R})$ . Ruch opisujemy zadając zależność czasową współrzędnych przestrzennych i elementów macierzowych  $\varphi$ :

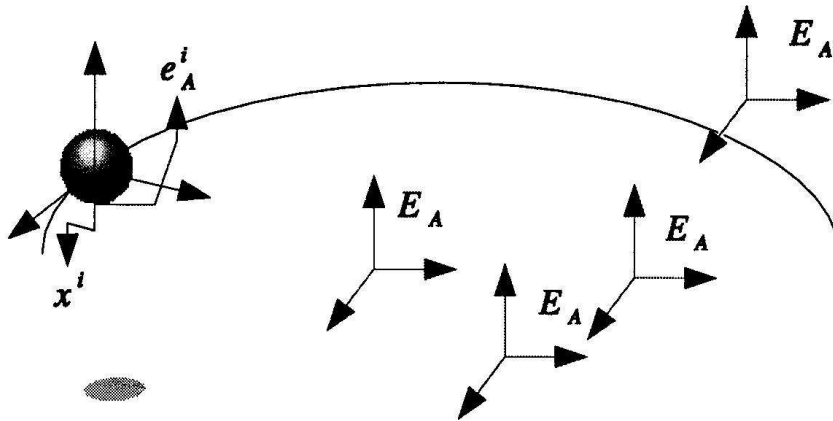
$$x^i(t), \varphi^A_B(t)$$

Rozmaitość baz  $FM$  jest więc utożsamiana przez wybór pola  $E$  z iloczynem kartezjańskim  $M \times GL(n, \mathbb{R})$ . Jest to możliwe oczywiście tylko wtedy, gdy  $M$  spełnia pewne warunki topologiczne. Zakładamy że ma to miejsce. Macierz  $\varphi \in GL(n, \mathbb{R})$  jest dowolna w przypadku ruchu afinicznego w wewnętrznych stopniach swobody. Ścisłej biorąc, w duchu mechaniki ciał deformowalnych jest raczej pozostać w obrębie składowej spójnej, t.zn. podgrupy o wyznaczniku dodatnim,  $\varphi \in GL^+(n, \mathbb{R})$ . Jeśli ruch wewnętrzny jest żyroskopowy,  $\varphi$  jest macierzą ortogonalną (obrotem)  $\varphi \in SO(n, \mathbb{R})$ . Na grupach obrotów jak na wszystkich grupach Liego mamy pewne wyróżnione typy współrzędnych, np.:współrzędne kanoniczne pierwszego rodzaju, które w przypadku  $n=3$  sprowadzają się do wektora obrotu lub jakieś zmienne wtórne, jak współrzędne sferyczne w przestrzeni wektorów obrotu.

W praktyce bardzo często używane są dla  $n = 3$  kąty Eulera. W każdym razie,  $SO(n, \mathbb{R})$  może być wszędzie prosto sparametryzowana jakimiś współrzędnymi uogólnionymi  $q^1, \dots, q^N$  ( $N = \frac{1}{2}n(n-1)$ ). Pełny układ współrzędnych na rozmaitości baz ortonormalnych będzie dany przez  $(x^1, \dots, x^n, q^1, \dots, q^N)$ . W przeciwieństwie do  $(x^1, \dots, x^n, \varphi^1, \dots, \varphi^n)$  są one niezależne (są więc "prawdziwymi" współrzędnymi). Gdy ruch wewnętrzny jest afiniczny (obroty i deformacje jednorodne) to  $(x^1, \dots, x^n, \varphi^1, \dots, \varphi^n)$  są niezależne, ale jak wspomniano bardzo często niewygodne, niedostosowane do fizycznej natury rozpatrywanych problemów, jak oddziaływanie obrotów i deformacji jednorodnych. Toteż w tym ogólnym przypadku też jest wygodnie używać opisu opartego na pomocniczym polu baz  $E$ . Macierze  $\varphi \in GL(n, \mathbb{R})$  są wtedy wyrażane przez rozkład biegunowy lub dwubiegunowy, co jest bardzo dogodnym narzędziem do badania sprzężenia deformacji i obrotów. Prowadzi to do naturalnych współrzędnych, w języku których operacje upraszczają się znacznie i możliwa jest ilościowa i jakościowa analiza problemu.

## 2. Kinematyka- symetrie kinematyczne

Jak wiadomo, ruch punktów materialnych opisujemy przy pomocy krzywych w przestrzeni fizycznej lub konfiguracyjnej.



Wróćmy do zagadnienia ruchu rozciągliwych ciał sztywnych lub afinicznie sztywnych w płaskiej przestrzeni afinicznej. Używamy więc znowu przestrzeni afinicznych  $(M, V, \rightarrow, g), (N, U, \rightarrow, \eta)$ . Przypomnijmy też że w całej pracy używamy w opisie operacji analitycznych w przestrzeni materialnej dużych łacinkich indeksów  $A, B, C, \dots$  zaś w przestrzeni fizycznej posługujemy się małymi

literami łacinskimi  $a, b, c, \dots$ . Dla układów z afinicznymi stopniami swobody mamy dwa tensory deformacji: tensor Greena  $G$  w przestrzeni materialnej i tensor Cauchy'ego  $C$  w przestrzeni fizycznej:

$$G \in U^* \otimes U^*, \quad C \in V^* \otimes V^*.$$

Są one zdefiniowane wzorami:

$$G = \varphi^* \cdot g, \quad C = (\varphi^{-1})^* \cdot \eta,$$

zaś w przejrzystej postaci analitycznej z użyciem indeksów:

$$G_{AB} = g_{ij} \varphi^i_A \varphi^j_B, \quad C_{ij} = \eta_{AB} (\varphi^{-1})^A_i (\varphi^{-1})^B_j.$$

Ich odwrotności  $\tilde{G} \in U \otimes U$ ,  $\tilde{C} \in V \otimes V$  są zdefiniowane przez:

$$\tilde{G}^{AC} G_{CB} = \delta^A_B, \quad \tilde{C}^{ik} C_{kj} = \delta^i_j.$$

Zwróćmy uwagę na możliwość popełnienia pomyłki przy automatycznym stosowaniu konwencji opuszczania i podnoszenia indeksów:

$$\eta^{AC} \eta^{BD} G_{CD}, \quad g^{ik} g^{jl} C_{kl},$$

są czym innym niż

$$\tilde{G}^{AB} = (\varphi^{-1})^A_i (\varphi^{-1})^B_j g^{ij}, \quad \tilde{C}^{ij} = \varphi^i_A \varphi^j_B \eta^{AB}.$$

Gdy nie ma deformacji  $\varphi \in LI(U, \eta; V, g)$  wówczas  $G = \eta$ ,  $C = g$ .

Wygodniej jest używać miar deformacji znikających w ruchu sztywnym. Są to tensor deformacji Lagrange'a  $E \in U^* \otimes U^*$ , i Eulera  $e \in V^* \otimes V^*$  dane odpowiednio przez ([21]-[22], [26]):

$$E := \frac{1}{2}(G - \eta), \quad e := \frac{1}{2}(g - C).$$

Możemy też użyć notacji kontrawariantnej  $E^{AB}$ ,  $e^{ij}$ . W przeciwieństwie do  $\tilde{G}^{AB}$ ,  $\tilde{C}^{ij}$  będzie ona zdefiniowana przez  $\eta$ - i  $g$ -podniesienie indeksów

$$E^{AB} = \eta^{AC} \eta^{BD} E_{CD}, \quad e^{ij} = g^{ik} g^{jl} e_{kl}.$$

Tensor  $G$  nie zależy od  $\eta$  i może być zdefiniowany nawet jeśli przestrzeń materialna jest czysto afiniczna. Podobnie i  $C$  nie zależy od  $g$  i będzie dobrze zdefiniowany nawet jeśli przestrzeń fizyczna nie zostanie wyposażona w metrykę. Wprawdzie dosłownie rozumiane deformacje wygodniej jest opisywać za pomocą  $E$ ,  $e$  niż  $G$ ,  $C$ , ale w wielu wyrażeniach  $G$ ,  $C$  są bardziej naturalne. Tensory deformacji zachowują się pod działaniem izometrii w bardzo charakterystyczny sposób, np. dla  $A \in O(V, g)$ ,  $B \in O(U, \eta)$ , mamy:

$$(2.1) \quad G[A\varphi]_{KL} = G[\varphi]_{KL}, \quad C[\varphi B]_{ij} = C[\varphi]_{ij},$$

$$G[\varphi B]_{KL} = G[\varphi]_{CD} B^C{}_K B^D{}_L, \quad C[A\varphi]_{ij} = C[\varphi]_{ab} (A^{-1})^a{}_i (A^{-1})^b{}_j.$$

Dwie ostatnie zależności są prawdziwe dla każdego  $A \in GL(V)$ ,  $B \in GL(U)$ . Ponadto mają też znikające nawiasy Poissona odpowiednio ze spinem i "wirowością" (vorticity):

$$\{G_{KL}, S^i{}_j\} = 0, \quad \{C_{ij}, V^A{}_B\} = 0,$$

podobnie dla  $E_{KL}$ ,  $e_{ij}$

$$\{E_{KL}, S^i{}_j\} = 0, \quad \{e_{ij}, V^A{}_B\} = 0.$$

Jest to infinitezymalny opis wspomnianych niezmienniczości 2.1. Mieliśmy tu doczynienia z problemem niezmienniczości względem pewnych grup symetrii kinematycznych. Symetrie te, odpowiednio przekształcenia przestrzenne i materialne, to opisywane poniżej działania grup  $GL(V)$  (obroty i deformacje fizyczne- Eulerowskie), oraz  $GL(U)$  (obroty i deformacje materialne- Lagranżowskie), na przestrzeni konfiguracyjnej wewnętrznych stopni swobody  $Q_{int} = LI(U, V)$  (liniowe izomorfizmy  $U$  na  $V$ , stąd  $LI$ ):

$$A \in GL(U) : \varphi \rightarrow A\varphi$$

$$B \in GL(V) : \varphi \rightarrow \varphi B.$$

Można rozpatrywać węższe grupy symetrii, ograniczając się do podgrup np.: do podgrup ortogonalnych  $O(V, g) \subset GL(V)$ ,  $O(U, \eta) \subset GL(U)$  jak we wzorze 2.1. Ważnym pojęciem są niezmienniki (skalary) deformacji. Skalarna miara deformacji nie zdaje sprawy z orientacji deformacji w przestrzeni fizycznej lub materialnej, to znaczy z położenia głównych osi tensorów deformacji. Niezmienniki mogą zostać dobrane w dowolny sposób, ale w  $n$ -wymiarowej przestrzeni dokładnie  $n$  może być niezależnych. Szczególny wybór zależy od natury rozważanego problemu i potrzeb rachunkowych. Kiedy wybór niezmienników nie jest wyraźnie sprecyzowany, oznaczamy je przez  $\mathcal{K}_a$ ,  $a = \overline{1, n}$ . Zdefiniujmy tensory mieszane:

$$\hat{G} \in U \otimes U^*, \quad \hat{C} \in V \otimes V^*, \quad \hat{E} \in U \otimes U^*, \quad \hat{e} \in V \otimes V^*,$$

przy pomocy wzorów,

$$\hat{G}^A{}_B := \eta^{AC} G_{CB}, \quad \hat{C}^i{}_j := g^{ik} C_{kj}, \quad \hat{E}^A{}_B := \eta^{AC} E_{CB}, \quad \hat{e}^i{}_j := g^{ik} e_{kj}.$$

Można przytoczyć całą klasę możliwych  $\mathcal{K}_a$ :

$$\text{Tr}(\hat{G}^k), \quad \text{Tr}(\hat{C}^k), \quad \text{Tr}(\hat{E}^k), \quad \text{Tr}(\hat{e}^k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Dla pewnych zagadnień wygodniej jest użyć następujących równań:

$$\det[\hat{G}^A{}_B - \lambda \delta^A{}_B] = 0, \quad \det[\hat{C}^i{}_j - \lambda \delta^i{}_j] = 0,$$

$$\det[\hat{E}^A_B - \lambda \delta^A_B] = 0, \quad \det[\hat{e}^i_j - \lambda \delta^i_j] = 0.$$

Ich lewe strony są  $n$ -tego rzędu wielomianami względem  $\lambda$ . Ich rozwiązanie (wartości własne) dostarcza jednego z możliwych wyborów bazowych niezmienników deformacji. Inny możliwy wybór dany jest przez współczynniki przy  $\lambda^p$ ,  $p = 0, \overline{(n-1)}$  [21]-[22] w równaniu własnym (współczynnik przy  $\lambda^n$  jest standardowy i równa się jeden). Niezmienniki deformacji są nieczułe ze względu na izometrie przestrzenne i materialne tj. dla  $A \in O(V, g)$ ,  $B \in O(U, \eta)$  mamy:

$$\mathcal{K}_a[A\varphi B] = \mathcal{K}_a[\varphi].$$

Zatem w języku nawiasów Poissona

$$\{\mathcal{K}_a, S^i_j\} = \{\mathcal{K}_a, V^A_B\} = 0.$$

Z powodów czysto praktycznych wygodniej jest posługiwać się wielkościami  $Q^a = \sqrt{\lambda_a}$  gdzie  $\lambda_a$  są rozwiązaniami powyższych równań własnych (lub  $q^a = \ln Q^a$  (tj.,  $Q^a = \exp(q^a)$ ); upraszcza to znacznie rachunki. Wartości własne  $\hat{C}$  równają się  $(\lambda_a)^{-1} = (Q^a)^{-2} = \exp(-2q^a)$ .

Każda funkcja  $F$  na przestrzeni konfiguracyjnej która zależy od  $\varphi$  tylko przez niezmienniki deformacji jest podwójnie izotropowa, t.zn. spełnia

$$F(A\varphi B) = F(\varphi) \quad \text{dla} \quad A \in O(V, g), B \in O(U, \eta), \quad \text{oraz} \quad \varphi \in LI(U, \eta; V, g).$$

Wszystkie takie funkcje mają znikające nawiasy Poissona ze spinem i wirowością:

$$\{F, S^i_j\} = \{F, V^A_B\} = 0.$$

Będziemy też potrzebowali kwadrupulowego przestrzennego momentu bezwładności,

$$J[\varphi]^{ab} = \varphi^a_K \varphi^b_L J^{KL}.$$

Jest on powiązany z  $J^{KL}$  tak jak  $\tilde{C}$  z  $\eta$ . Kiedy rozkład masy w ciele jest izotropowy,  $J[\varphi]$  staje się proporcjonalne do odwróconego tensora deformacji Cauchy. W przeciwieństwie do współtowarzyszącego tensora bezwładności  $J \in U \otimes U$ ,  $J[\varphi] \in V \otimes V$  jest zależny od konfiguracji, a więc zmienny w czasie.

### 3. Energia kinetyczna

Energia kinetyczna  $T$  jest jak wiadomo równoważna pewnemu tensorowi metrycznemu  $\Gamma$  w przestrzeni konfiguracyjnej  $Q$ . Związek jest dany wzorem:

$$T = \frac{1}{2} \Gamma_{ij}(q) \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt},$$

gdzie  $q^i$  są współrzędnymi uogólnionymi na  $Q$ . W tym sformułowaniu wszystkie wielkości charakteryzujące bezwładność ciała jak masy należących do niego punktów materialnych, momenty bezwładności,



wyższego rzędu momenty rozkładu masy, są włączone do  $\Gamma$  jako pewne stałe parametry. W prostszych przypadkach jak ruch punktu materialnego, ruch ciała sztywnego lub deformowalnego jednorodnie są wydzielane z  $\Gamma$  jako pewne czynniki liczbowe lub tensorowe. Są one interpretowane wtedy jako wielkości fizyczne, zaś pozostałe czynniki interpretuje się jako "właściwe" geometryczne. Nam jednak na poziomie rozważań ogólnych wygodniej jest traktować  $\Gamma$  jako efektywną metrykę i nie wydzielać z niej czynników inercyjnych. Zresztą wbrew wypowiedzanemu niekiedy pogładowi, energia kinetyczna zawiera również informację dynamiczną o układzie, podobnie jak energia potencjalna lub siły. Jest to szczególnie widoczne w układach z więzami, gdy przestrzeń konfiguracyjna ma nietrywialną geometrię. Ruchy czysto geodezyjne z funkcją Lagrange'a daną przez sam człon kinetyczny nabierają wtedy znaczenia fizycznego. Jest to też widoczne w zasadzie Maupertuis, gdzie potencjał jest w pewnym sensie wmontowany w tensor metryczny i orbity układu są geodezyjnymi w sensie tego tensora.

Jedną z najważniejszych własności modeli energii kinetycznej są ich grupy symetrii, tzn grupy izometrii odpowiednich struktur Riemannowskich  $(Q, \Gamma)$ .

Omówmy kilka naturalnych modeli ze szczególnym naciskiem na ich grupy symetrii, a więc strukturę geometryczną ale też i perspektywy zastosowań fizycznych:

1. model wynikający wprost z zasady d'Alemberta,
2. izotropowy w przestrzeni fizycznej i afiniczny w mikromaterialnej,
3. afiniczny w przestrzeni fizycznej oraz jednocześnie izotropowy w przestrzeni mikromaterialnej,
4. model afiniczny w przestrzeni i w ciele.

**3.1. Model d'Alemberta.** Model d'Alemberta był szczegółowo rozważany w pracach [28]-[30][61]-[72]. Jest on zgodny z tradycyjną procedurą więzów, opartą na założeniu ich idealności i zasadzie d'Alemberta. Wychodząc od mechaniki wielocząstkowego układu dyskretnego lub ośrodka ciągłego wprowadza się podrozmaitość więzów ruchu afinicznego. Zwykle wyrażenie na energię kinetyczną pełnego układu ogranicza się do więzów, a mówiąc precyzyjniej do wiązki stycznej do rozmaitości. W przypadku zwykłego układu rozciągniętego w płaskiej przestrzeni afinicznej otrzymuje się wzór:

$$T = T_{tr} + T_{int} = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{d\varphi_A^i}{dt} \frac{d\varphi_B^j}{dt} J^{AB},$$

gdzie  $\frac{dx^i}{dt} = v^i$ ,  $\frac{d\varphi_A^i}{dt}$  są odpowiednio prędkością ruchu postępowego i prędkością uogólnioną ruchu wewnętrznego (względny); dokładnie  $v^i$  jest prędkością środka masy. Oczywiście stała wielkość skalarna  $m$  jest masą ciała zaś stały tensor  $J^{AB} \in U \otimes U$  w przestrzeni materialnej jest tensorem

bezwładności, dokładniej tensorem kwadrupolowego momentu rozkładu masy w ciele

$$m = \int_U d\mu, \quad J^{AB} = \int a^A a^B d\mu(a)$$

( $\mu$  jest miarą dodatnią opisującą rozkład masy w przestrzeni materialnej)

Gdy mamy do czynienia z infinitezymalnym ciałem afinicznie sztywnym w przestrzeni Riemanna  $(M, g)$  wtedy, jak wspomniano, wewnętrzne stopnie swobody opisane są przy pomocy reperów  $e = (\dots, e_A, \dots)$ . Składowe  $e_A^i$  są tym czym były  $\varphi_A^i$  w rozciąglwym opisie ciała. Przestrzeń materialna  $U$  jest zastąpiona przez mikromaterialną  $R$

Energię kinetyczną postuluje się wtedy w postaci analogicznej do modelu rozciągltego

$$T = T_{tr} + T_{int} = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{De_A^i}{Dt} \frac{De_B^j}{Dt} J^{AB}.$$

$J^{AB}$  jest teraz pojęciem pierwotnym, a nie otrzymanym z opisu wielocząstkowego kwadrupolem rozkładu masy. Symbol  $\frac{D}{Dt}$  oznacza różniczkowanie kowariantne wzdłuż krzywej (reprezentującej ruch translacyjny) w sensie koneksji Levi-Civity zbudowanej z metryki  $g$ .

Powyższe wyrażenie  $T$  jest izotropowe względem grup izometrii  $SO(T_x M, g_x)$  działających na przestrzeniach stycznych  $T_x M$ . Jest to odpowiednik izotropii przestrzennej w modelu ciała rozciągltego. Jest też izotropowe w przestrzeni mikromaterialnej  $\mathbb{R}^n$  z metryką delta Kroeckera, ale względem grupy "obrotów"  $SO(n, \mathbb{R}; J)$  zachowującej  $J$  jako tensor metryczny. Staje się dosłownie izotropowe w sensie delty Kroneckera, a więc grupy ortogonalnej  $SO(n, \mathbb{R})$ , gdy tensor bezwładności jest izotropowy,  $J^{AB} = \mu \delta^{AB}$ . Nie jest jednak afinicznie niezmiennicze ani w przestrzeni  $M$ , ani w przestrzeni mikromaterialnej  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.2. Zagadnienie izotropowe w przestrzeni fizycznej i afiniczne w mikromaterialnej.

Zapostulujemy energię jako :  $T = T_{\text{translacyjna część}} + T_{\text{wewnętrzna część}}$ . Część związana z ruchem translacyjnym ma postać

$$T_{tr} = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \frac{m}{2} g_{ij} v^i v^j$$

gdzie  $m$  jest masą opisywanego ciała a  $v^i = \frac{dx^i}{dt}$  -prędkością. Tensor deformacji Greena:

$$G_{AB} = g_{ij} e_A^i e_B^j, \quad \tilde{G}^{AB} = e_i^A e_j^B g^{ij} \text{ pozwala na reprezentację: } T_{tr} = \frac{m}{2} G_{AB} v^A v^B$$

Wewnętrzną energię kinetyczną przedstawmy jako sumę następujących części.:

1. Niezmiennicza względem  $g$ -grupy izometrii działającej na przestrzeni stycznej i względem grupy ortogonalnej działającej na przestrzeni mikromaterialnej  $\mathbb{R}^n$ ,

$$T_{intR} = \frac{J}{2} g_{ij} \Omega_i^k \Omega_j^l g^{kl}.$$

Prędkości afiniczne (afiniczna uogólnienie prędkości kątowej) są tu teraz zdefiniowane wzorem:

$$\Omega_j^i = \frac{De^i_A}{Dt} e^A_j$$

a ich reprezentacja współtowarzysząca dana jest przez  $\widehat{\Omega}^A_B = \frac{De^A_i}{Dt} e^i_B$ , oczywiście  $\Omega_j^i = e^i_A \widehat{\Omega}^A_B e^B_j$ .  $J$ -jest skalarom zaś  $g^{kl}$   $J$  jest Eulerowskim opisem izotropowego tensora bezwładności.

2. Afinicznie niezmiennicza część energii dana jest w postaci Casimira-Killinga:

$$T_{intC-K} = \frac{A}{2} \Omega^c_d \Omega^d_c + \frac{B}{2} (\Omega^c_c)^2 = \frac{A}{2} Tr [\Omega^2] + \frac{B}{2} (Tr [\Omega])^2$$

gdzie  $A, B$  są stałe.

Lagrangian jest dany przez:  $L = T - V(x, e)$ . Przekształcenie Legendre'a ma postać:

$$p_i = m g_{ij} v^j, \quad \widehat{K}_j^i = J g^{il} g_{jk} \Omega_l^k + A \Omega_j^i + B \Omega_k^k \delta_j^i.$$

Odwracając otrzymujemy:

$$v^i = \frac{1}{m} g^{ij} p_j, \quad \Omega_j^i = \frac{1}{\widetilde{J}} g^{im} g_{jn} \widehat{K}_m^n + \frac{1}{\widetilde{A}} \widehat{K}_j^i + \frac{1}{\widetilde{B}} \widehat{K}_m^m \delta_j^i$$

$$\widetilde{J} = \frac{2(J^2 - A^2)}{J}, \quad \widetilde{A} = \frac{2(A^2 - J^2)}{A}, \quad \widetilde{B} = \frac{2(J - A)(J + A + nB)}{B},$$

gdzie  $p_i$  jest pędem a  $\widehat{K}_j^i$  jest spinem afinicznym. To samo można zapisać w reprezentacji współtowarzyszącej.

Zgodnie z transformacją Legendre'a otrzymujemy energię kinetyczną postaci:

$$T_{tr} = \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j = \frac{1}{2m} G^{AB} p_A p_B$$

$$T_{int} = T_{intR} + T_{intC-K} = \frac{1}{2\widetilde{J}} g_{kl} \widehat{K}_m^k \widehat{K}_n^l g^{mn} + \frac{1}{2\widetilde{A}} \widehat{K}_l^k \widehat{K}_k^l + \frac{1}{2\widetilde{B}} \widehat{K}_k^k \widehat{K}_l^l$$

Hamiltonian jest postaci:  $H = T_{tr} + T_{int} + V$ , gdzie  $V(x^i, e^i_A)$  jest potencjałem. W przypadku płaskiej przestrzeni gdy istniały współrzędne kartezjanskie w których  $g^{ij}$ ,  $g_{ij}$  były stałe, równania ruchu miały następującą postać bilansową:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} = F^i \\ \frac{d\widehat{K}_B^A}{dt} &= \{\widehat{K}_B^A, H\} = -e_B^i \frac{\partial V}{\partial e_A^i} = N_B^A \end{aligned}$$

Zgodnie z symetrią grupy  $GL(n, \mathbb{R})$ , bez sił działających na wewnętrzne stopnie swobody, spin afiniczny w współrzędnych współtowarzyszających jest zachowywany, ale w reprezentacji przestrzennej już nie.

Powróćmy do przypadku zakrzywionej przestrzeni  $M$  z tensorem metrycznym  $g_{ij}$  ( $g_{ij}$  nie są stałe w żadnych współrzędnych). Równania ruchu przyjmują następującą postać praw bilansu:

$$\frac{dp_a}{dt} = \{p_a, H\} = \{p_a, T_{tr}\} + \{p_a, V\} + \{p_a, T_{int}\}.$$

Po przeliczeniu otrzymujemy:

$$(3.2) \quad \{p_a, T_{tr}\} = -\frac{1}{2m} p_i p_j g^{ij}{}_{,a} + \frac{1}{m} \widehat{K}^k{}_i R^l{}_{kaj} g^{ij} p_i, \quad \{p_a, V\} = F_a.$$

Teraz możemy przedstawić równanie ruchu w postaci praw bilansu, używając zadanej koneksji  $\Gamma$  i koneksji Levi-Civita  $\{{}^b{}_{ai}\}$  ( $LC$ ); tymczasem nie muszą się one pokrywać:

$$(3.3) \quad \frac{\Gamma D p_a}{Dt} = \frac{dp_a}{dt} - p_b \Gamma^b{}_{ai} \frac{dx^i}{dt}, \quad \frac{LC D p_a}{Dt} = \frac{dp_a}{dt} - p_b \{{}^b{}_{ai}\} \frac{dx^i}{dt}$$

$$(3.4) \quad \Rightarrow \frac{LC D p_a}{Dt} = \frac{\Gamma D p_a}{Dt} - p_b K^b{}_{ai} \frac{dx^i}{dt},$$

$$K^b{}_{ai} := \Gamma^b{}_{ai} - \{{}^b{}_{ai}\}.$$

Stąd używając 3.2 mamy:

$$\frac{LC D p_a}{Dt} = \frac{1}{m} \widehat{K}^k{}_i R^l{}_{kaj} g^{ij} p_i + F_a + \{p_a, T_{int}\}$$

gdzie  $\frac{LC D}{Dt}$  jest kowariantną różniczką w sensie Levi-Civita. 3.4. Otrzymujemy  $\{p_a, T_{int}\}$  postaci:

$$\{p_a, T_{int}\} = \frac{1}{J} (g^{mn} K_{kla} - g_{kl} K^{mn}{}_a) \widehat{K}^k{}_m \widehat{K}^l{}_n.$$

Wtedy mamy:

$$\frac{D p_a}{Dt} = \frac{1}{m} \widehat{K}^k{}_i R^l{}_{kaj} g^{ij} p_i - \frac{2}{m} p_b K^b{}_{ai} g^{ic} p_c + \frac{1}{J} \widehat{K}^k{}_m \widehat{K}^l{}_n (g^{mn} K_{kla} - g_{kl} K^{mn}{}_a) + F_a.$$

Zauważmy, kowariantna pochodna w sensie  $\Gamma$  i kowariantna pochodna w sensie Levi-Civita są takie same w przestrzeni Riemannna, ale w przestrzeni Riemanna-Cartana -  $(M, \Gamma, g)$  gdzie  $\nabla g = 0$ , ale  $\Gamma$  nie jest symetryczne. W przestrzeni Riemanna-Cartana  $K$  jest tensorem kontorsji:

$$K^b{}_{ai} = S^b{}_{ai} + S_{ai}{}^b + S_{ia}{}^b, \quad S^i{}_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj}),$$

Stąd otrzymujemy:

$$p_b K^b{}_{ai} p^i = 2p_b S^b{}_{a}{}^c p_c, \quad (g^{mn} K_{kla} - g_{kl} K^{mn}{}_a) \hat{K}^k{}_m \hat{K}^l{}_n = 0.$$

Wówczas równanie ruchu otrzymujemy postaci:

$$(3.5) \quad \frac{Dp^a}{Dt} = \frac{1}{m} \hat{K}^k{}_l R^l{}_{kaj} g^{ij} p_i - \frac{2}{m} p_b S^b{}_{a}{}^c p_c + F^a$$

$$(3.6) \quad m \frac{Dv^a}{Dt} = \hat{K}^k{}_l R^l{}_{k}{}^a{}_j v^j - 2m v^b S_b{}^a{}_c v^c + F^a$$

Stałe  $I, A, B$  nie występują w powyższych równaniach ale występują w transformacji Legendre'a więc są one uwzględnione w pełnym układzie. W przypadku płaskiej przestrzeni gdy istniały współrzędne kartezjanskie bilansowa postać równania dla wewnętrznych stopni swobody jest taka jak poprzednio 3.1. Tak jak i prędkości kątowe spin afiniczny  $\hat{K}^A{}_B$  i jego pochodną kowariantną  $\frac{D\hat{K}^A{}_B}{Dt}$  możemy zanurzyć w przestrzeni fizycznej posługując się  $e^i{}_a$ :

$$\frac{DK^a{}_b}{Dt} = e^a{}_A \frac{D\hat{K}^A{}_B}{Dt} e^B{}_b = e^a{}_A \left( -e^i{}_B \frac{\partial V}{\partial e^i{}_A} \right) e^B{}_b = -e^a{}_A \frac{\partial V}{\partial e^i{}_A} \delta^i{}_B = e^a{}_A (N^A{}_B) e^B{}_b = N^a{}_b.$$

### 3.3. Energia kinetyczna afiniczna w przestrzeni fizycznej

oraz jednocześnie izotropowa w przestrzeni mikromaterialnej. Jak poprzednio energię postulujemy w postaci sumy  $T_{tr}$  związanej z ruchem translacyjnym i  $T_{int}$  związanej z wewnętrznymi stopniami swobody.

$$T_{tr} = \frac{m}{2} \delta_{AB} v^A v^B = \frac{m}{2} C_{ij} v^i v^j$$

gdzie  $v^A$  są współtowarzyszającymi składowymi prędkości translacyjnej  $v^A = e^A{}_i v^i = e^A{}_i \frac{dx^i}{dt}$ .

$$T_{int} = \frac{J}{2} \delta_{KL} \Omega^K{}_L \Omega^L{}_N \delta^{MN} + \frac{A}{2} \Omega^K{}_L \Omega^L{}_K + \frac{B}{2} \Omega^K{}_K \Omega^L{}_L$$

gdzie jak pamiętamy  $C^{ab} = e^a{}_A e^b{}_B \eta^{AB}$  jest tensorem kowariantnym deformacji Cauchyego.  $J$  jest skalarem, a iloczyn  $J \delta^{KL}$  to tensor bezwładności, natomiast  $A, B$  są stałymi. Zapiszmy to teraz

w języku Hamiltonowskim. Przyjmijmy Lagrangian w postaci  $L = T - V(x, e)$ . Przekształcenie Legendre'a ma postać

$$p_A = m\delta_{AB}v^A, \hat{K}^K{}_L = J\delta^{KM}\delta_{NM}\Omega^N{}_M + A\Omega^K{}_L + B\Omega^M{}_M\delta^K{}_L.$$

Odwracając je otrzymujemy:

$$v^B = \frac{1}{m}\delta^{AB}p_A, \quad \Omega^A{}_B = \frac{1}{\tilde{J}}\delta^{AM}\delta_{BN}\hat{K}^N{}_M + \frac{1}{\tilde{A}}\hat{K}^A{}_B + \frac{1}{\tilde{B}}\hat{K}^M{}_M\delta^A{}_B$$

gdzie:

$$\tilde{J} = \frac{2(J^2 - A^2)}{J}, \quad \tilde{A} = \frac{2(A^2 - J^2)}{A}, \quad \tilde{B} = \frac{2(J - A)(J + A + nB)}{B},$$

$p_A$  jest pędem w reprezentacji współtowarzyszącej.

Zgodnie z transformacją Legendre'a otrzymujemy energię kinetyczną w postaci:

$$T_{tr} = \frac{1}{2m}\delta^{AB}p_A p_B = \frac{1}{2m}C^{ab}p_a p_b$$

$$T_{int} = T_{intR} + T_{intC-K}$$

$$T_{intR} = \frac{1}{2\tilde{J}}\delta_{KL}\hat{K}^K{}_M\hat{K}^L{}_N g^{MN}, \quad T_{intC-K} = \frac{1}{2\tilde{A}}\hat{K}^K{}_L\hat{K}^L{}_K + \frac{1}{2\tilde{B}}\hat{K}^K{}_K\hat{K}^L{}_L$$

Równania ruchu w postaci nawiasów Poissona sformułujemy najpierw w postaci praw bilansu dla składowych mikromaterialnych.

$$\frac{dp_A}{dt} = \{p_A, H\} = \{p_A, T_{tr}\} + \{p_A, T_{int}\} + \{p_A, V\}$$

$$\frac{d\hat{K}^A{}_B}{dt} = \{\hat{K}^A{}_B, H\} = \{\hat{K}^A{}_B, T_{tr}\} + \{\hat{K}^A{}_B, T_{int}\} + \{\hat{K}^A{}_B, V\}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{dp_A}{dt} &= \frac{1}{\tilde{J}}\delta_{AL}\delta^{MN}\hat{K}^L{}_N p_M + \frac{1}{\tilde{A}}\hat{K}^L{}_A p_L + \frac{1}{\tilde{B}}\hat{K}^L{}_L p_A + \\ &\frac{1}{m}\hat{K}^M{}_N R^N{}_{MAK} P_L \delta^{KL} - \frac{2}{m}p_M P_L S^M{}_{AK} \delta^{KL} + F_A \end{aligned}$$

natomiast równania dla ruchu wewnętrznego:

$$\frac{d\hat{K}^A{}_B}{dt} = -\frac{1}{m}\delta^{AC}p_C p_B + \frac{1}{\tilde{J}}\hat{K}^A{}_K\hat{K}^L{}_N \delta^{KN}\delta_{LB} - \frac{1}{\tilde{J}}\hat{K}^K{}_B\hat{K}^L{}_N \delta_{KL}\delta^{AN} + N^A{}_B.$$

Wykonajmy teraz bilans w składowych przestrzennych przy pomocy nawiasów Poissona:

$$\frac{dp_a}{dt} = \{p_a, H\}, \quad \frac{d\hat{K}^A{}_B}{dt} = \{\hat{K}^A{}_B, H\}$$

Jednak o wiele prościej jest przekształcić do postaci Eulerowskiej tj. zanurzyć w  $M$  przy pomocy  $e_j^A$  już otrzymane równania. Ponadto wielkości  $p_A$ ,  $\widehat{K}_B^A$ , z punktu widzenia przestrzeni fizycznej  $M$  są skalarami, można więc od razu zapisać ich pochodne jako kowariantne.

$$\frac{Dp_A}{Dt} = \frac{Dp_i e^i_A}{Dt}$$

$$\frac{D\widehat{K}_B^A}{Dt} = \frac{D\widehat{K}^i_j e_i^A e^j_B}{Dt}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\frac{Dp_a}{Dt} = \frac{1}{m} \widehat{K}^k \quad {}_l R^l_{kaj} C^{ij} p_i - \frac{2}{m} p_b S^b \quad {}_{ai} C^{ic} p_c + F_a,$$

w przypadku potencjalnym

$$F_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ji} N^j\right), \quad i$$

$$\frac{DK^a_b}{Dt} = N^a_b - \frac{1}{m} p^a p_b = N^a_b - \frac{1}{m} C^{ad} p_d p_b.$$

W płaskiej przestrzeni tensor krzywizny  $R^l_{kaj}$  jest zerem, więc

$$\frac{dp_a}{dt} = F_a$$

$$\frac{d\widehat{K}^a_b}{dt} = N^a_b - \frac{1}{m} C^{ad} p_d p_b.$$

$K^a_{b(tot)} = x^a p_b + \widehat{K}^a_b$  - jest całkowitym momentem afinicznym tzw. hipermomentem. Prawo zachowania dla  $\widehat{K}^a_{b(tot)}$  ma postać

$$\frac{d\widehat{K}^a_{b(tot)}}{dt} = x^a F_b + N^a_b = N^a_{b(tot)}$$

stąd gdy  $N^a_{b(tot)} = 0$  wtedy  $\widehat{K}^a_{b(tot)}$  jest stałą ruchu.

**3.4. Model afiniczny w przestrzeni i w ciele.** Grupa afiniczna jest tak "złośliwie" niepółprosta, że nie ma modelu, w którym afinicznym jednocześnie w przestrzeni i w ciele było by pełne wyrażenie

$$T = T_{tr} + T_{int}$$

Oczywiście tak też jest w przestrzeni płaskiej w modelu ciała rozciągliwego. Istnieje jednak model energii kinetycznej ruchu wewnętrznego  $T_{int}$  afiniczny jednocześnie w przestrzeniach stycznych  $T_x M$  jak i przestrzeni mikromaterialnej  $\mathbb{R}^n$ . Jest on dany przez:

$$(3.7) \quad T_{\text{int}} = \frac{A}{2} \text{Tr} [\Omega^2] + \frac{B}{2} (\text{Tr} [\Omega])^2.$$

W przejrzystej postaci analitycznej z użyciem indeksów:

$$T_{\text{int}} = \frac{A}{2} \Omega^i_j \Omega^j_i + \frac{B}{2} (\Omega^i_i)^2 = \frac{A}{2} \Omega^A_B \Omega^B_A + \frac{B}{2} (\Omega^A_A)^2.$$

Jest on interesujący sam w sobie z punktu widzenia czystej mechaniki analitycznej. Jest też użyteczny w analizie pozostałych wymienionych modeli.

#### 4. Metryka Killinga - podstawowe informacje

Mamy przestrzeń liniową  $V$ , w której jest określona operacja binarna  $[\cdot, \cdot]$  przypisująca każdej parze wektorów  $u, v \in V$  nowy,  $[u, v] \in V$ . Ponadto operacja ta ma następujące właściwości:

- : 1. liniowa w każdym argumencie,

$$[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w]$$

$$[w, \alpha u + \beta v] = \alpha[w, u] + \beta[w, v]$$

gdzie  $u, v, w \in V$  a  $\alpha, \beta$  są dowolnymi liczbami.

2. antysymetryczna  $u, w \in V$

$$[u, w] = -[w, u]$$

stąd

$$[w, w] = 0$$

3. spełnia tożsamość Jacobiego

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$$

dla każdego  $u, v, w \in V$ .

Przykładem takiej operacji jest komutator w zbiorze odwzorowań liniowych jakiejś przestrzeni liniowej  $W$  w samą siebie:

$$V = L(W) \quad \alpha, \beta \in V; \quad [\alpha, \beta] := \alpha\beta - \beta\alpha.$$

Komutator ma wszystkie własności nawiasu Liego.

Weźmy odwzorowanie  $ad_u : V \rightarrow V$  gdzie  $u \in V$  i jest ustalonym elementem, samo zaś odwzorowanie dane jest wzorem:

$$ad_u v := [u, v].$$



Iloczyn skalarny Cartana-Killinga jest postaci:

$$(u | v) := Tr(ad_u ad_v).$$

Jest on niezmienniczy względem automorfizmów wewnętrznych. Jeśli wziąć grupę jednoparametrową przekształceń liniowych  $\{g_t, t \in R\}$ , gdzie

$$g_t \cdot v = \exp(t ad_u) \cdot v, \quad \text{to} \quad (g_t u | g_t v) = (u | v)$$

i  $(u | v)$  jest niezmienniczy względem operacji dołączonych. Ponadto jeśli algebra Liego jest półprosta to jest nieosobliwy ( $(u | v) = 0, \forall v \in V \implies u = 0$ ) i jeśli algebra Liego jest zwarta - ujemnie określony. Używając bazy  $(e_1, \dots, e_n)$  w  $V$  możemy zapisać komutator jak następuje

$$[e_A, e_B] = e_K C^K_{AB}$$

gdzie  $C^K_{AB}$  są stałymi strukturalnymi algebry Liego w tej bazie. Wtedy pisząc:

$$(u | v) = g(u, v) = g_{AB} u^A v^B$$

mamy

$$g_{AB} = C^K_{LA} C^L_{KB},$$

widać że  $(u | v)$  jest symetryczny.

Jeśli  $G$ -jest grupą Liego a  $V$ - jej algebrą Liego zaś  $\omega^A$  -bazowymi lewo- lub prawo- niezmienniczymi 1-formami różniczkowymi na  $G$ , to

$$g_{ij} = g_{AB} \omega^A_i \omega^B_j$$

jest polem tensorowym Killinga na  $G$  -metrycznym tensorem Killinga-Cartana [90].

## CZĘŚĆ 2

# Próbne ciało w przestrzeni Riemanna - mechanika ciała afinicznie sztywnego

### 1. wstęp

Jak wspominalismy, w zakrzywionej przestrzeni nie istnieje w dosłownym sensie pojęcie ruchu sztywnego lub afinicznie sztywnego. W odniesieniu do "małych" obiektów można jednak posługiwać się tymi pojęciami w sposób przybliżony. Przybliżenie to jest tym lepsze, tym mniej błędne, im mniejsze są rozmiary ciała. Opis staje się bezbłędny gdy przechodzimy do wewnętrznych stopni swobody, t.zn. gdy mały obiekt rozciągliwy zastępujemy punktem materialnym z doczepioną bazą ortonormalną, gdy chodzi o ruch sztywny (żyroskopowy), lub bazą ogólnego typu, gdy chodzi o ruch afinicznie sztywny. Jest to tak, jakby ciało było włożone w przestrzeń styczną w punkcie odpowiadającym chwilowemu położeniu w ruchu postępowym. Przestrzeń materialną zastępujemy mikromaterialną  $\mathbb{R}^n$ . Przybliżone wyrażenie dla afinicznego (lub metrycznego) włożenia z przestrzeni materialnej w  $M$ ,

$$y^i(t, a) = x^i(t) + \varphi_K^i(t) a^K,$$

zastępujemy stwierdzeniem, że w chwili  $t$  ciało znajduje się w przestrzeni  $M$  w punkcie  $x(t) \in M$ , zaś jego konfiguracja wewnętrzna dana jest przez bazę ortonormalną (a w ruchu afinicznym ogólną)  $e = (e_1, \dots, e_A, \dots, e_n)$ , gdzie

$$e_A \in T_x M, \quad A = 1, \dots, n, \quad \langle e_A | e_B \rangle = g_{ij} e_A^i e_B^j = \delta_{AB}.$$

Równie dobrze możemy posługiwać się bazą dualną  $e = (e^1, \dots, e^A, \dots, e^n)$ , gdzie  $e^A \in T_x^* M$  i z definicji

$$\langle e^A | e_B \rangle = e_i^A e_B^i = \delta^A_B.$$

Przestrzenią konfiguracyjną jest  $Q = (FM, g)$  (główna wiązka włóknista  $g$ -ortonormalnych baz w  $M$  lub równoważna  $(F^*M, g)$  –  $g$ -ortonormalnych kobaz) o wymiarze:

$$\dim Q = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

W przypadku niektórych zagadnień wygodniej jest posługiwać się naturalnym włożeniem  $(FM, g)$  w  $FM - n(n+1)$ -wymiarową wiązkę włóknistą wszystkich liniowych baz w  $M$ . Taka też właśnie będzie przestrzeń konfiguracyjna opisywanego infinitezimalnego ciała afinicznie sztywnego. Jest ona rządzona przez grupę  $GL(n, \mathbb{R})$ , tak jak  $(FM, g)$  jest rządzona przez  $SO(n, \mathbb{R})$ . Ruch ciała będzie opisywany przez krzywe w  $(FM, g)$ , natomiast przemieszczenia – przez ich zrzutowanie na pole baz w rozmaitości  $M$

$$t \rightarrow x(t) \in M, \quad t \rightarrow e_A(t) \in T_{x(t)}M, \quad A = 1, \dots, n, \quad t - \text{czas absolutny.}$$

Jeśli  $x^i, i = 1, \dots, n$  są współrzędnymi w  $M$ , wtedy ruch opisywany jest przez zmienne  $x^i, e_A^i$  będące funkcjami czasu  $t$ . Jednak jeśli będziemy opisywać ciało metrycznie sztywne wówczas:

$$g_{ij} e^i_A e^j_B = \eta_{AB} (= \delta_{AB}),$$

a więc w takim przypadku  $e^i_A$  nie są niezależne. Nie mogą więc być użyte jako współrzędne uogólnione. Ale nawet jeśli ciało jest afiniczne to opis przy użyciu  $e^i_A$  jest trudny i nieprzejrzysty. Rozwiązaniem tego problemu jest wprowadzenie pomocniczego pola baz  $E$  ortonormalnych w  $M$ , tj., przekrój sub-wiązki  $(FM, g) \subset FM$  nad  $M$ .  $E$  jest ortonormalne:

$$g(E_A, E_B) = g_{ij} E^i_A E^j_B = \eta_{AB} = \delta_{AB}.$$

Możemy też użyć pola ko-baz  $E^A$ ;  $\langle E^A, E_B \rangle = E^A_i E^i_B = \delta^A_B$ . Oczywiście  $E^A$  jest ortonormalne względem  $g^{ij}$  na  $M$ ,

$$g(E^A, E^B) = g^{ij} E^A_i E^B_j = \eta^{AB} = \delta^{AB}.$$

*Podsumujmy:* w każdym punkcie przestrzeni  $M$  jest zaczepiona baza  $E_A$ . Teraz należy zadać sobie pytanie jakie ma być to pole. Struktura przestrzeni Riemanna sugeruje w jaki sposób wybrać to pole, tak by rachunki były względnie proste i geometria problemu wyraźniej zarysowana. Oczywiście zachodzi:

$$g = \eta^{AB} E_A \otimes E_B = \delta^{AB} E_A \otimes E_B.$$

Ruch będzie opisywany względem mijanych  $E_{x(t)} \in F_{x(t)}M$

$$e_A(t) = E_{x(t)B} \varphi^B_A(t),$$

gdzie jeśli rozpatrujemy zagadnienie bez deformacji (żyroskop)  $\varphi^B_A(t)$  jest macierzą ortogonalną (obrotu  $R^C_A$ ):

$$\delta_{AB} = \delta_{CD} \varphi^C_A \varphi^D_B, = \delta_{CD} R^C_A R^D_B.$$

Jeśli rozpatrujemy zagadnienie z deformacjami  $\varphi$  jest pewną ogólną macierzą  $[\varphi^B_A(t)] \in GL(n, \mathbb{R})$  lub  $[\varphi^B_A(t)] \in GL^+(n, \mathbb{R})$ . Wówczas wiązka  $FM$  ( $F^+M$ ) będzie reprezentowana przez  $M \times GL(n, \mathbb{R})$  ( $M \times GL^+(n, \mathbb{R})$ ).

## 2. Prędkość kątowna

Naszymi współrzędnymi uogólnionymi są  $(\dots, x^i, \dots; \dots, \varphi^B_A \dots)$  gdzie  $x^i$ - współrzędne lokalne w  $M$ . W każdym punkcie  $x(t) \in M$  krzywej ruchu postępowego mamy określony układ  $(n+1)$  wektorów w przestrzeni  $T_{x(t)}M$ .

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{x}(t), \quad V_A(t) = \frac{De_A(t)}{Dt} = \frac{D}{Dt} (E_{x(t)B} \varphi^B_A(t)) \\ &= \frac{DE_{x(t)B}}{Dt} \varphi^B_A(t) + E_{x(t)B} \frac{D\varphi^B_A(t)}{Dt}, \quad A = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

gdzie  $\dot{x}(t)$  jest wektorem stycznym do krzywej wzdłuż której przemieszcza się opisywane ciało, to jest prędkością translacyjną.  $\frac{D}{Dt}e_A$ - jest kowariantną pochodną wektora  $e_A$  wzdłuż trajektorii (*prędkość afiniczna*:=  $W^j_i = \frac{De^j_A}{Dt} e_i^A$ ). Kowariantna pochodna wektora  $E_A$  równa się

$$\frac{DE_{x(t)B}}{Dt} = (\nabla_i E_B) \frac{dx^i}{dt} = (\nabla_C E_B) E^C_i \frac{dx^i}{dt}.$$

Teraz użyjmy aholonomicznych składowych naszej afinicznej koneksji względem  $E$ :

$$\nabla_C E_B = \Gamma^A_{BC} E_A,$$

gdzie

$$\Gamma^A_{BC} = E^A_i \Gamma^i_{jk} E^j_B E^k_C - E^A_{i,j} E^i_B E^j_C,$$

$$\Gamma^A_{BC} = -\Gamma_B{}^A{}_C = -\delta_{BK} \delta^{AL} \Gamma^K_{LC}$$

$$(2.1) \quad \Gamma^i_{jk} = E^i_A \Gamma^A_{BC} E^B_j E^C_k + E^i_A E^A_{j,k}$$

$$(2.2) \quad (\text{ale } \Gamma^i_{jk} \neq -\Gamma_j{}^i{}_k = -g_{ja} g^{ib} \Gamma^a_{bk}).$$

Ostatni człon to koneksja teleparalelizmu  $\Gamma_{tel}[E]$  indukowanego przez  $E$ ,

$$\Gamma[E]^i_{jk} = E^i_A E^A_{j,k}.$$

Jest ona zdefiniowana warunkiem:

$$\nabla_{tel} E_A = 0.$$

Mamy więc

$$\Gamma^i_{jk} = E^i_A \Gamma^A_{BC} E^B_j E^C_k + \Gamma_{tel}[E]^i_{jk}.$$

Ostatecznie otrzymujemy  $\frac{DE_{x(t)B}}{Dt}$  w postaci:

$$\frac{DE_{x(t)B}}{Dt} = \Gamma^A_{BC} E_A E^C_i \frac{dx^i}{dt}.$$

Oczywiście w przypadku bąka-  $V^i_A = \frac{De^i_A(t)}{Dt}$  są jakby "redundantne" ponieważ jest ich więcej niż wewnętrznych stopni swobody. Aby uniknąć tego problemu użyjmy prędkości kątowych i translacyjnych w reprezentacji współtowarzyszącej

$$(2.3) \quad v = v^A e_A, \quad V_A = \frac{De_A}{Dt} =: e_B \Omega^B_A.$$

Macierz  $[\Omega^B_A]$  zdefiniowana powyższą zależnością będzie współtowarzyszącą prędkością kątową, zaś  $v^A$  współtowarzyszącymi składowymi prędkości ruchu postępowego. Po obliczeniach otrzymujemy

$$(2.4) \quad \Omega^A_B = \Omega_{dr}{}^A_B + \Omega_{rl}{}^A_B,$$

gdzie

$$\Omega_{rl}{}^A_B = \varphi^{-1A}{}_C \frac{d}{dt} \varphi^C_B; \quad \Omega_{rl}{}_{AB} = -\Omega_{rl}{}_{BA}, \quad \Omega_{rl}{}_{AB} := \delta_{AC} \Omega_{rl}{}^C_B,$$

jest związana z ruchem obrotowym względnym: "e względem E" zaś

$$\Omega_{dr}{}^A_B = \varphi^{-1A}{}_F \Gamma^F_{DC} \varphi^D{}_B \varphi^C{}_G v^G; \quad v^G = e^G_i \frac{dx^i}{dt}$$

jest wkładem ruchu postępowego do  $\Omega^B_A$ . Sens skrótów: *dr*-drive *rl*- relative.

Przy pomocy standardowej delty Kroneckera ( która jest metryką na  $\mathbb{R}^n$ ) możemy podnosić i opuszczać indeksy:

$$(2.5) \quad \Omega_{AB} := \delta_{AC} \Omega^C_B.$$

Oczywiście, ponieważ  $e$  jest ortonormalne,  $\Omega$  jest antysymetryczne.

$$(2.6) \quad \Omega_{AB} = -\Omega_{BA}.$$

Składowe przestrzenne prędkości kątowej otrzymamy przez "zanurzenie" jej w rozmaitości  $M$  przy pomocy  $e$ :

$$(2.7) \quad \Omega^i{}_j = e^i_A \Omega^A{}_B e^B_j, \quad \Omega_{ij} = g_{ik} \Omega^k{}_j = -\Omega_{ji}.$$

Antysymetryczna  $\Omega$  ma  $\frac{n(n-1)}{2}$  - niezależnych składowych, tj.  $\Omega_{AB}$ ,  $A < B$ , lub  $\Omega_{ij}$ ,  $i < j$ . A więc problem z "nadliczbowymi" stopniami swobody został rozwiązany. Gdy przestrzeń jest

trójwymiarowa :

$$(2.8) \quad \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zatem w trzech wymiarach tensor antisymetryczny można utożsamić z pseudowektorem (wektorem osiowym) o składowych  $\Omega_A$ .

**Podsumujmy:** Rozmaitość  $M$  jest naszą przestrzenią fizyczną, a elementy zbioru  $M$  symbolizują punkty geometryczne w przestrzeni-położenia. Podnosimy i opuszczamy indeksy w tej przestrzeni za pomocą metryki  $g$ . Mamy też przestrzeń konfiguracyjną. Jest ona zbiorem liniowych odwzorowań przestrzeni mikromaterialnej  $\mathbb{R}^n$  w wiązkę styczną  $TM$ . Przestrzeń mikromaterialna jest przestrzenią Euklidesową, punkty przestrzeni materialnej to "możliwe punkty materialne". Każde ciało jest zbiorem punktów materialnych, a więc podzbiorem tej przestrzeni. W przestrzeni materialnej podnosimy i opuszczamy indeksy za pomocą delty Kroneckera  $\delta$ . Stosujemy przy tym konsekwentnie następującą notację: duże indeksy łacińskie to indeksy przestrzeni materialnej  $A, B, C...$  małe indeksy łacińskie to indeksy przestrzeni fizycznej  $i, j, k...$

### 3. Równania ruchu

Zapostulujemy energię kinetyczną w postaci

$$T = \frac{m}{2} g_{ij} v^i v^j + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{De^i_A}{Dt} \frac{De^j_A}{Dt} J^{CD} = \frac{m}{2} g_{ij} v^i v^j + \frac{1}{2} \delta_{AB} \Omega^A_C \Omega^B_D J^{CD},$$

gdzie  $m$  jest masą,  $J^{CD} = J^{DC}$  współtowarzyszającymi składowymi tensora bezwładności [72][28]. Lagrangian jest dany przez:

$$L = T - V(x, e).$$

Zgodnie z transformacją Legendre'a translacyjny pęd kanoniczny ma postać:

$$p_i = m g_{ij} v^j = m g_{ij} \frac{dx^j}{dt}.$$

Podobnie, po transformacji Legendre'a współtowarzyszającej prędkości kątowej, możemy przedstawić współtowarzyszające składowe spinu jak następuje

$$S^B_A = -J^{BC} \Omega_{CA} - \Omega^{BC} J_{CA},$$

gdzie indeksy podnosimy i opuszczamy przy pomocy delty Kroneckera:

$$S^{AB} = S^A_C \delta^{CB}.$$

Spin w reprezentacji współtowarzyszającej podobnie jak prędkość kątowna jest antysymetryczny:

$$S^{AB} = -S^{BA}.$$

Oczywiście możemy też używać reprezentacji przestrzennej (zanurzenie w  $M$ ):

$$S^i_j = e^i_A S^A_B e^B_j, \quad S_{ij} = g_{ik} S^k_j = -S_{ji}.$$

Dla wyprowadzenia równań ruchu wygodnie jest wyjść od żyroskopu deformowalnego jednorodnie, co skądinąd jest jednym z celów samym w sobie. Hamiltonowski generator przekształceń afinicznych działających na wewnętrznych stopniach swobody tj. spin afiniczny przyjmuje postać:

$$K^{ij} = e^i_A \frac{De^j_B}{Dt} J^{AB},$$

po wyrażeniu przez konfigurację i prędkości. Podobnie antysymetryczny moment obrotowy, uogólniona siła sprzężona z prędkością afiniczną

$$W^j_i = \frac{De^j_B}{Dt} e^A_i$$

jest dana przez:

$$M^i_j = -e^i_A \frac{\partial V}{\partial e^j_A}, \quad M^{ij} = M^i_k g^{kj}.$$

Podwojona antysymetryczna część powyższych obiektów:

$$S^{ij} = K^{ij} - K^{ji}, \quad N^{ij} = M^{ij} - M^{ji}$$

to spin  $S^{ij}$  i moment obrotowy  $N^{ij}$ , czyli moment siły.

Po wielu zawiłych rachunkach równania Eulera-Lagrange'a możemy zapisać w postaci praw bilansu:

$$\frac{Dp^a}{Dt} = m \frac{Dv^a}{Dt} = \frac{1}{2} S^d_c R^c_{d^a b} v^b + F^a,$$

$$\frac{DK^{ij}}{Dt} = M^{ij} + e^i_A e^j_B J^{AB},$$

gdzie

$$F^a = -g^{ab} \left( \frac{\partial V}{\partial x^b} - M^m_j \Gamma^j_{mb} \right).$$

Indeksy podnosimy tu przy pomocy  $g$ ,  $R$  jest tensorem krzywizny zbudowanym z metryki  $g$ . Po nałożeniu żyroskopowych więzów  $g_{ij} e^i_A e^j_B = \delta_{AB}$ ,  $N^{ij} = M^{ij} - M^{ji}$  zachowuje status aktywnej

siły uogólnionej; antysymetryczna część wkładu do  $M^{ij}$  pochodzącego od sił reakcji znika. Równania ruchu składają się wówczas z 3 i

$$\frac{DS^{ij}}{Dt} = N^{ij},$$

gdzie

$$N^{ij} = M^{ij} - M^{ji} = -e_A^i \frac{\partial V}{\partial e_A^k} g^{kj} - e_A^j \frac{\partial V}{\partial e_A^k} g^{ki},$$

i  $F^a$  jest

$$F^a = -g^{ab} \left( \frac{\partial V}{\partial x^b} - \frac{1}{2} N^m_j \Gamma^j_{mb} \right).$$

#### 4. Stałe strukturalne

Nawias Liego pól wektorowych:

$$[V, L]^i = V^j L^i_{,j} - L^j V^i_{,j}$$

jest komutatorem pól  $L, V$  kiedy pole wektorowe jest operatorem różniczkowym pierwszego rzędu. Pomocnicze pole baz  $E_A$  ma często strukturę algebry Liego,

$$[E_A, E_B] = C^K_{AB} E_K$$

gdzie  $C^K_{AB}$  są stałymi strukturalnymi algebry Liego zbudowanej z  $(\dots E_A \dots)$ . Jeśli ustalimy jakiś punkt  $x_0 \in M$ , rozmaitość  $M$  możemy wówczas utożsamić z grupą Liego gdzie  $x_0$  będzie elementem jednostkowym tej grupy. Natomiast jeśli nie wyróżnimy żadnego punktu rozmaitość  $M$  będzie przestrzenią jednorodną z odpowiadającą jej trywialną izotropią (grupą Liego).

Za pomocą stałych strukturalnych możemy przedstawić tensor Killinga względem bazy  $(\dots E_A \dots)$ :

$$\gamma_{AB} = C^K_{LA} C^L_{KB}.$$

Jeśli  $\Gamma[E]$  będzie teleparalelizmem afinicznej koneksji 2.1 i  $S[E]$  jej tensorem skręcenia postaci:

$$S[E]^i_{jk} = E^i_A E^A_{[j,k]} = \frac{1}{2} E^i_A (E^A_{j,k} - E^A_{k,j}),$$

to w takim przypadku  $S[E]$  jest równe:

$$S[E]^A_{BC} = \frac{1}{2} C^A_{BC}.$$

Podsumujmy: tensory metryczne Killinga  $\gamma$  i "przestrzenny"  $g$  różnią się o stałą multiplikatywną, nazwijmy ją  $\ell$

$$\gamma_{ij} = \ell g_{ij} \quad \text{gdzie} \quad \ell = \text{constants.}$$



Oczywiście podobnie jest we współrzędnych współtowarzyszających gdzie w przestrzeni materialnej tensorem metrycznym jest delta Kroneckera  $\delta$  :

$$(4.1) \quad \gamma_{AB} = \ell \delta_{AB} \quad \ell = \text{constants.}$$

Zgone z powyższym, związek pomiędzy  $\gamma$ ,  $g$  i  $E$  możemy przedstawić za pomocą koneksji  $\Gamma [E]$  (tj. koneksji teleparalelizmu) w sposób następujący:

$$\Gamma [E]^i_{jk} = \{^i_{jk}\} + S^i_{jk} + S_{jk}^i + S_{kj}^i.$$

W reprezentacji współtowarzyszającej wyrażamy to za pomocą stałych strukturalnych:

$$\Gamma [E]^M_{JL} = \{^M_{JL}\} + \frac{1}{2} C^M_{JL} + \frac{1}{2} C_{JL}^M - \frac{1}{2} C_L^M{}_J.$$

Jednakże  $E$ -aholonomiczne składowe  $E$  teleparalelizmu koneksji znikają  $\Gamma [E]^M_{JL} = 0$  wówczas otrzymujemy:

$$\{^M_{JL}\} = -\frac{1}{2} C^M_{JL} - \frac{1}{2} C_{JL}^M - \frac{1}{2} C_L^M{}_J.$$

Gdy algebra Liego jest półprosta stałe strukturalne są antysymetryczne w dwóch pierwszych indeksach względem metryki Killinga. Gdy ta metryka jest proporcjonalna do delty Kroneckera 4.1 [90] wówczas otrzymujemy:

$$\{^M_{JL}\} = -\frac{1}{2} C^M_{JL} = -\frac{1}{2} C_L^M{}_J.$$

## CZĘŚĆ 3

# Trójwymiarowa sfera zanurzona w $\mathbb{R}^4$

### 1. $S^3(0, R)$ zanurzona w $\mathbb{R}^4$ -symetrie

Nasze rozważania zaczniemy od przedyskutowania zagadnienia ruchu punktu materialnego w przestrzeni trójwymiarowej. Skoncentrujemy się na tzw. świecie Einsteinowskim, t.j. zwartej przestrzeni o stałej krzywiznie metrycznie dyfeomorficznym z trójwymiarową sferą zanurzoną w przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ . Sferę  $S^3(0, R)$ , jeśli przyjąć że promień  $R = 1$  można utożsamić z  $SU(2)$ , nakryciem grupy  $SO(3, \mathbb{R})$ . Tensor metryczny  $g$  otrzymujemy jako naturalne ograniczenie metryki Euklidesowej w  $\mathbb{R}^4$  do  $S^3(0, R)$ . Na  $SU(2)$   $g$  możemy utożsamić z metryką Killinga. Przypomnijmy, że prędkość kątowna wyraża się w postaci:

$$\Omega_B^A = \Omega_{drB}^A + \Omega_{rlB}^A$$

gdzie

$$\Omega_{drB}^A = \varphi_F^{-1A} \Gamma_{DC}^F \varphi_B^D \varphi_E^C v^E$$

$\Omega_{drB}^A$  jest wkładem z ruchu translacyjnego, zaś

$$\Omega_{rlB}^A = \varphi_C^{-1A} \frac{d\varphi_B^C}{dt}$$

z ruchem obrotowym  $e$  względem układu aholonomicznego  $E$ . Stałe strukturalne trójwymiarowych zwartych grup Liego  $SU(2)$ ,  $SO(3, \mathbb{R})$  są dane przez :

$$(1.1) \quad C_{LM}^K = \varepsilon_{LM}^K, C_{KLM} = \varepsilon_{KLM}$$

gdzie podnosimy i opuszczamy indeksy za pomocą delty Kroneckera.

Algebra Liego grupy  $SU(2)$  składa się z antyhermitowskich bezśladowych macierzy  $2 \times 2$ , tj. rzeczywistych kombinacji liniowych macierzy Pauliego:

$$(1.2) \quad a_j = \frac{1}{2i} \sigma_j, j = 1, 2, 3$$

$$(1.3) \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Używając współrzędnych kanonicznych pierwszego rodzaju  $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$  otrzymujemy następujący opis  $SU(2)$

$$(1.4) \quad u(\vec{k}) = \exp(k^j a_j) = \cos\left(\frac{k}{2}\right)I - \sin\left(\frac{k}{2}\right)\frac{k^j}{k}i\sigma_j, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k$  jest długością wektora  $\vec{k}$  i  $\frac{\vec{k}}{k} \in S^2(0, 1)$  kierunkiem, moduł  $k$  przebiega od 0 do  $2\pi$ . Oczywiście,  $a_j$  spełniają zasady komutacyjne,

$$(1.5) \quad [a_J, a_K] = \varepsilon_{JK}^M a_M.$$

Algebra Liego grupy  $SO(3, \mathbb{R})$  składa się z antysymetrycznych rzeczywistych macierzy  $3 \times 3$ . Używamy bazy danej przez  $A_K$  gdzie  $K = 1, 2, 3$  i

$$(1.6) \quad (A_K)_M^L = -\varepsilon_{KM}^L.$$

Opuszczanie i podnoszenie indeksów rozumiemy w sensie delty Kroneckera. Zgodnie z tą konwencją mamy

$$(1.7) \quad [A_J, A_K] = \varepsilon_{JK}^M A_M.$$

Odwzorowanie wykładnicze

$$(1.8) \quad R(\vec{k}) = \exp(k^J A_J)$$

daje wzór na skończone macierze obrotu  $R(\vec{k})$ . Wzór 1.4 wkłada grupę  $SU(2)$  do czterowymiarowej rzeczywistej przestrzeni rozpiętej na  $I, -i\sigma_j$   $j = 1, 2, 3$ . Oczywiście taka przestrzeń jest utożsamiana z  $\mathbb{R}^4$ . Jak widać suma kwadratów współczynników przy macierzach bazowych jest równa 1. To właśnie zdaje sprawę z utożsamienia  $SU(2)$  z  $S^3(0, 1) \subset \mathbb{R}^4$ . Metryka Killinga  $\gamma_{AB}$  na algebrze Liego jest zbudowana ze stałych strukturalnych  $C_{LM}^K = \varepsilon_{LM}^K$ :

$$(1.9) \quad \gamma_{AB} = -2\delta_{AB}.$$

Metryka na  $SU(2)$  lub  $SO(3, \mathbb{R})$  jest dana przez

$$(1.10) \quad g_{ij} = \frac{4 \sin^2 \frac{k}{2}}{k^2} \delta_{ij} + \left(1 - \frac{4 \sin^2 \frac{k}{2}}{k^2}\right) \frac{k^i k^j}{k k}$$

i odpowiednio element długości łuku ma postać:

$$(1.11) \quad ds^2 = dk^2 + 4 \sin^2 \frac{k}{2} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

gdzie  $k, \vartheta, \varphi$  są zmiennymi sferycznymi w przestrzeni wektora  $\vec{k}$ . Wielkości kątowe  $\vartheta, \varphi$  parametryzują wersory  $\vec{n}(\vartheta, \varphi) = \frac{\vec{k}}{k}$ . Możemy napisać:

$$(1.12) \quad ds^2 = dk^2 + 4 \sin^2 \frac{k}{2} d\vec{n} \cdot d\vec{n}.$$

Używając zaś bardziej wyszukanego języka można to zapisać w postaci tensorowej:

$$(1.13) \quad g = dk \otimes dk + 4 \sin^2 \frac{k}{2} \delta_{AB} dn^A \otimes dn^B$$

Pole odniesienia  $E$  może być wybrane zarówno jako generujące lewe translacje jak i generujące prawe translacje na  $SU(2), SO(3, \mathbb{R})$ . Po obliczeniach otrzymujemy:

1. pole generujące lewe translacje

$$(1.14) \quad {}^l E_A = \frac{k}{2} \cot \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial k^A} + \left(1 - \frac{k}{2} \cot \frac{k}{2}\right) \frac{k_A}{k} \frac{k_J}{k} \frac{\partial}{\partial k^J} + \frac{1}{2} \varepsilon_{AMJ} k^M \frac{\partial}{\partial k^J}$$

2. pole generujące prawe translacje

$$(1.15) \quad {}^r E_A = \frac{k}{2} \cot \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial k^A} + \left(1 - \frac{k}{2} \cot \frac{k}{2}\right) \frac{k_A}{k} \frac{k_J}{k} \frac{\partial}{\partial k^J} - \frac{1}{2} \varepsilon_{AMJ} k^M \frac{\partial}{\partial k^J}.$$

Pola wektorowe

$$(1.16) \quad D_A := {}^l E_A - {}^r E_A = \frac{1}{2} \varepsilon_{AMJ} k^M \frac{\partial}{\partial k^J}$$

są infinitesimalnymi generatorami wewnętrznych automorfizmów

$$(1.17) \quad u \rightarrow vuv^{-1}.$$

Wygodnie jest odseparować zmienną radialną  $k$  od kątowych  $\vartheta, \varphi$ . Aby to zrobić używamy operatora różniczkowego który zależy wyłącznie od  $\vartheta, \varphi$  i działa też tylko na te zmienne:

$$(1.18) \quad D_A f = 0$$

jeśli  $f$  jest funkcją zmiennej  $k$ . Podobnie nadmiarowy układ zmiennych  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$  może być użyty.

Oczywiście  $n^A$  zależy wyłącznie od  $\vartheta, \varphi$ . Można pokazać:

1. pole generujące lewe translacje daje się zapisać jako

$$(1.19) \quad {}^l E_A = n_A \frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{2} \cot \frac{k}{2} \varepsilon_{AMJ} n^M D^J + \frac{1}{2} D_A$$

2. pole generujące prawe translacje

$$(1.20) \quad {}^r E_A = n_A \frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{2} \cot \frac{k}{2} \varepsilon_{AMJ} n^M D^J - \frac{1}{2} D_A.$$

Oczywiście,

$$(1.21) \quad \langle dk, D_A \rangle = D_A k = 0, \quad \left\langle dk, \frac{\partial}{\partial k} \right\rangle = 1,$$

$$(1.22) \quad \left\langle dn_A, \frac{\partial}{\partial k} \right\rangle = \frac{\partial n_A}{\partial k} = 0, \quad \langle dn_A, D_B \rangle = D_B n_A = \varepsilon_{ABC} n^C.$$

Relacje komutacyjne dla powyższych pól są następujące:

$$(1.23) \quad [{}^l E_A, {}^l E_B] = -\varepsilon_{ABC} {}^l E^C,$$

$$(1.24) \quad [{}^r E_A, {}^r E_B] = \varepsilon_{ABC} {}^r E^C,$$

$$(1.25) \quad [{}^l E_A, {}^r E_B] = 0.$$

To że ostatni nawias jest równy zero pochodzi stąd, że grupy lewych i prawych translacji są między sobą przemienne. Tensor metryczny 1.10 1.11  $g = -2\gamma_{AB}$  może być zapisany w postaci

$$(1.26) \quad g = \delta_{AB} {}^l E^A \otimes {}^l E^B = \delta_{AB} {}^r E^A \otimes {}^r E^B.$$

Podobnie, kontrawariantną metrykę

$$(1.27) \quad g^{ij} = \frac{k^2}{4 \sin^2 \frac{k}{2}} \delta^{ij} + \left( 1 - \frac{k^2}{4 \sin^2 \frac{k}{2}} \right) n^i n^j$$

możemy przedstawić jako:

$$(1.28) \quad \tilde{g} = \delta^{AB} {}^l E_A \otimes {}^l E_B = \delta^{AB} {}^r E_A \otimes {}^r E_B.$$

Jeśli użyjemy zmiennych  $k, \vec{n}$

$$(1.29) \quad \tilde{g} = \frac{\partial}{\partial k} \otimes \frac{\partial}{\partial k} + \frac{k^2}{4 \sin^2 \frac{k}{2}} \delta^{AB} D_A \otimes D_B$$

Przejdźmy następnie od  $S^3(0, 1)SU(2)$  do  $S^3(0, R) \subset \mathbb{R}^4$ . Użyjmy nowych zmiennych  $r = \frac{1}{2}Rk$ , tj.,  $k = \frac{2r}{R}$ , , gdzie oczywiście  $r \in [0, \pi R]$ . Wektor  $\vec{k}$  zastępujemy wektorem  $\vec{r}$  o długości  $r$  i  $\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{k}}{k} = \vec{n}$ . Zwróćmy uwagę, że parametryzacja zmiennych  $r, \vartheta, \varphi$  oznacza inną, alternatywną reprezentację analityczną sfery  $S^3(0, R)$ . Jest ona mianowicie reprezentowana przez kulę o promieniu  $R$  w  $\mathbb{R}^3$ , przy czym wszystkie punkty w  $\mathbb{R}^3$  o współrzędnej  $r = R$  reprezentują jeden i ten sam punkt sfery

$S^3(0, R)$ . Jest to "biegun południowy" jeśli punkt  $r = 0$  jest "biegunem północnym". Wówczas wyrażenia dla pomocniczego pola baz otrzymujemy w postaci:

$$\begin{aligned} {}^l E_A &= \frac{R}{2} {}^l E(R)_A, & {}^r E_A &= \frac{R}{2} {}^r E(R)_A, \\ {}^l E^A &= \frac{2}{R} {}^l E(R)^A, & {}^r E^A &= \frac{2}{R} {}^r E(R)^A \end{aligned}$$

gdzie:

$$(1.30) \quad \begin{aligned} {}^l E(R)_A &= n_A \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{R} \cot \frac{r}{R} \varepsilon_{ABC} n^B D^C + \frac{1}{R} D_A, \\ {}^r E(R)_A &= n_A \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{R} \cot \frac{r}{R} \varepsilon_{ABC} n^B D^C + \frac{1}{R} D_A, \\ {}^l E(R)^A &= n_A dr + R \sin^2 \frac{r}{R} \varepsilon^{ABC} n_B dn_C + \frac{R}{2} \sin \frac{2r}{R} dn^A, \\ {}^r E(R)^A &= n_A dr - R \sin^2 \frac{r}{R} \varepsilon^{ABC} n_B dn_C + \frac{R}{2} \sin \frac{2r}{R} dn^A. \end{aligned}$$

Nawiasy Liego są następujące:

$$(1.31) \quad \begin{aligned} [{}^l E(R)_A, {}^l E(R)_B] &= -\frac{2}{R} \varepsilon_{AB}{}^C {}^l E(R)_C, \\ [{}^r E(R)_A, {}^r E(R)_B] &= \frac{2}{R} \varepsilon_{AB}{}^C {}^r E(R)_C, \\ [{}^l E(R)_A, {}^r E(R)_B] &= 0. \end{aligned}$$

Odpowiadające im stałe strukturalne są dane przez:

$$(1.32) \quad {}^l C(R)^A{}_{BC} = -\frac{2}{R} \varepsilon^A{}_{BC}, \quad {}^r C(R)^A{}_{BC} = \frac{2}{R} \varepsilon^A{}_{BC};$$

podnosimy i opuszczamy indeksy przy użyciu delty Kroneckera. Ostatecznie otrzymujemy metrykę postaci:

$$(1.33) \quad g(R) = \delta_{AB} {}^l E(R)^A \otimes {}^l E(R)^B = \delta_{AB} {}^r E(R)^A \otimes {}^r E(R)^B,$$

t.zn. we współrzędnych

$$(1.34) \quad g(R)_{ij} = \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R} \delta_{ij} + \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R}\right) n_i n_j.$$

Element łuku jest więc dany wzorem

$$(1.35) \quad ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\vec{n} \cdot d\vec{n}.$$

W sposób bardziej wyszukany możemy zapisać  $g$  za pomocą iloczynu tensorowego:

$$(1.36) \quad g(R) = dr \otimes dr + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \delta_{AB} dn^A \otimes dn^B.$$

Teraz algebraiczna metryka Killinga jest dana przez:

$$(1.37) \quad \gamma_{AB} = -\frac{8}{R^2} \delta_{AB}.$$

Z zależności 1.30 i 1.31 wynika iż jeśli dokonamy przejścia z  $R$  do nieskończoności  $R \rightarrow \infty$  wówczas  ${}^l E(R)_A$  i  ${}^r E(R)_B$  stają się asymptotycznie przemienne i

$$(1.38) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} {}^l E(R)_A = \lim_{R \rightarrow \infty} {}^r E(R)_A = \frac{\partial}{\partial x^A}.$$

Podobnie

$$(1.39) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} {}^l E(\tilde{r})^A = \lim_{R \rightarrow \infty} {}^r E(R)^A = dx^A,$$

a tym samym

$$(1.40) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} g(R)_{ij} = \delta_{ij}.$$

Tak więc jak się należało spodziewać otrzymaliśmy zależności dla płaskiej przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Prędkości kątowe są postaci:

$$(1.41) \quad \begin{aligned} \Omega(R)^A{}_B &= -\varepsilon^A{}_{BC} \Omega(R)^C, \\ \Omega_{rl}{}^A{}_B &= -\varepsilon^A{}_{BC} \Omega_{rl}{}^C, \\ \Omega_{dr}(R)^A{}_B &= -\varepsilon^A{}_{BC} \Omega_{dr}(R)^C, \\ \Omega_{rl}{}^A{}_B &= -\varepsilon^A{}_{BC} \Omega_{rl}{}^C, \end{aligned}$$

lub odwrotnie:

$$(1.42) \quad \begin{aligned} \Omega(R)^A &= -\frac{1}{2} \varepsilon^A{}_{BC} \Omega(R)^B{}_C, \\ \Omega_{rl}{}^A &= -\frac{1}{2} \varepsilon^A{}_{BC} \Omega_{rl}{}^B{}_C, \\ \Omega_{dr}(R)^A &= -\frac{1}{2} \varepsilon^A{}_{BC} \Omega_{dr}(R)^B{}_C, \\ \Omega_{rl}{}^A &= -\frac{1}{2} \varepsilon^A{}_{BC} \Omega_{rl}{}^B{}_C. \end{aligned}$$

Indeksy są opuszczane i podnoszone za pomocą delty Kroneckera. Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy następujące wyrażenia na prędkości kątowne dla ruchu na  $S^3(0, R)$ :

$$(1.43) \quad \begin{aligned} {}^l\Omega(R)^A{}_{dr} &= {}^lE^A{}_i(R; \vec{r}) \frac{dr^i}{dt}, \\ {}^r\Omega(R)^A{}_{dr} &= {}^rE^A{}_i(R; \vec{r}) \frac{dr^i}{dt} \\ {}^l\Omega^A{}_{rl} &= {}^lE^A{}_i(\vec{\kappa}) \frac{d\kappa^i}{dt}, \\ {}^r\Omega^A{}_{rl} &= {}^rE^A{}_i(\vec{\kappa}) \frac{d\kappa^i}{dt} \end{aligned}$$

gdzie  $\vec{\kappa}$  jest wektorem obrotu na  $SO(3, R)$ ; parametryzuje on rozmaitość w sensie wewnętrznych stopni swobody w sensie 1.8 z  $\vec{\kappa}$  postawionym zamiast  $\vec{k}$ :

$$(1.44) \quad SO(3, R) \ni \varphi(\vec{\kappa}) = \exp[\kappa^B A_b]$$

Oznaczając pędy kanoniczne sprzężone do  $r^i, \kappa^i$  odpowiednio przez  $p_i, \pi_i$ , otrzymujemy następujące wyrażenia dla pędów aholonomicznych (kanonicznych momentów pędu) sprzężonych do  $\Omega(R)^A{}_{dr}, \Omega^A{}_{rl}$

$$(1.45) \quad \begin{aligned} {}^lS_{dr}(R)_A &= {}^lE^A{}_i(R; \vec{r}), \\ {}^rS_{dr}(R)_A &= {}^rE^A{}_i(R; \vec{r}) p_i \\ {}^lS_{rlA} &= {}^lE^A{}_i(\vec{\kappa}) p_i, \\ {}^rS_{rlA} &= {}^rE^A{}_i(\vec{\kappa}) \pi_i. \end{aligned}$$

Otrzymujemy następujące nawiasy Poissona dla takich pędów

$$(1.46) \quad \begin{aligned} \{{}^lS_{dr}(R)_A, {}^lS_{dr}(R)_B\} &= \frac{2}{R} \varepsilon_{AB}{}^C {}^lS_{dr}(R)_C \\ \{{}^rS_{dr}(R)_A, {}^rS_{dr}(R)_B\} &= -\frac{2}{R} \varepsilon_{AB}{}^C {}^rS_{dr}(R)_C \\ \{{}^rS_{dr}(R)_A, {}^lS_{dr}(R)_B\} &= 0 \\ \{{}^rS_{rlA}, {}^rS_{rlB}\} &= -\varepsilon_{ABC} {}^rS_{rlC} \\ \{{}^lS_{rlA}, {}^lS_{rlB}\} &= \varepsilon_{AB}{}^C {}^lS_{rlC} \\ \{{}^rS_{rlA}, {}^lS_{rlB}\} &= 0 \end{aligned}$$



Części  $S_{dr}(R)_B, S_{rlA}$  są wzajemnie w involucji,

$$(1.47) \quad \{S_{dr}(R)_B, S_{rlA}\} = 0.$$

Po dokonaniu pewnych obliczeń otrzymujemy następujący wzór na energię kinetyczną:

$$(1.48) \quad T = \frac{1}{2} \left( m + \frac{I}{R^2} \right) \delta_{AB} \, {}^l\Omega(R)^A{}_{dr} \, {}^l\Omega(R)^B{}_{dr} \\ - \frac{I}{R} \delta_{AB} \, {}^l\Omega^A{}_{rl} \, {}^l\Omega(R)^B{}_{dr} + \frac{I}{2} \delta_{AB} \, {}^l\Omega^A{}_{rl} \, {}^l\Omega^B{}_{rl}.$$

Przekształcenie Legendre'a wyrażone w aholonomicznych pędach i prędkościach ma postać:

$$(1.49) \quad {}^lS(R)_A = \frac{\partial L}{\partial {}^l\Omega(R)^A{}_{dr}} = \frac{\partial T}{\partial {}^l\Omega(R)^A{}_{dr}} = \\ \left( m + \frac{I}{R^2} \right) \delta_{AB} \, {}^l\Omega(R)^B{}_{dr} - \frac{I}{R} \delta_{AB} \, {}^l\Omega^A{}_{rl}$$

$$(1.50) \quad {}^lS_{rlA} = \frac{\partial L}{\partial {}^l\Omega^A{}_{rl}} = \frac{\partial T}{\partial {}^l\Omega^A{}_{rl}} = -\frac{I}{R} \delta_{AB} \, {}^l\Omega(R)^B{}_{dr} + \frac{I}{2} \delta_{AB} \, {}^l\Omega_{rl}^A.$$

Przekształcenie odwrotne wyraża się jak następuje:

$$(1.51) \quad {}^l\Omega(R)^A{}_{dr} = \frac{1}{m} {}^lS(R)^A + \frac{1}{Rm} {}^lS_{rl}^A$$

$$(1.52) \quad {}^l\Omega^A{}_{rl} = \frac{1}{Rm} {}^lS(R)^A + \frac{mR^2 + I}{ImR^2} {}^lS_{rl}^A$$

Indeksy podnosimy przy pomocy delty Kroneckera. Podstawiając powyższe  ${}^l\Omega(R)^A{}_{dr}, {}^l\Omega^A{}_{rl}$  do wzoru na energię otrzymujemy:

$$(1.53) \quad T = \frac{1}{2m} \delta^{AB} {}^lS(R)_A {}^lS(R)_B + \frac{1}{mR} \delta^{AB} {}^lS_{rlA} {}^lS(R)_B \\ + \left( \frac{1}{2I} + \frac{1}{2mR^2} \right) \delta^{AB} {}^lS_{rlA} {}^lS_{rlB}.$$

Hamiltonian będzie wówczas postaci:  $H = T + V(r, \kappa)$ . Dla czysto geodezyjnych przypadków gdy

$V(r, \kappa) = 0$  przy użyciu nawiasów Poissona  $\frac{dF}{dt} = \{F, H\}$  otrzymujemy:

$$(1.54) \quad \frac{d^lS(R)_A}{dt} = \frac{2}{mR^2} \varepsilon_A{}^{BC} {}^lS(R)_B {}^lS_{rlC}$$

$$(1.55) \quad \frac{d^lS_{rlA}}{dt} = \frac{1}{mR} \varepsilon_A{}^{BC} {}^lS(R)_B {}^lS_{rlC}$$

Ciekawym jest fakt że tylko człon interferencyjny z  $T$  1.54 bierze udział w tworzeniu tych równań, ponieważ pierwszy i trzeci człon mają znikające nawiasy Poissona z  ${}^l S(R)_A$ ,  ${}^l S_{rlA}$ . Używając trójwymiarowego wektora obrotu w  $\mathbb{R}^3$  możemy powyższe równania zapisać prościej:

$$(1.56) \quad \frac{d\overrightarrow{{}^l S(R)}}{dt} = \frac{1}{mR^2} \overrightarrow{{}^l S_{rl}} \times \overrightarrow{{}^l S(R)}$$

$$(1.57) \quad \frac{d\overrightarrow{{}^l S_{rl}}}{dt} = \frac{1}{mR} \overrightarrow{{}^l S(R)} \times \overrightarrow{{}^l S_{rl}}$$

Oczywiście mamy tu na myśli iloczyn wektorowy w  $\mathbb{R}^3$ . Z nawiasów Poissona wnioskujemy, że kwadraty momentów pędów:

$$(1.58) \quad |{}^l S(R)|^2 = \delta^{BC} {}^l S(R)_B {}^l S(R)_C$$

$$(1.59) \quad |{}^l S_{rl}|^2 = \delta^{BC} {}^l S_{rlB} {}^l S_{rlC}$$

są stałymi ruchu 1.56, 1.54. Ponadto w trzech wymiarach

$$(1.60) \quad \frac{R}{2} {}^l S(R)_C + {}^l S_{rlC}$$

jest też stałą ruchu, a z tego wynika że iloczyn skalarny momentów pędu

$$\delta^{AC} {}^l S(R)_A {}^l S_{rlC}$$

i kąt pomiędzy  ${}^l S(R)_A$ ,  ${}^l S_{rlC}$  są również stałymi ruchu.

Tak więc sześciowymiarowy układ 1.56 1.57 ma pięć niezależnych stałych ruchu i tylko jedną zależną od czasu zmienną w przestrzeni  $(\overrightarrow{{}^l S(R)}, \overrightarrow{{}^l S_{rl}})$ . Tą zmienną jest orientacja dwu wymiarowej powierzchni w  $\mathbb{R}^3$  rozpiętej na wektorach  $\overrightarrow{{}^l S(R)}$ ,  $\overrightarrow{{}^l S_{rl}}$  obracającej się względem osi danej przez wektor 1.60 członu w równaniu.

Ruch wektorów  $\overrightarrow{{}^l S(R)}$ ,  $\overrightarrow{{}^l S_{rl}}$  nie zależy od pierwszego i drugiego członu w równaniu 1.48, w szczególności od momentu bezwładności  $I$ . Ale oczywiście człony te są istotne dla całkowitego opisu ruchu. Mianowicie okazuje się że  $I$  występuje w przekształceniu Legendre'a i w jego odwrotności. Zatem ewolucja czasowa zmiennych  $(\vec{r}, \vec{\kappa})$  podczas ruchu zależy jawnie od  $I$  i od wszystkich członów w wyrażeniu na energię kinetyczną.

## 2. Redukcja zagadnienia i parametryzacja przy użyciu kątów Eulera

Rozważmy zagadnienie trójwymiarowej sfery jako podzaimności w  $\mathbb{R}^4$ . Element metryczny będzie dany przez:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2),$$

gdzie  $r \in [0, \pi R]$ . Przy tak danej metryce energia kinetyczna punktu materialnego będzie postaci:

$$T = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \right)$$

Wygodnie jest stosować opis analityczny w którym sfera trójwymiarowa  $S^3(0, R)$  z samej swej natury podzaimność domknięta w  $\mathbb{R}^4$ , będzie reprezentowana jako kula o promieniu  $\pi R$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Przypomnijmy że grupę  $SU(2)$ , zależnie od zagadnienia, również reprezentujemy jako sferę w  $\mathbb{R}^4$ , lub kulę w  $\mathbb{R}^3$ . Reprezentacja za pomocą kuli jest oczywiście osobiwa - cała ograniczająca sfera o promieniu  $\pi R$  reprezentuje jeden punkt. Sferę  $S^3(0, R)$  parametryzujemy przy pomocy współrzędnych  $r, \theta, \varphi$  w ten sposób, że zanurzenie w  $\mathbb{R}^4$  opisujemy wzorami:

$$\begin{aligned} y^1 &= R \sin(r/R) \sin(\theta) \cos(\varphi) & y^2 &= R \sin(r/R) \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ y^3 &= R \sin(r/R) \cos(\theta) & y^4 &= R \cos(r/R). \end{aligned}$$

Gwarantują one asymptotyczne spełnienie równań:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = R^2.$$

Zmienna  $r$  przebiega zakres  $[0, \pi R]$ , zaś  $\theta, \varphi$ - zwykły zakres kątowych zmiennych sferycznych,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Wszystkie punkty w  $\mathbb{R}^3$  o współrzędnej  $r = \pi R$  reprezentują jeden i ten sam punkt - "biegun południowy", jeśli  $r = 0$  jest "biegunem północnym". Zamiast trójwymiarowego wektora

$$\begin{aligned} \vec{y} = [y^1, y^2, y^3] &= R[\sin(r/R) \sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(r/R) \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ &\quad \sin(r/R) \cos(\theta)], \end{aligned}$$

wygodniej jest użyć wektora  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  danego wzorem:

$$\vec{r} = r[\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta)] = [x^1, x^2, x^3].$$

W przeciwieństwie do  $\vec{y}$ , który dobrze parametryzuje (pokrywa) tylko "północną" półkulę,  $\vec{r}$  dostarcza dobrej parametryzacji dla całej  $S^3(0, R)$ , ze wspomnianym zastrzeżeniem, że wszystkie punkty na dwuwymiarowej sferze  $r = \pi R$  symbolizują jeden punkt  $S^3(0, R)$ - "biegun południowy",

jeśli  $r = 0$  jest "biegunem północnym". Następnie położmy:  $\vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = r \vec{n}(\theta, \varphi)$ . Otrzymujemy  $d\vec{r} d\vec{r} = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ , wówczas

$$ds^2 = \Gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R} \delta_{ij} dx^i dx^j + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R}\right) dx^i dx^j$$

Naszym celem jest analiza ruchu na dwuwymiarowej sferze w oparciu o geometrię trójwymiarowej grupy obrotów i mechanikę bąka symetrycznego w trzech wymiarach i bez ruchu translacyjnego. Wiąże się to z faktem, że  $S^2(0, 1)$  da się utożsamić z przestrzenią ilorazową grup ortogonalnych:

$$(2.1) \quad S^2(O, R) \cong SO(3, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R}).$$

A ogólniej

$$(2.2) \quad S^n(O, R) \cong SO(n+1, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R}).$$

Zatem w przypadku ruchu infinitezimalnego bąka na  $S^2(0, R)$  problem sprowadzamy do lewo-niezmienniczego układu Hamiltonowskiego z  $SO(3, \mathbb{R})$  jako przestrzenią konfiguracyjną. Jeśli rozważyć trójwymiarową pseudosferę zagadnienie jest bardziej skomplikowane. W takim przypadku zagadnienie jest izomorficzne z lewo-niezmiennicznym układem Hamiltonowskim bazującym na grupie Lorentza  $SO(1, 2)$  jako przestrzenią konfiguracyjną. Powodem tego jest

$$(2.3) \quad H^{2,2,+}(0, R) \cong SO(1, 2)/SO(2, \mathbb{R}).$$

Ogólniej,  $n$ -wymiarowa sfera i pseudosfera są jednorodnymi przestrzeniami ilorazowymi  $(n+1)$ -wymiarowych grup obrotów i grupy Lorentz'a względem  $n$ -wymiarowej podgrupy obrotów [89],

$$S^n(0, R) \cong SO(n+1, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R}), \quad H^{n,2,+}(0, R) \cong SO(1, n)/SO(n, \mathbb{R}).$$

Będziemy więc rozważać układy hamiltonowskie na przestrzeniach konfiguracyjnych  $SO(3, \mathbb{R})$ ,  $SO(1, 2)$ .

Skupmy się na modelu sferycznym. Pędy kanoniczne sprzężone z  $\vec{r}$  mają postać

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = m \Gamma_{ij} \frac{dx^j}{dt} = m \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R} \frac{dx^j}{dt} + \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R}\right) x_i x_j \frac{dx^j}{dt}$$

a więc ostatecznie

$$\vec{p} = m \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R}\right) \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \frac{\vec{r}}{r}$$

Hamiltonowski generator obrotów zachowujących punkt  $r = 0$  dany jest przez  $\bar{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Część pędu kanonicznego  $\vec{p}$  równoległa do  $\vec{r}$  nie daje wkładu do  $\bar{L}$ , zatem

$$\bar{L} = m \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Jeśli  $V(r)$  zależy wyłącznie od  $r$  ( $SO(3, R)$  – niezmienniczy), przy użyciu nawiasów Poissona można pokazać że  $\bar{L}$  jest stałą ruchu. Stały jest też kierunek wektora więc ruch wektora  $\vec{r}$  jest płaski w  $R^3$ . Rozpatrzmy ruch w płaszczyźnie  $z = 0$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), więc  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$

$$L_1 = L_2 = 0, \quad L_3 = m \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R} (\dot{x}y - x\dot{y}) = m \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{R} \dot{\varphi}$$

Drugą stałą ruchu jest pełna energia kinetyczna:

$$E = T + V(r) = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \right) + V(r)$$

w płaszczyźnie  $z = 0$  ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ )

$$T = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)$$

Jak widać w ten sposób zagadnienie zostało zredukowane do dwóch wymiarów. Jest ono szerzej dyskutowane w rozdziale 1.

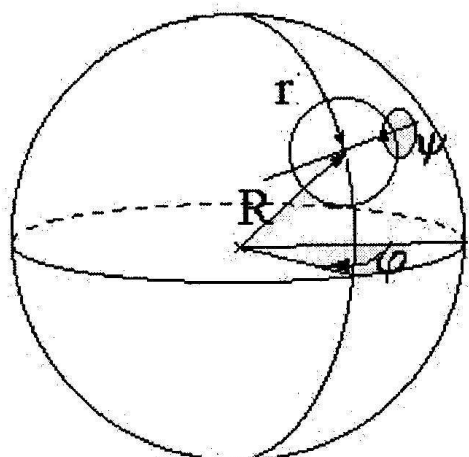
Jeśli rozpatrywać nie tylko ruch translacyjny ale i obrotowy wówczas energię kinetyczną możemy przedstawić w sposób następujący:

$$(2.4) \quad T = T_{tr} + T_{rot},$$

gdzie  $T_{tr}$  jest energią kinetyczną ruchu translacyjnego i  $T_{rot}$ -energiją ruchu obrotowego  $T_{rot} = \frac{I}{2}\Omega^2$  1.1 stosując konwencję oznaczeń jak w [28] na sferze mamy:

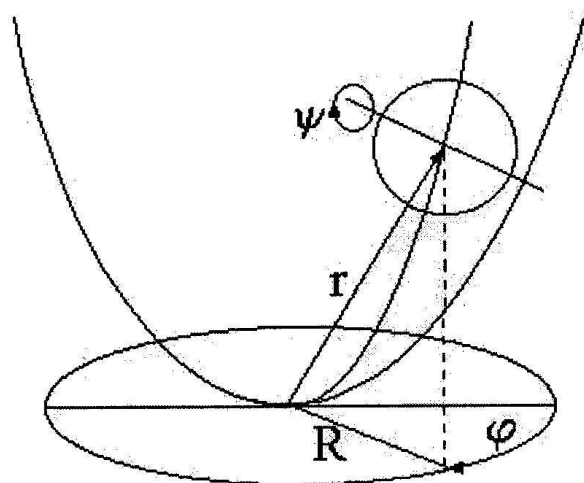
$$(2.5) \quad T = T_{tr} + T_{rot} = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) + \frac{I}{2} \left( \frac{d\psi}{dt} + \cos^2 \left( \frac{r}{R} \right) \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Bardzo schematycznie naszą sferę możemy przedstawić jak poniżej.



Podobnie możemy przedstawić energię kinetyczną infinytezymalnego bąka na dwuwymiarowej pseudosferze (przestrzeni Łobaczewskiego)[28]

$$(2.6) \quad T = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) + \frac{I}{2} \left( \frac{d\psi}{dt} + \cosh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$



Grupy  $SO(3, \mathbb{R})$ ,  $SO(1, 2)$  2.1 2.3 możemy sparametryzować przy użyciu kątów Eulera i odpowiednio pseudo-kątów Eulera [28] danych przez  $SO(3, \mathbb{R}) \ni R(\varphi, \vartheta = \frac{r}{R}, \psi) = R_3(\varphi) R_1(\vartheta) R_3(\psi)$ ,  $SO(1, 2) \ni L(\varphi, \chi = \frac{r}{R}, \psi) = R_3(\varphi) L_1(\chi) R_3(\psi)$ , gdzie  $R_i(\alpha)$  oznacza obroty o kąt  $\alpha$  względem  $i$ -tej osi i  $L_1(\chi)$  oznacza "boost" Lorentzowski wzdłuż pierwszej osi. Odpowiednio też, wprowadziliśmy  $\vartheta = \frac{r}{R}$  ( $r \in [0, R\pi)$ ) na sferze i  $\chi = \frac{r}{R}$  ( $r \in [0, \infty)$ ) na pseudosferze.

Wprowadźmy teraz quasiprędkości będące elementami odpowiednich algebr Liego. Współrzędne współwzajemnie prędkości kątovej w sensie obrotu bąka w  $\mathbb{R}^3$  są dane przez

$$\kappa = R^{-1} \frac{dR}{dt}, \lambda = L^{-1} \frac{dL}{dt}.$$

Po przeliczeniu otrzymujemy

$$\kappa = \kappa^1 M_1 + \kappa^2 M_2 + \kappa^3 M_3, \lambda = \lambda^1 N_1 + \lambda^2 N_2 + \lambda^3 N_3,$$

gdzie  $(M_i)_{jk} = -\varepsilon_{ijk}$ ,  $(N_1)_{jk} = |\varepsilon_{1jk}|$ ,  $(N_2)_{jk} = |\varepsilon_{2jk}|$ ,  $N_3 = M_3$  są bazowymi elementami algebr Liego  $SO(3, \mathbb{R})'$ ,  $SO(1, 2)'$ .  $\kappa^i$ ,  $\lambda^i$  są dane przez:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \kappa_1 &= \cos \psi \frac{d\vartheta}{dt} + \sin \vartheta \sin \psi \frac{d\varphi}{dt}, & \lambda_1 &= \cos \psi \frac{d\chi}{dt} + \operatorname{sh} \chi \sin \psi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \kappa_2 &= \sin \psi \frac{d\vartheta}{dt} + \sin \vartheta \cos \psi \frac{d\varphi}{dt}, & \lambda_2 &= \sin \psi \frac{d\chi}{dt} - \operatorname{sh} \chi \cos \psi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \kappa_3 &= \frac{d\psi}{dt} + \cos \vartheta \frac{d\varphi}{dt}, & \lambda_3 &= \frac{d\psi}{dt} + \operatorname{ch} \chi \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned}$$

zaś macierze mają postać:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & M_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & M_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ N_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & N_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & N_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rozważmy energię kinetyczną na  $SO(3, \mathbb{R})$ ,  $SO(1, 2)$  niezmienniczą względem lewych regularnych translacji i względem prawych regularnych translacji elementami  $SO(2, \mathbb{R})$  działających jako grupa obrotów względem trzeciej osi. W przypadku  $SO(3, \mathbb{R})$  odpowiada to bąkowi syetrycznemu w  $\mathbb{R}^3$  bez ruchu traslacyjnego. Oczywiście,

$$(2.8) \quad T = \frac{K}{2} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \frac{I}{2} \kappa_3^2,$$

$$(2.9) \quad T = \frac{K}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \mp \frac{I}{2} \lambda_3^2,$$

odpowiednio, na  $SO(3, \mathbb{R})$  i  $SO(1, 2)$ . Po dokonaniu obliczeń przy założeniu że  $K = mR^2$  i w drugim wzorze wybieramy znak "plus", otrzymamy odpowiednio wyrażenia 2.5 2.6. Jeśli  $I = K = mR^2$ , wtedy problem geodezyjny dla 2.5 będzie izomorficzny z trój-wymiarowym sferycznym bąkiem. Wyrażenie 2.8 stanie się równoważne niezmiennikowi Casimira dla  $SO(3, \mathbb{R})$ . Wyrażenie 2.9 stanie się niezmiennikiem Casimira dla  $SO(1, 2)$  jeśli wziąć znak "minus" i położyć  $I = mR^2$ .

## CZĘŚĆ 4

# Modele dwuwymiarowe, zagadnienia całkwalne

### 1. Ruch infinitezimalnego ciała metrycznie sztywnego

Na początek rozważmy przykład ruchu infinitezimalnego ciała metrycznie sztywnego. Interesuje nas głównie dwuwymiarowe ciało sztywne poruszające się w przestrzeni o stałej krzywiznie jak sfera  $S^2(0, R)$  czy pseudosfera (przestrzeń Łobaczewskiego)  $H^{2,2}(0, R)$ . Pseudosfera ma dwa "płaty", dwie powierzchnie. W naszych rozważaniach, szczególnie w następnych rozdziałach skupimy się głównie na dodatnim płacie t.j.  $H^{2,2,+}(0, R)$ . Równie ciekawe jest rozpatrywanie przypadku ciała poruszającego się po dwuwymiarowym torusie  $T(0; r, R)$  o promieniach  $r$  i  $R$ . Nie jest on wprawdzie przestrzenią o stałej krzywiznie ale jest podrozmaitością algebraiczną czwartego rzędu w  $\mathbb{R}^3$ . Natomiast sfera jak i pseudosfera są oczywiście powierzchniami drugiego rzędu w  $\mathbb{R}^3$ . Na sferze i pseudosferze używamy "współrzędnych biegunowych", w obu przypadkach oznaczanych tymi samymi symbolami  $(r, \varphi)$  Torus będzie sparametryzowany przez kąty  $\varphi$  i  $\psi$ . Na sferze odległość między infinitezimalnie bliskimi punktami wyraża się przez element metryczny:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) d\varphi^2,$$

i odpowiednio na pseudosferze:

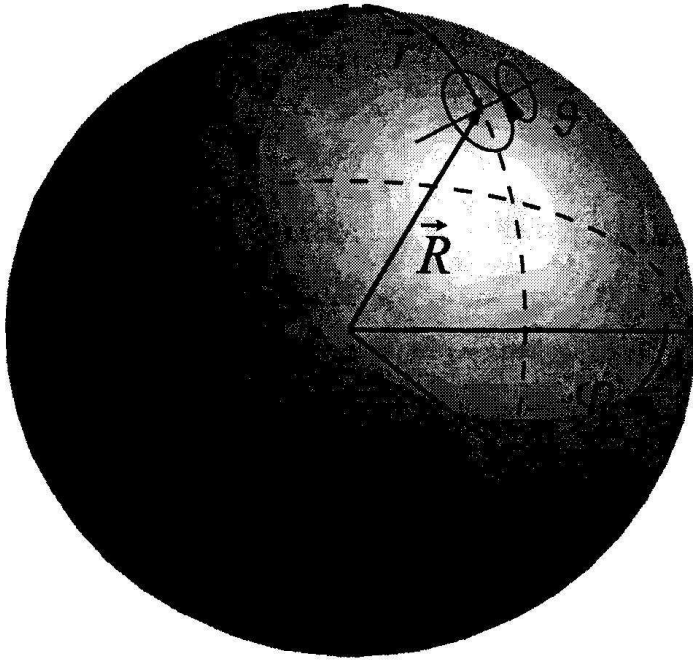
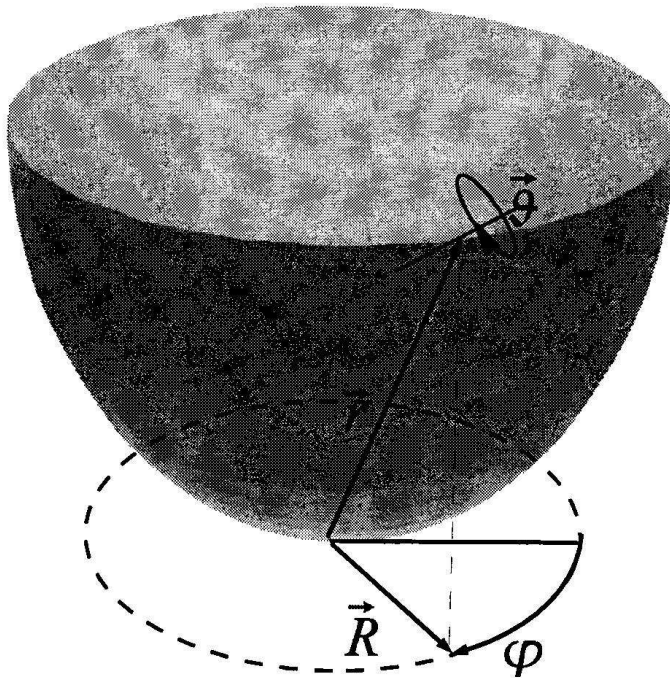
$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right) d\varphi^2,$$

i torusie:

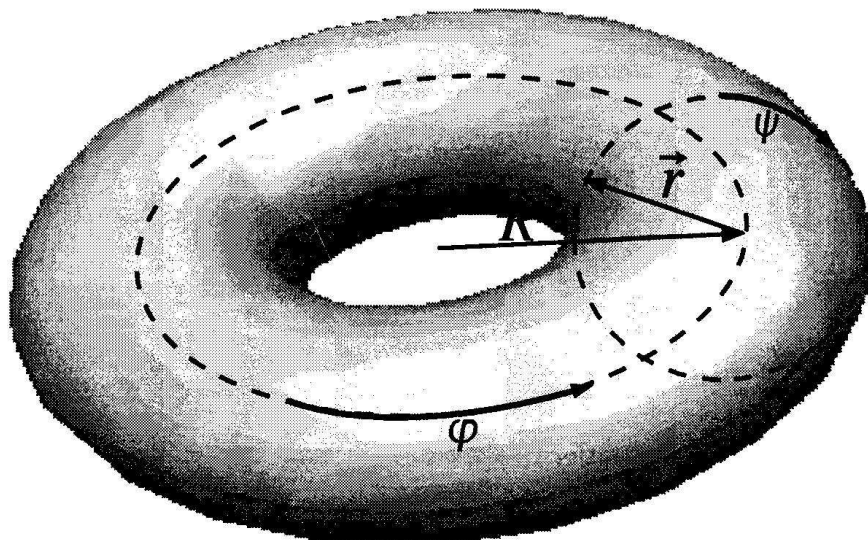
$$ds^2 = (R + r \sin \psi)^2 d\varphi^2 + r^2 d\psi^2.$$

Oczywiście w przypadku sfery  $r$  przebiega  $[0, \pi R)$ , a w przypadku pseudosfery  $r$  przebiega  $[0, \infty)$  jak na rysunkach zamieszczonych poniżej.



Sfera  $S^2(0, R)$ Pseudosfera  $H^{2,2,+}(0, R)$ 

Na torusie  $r$  i  $R$  są stałe. Ich sens przedstawia rysunek poniżej. Natomiast  $\varphi$  i  $\psi$  przebiegają od 0 do  $2\pi$ .

Torus  $T(0; r, R)$ 

Ruch ciała opisujemy względem mijanego ortonormalnego pola baz  $E_A$ . Pole to na sferze będzie dane przez:

$$E_{(r)} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$E_{(\varphi)} = \frac{1}{R \sin\left(\frac{r}{R}\right)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$E_{(r)}^{(r)} = 1, \quad E_{(\varphi)}^{(r)} = E_{(\varphi)}^{(\varphi)} = 0, \quad E_{(\varphi)}^{(\varphi)} = \frac{1}{R \sin\left(\frac{r}{R}\right)},$$

i odpowiednio na pseudosferze:

$$E_{(r)} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$E_{(\varphi)} = \frac{1}{R \sinh\left(\frac{r}{R}\right)} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$E_{(r)}^{(r)} = 1, \quad E_{(\varphi)}^{(r)} = E_r^{(\varphi)} = 0, \quad E_{(\varphi)}^{(\varphi)} = \frac{1}{R \sinh\left(\frac{r}{R}\right)} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

i torusie:

$$E_{(\psi)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi}$$

$$E_{(\varphi)} = \frac{1}{R + \cos(\psi)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$E_{(\psi)}^{(\psi)} = \frac{1}{r} \quad E_{(\varphi)}^{(\psi)} = E_{(\psi)}^{(\varphi)} = 0, \quad E_{(\varphi)}^{(\varphi)} = \frac{1}{R + \cos(\psi)}.$$

Wektory bazowe są jak widać skierowane wzdłuż linii współrzędnych, ale sposób ich unormowania do jedności sprawia, że odpowiedni reper nie jest holonomiczny. W dwóch wymiarach prędkość kątowna  $\Omega^A_B = \Omega_{dr}^A_B + \Omega_{rl}^A_B = \Theta^A_B + \omega^A_B$  2.4 ma tylko jedną istotną składową,

$$\Omega^1_2 = -\Omega_2^1 = \Omega, \quad \omega^1_2 = -\omega_2^1 = \omega, \quad \Theta^1_2 = -\Theta_2^1 = \Theta.$$

Macierz  $R$  będzie macierzą obrotu o kąt  $\vartheta$ :  $R_B^A = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix}$ . Po przeliczeniu otrzymujemy:

1. sfera:

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \Theta = \cos\left(\frac{r}{R}\right) \frac{d\varphi}{dt}, \quad \Omega = \frac{d\vartheta}{dt} + \cos\left(\frac{r}{R}\right) \frac{d\varphi}{dt},$$

2. pseudosfera

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \Theta = \cosh\left(\frac{r}{R}\right) \frac{d\varphi}{dt}, \quad \Omega = \frac{d\vartheta}{dt} + \cosh\left(\frac{r}{R}\right) \frac{d\varphi}{dt},$$

3. torus

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \Theta = \sin(\psi) \frac{d\varphi}{dt}, \quad \Omega = \frac{d\vartheta}{dt} + \sin(\psi) \frac{d\varphi}{dt},$$

Energię kinetyczną postulujemy w postaci sumy:

$$T = T_{tr} + T_{rot},$$

gdzie  $T_{tr}$  - energia kinetyczna ruchu traslacyjnego, tj:

1. sfera:  $T_{tr} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) \dot{\varphi}^2),$

2. pseudosfera:  $T_{tr} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right) \dot{\varphi}^2),$

3. torus:  $T_{tr} = \frac{m}{2} \left( (R + r \cos \psi)^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 \right).$

(gdzie  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ), a  $T_{rot}$ -to energia ruchu obrotowego

$$(1.1) \quad T_{rot} = \frac{I}{2} \Omega^2.$$

$I$  jest momentem bezwładności ciała, tj., materialny tensor  $I$  wyraża się jak następuje:

$$I = I \cdot id = I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po wykonaniu transformacji Legendre'a otrzymujemy wyrażenie dla energii w postaci:

1. sfera:

$$(1.2) \quad T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2 - 2 \cos \frac{r}{R} p_\varphi p_\theta + \left( \frac{mR^2}{J} \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) + \cos^2 \left( \frac{r}{R} \right) \right) p_\theta^2}{2mR^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right)};$$

bez obrotu (bez  $\theta$ ), t.zn. dla punktu materialnego bez wewnętrznych stopni swobody:

$$T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right)}.$$

2. pseudosfera:

$$(1.3) \quad T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2 - 2 \cosh \frac{r}{R} p_\varphi p_\theta + \left( \cosh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \pm \frac{mR^2}{J} \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \right) p_\theta^2}{2mR^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right)};$$

Znak "plus" odpowiada normalnemu sposobowi liczenia energii kinetycznej przez wysumowanie energii kinetycznych składników ciała (w przypadku obiektu rozciągniętego). Taka energia kinetyczna nie jest jednak niezmiennicza względem działania grupy izometrii przestrzeni konfiguracyjnej, jaką w tym przypadku jest grupa Lorentza  $SO(1, 2)$  w trzech wymiarach. Zmieniając znak na "minus" dostajemy wyrażenie, które ma tę własność niezmienniczości. Otrzymana energia kinetyczna, czyli faktycznie metryka na przestrzeni konfiguracyjnej, nie jest dodatnio określona, ale jest interesująca geometrycznie. W przypadku  $I = mR^2$  sprowadza się ona do metryki Killinga na grupie Lorentza. bez obrotu (bez  $\theta$ ):

$$T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right)}.$$

3. torus:

$$(1.4) \quad T = \frac{p_\psi^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2 - 2 \sin \psi p_\varphi p_\theta + \left( \frac{m}{J} (R + r \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi \right) p_\theta^2}{2m(R + r \cos \psi)^2};$$

bez obrotu (bez  $\theta$ ):

$$T = \frac{p_\psi^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m(R + r \cos \psi)^2}.$$

Jak widac powyżej  $\varphi$  i  $\theta$  są zmiennymi cyklicznymi. Nie występują w wyrażeniach na  $T$  w postaci jawnej. Posługujemy się w naszej analizie równaniem Hamiltona-Jacobiego:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( q, \frac{\partial S}{\partial q}, t \right) = 0.$$

W przypadku stacjonarnym:  $S = -Et + S_0(q)$ , gdzie  $S_0$  spełnia:  $H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = E$  postulujemy separację zmiennych  $S_0 = S_r(r) + S_\varphi(\varphi) + S_\theta(\theta) = S_r(r) + l\varphi + s\theta$ . Dla sfery mamy:

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mR^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)} \left[ \left( \frac{\partial S_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 - 2 \cos \frac{r}{R} \frac{\partial S_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\left( \frac{mR^2}{J} \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) + \cos^2\left(\frac{r}{R}\right) \right)}{2mR^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)} \left( \frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + V(r),$$

gdzie

$$\frac{dS_q}{dq} = p_q, \quad J_q = \oint p_q dq = \oint \frac{dS_q(q)}{dq} dq,$$

zatem zmienne działania  $J_q$  mają postać:

$$(1.5) \quad J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{(l - \cos \frac{r}{R} s)^2 + \frac{mR^2}{J} \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) s^2}{R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)}} dr,$$

$$(1.6) \quad J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = \oint \frac{dS_\varphi(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} l d\varphi = 2\pi l,$$

$$(1.7) \quad J_\theta = \oint p_\theta d\theta = \oint \frac{dS_\theta(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} s d\theta = 2\pi s.$$

Podstawiając 1.6 1.7 do 1.5 ostatecznie otrzymujemy:

$$(1.8) \quad J_r = \oint \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{(J_\varphi - \cos \frac{r}{R} J_\theta)^2 + \left(\frac{mR^2}{J} \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)\right) J_\theta^2}{4\pi^2 R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)}} dr.$$

W tym związku zakodowana jest właściwie cała dynamika problemu. Gdy rozważamy zagadnienie bez obrotowych stopni swobody, dla sfery otrzymujemy zmienną działania postaci:

$$(1.9) \quad J_r = \oint \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{1}{4\pi^2 R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)} J_\varphi^2} dr.$$

Następnie możemy powtórzyć procedurę dla pseudosfery i torusa. Zaczniemy od pseudosfery.

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mR^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right)} \left[ \left( \frac{\partial S_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 - 2 \cos \left( \frac{r}{R} \right) \frac{\partial S_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\left( \cos^2 \left( \frac{r}{R} \right) \pm \frac{mR^2}{J} \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \right)}{2mR^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right)} \left( \frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + V(r),$$

$J_r$  otrzymujemy postaci

$$J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{l^2 - 2 \cosh \frac{r}{R} sl + (\cosh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \pm \frac{mR^2}{J} \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right)) s^2}{R^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right)}} dr,$$

gdzie  $J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi l$ ,  $J_\theta = \oint p_\theta d\theta = 2\pi s$  stąd mamy:

$$(1.10) \quad J_r = \oint \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{J_\varphi^2 - 2 \cosh \left( \frac{r}{R} \right) J_\varphi J_\theta + (\cosh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \pm \frac{mR^2}{J} \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right)) J_\theta^2}{4\pi^2 R^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right)}} dr.$$

Dla zagadnienia pseudosferycznego bez wewnętrznych stopni swobody, otrzymujemy zmienną działania postaci:

$$(1.11) \quad J_r = \oint \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{1}{4\pi^2 R^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right)} J_\varphi^2} dr.$$

W przypadku torusa zmienna " $\psi$ " pełni taką rolę jaką na sferze i pseudosferze pełniło " $r$ ".

Mamy więc:  $S_0 = S_\psi(\psi) + S_\varphi(\varphi) + S_\theta(\theta) = S_\psi(\psi) + l\varphi + s\theta$  i  $V = V(\psi)$ . Wtedy:

$$E = \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial S_\psi(\psi)}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{1}{2m(R + r \cos \psi)^2} \left[ \left( \frac{\partial S_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 - 2 \sin \psi \frac{\partial S_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\left( \frac{m}{J} (R + r \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi \right)}{2m(R + r \cos \psi)^2} \left( \frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + V(\psi).$$

Otrzymane zmienne działania są postaci:

$$J_\psi = \oint \sqrt{2mr^2(E - V(\psi)) - \frac{1}{(R + r \cos \psi)^2} [(l - \sin \psi s)^2 - \frac{m}{J} (R + r \cos \psi)^2 s^2]} d\psi.$$

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi l, \quad J_\theta = \oint p_\theta d\theta = 2\pi s, \quad J_\psi = \oint p_\psi d\psi$$

Zatem istotne wyrażenie  $J_\psi$  streszczające w sobie dynamikę ma postać:

$$(1.12) \quad J_\psi = \oint \sqrt{2mr^2 (E - V(\psi)) - \frac{(J_\varphi - \sin \psi J_\theta)^2 + \frac{m}{J} (R + r \cos \psi)^2 J_\theta^2}{4\pi^2 (R + r \cos \psi)^2}} d\psi,$$

a w przypadku gdy rozważane zagadnienie jest bez wewnętrznych stopni swobody  $J_\psi$  jest postaci

$$J_\psi = \oint \sqrt{2mr^2 (E - V(\psi)) - \frac{1}{4\pi^2 (R + r \cos \psi)^2} J_\varphi^2} d\psi.$$

Aby jawnie policzyć  $J_r$  powinniśmy wybrać model potencjału powiązany z geometrią naszej rozmaitości. Na przykład  $\det[g^{ij}]$  jest gęstością skalarną o wadze  $-2$ . To sugeruje następujący wybór:

$$(1.13) \quad V_r(r) = f(r) \det[g^{ij}].$$

W przypadku sferycznym  $\det[g^{ij}] = \frac{1}{R^2 \sin^2(\frac{r}{R})}$ . Proponuję więc:  $f(r) = R^2 \cos^2(\frac{r}{R})$ . Stąd  $V_r(r) = \frac{\cos^2(\frac{r}{R})}{\sin^2(\frac{r}{R})} = \cot^2(\frac{r}{R})$  dla tego potencjału  $J_r$  (1.8) wynosi:

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2 (E + 1) + J_\theta^2 (1 - \frac{mR^2}{I})} - \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi + J_\theta)^2} \\ - \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi - J_\theta)^2},$$

a dla zagadnienia bez wewnętrznych stopni swobody 1.9

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2 (E + 1)} - \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + J_\varphi^2}.$$

Wyraźmy energię w zmiennych kąta-działanie. Odpowiednio dla zagadnienia z wewnętrznymi stopniami swobody mamy:

$$E = \frac{1}{2m4\pi^2 R^2} \left( J_r + \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi + J_\theta)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi - J_\theta)^2} \right)^2 \\ - \frac{1}{2m4\pi^2 R^2} J_\theta^2 (1 - \frac{mR^2}{I}) - 1,$$

a dla zagadnienia bez wewnętrznych stopni swobody:

$$E = \frac{1}{2m4\pi^2 R^2} \left( J_r + \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + J_\varphi^2} \right)^2 - 1$$

W przypadku pseudosfery:  $\det[g^{ij}] = \frac{1}{R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})}$ . Proponuję więc:  $f(r) =$

$\cosh^2(\frac{r}{R}) \Rightarrow V_r(r) = \frac{\cosh^2(\frac{r}{R})}{R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})} = \frac{1}{R^2} \coth^2(\frac{r}{R})$  dla tak wybranego potencjału  $J_r$  jest postaci 1.10:

$$J_r = -\sqrt{2m4\pi^2(1 - R^2E) + J_\theta^2(1 \pm \frac{mR^2}{I})} + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 + (J_\varphi + J_\theta)^2} \\ + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 + (J_\varphi - J_\theta)^2},$$

a dla zagadnienia bez wewnętrznych stopni swobody 1.11

$$J_r = -\sqrt{2m4\pi^2(1 - R^2E)} + \sqrt{2m4\pi^2 + J_\varphi^2},$$

Teraz wyrażmy energię w zmiennych kąt-działanie. Odpowiednio dla zagadnienia z wewnętrznymi stopniami swobody mamy:

$$E = \frac{-1}{2m4\pi^2R^2} \left( -J_r + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 + (J_\varphi + J_\theta)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 + (J_\varphi - J_\theta)^2} \right)^2 \\ + \frac{1}{2m4\pi^2R^2} J_\theta^2 \left( 1 \pm \frac{mR^2}{I} \right) + \frac{1}{R^2},$$

a dla zagadnienia bez wewnętrznych stopni swobody:

$$E = \frac{-1}{2m4\pi^2R^2} \left( -J_r + \sqrt{2m4\pi^2 + J_\varphi^2} \right)^2 + \frac{1}{R^2}.$$

## 2. Deformacje jednorodne - wstęp

Punktem wyjścia był ruch afiniczny ciała metrycznie sztywnego. Rozważmy teraz przypadek deformacji jednorodnych. Poprzednio opisywaliśmy ruch  $e$  względem mijanych reperów odniesienia  $E$  zależnością:  $e_A(t) = E_B(x(t))R_A^B(t)$ , gdzie  $R$  było macierzą obrotu. Prędkość kątową  $\omega$  w reprezentacji współtowarzyszącej definiowaliśmy następującym wyrażeniem:

$$\frac{De_B}{Dt} := e_A \omega_B^A.$$

Rozważając przykład ciała sztywnego na  $e$  nakładaliśmy więzy orthonormalności. Teraz ponieważ nie nakładamy żadnych więzów sztywności,  $e$  są "dobrymi" współrzędnymi uogólnionymi i pole baz  $E$  nie jest już niezbędne. Jednakże interesują nas zagadnienia skończonych obrotów (jak poprzednio) oddziałujących z ekstra nałożonymi nieskończonymi (lub skończonymi) deformacjami. W takim przypadku zdaje się być naturalnym, przyjąć jako "tło" ruchu żyroskop opisany względem aholomicznego pola baz  $E_A$ .



Przypomnijmy, pełna energia kinetyczna ma postać:

$$(2.1) \quad T = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{De_A^i}{Dt} \frac{De_B^j}{Dt} J^{AB} = T_{tr} + T_{int},$$

gdzie  $T_{int}$  jest częścią "wewnętrzną" energii. Poprzednio była to tylko energia ruchu obrotowego, teraz obejmuje też deformacje. Po położeniu  $e_A = E_B \varphi_A^B$ , gdzie  $\varphi_A^B$  będzie ogólną macierzą, energia kinetyczna ma postać:  $T_{int} = \frac{1}{2} \delta_{MN} \varphi_K^M \varphi_L^N \Lambda_A^K \Lambda_B^L J^{AB}$ , gdzie  $\Lambda$  jest prędkością afiniczną, zdefiniowaną przez:  $\frac{De_B}{Dt} = e_A \Lambda_B^A$ . Po pewnych obliczeniach możemy przedstawić  $\Lambda$  w następującej postaci jako funkcję od  $\varphi$  i  $\dot{\varphi}$ :

$$\Lambda_B^A = (\varphi^{-1})_F^A \Gamma_{DC}^F \varphi_B^D \varphi_G^C v^G + (\varphi^{-1})_C^A \dot{\varphi}_B^C.$$

Na początek rozważmy opis oparty na rozkładzie biegunowym  $\varphi$ :

$$(2.2) \quad \varphi_B^A = R_C^A L_B^C,$$

gdzie  $R$  jest macierzą ortogonalną, zaś  $L$  symetryczną ( $L_{AB} = \delta_{AC} L_B^C = \delta_{BC} L_A^C = L_{BA}$ ). Energia kinetyczna ma wtedy postać:

$$(2.3) \quad T_{int} = \frac{1}{2} tr(L^2 \Lambda J \Lambda^T) = -\frac{1}{2} tr(L J L \omega^2) + tr(L J \dot{L} \omega) + \frac{1}{2} tr(J \dot{L}^2),$$

gdzie  $\omega$  jest "współtowarzyszącą" prędkością kątową R-bąka:  $\frac{Du_A}{Dt} = u_B \omega_A^B$ ,  $u_A := E_B R_A^B$ .

Prędkości kątowe będą dwuwymiarowymi obiektami, a więc macierze  $\omega$ ,  $\chi$ ,  $\vartheta$  będą zapisane jako  $\omega\epsilon$ ,  $\chi\epsilon$ ,  $\vartheta\epsilon$ , gdzie teraz  $\omega$ ,  $\chi$ ,  $\vartheta$  są wielkościami skalarami mnożonymi przez macierz  $\epsilon$  gdzie:  $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ ,  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ . Użycie tych samych symboli  $\omega$ ,  $\chi$ ,  $\vartheta$  dla macierzy i ich czynników przy macierzy  $\epsilon$  (mimo iż niezbyt ściśle), upraszcza notację. Jeśli używamy rozkładu jednobiegunowego wtedy [69] [28]-[32] wówczas mamy  $\Lambda = \omega L^{-1} \epsilon L + L^{-1} \dot{L}$ . Podstawiając to do 2.3 i biorąc pod uwagę  $R$ ,  $L$  and  $J$  w postaci:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \xi & \eta \\ \eta & \zeta \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

otrzymujemy:

$$(2.4) \quad T_{int} = \frac{1}{2} (J_1 \xi^2 + J_2 \zeta^2 + (J_1 + J_2) \eta^2) \omega^2 + (-J_1 \eta \dot{\xi} + J_2 \eta \dot{\zeta} + (J_1 \xi - J_2 \zeta) \dot{\eta}) \omega + (J_1 \dot{\xi}^2 + J_2 \dot{\zeta}^2 + (J_1 + J_2) \dot{\eta}^2).$$

Struktura wielkości  $\omega$ ,  $\chi$  zależy od metryki na  $M$ , t.j. tensora metrycznego  $g$ , i oczywiście od wyboru aholonomicznej ortonormalnej bazy  $E_A$  w  $M$ .

Energia związana z ruchem translacyjnym ma w poszczególnych przypadkach postać:

1. sfera:  $T_{tr} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + R^2 \sin^2(\frac{r}{R}) \dot{\varphi}^2)$ ,
2. pseudosfera:  $T_{tr} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R}) \dot{\varphi}^2)$ ,
3. torus:  $T_{tr} = \frac{m}{2} ((R + r \cos \psi)^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\psi}^2)$ .

Energia związana z ruchem obrotowym i deformacjami jest dana przez 2.4  $T_{int}$  gdzie  $\omega$  jest postaci:

1. sfera:  $\omega = \dot{\theta} + \cos(\frac{r}{R}) \dot{\varphi}$ ,
2. pseudosfera:  $\omega = \dot{\theta} + \cosh(\frac{r}{R}) \dot{\varphi}$ ,
3. torus:  $\omega = \dot{\theta} + \sin \psi \dot{\varphi}$ .

Podsumujmy, Lagrangian jest sumą:  $L = T - V$ , gdzie potencjał  $V$  zależy od zmiennych uogólnionych  $(r, \varphi, \theta, \xi, \eta, \zeta)$  ((pseudo) sfera) lub  $(\psi, \varphi, \theta, \xi, \eta, \zeta)$  (torus). Bez wewnętrznych stopni swobody, zagadnienie jest separowalne dla potencjałów postaci:

1. sfera:  $V_r(r) + \frac{V_\varphi(\varphi)}{\sin^2(\frac{r}{R})}$ ,
2. pseudosfera:  $V_r(r) + \frac{V_\varphi(\varphi)}{\sinh^2(\frac{r}{R})}$ ,
3. torus:  $V_\psi(\psi) + \frac{V_\varphi(\varphi)}{(R+r \cos \psi)^2}$ .

W sferycznym i pseudosferycznym przypadku bardzo ważną rolę odgrywają tzw. potencjały Bertrand'a, dla których wszystkie orbity ograniczone są zamknięte. Jeśli rozważamy również "wewnętrzne" stopnie swobody potencjał możemy postulować postaci sumy:  $V = V_{tr} + V_{int}$ , gdzie  $V_{tr}$  jest związany z ruchem translacyjnym a  $V_{int}$  z ruchem obrotowym i deformacjami. W przypadkach przestrzennie izotropowych potencjał zależy od konfiguracji  $\varphi$  za pośrednictwem tensora deformacji Green'a:

$$G = \varphi^T \varphi = L^2 = \begin{bmatrix} \xi^2 + \eta^2 & \eta(\xi + \zeta) \\ \eta(\xi + \zeta) & \zeta^2 + \eta^2 \end{bmatrix}.$$

Jeśli ponadto samo ciało jest izotropowe to potencjał  $V$  zależy od  $G$  za pośrednictwem niezmienników deformacji. Jako dwóch bazowych niezmienników można użyć:

$$K_1 = tr(G) = \xi^2 + \zeta^2 + 2\eta^2, \quad K_2 = tr(G^2) = (\xi^2 + \eta^2)^2 + (\zeta^2 + \eta^2)^2 + 2\eta^2(\xi + \zeta)^2.$$

Jeśli nawet w roli  $V_{tr}$  przyjmiemy potencjał Bertranda, to po włączeniu wewnętrznych stopni swobody degeneracja zostaje zniesiona, orbity nie będą już zamknięte.

W zagadnieniach izotropowych przestrzennie, ale już niekoniecznie izotropowych materialnie, dobrym uproszczeniem jest sformułowanie oparte na rozkładzie biegunowym macierzy opisującej

konfigurację wewnętrzną. Takie podejście pozwala częściowo rozdzielić zmienne, ale nie na pełną ich separację w sensie Hamiltona - Jacobiego. Ta częściowa separacja jest użyteczna w obliczeniach numerycznych i jakościowej analizie układu dynamicznego, co jest pożyteczne w różnych zagadnieniach praktycznych.

Szczególnie interesujące są zagadnienia podwójnie izotropowe, tzn. izotropowe zarówno w przestrzeni fizycznej jak i materialnej.

Wówczas efektywnym narzędziem jest zastosowanie rozkładu dwubiegunowego otrzymanego po przez diagonalizację macierzy symetrycznej rozkładu biegunowego ([28]-[32]). Pozwala on na rozseparowanie stopni swobody na podukłady słabo oddziałujące ze sobą w ogólnym  $n$ -wymiarowym przypadku. Szczególnie w zagadnieniach 2-wymiarowych istnieje klasa podwójnie izotropowych modeli, zarówno interesujących z praktycznego punktu widzenia jak i dających się ściśle traktować analitycznie w języku pełnej separacji zmiennych. Otrzymujemy wtedy interesującą klasę układów całkowalnych w sensie Liouville'a. Można też badać efektywnie ich degenerację. Z powyższych powodów w niniejszej pracy skupiamy się na zagadnieniach podwójnie izotropowych.

### 3. Zagadnienia podwójnie izotropowe

W zagadnieniach podwójnie izotropowych tensor bezwładności jest izotropowy, tj.  $J_1 = J_2 = I$  czyli  $J = I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , wówczas wygodniej jest używać rozkładu dwubiegunowego. Jest on postaci:  $\varphi = UDV^{-1}$  gdzie:

$$U = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

i  $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ , są wewnętrznymi współrzędnymi uogólnionymi

Podobnie jak w rozdziale 1 będziemy rozważać ruch afiniczny ciała na dwuwymiarowej sferze  $S^2(0, R)$  (rozdział 6), pseudosferze tzw. przestrzeni Łobaczewskiego  $H^{2,2,+}(0, R)$  (rozdział 1) i dwuwymiarowym torusie  $T(0; r, R)$  (rozdział 1) Przypomnijmy, pełna energia kinetyczna jest sumą 2.1:

$$T = T_{tr} + T_{int},$$

gdzie  $T_{int}$  to część energii związana z wewnętrznymi stopniami swobody, a więc obejmująca ruch obrotowy i deformacje, natomiast  $T_{tr}$  - jest energią kinetyczną ruchu translacyjnego. Po położeniu  $e_A = E_B \varphi_A^B$ , gdzie  $\varphi_A^B$  będzie teraz dane za pomocą rozkładu dwubiegunowego:

$$\varphi_B^A = U_K^A D_C^K V^{-1} C_B,$$

$T_{int}$  wyrażamy w postaci:

$$T_{int} = \frac{J}{2} [\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2] + \frac{J}{2} [\lambda^2 + \mu^2] \omega^2 + \frac{J}{2} [\lambda^2 + \mu^2] \vartheta^2 - 2J\lambda\mu\omega\vartheta.$$

Oczywiście,  $\vartheta = \dot{\beta}$  i  $\omega$  są jak następuje:

1. sfera:  $\omega = \dot{\alpha} + \cos\left(\frac{r}{R}\right) \dot{\varphi}$ ,
2. pseudosfera:  $\omega = \dot{\alpha} + \cosh\left(\frac{r}{R}\right) \dot{\varphi}$ ,
3. torus:  $\omega = \dot{\alpha} + \sin\psi \dot{\varphi}$ .

Równania znacznie się uproszczą jeśli dokonamy następującej zamiany zmiennych:

$$\gamma := \alpha + \beta, \quad \delta := \alpha - \beta, \quad x := \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda - \mu), \quad y := \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda + \mu).$$

Wówczas w przypadku sferycznym mamy:  $T = \frac{m}{2} G_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ , gdzie  $\{q^i\} = \{r, \varphi, \gamma, \delta, x, y\}$  i macierz  $[G_{ij}]$  jest postaci

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{G}^{kl}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{m} \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{G}^{kl}] = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{J(x^2+y^2)}{m} \cos^2\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{Jx^2}{m} \cos\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{Jy^2}{m} \cos\left(\frac{r}{R}\right) \\ \frac{Jx^2}{m} \cos\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{Jx^2}{m} & 0 \\ \frac{Jy^2}{m} \cos\left(\frac{r}{R}\right) & 0 & \frac{Jy^2}{m} \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z formalizmem kanonicznym:  $H = T + V$ , gdzie  $T = \frac{1}{2m} G^{ij} p_i p_j$ ,  $G_{ij} G^{jk} = \delta_i^k$ . Macierz  $G^{ij}$ , gdy współrzędne uogólnione są w następującym porządku:  $\{r, \varphi, \gamma, \delta, x, y\}$ , jest postaci:

$$(3.1) \quad [G^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{G}^{kl}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m}{J} \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{G}^{kl}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)} & -\frac{\cos\left(\frac{r}{R}\right)}{R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)} & -\frac{\cos\left(\frac{r}{R}\right)}{R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)} \\ -\frac{\cos\left(\frac{r}{R}\right)}{R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)} & \frac{m}{Jx^2} + \frac{1}{R^2} \cot^2\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{1}{R^2} \cot^2\left(\frac{r}{R}\right) \\ -\frac{\cos\left(\frac{r}{R}\right)}{R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)} & \frac{1}{R^2} \cot^2\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{m}{Jy^2} + \frac{1}{R^2} \cot^2\left(\frac{r}{R}\right) \end{bmatrix}.$$

W przypadku pseudosferycznym postępujemy analogicznie. Energia kinetyczna jest postaci:  $T = \frac{m}{2} G_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ , gdzie  $\{q^i\} = \{r, \varphi, \gamma, \delta, x, y\}$  i macierz  $[G_{ij}]$  gdy współrzędne uogólnione są w następującym

porządku:  $\{r, \varphi, \gamma, \delta, x, y\}$ , jest postaci:

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{G}_{kl}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{m} \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{G}_{kl}] = \begin{bmatrix} R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{J(x^2+y^2)}{m} \cosh^2\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{Jx^2}{m} \cosh\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{Jy^2}{m} \cosh\left(\frac{r}{R}\right) \\ \frac{Jx^2}{m} \cosh\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{Jx^2}{m} & 0 \\ \frac{Jy^2}{m} \cosh\left(\frac{r}{R}\right) & 0 & \frac{Jy^2}{m} \end{bmatrix}.$$

Jak poprzednio zgodnie z formalizmem kanonicznym:  $H = T + V$ , gdzie  $T = \frac{1}{2m} G^{ij} p_i p_j$ ,  $G_{ij} G^{jk} = \delta_i^k$ . Macierz  $G^{ij}$  jest postaci:

$$(3.2) \quad [G^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{G}^{kl}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m}{J} \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{G}^{kl}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)} & -\frac{\cosh\left(\frac{r}{R}\right)}{R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)} & -\frac{\cosh\left(\frac{r}{R}\right)}{R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)} \\ -\frac{\cosh\left(\frac{r}{R}\right)}{R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)} & \frac{m}{Jx^2} + \frac{1}{R^2} \cot^2\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{1}{R^2} \coth^2\left(\frac{r}{R}\right) \\ -\frac{\cosh\left(\frac{r}{R}\right)}{R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)} & \frac{1}{R^2} \coth^2\left(\frac{r}{R}\right) & \frac{m}{Jy^2} + \frac{1}{R^2} \cot^2\left(\frac{r}{R}\right) \end{bmatrix}.$$

Jak widać macierz 3.1 i macierz 3.2 wyglądają podobnie. Tam gdzie w przypadku sferycznym występują funkcje trygonometryczne w przypadku pseudo-sferycznym występują odpowiednie funkcje hiperboliczne, oczywiście z odpowiednim znakiem. Należy też pamiętać że  $r$  w przypadku pseudosferycznym przebiega  $r \in [0, \infty]$ , natomiast w przypadku sferycznym  $r \in [0, \pi R]$ .

Tak dane równania Hamiltona-Jakobiego  $H(q^a, \frac{\partial S}{\partial q^a}) = \frac{1}{2m} G^{ij} \frac{\partial S}{\partial q^i} \frac{\partial S}{\partial q^j} + V(q) = E$  będą separowalne dla potencjałów postaci:  $V(q) = V_r(r) + V_x(x) + V_y(y)$ . W przypadku torusa geometria jest bardziej skomplikowana. Torus nie jest przestrzenią o stałej krzywiznie jak sfera czy pseudosfera ale podrozmiernością algebraiczną czwartego rzędu w  $\mathbb{R}^3$ .

Jeśli współrzędne uogólnione są w następującym porządku  $[..q^i..] = [\psi, \varphi, \gamma, \delta, x, y]$  macierz  $[G_{ij}]$  dla torusa jest postaci:

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{G}_{kl}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{m} \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{G}^{kl}] = \begin{bmatrix} (R + \sin(\psi))^2 + \frac{J \sin^2(\psi)(x^2+y^2)}{m} & \frac{Jx^2 \sin(\psi)}{m} & \frac{Jy^2 \sin(\psi)}{m} \\ \frac{Jx^2 \sin(\psi)}{m} & \frac{Jx^2}{m} & 0 \\ \frac{Jy^2 \sin(\psi)}{m} & 0 & \frac{Jy^2}{m} \end{bmatrix}.$$

Energia kinetyczna w języku kanonicznym dana jest przez  $T = \frac{1}{2m} G^{ij} p_i p_j$ , gdzie otrzymana macierz  $[G^{ab}]$  jest postaci

$$[G^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{G}^{kl}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m}{J} \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{G}^{kl}] =$$

$$\begin{bmatrix} A & -A \sin \psi & -A \sin \psi \\ -A \sin \psi & \frac{m}{Jx^2} + A \sin^2 \psi & A \sin^2 \psi \\ -A \sin \psi & A \sin^2 \psi & \frac{m}{Jy^2} + A \sin^2 \psi \end{bmatrix}, \quad A = (R + r \cos \psi)^{-2}.$$

W przypadku torusa  $R$  i  $r$  są stałe (nie należy mylić  $r$  ze zmienną radialną w zagadnieniu sferycznym i pseudosferycznym). Równanie Hamiltona-Jacobiego

$H(q^a, \frac{\partial S}{\partial q^a}) = \frac{1}{2m} G^{ij} \frac{\partial S}{\partial q^i} \frac{\partial S}{\partial q^j} + V(q) = E$  będzie w pełni separowalne dla potencjałów typu  $V(q) = V_\psi(\psi) + V_x(x) + V_y(y)$ . Ze względu na niediagonalność macierzy  $[\tilde{G}^{kl}]$  w naturalnych współrzędnych trudno coś powiedzieć o najogólniejszym potencjale separowalnym.

Ostatecznie kinetyczna część Hamiltonianu w rozważanych przypadkach jest postaci:

1. Sfera:

$$T = \frac{p_r}{2m} + \frac{p_\varphi^2 - 2 \cos \frac{r}{R} p_\varphi (p_\gamma + p_\delta)}{2mR^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{\left( \frac{mR^2}{J} \sin^2 \frac{r}{R} + \cos^2 \frac{r}{R} \right) (p_\gamma + p_\delta)^2}{2mR^2 \sin^2 \frac{r}{R}} \\ + \frac{p_x^2}{2I} + \frac{p_y^2}{2I} + \frac{p_\gamma^2}{2Ix^2} + \frac{p_\delta^2}{2Iy^2}.$$

2. Pseudosfera:

$$T = \frac{p_r}{2m} + \frac{p_\varphi^2 - 2 \cosh \frac{r}{R} p_\varphi (p_\gamma + p_\delta)}{2mR^2 \sinh^2 \frac{r}{R}} + \frac{\left( \cosh^2 \frac{r}{R} \pm \frac{mR^2}{J} \sinh^2 \frac{r}{R} \right) (p_\gamma + p_\delta)^2}{2mR^2 \sinh^2 \frac{r}{R}} \\ + \frac{p_x^2}{2I} + \frac{p_y^2}{2I} + \frac{p_\gamma^2}{2Ix^2} + \frac{p_\delta^2}{2Iy^2}.$$

3. Torus:

$$T = \frac{p_\psi}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2 - 2 \sin \psi p_\varphi (p_\gamma + p_\delta)}{2m(R + r \cos \psi)^2} + \frac{\left(\frac{m}{J}(R + r \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi\right) (p_\gamma + p_\delta)^2}{2m(R + r \cos \psi)^2} \\ + \frac{p_x^2}{2I} + \frac{p_y^2}{2I} + \frac{p_\gamma^2}{2Ix^2} + \frac{p_\delta^2}{2Iy^2}.$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego:  $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$  można jak zwykle w przypadku stacjonarnym zredukować przez podstawienie:  $S = -Et + S_0(q)$ . Niezależne od czasu równanie Hamiltona-Jacobiego jest postaci:  $H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = E$ . Możemy je rozseparować  $S_0 = S_r(r) + S_\varphi(\varphi) + S_\gamma(\gamma) + S_\delta(\delta) + S_x(x) + S_y(y) = S_r(r) + l\varphi + C_\gamma\gamma + C_\delta\delta + S_x(x) + S_y(y)$  gdy  $\varphi, \gamma$  i  $\delta$  są cykliczne. W celu uproszczenia równań dokonajmy ponownej zamiany zmiennych:  $p_\gamma = \frac{1}{2}(p_\alpha + p_\beta)$  i  $p_\delta = \frac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)$ . Wówczas piszemy:  $S_0 = S_r(r) + S_\varphi(\varphi) + S_\gamma(\gamma) + S_\delta(\delta) + S_x(x) + S_y(y) = S_r(r) + l\varphi + C_\alpha\alpha + C_\beta\beta + S_x(x) + S_y(y)$ .

W przypadku sferycznym równanie Hamiltona-Jacobiego otrzymujemy w postaci:

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{(l - C_\alpha \cos \frac{r}{R})^2}{2mR^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + V(r) \\ + \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{(C_\alpha + C_\beta)^2}{8Ix^2} + V_x(x) + \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{(C_\alpha - C_\beta)^2}{8Iy^2} + V_y(y),$$

natomiast w przypadku pseudosferycznym równanie Hamiltona-Jacobiego wygląda podobnie, z funkcjami hiperbolicznymi zamiast trygonometrycznych:

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{(l - C_\alpha \cosh \frac{r}{R})^2}{2mR^2 \sinh^2 \frac{r}{R}} + V(r) \\ + \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{(C_\alpha + C_\beta)^2}{8Ix^2} + V_x(x) + \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{(C_\alpha - C_\beta)^2}{8Iy^2} + V_y(y).$$

W przypadku torusa mamy:  $S_0 = S_\psi(\psi) + S_\varphi(\varphi) + S_\gamma(\gamma) + S_\delta(\delta) + S_x(x) + S_y(y) = S_\psi(\psi) + l\varphi + C_\alpha\alpha + C_\beta\beta + S_x(x) + S_y(y)$ . Równanie Hamiltona-Jacobiego otrzymujemy w postaci:

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_\psi(\psi)}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{(l - C_\alpha \sin \psi)^2}{2m(R + r \cos \psi)^2} + V_\psi(\psi) + \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^2 \\ + \frac{(C_\alpha + C_\beta)^2}{8Ix^2} + V_x(x) + \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{(C_\alpha - C_\beta)^2}{8Iy^2} + V_y(y).$$

Teraz możemy przejść do obliczenia zmiennych działania. Dla rozpatrywanych przypadków  $\alpha, \beta$  and  $\delta$  są cykliczne. Związane z nimi zmienne działania są postaci:

$$\begin{aligned} J_\varphi &= \oint p_\varphi d\varphi = \oint \frac{\partial S_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} l d\varphi = 2\pi l \Rightarrow l = \frac{J_\varphi}{2\pi}, \\ J_\alpha &= \oint p_\alpha d\alpha = \oint \frac{\partial S_\alpha(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha = C_\alpha \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi C_\alpha \Rightarrow C_\alpha = \frac{J_\alpha}{2\pi}, \\ J_\beta &= \oint p_\beta d\beta = \oint \frac{\partial S_\beta(\beta)}{\partial \beta} d\beta = C_\beta \int_0^{2\pi} d\beta = 2\pi C_\beta \Rightarrow C_\beta = \frac{J_\beta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Teraz już możemy znacznie uprościć powyższe równania Hamiltona-Jacobiego podstawiając do nich  $J_\varphi, J_\alpha, J_\beta$ , a następnie obliczyć  $J_r, J_x, J_y$ . Stałe separacji  $C_x$  and  $C_y$  mają tę samą postać dla wszystkich powyższych przypadków:

$$C_x := \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_x}{\partial x} \right) + \frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{32\pi^2 I x^2} + V_x(x), \quad C_y := \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) + \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{32\pi^2 I y^2} + V_y(y).$$

Natomiast otrzymane zmienne działania  $J_r$  dla poszczególnych zagadnień są postaci:

1. sfera:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} J_r &= \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - C_x - C_y - V_r(r)) - \frac{(J_\varphi - J_\alpha \cos \frac{r}{R})^2}{4\pi^2 R^2 \sin^2 \frac{r}{R}}} dr, \\ J_x &= \oint p_x dx = \oint \sqrt{2I(C_x - V_x(x)) - \frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{16\pi^2 x^2}} dx, \\ J_y &= \oint p_y dy = \oint \sqrt{2I(C_y - V_y(y)) - \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{16\pi^2 y^2}} dy, \end{aligned}$$

2. pseudosfera:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} J_r &= \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - C_x - C_y - V_r(r)) - \frac{(J_\varphi - J_\alpha \cosh \frac{r}{R})^2}{4\pi^2 R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}}} dr, \\ J_x &= \oint p_x dx = \oint \sqrt{2I(C_x - V_x(x)) - \frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{16\pi^2 x^2}} dx, \\ J_y &= \oint p_y dy = \oint \sqrt{2I(C_y - V_y(y)) - \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{16\pi^2 y^2}} dy, \end{aligned}$$



3. torus:

$$J_\psi = \oint p_\psi d\psi = \oint \sqrt{2m(E - C_x - C_y - V_\psi(\psi)) - \frac{(J_\varphi - J_\alpha \sin \psi)^2}{4\pi^2(R + r \cos \psi)^2}} d\psi,$$

$$J_x = \oint p_x dx = \oint \sqrt{2I(C_x - V_x(x)) - \frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{16\pi^2 x^2}} dx,$$

$$J_y = \oint p_y dy = \oint \sqrt{2I(C_y - V_y(y)) - \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{16\pi^2 y^2}} dy.$$

W powyższych wzorach zakodowana jest dynamika problemu.

**3.1. Proponowane modele potencjałów na płaszczyźnie  $xy$ .** Istnieje klasa tzw. "potencjałów uniwersalnie separowalnych":  $V(x, y) = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{y^2} + C(x^2 + y^2)$ , gdzie  $A, B, C$  są stałe.

Są one separowalne dla wszystkich użytych poniżej układów współrzędnych:

1.  $V(x, y) = \frac{F}{y^2} + \frac{F}{4}(x^2 + y^2)$ , gdzie  $F$  jest stałe. Dla tak zaproponowanego potencjału otrzymujemy następujące zmienne działania:

$$J_x = -\sqrt{\frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{16}} - \pi C_x \sqrt{\frac{2I}{F}}, \quad J_y = -\pi C_y \sqrt{\frac{2I}{F}} - \pi \sqrt{2IF + \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{16\pi^2}}.$$

2. Jeśli na płaszczyźnie  $xy$  użyjemy zmiennych biegunowych:  $x = \zeta \sin \varepsilon$ ,  $y = \zeta \cos \varepsilon$ , wtedy separowalne potencjały będą postaci:  $V(\zeta, \varepsilon) = V_\zeta(\zeta) + \frac{V_\varepsilon(\varepsilon)}{\zeta^2 \sin^2(\varepsilon)}$ , a macierz  $[G^{ij}]$ , np. w przypadku sferycznym wyrazi się jak następuje gdy współrzędne uogólnione są w porządku  $[r, \varphi, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta]$ :

$$[G^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{G}^{kl}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{\zeta^2 J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m}{J} \end{bmatrix}$$

i

$$[\tilde{G}^{kl}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2 \sin^2(\frac{r}{R})} & \frac{-\cos(\frac{r}{R})}{R^2 \sin^2(\frac{r}{R})} & \frac{-\cos(\frac{r}{R})}{R^2 \sin^2(\frac{r}{R})} \\ \frac{-\cos(\frac{r}{R})}{R^2 \sin^2(\frac{r}{R})} & \rho + \frac{\cot^2(\frac{r}{R})}{R^2} & \frac{1}{R^2} \cot^2(\frac{r}{R}) \\ \frac{-\cos(\frac{r}{R})}{R^2 \sin^2(\frac{r}{R})} & \frac{1}{R^2} \cot^2(\frac{r}{R}) & \rho + \frac{\cot^2(\frac{r}{R})}{R^2} \end{bmatrix}.$$

gdzie  $\wp := \frac{m}{J(\varsigma \cos \varepsilon)^2}$ . Jedyne we wzorach: 3.3 , 3.4 zamiast  $-C_x - C_y$  pojawi się stała separacji  $C$

$$C = \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_\varsigma}{\partial \varsigma} \right)^2 + \frac{1}{2I\varsigma^2} \left( \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{8\pi^2 I \varsigma^2 (\sin 2\varepsilon)} + V_{\varsigma\varepsilon}(\varsigma, \varepsilon),$$

Potencjał  $V_{\varsigma\varepsilon}(\varsigma, \varepsilon)$  przyjmijmy postaci  $V_\varsigma(\varsigma) + \frac{V_\varepsilon(\varepsilon)}{\varsigma^2}$  Wprowadźmy jeszcze jedną stałą separacji  $A$

$$A := \frac{1}{2I} \left( \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{8\pi^2 I (\sin 2\varepsilon)} + V_\varepsilon(\varepsilon),$$

Otrzymujemy wówczas następujące zmienne działania:

$$J_\varepsilon = \oint \sqrt{2I(A - V_\varepsilon(\varepsilon)) - \frac{(J_\alpha^2 + 2 \cos(2\varepsilon)J_\alpha J_\beta + J_\beta^2)}{4\pi^2 R^2 \sin^2(2\varepsilon)}} d\varepsilon,$$

$$J_\varsigma = \oint \sqrt{2I(C - V_\varsigma(\varsigma)) - \frac{2IA}{\varsigma^2}} d\varsigma,$$

Jako  $V_\varepsilon(\varepsilon)$  proponuję:  $V_\varepsilon(\varepsilon) = \hat{\gamma} \cot^2(2\varepsilon)$ ; wówczas otrzymujemy zmienną działania odpowiednio postaci:

$$J_\varepsilon = \frac{1}{4} \left( 4\sqrt{2I(A + \hat{\gamma})}\pi - \sqrt{8I\hat{\gamma}\pi^2 + (J_\alpha - J_\beta)^2} - \sqrt{8I\hat{\gamma}\pi^2 + (J_\alpha + J_\beta)^2} \right)$$

Można też przyjąć :  $V_\varepsilon(\varepsilon) = \hat{\gamma} \frac{\cos(2\varepsilon)}{\sin^2(2\varepsilon)}$  wówczas otrzymujemy zmienną działania:

$$J_\varepsilon = \frac{1}{4} \left( 4\sqrt{2IA}\pi - \sqrt{8I\hat{\gamma}\pi^2 + (J_\alpha - J_\beta)^2} - \sqrt{-8I\hat{\gamma}\pi^2 + (J_\alpha + J_\beta)^2} \right).$$

Przyjmując :  $V_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{\tilde{\gamma}}{\sin^2(2\varepsilon)}$  otrzymujemy zmienną działania w postaci:

$$J_\varepsilon = \frac{1}{4} \left( 4\sqrt{2}\sqrt{IA}\pi - \sqrt{8I\tilde{\gamma}\pi^2 + (J_\alpha - J_\beta)^2} - \sqrt{8I\tilde{\gamma}\pi^2 + (J_\alpha + J_\beta)^2} \right)$$

Jako  $V_\varsigma(\varsigma)$  proponuję:  $V_\varsigma(\varsigma) = \frac{\tilde{\gamma}}{\varsigma}$  wówczas otrzymuję:  $J_\varsigma = \sqrt{2} \left( -2\sqrt{IA} + \frac{\sqrt{I\tilde{\gamma}}}{\sqrt{-C}} \right) \pi$ , a  $C = -C_x - C_y$  więc

$$J_\varsigma = \sqrt{2} \left( -2\sqrt{IA} + \frac{\sqrt{I\tilde{\gamma}}}{\sqrt{C_x + C_y}} \right) \pi.$$

**3.2. Model potencjału  $V_r(r)$ .** Aby jawnie obliczyć  $J_r$  proponuję aby potencjał był zależny jakoś związany z geometrią rozmaitości w której porusza się ciało.  $\det[g^{ij}]$  jest skalarną gęstością o wadze  $-2$ . Jest też ciekawym obiektem geometrycznym. Sugeruję więc potencjały postaci:

$$V_r(r) = f(r)\det[g^{ij}].$$

W przypadku sferycznym gdzie  $\det[g^{ij}] = \frac{1}{R^2 \sin^2(\frac{r}{R})}$  proponuję  $f(r) = R^2 \cos^2(\frac{r}{R})$  stąd

$$V_r(r) = \frac{\cos^2(\frac{r}{R})}{\sin^2(\frac{r}{R})} = \cot^2(\frac{r}{R}).$$

Otrzymane  $J_r$  3.3 jest postaci:

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_x - C_y + 1) + J_\alpha^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi - J_\alpha)^2}.$$

Możemy też zaproponować funkcję  $f$  innej postaci np.:  $f(r) = R^2 \gamma \cos(\frac{r}{R})$ . Wówczas potencjał przyjmie postać :

$$V_r(r) = \frac{\gamma \cos(\frac{r}{R})}{\sin^2(\frac{r}{R})},$$

a zmienna działania

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_x - C_y) + J_\alpha^2} - \frac{1}{2}\sqrt{-2m4\pi^2 R^2 \gamma + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2 \gamma + (J_\varphi - J_\alpha)^2}.$$

Jeśli przyjmą  $f(r) = R^2 \gamma$ , to

$$V_r(r) = \frac{\gamma}{\sin^2(\frac{r}{R})},$$

a zmienna działania przyjmie postać :

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_x - C_y) + J_\alpha^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2 \gamma + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2 \gamma + (J_\varphi - J_\alpha)^2}.$$

Gdy nie ma potencjału,  $V_r(r) = 0$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} J_r &= \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_x - C_y) + J_\alpha^2} - \frac{1}{2}|J_\varphi - J_\alpha| - \frac{1}{2}|J_\varphi + J_\alpha| = \\ &= |J_\varphi \geq |J_\alpha|| = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_x - C_y) + J_\alpha^2} - J_\varphi. \end{aligned}$$

W przypadku pseudosferycznym gdy  $\det[g^{ij}] = \frac{1}{R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})}$  proponuję by przyjąć  $f(r) = \cosh^2(\frac{r}{R})$

$\Rightarrow V_r(r) = \frac{\cosh^2(\frac{r}{R})}{R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})} = \frac{1}{R^2} \coth^2(\frac{r}{R})$ . Otrzymujemy  $J_r$  3.4 w postaci:

$$\begin{aligned} J_r &= -\sqrt{2m4\pi^2 R^2(\frac{1}{R^2} - E + C_x + C_y) + J_\alpha^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 + (J_\varphi - J_\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Możemy też zaproponować funkcję  $f$  innej postaci np.:  $f(r) = \gamma \cosh(\frac{r}{R})$  wówczas potencjał przyjmie postać:

$$V_r(r) = \frac{\gamma \cosh(\frac{r}{R})}{R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})},$$

a zmienna działania

$$\begin{aligned} J_r &= -\sqrt{2m4\pi^2 R^2(-E + C_x + C_y) + J_\alpha^2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2m4\pi^2 \gamma + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 \gamma + (J_\varphi - J_\beta)^2}. \end{aligned}$$

Jeśli przyjąć  $f(r) = \gamma$ , wtedy

$$V(r) = \frac{\gamma}{R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})},$$

a zmienna działania przyjmie postać :

$$\begin{aligned} J_r &= -\sqrt{2m4\pi^2 R^2(-E + C_x + C_y) + J_\alpha^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 \gamma + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 \gamma + (J_\varphi - J_\alpha)^2}. \end{aligned}$$

**3.3. Energia wyrażona w zmiennych działanie.** Mając już klasę potencjałów, przy których obliczone zostały zmienne działania, wyrażmy energię w tychże zmiennych. Możemy wypisać wiele równań na energię kombinując ze sobą zmienne działania otrzymane dla różnych potencjałów. Przedstawimy więc jedynie te najciekawsze:

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= \frac{F}{y^2} + \frac{F}{4}(x^2 + y^2) \rightarrow J_x = -\sqrt{\frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{16}} - \pi C_x \sqrt{\frac{2I}{F}}, \\
&\rightarrow J_y = -\pi C_y \sqrt{\frac{2I}{F}} - \pi \sqrt{2IF + \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{16\pi^2}}
\end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned}
C_x &= \left( -J_x - \sqrt{\frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{16}} \right) \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{F}{I}}, \\
C_y &= \left( -J_y - \pi \sqrt{\left( 2IF + \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{16\pi^2} \right)} \right) \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{F}{I}}.
\end{aligned}$$

Dla przypadku sferycznego, przyjmując odpowiedni potencjał otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
V_r(r) &= \cot^2\left(\frac{r}{R}\right) \rightarrow J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2 (E - C_x - C_y + 1) + J_\alpha^2} - \\
&\frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi + J_\alpha)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi - J_\alpha)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \left( -J_x - \sqrt{\frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{16}} - J_y - \pi \sqrt{\left( 2IF + \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{16\pi^2} \right)} \right) \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{F}{I}} \\
&+ \frac{\left( J_r + \frac{1}{2} \sqrt{(8m\pi^2 R^2 + (J_\varphi + J_\alpha)^2)} + \frac{1}{2} \sqrt{(8m\pi^2 R^2 + (J_\varphi - J_\alpha)^2)} \right)^2}{8m\pi^2 R^2} \\
&- 1 - \frac{J_\alpha^2}{8m\pi^2 R^2}.
\end{aligned}$$

Wykorzystując te same zmienne działania  $J_x = -\sqrt{\frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{16}} - \pi C_x \sqrt{\frac{2I}{F}}$  i  $J_y = -\pi C_y \sqrt{\frac{2I}{F}} - \pi \sqrt{2IF + \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{16\pi^2}}$  w przypadku pseudosferycznym pod działaniem potencjału  $V_r(r) = \frac{1}{R^2} \coth^2\left(\frac{r}{R}\right)$  gdzie

$$\begin{aligned}
J_r &= -\sqrt{2m4\pi^2 R^2 \left( \frac{1}{R^2} - E + C_x + C_y \right) + J_\alpha^2} + \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\
&+ \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 + (J_\varphi - J_\alpha)^2}.
\end{aligned}$$

otrzymujemy  $E$  postaci:

$$E = \left( -J_x - \frac{1}{4} \sqrt{((J_\alpha + J_\beta)^2)} - J_y - \frac{1}{4} \pi \sqrt{\left( 32IF + \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{\pi^2} \right)} \right) \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\left( \frac{I}{F} \right)}} \\ - \frac{\left( -J_r + \frac{1}{2} \sqrt{(8m\pi^2 + (J_\varphi + J_\alpha)^2)} + \frac{1}{2} \sqrt{(8m\pi^2 + (J_\varphi - J_\alpha)^2)} \right)^2}{8m\pi^2 R^2} \\ + \frac{1}{R^2} + \frac{J_\alpha^2}{8m\pi^2 R^2}$$

W przypadku sferycznym możemy jeszcze rozpatrywać ruch bez potencjału. Dla tych samych

$$J_x = -\sqrt{\frac{(J_\alpha + J_\beta)^2}{16}} - \pi C_x \sqrt{\frac{2I}{F}} \text{ i } J_y = -\pi C_y \sqrt{\frac{2I}{F}} - \pi \sqrt{2IF + \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{16\pi^2}} \text{ gdy } V_r(r) = 0 \text{ (} J_\varphi \geq |J_\alpha| \text{) a}$$

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2 (E - C_x - C_y) + J_\alpha^2 - J_\varphi}$$

otrzymujemy  $E$  postaci:

$$E = \left( -J_x - \frac{1}{4} \sqrt{((J_\alpha + J_\beta)^2)} - J_y - \frac{1}{4} \pi \sqrt{\left( 32IF + \frac{(J_\alpha - J_\beta)^2}{\pi^2} \right)} \right) \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\left( \frac{I}{F} \right)}} \\ - \frac{(J_r + J_\varphi)^2 - \frac{1}{8} J_\alpha^2}{2m4\pi^2 R^2}$$

Jak więc widać otrzymane wzory są dość długie.

#### 4. Model ciała jednorodnie deformowalnego nieściśliwego

Niezmiernie interesującym zagadnieniem jest dwuwymiarowy model ciała nieściśliwego obdarzonego wysoką symetrią [32]. Przykładem takiego ciała jest kropla tłuszczu na powierzchni wody, lub też płama nafty na powierzchni oceanu. Aby opisać takie zagadnienie nie nakładamy żadnych dodatkowych więzów na  $e_A^i$ . Tak jak poprzednio energię postulujemy postaci ([66][67][65]):

$$(4.1) \quad T = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{De_A^i}{Dt} \frac{De_B^j}{Dt} J^{AB} = T_{tr} + T_{int}.$$

Po położeniu,

$$(4.2) \quad e_A = E_B \varphi_A^B \text{ gdzie } \varphi_B^A = U_C^A D_D^C [V^{-1}]_B^D,$$

otrzymujemy energię sprzężoną z wewnętrznymi stopniami swobody w postaci

$$T_{int} = \frac{1}{2} \delta_{MN} \varphi_k^M \varphi_l^N \Lambda_A^k \Lambda_B^l J^{AB},$$

gdzie jak poprzednio  $\Lambda = (\varphi^{-1})_F^A \Gamma_{DC}^F \varphi_B^D \varphi_G^C v^G + (\varphi^{-1})_C^A \frac{d\varphi_B^C}{dt}$ ,  $v^E = e_i^E \frac{dx^i}{dt}$ . Tensor bezwładności jest izotropowy:  $J = J I_{dn}$ . Po przeliczeniu otrzymujemy  $T_{int}$  postaci:

$$(4.3) \quad T_{int} = -\frac{I}{2} \text{tr} (D^2 \chi^2) - \frac{I}{2} \text{tr} (D^2 \vartheta^2) - I \text{tr} (D\chi D\vartheta) + \frac{I}{2} \text{tr} \left( \left( \frac{dD}{dt} \right)^2 \right),$$

Interesuje nas przypadek nieściśliwy. Jak w poprzednim rozdziale prędkości kątowe  $\chi$ ,  $\vartheta$  ([28]-[32]) zapisujemy jako  $\chi\epsilon$ ,  $\vartheta\epsilon$  gdzie  $\epsilon := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Używamy rozkładu dwubiegunowego:  $U = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ ,  $V = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$ . Tym razem jednak macierz  $D$  opisująca deformację przyjmie postać:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix},$$

a więc gdy  $\lambda$  dąży do nieskończoności wówczas  $\frac{1}{\lambda}$  zbiega do 0. Zapobiega to więc ściśnięciu kropli do punktu. Uwzględniając powyższe wewnętrzną część energii kinetycznej otrzymujemy postaci:

$$(4.4) \quad T_{int} = \frac{1}{2\lambda^4} (J(\lambda^2(\chi^2 + \vartheta^2) + \lambda^6(\chi^2 + \vartheta^2) + \dot{\lambda}^2 + \lambda^4(-4\chi\vartheta + \dot{\lambda}^2))).$$

Przyjmijmy element metryczny na przestrzeni konfiguracyjnej w postaci:

1. na sferze  $r \in [0, \pi R)$   $ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) d\varphi^2$ ,
2. na pseudosferze  $r \in [0, \infty)$   $ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right) d\varphi^2$ ,
3. na torusie  $r, R = \text{constans}$   $ds^2 = (R + r \sin \psi)^2 d\varphi^2 + r^2 d\psi^2$ .

Energię kinetyczną zapisujemy postaci:

$$T = \frac{m}{2} G_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}, \text{ gdzie } \{q^i\} = \{r, \varphi, \gamma, \delta, \lambda\},$$

natomiast Lagrangian ma zwykłą potencjalną postać:  $L = T - V$ . Potencjał  $V$  zależy od współrzędnych uogólnionych. Energia związana z ruchem translacyjnym wyraża się znanymi wzorami:

1. sfera:

$$(4.5) \quad T_{tr} = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right),$$

## 2. pseudosfera

$$(4.6) \quad T_{tr} = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right),$$

## 3. torus

$$T_{tr} = \frac{m}{2} \left( (R + r \cos \psi)^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right)$$

Zgodnie z formalizmem kanonicznym:  $T = \frac{1}{2m} G^{ij} p_i p_j$ ,  $H = T - V$ , gdzie  $G_{ij} G^{jk} = \delta_i^k$ . Macierz  $G^{jk}$  odwracamy i otrzymujemy  $G_{ij}$ , tj.  $G_{ij} G^{jk} = \delta_i^k$ . Otrzymujemy Hamiltonian postaci:

## 1. na sferze:

$$(4.7) \quad T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{((p_\gamma + p_\delta) \cos(\frac{r}{R}) - p_\varphi^2)^2}{2mR^2 \sin^2(\frac{r}{R})} + \frac{p_\gamma^2 \lambda^2}{J(1 - \lambda^2)^2} \\ + \frac{p_\delta^2 \lambda^2}{J(1 + \lambda^2)^2} + \frac{p_\lambda^2 \lambda^4}{2J(1 + \lambda^4)},$$

## 2. pseudo-sferze:

$$(4.8) \quad T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{((p_\gamma + p_\delta) \cosh(\frac{r}{R}) - p_\varphi^2)^2}{2mR^2 \sinh^2(\frac{r}{R})} + \frac{p_\gamma^2 \lambda^2}{J(1 - \lambda^2)^2} \\ + \frac{p_\delta^2 \lambda^2}{J(1 + \lambda^2)^2} + \frac{p_\lambda^2 \lambda^4}{2J(1 + \lambda^4)}$$

## 3. na torusie:

$$(4.9) \quad T = \frac{p_\psi^2}{2mr^2} + \frac{(\sin \psi (p_\gamma + p_\delta) - p_\varphi^2)^2}{2m(R + r \cos \psi)^2} + \frac{p_\gamma^2 \lambda^2}{J(1 - \lambda^2)^2} \\ + \frac{p_\delta^2 \lambda^2}{J(1 + \lambda^2)^2} + \frac{p_\lambda^2 \lambda^4}{2J(1 + \lambda^4)}.$$

Hamiltonian postaci:  $H \left( q^a, \frac{\partial S}{\partial q^a} \right) = \frac{1}{2m} G^{ij} \frac{\partial S}{\partial q^i} \frac{\partial S}{\partial q^j} + V(q) = E$  jest separowalny dla potencjałów typu  $V(q) = V_r(r) + V_\lambda(\lambda)$  i odpowiednio w przypadku torusa  $V(q) = V_\psi(\psi) + V_\lambda(\lambda)$ . Mając takie potencjały możemy otrzymać zmienne działania. Stosujemy tę samą procedurę co w poprzednich rozdziałach, a więc w telegraficznym skrócie:  $\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) = 0$  możemy uprościć przyjmując:  $S = -Et + S_0(q)$ . Równanie będzie separowalne gdy  $\varphi, \gamma$  and  $\delta$  będą cykliczne. W przypadku



stacjonarnym:  $H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = E$ ,  $S_0 = S_r(r) + l\varphi + C_\gamma\gamma + C_\delta\delta + S_\lambda(\lambda)$ . Połóżmy  $p_\gamma = \frac{1}{2}(p_\alpha + p_\beta)$  i  $p_\delta = \frac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)$ , wtedy  $S_0 = S_r(r) + l\varphi + C_\alpha\alpha + C_\beta\beta + S_\lambda(\lambda)$ . Ostatecznie równanie Hamiltona-Jacobiego jest postaci:

1) sfera

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 - \frac{(l - (C_\alpha + C_\beta) \cos(\frac{r}{R}))^2}{2mR^2 \sin^2(\frac{r}{R})} + V(r) \\ + \frac{C_\gamma^2 \lambda^2}{J(1 - \lambda^2)^2} + \frac{C_\delta^2 \lambda^2}{J(1 + \lambda^2)^2} + \left( \frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{\lambda^4}{2J(1 + \lambda^4)} + V(\lambda),$$

2) pseudo-sfera

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 - \frac{(l - (C_\alpha + C_\beta) \cosh(\frac{r}{R}))^2}{2mR^2 \sinh^2(\frac{r}{R})} + V(r) \\ + \frac{C_\gamma^2 \lambda^2}{J(1 - \lambda^2)^2} + \frac{C_\delta^2 \lambda^2}{J(1 + \lambda^2)^2} + \left( \frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{\lambda^4}{2J(1 + \lambda^4)} + V(\lambda).$$

3) torus (oczywiście tu mamy zamiast  $S(r)$   $S(\psi)$ )

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_\psi(\psi)}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{(l - (C_\alpha + C_\beta) \sin \psi)^2}{2m(R + r \cos \psi)^2} + V_\psi(\psi) \\ + \frac{C_\gamma^2 \lambda^2}{J(1 - \lambda^2)^2} + \frac{C_\delta^2 \lambda^2}{J(1 + \lambda^2)^2} + \left( \frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{\lambda^4}{2J(1 + \lambda^4)} + V(\lambda).$$

Z powyższych wzorów na energię możemy odseparować część opisującą deformację. Będzie ona równa stałej  $C_\lambda$ :

$$(4.11) \quad C_\lambda = \frac{C_\gamma^2 \lambda^2}{J(1 - \lambda^2)^2} + \frac{C_\delta^2 \lambda^2}{J(1 + \lambda^2)^2} + \left( \frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{\lambda^4}{2J(1 + \lambda^4)} + V(\lambda)$$

Zmienna działania jest postaci  $J_q = \int_0^{2\pi} p_q dq$  gdzie  $p_q = \frac{\partial S}{\partial q^i}$ , stąd odpowiednio dla zmiennych cyklicznych otrzymujemy:

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = l \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi l, \quad J_\alpha = \oint p_\alpha d\alpha = C_\alpha \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi C_\alpha.$$

Następnie podstawiając  $J_\alpha$ ,  $J_\beta$  i  $J_\varphi$  do 6.6 otrzymujemy stałą separacji taką samą dla wszystkich dyskutowanych przypadków:

$$C_\lambda = \frac{J_\gamma^2 \lambda^2}{J_4 \pi^2 (1 - \lambda^2)^2} + \frac{J_\delta^2 \lambda^2}{J_4 \pi^2 (1 + \lambda^2)^2} + \left( \frac{dS_\lambda}{d\lambda} \right)^2 \frac{\lambda^4}{2J(1 + \lambda^4)} + V_\lambda(\lambda).$$

Zmienne działania wyrażają się w poszczególnych przypadkach jak następuje:

1) sfera

$$(4.12) \quad J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - C_\lambda - V_r(r)) - \frac{(l - (J_\alpha + J_\beta) \cos(\frac{r}{R}))^2}{4\pi^2 R^2 \sin^2(\frac{r}{R})}} dr$$

$$(4.13) \quad J_\lambda = \oint \sqrt{2I(C_\lambda - V_\lambda(\lambda)) \frac{2J(1 + \lambda^4)}{\lambda^4} - \frac{J_\gamma^2 2J(1 + \lambda^4)}{J_4 \pi^2 (1 - \lambda^2)^2 \lambda^2} - \frac{J_\delta^2 2J(1 + \lambda^4)}{J_4 \pi^2 (1 + \lambda^2)^2 \lambda^2}} d\lambda.$$

2) pseudo-sfera

$$(4.14) \quad J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - C_\lambda - V_r(r)) - \frac{(l - (J_\alpha + J_\beta) \cosh(\frac{r}{R}))^2}{4\pi^2 R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})}} dr$$

$$(4.15) \quad J_\lambda = \oint \sqrt{2I(C_\lambda - V_\lambda(\lambda)) \frac{2J(1 + \lambda^4)}{\lambda^4} - \frac{J_\gamma^2 2J(1 + \lambda^4)}{J_4 \pi^2 (1 - \lambda^2)^2 \lambda^2} - \frac{J_\delta^2 2J(1 + \lambda^4)}{J_4 \pi^2 (1 + \lambda^2)^2 \lambda^2}} d\lambda.$$

3) torus

$$(4.16) \quad J_\psi = \oint p_\psi d\psi = \oint \sqrt{2m(E - C_\lambda - V_\psi(\psi)) - \frac{(J_\varphi - (J_\alpha + J_\beta) \sin \psi)^2}{4\pi^2 (R + r \cos \psi)^2}} d\psi,$$

$$(4.17) \quad J_\lambda = \oint \sqrt{2I(C_\lambda - V_\lambda(\lambda)) \frac{2J(1 + \lambda^4)}{\lambda^4} - \frac{J_\gamma^2 2J(1 + \lambda^4)}{J_4 \pi^2 (1 - \lambda^2)^2 \lambda^2} - \frac{J_\delta^2 2J(1 + \lambda^4)}{J_4 \pi^2 (1 + \lambda^2)^2 \lambda^2}} d\lambda.$$

Zauważmy, że o ile  $J_r$  w obu przypadkach (tj. ściśliwym dyskutowanym w poprzednim rozdziale i nieściśliwym) ma tę samą postać, to  $J_\lambda$  jeśli porównamy z  $J_x$ ,  $J_y$  z poprzedniego rozdziału ma postać bardziej skomplikowaną. Można ją jednak obliczyć przy pomocy trudnych procedur opartych na całkach eliptycznych.

### 5. Afinicznie niezmienniczy model energii kinetycznej.

W poprzednim rozdziale proponowaliśmy model energii kinetycznej [28] niezmienniczy względem  $g$ -grupy izometrii działającej w przestrzeni stycznej i względem grupy ortogonalnej działającej w przestrzeni mikromaterialnej  $\mathbb{R}^n$ .

Niezmiernie interesujące są zagadnienia, gdy model energii kinetycznej jest afinicznie niezmienniczy [32][str. 16]:

$$(5.1) \quad T_{int} = \frac{A}{2} Tr [\Omega^2] + \frac{B}{2} (Tr [\Omega])^2,$$

gdzie  $A, B$  są stałe. Jednak pełną energię kinetyczną zapostulujemy jak poprzednio w postaci sumy:  $T = T_{tr} + T_{int}$ , gdzie  $T_{tr}$  to część związana z ruchem translacyjnym, zaś  $T_{int}$  to część "wewnętrzna" energii związana z wewnętrznymi stopniami swobody. Obejmuje ona ruch obrotowy i deformacje. Przypomnijmy, że energia związana z ruchem translacyjnym ma postać:

1. sfera:  $T_{tr} = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)$ ,  $r \in [0, \pi R]$ ,
2. pseudo-sfera:  $T_{tr} = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)$ ,  $r \in [0, \infty]$ ,
3. torus:  $T_{tr} = \frac{m}{2} \left( (R + r \cos \psi)^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right)$   $R, r$  są stałe.

Rozważamy zagadnienia podwójnie izotropowe, a więc używamy rozkładu dwubiegunowego  $(\varphi^B_A = R^B_C D^C_K (V^{-1})^K_A)$ . Użyjmy jednak zmodyfikowanych zmiennych aby łatwiej było nam rozseparować problem:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} e^{\lambda-\mu} & 0 \\ 0 & e^{\lambda+\mu} \end{bmatrix}.$$

Współrzedne stowarzyszone prędkość afinicznej  $\Omega$  zdefiniowane wzorem:  $\frac{D e_B^A}{Dt} := e_A \Omega_B^A$ , otrzymujemy w postaci:  $\Omega^A_B = (\varphi^{-1})^A_F \Gamma^F_{DC} \varphi^D_B \varphi^C_G v^G + (\varphi^{-1})^A_C \dot{\varphi}^C_B$ . Podstawiając jawnie

$$(\varphi^B_A = R^B_C D^C_K (V^{-1})^K_A)$$

do powyższego wzoru obliczamy  $\Omega$  równe:

$$\begin{bmatrix} \lambda - \omega \sin(2\beta) \sinh(2\mu) + \cos(2\beta) \dot{\mu} & \sin(2\beta) \dot{\mu} - \omega (\cosh(2\mu) - \cos(2\beta) \sinh(2\mu)) + \dot{\beta} \\ \omega (\cosh(2\mu) - \cos(2\beta) \sinh(2\mu)) - \dot{\beta} + \sin(2\beta) \dot{\mu} & \lambda - \omega \sin(2\beta) \sinh(2\mu) - \cos(2\beta) \dot{\mu} \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu część energii związaną z wewnętrznymi stopniami swobody otrzymujemy postaci:

$$T_{int} = -a\omega^2 + 2a\cos(2\mu)\omega\dot{\beta} - a\dot{\beta}^2 + (a + 2b)\dot{\lambda}^2 + a\dot{\mu}^2,$$

gdzie  $\omega$  wyraża się jak poprzednio:

1. sfera:  $\omega = \dot{\alpha} + \cos\left(\frac{r}{R}\right)\dot{\varphi}$ ,
2. pseudo-sfera:  $\omega = \dot{\alpha} + \cosh\left(\frac{r}{R}\right)\dot{\varphi}$ ,
3. torus:  $\omega = \dot{\alpha} + \sin\psi\dot{\varphi}$ .

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy pełną energię kinetyczną dla poszczególnych przypadków postaci:

1. sfera:

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sin^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) + (A) \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 + (A + 2B) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \\ & A \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 + 2A \cosh(2\mu) \left( \frac{d\beta}{dt} \right) \left( \frac{d\alpha}{dt} + \cos \left( \frac{r}{R} \right) \frac{d\varphi}{dt} \right) - \\ & A \left( \frac{d\alpha}{dt} + \cos \left( \frac{r}{R} \right) \frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \end{aligned}$$

2. pseudo-sfera:

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + R^2 \sinh^2 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) + (A) \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 + (A + 2B) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \\ & A \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 + 2A \cosh(2\mu) \left( \frac{d\beta}{dt} \right) \left( \frac{d\alpha}{dt} + \cosh \left( \frac{r}{R} \right) \frac{d\varphi}{dt} \right) - \\ & A \left( \frac{d\alpha}{dt} + \cosh \left( \frac{r}{R} \right) \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

3. torus:

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} \left( (R + r \cos \psi)^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right) + (A) \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 + (A + 2B) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \\ & A \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 + 2A \cosh(2\mu) \left( \frac{d\beta}{dt} \right) \left( \frac{d\alpha}{dt} + \cosh(\psi) \frac{d\varphi}{dt} \right) - \\ & A \left( \frac{d\alpha}{dt} + \cosh(\psi) \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Jak zwykle energia kinetyczna ma postać:

$$T = \frac{m}{2} G_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad \text{gdzie} \quad \{q^i\} = \{r, \varphi, \alpha, \beta, \lambda, \mu\},$$

gdzie  $G$  interpretujemy jako tensor metryczny przestrzeni konfiguracyjnej. Elementy macierzowe  $G_{ij}$  są współczynnikami przy iloczynach prędkości uogólnionych. Następnie dokonujemy transformacji Legendrea. W naszym przypadku po przedstawieniu w postaci macierzowej  $\frac{1}{2m} G_{ij} v^i v^j$  transformacja ta sprowadza się do odwrócenia macierzy  $G_{ij}$ . Hamiltonian jest postaci:  $H = \frac{1}{2m} G^{ij} p_i p_j + V$ , gdzie  $G_{ij} G^{jk} = \delta_i^k$ . Otrzymany Hamiltonian (jego część kinetyczna) jest postaci dla poszczególnych przypadków:

1. sfera:

$$T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{(p_\varphi - \cos\left(\frac{r}{R}\right) p_\alpha)^2}{2mR^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)} + \frac{p_\alpha^2 + 2 \cosh(2\mu) p_\alpha p_\beta + p_\beta^2}{4A \sinh(2\mu)} + \frac{p_\lambda^2}{4(A+2B)} + \frac{p_\mu^2}{4A},$$

2. pseudo-sfera:

$$T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{(p_\varphi - \cosh\left(\frac{r}{R}\right) p_\alpha)^2}{2mR^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)} + \frac{p_\alpha^2 + 2 \cosh(2\mu) p_\alpha p_\beta + p_\beta^2}{4A \sinh(2\mu)} + \frac{p_\lambda^2}{4(A+2B)} + \frac{p_\mu^2}{4A}.$$

3. torus:

$$T = \frac{p_\psi^2}{2mr^2} + \frac{(p_\varphi - \sin(\psi) p_\alpha)^2}{2mR^2 (R + r \cos \psi)^2} + \frac{p_\alpha^2 + 2 \cosh(2\mu) p_\alpha p_\beta + p_\beta^2}{4A \sinh(2\mu)} + \frac{p_\lambda^2}{4(A+2B)} + \frac{p_\mu^2}{4A}.$$

Niezależne od czasu równanie Hamiltona-Jacobiego:

$$H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = E.$$

możemy rozseparować przez podstawienie

$$\begin{aligned} S_0 &= S_r(r) + S_\varphi(\varphi) + S_\alpha(\alpha) + S_\beta(\beta) + S_\lambda(\lambda) + S_\mu(\mu) \\ &= S_r(r) + l\varphi + C_\alpha\alpha + C_\beta\beta + S_\lambda(\lambda) + S_\mu(\mu), \end{aligned}$$

jeśli w potencjale zmienne  $\varphi$ ,  $\alpha$  i  $\beta$  są też cykliczne i postulujemy potencjał postaci  $V(r) + V(\mu) + V(\lambda)$  dla sfery i pseudosfery lub  $V(\psi) + V(\mu) + V(\lambda)$  dla torusa.

**Dygresja:** W powyższych wyrażeniach na energię kinetyczną nie występuje zmienna  $\lambda$ ; jest cykliczna w  $T$ . Jeśli  $V(\lambda) = 0$ , jest ona cykliczna dla pełnego Hamiltonianu i  $p_\lambda$  jest stałą ruchu. Jednakże  $\det[D] = \exp(2\lambda)$ , więc ciało mógłby rozszerzać się do nieskończoności lub skurczyć się do punktu. Jeśli wartość początkowa prędkości uogólnionej  $\dot{\lambda}$  znika, to  $\lambda$  byłaby stała, ale takie rozwiązanie jest wykładniczo niestabilne. Dlatego  $V_\lambda(\lambda)$  należy przyjąć w postaci stabilizującej ruch dylatacyjny, lub też nałożyć dodatkowo więzy nieściśliwości, co jest zresztą skrajną asymptotyczną postacią tej stabilizacji.

W przypadku sferycznym równanie Hamiltona-Jacobiego otrzymujemy postaci:

$$(5.2) \quad E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{(l - C_\alpha \cos(\frac{r}{R}))^2}{2mR^2 \sin^2(\frac{r}{R})} + V(r) +$$

$$\frac{C_\alpha^2 + 2 \cosh(2\mu) C_\alpha C_\beta + C_\beta^2}{4A \sinh(2\mu)} + \frac{1}{4A} \left( \frac{\partial S_\mu(\mu)}{\partial \mu} \right)^2 + V_\mu(\mu) +$$

$$(5.3) \quad \frac{1}{4(A + 2B)} \left( \frac{\partial S_\lambda(\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 + V_\lambda(\lambda),$$

natomiast w przypadku pseudosferycznym równanie Hamiltona-Jacobiego otrzymujemy w postaci:

$$(5.4) \quad E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{(l - C_\alpha \cosh(\frac{r}{R}))^2}{2mR^2 \sinh^2(\frac{r}{R})} + V(r) +$$

$$\frac{C_\alpha^2 + 2 \cosh(2\mu) C_\alpha C_\beta + C_\beta^2}{4A \sinh(2\mu)} + \frac{1}{4A} \left( \frac{\partial S_\mu(\mu)}{\partial \mu} \right)^2 + V_\mu(\mu)$$

$$(5.5) \quad + \frac{1}{4(A + 2B)} \left( \frac{\partial S_\lambda(\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 + V_\lambda(\lambda),$$

a dla torusa:

$$(5.6) \quad E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_\psi(\psi)}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{(l - C_\alpha \sin(\psi))^2}{2m(R + r \cos(\psi))^2} + V(\psi) +$$

$$\frac{C_\alpha^2 + 2 \cosh(2\mu) C_\alpha C_\beta + C_\beta^2}{4A \sinh(2\mu)} + \frac{1}{4A} \left( \frac{\partial S_\mu(\mu)}{\partial \mu} \right)^2 + V_\mu(\mu)$$

$$(5.7) \quad + \frac{1}{4(A + 2B)} \left( \frac{\partial S_\lambda(\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 + V_\lambda(\lambda).$$

Zmienne działania powiązane ze zmiennymi cyklicznymi mają postać:

$$\begin{aligned}
(5.8) \quad J_\varphi &= \oint p_\varphi d\varphi = \oint \frac{\partial S_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} l d\varphi = 2\pi l \Rightarrow l = \frac{J_\varphi}{2\pi}, \\
J_\alpha &= \oint p_\alpha d\alpha = \oint \frac{\partial S_\alpha(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha = C_\alpha \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi C_\alpha \Rightarrow C_\alpha = \frac{J_\alpha}{2\pi}, \\
J_\beta &= \oint p_\beta d\beta = \oint \frac{\partial S_\beta(\beta)}{\partial \beta} d\beta = C_\beta \int_0^{2\pi} d\beta = 2\pi C_\beta \Rightarrow C_\beta = \frac{J_\beta}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Teraz skoro mamy  $J_\varphi$ ,  $J_\alpha$  and  $J_\beta$ , możemy jawnie obliczyć  $J_r$ ,  $J_\lambda$  i  $J_\mu$ . Wprowadźmy stałe separacji:

$$K = \frac{J_\alpha^2 + 2 \cosh(2\mu) J_\alpha J_\beta + J_\beta^2}{16\pi^2 A \sinh^2(2\mu)} + N(\lambda) + \frac{1}{4A} \left( \frac{\partial S_\mu(\mu)}{\partial \mu} \right)^2 + V_\mu(\mu),$$

gdzie  $N$  wiąże się z członami w równaniu Hamiltona- Jakobiego jak następuje:

$$(5.9) \quad N(\lambda) = \frac{1}{(A + 2B)} \left( \frac{\partial S_\lambda(\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 + V_\lambda(\lambda),$$

Teraz możemy zapisać energię dla poszczególnych przypadków:

$$(5.10) \quad \text{sfera :} \quad E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{(l - J_\alpha \cos(\frac{r}{R}))^2}{8\pi^2 m R^2 \sin^2(\frac{r}{R})} + V(r) + K,$$

$$(5.11) \quad \text{pseudosfera :} \quad E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{(l - J_\alpha \cosh(\frac{r}{R}))^2}{8\pi^2 m R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})} + V(r) + K$$

$$(5.12) \quad \text{torus :} \quad E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_\psi(\psi)}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{(l - J_\alpha \sin(\psi))^2}{8\pi^2 m R(R + r \cos(\psi))^2} + V(\psi) + K.$$

Zmienne działania  $J_\mu$ ,  $J_\lambda$  wyrażają się jak następuje:

$$(5.13) \quad J_\mu = \oint p_\mu d\mu = \oint \sqrt{4A(K - N(\lambda) - V_\mu(\mu)) - \frac{J_\alpha^2 + 2 \cosh(2\mu) J_\alpha J_\beta + J_\beta^2}{4\pi^2 \sinh^2(2\mu)}} d\mu,$$

$$(5.14) \quad J_\lambda = \oint p_\lambda d\lambda = \oint \sqrt{4(A + 2B)(N(\lambda) - V_\lambda(\lambda))} d\lambda,$$

mają one tę samą postać dla wszystkich dyskutowanych przypadków. Zmienne  $J_r$  dla sfery i pseudosfery wyrażają się całkami:

$$\text{sfera : } J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - K - V_r(r)) - \frac{(J_\varphi - J_\alpha \cos(\frac{r}{R}))^2}{4\pi^2 R^2 \sin^2(\frac{r}{R})}} dr,$$

$$\text{pseudosfera : } J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - K - V_r(r)) - \frac{(J_\varphi - J_\alpha \cosh(\frac{r}{R}))^2}{4\pi^2 R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})}} dr.$$

W przypadku torusa otrzymujemy  $J_\psi$ :

$$\text{torus : } J_\psi = \oint p_\psi d\psi = \oint \sqrt{2m(E - K - V_\psi(\psi)) - \frac{(J_\varphi - J_\alpha \sin(\psi))^2}{4\pi^2 (R + r \cos(\psi))^2}} d\psi$$

**5.1. Modele potencjału na płaszczyźnie  $\lambda\mu$ .** W zagadnieniach, gdy wewnętrzne deformacyjne stopnie swobody wykonują drgania sprężyste, potencjał powinien mieć lokalne minimum w konfiguracji niedeformowanej  $\lambda = 1, \mu = 1$ . W mikroskopowej teorii sprężystości przyjmuje się też, że rozciąganie ciała w jednym kierunku wywołuje ściskanie w pozostałych kierunkach. Inna sprawa, że w pewnych modelach mikrostruktury warunek ten nie musi być spełniony. Przyroczymy kilka modelowych potencjałów, dla których można przeprowadzić jawne rachunki:

$$(5.15) \quad V_\lambda(\lambda) = \frac{\kappa}{2}\lambda^2, \quad V_\mu(\mu) = G \coth^2(2\mu), \quad \text{gdzie } \kappa, G \text{ są stałymi.}$$

Dla tak zaproponowanego potencjału  $V(\mu)$  5.15.  $J_\mu$  5.13 jest postaci:

$$J_\mu = \frac{1}{4} \left( \sqrt{(J_\alpha + J_\beta)^2 + 16AG\pi^2} + \sqrt{(J_\alpha - J_\beta)^2 + 16AG\pi^2} \right) + \\ -2\pi \sqrt{A(G - K + N(\lambda))},$$

natomiast  $J_\lambda$  dla  $V(\lambda)$  5.15 wyraża się wzorem:

$$J_\lambda = 2\pi N(\lambda) \sqrt{\frac{2(A + 2B)}{\kappa}}.$$

Dla  $J_\mu$  możemy zaproponować potencjał  $V(\mu)$  innej postaci np:

$$\text{dla } V(\mu) = \frac{G \cosh 2\mu}{\sinh^2 2\mu}$$

$$J_\mu = \frac{1}{4} \left( \sqrt{(J_\alpha + J_\beta)^2 + 16AG\pi^2} + \sqrt{(J_\alpha - J_\beta)^2 - 16AG\pi^2} \right) + \\ -\pi \sqrt{2A(-K + N(\lambda))},$$



lub dla  $V(\mu) = \frac{G}{\sinh^2 2\mu}$

$$J_\mu = \frac{1}{4} \left( \sqrt{(J_\alpha + J_\beta)^2 + 16AG\pi^2} + \sqrt{(J_\alpha - J_\beta)^2 + 16AG\pi^2} \right) + \\ - \frac{1}{2} \pi \sqrt{A(-K + N(\lambda))},$$

Na  $SL(2, \mathbb{R})$  ciekawy jest model geodezyjny  $V_\mu = 0$ . Wówczas znak stałej separacji  $K$  zależy od tzw. efektywnego potencjału [62], który jest dany przez:

$$V_{eff}(\mu, \lambda, J_\alpha, J_\beta) = \frac{J_\alpha^2 + 2 \cosh(2\mu) J_\alpha J_\beta + J_\beta^2}{4\pi^2 \sinh^2(2\mu)} + 4AN(\lambda)$$

(w konsekwencji 5.9i  $V(\mu) = 0$ , ale nie bez  $V(\lambda)$ ). Orbity będą ograniczone kiedy  $K \leq 0$ , i tylko ten przypadek rozważamy. Wtedy  $J_\mu$  jest postaci:

$$J_\mu = \frac{1}{2} J_\alpha - 2\pi \sqrt{A(N(\lambda) - K)} \quad \text{i} \quad N(\lambda) = \frac{J_\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2(A + 2B)}}.$$

**5.2. Modele potencjału  $V(r)$ .** Podobnie jak poprzednio w rozdziale 4.3.2 aby jawnie obliczyć  $J_r$  proponuję aby potencjał był jakoś dopasowany do geometrii rozmaitości w której porusza się ciało. Ważną informację o tej geometrii zawiera gęstość  $\det[g^{ij}]$ . Zwraca to uwagę na potencjały postaci:

$$(5.16) \quad V_r(r) = f(r) \det[g^{ij}].$$

W przypadku sferycznym gdzie  $\det[g^{ij}] = \frac{1}{R^2 \sin^2(\frac{r}{R})}$  proponuję  $f(r) = \eta R^2 \cos^2(\frac{r}{R})$  stąd

$$V(r) = \eta \cot^2\left(\frac{r}{R}\right),$$

gdzie  $\eta$  jest stałe. Dla takiego potencjału można  $J_r$  jawnie wyrazić jak następuje:

$$J_r = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{(J_\varphi - J_\alpha)^2 + 8m\pi^2\eta R^2} - \sqrt{(J_\varphi + J_\alpha)^2 + 8m\pi^2\eta R^2} \right) \\ + \sqrt{J_\alpha^2 + 8m\pi^2 R^2 (E + \eta - K)}.$$

Możemy też zaproponować funkcję  $f$  w innej postaci np.:  $f(r) = R^2 \eta \cos(\frac{r}{R})$  wówczas potencjał przyjmie postać :

$$V_r(r) = \frac{\eta \cos(\frac{r}{R})}{\sin^2(\frac{r}{R})},$$

a otrzymana zmienna działania dla takiego potencjału jest postaci:

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - K) + J_\alpha^2} - \frac{1}{2}\sqrt{-2m4\pi^2 R^2\eta + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2\eta + (J_\varphi - J_\alpha)^2}.$$

Inna możliwość:  $f(r) = R^2\eta$ ; wtedy:

$$V_r(r) = \frac{\eta}{\sin^2\left(\frac{r}{R}\right)},$$

a otrzymana zmienna działania dla tego potencjału jest postaci:

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - K) + J_\alpha^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2\eta + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2\eta + (J_\varphi - J_\alpha)^2}.$$

W przypadku pseudo-sferycznym  $\det[g_{ij}] = \frac{1}{R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)}$  proponuję by przyjąć  $f(r) = \gamma \cosh^2\left(\frac{r}{R}\right)$  wówczas przyjmiemy potencjał będzie miał postać:

$$V(r) = \frac{\gamma}{R^2} \coth^2\left(\frac{r}{R}\right),$$

gdzie  $\gamma$  jest stałą, otrzymujemy jawne wyrażenie dla  $J_r$ :

$$J_r = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(J_\varphi - J_\alpha)^2 + 8m\gamma\pi^2} + \sqrt{(J_\varphi + J_\alpha)^2 + 8m\gamma\pi^2} \right) \\ - \sqrt{J_\alpha^2 + 8m\pi^2 R^2(-E + \frac{\gamma}{R^2} + K)}.$$

Możemy też zaproponować funkcję  $f$  w postaci:  $f(r) = \gamma \cosh\left(\frac{r}{R}\right)$  wówczas potencjał przyjmie postać:

$$V_r(r) = \frac{\gamma \cosh\left(\frac{r}{R}\right)}{R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)},$$

a otrzymana zmienna działania dla takiego potencjału jest postaci:

$$J_r = -\sqrt{2m4\pi^2 R^2(-E + K) + J_\alpha^2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2m4\pi^2\gamma + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2\gamma + (J_\alpha - J_\beta)^2}.$$

Inna możliwość:  $f(r) = R^2\gamma$ ; wtedy:

$$V(r) = \frac{\gamma}{R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)},$$

, a zmienna działania dla takiego potencjału jest postaci:

$$\begin{aligned} J_r &= \sqrt{2m4\pi^2 R^2(-E + K) + J_\alpha^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2\gamma + (J_\varphi + J_\alpha)^2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2\gamma + (J_\varphi - J_\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Dla sferycznego przypadku gdy rozważamy ruch po geodezyjnej (tj. bez  $V(r)$ ) otrzymujemy  $J_r$  tej samej postaci :

$$\begin{aligned} J_r &= \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - K) + J_\alpha^2} - \frac{1}{2}|J_\varphi + J_\alpha| - \frac{1}{2}|J_\varphi - J_\alpha| = \\ &= |J_\varphi \geq |J_\alpha|| = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - K) + J_\alpha^2} - J_\varphi. \end{aligned}$$

**5.3. Energia wyrażona w zmiennych działania.** Wyraźmy energię w otrzymanych zmiennych działania. Ponieważ kombinując ze sobą zmienne działania otrzymane dla różnych potencjałów, możemy wypisać wiele równań na energię, przedstawimy więc jedynie te najciekawsze:

$$V_\lambda(\lambda) = \frac{\kappa}{2}\lambda^2, \quad V_\mu(\mu) = G\coth^2(2\mu), \quad \text{gdzie } \kappa, G \text{ są stałe.}$$

$J_\mu, J_\lambda$  są postaci:

$$\begin{aligned} J_\mu &= \frac{1}{4} \left( \sqrt{(J_\alpha + J_\beta)^2 + 16AG\pi^2} + \sqrt{(J_\alpha - J_\beta)^2 + 16AG\pi^2} \right) \\ &\quad - 2\pi\sqrt{A(G - K + N(\lambda))}, \\ J_\lambda &= 2\pi N(\lambda)\sqrt{\frac{2(A + 2B)}{\kappa}}. \end{aligned}$$

Dla pseudosfery gdy mamy następujący potencjał :  $V(r) = \frac{\gamma}{R^2} \coth^2\left(\frac{r}{R}\right)$ , otrzymaliśmy  $J_r$  postaci:

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{(J_\varphi - J_\alpha)^2 + 8m\gamma\pi^2} + \sqrt{(J_\varphi + J_\alpha)^2 + 8m\gamma\pi^2} \right) \\ &\quad - \sqrt{J_\alpha^2 + 8m\pi^2 R^2\left(-E + \frac{\gamma}{R^2} + K\right)}. \end{aligned}$$

stąd

$$E = \frac{-1}{8\pi^2 m R^2} \left( J_r - \frac{1}{2} \left( \sqrt{(J_\varphi - J_\alpha)^2 + 8m\gamma\pi^2} + \sqrt{(J_\varphi + J_\alpha)^2 + 8m\gamma\pi^2} \right) \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2 m R^2} J_\alpha^2 + \frac{\gamma}{R^2} + K$$

gdzie

$$(5.17) \quad K = -\frac{\left( J_\mu - \frac{1}{4} \sqrt{(J_\alpha + J_\beta)^2 + 16AG\pi^2} - \frac{1}{4} \sqrt{(J_\alpha - J_\beta)^2 + 16AG\pi^2} \right)^2}{2\pi^2 A} + G + N(\lambda)$$

$$N(\lambda) = \frac{J_\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2(A + 2B)}}$$

W przypadku sferycznym gdy:  $V(r) = \eta \cot^2\left(\frac{r}{R}\right)$ , gdzie  $\eta$  jest stałe. Dla takiego potencjału otrzymaliśmy  $J_r$  w postaci:

$$J_r = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{(J_\varphi - J_\alpha)^2 + 8m\pi^2\eta R^2} - \sqrt{(J_\varphi + J_\alpha)^2 + 8m\pi^2\eta R^2} \right) + \sqrt{J_\alpha^2 + 8m\pi^2 R^2 (E + \eta - K)}.$$

Mamy wtedy

$$E = \frac{1}{8\pi^2 m R^2} \left( J_r + \frac{1}{2} \left( \sqrt{(J_\varphi - J_\alpha)^2 + 8m\eta R^2 \pi^2} + \sqrt{(J_\varphi + J_\alpha)^2 + 8m\eta R^2 \pi^2} \right) \right)^2 - \frac{1}{8\pi^2 m R^2} J_\alpha^2 - \eta + K$$

gdzie  $K$  jest jak powyżej 5.17.

## 6. AFINICZNIE NIEZMIENNICZY MODEL ENERGII - CIAŁO NIEŚCIŚLIWE

Niezmiernie interesującym zagadnieniem jest dwu- wymiarowy model ciała nieściśliwego o wysokiej symetrii Hamiltonianu. Przykładem takiego ciała jest kropla tłuszczu na powierzchni wody, lub też plama ropy naftowej na powierzchni oceanu ("katastrofa ekologiczna"). Aby opisać takie zagadnienie nie nakładamy żadnych ekstra więzów na  $e_A^i$ . Tak jak poprzednio energię kinetyczną postulujemy postaci:

$$(6.1) \quad T_{\text{int}} = \frac{A}{2} \text{Tr} [\Omega^2] + \frac{B}{2} (\text{Tr} [\Omega])^2,$$

przy czym w wypadku nieściśliwości drugi człon znika. Wyrażamy ruch w wewnętrznych stopniach swobody przez pomocniczy reper  $E$ ,  $e_A = E_B \varphi_A^B$ . Dla  $\varphi$  stosujemy rozkład dwubiegunowy:

$$\varphi_B^A = U_C^A D_D^C [V^{-1}]_B^D.$$

Wtedy

$$T_{int} = \frac{1}{2} \delta_{MN} \varphi_k^M \varphi_l^N \Lambda_A^k \Lambda_B^l J^{AB},$$

gdzie  $\Lambda = (\varphi^{-1})_F^A \Gamma_{DC}^F \varphi_B^D \varphi_G^C v^G + (\varphi^{-1})_C^A \frac{d\varphi_B^C}{dt}$ ,  $v^E = e_i^E \frac{dx^i}{dt}$ . Jak poprzednio tensor bezwładności ma postać:  $J = J I_{dn}$ . Interesuje nas przypadek nieściśliwy. W rozkładzie dwubiegunowym więzy nieściśliwości nakładają ograniczenia tylko na macierz  $D$ :

$$\varphi_B^A = U_C^A D_D^C [V^{-1}]_B^D$$

gdzie:  $U = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ ,  $V = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$  i macierz  $D$  dana jest w postaci

$$D = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Wewnętrzną część energii kinetycznej, po dokonaniu zamiany zmiennych  $\tilde{\lambda} = e^\lambda$ , otrzymujemy postać:

$$T_{int} = -a\chi^2 + 2ac \cosh(2\lambda) \chi \dot{\beta} - a\dot{\beta}^2 + a\dot{\lambda}^2. \quad (6.2)$$

Człon  $tr[\Omega]^2$  znika na mocy samego warunku nieściśliwości. Element metryczny, t.zn. odległość między punktami o infinytymalnie różniących się współrzędnych, wyraża się na sferze:

$$(6.3) \quad ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2,$$

i odpowiednio na pseudosferze:

$$(6.4) \quad ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\varphi^2,$$

oraz na torusie:

$$(6.5) \quad ds^2 = (R + r \sin \psi)^2 d\varphi^2 + r^2 d\psi^2$$

Oczywiście w przypadku sfery  $r$  przebiega  $[0, \pi R)$ , a w przypadku pseudosfery  $r$  przebiega  $[0, \infty)$ . Na torusie  $r$  i  $R$  są stałe, natomiast  $\varphi$  i  $\psi$  przebiegają od 0 do  $2\pi$ .

Zapisując energię kinetyczną w postaci:

$$T = \frac{m}{2} G_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt},$$

jednocześnie dla uproszczenia równań dokonajmy zamiany zmiennych:  $\alpha := \frac{\gamma+\delta}{2}$  i  $\beta := \frac{\gamma-\delta}{2}$ ,  
będziemy wówczas przyjmowali następujące uporządkowanie współrzędnych:

$$\{q^i\} = \{r, \varphi, \gamma, \delta, \lambda\}.$$

Energia związana z ruchem translacyjnym wyraża się oczywiście tymi samymi wzorami co w poprzednich modelach:

1. sfera:  $T_{tr} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + R^2 \sin^2(\frac{r}{R}) \dot{\varphi}^2)$ ,
2. pseudosfera:  $T_{tr} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R}) \dot{\varphi}^2)$ ,
3. torus:  $T_{tr} = \frac{m}{2} ((R + r \cos \psi)^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\psi}^2)$ .

Przechodząc do formalizmu kanonicznego mamy:  $T = \frac{1}{2m} G^{ij} p_i p_j$ ,  $H = T - V$ , gdzie  $G_{ij} G^{ik} = \delta_i^k$ .

Otrzymujemy Hamiltoniany postaci:

na sferze:

$$T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{((p_\gamma + p_\delta) \cos \frac{r}{R} - p_\varphi^2)^2}{2mR^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{p_\gamma^2}{4a \sinh^2(\lambda)} - \frac{p_\delta^2}{4a \cosh^2(\lambda)} + \frac{p_\lambda^2}{4a}$$

na pseudo-sferze:

$$T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{((p_\gamma + p_\delta) \cosh \frac{r}{R} - p_\varphi^2)^2}{2mR^2 \sinh^2 \frac{r}{R}} + \frac{p_\gamma^2}{4a \sinh^2(\lambda)} - \frac{p_\delta^2}{4a \cosh^2(\lambda)} + \frac{p_\lambda^2}{4a}$$

i na torusie:

$$T = \frac{p_\psi^2}{2mr^2} + \frac{(\sin \psi (p_\gamma + p_\delta) - p_\varphi^2)^2}{2m(R + r \cos \psi)^2} + \frac{p_\gamma^2}{4a \sinh^2(\lambda)} - \frac{p_\delta^2}{4a \cosh^2(\lambda)} + \frac{p_\lambda^2}{4a}$$

Stacjonarne równanie Hamiltona-Jacobiego  $H(q^a, \frac{\partial S}{\partial q^a}) = \frac{1}{2m} G^{ij} \frac{\partial S}{\partial q^i} \frac{\partial S}{\partial q^j} + V(q) = E$  jest separowalne dla  $V(q) = V_r(r) + V_\lambda(\lambda)$  i odpowiednio  $V(q) = V_\psi(\psi) + V_\lambda(\lambda)$ . Wówczas możemy otrzymać zmienne działania.

Równanie będzie separowalne gdy  $\varphi, \gamma$  i  $\delta$  będą cykliczne; postulujemy wtedy  $S - 0 = S_r(r) + l\varphi + C_\gamma \gamma + C_\delta \delta + S_\lambda(\lambda)$ . Otrzymujemy równania:

1) sfera,

$$(6.6) \quad E = \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_r(r)}{dr} \right)^2 - \frac{(l - (C_\gamma + C_\delta) \cos(\frac{r}{R}))^2}{2mR^2 \sin^2(\frac{r}{R})} + V(r) + \frac{C_\gamma^2}{4a \sinh^2(\lambda)} - \frac{C_\delta^2}{4a \cosh^2(\lambda)} + \left( \frac{dS_\lambda}{d\lambda} \right)^2 \frac{1}{4a} + V(\lambda)$$

2) pseudo-sfera,

$$(6.7) \quad E = \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_r(r)}{dr} \right)^2 - \frac{(l - (C_\gamma + C_\delta) \cosh(\frac{r}{R}))^2}{2mR^2 \sinh^2(\frac{r}{R})} + V(r) \\ + \frac{C_\gamma^2}{4a \sinh^2(\lambda)} - \frac{C_\delta^2}{4a \cosh^2(\lambda)} + \left( \frac{dS_\lambda}{d\lambda} \right)^2 \frac{1}{4a} + V(\lambda)$$

3) torus (oczywiście tu mamy  $S(\psi)$  zamiast  $S(r)$ )

$$(6.8) \quad E = \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_\psi(\psi)}{d\psi} \right)^2 + \frac{(l - (C_\gamma + C_\delta) \sin \psi)^2}{2m(R + r \cos \psi)^2} + V_\psi(\psi) + \\ + \frac{C_\gamma^2}{4a \sinh^2(\lambda)} - \frac{C_\delta^2}{4a \cosh^2(\lambda)} + \left( \frac{dS_\lambda}{d\lambda} \right)^2 \frac{1}{4a} + V(\lambda)$$

gdzie  $J_q = \int_0^{2\pi} p_q dq \quad p_{q^i} = \frac{\partial S}{\partial q^i}$ :

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = l \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi l, \quad J_\gamma = \oint p_\gamma d\gamma = C_\gamma \int_0^{2\pi} d\gamma = 2\pi C_\gamma, \\ , \quad J_\delta = \oint p_\delta d\delta = C_\delta \int_0^{2\pi} d\delta = 2\pi C_\delta.$$

Następnie podstawiając  $J_\gamma$ ,  $J_\delta$  i  $J_\varphi$  do 6.6 otrzymujemy stałą separacji taką samą dla wszystkich diskutowanych przypadków:

$$C_\lambda = \frac{J_\gamma^2}{4\pi^2 4a \sinh^2(\lambda)} - \frac{J_\delta^2}{4\pi^2 4a \cosh^2(\lambda)} + \left( \frac{dS_\lambda}{d\lambda} \right)^2 \frac{1}{4a} + V_\lambda(\lambda)$$

i zmienne działania:

-sfera

$$(6.9) \quad J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - C_\lambda - V_r(r)) - \frac{(J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta) \cos(\frac{r}{R}))^2}{4\pi^2 R^2 \sin^2(\frac{r}{R})}} dr$$

$$(6.10) \quad J_\lambda = \oint \sqrt{(C_\lambda - V_\lambda(\lambda)) 4a - \frac{J_\gamma^2}{4\pi^2 \sinh^2(\lambda)} + \frac{J_\delta^2}{4\pi^2 \cosh^2(\lambda)}} d\lambda.$$

-pseudo-sfera

$$(6.11) \quad J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m(E - C_\lambda - V_r(r)) - \frac{(J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta) \cosh(\frac{r}{R}))^2}{4\pi^2 R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})}} dr$$

$$(6.12) \quad J_\lambda = \oint \sqrt{(C_\lambda - V_\lambda(\lambda)) 4a - \frac{J_\gamma^2}{4\pi^2 \sinh^2(\lambda)} + \frac{J_\delta^2}{4\pi^2 \cosh^2(\lambda)}} d\lambda.$$

-torus

$$(6.13) \quad J_\psi = \oint p_\psi d\psi = \oint \sqrt{2m(E - C_\lambda - V_\psi(\psi)) - \frac{(J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta) \sin \psi)^2}{4\pi^2 (R + r \cos \psi)^2}} d\psi,$$

$$(6.14) \quad J_\lambda = \oint \sqrt{(C_\lambda - V_\lambda(\lambda)) 4a - \frac{J_\gamma^2}{4\pi^2 \sinh^2(\lambda)} + \frac{J_\delta^2}{4\pi^2 \cosh^2(\lambda)}} d\lambda.$$

**6.1. Proponowane modele potencjałów  $V(\lambda)$ .** W poprzednim rozdziale otrzymaliśmy zmienną działania  $J_\lambda$  tej samej postaci dla wszystkich dyskutowanych przypadków:

$$(6.15) \quad J_\lambda = \oint \sqrt{(C_\lambda - V_\lambda(\lambda)) 4a - \frac{J_\gamma^2}{4\pi^2 \sinh^2(\lambda)} - \frac{J_\delta^2}{4\pi^2 \cosh^2(\lambda)}} d\lambda.$$

Istnieje klasa potencjałów  $V_\lambda(\lambda)$  zbudowanych z funkcji hiperbolicznych przy których stosując możemy jawnie policzyć

1. dla potencjału  $V_\lambda(\lambda) = \frac{\varkappa}{\sinh^2(\lambda)}$  gdzie  $\varkappa$  jest stałą otrzymujemy  $J_\lambda$  postaci:

$$J_\lambda = -\sqrt{4a\pi^2(-C_\lambda)} + \frac{1}{2}\sqrt{4a4\pi^2\varkappa + J_\gamma^2} + \frac{1}{2}|J_\delta|,$$

2. dla  $V_\lambda(\lambda) = \frac{\varkappa}{\cosh^2(\lambda)}$  gdzie  $\varkappa$  jest stałą mamy:

$$J_\lambda = -\sqrt{4a\pi^2(-C_\lambda)} + \frac{1}{2}|J_\gamma| + \frac{1}{2}\sqrt{J_\delta^2 - 4a4\pi^2\varkappa},$$

3. i dla  $V_\lambda(\lambda) = \frac{\varkappa \cosh^2(\lambda)}{\sinh^2(\lambda)}$  gdzie  $\varkappa$  jest stałą:

$$J_\lambda = -\pi\sqrt{\varkappa - C_\lambda} + \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2\varkappa + J_\gamma^2} + \frac{1}{2}|J_\delta|,$$

4. oraz dla  $V_\lambda(\lambda) = \frac{\varkappa}{\sinh^2(\lambda)\cosh^2(\lambda)}$  gdzie  $\varkappa$  jest stałą:

$$J_\lambda = -\sqrt{\pi^2(-C_\lambda)} + \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2\varkappa + J_\gamma^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2\varkappa + J_\delta^2}.$$

Jak widać  $C_\lambda$  musi być ujemne aby  $J_\lambda$  było rzeczywiste.

Stałe separacji pojawiające się w równaniu Hamiltona-Jacobiego są wartościami stałych ruchu odpowiedzialnych za separowalność. Często spotykamy się z sytuacją że pewien zakres wartości tych stałych odpowiada orbitom ograniczonym pewien zaś nieograniczonym. W przypadku ruchów



ograniczonych wspólne poziomice tych stałych ruchu są topologicznie torusami. Z punktu widzenia geometrii symplektycznej są one zawsze zarówno w przypadku ograniczonym jak i nieograniczonym podrozmaitościami Lagranżowskimi.

**6.2. Model potencjału  $V_r(r)$ .** Jeśli porównamy  $J_r$  w obu przypadkach (tj. ściśliwym dysku-  
towanym w poprzednim rozdziale i nieściśliwym) to ma ono niemal tę samą postać (zamiast  $K$  w  
tym rozdziale używamy stałej  $C_\lambda$ ). Przytoczmy więc odpowiednie wzory:

W przypadku sferycznym gdzie  $\det[g^{ij}] = \frac{1}{R^2 \sin^2(\frac{r}{R})}$  proponuję:

1.  $f(r) = R^2 \cos^2(\frac{r}{R})$  stąd  $V_r(r) = \frac{\cos^2(\frac{r}{R})}{\sin^2(\frac{r}{R})} = \cot^2(\frac{r}{R})$ , otrzymane  $J_r$  jest postaci

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_\lambda + 1) + (J_\gamma + J_\delta)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} \\ - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta))^2},$$

2.  $f(r) = R^2 \cos(\frac{r}{R})$  stąd  $V_r(r) = \frac{\gamma \cos(\frac{r}{R})}{\sin^2(\frac{r}{R})}$ , ( $\gamma$  jest stałą) otrzymane  $J_r$  jest postaci

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_\lambda) + (J_\gamma + J_\delta)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{-2m4\pi^2 R^2\gamma + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} \\ - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2\gamma + (J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta))^2},$$

3.  $f(r) = R^2$  stąd  $V_r(r) = \frac{\gamma}{\sin^2(\frac{r}{R})}$ , ( $\gamma$  jest stałą) otrzymane  $J_r$  jest postaci

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_\lambda) + (J_\gamma + J_\delta)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2\gamma + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} \\ - \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2 R^2\gamma + (J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta))^2},$$

4.  $f(r) = R^2$  stąd  $V_r(r) = 0$  otrzymane  $J_r$  jest postaci

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_\lambda) + (J_\gamma + J_\delta)^2} - \frac{1}{2}|J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta)| - \frac{1}{2}|J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta)| \\ = |J_\varphi \geq |J_\gamma + J_\delta|| = \sqrt{2m4\pi^2 R^2(E - C_\lambda) + (J_\gamma + J_\delta)^2} - J_\varphi.$$

W przypadku pseudosferycznym gdzie  $\det[g^{ij}] = \frac{1}{R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})}$  proponuję:

1.  $f(r) = \cosh^2(\frac{r}{R}) \Rightarrow V_r(r) = \frac{\cosh^2(\frac{r}{R})}{R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})} = \frac{1}{R^2} \coth^2(\frac{r}{R})$ , otrzymujemy  $J_r$  w postaci:

$$J_r = -\sqrt{2m4\pi^2 R^2 \left(\frac{1}{R^2} - E + C_\lambda\right) + (J_\gamma + J_\delta)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} \\ + \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + ((J_\gamma + J_\delta) - J_\beta)^2},$$

2.  $f(r) = \cosh^2(\frac{r}{R}) \Rightarrow V_r(r) = \frac{\gamma \cosh^2(\frac{r}{R})}{R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})} = \frac{1}{R^2} \coth^2(\frac{r}{R})$ , otrzymujemy  $J_r$  w postaci:

$$J_r = -\sqrt{2m4\pi^2 R^2 (-E + C_\lambda) + (J_\gamma + J_\delta)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{-2m4\pi^2 R^2 \gamma + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} \\ + \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 \gamma + ((J_\gamma + J_\delta) - J_\beta)^2},$$

3. Jeśli przyjąć  $f(r) = R^2 \gamma$ , wtedy  $V(r) = \frac{\gamma}{\sinh^2(\frac{r}{R})}$ , otrzymujemy  $J_r$  w postaci:

$$J_r = -\sqrt{2m4\pi^2 R^2 (-E + C_\lambda) + (J_\gamma + J_\delta)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 \gamma + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} \\ + \frac{1}{2} \sqrt{-2m4\pi^2 R^2 \gamma + (J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta))^2}.$$

**6.3. Energia wyrażona w zmiennych działanie.** Mając już klasy potencjałów, przy których obliczone zostały zmienne działania, możemy wyrazić energię w tychże zmiennych. Kombinując ze sobą zmienne działania otrzymane dla różnych potencjałów otrzymamy wiele równań na energię. Przedstawmy więc tylko te najciekawsze:

$$V_\lambda(\lambda) = \frac{\varkappa \cosh^2(\lambda)}{\sinh^2(\lambda)} \rightarrow J_\lambda = -\pi \sqrt{\varkappa - C_\lambda} + \frac{1}{2} \sqrt{4\pi^2 \varkappa + J_\gamma^2} + \frac{1}{2} \sqrt{J_\delta^2};$$

stąd mamy

$$(6.16) \quad C_\lambda = \varkappa - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} \sqrt{4\pi^2 \varkappa + J_\gamma^2} + \frac{1}{2} J_\delta - J_\lambda \right)^2$$

Dla przypadku sferycznego, przyjmując potencjał  $V_r(r) = \cot^2(\frac{r}{R})$ , otrzymane  $J_r$  jest postaci

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2 R^2 (E - C_\lambda + 1) + (J_\gamma + J_\delta)^2} \\ - \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} - \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta))^2},$$

stąd otrzymana energia  $E$  jest postaci:

$$E = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2R^2 + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2R^2 + (J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta))^2} + J_r)^2}{2m4\pi^2R^2} - \frac{1}{2m4\pi^2R^2} (J_\gamma + J_\delta)^2 + C_\lambda - 1,$$

gdzie  $C_\lambda$  wyraża się wzorem 6.16.

Wykorzystując tę samą zmienną działania  $V_\lambda(\lambda) = \frac{\varkappa \cosh^2(\lambda)}{\sinh^2(\lambda)} \rightarrow J_\lambda = -\sqrt{\varkappa - \pi^2 C_\lambda} + \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2 \varkappa + J_\gamma^2} +$

$\frac{1}{2}J_\delta$  dla zagadnienia pseudosferycznego pod działaniem potencjału  $V_r(r) = \frac{1}{R^2} \coth^2(\frac{r}{R})$  gdzie

$$J_r = -\sqrt{2m4\pi^2R^2(\frac{1}{R^2} - E + C_\lambda) + (J_\gamma + J_\delta)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2R^2 + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2R^2 + (J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta))^2},$$

otrzymujemy  $E$  postaci:

$$E = -\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2R^2 + (J_\varphi + (J_\gamma + J_\delta))^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2m4\pi^2R^2 + (J_\varphi - (J_\gamma + J_\delta))^2} - J_r)^2}{2m4\pi^2R^2} + \frac{1}{2m4\pi^2R^2} (J_\gamma + J_\delta)^2 + C_\lambda + \frac{1}{R^2},$$

gdzie  $C_\lambda$  wyraża się wzorem 6.16.

W przypadku sferycznym możemy jeszcze rozpatrywać ruch bez potencjału. Dla potencjału

$V_\lambda(\lambda) = \frac{\varkappa \cosh^2(\lambda)}{\sinh^2(\lambda)}$  i  $J_\lambda = -\sqrt{\varkappa - \pi^2 C_\lambda} + \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2 \varkappa + J_\gamma^2} + \frac{1}{2}J_\delta$  gdy  $V_r(r) = 0$  mamy  $J_r$  ( $J_\varphi \geq |J_\gamma + J_\delta|$ )

$$J_r = \sqrt{2m4\pi^2R^2(E - C_\lambda) + (J_\gamma + J_\delta)^2} - J_\varphi,$$

otrzymujemy wyrażenie na  $E$  postaci:

$$E = \frac{(J_r + J_\varphi)^2}{2m4\pi^2R^2} - \frac{(J_\gamma + J_\delta)^2}{2m4\pi^2R^2} + C_\lambda.$$

gdzie  $C_\lambda$  wyraża się wzorem 6.16.

## CZĘŚĆ 5

### Uwagi końcowe

Omówiliśmy powyżej modele dynamiczne infinitezymalnego ciała sztywnego i afinicznie sztywnego w zakrzywionej przestrzeni Riemanna. Wewnętrzne stopnie swobody były reprezentowane przez bazę ortonormalną, lub ogólną zaczepioną w punkcie, gdzie w danej chwili znajduje się ciało. Modele takie mogą być użyteczne w teorii ośrodków z mikrostrukturą, mają też pewne aspekty związane z ogólną teorią względności i relatywistyczną mechaniką ośrodków ciągłych. Opracowaliśmy metodę opartą na użyciu odpowiednio wybranego ortonormalnego nieholonomicznego układu odniesienia (zadanego pola baz w rozmaitości). Opisane zostało sprzężenie między dynamiką wewnętrznych stopni swobody a geometrią przestrzeni (głównie tensorem krzywizny). W przypadku ciałw przestrzeni 2-wymiarowej wyznaczyliśmy klasy modeli całkowalnych, sprowadzalnych do kwadratur, a jednocześnie spójnych z fenomenologicznymi wymaganiami teorii sprężystości. Te całkowalne modele mogą być użyteczne w teorii powłok z mikrostrukturą, a także w dynamice obiektów poruszających się np. po powierzchni Ziemi. Mogą też mieć znaczenie w teorii defektów i zjawisk powierzchniowych. Niezależnie od tego są interesujące z punktu widzenia czystej mechaniki analitycznej i teorii układów dynamicznych, jako przykłady modeli całkowalnych.



## CZĘŚĆ 6

### Dodatek-metoda residuum

W niniejszej pracy zajmowaliśmy się głównie zagadnieniami separowalnymi, a więc sprowadzalnymi do kwadratur. Szczególny nacisk położony był na modele ściśle rozwiązalne, w których wyrażenie podcałkowe dawało się sprowadzić (przez odpowiednią zamianę zmiennych) do postaci:

$$(0.17) \quad R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right),$$

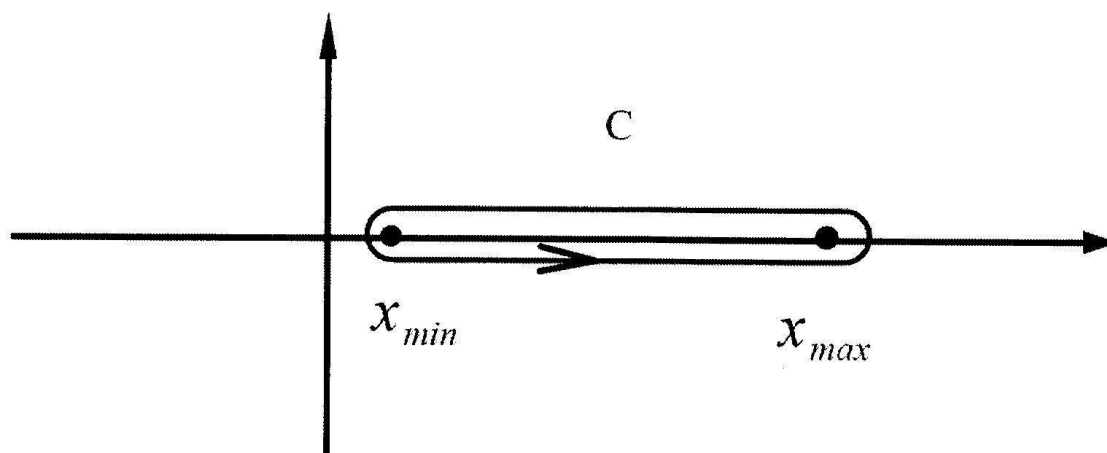
gdzie  $R$  jest wymierną funkcją od dwóch zmiennych. Tak było w przypadku wyrażeń dla zmiennych działania  $J$  w naszych modelach. Wiadomo, że w zasadzie całki nieoznaczone z wyrażeń 0.17 dają się elementarnie obliczyć przez podstawienia Eulera. Następnie zmienne działania można wyrazić jako odpowiednie całki oznaczone, a więc podwojone wartości całek nieoznaczonych wziętych w granicach jakimi są punkty zawracania. Procedura taka jest jednak rachunkowo bardzo zawiła i nastrocza mnóstwo okazji do błędów. Znacznie prościej jest policzyć wprost całki oznaczone dla zmiennych  $J$ , posługując się metodą całkowania zespolonego. W tym celu wyrażenie przedłużamy analitycznie na całą płaszczyznę zespoloną. Mówiąc precyzyjniej z osi rzeczywistej usuwamy cięcie łączące punkty zawracania; są one punktami rozgałęzienia dla odpowiedniego wyrażenia zespolonego. W obszarze otrzymanym z  $C$  po usunięciu cięcia wyrażenie podcałkowe jest jednoznaczne (po ustaleniu konwencji znaku) Zmienną działania:

$$J = \oint R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

( $x_{min}, x_{max}$  są punktami zawracania, t.zn. miejscami zerowymi wyrażenia pod pierwiastkiem) można wtedy zapisać w postaci

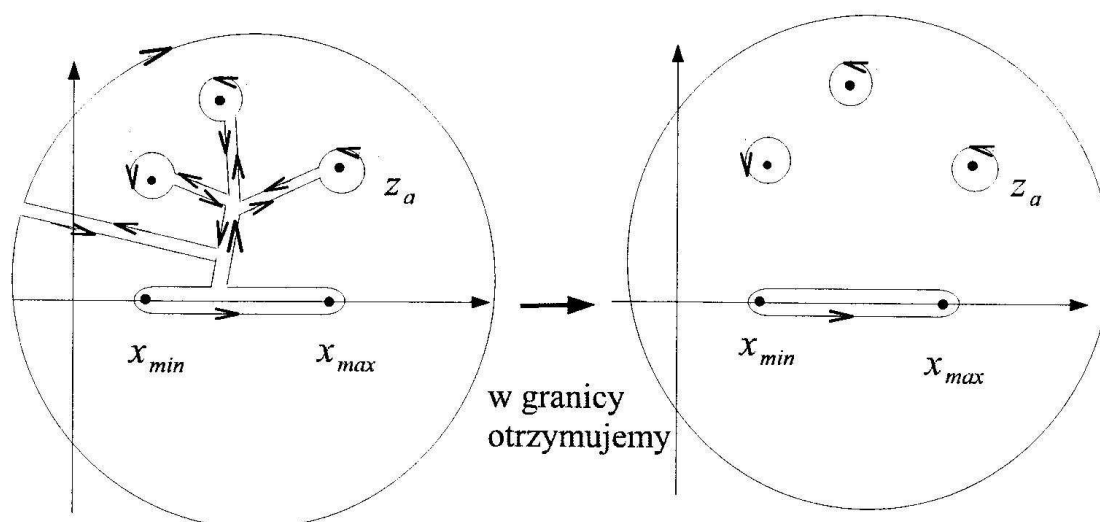
$$J = \oint_C R\left(z, \sqrt{az^2 + bz + c}\right) dz,$$

gdzie  $C$  jest konturem nieskończenie okrężającym cięcie.



Można łatwo wykazać, że wyrażenie to daje się przekształcić do postaci:

$$J = -2\pi i \sum_a \text{Res } z_a,$$



gdzie  $z_a$  są biegunami zespolonego wyrażenia podcałkowego,  $R(z, \sqrt{az^2 + bz + c})$ , wliczając, (jeśli istnieje) biegun w nieskończoności. Ta metoda obliczania zmiennych działania była wykorzystywana przez Maxa Borna w starszej teorii kwantów.

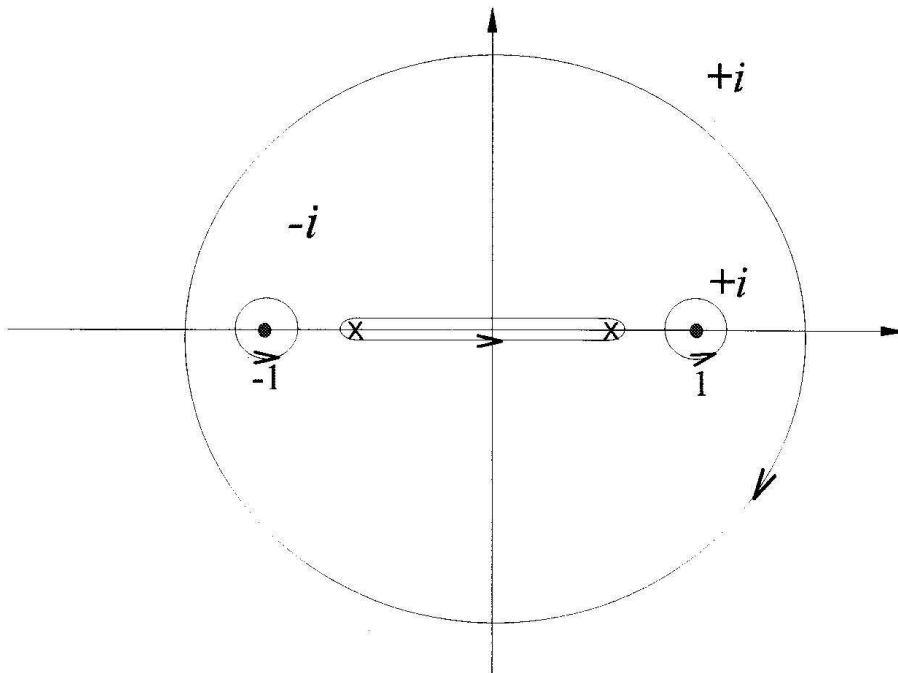
Procedura ta była używana wielokrotnie w tej pracy, ale wyrażenia dla residuów nie były jawnie przytaczane, by nie zaciemnić wyводу. Jednak dla ilustracji przedstawmy jeden przykład. Zmienna działania  $J_r$  w zagadnieniu płaskiego bąka infinityezymalnego na sferze (lub równoważnie 3-wymiarowego bąka symetrycznego w  $\mathbb{R}^3$  bez translacyjnych stopni swobody) jest dana przez:

$$J_r = \oint \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{(J_\varphi - \cos \frac{r}{R} J_\theta)^2 + (\frac{mR^2}{J} \sin^2(\frac{r}{R})) J_\theta^2}{4\pi^2 R^2 \sin^2(\frac{r}{R})}} dr.$$

Jednym z "obliczalnych" modeli jest używany powyżej potencjał

$$V_r(r) = \cot^2\left(\frac{r}{R}\right).$$

Dokonujemy zamiany zmiennych:  $-\cos\left(\frac{r}{R}\right) = x$ . Oczywiście  $z = x = -\cos\left(\frac{r}{R}\right) \in [-1, 1]$ . Mamy bieguny pierwszego rzędu w  $z = 1$ ,  $z = -1$ ,  $z = \infty$



kontur całkowania



Po obliczeniu residuów otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 J_r &= -2\pi i \operatorname{Res}_\infty - 2\pi i \operatorname{Res}_{-1} - 2\pi i \operatorname{Res}_1 = \\
 &\sqrt{2m4\pi^2 R^2(E+1) + J_\theta^2 \left(1 - \frac{mR^2}{I}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi + J_\theta)^2} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{2m4\pi^2 R^2 + (J_\varphi - J_\theta)^2}.
 \end{aligned}$$

Analogiczna procedura była zastosowana do obliczenia wszystkich innych całek występujących w wyrażeniach dla zmiennych działania.

## Bibliografia

1. R. Abraham i J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics* (second ed.), The Benjamin-Cummings Publishing Company, London-Amsterdam-Sydney-Tokyo, 1978.
2. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Graduate Texts in Mathematics, vol. **60**, Springer-Verlag, New York, 1978.
3. D. Arsenović, A. O. Barut i M. Božić, *The Critical Turning Points in the Solutions of the Magnetic-Top Equations of Motion*, *Il Nuovo Cimento* **110B** (1995), no. 2, 177–188.
4. A. V. Balakrishnan, *Analiza Funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 1992.
5. D. Arsenović, A. O. Barut, Z. Marić i M. Božić, *Semi-Classical Quantization of the Magnetic Top*, *Il Nuovo Cimento* **110B** (1995), no. 2, 163–175.
6. A. O. Barut, M. Božić i Z. Marić, *The Magnetic Top as a Model of Quantum Spin*, *Annals of Physics* **214** (1992), no. 1, 53–83.
7. A. O. Barut i R. Rączka, *Theory of Group Representations and Applications*, PWN, Warszawa, 1977.
8. S. Bażański, R. Gutkowski, J. J. Sławianowski, K. Wilmański i C. Woźniak *Mechanika Techniczna t.I Podstawy Mechaniki*, PWN, Warszawa, 1985.
9. E. Binz, *Global Differential Geometric Methods in Elasticity and Hydrodynamics*, in: *Differential Geometry, Group Representations and Quantization*, Lecture Notes in Physics, vol. **379**, edited by J. D. Hennig, W. Lücke, and J. Tolar, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1991.
10. O. I. Bogoyavlensky, *Methods of Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.
11. F. W. Byron i R. W. Fuller, *Matematyka w Fizyce Klasycznej i Kwantowej*, PWN, Warszawa, 1975.
12. F. Calogero i C. J. Marchioro, *Exact Solution of a One-Dimensional Three-Body Scattering Problem with Two-Body and/or Three-Body Inverse-Square Potentials*, *Math. Phys.* **15** (1974), 1425.
13. G. Capriz, *Continua with Microstructure*, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. **35**, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Paris-Tokyo, 1989.
14. G. Capriz, *Continua with Substructure*, *Phys. Mesomech.* **3** (2000), 5–14, 37–50.
15. G. Capriz i P. M. Mariano, *Balance at a Junction among Coherent Interfaces in Materials with Substructure*, in: G. Capriz and P. M. Mariano (eds), *Advances in Multifield Theories of Materials with Substructure*, Birkhäuser, Basel, 2003.
16. G. Capriz i P. M. Mariano, *Symmetries and Hamiltonian Formalism for Complex Materials*, *Journal of Elasticity* **72** (2003), 57–70.

17. S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Yale Univ. Press, New Haven-London, 1969.
18. F. J. Dyson, *Dynamics of a Spinning Gas Cloud*, Journal of Mathematics and Mechanics **18** (1968), no. 1, 91.
19. D. G. Ebin, *The Motion of Slightly Compressible Fluids Viewed as a Motion with Strong Constraining Force*, Ann. Math. **105** (1977), 141–200.
20. D. G. Ebin i J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. Math. **92** (1970), 102–163.
21. A. C. Eringen, *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
22. A. C. Eringen, *Mechanics of Micromorphic Continua*, in: Proceedings of the IUTAM Symposium on Mechanics of Generalized Continua, Freudenstadt and Stuttgart, 1967, red.: E. Kröner, vol. **18**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1968, 18–33.
23. K. Frąckiewicz, M. Seredyńska i J. J. Sławianowski, *Controlled Motion of Finite Elements*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics **29** (1991), no. 3-4, 671–686.
24. G. M. Fichtenholtz, *Rachunek Różniczkowy i Całkowy*, PWN, Warszawa, 1985.
25. P. Godlewski, *Quantization of Anisotropic Rigid Body*, Int. J. Theor. Phys. **42** (2003), no. 12, 2863–2875.
26. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1950.
27. A. Gołębiewska i J. J. Sławianowski *Geometria Przestrzeni Fazowej*, Prace IPPT, Warszawa, 1971.
28. B. Gołubowska, *Motion of Test Rigid Bodies in Riemannian Spaces*, Reports on Mathematical Physics **48** (2001), no. 1/2, 95–102.
29. B. Gołubowska, *Models of Internal Degrees of Freedom Based on Classical Groups and Their Homogeneous Spaces*, Reports on Mathematical Physics **49** (2002), no. 2/3, 193–201.
30. B. Gołubowska, *Affine Models of Internal Degrees of Freedom and Their Action-Angle Description*, Reports on Mathematical Physics **51** (2003), no. 2/3, 205–214.
31. B. Gołubowska, *Infinitesimal Affinely-Rigid Bodies in Riemann Spaces*, in: Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, editors: A. G. Nikitin, V. M. Boyko, R. O. Popovych, and I. A. Yehorchenko, vol. **50**, no. 2, Institute of Mathematics, Kyiv, 2004, 774–779.
32. B. Gołubowska, *Action-Angle Analysis of Some Geometric Models of Internal Degrees of Freedom*, Journal on Nonlinear Mathematical Physics **11** (2004), Supplement, 138–144.
33. F. W. Hehl, G. D. Kerlick i P. Van der Heyde, Physical Review D **10** (1974), 1066.
34. F. W. Hehl, E. A. Lord i Y. Ne'eman, *Hadron Dilatation, Shear and Spin as Components of the Intrinsic Hypermomentum. Current and Metric-Affine Theory of Gravitation*, Physics Letters **71B** (1977), 432.
35. R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of Variations*, Academic Press, New York, 1968.
36. R. Hermann, *Vector Bundles in Mathematical Physics*, W. A. Benjamin, New York, 1970.
37. C. Kittel, *Wstęp do Fizyki ciała Stałego*, PWN, Warszawa, 1976.
38. S. Kobayashi i K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New York, 1963.
39. E. Kossecka i H. Zorski, Int. J. Solids Struct. **3** (1967), 881.
40. L. D. Landau i E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, London, 1958.
41. L. H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton-New Jersey-Toronto-London-New York, 1953.

42. G. W. Mackey, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1963.
43. P. M. Mariano, *Multifield Theories in Mechanics of Solids*, Adv. Appl. Mech. **38** (2001), 1–93.
44. P. M. Mariano, *Cancellation of Vorticity in Steady-State Non-Isoentropic Flows of Complex Fluids*, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), 9961–9972.
45. J. E. Marsden, *Lectures on Geometric Methods in Mathematical Physics*, SIAM, Philadelphia, 1981.
46. J. E. Marsden i T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1983.
47. J. E. Marsden i T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer, New York, 1994.
48. J. Marsden i T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry. A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems* (second ed.), Springer, New York, 1999.
49. A. Martens, *Dynamics of Holonomically Constrained Affinely-Rigid Body*, Reports on Mathematical Physics **49** (2002), no. 2/3, 295–303.
50. A. Martens, *Quantization of Affinely-Rigid Body with Constraints*, Reports on Mathematical Physics **51** (2003), no. 2/3, 287–295.
51. A. Martens, *Hamiltonian Dynamics of Planar Affinely-Rigid Body*, Journal on Nonlinear Mathematical Physics **11** (2004), Supplement, 145–150.
52. A. Martens, *Quantization of the Planar Affinely-Rigid Body*, Journal on Nonlinear Mathematical Physics **11** (2004), Supplement, 151–156.
53. K. Maurin, *General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups*, PWN, Warszawa, 1968.
54. J. Moser, *Dynamical systems theory and applications*, Lecture Notes in Physics, vol. **38**, Springer, Berlin, 1975.
55. J. Moser, *Three Integrable Hamiltonian Systems Connected with Isospectral Deformations*, Advances in Math. **16** (1975), 197–220.
56. T. Ratiu, Am. J. Math. **104** (1982), 409–448.
57. M. Roberts, C. Wulff i J. Lamb, *Hamiltonian Systems Near Relative Equilibria*, Journal of Differential Equations **179** (2002), 562–604.
58. M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Dover Publications, 1995.
59. A. K. Sławianowska, *On Certain Nonlinear Many-Body Problems on Lines and Circles*, Arch. of Mech. **41** (1989), no. 5, 619–640.
60. A. K. Sławianowska i J. J. Sławianowski, *Quantization of Affinely Rigid Body in  $N$  Dimensions*, Reports on Mathematical Physics **29** (1991), no. 3, 297–320.
61. J. J. Sławianowski, *Mechanika Analityczna deformacji Jednorodnych*, Prace IPPT, no. 8, Warszawa, 1973.
62. J. J. Sławianowski, *Bertrand Systems on Space of Constant Sectional curvature. The Action-Angle Analysis* Rep. on Math. Phys. **46**, 3 (2000), 429–460.
63. J. J. Sławianowski, *Classical Pure States: Information and Symmetry in Statistical Mechanics*, International Journal of Theoretical Physics **8** (1973), no. 6, 451–462.
64. J. J. Sławianowski, *Analytical Mechanics of Finite Homogeneous Strains*, Archives of Mechanics **26** (1974), no. 4, 569–587.

65. J. J. Sławianowski, *Homogeneously Deformable Body in a Curved Space*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques **23** (1975), no. 2, 43–47.
66. J. J. Sławianowski, *The Mechanics of an Affinely-Rigid Body*, International Journal of Theoretical Physics **12** (1975), no. 4, 271–296.
67. J. J. Sławianowski, *Newtonian Dynamics of Homogeneous Strains*, Archives of Mechanics **27** (1975), no. 1, 93–102.
68. J. J. Sławianowski, *Newtonian Dynamics of Polynomial Deformations*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques **23** (1975), no. 1, 17–22.
69. J. J. Sławianowski, *Mechanika Analityczna ciał Okształcalnych*, PWN, Warszawa-Poznań, 1982.
70. J. J. Sławianowski, *The Mechanics of the Homogeneously-Deformable Body. Dynamical Models with High Symmetries*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **62** (1982), 229–240.
71. J. J. Sławianowski, *Lie-Algebraic Solutions of Affinely-Invariant Equations for the Field of Linear Frames*, Reports on Mathematical Physics **23** (1986), no. 2, 177–197.
72. J. J. Sławianowski, *Affinely-Rigid Body and Hamiltonian Systems on  $GL(n, \mathbb{R})$* , Reports on Mathematical Physics **26** (1988), no. 1, 73–119.
73. J. J. Sławianowski, *Geometry of Phase Spaces*, John Wiley & Sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore, 1991.
74. J. J. Sławianowski, *Nonlinear Vibrations of Rigid Bodies. Projective Correspondence between Rigid Body and Material Point Mechanics*, in: Proceedings of the 2nd Polish-German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems, March 10-17, 1991, in Paderborn, editors: R. Bogacz, J. Lückner, K. Popp, IFTR-Editions, Warszawa, 1991, 25–34.
75. J. J. Sławianowski, *One-Dimensional Chains, Matrix Groups and Quantization of Poisson Structures*, Journal of Technical Physics **39** (1998), no. 2, 163–187.
76. J. J. Sławianowski, *Group-Theoretic Approach to Internal and Collective Degrees of Freedom in Mechanics and Field Theory*, Technische Mechanik **22** (2002), no. 1, 8–13.
77. J. J. Sławianowski, *Quantum and Classical Models Based on  $GL(n, \mathbb{R})$ -Symmetry*, in: Proceedings of the Second International Symposium on Quantum Theory and Symmetries, Kraków, Poland, July 18-21, 2001, editors: E. Kapuścik and A. Horzela, World Scientific, New Jersey-London-Singapore-Hong Kong, 2002, 582–588.
78. J. J. Sławianowski, *Linear Frames in Manifolds, Riemannian Structures and Description of Internal Degrees of Freedom*, Reports on Mathematical Physics **51** (2003), no. 2/3, 345–369.
79. J. J. Sławianowski, *Classical and Quantum Collective Dynamics of Deformable Objects. Symmetry and Integrability Problems*, in: Proceedings of the Fifth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, June 5-12, 2003, Varna, Bulgaria, editors: Ivaïlo M. Mladenov and Allen C. Hirshfeld, SOFTEX, Sofia, 2004, 81–108.
80. J. J. Sławianowski, *Geodesic Systems on Linear and Affine Groups. Classics and Quantization*, Journal on Nonlinear Mathematical Physics **11** (2004), Supplement, 130–137.
81. J. J. Sławianowski i V. Kovalchuk, *Invariant Geodesic Problems on the Affine Group and Related Hamiltonian Systems*, Reports on Mathematical Physics **51** (2003), no. 2/3, 371–379.

82. J. J. Sławianowski i V. Kovalchuk, *Invariant Geodetic Problems on the Projective Group  $Pr(n, \mathbb{R})$* , in: Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, editors: A. G. Nikitin, V. M. Boyko, R. O. Popovych, and I. A. Yehorchenko, vol. **50**, no. 2, Institute of Mathematics, Kyiv, 2004, 955–960.
83. J. J. Sławianowski i V. Kovalchuk, *Classical and Quantized Affine Physics: A Step Towards It*, Journal on Nonlinear Mathematical Physics **11** (2004), Supplement, 157–166.
84. J. J. Sławianowski i A. K. Sławianowska, *Virial Coefficients, Collective Models and Problems with the Galerkin Procedure*, Archives of Mechanics **45** (1993), no.3, 305–331.
85. J. J. Sławianowski i A. K. Sławianowska, *Hamiltonian Systems on Linear Groups and One-Dimensional Lattices with Internal Parameters*, Machine Dynamics Problems **20** (1998), 263–273.
86. J. J. Sławianowski i V. Kovalchuk, A. Sławianowska, B. Gołubowska, A. Martens, E. E. Rożko, Z. J. Zawistowski *Invariant Geodetic Systems on Lie Groups and Affine Models of Internal and Collective Degrees of Freedom*, Prace IPPT, 2004,
87. J. J. Sławianowski i V. Kovalchuk, A. Sławianowska, B. Gołubowska, A. Martens, E. E. Rożko, Z. J. Zawistowski *Invariant Geodetic Problems on the Affine symmetry in mechanics of collective and internal modes. Part I. Classical models*, Reports on Mathematical Physics **54** (2004), no.3, 373–427.
88. J. J. Sławianowski i V. Kovalchuk, A. Sławianowska, B. Gołubowska, A. Martens, E. E. Rożko, Z. J. Zawistowski *Invariant Geodetic Problems on the Affine symmetry in mechanics of collective and internal modes. Part II. Quantum models*, Reports on Mathematical Physics **55** (2005), no. 1, 1–427.
89. N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press; Princeton, New Jersey, 1951.
90. R. Sulanke i P. Wintgen, *Geometria różniczkowa i teoria wiązek*, PWN, Warszawa **20** (1977).
91. J. L. Synge, *Classical Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
92. M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.
93. C. Trimarco, *Microscopic Variables and Macroscopic Quantities*, in: Proceedings of Workshop on Geometry, Continua and Microstructures, Paris, May 28-29, Hermann, Paris, 1997.
94. Z. Wesołowski, *Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa, 1974.
95. E. T. Whittaker, *Dynamika Analityczna*, PWN, Warszawa, 1959.
96. E. P. Wigner, *Gruppentheorie und Ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, F. Viewag und Sohn, Braunschweig, 1931, (eng. translation by J. J. Griffin, Academic Press, New York, 1959).
97. E. P. Wigner, in: Quantum Theory of Angular Momentum, editors: L. C. Biedenharn and H. van Dam, Academic Press, New York, 1965.
98. C. Woźniak, *Więzy w mechanice ciał odkształcalnych*, Wydawnictwo PAN, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk-Lódź, 1988.
99. C. Woźniak, *Mechanics of Continuous Media*, in Fundations of Mechanics, edited by H. Zorskiego, PWN, Warszawa, Elsevier: Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo 1992.
100. C. Woźniak, *Mechanika ośrodków ciągłych roz. w Mechanika techniczna tom.1* red. H. Zorskiego, PWN, Warszawa, 1985.
101. C. Wulff i M. Roberts, *Hamiltonian Systems Near Relative Periodic Orbits*, SIAM Journal of Dynamical Systems **1** (2002), no. 1, 1–43.

102. D. P. Zhelobenko, *Compact Lie Groups and Their Representations*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 40, AMS, 1978.

Nr. str. wers	Jest	Powinno być
10, 4↑	$T = \dots = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{d\varphi_A^i}{dt} \frac{d\varphi_B^j}{dt} J^{AB},$	$T = \dots = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{d\varphi_A^i}{dt} \frac{d\varphi_B^j}{dt} J^{AB},$
11, 9↓	$T = \dots = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{De_A^i}{Dt} \frac{De_B^j}{Dt} J^{AB}.$	$T = \dots = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{De_A^i}{Dt} \frac{De_B^j}{Dt} J^{AB}.$
4↑	$T_{tr} = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \frac{m}{2} g_{ij} v^i v^j$	$T_{tr} = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \frac{m}{2} g_{ij} v^i v^j$
14, 14↓	<p>... Riemanna, ale w przestrzeni Riemanna-Cartana - <math>(M, \Gamma, g)</math> gdzie <math>\nabla g = 0</math>, ale <math>\Gamma</math> nie jest symetryczne. W przestrzeni ...</p>	<p>... Riemanna, ale nie w przestrzeni Riemanna-Cartana - <math>(M, \Gamma, g)</math> gdzie <math>\nabla g = 0</math>, ale <math>\Gamma</math> nie musi być symetryczne. W przestrzeni ...</p>
24, 11↓	$W_i^j = \frac{De_B^j}{Dt} e^A_i$	$W_i^j = \frac{De_A^j}{Dt} e^A_i$
37, 4↓	<p>Naszym celem jest analiza ...</p>	<p>Dygresja: Analiza ...</p>
41, 3↑	$ds^2 = (R + r \sin \psi)^2 d\psi^2 + r^2 d\psi^2.$	$ds^2 = (R + r \cos \psi)^2 d\psi^2 + r^2 d\psi^2.$
42,	<p>na rysunku Sfera <math>S^2(0, R)</math> jest <math>\vec{r}</math></p>	<p>na rysunku Sfera <math>S^2(0, R)</math> powinno być <math>r</math></p>
55, 1↓	$(R + \sin(\psi))^2$	$(R + r \cos(\psi))^2$
64, 7↑	$ds^2 = (R + r \sin \psi)^2 d\psi^2 + r^2 d\psi^2.$	$ds^2 = (R + r \cos \psi)^2 d\psi^2 + r^2 d\psi^2.$
69, 1↑	$T = \dots + 2A \cosh(2\mu) \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} + \cosh(\psi) \frac{d\varphi}{dt}\right) - A \left(\frac{d\alpha}{dt} + \cosh(\psi) \frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$	$T = \dots + 2A \cosh(2\mu) \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} + \cos(\psi) \frac{d\varphi}{dt}\right) - A \left(\frac{d\alpha}{dt} + \cos(\psi) \frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$
78, 5↑	$ds^2 = (R + r \sin \psi)^2 d\psi^2 + r^2 d\psi^2.$	$ds^2 = (R + r \cos \psi)^2 d\psi^2 + r^2 d\psi^2.$