dr hab. Jan Ligęza prof. UŚl.
Instytut Matematyki
Silesian University
40–007 Katowice
Bankowa 14

Katowice, 04.09.2008 r.

Recenzja pracy doktorskiej P. mgr. inż. Bartłomieja Dyniewicza pt. „Dynamiczne właściwości układu hybrydowego poddanego ruchomym źródłom zaburzeń".

Rozprawa P. mgr. inż. Bartłomieja Dyniewicza będąca przedmiotem oceny zawiera 9 rozdziałów i dodatek (na 90. stronach). W pracy przedstawiono sposoby modelowania oraz rozwiązywania (jak sam Autor pisze w Rozdziale 9.) zagadnień dotyczących punktowych, ruchomych źródeł zaburzeń.

Ze względu na dość dużą ilość uwag będę stosował w recenzji numerację użytą przez Doktoranta.

Najpierw zacznę od krótkiego omówienia zasadniczych rozdziałów pracy.

Rozdział 2. poświęcony jest wstępnym rozważaniom dotyczących:

- równaniu struny pod ruchomym obciążeniem postaci

$$-N\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \varrho A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \delta(x-vt)\left[P - m\frac{\partial^2 u(vt,t)}{\partial t^2}\right], \tag{2.10}$$

gdzie N – siła naciągu struny, ϱ – gęstość masy, A – pole przekroju, v – prędkość przejazdu obciążenia, δ – dysrtybucja delta Diraca, m – poruszająca się masa;

- równaniu belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem

$$\begin{aligned} EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \left(\varrho I + \varrho k\frac{EI}{G}\right)\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2\partial t^2} + \varrho^2 k\frac{I}{G}\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \varrho A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \\ = q(x,t) - k\frac{EI}{GA}\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} + \varrho k\frac{I}{GA}\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

gdzie

$$q(x,t) = \delta(x-vt)\left[P - m\frac{\partial^2 u(vt,t)}{\partial t^2}\right],$$

k jest współczynnikiem kształtu przekroju poprzecznego A, a G jest modułem Kirchhoffa.

W Rozdziale 3. Doktorant bada między innymi równanie

$$(3.1) \qquad -N\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \varrho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt)P$$

wraz z warunkami

$$(3.2) \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

$$(3.3) \qquad u(x,0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Do rozwiązania zadania (3.1)–(3.3) stosuje metodę Fouriera oraz transformację całkową Laplace'a–Carsona, uzyskując rozwiązanie $u(x,t)$ postaci

$$(3.31) \qquad u(x,t) = \frac{2Pl}{N\pi^2(c^2 - v^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(c \sin\frac{n\pi vt}{l} - v \sin\frac{n\pi ct}{l} \right) \sin\frac{n\pi x}{l},$$

gdzie

$$\frac{\varrho A}{N} = \frac{1}{c^2} \quad \text{i} \quad v \neq c$$

oraz

$$(3.38) \qquad u(x,t) = \frac{P}{N\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{l}{n\pi} \sin\frac{n\pi ct}{l} - ct \cos\frac{n\pi ct}{l} \right) \sin\frac{n\pi x}{l},$$

gdy $v = c$.

W końcu tego rozdziału P. mgr inż. B. Dyniewicz bada sytuację ($\varrho = 0$)

$$(3.49) \qquad -N\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \delta(x - vt)\left[P - m\frac{\partial^2 u(vt,t)}{\partial t^2} \right],$$

sprowadzając rozpatrywany problem do analizy rozwiązań równania różniczkowego

$$(3.56) \qquad \tau(1-\tau)y''(\tau) + 2\alpha y(\tau) = 8\alpha\tau(1-\tau),$$

gdzie

$$u(vt,t) = u_1(t), \quad y(\tau) = \frac{u_1(t)}{u_0}, \quad \tau = \frac{vt}{l}, \quad u_0 = \frac{Pl}{4N}, \quad \alpha = \frac{Nl}{2mv^2}.$$

Doktorant rozpatruje tutaj 2 przypadki: $\alpha \neq 1$ i $\alpha = 1$; uzyskując efekt nieciągłości trajektorii ruchomej masy poruszającej się po bezmasowej strunie.

W Rozdziale 4. badane jest początkowo równanie

$$(4.1) \qquad EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \varrho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt)P$$

z warunkami

$$(4.2)\qquad u(0,t)=u(l,t)=0,\qquad \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0,$$

$$(4.3)\qquad u(x,0)=0,\qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

Do rozwiązania tego problemu Autor stosuje sinusową transformację całkową

$$(3.40)\qquad V(j,t)=\int\limits_0^l u(x,t)\sin\frac{j\pi x}{l}dx$$

i transformację Laplace'a–Carsona, uzyskując rozwiązanie $u(x,t)$ postaci

$$(4.10)\qquad u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2P}{\varrho Al}\frac{1}{\Omega_j^2-\omega_j^2}\left(\sin\omega_j t-\frac{\omega_j}{\Omega_j}\sin\Omega_j t\right),$$

gdzie

$$\omega_j=\frac{j\pi v}{l},\qquad \Omega_j^2=\frac{EIj^4\pi^4}{\varrho Al^4}.$$

W dalszej częsci tego rozdziału Doktorant bada równanie (2.26) z warunkami (4.2)–(4.3), gdzie

$$q(x,t)=\delta(x-vt)P.$$

Stosuje tutaj również sinusową transfornację Fouriera (w przedziale $[0,l]$) oraz transformację Laplace'a–Carsona, konstruując rozwiązanie $u(x,t)$ postaci

$$(4.43)\qquad u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{j=1}^{\infty}V(j,t)\sin\frac{j\pi x}{l}.$$

W Rozdziale 5. P. mgr inż. B. Dyniewicz zajmuje się rozwiązaniami półanalitycznymi równania (2.10) z warunkami (3.2)–(3.3). Podobnie jak w poprzednim rozdziale Doktorant konstruuje rozwiązanie $u(x,t)$ stosując sinusową transformację Fouriera. W efekcie uzyskuje rozwiązanie postaci (4.43). Warto jednak podkreślić, że w tym przypadku funkcje $V(j,t)$ spełniają pewien układ równań różniczkowych drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach. Do tego układu Autor stosuje podejście numeryczne. W drugiej części tego rozdziału Autor wyprowadza równanie Lagrange'a w przypadku struny pod jadącą masą i otrzymuje tutaj układ równań, który ma podobną budowę do układu określającego funkcje $V(j,t)$ (w równaniu (5.6)).

Rozdział 6. jest poświęcony rozwiązaniom półanalitycznym drgań belek, a więc równaniu (2.26) oraz równaniu

$$EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \varrho A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt)\left[P - m\frac{\partial^2 u(vt,t)}{\partial t^2}\right] \tag{6.1}$$

z warunkami (4.2)–(4.3).

Stosując sinusową transformację Fouriera Doktorant uzyskuje rozwiązanie $u(x,t)$ postaci (4.43), przy czym funkcje $V(j,t)$ spełniają pewne układy równań różniczkowych drugiego lub czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach. Rozwiązanie $u(x,t)$ Autor konstruuje stosując metody numeryczne.

W Rozdziale 7. P. mgr B. Dyniewicz zajmuje się numerycznym podejściem do problemu ruchomej masy. Najpierw dyskretyzuje strunę metodą elementów czasoprzestrzennych. Później dyskretyzuje człon zawierający ruchomą masę, a następnie podaje pewne uwagi dotyczące belki Bernoulliego–Eulera. W końcu rozdziału podaje błąd prezentowanej metody numerycznej w przypadku równowagi punktowej, jeśli wirtualna funkcja kształtu ma postać

$$v^*(x,t) = \delta(t - \alpha h)\left[\left(1 - \frac{x}{b}\right)v_3 + \frac{x}{b}v_4\right].$$

Rozdział 8. poświęcony jest podaniu wielu zastosowań ruchomych obciążeń.

W Rozdziale 9. Autor omawia wyniki oraz wyciąga pewne wnioski.

W Dodatku Doktorant podaje postać macierzy M_m, C_m i K_m odpowiedzialnych za opis ruchomej masy w belce Bernouliego–Eulera.

Uważam, że tematyka pracy jest dość interesująca. Praca zawiera jednak dużo usterek i niejsności.

Zauważone usterki i niejasności:

1^o na str. 6^{14} stwierdzenie Autora: „Nieokreślony jest np. iloczyn $\delta(x-a)\delta(x-b)$” nie jest precyzyjne, bowiem jeśli $a \neq b$, to $\delta(x-a)\delta(x-b) = 0$;

2^o brak w Rozdziale 2. definicji symboli: ϱ, A, v, E, I;

3^o w wyrażeniu (2.9) brak jest podkreślenia, że granica jest rozumiana w sensie teorii dystrybucji;

4^o na str. 13_{10} powinno być bierzemy, a nie bieżemy;

5^o brak definicji rozwiązania równań: (3.1), (3.49), (4.1), (2.26), (5.5), (6.1);

6^o brak uzasadnienia, że skonstruowane wyrażenia $u(x,t)$ są rozwiązaniami równań: (3.1), (4.1), (2.26), (2.10), (6.1);

7^o brak uzasadnienia, że skonstruowane wyrażenia $u(x,t)$ spełniają dodatkowe warunki (3.2)–(3.3) lub (4.2)–(4.3);

8^o brak uzasadnienia, że układy równań: (5.6), (5.39), (6.10), (6.26) mają rozwiązania;

9^o brak oszacowania błędu przybliżonego rozwiązania równań: (5.6), (6.10), (6.26);

10^o brak określenia klasy regularności wyrażenia $u(x,t)$, które ma być według Autora rozwiązaniem odpowiednich zadań;

11^o brak definicji całki oznaczonej i całki podwójnej z dystrybucji;

12^o brak definicji iloczynu dystrybucji i superpozycji dystrybucji i funkcji gładkiej;

13^o brak założenia $0 < vt < l$, żeby prawdziwe były wzory: (3.17), (3.19), (3.42), (3.53), (4.4), (4.17), (5.2), (5.3), (5.4), (6.6), (6.8), (6.24), (6.26);

14^o brak jest w pracy informacji o takim przedłużeniu $2l$–okresowym dystrybucji $\delta(x-vt)$, aby można było stosować równości: (3.19), (3.42), (3.46), (3.48), (4.4), (4.10), (4.43), (5.3), (5.14), (6.7), (6.10);

15^o brak twierdzeń o jednoznaczności rozwiązań badanych problemów;

16^o błędne rozumowanie na str. 17^{3-5}, bowiem $X\left(\frac{l}{2}\right) = \sin\frac{n\pi}{2} = 0$ dla $n = 2s$, $s \in \mathbb{N}$;

17^o brak wzoru funkcji Greena na str. 21–22 oraz brak wzoru na rozwiązanie równania (3.49);

18^o we wzorze (3.57) powinno być $\frac{Nl}{2mv^2}$, a nie $\frac{Nl}{2mc^2}$;

19^o brak uzasadnienia równości: (3.42), (4.4), (4.18), (5.2), (5.3), (5.6), (5.20), (5.25), (6.7), (6.10), (6.24);

20^o nie są jasne równości: (3.62) i (3.67);

21^o funkcja $y(\tau)$ określona we wzorze (3.71) nie spełnia równania (3.69) oraz równość (3.72) nie wynika z (3.71);

22^o błędy w rozumowaniu na str. $26^3, 26^9$ i 26_{12};

23^o na str. 41_1 powinno być dwukrotnie $\sum\limits_{j=1}^{\infty}$, a nie $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}$, podobne usterki na str. 42;

24^o błąd w różniczkowaniu na str. 42^1;

25^o brak założenia $0 < \xi < l$ we wzorze (6.25);

26^o materiał w Rozdziale 7. nie jest jasno przedstawiony, w szczególności:

- brak jest definicji symbolu ε_0 we wzorze (7.2),
- zapisy w wyrażeniach (7.11)–(7.14) budzą duże wątpliwości,
- równość (7.23) wymaga uzasadnienia;

27^o brak założenia $0 < x_0 - vt < b$ we wzorze (7.29);

28^o we wzorze (7.46) powinno być $\frac{h}{2}$, a nie $\frac{t}{2}$;

29^o oszacowanie błędu we wzorze (7.49) budzi wątpliwości (nie jest zdefiniowany symbol ω);

30^o brak cytowań literatury z teorii dystrybucji i rozwiązań uogólnionych.

Reasumując, uważam, że recenzowana praca zawiera dużo poważnych niejasności. Nie mogę tej wersji pracy ocenić pozytywnie. Proponuję dołączenie przez Doktoranta aneksu, w którym znalazłyby się wyjaśnienia usterek: 5^o–14^o, 19^o, 26^o i ewentualnie 15^o.

Do wyjaśnienia wspomnianych problemów mogą się okazać pożyteczne następujące monografie:

[1] P. Antosik, J. Mikusiński, R. Sikorski, *Theory of distributions. The sequential approach*, Elsevier–PWN, Amsterdam–Warszawa, 1973.

[2] H. Marcinkowska, *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1993.

[3] Z. Szmydt, *Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe*, PWN, Warszawa 1972.

[4] A.N. Tichonow, A.A. Samarski, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa, 1963.

[5] Armen H. Zemanian, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN, Warszwa, 1969.

Jan Ligęza