

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji



PRACA DOKTORSKA

Paweł Szeptyński

**OPRACOWANIE KRYTERIUM STANU GRANICZNEGO
DLA MATERIAŁÓW ANIZOTROPOWYCH
WYKAZUJĄCYCH ASYMETRIĘ ZAKRESU SPRĘŻYSTEGO**

Promotor:
prof. dr hab. inż. Ryszard B. Pęcherski

Kraków, 2013

Chciałbym serdecznie podziękować wszystkim moim nauczycielom za trud wychowania i przekazaną wiedzę. Przed wszystkimi pragnę wyrazić swoją ogromną wdzięczność moim droгим Rodzicom, Magdalenie i Michałowi.

Szczególne podziękowania pragnę złożyć również tym, którzy z wyjątkowym oddaniem angażowali się w pracę ze swoimi uczniami, do grona których miałem zaszczyt należeć choć przez krótki czas. Spośród tych wspaniałych ludzi wymienić chciałbym Wiesławę Sikorę, Krzysztofa Wiatra, Iwonę Król, Zdzisława Kusztala, Joannę Pełech-Pieszczyńską, Mariana Świerczka, Kingę Nalepkę, Henryka Laskowskiego, Dariusza Kędziora, Gwidona Szefera i wielu innych...

Chciałbym także serdecznie podziękować p. Janinie Ostrowskiej-Maciejewskiej, mojej życzliwej przewodniczce po złożonych przestrzeniach algebry abstrakcyjnej i rachunku tensorowego. Swoją wdzięczność chcę również wyrazić Promotorowi tej pracy, Ryszardowi Pęcherskiemu, za nabyte przy nim doświadczenie oraz za opiekę tak naukową, jak i zawodową.

Spis treści

1	Wstęp	9
2	Cel i teza rozprawy	11
3	Motywacja	11
4	Układ i zakres pracy	14
5	Przedmiot badań	15
5.1	Przyjęty model materiału	15
5.1.1	Zakres sprężysty	16
5.1.2	Zakres deformacji plastycznych	17
5.2	Stan graniczny	18
6	Wybrane aspekty przedmiotu badań - przegląd literatury	20
6.1	Anizotropia właściwości mechanicznych - matematyczna struktura anizotropii liniowo-sprężystej	20
6.1.1	Przestrzeń liniowa \mathcal{T}_{sym}^2	22
6.1.2	Symetrie liniowej sprężystości	24
6.1.3	Analiza widmowa symetrycznych tensorów czwartego rzędu	24
6.1.4	Niezmienniki tensorów sprężystości - indeksy strukturalne	29
6.2	Warunki graniczne dla materiałów anizotropowych	30
6.2.1	Anizotropia cech sprężystych i wytrzymałościowych	30
6.2.2	Ogólna charakterystyka wybranych warunków granicznych dla materiałów anizotropowych	31
6.3	Asymetria zakresu sprężystego	38
6.4	Wpływ naprężenia hydrostatycznego	39
6.5	Wpływ kąta Lodego	42
7	Energetyczne hipotezy wyteżenia dla materiałów anizotropowych	44
7.1	Hipoteza Burzyńskiego (1928)	45
7.1.1	Koncepcja funkcji wpływu stanu naprężenia	45
7.1.2	Analiza energetycznego kryterium Burzyńskiego dla materiałów anizotropowych	50
7.2	Kryterium Olszaka - Urbanowskiego (1956), Olszaka - Ostrowskiej-Maciejewskiej (1985)	53
7.2.1	Koncepcja analogii izotropowej [Goldenblat (1955)]	55
7.2.2	Koncepcja pseudoenergii odkształcenia postaciowego [Olszak, Urbanowski (1956)]	56
7.2.3	Koncepcja pseudoenergii odkształcenia postaciowego [Mises (1928)]	60
7.2.4	Analiza widmowa tensora stanu granicznego Olszaka-Urbanowskiego [Olszak, Ostrowska-Maciejewska (1985)]	63
7.2.5	Energetycznie ortogonalna podprzestrzeń stanów bezpiecznych i odpowiadający jej rozkład energii [Rychlewski (1984)]	67
7.3	Kryterium Rychlewskiego (1984)	72

7.3.1	Koncepcja energetycznie ortogonalnych rozkładów energii sprężystej . . .	73
7.4	Uogólnienie klasycznych energetycznych kryteriów stanu granicznego na przy- padek anizotropii	77
8	Propozycja energetycznego kryterium stanu granicznego dla materiałów anizotropowych wykazujących asymetrię zakresu sprężystego	80
8.1	Sformułowanie ogólne	80
8.2	Funkcje wpływu i wskaźniki form naprężenia - założenia	81
8.3	Stowarzyszone prawo płynięcia Lévy'ego-Misesa	85
9	Ogólny algorytm identyfikacji kryterium stanu granicznego	87
10	Specyfikacja ogólnej postaci warunku granicznego dla wybranych symetrii materiału	89
10.1	Ortotropia	90
10.2	Symetria trygonalna	91
10.3	Symetria tetragonalna	93
10.4	Symetria cylindryczna (układ heksagonalny)	97
10.5	Symetria kubiczna (układ regularny)	100
10.6	Izotropia	104
10.7	Materiały objętościowo izotropowe	106
10.7.1	Ortotropia objętościowo izotropowa	108
10.7.2	Symetria tetragonalna objętościowo izotropowa	109
10.7.3	Symetria cylindryczna objętościowo izotropowa	110
10.8	Energetycznie ortogonalny rozkład \mathcal{T}_{sym}^2 nie będący rozkładem na podprze- strzenie własne \mathbf{C} i \mathbf{S}	112
10.9	Symetrie płaskie	115
10.9.1	Płaska ortotropia	115
10.9.2	Płaska symetria kwadratu	126
10.9.3	Płaska izotropia	127
11	Podsumowanie	128
A	Przekształcenia geometryczne w \mathcal{E}^3 i ich reprezentacje w \mathcal{T}_{sym}^2	130
B	Symetrie liniowej sprężystości	135
B.1	Pełna anizotropia (układ trójskośny)	137
B.1.1	Symetria trójskośna objętościowo izotropowa	137
B.2	Symetria monokliniczna (układ jednoskośny)	139
B.2.1	Symetria monokliniczna objętościowo izotropowa	140
B.3	Ortotropia (układ rombowy)	143
B.3.1	Ortotropia objętościowo izotropowa	146
B.4	Symetria trygonalna (układ trygonalny)	149
B.4.1	Symetria trygonalna objętościowo izotropowa	152
B.5	Symetria tetragonalna (układ tetragonalny)	154
B.5.1	Symetria tetragonalna objętościowo izotropowa	157
B.6	Symetria cylindryczna (układ heksagonalny)	159

B.6.1 Symetria cylindryczna objętościowo izotropowa	162
B.7 Symetria kubiczna (układ regularny)	164
B.8 Izotropia	165
B.9 Zestawienie podstawowych charakterystyk przestrzennych symetrii sprężystych	167
B.10 Symetrie płaskie	168
B.10.1 Pełna płaska anizotropia	168
B.10.2 Płaska ortotropia	168
B.10.3 Płaska symetria kwadratu	169
B.10.4 Płaska izotropia	171
B.10.5 Zestawienie podstawowych charakterystyk płaskich symetrii sprężystych	172
C Spis oznaczeń	173
D Literatura	176

1 Wstęp

Problemy związane z zagadnieniem wyężenia materiału oraz wyznaczeniem warunków stanu granicznego są kwestiami istotnymi dla mechanicznego opisu zachowania odkształcalnych ciał stałych. Można stwierdzić nawet - parafrazując pierwsze zdania pracy M. T. Hubera [49] - że zagadnienia te stanowią „*najogólniejszy cel nauki o wytrzymałości.*”

W ciągu wieków, w miarę jak wiedza ludzkości na temat właściwości mechanicznych ciał stałych poszerzała się wraz z rozwojem metod badawczych oraz aparatu matematycznego, pojawiały się kolejne propozycje kryteriów, które służyć miały oszacowaniu wytrzymałości materiałów czy też wyznaczeniu takich warunków, których spełnienie równoważne byłoby pojawieniu się stanu z różnych względów uznanego za stan „graniczny” - stan, w którym właściwości materiału zmieniają się w istotny sposób (brak liniowości związków fizycznych, uplastycznienie, pęknięcie itp.). Szczególną cechą omawianych zagadnień jest fakt, iż od samego początku uczeni poruszali się bardziej w sferze przypuszczeń (właśnie „hipotez” wyężenia materiału) czy też wyznaczanych empirycznie modeli przybliżonych aniżeli zajmowali się ścisłymi modelami mechanicznymi opisującymi badane zjawiska. Nie mogło być inaczej, skoro samo tylko zorientowanie się w złożoności struktury ciał stałych oraz zdobycie choćby ogólnego pojęcia o mechanizmach nimi rządzących wymagało zarówno precyzyjnych narzędzi obserwacyjnych i badawczych jak również wyszukanych metod analitycznych oraz obliczeniowych. Nie znaczy to wcale, iż propozycje wysuwane w minionych stuleciach tracą cokolwiek ze swojej wartości - dość wspomnieć, iż hipoteza granicznego naprężenia stycznego, zaproponowana przez Ch. A. de Coulomb już w 1776 roku [21], a która pojawiała się w ciągu wieków kilkakrotnie (H. É. Tresca 1864 [108], J. J. Guest 1899 [37]), także i dzisiaj okazuje się być jedną z najlepszych propozycji dla niektórych materiałów w wybranych stanach naprężenia. Pomysł ten, bazujący na stosunkowo prostych, makroskopowych obserwacjach, a płynący w dużej mierze z intuicji stał się podstawą także i dla zupełnie nowych propozycji R. von Misesa z 1928 roku [67].

Kolejnym powodem, dla którego ścisły opis teoretyczny rozważanego problemu w ciągu wieków wielokrotnie ustępował miejsca „zaledwie” hipotezom, jest swego rodzaju sprzeczność między złożonością rzeczywistej, cząsteczkowej budowy materii i wynikającym z niej szczególnym charakterem omawianych zjawisk zachodzących przecież na poziomie molekularnym a prostotą kontynualnego modelu matematycznego stosowanego powszechnie do opisu ciał odkształcalnych. Nie da się bowiem ukryć, że jedynym „poprawnym z ściśle teoretycznego punktu widzenia” modelem, dającym największą szansę na uzyskanie właściwego (możliwie

najdokładniej odpowiadającego rzeczywistości) opisu badanych zjawisk, byłby precyzyjny model molekularny, biorący pod uwagę przestrzenną strukturę materii (układy krystalograficzne, dyslokacje, ich rodzaje i rozkład wraz z uwzględnieniem jego losowości, układy ziaren itd.) jej właściwości mechaniczne (cechy fizyczne, oddziaływania międzycząsteczkowe, interakcje między ziarnami itd.), mechanizmy omawianych zjawisk (przyczyny i mechanizmy ruchów dyslokacji, pęknięć, propagacji uszkodzeń, ewolucji pustek itd.) oraz inne czynniki (stan materiału przed deformacją, oddziaływania termiczne i inercyjne itd.). Złożoność takiego modelu posiadającego miliardy stopni swobody, który w niektórych aspektach musiałby posiłkować się precyzją i (niestety) skomplikowanym formalizmem mechaniki kwantowej i który z całą pewnością musiałby być modelem statystycznym, jest niewyobrażalna.

Tak samo złożony powinien być zresztą jakikolwiek „teoretycznie poprawny” model ciała odkształcalnego. Jednakże model kontynuacyjny, łączący w sobie względną prostotę rachunków oraz zwięzłość i elegancję zapisu, okazuje się być narzędziem wystarczająco precyzyjnym w większości zagadnień dotyczących makroskopowej deformacji ciał stałych, który niekiedy uprzedza nawet odkrycia doświadczalne. Podobnie i w przypadku formułowania warunków stanu granicznego wydaje się, iż mechanika ośrodków ciągłych dostarcza narzędzi dostatecznie precyzyjnych dla poprawnego opisu zjawisk, których natura stoi niejako w sprzeczności z fundamentalnym założeniem ciągłej struktury materii. Jest to oczywiście osobiste przeświadczenie autora, nie zaś jakiegokolwiek definitywne twierdzenie - wiadomo, iż istnieje szereg zjawisk, których wspomniany klasyczny model ciągły nie jest w stanie opisać (dla przykładu wystarczy tu wspomnieć choćby o opisie w ramach liniowej teorii sprężystości heksagonalnego układu krystalograficznego), zatem także i w kwestii makroskopowego opisu granicznego stanu materiału spodziewać się należy wystąpienia takich rzeczywistych efektów, których model ten nie będzie w stanie uwzględnić. W podobnym duchu wypowiadał się zresztą Mises wyrażając swoje wątpliwości dotyczące możliwości opisu wzmocnienia plastycznego: *„Die Voraussetzung (...), daß die Spannung während des Fließens an der Elastizitätsgrenze verharrt, ist ein bewußter Verzicht darauf, die wohlbekannte Erscheinung der «Verfestigung» mit der Plastizitätstheorie zu erfassen. Da man vermuten muß, daß die Verfestigung mit einer Aenderung des Gefüges zusammenhängt, wird es wohl kaum möglich sein, ihr im Rahmen der Kontinuitätsmechanik gerecht zu werden.”*¹ [67]. O ile mechanika continuum nie dostarcza narzędzi pozwalających wyjaśnić naturę tego zjawiska, o tyle, jak wiadomo, istnieje obecnie wiele modeli kontynuacyjnych, które z dobrą dokładnością opisują zjawisko wzmocnienia. Nie wydaje się jednak uzasadnionym, aby silić się na uwzględnienie wszystkich a nawet zdecydowanej większości poznanych zjawisk (np. poprzez stosowanie teorii niesymetrycznej sprężystości lub wykorzystanie silnie nieliniowych związków konstytutywnych uwzględniających zjawiska zarówno sprężyste, plastyczne, lepkie i kruche), jeśli miałyby się to odbywać kosztem przydatności przyjętego rozwiązania do celów praktycznych - ostatecznym potwierdzeniem wartości teoretycznych rozważań w zakresie mechaniki jest ich zastosowanie w szerokiej praktyce inżynierskiej. Problemy szczególnie odpowiedzialne i wymagające wysokiej precyzji powinny stanowić przedmiot oddzielnej, szczególnie ukierunkowanej na dane zagadnienie analizy.

¹Warunek (...), aby naprężenie podczas płynięcia plastycznego pozostawało na poziomie granicy sprężystości, jest świadomą rezygnacją z uwzględnienia dobrze znanego w teorii plastyczności zjawiska „wzmocnienia”. Ponieważ należy przypuszczać, że wzmocnienie jest związane ze zmianą struktury materiału, wydaje się ono raczej niemożliwe do uzasadnienia w ramach mechaniki continuum - tłum. autora

2 Cel i teza rozprawy

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie własnej propozycji energetycznego warunku stanu granicznego dla ciał anizotropowych wykazujących różnicę wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu. Praca ta ma być również próbą opisu i porównania wcześniejszych energetycznych hipotez wyteżenia materiałów anizotropowych, które do tej pory - podług wiedzy autora - nie doczekały się podobnego zestawienia i analizy.

Tezę niniejszej rozprawy doktorskiej sformułować można w następującej postaci:

„Możliwe jest sformułowanie warunku stanu granicznego dla materiałów anizotropowych o niesymetrycznym zakresie sprężystym w postaci pojedynczego równania postaci

$$\eta_1\Phi_1 + \eta_2\Phi_2 + \dots + \eta_\mu\Phi_\mu = 1, \quad \mu \leq 6, \quad (2.1)$$

w którym lewą stronę stanowi kombinacja gęstości energii sprężystych Φ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, \mu$) związanych z energetycznie ortogonalnymi przestrzeniami stanów naprężenia, zaś rolę współczynników kombinacji pełnią funkcje zależne od aktualnego stanu naprężenia.”

3 Motywacja

Duża liczba najróżniejszych pod względem tak treści jak i formy hipotez wyteżenia materiału, jaka została opublikowana w przeciągu kilku ostatnich dekad, powinna nasunąć pytanie o sens formułowania kolejnej hipotezy, szczególnie w sytuacji, w której żadna z poprzednich propozycji nie została dotąd definitywnie potwierdzona bądź obalona na drodze konfrontacji z rezultatami doświadczeń. Można wskazać zasadniczo dwa główne powody, dla których podjęto próbę stworzenia kolejnej alternatywy dla bardzo licznych dostępnych aktualnie propozycji warunku granicznego. Pierwszy z nich jest zapewne tożsamy z tym, który nakłonił R. von Misesa do pracy badawczej, której zwieńczeniem był jego wybitny artykuł z 1928 roku [67] - chodzi o wzrastające zainteresowanie uczonych i specjalistycznych zakładów przemysłowych materiałami anizotropowymi, nawet mimo tego, że ich zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu nadal nie jest powszechne. W czasie, gdy Mises publikował swoją pracę, większość eksperymentów zdawała się potwierdzać zaproponowany przez niego w artykule z 1913 roku [66] warunek graniczny dla materiałów izotropowych, który do pewnego stopnia antycypował w swojej pracy z 1904 roku M. T. Huber inspirowany zapewne dawniejszymi propozycjami Beltramiego (1885 [8]). W krąg zainteresowań Misesa wkroczyły bowiem materiały, których jego poprzednia propozycja nie dotyczyła, choć nie znajdowały one powszechnego zastosowania w typowych zagadnieniach technicznych. Chodziło bowiem o ciała krystaliczne (czy też ujmując rzecz ogólniej - ciała anizotropowe), których strukturą i właściwościami mechanicznymi już od dłuższego czasu zajmowała się coraz większa liczba osób (F. Mohs, W. H. Miller, A. Bravais, W. Voigt - by wymienić tylko tych najbardziej znanych). O tym, że była to tematyka stale aktualna, świadczy spora liczba przytoczonych w [67] publikacji innych autorów oraz wyników eksperymentów przeprowadzonych na próbkach monokrystalicznych ([104], [84], [31]). Warto

wspomnieć także, iż w tym samym czasie wyteżeniem materiałów anizotropowych zajmował się W. Burzyński [16]. Dopiero później okazać się miało, iż te pozornie oderwane od kwestii praktycznych rozważania znalazły szerokie zastosowanie w opisie zachodzących w wielu procesach przemysłowych deformacji materiałów poddanych uprzednio obróbce plastycznej, która sama indukowała anizotropię właściwości mechanicznych w pierwotnie izotropowym materiale. Podobnie i w dzisiejszych czasach zaobserwować można coraz większe zainteresowanie i coraz szersze zastosowanie materiałów o wewnętrznej mikro- lub nanostrukturze o niskiej nieraz symetrii, które wykazują szereg właściwości, których dotychczas formułowane kryteria stanu granicznego nie musiały uwzględniać, jak np. asymetria zakresu sprężystego, wpływ naprężenia hydrostatycznego, zależność od kąta Lodego itp. Najlepszymi przykładami mogą być tutaj najróżniejszych rodzajów materiały kompozytowe, w których niejednokrotnie faza wtrącona charakteryzuje się zaplanowanym, uporządkowanym rozkładem przestrzennym.

Drugim powodem będącym bezpośrednim bodźcem do podjęcia zadania sformułowania nowego kryterium granicznego jest fakt, iż zdecydowana większość z zaproponowanych dotychczas warunków stanu granicznego nie jest w stanie w zadowalający sposób uwzględnić wszystkich spośród wspomnianych powyżej zjawisk, jakimi charakteryzują się nowe materiały. Ponadto te, które sformułowane są w sposób na tyle ogólny, iż opis tych specyficznych cech materiałowych jest możliwy, często nie są w dostatecznie ścisły sposób motywowane fizycznie - tj. nie odwołują się ściśle do konkretnych zjawisk bądź wielkości fizycznych, które podawałyby za przyczynę lub miarodajną wartość wskazującą na wystąpienie stanu granicznego. Są raczej matematyczną aproksymacją za pomocą funkcji o założonej postaci. Chodzi tu przede wszystkim o grupę warunków granicznych, które można by zaklasyfikować jako „warunki postaci kwadratowego wielomianu tensorowego”. Nie da się ukryć, że kwadratowe funkcje naprężeń znalazły ogromne zastosowanie w mechanice ośrodków ciągłych w charakterze potencjału sprężystego, potencjału plastycznego lub warunku stanu granicznego dla materiałów izotropowych - wydają się one być tym bardziej uzasadnione, iż interpretować je można w kategoriach funkcji gęstości energii odkształcenia (energetyczną interpretację warunku Maxwella-Huber-Misesa podał w 1924 H. Hencky [38] zaś energetyczną interpretację uogólnionego warunku Misesa z 1928 roku podał w 1984 Rychlewski [87]). Wydaje się jednak, iż nie są to dostateczne powody by ograniczać klasę funkcji, które uważać będziemy za potencjalnie możliwe warunki graniczne, do funkcji kwadratowych, tym bardziej, że założenie z góry konkretnej formy matematycznej pociąga za sobą niekiedy nieprzewidywalne ograniczenia co do możliwości opisu specyficznych właściwości materiału. Dobrym przykładem może być tutaj klasyczny warunek Maxwella-Hubera-Misesa, który nie nadaje się do opisu izotropowych materiałów o niesymetrycznym zakresie sprężystym, lub takich, które wykazują zależność od naprężenia hydrostatycznego - natomiast dodanie członów liniowych związanych z naprężeniem hydrostatycznym (które jednakowoż rujną jego ściśle energetyczną interpretację) umożliwia proste uwzględnienie tych zjawisk [16]. Kontynuując to rozważanie - dodanie tych liniowych członów, nie umożliwia znowuż ścisłego opisu zależności od kąta Lodego. W ten sposób łatwo wykazać, że konieczne jest szersze spojrzenie na problem poszukiwania funkcji zdalnych do wyznaczenia warunku granicznego dającego wyniki zgodne z doświadczeniem.

Z pragmatycznym podejściem autorów warunków granicznych w typie prostych funkcji kwadratowych ściera się koncepcja odmienna, intuicyjnie lepiej motywowana z fizycznego

punktu widzenia, choć wciąż daleka do ścisłych wyprowadzeń na podstawie solidnych podstaw teoretycznych. Chodzi mianowicie o stosunkowo mało rozpowszechnione (pomijając klasyczny warunek Maxwella-Hubera-Misesa) tzw. „energetyczne” hipotezy wyteżenia materiału, w których za miarę wyteżenia przyjmuje się pewne wielkości pochodne gęstościom energii odkształcenia, związanym z wybranymi stanami deformacji. Ich przydatność ilustruje powszechne stosowanie kryterium Maxwella-Hubera-Misesa, czy też stosunkowo szerokie spektrum różnych klas powierzchni granicznych opisywanych hipotezami Burzyńskiego [16] czy Schleichera [98]. Pierwszą próbę rozszerzenia tej koncepcji na materiały anizotropowe podjął w swej rozprawie doktorskiej Burzyński już w roku 1928, w tym samym czasie, gdy własne badania dotyczące ciał krystalicznych prowadził Mises. Kolejne próby specyfikacji energetycznego kryterium granicznego dla materiałów anizotropowych były dziełem W. Olszaka i W. Urbanowskiego ([71] 1956) zainspirowanych pracami I. I. Goldenblata ([33] [34] 1955). Dopiero jednak nowatorskie podejście do liniowych związków konstytutywnych od strony algebry liniowej, jakie zastosował J. Rychlewski [85] [86], umożliwiło najogólniejszy a zarazem prosty i precyzyjny opis matematycznej struktury anizotropii sprężystej. Pozwoliło to na sformułowanie bardziej ścisłych i klarownych w interpretacji kryteriów przez samego Rychlewskiego [87] oraz W. Olszaka i J. Ostrowską-Maciejewską [72]. Jednakże wspomniane warunki graniczne, z uwagi na ścisłą energetyczną interpretację która w konsekwencji nie czyni różnicy między np. stanami rozciągania i ściskania, w większości przypadków nie są w stanie uwzględnić zjawiska asymetrii zakresu sprężystego - te zaś, które mają taką możliwość, wykazują inne nieścisłości w sformułowaniu.

Najważniejszymi własnościami, których uwzględnienie w jednym warunku granicznym jest celem pracy, są: interpretacja fizyczna warunku granicznego oraz uwzględnienie zarówno anizotropii sprężystej jak i asymetrii zakresu sprężystego. Bezpośrednią inspiracją dla wprowadzenia własnej propozycji warunku granicznego był sposób, w jaki Burzyński uogólnił hipotezę swojego nauczyciela, M. T. Hubera, a który umożliwił, przy zachowaniu klarownej interpretacji fizycznej, uwzględnienie w opisie materiałów o niesymetrycznym zakresie sprężystym oraz tych, w których wyteżenie w różny sposób zależy od naprężenia hydrostatycznego [16]. Chodzi o koncepcję tzw. „funkcji wpływu” wybranego stanu naprężenia na udział odpowiadającej mu energii odkształcenia w całościowej mierze wyteżenia materiału. Przedstawiona w niniejszej pracy hipoteza jest analogicznym rozszerzeniem energetycznego warunku granicznego Rychlewskiego [87]. Należy się spodziewać, iż poszukiwane funkcje wpływu, z uwagi na złożoną strukturę procesów, do których opisu mają służyć, posiadać będą skomplikowaną formę. Pomocą w jej przewidywaniu mogą być numeryczne symulacje omawianych procesów w ramach dynamiki molekularnej oraz analiza wyników doświadczalnych przy różnych orientacjach wewnętrznej struktury materiału próbek względem przyłożonego obciążenia w różnych stanach naprężenia. Te ostatnie mogą także służyć weryfikacji poprawności przyjętego modelu.

4 Układ i zakres pracy

Praca podzielona jest na trzy części. Pierwsza z nich, obejmująca rozdziały od 1 do 6, ma charakter wprowadzenia oraz przeglądu literatury i traktuje ogólnie o przedmiocie badań oraz o stosowanych narzędziach analizy matematycznej. W szczególności, część pierwsza poświęcona jest ogólnemu opisowi wcześniejszych prób formułowania warunków granicznych dla materiałów anizotropowych, omówieniu zjawisk fizycznych, których uwzględnienie jest jednym z celów pracy (asymetria zakresu sprężystego, wpływ ciśnienia, wpływ kąta Lodego) oraz przedstawieniu przyjętego kontynuального modelu anizotropowego ciała liniowo sprężystego oraz wynikających z jego specyfiki ogólnych własności tego modelu - uzupełnieniem tej części pracy są załączniki A i B, w których w bardziej szczegółowy sposób opisano stosowany aparat matematyczny oraz scharakteryzowano symetrie liniowej sprężystości.

Część druga pracy stanowi pogłębione studium nad energetycznymi hipotezami wyężenia dla materiałów anizotropowych. Szczegółowej analizie oraz porównaniu poddane są najistotniejsze propozycje hipotez tego typu, jakie pojawiły się dotąd w literaturze, mianowicie: hipoteza Burzyńskiego (1928 r. [16]), propozycja potencjału plastycznego w postaci pseudoenergii odkształcenia postaciowego Olszaka - Urbanowskiego (1956 r. [71]) oraz późniejsza propozycja Olszaka i Ostrowskiej-Maciejewskiej (1985 r. [72]) skonfrontowane z koncepcją uogólnienia energii odkształcenia postaciowego zaproponowaną przez Misesa (1928 r. [67]) oraz koncepcją energetycznie ortogonalnych rozkładów energii sprężystej Rychlewskiego (1984 r. [87]), hipoteza Rychlewskiego (1984 r. [87]) oraz możliwe uogólnienia klasycznych energetycznych hipotez wyężenia formułowanych dla materiałów izotropowych.

Trzecia część pracy poświęcona jest przedstawieniu własnej propozycji kryterium stanu granicznego autora. Przedstawiono w niej sformułowanie ogólne hipotezy oraz poczynione założenia zaopatrzone w stosowny komentarz. Zaproponowano ogólny schemat specyfikacji kryterium stanu granicznego. W dalszej części podjęto próbę uściślenia postaci omawianego kryterium w zależności od klasy symetrii cech sprężystych rozpatrywanego materiału, przy założeniu, że rozkładem energii sprężystej stanowiącym podstawę sformułowania kryterium jest rozkład główny, związany z rozkładem widmowym tensorów sprężystości. W sposób bardziej szczegółowy omówione zostały przypadki płaskiego stanu naprężenia.

Praca zakończona jest krótkim podsumowaniem, po którym znaleźć można załączniki poświęcone wybranym elementom poruszanych zagadnień. W załączniku A zebrano bardziej szczegółowe informacje na temat przekształceń geometrycznych w przestrzeni fizycznej oraz ich reprezentacjom w przestrzeni symetrycznych tensorów drugiego rzędu. Załącznik B jest podsumowaniem wyników uzyskanych na drodze analizy widmowej tensorów sprężystości dla kolejnych klas symetrii. W obydwu załącznikach zamieszczono pewne własne wyniki studiów nad danymi zagadnieniami. Pracę zamyka spis oznaczeń oraz wykaz cytowanych publikacji uszeregowany alfabetycznie według nazwisk autorów.

5 Przedmiot badań

5.1 Przyjęty model materiału

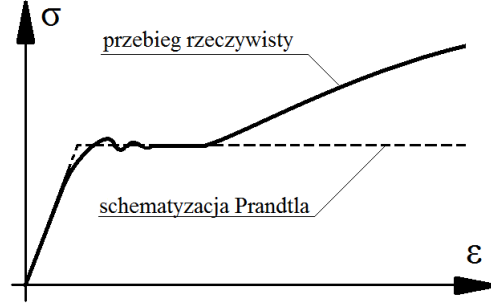
Bazujemy na gruncie klasycznych równań liniowej teorii sprężystości. Zakłada się, że przemieszczenia i odkształcenia są małe (liniowość geometryczna) oraz, że konfiguracja aktualna materiału jest w przybliżeniu równa konfiguracji początkowej, co prowadzi do równoważności opisu materialnego z opisem przestrzennym i umożliwia pominięcie różnic pomiędzy wielkościami opisującymi wielkości fizyczne stosowanymi w obydwu opisach - chodzi tu przede wszystkim o tensor rzeczywistych naprężeń Cauchy'ego oraz tensor nominalnych naprężeń Pioli-Kirchhoffa I rodzaju. Przyjmujemy zatem, iż rozpatrywanymi w związkach konstytutywnych wielkościami są tensor naprężeń Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$ oraz tensor małych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ będący symetryczną częścią gradientu przemieszczenia $\mathbf{H} = \mathbf{u} \otimes \nabla$. Zakładamy ponadto, iż materiał jest hipersprężysty, tj. istnieje skalarna funkcja argumentu tensorowego $W(\boldsymbol{\sigma})$ zwana potencjałem sprężystym, która wiąże ze sobą naprężenia z odkształceniami. Dla każdego zagadnienia jest więc spełniony poniższy układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\sigma}} W \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} + \rho b_i = \ddot{u}_i \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

gdzie ρ oznacza gęstość materiału, \mathbf{u} wektor przemieszczenia a \mathbf{b} wektor sił masowych. Ponadto spełnione są odpowiednie przemieszczeniowe warunki brzegowe na utwierdzonej (lub poddanej wymuszeniu kinematycznemu) części brzegu Γ_u , naprężeniowe warunki brzegowe na obciążonej części brzegu Γ_q oraz warunek początkowy dla chwili t_0 określający początkowe położenie i rozkład prędkości punktów ciała.

Większość rozważań dotyczy zakresu sprężystego - między innymi ze względu na fakt, że spośród wszystkich stanów, jakie zwykle przyjmować się za graniczny, pierwszym jest granica proporcjonalności. Głównym powodem skupienia się na tym właśnie stanie granicznym jest prostota i jednoznaczność związków konstytutywnych między naprężeniem i odkształceniem, co z kolei umożliwia łatwe wyrażenie gęstości energii odkształcenia sprężystego, której miara będzie wykorzystywana do opisu poziomu wyężenia materiału. Kolejną przyczyną takiego podejścia do problemu jest fakt, iż (pomijając występujący w rzeczywistości zakres nieliniowej sprężystości oraz zakres bardzo małych odkształceń plastycznych) postępująca po zakresie liniowo sprężystym deformacja plastyczna nie pozostaje bez istotnego wpływu na cechy mechaniczne materiału, w tym na jego parametry konstytutywne (anizotropia wymuszona procesami obróbki plastycznej), co znakomicie komplikuje opis zagadnienia. Przyjmujemy zatem, iż rozpatrywany materiał jest idealnie sprężysto-plastyczny (schematyzacja Prandtla - patrz rys. 5.1), zaś rozważanym stanem granicznym jest umowna granica proporcjonalności

będąca w tym przypadku równa granicy plastyczności.



Rysunek 5.1: Porównanie rzeczywistego przebiegu deformacji i schematyzacji Prandtla (modelu idealnie sprężysto-plastycznego)

5.1.1 Zakres sprężysty

W zakresie sprężystym rozpatrywany jest klasyczny model ciągły materiału liniowo hiperprężystego (ciało Hooke'a - liniowość fizyczna), w którym potencjał sprężysty założony jest w postaci jednorodnej kwadratowej funkcji naprężeń Φ , danej formą kwadratową wyrażoną przez tensor czwartego rzędu \mathbf{C} :

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (5.2)$$

$$\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{d}{d\alpha} [\Phi(\boldsymbol{\sigma} + \alpha d\boldsymbol{\sigma})]_{\alpha=0} = \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \alpha (d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\sigma}) + \alpha^2 d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\sigma}]_{\alpha=0} = (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

przy czym w ostatniej równości założono, że $d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, co daje $C_{ijkl} = C_{klij}$. Stąd otrzymujemy uogólnione prawo Hooke'a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbb{I} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \\ \sigma_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ C_{ijmn} S_{mnlk} = S_{ijmn} C_{mnlk} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{cases} \quad (5.4)$$

gdzie \mathbb{I} jest operatorem tożsamościowym na elementach przestrzeni symetrycznych tensorów drugiego rzędu \mathcal{T}_{sym}^2 . Tensory sprężystości \mathbf{C} i \mathbf{S} nazywamy odpowiednio tensorem podatności i sztywności. O tensorach sprężystości zakładamy, iż są dodatnio określone. W ogólności mają one $3^4 = 81$ składowych, jednak z uwagi na symetrię tensorów naprężenia i odkształcenia oraz z uwagi na założoną wcześniej własność potencjału sprężystego, składowe te nie są niezależne i spełniają warunki symetrii:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \\ S_{ijkl} &= S_{jikl} = S_{ijlk} = S_{klij} \end{aligned} \quad (5.5)$$

co redukuje liczbę niezależnych składowych tensorów sprężystości do 21. Potencjał sprężysty Φ można wyrazić zatem w postaci:

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \underbrace{(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma})}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \underbrace{(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.6)$$

i interpretować go można jako gęstość pracy wykonanej przez naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ na spowodowanych przez nie odkształceniach $\boldsymbol{\varepsilon}$ czy też jako gęstość energii odkształcenia sprężystego.

5.1.2 Zakres deformacji plastycznych

Praca niniejsza nie stawia sobie za przedmiot rozważań opisu plastycznej deformacji ciał stałych. Można to w obrazowy sposób ująć stwierdzając, iż krąg zagadnień, którymi będziemy się dokładnie zajmować, obejmuje jedynie stan graniczny wraz z całym poprzedzającym go zakresem, tj. obszarem, który jest dziedziną dla formułowania warunków wystąpienia rozważanego stanu granicznego. Jest co najmniej kilka przyczyn takiego podejścia do omawianego problemu. Po pierwsze, wybór którejkolwiek spośród rozlicznych, zazwyczaj równie wartościowych propozycji dotyczących modelowania deformacji plastycznej w żadnym stopniu nie wpływa (przy zastosowanej schematyzacji związków konstytutywnych) na tok rozważań dotyczących stanu poprzedzającego wystąpienie odkształceń niesprężystych. Po drugie, po przekroczeniu granicy sprężystości pojawia się szereg zjawisk, których dokładny opis był i nadal jest przedmiotem odrębnych studiów naukowców specjalizujących się w tym obszarze mechaniki ośrodków odkształcalnych - skupienie się na jednym tylko modelu plastyczności (wybrany przecież w sposób arbitralny) nasuwa pytanie o powód takiego właśnie a nie innego wyboru. Jest to też kolejny powód, dla którego zastosowano wspomnianą już schematyzację Prandtla - model ciała idealnie sprężysto-plastycznego nie uwzględniający wielu znanych przecież powszechnie zjawisk zachodzących nawet w najprostszych przypadkach deformacji plastycznej (np. występowanie górnej i dolnej granicy plastyczności czy zjawiska wzmocnienia plastycznego itp.).

Z drugiej strony szeroko rozpowszechnione jest podejście zaproponowane w 1928 roku przez Misesa [67], które wiąże ze sobą warunek stanu granicznego z właściwościami mechanicznymi ciała w stanie plastycznym i z samym przebiegiem deformacji plastycznej - chodzi oczywiście o tzw. stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego. Wiele spośród stosowanych warunków stanu granicznego było formułowanych zarówno jako warunek graniczny jak i jako potencjał plastyczny. Będąc więc świadomymi tej podwójnej roli jaką może (lecz nie musi) spełniać warunek plastyczności, przyjmijmy dla ustalenia uwagi, iż w przyjętym modelu, w chwili przejścia materiału z stanu sprężystego w stan plastyczny, tj. gdy zostanie spełniony warunek plastyczności

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = const. \quad (5.7)$$

dla przyrostów odkształceń plastycznych obowiązywać zaczynają konstytutywne związki klasycznej teorii płynięcia plastycznego Lévy'ego-Misesa:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \boldsymbol{\partial}_\sigma \Psi \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.8)$$

gdzie $d\lambda$ jest dodatnim współczynnikiem proporcjonalności zależnym od historii deformacji, zaś Ψ jest potencjałem plastycznym. W przypadku prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem plastyczności przyjmujemy $\Psi = f$. Przyjęcie modelu plastyczności wg teorii Lévy'ego-Misesa nie służy w obecnych rozważaniach dokładnemu opisowi deformacji plastycznej, a jedynie zwróceniu uwagę na alternatywną rolę, jaką pełnić może proponowany w niniejszej pracy warunek stanu granicznego - wykorzystanie go w charakterze potencjału plastycznego okaże się prowadzić do interesujących rezultatów.

5.2 Stan graniczny

Przystępujemy wreszcie do sprecyzowania głównego przedmiotu analizy obecnego opracowania. Chodzi mianowicie o zdefiniowanie stanu granicznego, warunkom wystąpienia którego, poświęcona jest ta rozprawa. Z uwagi na przyjętą schematyzację związków konstytutywnych, przyjęcie modelu idealnie sprężysto-plastycznego, oczywiste jest, iż rozpatrywanym stanem granicznym jest stan przejścia materiału ze stanu idealnie liniowo sprężystego do stanu idealnie plastycznego - w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia odpowiada to momentowi osiągnięcia przez naprężenie poziomu granicy plastyczności, która przy naszym uproszczeniu, jest dana jednoznacznie i tożsama jest z granicą proporcjonalności. Wiadomo jednak, iż w rzeczywistym przebiegu prostej deformacji typowego sprężysto-plastycznego materiału ciągłego wyróżnić można szereg punktów charakterystycznych, wśród których do najważniejszych należą:

- **Granica proporcjonalności k^H** - dla materiałów, które charakteryzują się występowaniem zakresu liniowo sprężystego jest to pierwszy ze stanów granicznych, jaki można określić. Jest to maksymalne naprężenie, przy którym w dalszym ciągu obowiązują jeszcze liniowe związki konstytutywne (prawo Hooke'a) - po przekroczeniu jego wartości, materiał zaczyna zachowywać się nieliniowo, choć w dalszym ciągu może być to zachowanie sprężyste, przy którym nie występują odkształcenia trwałe.
- **Granica sprężystości k^e** - maksymalne naprężenia, przy którym nie występują jeszcze trwałe odkształcenia plastyczne bądź występujące odkształcenia trwałe są pomijalnie małe. W ogólności $k^e \neq k^H$, a zatem po przekroczeniu granicy proporcjonalności związki konstytutywne nie są już liniowe, jakkolwiek sama deformacja nadal ma charakter sprężysty (odwracalny). Najczęściej granica ta nie jest dana jednoznacznie z uwagi na występowanie odkształceń plastycznych na tyle małych, że można je pominąć, lub wprost nie dających się zmierzyć. Z tego względu definiuje się umowną granicę sprężystości $k_{\varepsilon_0}^e$ będącą wartością naprężenia odpowiadającego pewnej ustalonej dla danego materiału wielkości odkształcenia plastycznego ε_0 równej np. $\varepsilon_0 = 0,05\%$.

- **Granica plastyczności k^p** - możliwa do jednoznacznego określenia jedynie w sytuacji, gdy przejście ze stanu sprężystego w stan plastyczny jest bardzo gwałtowne, co często ma miejsce w rzeczywistości. Jest to wartość naprężenia, po osiągnięciu której, materiał w znaczniejszej mierze podlega deformacji plastycznej (trwałej), w szczególności zaczyna płynąć plastycznie (jeśli taki proces zachodzi w materiale), tzn. występuje gwałtowny przyrost odkształcenia przy (w przypadku materiałów bez wzmocnienia) niewielkich zmianach wartości naprężenia, lub wyraźnie powolniejszym, niż ma to miejsce w zakresie sprężystym, wzroście (wzmocnienie) jego wartości wraz z postępującym odkształceniem. Definiuje się także górną i dolną granicę plastyczności k^{pU} i k^{pL} , przy czym definiowane są one różnie - k^{pU} definiowana jest bądź jako pierwsze lokalne maksimum przebiegu naprężenia, po którym następuje proces płynięcia plastycznego bądź jako największa wartość naprężenia w trakcie tego procesu (często jest to ta sama wartość); k^{pL} definiowana bywa jako ostatnie przed wzmocnieniem minimum w przebiegu naprężeń podczas procesu płynięcia, jako najmniejsza wartość naprężenia w tym procesie lub jako najmniejsza wartość naprężenia podczas płynięcia z pominięciem pierwszego minimum po zainicjowaniu tego procesu. W przypadku materiałów silnie nieliniowych, lub takich w których proces płynięcia nie występuje lub jego początek jest bardzo niewyraźny definiuje się umowną granicę plastyczności $k_{\varepsilon_0}^p$ będącą wartością naprężenia odpowiadającego pewnej ustalonej dla danego materiału wielkości odkształcenia plastycznego ε_0 równej np. $\varepsilon_0 = 0, 2\%$.
- **Naprężenie zrywające k^u** - maksymalna wartość rzeczywistego naprężenia, po przekroczeniu której materiał traci ciągłość, tj. następuje jego zniszczenie (pęknięcie).

Pod pojęciem stanu „granicznego” zwykło się rozumieć stan, po przekroczeniu którego materiał istotnie zmienia niektóre swoje właściwości - może to być zarówno zmiana korzystna, jak i niekorzystna, przy czym zależy to przede wszystkim od materiału i jego zastosowania. W praktyce projektowej przekroczenie stanu granicznego jest często uznawane za niekorzystne lub z różnych względów niebezpieczne. W przypadku przekroczenia granicy proporcjonalności przestają obowiązywać powszechnie stosowane w projektowaniu wzory, wyprowadzone na podstawie prawa Hooke’a, zakładającego prostą, liniową zależność między naprężeniem i odkształceniem. Jednakże różnice między przewidywaniami modelu liniowego a rzeczywistym zachowaniem materiału po przekroczeniu granicy proporcjonalności nie muszą być od razu duże ani nawet wyraźnie zauważalne. Po osiągnięciu granicy plastyczności gwałtownie przyrastające odkształcenia mogą przekraczać dopuszczalne wartości lub też pojawiająca się deformacja trwała może spowodować redukcję wartości użytkowej konstrukcji (elementu) nawet do zera. Z drugiej strony dopuszcza się deformację plastyczną np. niektórych elementów stalowych i związaną z nimi redystrybucję sił przekrojowych, uznając, iż konstrukcja w dalszym ciągu znajduje się w stanie bezpiecznym. Ponadto w przemysłowych procesach obróbki plastycznej osiągnięcie granicy plastyczności jest naturalnie pożądane i to w możliwie najbardziej ekonomiczny sposób. Osiągnięcie zaś poziomu naprężenia zrywającego uznaje się za stan graniczny z oczywistych względów.

Widać więc, iż to, co rozumiemy pod pojęciem stanu granicznego, silnie zależy od naszych potrzeb, specyfiki zagadnienia którym się zajmujemy i wreszcie od samego materiału. Duża część ze wspomnianych już uprzednio propozycji warunków granicznych powstawała przy

założeniu analogicznym do poczynionego przez nas, tj. przyjęciu modelu idealnie sprężysto-plastycznego. Z tego też powodu warunki te utożsamiane były najczęściej z warunkiem osiągnięcia stanu granicznego plastyczności. Z drugiej strony, część z tych warunków oparta jest o hipotezy granicznych wartości gęstości energii odkształcenia, przy czym wyrażenia matematyczne będące miarą tej gęstości wyprowadzane są przy założeniu liniowych związków konstytutywnych - stąd należy wnioskować, iż jedynym stanem granicznym, który hipotezy te opisują w sposób ścisły, jest stan graniczny proporcjonalności (stosowalności prawa Hooke'a). Wydaje się jednak, iż formalizm matematyczny tych warunków, w oderwaniu od jego interpretacji fizycznej, nadawać się może do opisywania także i innych stanów granicznych, przede wszystkim granicy plastyczności.

Podsumowując te rozważania należy stwierdzić, iż stanem granicznym rozważanym w niniejszej pracy jest stan granicy proporcjonalności - dotyczy to przede wszystkim energetycznych hipotez wyteżenia materiału. Jego definicja jest niezależna od pewnych arbitralnych ustaleń dotyczących np. wielkości trwałego odkształcenia plastycznego, co pozwala na jednoznaczną interpretację omawianych warunków, inaczej niż ma to miejsce w przypadku granicy plastyczności. Tożsamość granicy proporcjonalności i granicy plastyczności w modelu idealnie sprężysto-plastycznym jest jednym z powodów zastosowania tej schematyzacji.

6 Wybrane aspekty przedmiotu badań - przegląd literatury

6.1 Anizotropia właściwości mechanicznych - matematyczna struktura anizotropii liniowo-sprężystej

Jak wspomniano już wcześniej, podstawową właściwością ciał stałych, której uwzględnienie w sformułowaniu warunku granicznego przyświecało pisaniu niniejszego opracowania, jest zależność ich cech fizycznych (tutaj w szczególności mechanicznych) od kierunku ich badania - ogół tych zjawisk określa się mianem anizotropii badanych cech. Jest to właściwość charakterystyczna dla ciał o uporządkowanej przestrzennej budowie, takich jak monokryształy, kompozyty czy materiały o sterowanej symetrii (planowanej strukturze wewnętrznej). Materiały tego typu, choć coraz częściej stosowane w różnych obszarach techniki, w dalszym ciągu nie są w powszechnym użyciu - podstawową trudnością jest tutaj skomplikowany i kosztowny proces ich otrzymywania, relatywnie wysoki w stosunku do spodziewanych korzyści jakie płynęłyby z ich wykorzystania. Kolejnym problemem jest trudność opisu zachowania materiałów wykazujących niską symetrię.

Nie należy jednak przypuszczać, iż materiały anizotropowe są rzadkim przypadkiem w praktyce przemysłowej. Świadomym tego był już w 1928 roku Burzyński, gdy z godną uwagi intuicją pisał: *„Nasuwa się pytanie czy i jak uwzględnia dotychczasowa forma wpływy nieuniknionej często różnokierunkowości materiału? Porównanie wyrażeń na Φ_v i Φ_f dla ciał różnokierunkowych (...) wskazuje na wybitną różnicę jedynie w wyrażeniach na Φ_f . Należy zatem przypuszczać, że i w omawianej hipotezie [wyteżenia materiału] analogiczną zmianą*

musi się wydatnić owa nieuchwytna nierównokierunkowość. Użycie słowa «nieuchwytna» ma swoje głębsze podstawy (...) Zadanie (...) obecnie omawiane polega na uchwyceniu wpływów różnokierunkowości nieznacznej, dającej się trudno stwierdzić ilościowo - jednakże do pewnego stopnia widocznej jakościowo” [16]. W zdaniu tym Burzyński zdaje się dawać wyraz praktycznemu, inżynierskiemu podejściu, które przyjmuje za punkt wyjścia świadomość „nieuniknionej” niedoskonałości stosowanych materiałów, które jako efekt przemysłowej obróbki czy też właściwości mechanicznych samego materiału odbiegają „nieznacznie” od wyidealizowanego modelu ciała izotropowego. Odstępstwo to jest tym bardziej „nieuchwytnie”, iż w ogromnym stopniu zależy od natury i przebiegu omawianych procesów a także od samego materiału i elementu z niego wykonanego - w wielu przypadkach sztucznie indukowana anizotropia jest wręcz pomijalna. Z drugiej strony, nawet tak niewielka zmiana w strukturze może w określonych warunkach prowadzić do zjawisk „jakościowo” widocznie odmiennych, niż ma to miejsce w przypadku ciał izotropowych. W podobnym tonie wyrażał się dwie dekady później Hill pisząc: *„With increasing strain, however, a preferred orientation of crystal planes and directions gradually develops, and the individual crystals become elongated to form a characteristic fibrous texture in the direction of the most severe tensile strain. In this way an originally isotropic metal becomes anisotropic in respect of many physical properties. It is well known that the fibre texture produced in the technological forming processes, rolling, drawing, and extrusion, is sometimes the cause of undesirable properties in the final product (...) Preferred orientation is not the only cause of anisotropic plastic properties: laminar inclusions and cavities occasionally produce similar effects. Residual or internal stresses are another cause (...) Anisotropy, then, is not to be considered a phenomenon of rather rare occurrence. It is difficult to avoid in metal working and is invariably developed by any severe strain. Whenever it is present the theories of plastic flow for isotropic metals are only valid to a first approximation. This approximation is good enough for many purposes, but there are also many phenomena for which these theories fail to account”*² [40], „[this approximation] becomes less good as the deformation continues”³ [41]. Zgadzając się z tymi opiniami, można stwierdzić, że uwzględnienie anizotropii związków fizycznych w wykorzystywanych modelach matematycznych - w szczególności w zagadnieniach wyznaczania kryteriów stanu granicznego - jest jednym z podstawowych celów, jaki przyświecać powinien badaniom nad opisem deformacji ciał odkształcalnych.

Matematyczny opis liniowych związków konstytutywnych (w zakresie sprężystym) dla ciał

²Jednakże wraz z postępującym odkształceniem, stopniowo wykształcają się preferowane orientacje płaszczyzn krystalograficznych oraz kierunków, a pojedyncze kryształy ulegają wydłużeniu tworząc charakterystyczną włóknistą teksturę w kierunku największego odkształcenia rozciągającego. W ten sposób pierwotnie izotropowy metal staje się anizotropowy pod względem wielu właściwości fizycznych. Powszechnie wiadomo, że tekstura włókien, wytwarzana w technologicznych procesach kształtowania takich jak walcowanie, ciągnięcie czy wyciskanie, jest niekiedy przyczyną niepożądanych właściwości końcowego produktu. (...) Preferowana orientacja nie jest jedyną przyczyną anizotropowych właściwości plastycznych: wtrącenia warstwowe oraz pustki sporadycznie dają podobny efekt. Naprężenia resztkowe lub wewnętrzne są kolejną przyczyną. (...) Anizotropia zatem nie powinna być uważana za zjawisko występujące raczej rzadko. Trudno uniknąć jej w obróbce metali i nieodmiennie wykształca się ona przy każdym znacznym odkształceniu. Każdorazowo, gdy anizotropia jest obecna, teorie płynięcia plastycznego dla metali izotropowych służyć mogą jedynie za wstępną aproksymację. Przybliżenie to jest dostatecznie dobre dla wielu zastosowań, lecz istnieje także wiele zjawisk, których teorie te nie mogą uwzględnić. - tłum. autora

³[Przybliżenie to] w miarę postępującej deformacji, staje się coraz gorsze. - tłum. autora

anizotropowych w ramach mechaniki ośrodków ciągłych od czasów powszechnie uznanej publikacji Voigta [112] wydawał się być nieco zapomnianą gałęzią tej dziedziny fizyki ustępującą miejsca rozwijającym się gwałtownie w tym czasie badaniom nad deformacjami plastycznymi. Zdawać się mogło, iż niewiele więcej da się powiedzieć o, co by nie mówić, prostym w swej strukturze matematycznej prawie Hooke'a (5.4). Pod koniec XX wieku J. Rychlewski zainteresował się możliwością opisu liniowych związków prawa Hooke'a z punktu widzenia algebry liniowej, tj. poprzez analizę wartości i stanów własnych (analizę widmową) tensorów sprężystości czwartego rzędu, które interpretowane być mogą jako pewne operatory liniowe na przestrzeni symetrycznych tensorów drugiego rzędu \mathcal{T}_{sym}^2 . Podejście to w czasach gwałtownego rozwoju algebry abstrakcyjnej przede wszystkim w XIX wieku, zdawać by się mogło zupełnie naturalnym, niemal koniecznym, a jednak zaledwie pojedynczy autorzy poświęcili mu więcej uwagi, zaś rezultaty ich badań pozostały niezauważone przez ogół środowiska naukowego. Tak stało się z pionierskimi pracami W. Thompsona (lorda Kelvin) z 1856 roku [53] a także np. z późniejszymi pracami K. S. Aleksandrowa [1], P. Angles d'Auriac [2] czy A. C. Pipkina [79]. Dopiero w 1984 roku, podejście to doczekało się systematycznej analizy w pracy Rychlewskiego [86], której najważniejsze elementy zaszygalizowane były już rok wcześniej w lokalnej publikacji o niewielkim nakładzie [85].

6.1.1 Przestrzeń liniowa \mathcal{T}_{sym}^2

U podstaw omówionego poniżej sposobu matematycznego opisu anizotropii sprężystej leży spostrzeżenie, iż przestrzeń symetrycznych tensorów drugiego rzędu jest przestrzenią liniową. W tym sensie działanie tensorów sztywności \mathbf{S} i podatności \mathbf{C} , które są tensorami czwartego rzędu charakteryzującymi się specyficznymi symetriami (5.5) - tensory o takich symetriach nazywa się niekiedy tensorami Hooke'a - jest tożsame z działaniem operatora liniowego odwzorowującego wzajemnie jednoznacznie przestrzeń \mathcal{T}_{sym}^2 na samą siebie (operatora automorficznego), przy założeniu, że zarówno przestrzeń tensorów odkształcenia, jak i przestrzeń tensorów naprężenia są przestrzeniami bezwymiarowymi. W tym celu stany naprężenia winny być odniesione do wielkości pewnego naprężenia porównawczego - przykładowo 1 Pa. Jeśli ponadto zwrócimy uwagę na fakt, że w dziewięciowymiarowych obiektach, jakimi są tensory drugiego rzędu, z uwagi na ich symetrię tylko 6 składowych jest niezależnych, to przestrzeń \mathcal{T}_{sym}^2 utożsamiana być może z pewną sześciowymiarową przestrzenią wektorową, w której tensory naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ i odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ reprezentowane są wektorami kolumnowymi, zaś tensory \mathbf{C} i \mathbf{S} symetrycznymi macierzami kwadratowymi 6×6 , będącymi reprezentacjami macierzowymi wspomnianych automorfizmów. Bazę kanoniczną w przestrzeni tej stanowi układ diad wektorów równoległych do osi przyjętego układu współrzędnych ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$):

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{a}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{a}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \\ \mathbf{a}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T\end{aligned}$$

W bazie tej, dowolny stan naprężenia i dowolny stan odkształcenia zapisać można w postaci:

$$\boldsymbol{\sigma} \cong \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \cong \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Dowolny operator liniowy \mathbf{A} w przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 , będący tensorem czwartego rzędu o symetriach wewnętrznych (5.5), reprezentowany jest przez macierz:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \sqrt{2}A_{1123} & \sqrt{2}A_{1131} & \sqrt{2}A_{1112} \\ & A_{2222} & A_{2233} & \sqrt{2}A_{2223} & \sqrt{2}A_{2231} & \sqrt{2}A_{2212} \\ & & A_{3333} & \sqrt{2}A_{3323} & \sqrt{2}A_{3331} & \sqrt{2}A_{3312} \\ & & & 2A_{2323} & 2A_{2331} & 2A_{2312} \\ & \text{sym} & & & 2A_{3131} & 2A_{3112} \\ & & & & & 2A_{1212} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Należy zwrócić uwagę w tym miejscu, iż notacja powyższa jest różna od stosowanej często (przede wszystkim w obliczeniach numerycznych) tzw. notacji Voigta, która nie uwzględnia dodatkowych współczynników liczbowych przy składowych związanych z diadami mieszanymi. Współczynniki te umożliwiają konsekwentne prowadzenie rachunków w uproszczonej notacji z jednoczesnym uwzględnieniem faktu, iż wymiary związane z diadami mieszanymi - z uwagi na symetrię tensorów naprężenia i odkształcenia - liczone powinny być podwójnie.

Przekształcenia geometryczne w \mathcal{E}^3 na obiektach należących do przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 oraz ich reprezentacje w przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 omówione są dokładnie w załączniku A.

6.1.2 Symetrie liniowej sprężystości

Klasy symetrii liniowej sprężystości nie są tożsame z rzeczywistymi symetrami krystalograficznymi - dla każdej symetrii sprężystej istnieje odpowiadający jej układ krystalograficzny, jednakże twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Przykładowo, zgodnie z twierdzeniem Hermanna-Germana [39] [32] tensory sprężystości, będące tensorami 4 rzędu, w przypadku, gdy w ich grupie symetrii znajduje się cykliczna podgrupa obrotów rzędu większego niż 4 muszą być tensorami osiowo symetrycznymi - materiał charakteryzujący się sześciokrotną osią symetrii jest więc z punktu widzenia liniowych związków konstytutywnych prawa Hooke'a tożsamy z materiałem o symetrii cylindrycznej.

Wyróżniamy osiem klas symetrii sprężystych [20]. W podanym poniżej zestawieniu wskazano na najbardziej charakterystyczne elementy odpowiednich grup symetrii, przy czym nie wszystkie są niezależne:

- Pełna anizotropia (układ trójskośny)
 $\mathcal{O}_{ani} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$
- Symetria monokliniczna (układ jednoskośny)
 $\mathcal{O}_{mon} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{\mathbf{e}_1}\}$
- Ortotropia (układ rombowy)
 $\mathcal{O}_{ort} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{\mathbf{e}_k}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_k}^{180^\circ}\} \quad k = 1, 2, 3$
- Symetria trygonalna (układ trygonalny)
 $\mathcal{O}_{tri} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{\mathbf{e}_2}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^{120^\circ}\}$
- Symetria tetragonalna (układ tetragonalny)
 $\mathcal{O}_{tet} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{\mathbf{e}_k}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_k}^{180^\circ}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^{90^\circ}\} \quad k = 1, 2, 3$
- Symetria cylindryczna
 $\mathcal{O}_{cyl} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{\mathbf{e}_1}, \mathbf{I}_{\mathbf{n}}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^\varphi, \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{180^\circ}\} \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{e}_1, \varphi \in [0, 2\pi]$
- Symetria kubiczna (układ regularny)
 $\mathcal{O}_{cub} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{\mathbf{e}_k}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_k}^{90^\circ}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_{oct}}^{120^\circ}\} \quad \mathbf{e}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1], k = 1, 2, 3$
- Izotropia
 $\mathcal{O}_{iso} = \mathcal{O}(3)$

Charakterystyka każdej z wyżej wymienionych symetrii sprężystych przedstawiona jest w załączniku B. Szczegółową analizę można znaleźć m.in. w [86] [10] [58].

6.1.3 Analiza widmowa symetrycznych tensorów czwartego rzędu

Podstawą omawianego kryterium stanu granicznego dla ciał anizotropowych jest twierdzenie o rozkładzie spektralnym symetrycznych tensorów czwartego rzędu, w szczególności tensorów sztywności \mathbf{S} i podatności \mathbf{C} a także tensora stanu granicznego \mathbf{H} . Jest to twierdzenie analogiczne do znanych z algebry twierdzeń o wartościach i wektorach własnych operatorów

liniowych, czy też ich macierzowych reprezentacji. W celu uniknięcia niejednoznaczności wektory własne operatorów liniowych na \mathcal{T}_{sym}^2 będziemy nazywać stanami własnymi. Używając zatem terminu wektor własny z reguły będziemy mieli na myśli tensor rzędu 1 (właśnie wektor, w najczęstszym tego słowa rozumieniu), element euklidesowej przestrzeni wektorowej \mathcal{E}^3 , zaś mówiąc stan własny będziemy mieli na myśli symetryczny tensor rzędu 2, element przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 .

Interpretacja fizyczna stanów własnych tensorów sztywności i podatności może być dwójaka. Po pierwsze, poszukując ekstremum lokalnego funkcji zmiennej tensorowej (np. stanu odkształcenia), której wartość jest równa gęstości energii odkształcenia sprężystego

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.3)$$

przy założeniu stałej (np. jednostkowej) normy stanu odkształcenia $|\boldsymbol{\varepsilon}| = 1$ (ekstremum warunkowe), otrzymujemy

$$\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} [\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \lambda(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - 1)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.4)$$

Widać zatem, iż stanami własnymi tensora sztywności \mathbf{S} są te stany odkształcenia, dla których, spośród wszystkich stanów o tej samej normie, energia sprężysta osiąga wartość stacjonarną. Stan odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ spełniający (6.4) nazywać będziemy sprężystym stanem własnym, zaś odpowiadającą mu wartość własną λ , zgodnie z sugestią Rychlewskiego [90], nazywać będziemy modulem (sztywności) Kelvina, na cześć lorda Kelvin, który jako pierwszy posłużył się analogicznymi wielkościami w wyrażeniu na energię sprężystą [53]. Dodatnia określoność tensorów sprężystości skutkuje dodatniością modułów Kelvina - są to jedyne ograniczenia na liniowe związki konstytutywne prawa Hooke'a wynikające z zasad termodynamiki.

Wiadomo, że dla symetrycznego operatora liniowego na przestrzeni n -wymiarowej istnieje dokładnie n wzajemnie ortogonalnych kierunków wektorów własnych odpowiadających n rzeczywistym wartościom własnym. O ile tylko wartości własne są istotnie różne, kierunki własne dane są jednoznacznie - w przeciwnym wypadku wielokrotnym wartościom własnym odpowiadają wielowymiarowe podprzestrzenie wektorów własnych, przy czym ich wymiar jest równy krotności odpowiadającej wartości własnej jako pierwiastka równania wielowego. W bazie stanów własnych reprezentacja macierzowa tensora sztywności w przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 ma postać diagonalną. Ponieważ, zgodnie z (5.4),

$$\mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbb{I},$$

gdzie \mathbb{I} jest operatorem tożsamościowym w \mathcal{T}_{sym}^2 , dla każdego stanu własnego \mathbf{S} możemy napisać:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{C} \circ \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \lambda \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (6.5)$$

skąd:

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\omega} \quad (6.6)$$

a zatem tensory sztywności i podatności mają takie same stany własne a odpowiadające im wartości własne są swoimi odwrotnościami. Rychlewski podał i udowodnił następujące twierdzenie [86]

Twierdzenie o rozkładzie spektralnym

Dla każdego materiału sprężystego, zdefiniowanego przez swój tensor podatności \mathbf{C} lub sztywności \mathbf{S} , istnieje dokładnie jeden ortogonalny rozkład przestrzeni symetrycznych tensorów drugiego rzędu \mathcal{T}_{sym}^2 :

$$\mathcal{T}_{sym}^2 = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho, \quad \rho \leq 6 \quad (6.7)$$

$$\mathcal{P}_\alpha \perp \mathcal{P}_\beta \quad \text{dla } \alpha \neq \beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \rho$$

i dokładnie jeden zbiór parami różnych stałych (modułów Kelvina)

$$\lambda_1, \dots, \lambda_\rho, \quad \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta \quad \text{dla } \alpha \neq \beta \quad (6.8)$$

taki, że dla dowolnego stanu naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ i dowolnego stanu odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\rho, & \boldsymbol{\sigma}_\alpha &\in \mathcal{P}_\alpha \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}_\rho, & \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha &\in \mathcal{P}_\alpha \end{aligned} \quad (6.9)$$

zaś tensory sprężystości \mathbf{C} i \mathbf{S}

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho, \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{P}_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_\rho} \mathbf{P}_\rho, \end{aligned} \quad (6.10)$$

gdzie \mathbf{P}_α są ortogonalnymi projektorami rzutującymi elementy \mathcal{T}_{sym}^2 na parami ortogonalne podprzestrzenie własne tensorów sprężystości \mathcal{P}_α :

$$\forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{T}_{sym}^2 \quad \mathbf{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{cases} \mathbf{0} & \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega} \notin \mathcal{P}_\alpha \\ \boldsymbol{\omega} & \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}_\alpha \end{cases} \quad (6.11)$$

Projektory ortogonalne przyporządkowują każdemu stanowi naprężenia i odkształcenia ich składową z odpowiedniej podprzestrzeni własnej z rozkładu (6.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_\alpha \in \mathcal{P}_\alpha \\ \mathbf{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \in \mathcal{P}_\alpha \end{aligned} \quad (6.12)$$

W przypadku podprzestrzeni jednowymiarowych projektor ortogonalny na tę podprzestrzeń można przedstawić jako diadę unormowanych stanów własnych odpowiadających tej podprzestrzeni:

$$\mathbf{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_\alpha = (\boldsymbol{\omega}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha = \underbrace{(\boldsymbol{\omega}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}_\alpha)}_{\mathbf{P}_\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (6.13)$$

Projektory ortogonalne dane są jednoznacznie, choć w przypadku projektorów na podprzestrzenie wielowymiarowe można je wyrazić na nieskończenie wiele sposobów, w zależności od wyboru bazy w tej podprzestrzeni:

$$\mathbf{P}_\alpha = \sum_{m=1}^{\dim \mathcal{P}_\alpha} (\boldsymbol{\omega}_\alpha^m \otimes \boldsymbol{\omega}_\alpha^m), \quad (\text{nie sumować względem } \alpha) \quad (6.14)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_\alpha^m$ ($m = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{P}_\alpha$) są dowolnymi parami ortogonalnymi unormowanymi stanami własnymi należącymi do podprzestrzeni własnej \mathcal{P}_α . W szczególności, rozkład (6.10) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \lambda_I(\boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I) + \lambda_{II}(\boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II}) + \dots + \lambda_{VI}(\boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}), \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{\lambda_I}(\boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I) + \frac{1}{\lambda_{II}}(\boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II}) + \dots + \frac{1}{\lambda_{VI}}(\boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}), \end{aligned} \quad (6.15)$$

w której w przypadku występowania wielowymiarowych podprzestrzeni własnych, niektóre z λ_K są sobie równe. Z (6.10) wobec zależności

$$\mathbf{P}_\alpha \circ \mathbf{P}_\beta = \begin{cases} \mathbb{O} & \Leftrightarrow \alpha \neq \beta \\ \mathbf{P}_\alpha & \Leftrightarrow \alpha = \beta \end{cases} \quad (6.16)$$

z zależności

$$\mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbb{I}$$

wynika równość

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_\rho = \mathbb{I}, \quad (6.17)$$

co jest konsekwencją zależności faktu, że \mathcal{T}_{sym}^2 jest sumą prostą podprzestrzeni własnych tensorów sprężystości, tj.

$$\mathcal{T}_{sym}^2 = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho.$$

Biorąc pod uwagę (6.14), dokonując zwężenia po pierwszej i drugiej parze wskaźników, otrzymujemy zależność

$$[\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I)]^2 + [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{II})]^2 + \dots + [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI})]^2 = 1 \quad (6.18)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_K$ ($K = I, \dots, VI$) są dowolnymi wzajemnie ortogonalnymi stanami własnymi tensorów sprężystości. Kolejną istotną cechą stanów własnych jest fakt, że pozostają niezmiennicze (z dokładnością do znaku) względem grupy przekształceń ortogonalnych, należących do grupy symetrii rozpatrywanych tensorów sprężystości. Dla dowolnego takiego przekształcenia \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}, \mathbf{S}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} * \mathbf{C} = \mathbf{C}. \quad (6.19)$$

Biorąc pod uwagę rozkład (6.15) warunek powyższy musi dotyczyć każdej z diad

$$\mathbf{Q} * (\boldsymbol{\omega}_K \otimes \boldsymbol{\omega}_K) = (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q}^T) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q}^T) = \boldsymbol{\omega}_K \otimes \boldsymbol{\omega}_K \quad (6.20)$$

co daje ostatecznie

$$\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} = \pm \boldsymbol{\omega}. \quad (6.21)$$

Rozpatrywanie uogólnionego prawa Hooke'a (5.4) w bazie stanów własnych tensorów sprężystości prowadzi do szeregu interesujących rezultatów:

- **Rozprężenie równań konstytutywnych**

Uogólnione prawo Hooke'a, jako układ sześciu równań algebraicznych, w sytuacji, gdy macierz współczynników tego układu poprzez odpowiedni dobór niewiadomych (rzutów na kierunki stanów własnych) sprowadzona jest do postaci diagonalnej, ulega rozprężeniu w zbiór sześciu niezależnych równań - każde z nich jest prostą proporcją między odpowiadającymi sobie stanami własnymi tensorów sprężystości:

$$\boldsymbol{\sigma}_K = \lambda_K \boldsymbol{\varepsilon}_K, \quad K = I, II, \dots, VI \quad (6.22)$$

- **Energetyczna ortogonalność stanów własnych** Konsekwencją ścisłej proporcjonalności między odpowiadającymi sobie stanami naprężenia i odkształcenia na kierunkach stanów własnych tensorów sprężystości oraz ortogonalności stanów należących do różnych podprzestrzeni własnej jest ich energetyczna niezależność:

$$\alpha \neq \beta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha, \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\beta = \frac{|\boldsymbol{\sigma}_\alpha| |\boldsymbol{\sigma}_\beta|}{2\lambda_\beta} \underbrace{\boldsymbol{\omega}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}_\beta}_{\delta_{\alpha\beta}} = 0 \quad (6.23)$$

A zatem praca \mathcal{L} stanu naprężenia należącego do jednej podprzestrzeni własnej na stanie odkształcenia należącym do innej podprzestrzeni własnej jest równa 0. Ponieważ iloczyn skalarny w przestrzeni liniowej może być zdefiniowany w dowolny sposób, jeśli tylko spełnione są aksjomaty iloczynu skalarnego (biliniowość, symetria, brak degeneracji, dodatnia określoność), Rychlewski wykorzystał tensor podatności w alternatywnej definicji iloczynu skalarnego w \mathcal{T}_{sym}^2 [87], zwanego energetycznym iloczynem skalarnym oraz w definicji energetycznej ortogonalności:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta} \bullet \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Stany własne tensorów sprężystości są zatem zarówno ortogonalne, jak i energetycznie ortogonalne.

- **Rozkład główny energii sprężystej** Energetyczna ortogonalność stanów własnych sprawia, że gęstość energii odkształcenia sprężystego

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (6.25)$$

będącą formą kwadratową stanu naprężenia, staje się addytywną funkcją swego argumentu, jeśli wyrażona jest w bazie stanów własnych:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_\rho, \quad \Phi_\alpha = \Phi(\boldsymbol{\sigma}_\alpha) = \frac{|\boldsymbol{\sigma}_\alpha|^2}{2\lambda_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \rho \leq 6 \quad (6.26)$$

6.1.4 Niezmienniki tensorów sprężystości - indeksy strukturalne

W ogólności trójwymiarowe tensory czwartego rzędu mają $3^4 = 81$ składowych. Z uwagi na warunki symetrii (5.5) liczba ta w przypadku tensorów sprężystości redukuje się do 21. Te 21 wielkości Rychlewski podzielił na 3 grupy [86]:

- **Moduły sztywności** - moduły Kelvina, wartości własne tensora sztywności a zarazem odwrotności wartości własnych tensora podatności, niezmienniki obydwu tensorów. Tylko one stanowią w istocie to, co zwykło określać się mianem „stałych sprężystych”, tj. współczynników proporcjonalności między odpowiadającymi sobie wybranymi stanami naprężenia i odkształcenia. Ponieważ przestrzeń symetrycznych tensorów drugiego rzędu jest sześciowymiarowa, stąd może istnieć najwyżej 6 istotnie różnych modułów Kelvina.
- **Dystrybutory sztywności** - niezmiennicze funkcje stanów własnych niewrażliwe na zmianę ich znaku - określają postać stanu odkształcenia (naprężenia) będącego odpowiedzią na zadany stan naprężenia (odkształcenia) dla materiału o zadanej symetrii. W ogólności do opisanego jednego stanu własnego potrzeba podać 6 jego składowych - ponieważ stanów własnych jest - z uwagi na wymiar \mathcal{T}_{sym}^2 - maksymalnie 6, daje to 36 parametrów. Wystarczy podać jednak kierunki stanów własnych, tj. można rozpatrywać stany unormowane - daje to 6 warunków unormowania. Ponadto stany własne są parami wzajemnie ortogonalne co daje $\binom{6}{2} = 15$ warunków ortogonalności. Daje to 15 niezależnych parametrów. Trzy spośród nich służą jedynie orientacji materiału w ustalonym układzie współrzędnych i nie są niezmiennikami. Ostatecznie maksymalną liczbą dystrybutorów sztywności jest 12.
- **Parametry orientujące materiał w układzie współrzędnych** - trzy parametry pozwalające jednoznacznie określić orientację próbki w przyjętym układzie współrzędnych, co ostatecznie umożliwia podanie postaci stanów własnych i w konsekwencji projektorów ortogonalnych i całego tensora sprężystości. Mogą to być np. kąty Eulera lub składowe trzech wzajemnie ortogonalnych unormowanych wektorów.

Celem charakterystyki różnych klas symetrii pod względem postaci ich rozkładu spektralnego Rychlewski wprowadził dwa oznaczenia zwane indeksami strukturalnymi [86]:

- **Pierwszy indeks strukturalny:**

$$\langle q_1 + q_2 + \dots + q_\rho \rangle, \quad \rho \leq 6$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_\rho = 6$$

gdzie q_i ($i = 1, 2, \dots, \rho$) to wymiar i -tej podprzestrzeni własnej, krotność i -tego modułu Kelvina jako pierwiastka równania charakterystycznego dla tensora sprężystości.

• **Drugi indeks strukturalny:**

$$[\rho + \delta + \alpha],$$

gdzie

ρ - liczba istotnie różnych modułów Kelvina ($\rho \leq 6$)

δ - liczba dystrybutorów sztywności ($\delta \leq 12$)

α - liczba parametrów (np. kątów Eulera) wymaganych do jednoznacznego zorientowania próbki w laboratorium ($\alpha \leq 3$)

Nie jest celem niniejszej pracy rozpatrywać w szczegółowy sposób matematyczną strukturę liniowych związków konstytutywnych teorii sprężystości, jaka wyłania się wobec przytoczonych powyżej zależności. Chcąc jednak zasygnalizować, jaki wpływ na rozwój teorii anizotropowych ciał sprężystych miały wspomniane wyniki, pragnę wspomnieć kilka pozycji na które natknąłem się w toku badań - w zakresie symetrii związków konstytutywnych (Rychlewski [85] [86] [89], Blinowski, Rychlewski [12], Cowin, Mehrabadi [22], Chadwick, Vianello, Cowin [20], Forte, Vianello [30]), struktury symetrii sprężystych (Rychlewski [85] [86], Cowin, Mehrabadi [64] [23], Sutcliffe [100], Blinowski, Rychlewski [12], Kowalczyk-Gajewska, Ostrowska-Maciejewska [58]), rozkładu energii sprężystej (Rychlewski [85] [86] [87], Theocaris [105]), rozkładu harmonicznego tensora Hooke'a (Rychlewski [91] [92], Blinowski, Ostrowska-Maciejewska, Rychlewski [11]) czy też zastosowań tych wyników w niektórych specyficznych obszarach mechaniki sprężystych ośrodków odkształcalnych (drgania ośrodków anizotropowych: Rychlewski [91] [92] [93], Cowin [24]; materiały z więzami: Rychlewski [90], Kowalczyk-Gajewska, Ostrowska-Maciejewska [56] [57]; miary anizotropii: Rychlewski [88]; hipotezy wyłączenia: Olszak, Ostrowska-Maciejewska [72], Rychlewski [87], Schreyer, Zuo [99]; uogólnione moduły sprężystości Rychlewski [85] [86] [94] Ostrowska-Maciejewska, Rychlewski [77]).

6.2 Warunki graniczne dla materiałów anizotropowych

6.2.1 Anizotropia cech sprężystych i wytrzymałościowych

Warto zwrócić uwagę na związek między anizotropią ogólnie pojętych cech sprężystych i plastycznych (związków konstytutywnych między naprężeniami i odkształceniami) a anizotropią równie szeroko rozumianych właściwości wytrzymałościowych. W większości prac traktujących o deformacji plastycznej i kryteriach stanu granicznego w ciałach anizotropowych daje się zauważyć nie wskazane wyraźnie i wprost założenie o tożsamości cech symetrii wszystkich tych właściwości mechanicznych. Niewątpliwą przyczyną takiego toku rozumowania jest przekonanie o tym, że wewnętrzna struktura materiału odpowiedzialna jest zarówno za cechy sprężyste jak i wytrzymałościowe. O ile intuicja zdaje się sugerować, iż obydwa te zbiory cech mechanicznych charakteryzować się powinny taką samą klasą symetrii, o tyle nic nie stoi na przeszkodzie aby rozpatrywać przypadki ogólniejsze. Co więcej, Rychlewski stwierdził w [87]: „Критерий (...) предполагает некую слабую связь упругих и предельных свойств.

Во многих случаях такая связь будет, по-видимому, иметь место, вследствие, например, симметрии строения рассматриваемого тела. Однако, в общем случае это не может быть справедливым. Простейший тому пример - тело изотропное по упругим свойствам, но анизотропное по предельным."⁴ Wydawać się może jednak, iż jest to stwierdzenie zanadto stanowcze, tym bardziej że nie zostało poparte konkretnymi danymi. Zdaje się, że ciało *rzeczywiście* sprężyste izotropowe nie powinno wykazywać anizotropii cech wytrzymałościowych, a jeśli je faktycznie wykazuje to przecież prawdopodobne jest, że symetria tych cech jest jednakowa przy czym w przypadku cech wytrzymałościowych objawia się ona wyraźniej, przy sprężystych zaś - jedynie „nieznacznie”, jak określił to Burzyński [16] (np. wskutek minimalnej różnicy w wielkości liczbowej pewnych stałych sprężystych). Z drugiej strony warto wspomnieć, że Burzyński w swej pracy [16], przy pełnej świadomości obecności tej „nieznacznej” anizotropii sprężystej w każdym praktycznie przypadku, w istocie rozpatrywał ciała izotropowe pod względem ich właściwości wytrzymałościowych. Kolejnym przykładem może być tutaj praca K. Kowalczyk-Gajewskiej, J. Ostrowskiej-Maciejewskiej oraz R. B. Pęcherskiego [55], w której rozpatrywano materiał o symetrii kubicznej z ortotropowym warunkiem stanu granicznego. Zasadniczo jednak należy się zgodzić z pełnym rozsądnego umiaru stwierdzeniem Hoffmana: „*It is a plausible conjecture that those features of the microstructure that predetermine the planes of elastic symmetry will also predetermine the planes of strength symmetry. Yet, this assumption should be made with reservations since the overall («macro») elastic properties are related to the local («micro») properties by some averaging process which is less sensitive to local variations in the micro-structure than the fracture-strength properties which are highly local-fault sensitive*”⁵ [46].

6.2.2 Ogólna charakterystyka wybranych warunków granicznych dla materiałów anizotropowych

W 1928 roku sformułowane zostały najpewniej pierwsze w historii propozycje warunków stanu granicznego dla materiałów anizotropowych - chodzi mianowicie o artykuł R. von Misesa [67] oraz pracę doktorską W. Burzyńskiego [16]. Mises, w swej pracy [67] zaproponował w rzeczywistości aż trzy istotnie różniące się od siebie kryteria stanu granicznego. Pierwszym z nich, któremu poświęcono w późniejszych latach najwięcej uwagi, była propozycja warunku stanu granicznego w postaci kwadratowej funkcji składowych stanu naprężenia, spełniającej dwa postulaty - niezmienniczości jej postaci względem zwiększenia aktualnego stanu naprężenia o dodatkowe naprężenie hydrostatyczne, oraz niezmienniczości względem przekształceń geome-

⁴Kryterium [przedstawione w [87]] (...) zakłada jakiś słaby związek właściwości sprężystych i wytrzymałościowych [dosł. „granicznych”]. W wielu przypadkach związek taki prawdopodobnie ma miejsce wskutek np. symetrii struktury rozpatrywanego ciała. Jednakże, w przypadku ogólnym założenie to nie może być słuszne. Najprostszym na to przykładem jest ciało izotropowe z uwagi na właściwości sprężyste, lecz anizotropowe z uwagi na cechy wytrzymałościowe. - tłum. autora z wykorzystaniem tłumaczenia na angielski A. Blinowskiego [87]

⁵Jest wiarygodnym przypuszczeniem, iż te właściwości mikrostruktury, które wyznaczają płaszczyzny symetrii sprężystej, wyznaczać również będą płaszczyzny symetrii wytrzymałości. Jednakże założenie to należy poczynić z pewnymi zastrzeżeniami, ponieważ globalne (“makro”) cechy sprężyste odnoszą się do cech lokalnych (“mikro”) poprzez pewien proces uśredniania, który jest mniej wrażliwy na lokalne zaburzenia w mikrostrukturze niż właściwości wytrzymałościowe, które są bardzo wrażliwe na lokalne defekty. - tłum. autora

trycznych należących do grupy symetrii danego materiału (zamiany układu współrzędnych na układ „krytalograficznie równowazny”). W najogólniejszym przypadku (pełnej anizotropii) funkcja ta przyjmowała postać:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}) = & \frac{1}{2} [H_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2] - \sigma_{23} [H_{24}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + H_{34}(\sigma_{11} - \sigma_{33})] - \\ & - \sigma_{31} [H_{35}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + H_{15}(\sigma_{22} - \sigma_{11})] - \sigma_{12} [H_{16}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + H_{26}(\sigma_{33} - \sigma_{22})] + \\ & + H_{45}\sigma_{23}\sigma_{31} + H_{56}\sigma_{31}\sigma_{12} + H_{64}\sigma_{12}\sigma_{23} + \frac{1}{2} [H_{44}\sigma_{23}^2 + H_{55}\sigma_{31}^2 + H_{66}\sigma_{12}^2], \end{aligned} \quad (6.27)$$

co można przedstawić w postaci

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.28)$$

gdzie \mathbf{H} jest tensorem czwartego rzędu spełniającym warunki symetrii (5.5) nazywanym tensorem stanu granicznego, którego jednym ze stanów własnych jest stan hydrostatyczny, zaś odpowiadająca mu wartość własna jest zerowa. W ogólności funkcja (6.27) ma 15 niezależnych stałych parametrów, przy czym konieczność spełnienia drugiego z postulatów Misesa w przypadku symetrii wyższych niż pełna anizotropia redukuje tę liczbę. Sam Mises analizował w swej pracy przypadek symetrii kubicznej (układu regularnego) oraz izotropii transwersalnej (układu heksagonalnego).

Pomysł kwadratowej funkcji składowych stanu naprężenia wykorzystywanej jako warunek stanu granicznego czy też jako potencjał plastyczny zyskał popularność i doczekał się dalszych uogólnień i modyfikacji, jak i bardziej szczegółowych analiz dla wybranych przypadków symetrii sprężystych. Najszerszej znaną propozycją warunku stanu granicznego, jaka powstała na bazie pomysłu Misesa jest z pewnością kryterium Hilla z 1948 roku [40] [41]. Specyfikując warunek graniczny (6.27) dla ortotropii, Hill zaproponował kryterium stanu granicznego w postaci:

$$2f = H_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2H_{44}\sigma_{23}^2 + 2H_{55}\sigma_{31}^2 + 2H_{66}\sigma_{12}^2 = 1 \quad (6.29)$$

Postać powyższa obowiązuje tylko w układzie współrzędnych, którego osie x_1, x_2, x_3 pokrywają się z dwukrotnymi osiami symetrii materiału ortotropowego. Stałe współczynniki H wyrażają się przez graniczne naprężenia rozciągające na kierunkach osi symetrii materiału k_1, k_2, k_3 oraz graniczne naprężenia przy ścinaniu w płaszczyznach prostopadłych do tych osi k_{s1}, k_{s2}, k_{s3} w następujący sposób:

$$\begin{aligned} H_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) & H_{44} &= \frac{1}{2k_{s1}^2} \\ H_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_3^2} + \frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} \right) & H_{55} &= \frac{1}{2k_{s2}^2} \\ H_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) & H_{66} &= \frac{1}{2k_{s3}^2} \end{aligned} \quad (6.30)$$

W 1979 Hill, inspirowany być może propozycją warunku granicznego Hosforda i Logana [47] [62] w postaci:

$$H_{23}|\sigma_{22} - \sigma_{33}|^m + H_{31}|\sigma_{33} - \sigma_{11}|^m + H_{12}|\sigma_{11} - \sigma_{22}|^m = 1, \quad (6.31)$$

gdzie parametry H oraz parametr m są pewnymi stałymi charakterystycznymi dla danego materiału, zmodyfikował swoją propozycję z 1948 roku wprowadzając warunek graniczny wyrażony przez naprężenia główne i (podobnie jak u Hosforda i Logana) uwzględniający wpływ dodatkowego parametru materiałowego m [42]:

$$\begin{aligned} & H_{23}|\sigma_2 - \sigma_3|^m + H_{31}|\sigma_3 - \sigma_1|^m + H_{12}|\sigma_1 - \sigma_2|^m + \\ & + H_{44}|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + H_{55}|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m + H_{66}|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m = K^m, \end{aligned} \quad (6.32)$$

gdzie K jest pewną stałą wielkością naprężeniową, zaś współczynniki H są stałymi parametrami - z uwagi na (w ogólności) niecałkowitą wartość parametru m , nie da się ich z reguły wyrazić w prosty sposób poprzez graniczne naprężenia w prostych stanach obciążenia.

W tym miejscu trzeba zwrócić uwagę, że ani propozycje Misesa wyspecyfikowane dla dwóch symetrii sprężystych jak i żadna z powyższych propozycji Hilla oraz Hosforda-Logana nie jest w stanie opisać materiałów wykazujących różnicę wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu. Między innymi z tego powodu kryteria Misesa i Hilla poddawane były różnym modyfikacjom polegającym przede wszystkim na dodaniu członów liniowych, uwzględnieniu wpływu naprężenia hydrostatycznego, czy (podobnie jak w przypadku propozycji Hilla z 1979) rezygnacji ze ściśle kwadratowej postaci analizowanej funkcji i zastąpieniu wykładnika przy jej składnikach wartością różną od 2. Do najlepiej znanych propozycji, które powstały na bazie ogólnej idei Misesa i późniejszych analiz Hilla należą przede wszystkim kryterium Hoffmana [46] oraz propozycja Tsai i Wu [109].

Hoffman [46] zaproponował w 1967 roku dodanie w kryterium granicznym w postaci funkcji kwadratowej członów liniowych, co umożliwia uwzględnienie znaku naprężenia i pozwala opisać materiały wykazujące asymetrię zakresu sprężystego. W ogólnym przypadku ortotropii kryterium Hoffmana przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} & H_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\ & H_1\sigma_{11} + H_2\sigma_{22} + H_3\sigma_{33} + H_{44}\sigma_{23}^2 + H_{55}\sigma_{31}^2 + H_{66}\sigma_{12}^2 = 1 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Tak, jak w przypadku kryterium Hilla postać powyższa obowiązuje tylko w układzie współrzędnych, którego osie pokrywają się z osiami symetrii materiału ortotropowego. Stałe współczynniki H wyrażają się przez naprężenia graniczne w następujący sposób:

$$\begin{aligned} H_{23} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k_{t2}k_{c2}} + \frac{1}{k_{t3}k_{c3}} - \frac{1}{k_{t1}k_{c1}} \right] & H_1 &= \frac{1}{k_{t1}} - \frac{1}{k_{c1}} & H_{44} &= \frac{1}{k_{s1}^2} \\ H_{31} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k_{t3}k_{c3}} + \frac{1}{k_{t1}k_{c1}} - \frac{1}{k_{t2}k_{c2}} \right] & H_2 &= \frac{1}{k_{t2}} - \frac{1}{k_{c2}} & H_{55} &= \frac{1}{k_{s2}^2} \\ H_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k_{t1}k_{c1}} + \frac{1}{k_{t2}k_{c2}} - \frac{1}{k_{t3}k_{c3}} \right] & H_3 &= \frac{1}{k_{t3}} - \frac{1}{k_{c3}} & H_{66} &= \frac{1}{k_{s3}^2} \end{aligned} \quad (6.34)$$

gdzie indeksy t, c, s w symbolu naprężenia granicznego oznaczają odpowiednio stan rozciągania, ściskania oraz ścinania, zaś cyfry 1, 2, 3 odnoszą się do kierunku naprężenia jednoosiowego bądź do normalnej płaszczyzny ścinania. W 1973 roku taką samą propozycję wysunęli Cad-dell, Raghava i Atkins [18].

Najogólniejszą propozycję warunku stanu granicznego w postaci kwadratowej funkcji składowych stanu naprężenia podali w 1971 Tsai i Wu [109] wprowadzając kryterium w postaci kwadratowego wielomianu tensorowego:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + h_{mn}\sigma_{mn} = 1 \quad (6.35)$$

gdzie \mathbf{H} jest symetrycznym tensorem czwartego rzędu, zaś \mathbf{h} jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu - obydwie te wielkości, tensory stanu granicznego, są stałe i charakterystyczne dla danego materiału. Równanie (6.35) jest reprezentowane w przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 przez pewną kwadrykę. Jej charakter i specyficzne cechy (osie symetrii, otwartość, wypukłość itp.) zdefiniowane są przez wartości własne i stany własne tensorów stanu granicznego. Jako szczególne przypadki propozycji Tsai-Wu można wymienić niektóre późniejsze propozycje. Można tu wspomnieć kryterium Deshpande'a-Flecka-Ashby'ego [25] z 2001 roku uwzględniające wpływ naprężenia hydrostatycznego, lecz w dalszym ciągu pomijające asymetrię zakresu sprężystego:

$$\begin{aligned} & H_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\ & + 2H_{44}\sigma_{23}^2 + 2H_{55}\sigma_{31}^2 + 2H_{66}\sigma_{12}^2 + H_p(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 = 1, \end{aligned} \quad (6.36)$$

gdzie H_p określa graniczne naprężenie hydrostatyczne. Wymienić też można kryterium Theocarisa z lat 80. ubiegłego wieku (ogólne przedstawienie propozycji można znaleźć np. w [106]), który w kryterium Tsai-Wu (6.35) założył, że stan naprężenia hydrostatycznego jest stanem własnym tensora \mathbf{H} o odpowiadającej mu zerowej wartości własnej. Dokonując specyfikacji kryterium dla materiałów ortotropowych przy założeniu, że naprężenia główne pokrywają się z osiami symetrii materiału, warunek graniczny można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_{ii}}{k_{ti}k_{ci}} + \sum_{\substack{(i,j,l)=(1,2,3) \\ (i,j,l)=(2,3,1) \\ (i,j,l)=(3,1,2)}} \left(\frac{1}{k_{ci}k_{ti}} + \frac{1}{k_{tj}k_{cj}} - \frac{1}{k_{tl}k_{cl}} \right) \sigma_{ii}\sigma_{jj} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_{ti}} - \frac{1}{k_{ci}} \right) \sigma_{ii} = 1. \quad (6.37)$$

Wszystkie te warunki stanu granicznego wywodzą się wprost z pierwszej propozycji Misesa z 1928 roku. Były to próby udoskonalenia tego pierwotnego pomysłu w ten sposób, aby w jak największym stopniu odpowiadał on uzyskiwanym wynikom doświadczalnym oraz aby był on w stanie uwzględnić pewne szczególne cechy materiału, których w pierwotnym swoim zamiśle Mises nie brał pod uwagę - przede wszystkim chodzi tutaj o różnicę wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu. Trzeba jednak zwrócić uwagę, iż w niektórych przypadkach modyfikacje kryterium Misesa sprowadzały się zaledwie do stosunkowo prostych zmian w samej tylko formie matematycznej warunku - odnieść można wrażenie, że niekiedy nie były one motywowane ścisłymi rozważaniami teoretycznymi na gruncie mechaniki, analizującymi rzeczywisty,

fizyczny charakter zjawiska.

Kryteria w postaci kwadratowej funkcji składowych stanu naprężenia stanowią obecnie - jak się zdaje - największą i najczęściej stosowaną w obliczeniach praktycznych grupę warunków stanu granicznego. Obok nich, znacznie rzadziej wykorzystywane, choć zdecydowanie lepiej motywowane fizycznie, obecne są różnorodne propozycje kryteriów stanu granicznego dla materiałów anizotropowych bazujące na całkowicie odmiennych koncepcjach. Jak wspomniano na początku tego rozdziału, warunek w postaci funkcji kwadratowej był tylko jedną z trzech propozycji Misesa z 1928 roku. Drugą, dokładnie przeanalizowaną przez Misesa [67] propozycją było uogólnienie klasycznego kryterium Coulomba-Tresca-Guesta na ciała krystaliczne. Bardzo wartościowa wydaje się szczegółowa analiza płaszczyzn poślizgu odpowiadających maksymalnemu naprężeniu stycznemu dla ciał krystalicznych w stanie obciążenia jednoosiowego, w zależności od kierunku przyłożenia obciążenia - złożoność tej analizy oraz fakt, iż miara wyężenia zmienia się nieciągłe wraz ze zmianą orientacji naprężenia, czyni tę propozycję trudną do zastosowania w praktycznych obliczeniach. Próbę uogólnienia kryterium maksymalnego naprężenia stycznego na ciała anizotropowe podjął także w 1958 roku Hu [48]. Ogólnie należy stwierdzić, że kryteria stanu granicznego bazujące na pewnych założonych wielkościach fizycznych, zgodnych z przyjętą hipotezą wyężenia - jak np. ekstremalne naprężenie normalne (Galileusz, Rankine), ekstremalne naprężenie styczne (Coulomb-Tresca-Guest), energia odkształcenia (Maxwell-Huber-Mises, Schleicher, Burzyński) - w swym najogólniejszym sformułowaniu nie muszą wcale zakładać izotropii materiału i w tym sensie mogą być rozpatrywane jako najwcześniejsze propozycje kryteriów granicznych dla materiałów anizotropowych. Pierwszymi, którzy podjęli próbę rozpatrywania tych klasycznych hipotez w kontekście anizotropii byli Mises (1928 [67]) i Burzyński (1928 [16]).

Trzecią propozycją, jaka pojawiła się w artykule Misesa była sugestia, aby najogólniejsze kryterium stanu granicznego było pewną funkcją, której argumenty stanowi ustalony układ niezależnych wielkości naprężeniowych, niezmienniczych względem dodania do stanu naprężenia stanu hydrostatycznego oraz niezmienniczych względem przekształceń należących do grupy symetrii danego materiału. Sam Mises podał propozycje takiego układu niezmienników. Propozycja ta nie doczekała się jednak głębszej analizy.

Ciekawą koncepcję zaprezentowano w 1993 w pracy Karafillisa i Boyce'a [52], w której rozważano tzw. „*isotropy plasticity equivalent (IPE) deviatoric stress tensor*” - tensor naprężenia $\tilde{\mathbf{s}}$, interpretowany jako stan naprężenia w materiale izotropowym, równoważny (z punktu widzenia warunku granicznego) stanowi naprężenia w materiale anizotropowym, a otrzymywany na drodze przekształcenia liniowego danego tensorem czwartego rzędu \mathbf{L} spełniającym warunki symetrii (5.5), dla którego aksjator naprężenia jest stanem własnym, odpowiadającym zerowej wartości własnej. O tensorze \mathbf{L} zakłada się także, że ma tę samą grupę symetrii, co tensory sprężystości opisujące dany materiał. Plastycznie równoważny izotropowy dewiator naprężenia $\tilde{\mathbf{s}}$ wykorzystywany był jako argument dla uogólnionego izotropowego warunku plastyczności:

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} = L_{klij}$$

$$(1 - c) [(\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2)^{2m} + (\tilde{s}_2 - \tilde{s}_3)^{2m} + (\tilde{s}_3 - \tilde{s}_1)^{2m}] + c \frac{3^{2m}}{2^{2m-1}+1} [\tilde{s}_1^{2m} + \tilde{s}_2^{2m} + \tilde{s}_3^{2m}] = 2k^{2m} \quad (6.38)$$

gdzie $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3$ są wartościami własnymi tensora $\tilde{\mathbf{s}}$, $\mathbf{1}$ jest operatorem tożsamościowym w \mathcal{E}^3 , $\mathbf{0}$ jest tensorem zerowym, stałe parametry $c \in [0, 1]$, $m > 0, 5$, zaś k jest granicznym naprężeniem przy rozciąganiu. Podobny pomysł analizowany był w pracy Ollera, Cara i Lublinera [70] - przedstawiono tam ogólną metodę formułowania anizotropowego kryterium granicznego poprzez uogólnienie danego kryterium izotropowego na drodze transformacji stanu naprężenia poprzez pewne odwzorowanie liniowe. Równie interesujące podejście - bazujące na przekształceniach liniowych stanu naprężenia - zaprezentowali także w 1995 Schreyer i Zuo [99] rozpatrujący układ funkcji płynięcia określonych dla rzutów aktualnego stanu naprężenia na kierunki stanów własnych tensorów sprężystości:

$$f_i = \frac{1}{2} |\mathbf{P}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}|^2 - \frac{1}{2} H_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, \rho \leq 6 \quad (6.39)$$

gdzie \mathbf{P}_i jest projektorem ortogonalnym na i -tą podprzestrzeń własną tensorów sprężystości, ρ jest liczbą istotnie różnych modułów Kelvina, zaś funkcje H_i mogą być parametrem stałym (idealna plastyczność) lub też mogą zmieniać swoją wartość wraz ze postępem deformacji plastycznej (np. wzmocnienie).

Szczególną grupę warunków stanu granicznego stanowią tzw. kryteria „energetyczne”, tj. te które za miarę wyteżenia materiału przyjmują gęstość energii odkształcenia. Wieloskalowy charakter energii sprawia, że makroskopowy opis warunku granicznego w ramach mechaniki continuum, do pewnego stopnia posiłkować się może rezultatami analiz na poziomie molekularnym w specyfikacji jakościowego charakteru i wzajemnego ilościowego udziału jego elementów. Energetyczne kryteria formułowane dla materiałów izotropowych, w swej najogólniejszej formie w naturalny sposób, bez modyfikacji, zastosowane być mogą także dla materiałów anizotropowych - dotyczy to przede wszystkim kryterium Beltramiego, ale także - z zastrzeżeniem, aby rozkład na energię odkształcenia postaciowego Φ_f i objętościowego Φ_v był możliwy - klasycznych kryteriów Maxwella-Hubera-Misesa, Schleichera czy wreszcie Burzyńskiego. Jednak to Burzyński był pierwszym, który podjął próbę specyfikacji kryterium stanu granicznego na podstawie zaproponowanej przez siebie energetycznej hipotezy wyteżenia materiału, którą w najogólniejszym przypadku można przedstawić w postaci

$$\Phi_f + \Phi_v \cdot \eta(p) = h \quad (6.40)$$

gdzie $\eta(p)$ jest pewnym parametrem zależnym od wielkości składowej hydrostatycznej stanu naprężenia, zaś h jest wielkością graniczną zgromadzonej energii odkształcenia sprężystego. Burzyński zakładał przy tym, że rozkład energii na część postaciową i objętościową jest w zasadzie zawsze możliwy - prowadziło to do konieczności spełnienia przez składowe tensorów sprężystości specyficznych warunków.

Kolejna propozycja energetycznego warunku stanu granicznego dla materiałów anizotropowych, inspirowana pracami Goldenblata z 1955 [33] [34] pojawiła się w 1956 w pracy Ol-

szaka i Urbanowskiego [71]. Zaproponowali oni wprowadzenie pewnych skalarnych wielkości, „pseudoenergii” odkształcenia postaciowego $\tilde{\Phi}_f$ i $\hat{\Phi}_f$ oraz „pseudoenergii” odkształcenia objętościowego $\tilde{\Phi}_v$ i $\hat{\Phi}_v$ o tych właściwościach, że ich suma daje rzeczywistą całkowitą miarę gęstości energii odkształcenia postaciowego:

$$\begin{aligned}\Phi &= \tilde{\Phi}_f + \tilde{\Phi}_v \\ \Phi &= \hat{\Phi}_f + \hat{\Phi}_v\end{aligned}\tag{6.41}$$

zaś każda z nich wyraża się poprzez odpowiednio zdefiniowane funkcje stanów albo odkształcenia albo naprężenia w sposób analogiczny jak ma to miejsce w przypadku izotropii, gdy rozkład na energię odkształcenia postaciowego i objętościowego jest rzeczywiście możliwy. Owe funkcje stanów odkształcenia i naprężenia zostały zdefiniowane przy pomocy pewnych operatorów liniowych, które z kolei definiowane były poprzez tensory sprężystości. W efekcie pseudoenergii odkształcenia postaciowego miały te właściwości, że $\tilde{\Phi}_f$ nie zmieniało swej wartości, gdy zmianie ulegała dylatacja, zaś $\hat{\Phi}_f$ nie zmieniało swej wartości, gdy zmianie ulegała hydrostatyczna składowa naprężenia. Warunek graniczny postulowany był w postaci

$$\tilde{\Phi}_f = \tilde{H} \quad \text{lub} \quad \hat{\Phi}_f = \hat{H},$$

gdzie \tilde{H} i \hat{H} stanowią graniczne wartości pseudoenergii.

Wprowadzenie przez Rychlewskiego twierdzenia o rozkładzie spektralnym tensorów sprężystości umożliwiło powstanie kolejnych, znacznie ściślejszych pod względem interpretacji fizycznej warunków stanu granicznego. W krótkim czasie po zaprezentowaniu pomysłów Rychlewskiego, Olszak i Ostrowska-Maciejewska [72] zaproponowali warunek stanu granicznego w postaci

$$\frac{1}{2H^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\mathbf{C} - \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} = 1,\tag{6.42}$$

gdzie \mathbf{C} jest tensorem podatności, $\mathbf{1}$ jest operatorem tożsamościowym w \mathcal{E}^3 zaś H jest pewnym stałym parametrem materiałowym - propozycja ta jest dalszym rozwinięciem energetycznych koncepcji zaprezentowanych w [71]. Rychlewski zasugerował w pracy [87] z 1984 r., iż miarą wyężenia może być kombinacja liniowa składników rozkładu głównego energii sprężystej (6.26), co prowadziło do warunku granicznego postaci

$$\frac{\Phi_1}{h_1} + \frac{\Phi_1}{h_1} + \dots + \frac{\Phi_\rho}{h_\rho} = 1, \quad \rho \leq 6\tag{6.43}$$

gdzie h_i są granicznymi wielkościami gęstości energii odkształcenia sprężystego związanych z rzutem naprężenia na i -tą podprzestrzeń własną tensorów sprężystości, zaś ρ to liczba istotnie różnych modułów Kelvina.

Energetyczne kryteria stanu granicznego, bazujące na analizie widmowej tensorów sprężystości były przedmiotem dalszych badań Rychlewskiego, Ostrowskiej-Maciejewskiej, Kowalczyk-Gajewskiej, Pęcherskiego [55] [57] [54] [76]. Zważywszy na fakt, że energetyczne hipotezy wyężenia materiału nie doczekały się dotąd szerszego porównawczego omówienia, w dalszej

części niniejszej rozprawy (rozdział 7) wydzielono osobny fragment mający być w zamierzeniu autora zgrubnym zbiorczym przedstawieniem hipotez należących do tej klasy.

Siłą rzeczy w powyższej skróconej charakterystyce wybranych warunków stanu granicznego dla materiałów anizotropowych nie można było wymienić wszystkich, czy też nawet zdecydowanej większości propozycji tego typu warunków, jakie pojawiały i stale pojawiają się w literaturze - przedstawione przykłady są w mniemaniu autora w pewnej mierze reprezentatywne dla wybranych grup takich warunków czy też koncepcji ich formułowania. Autor ma jednak pełną świadomość niekompletności nawet tego zgrubnego zarysu różnych koncepcji - nie jest jednak celem tej pracy szczegółowe studium tego zagadnienia. Niemalże odrębnym zagadnieniem jest kwestia warunków plastyczności w przypadku płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia - duża powszechność, ogromny zbiór danych doświadczalnych, szereg charakterystycznych zjawisk zachodzących podczas procesów deformacji plastycznej płaskich blach metalowych sprawiają, że formułowanie i weryfikacja kryteriów stanu granicznego dla płaskich blach anizotropowych (przede wszystkim ortotropowych blach walcowanych) stanowi bardzo szczególną gałąź omawianej dziedziny mechaniki. Ilość oraz różnorodność prezentowanych warunków plastyczności dla blach, biorąc pod uwagę względnie prostszy charakter zagadnienia, zdaje się przewyższać jeszcze liczbę propozycji dotyczących ogólnego przypadku przestrzennego - ograniczmy się tutaj jedynie do wymienienia niektórych, co istotniejszych prac: Hill (1990 [43], 1993 [44]), Bassani (1977 [7]), Gotoh (1977 [35] [36]), Budiansky (1984 [15]), Barlat (1989 [5], 1991 [6]), Montheillet (1991 [68]), Ferron (1994 [29]), Zhou (1994 [113]), Vegter (1995 [110], 2006 [111]). Wartościowe zestawienie oraz porównanie kryteriów stanu granicznego dla blach walcowanych można znaleźć w pracy Banabica [3].

6.3 Asymetria zakresu sprężystego

Najistotniejszym elementem, jaki musi być uwzględniony w prezentowanej w tej pracy propozycji warunku granicznego, jest zjawisko asymetrii zakresu sprężystego czy też szerzej rzecz ujmując - zjawisko różnicy wartości naprężenia granicznego przy rozciąganiu i przy ściskaniu. Zjawisko to w literaturze anglojęzycznej zwykło się określać mianem efektu SD („strength-differential effect”). Zjawisko różnicy wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu w przypadku materiałów silnie niejednorodnych takich jak skały, grunt, drewno itp. jest powszechne i jest oczywistą konsekwencją ich specyficznej struktury wewnętrznej oraz mechanizmów ich zniszczenia. Znacznie trudniejsze jest wyjaśnienie przyczyn tego zjawiska dla granicy plastyczności materiałów ciągliwych o znacznie większej jednorodności, takich jak metale czy stopy. W tym miejscu trzeba zwrócić uwagę na istotną różnicę między tym, co nazywa się efektem SD a związanym z podobnymi zjawiskami efektem Bauschingera. Ten drugi wiąże się bezpośrednio z zaistnieniem trwałych odkształceń plastycznych i wpływem tej deformacji na graniczne naprężenie uplastyczniające przy zmianie zwrotu obciążenia - efekt SD zaś zachodzi niezależnie od historii odkształcenia. Efekt SD zaczął być systematycznie obserwowany i badany w drugiej połowie XX wieku (np. Leslie, Sober [60] Kalish, Cohen [51], Hirth, Cohen [45], Rauch, Leslie [82]). W przypadku stali, wskazano na występowanie efektu SD w różnych składnikach strukturalnych układu Fe-C (martenzyt, bainit, mieszaniny ferrytyczno-martenzytyczne i in.) oraz jego nasilenie wraz ze wzrostem zawartości węgla. Badano także wpływ obróbki cieplnej różnego rodzaju na miarę efektu SD. Sformułowano szereg hipotez mających na celu stworzenie

teoretycznego modelu opisującego to zjawisko [45] - teorie te szukały przyczyn efektu SD m.in. w mikropęknięciach, naprężeniach resztkowych, efekcie Bauschingera czy też specyficznych zjawiskach zachodzących na poziomie molekularnym w różnych strukturach występujących w badanych stopach. Drucker [28] zwracał uwagę na rozróżnienie między „rzeczywistym” i „pozornym” efektem SD - kryterium określającym czy zaobserwowana asymetria zakresu sprężystego jest rzeczywistym efektem SD czy pozornym efektem będącym skutkiem występowania innych zjawisk, miała być ocena wpływu naprężenia hydrostatycznego na wartość granicznego naprężenia ścinającego. Drucker przedstawił również prosty warunek graniczny pełniący funkcję potencjału plastycznego, w którym zarówno efekt SD, jak i plastyczna deformacja objętościowa opisana jest poprzez uwzględnienie wpływu naprężenia hydrostatycznego. W tym świetle różnica wytrzymałości, zależność wyteżenia materiału od ciśnienia i dylatacja deformacji plastycznej jawią się jako zjawiska wzajemnie sprzężone. Uwzględnienie wpływu ciśnienia jest zatem jednym z rozwiązań problemu opisanego efektu SD po sprowadzeniu całego zagadnienia jedynie do kwestii wyznaczenia odpowiedniego warunku granicznego - nie ma ono jednak żadnego związku z teoretycznym opisem mechanizmu tego zjawiska. Wracając do problemu sformułowania odpowiedniego warunku stanu granicznego, który uwzględniałby asymetrię zakresu sprężystego, poza wykorzystaniem udziału ciśnienia, obecna jest także i inna koncepcja - należy zwrócić uwagę, że dewiatorowi naprężenia odpowiadającemu stanowi jednoosiowego rozciągania odpowiada inna wartość kąta Lodego niż ma to miejsce w przypadku jednoosiowego ściskania. Stąd szereg propozycji, w których to zależność od kąta Lodego modyfikuje warunek stanu granicznego w ten sposób, aby możliwe było uwzględnienie efektu SD (np. Drucker [26], LExcellent i in. [61], Raniecki, Mróz [81]. Ciekawą pozycją pośrednio związaną z tym zagadnieniem jest również praca Bardeta [4]). Stosunkowo nieliczne są prace, w których jednocześnie rozpatruje się wpływ naprężenia hydrostatycznego oraz kąta Lodego (Podgórski [80], Bigoni-Piccolroaz [9]) - podstawową trudnością jest tu wzajemne sprzężenie wpływu obydwu tych wielkości.

6.4 Wpływ naprężenia hydrostatycznego

Jednym ze zjawisk, których uwzględnienie w proponowanym w niniejszej pracy kryterium stanu granicznego było celem tej pracy, jest wpływ naprężenia hydrostatycznego na miarę wyteżenia materiału, który - jak wskazano powyżej - może być podstawą, a przynajmniej elementem modelu materiałów o niesymetrycznym zakresie sprężystym. Jednym z podstawowych założeń teorii plastyczności, jakie czyniono na początku rozwoju tej dziedziny mechaniki ciał odkształcalnych, było założenie o braku wpływu ciśnienia na wielkość naprężenia uplastyczniającego oraz o niezależności procesu płynięcia plastycznego od wielkości składowej hydrostatycznej naprężenia. Założenie to zdawało się znajdować potwierdzenie w dużej liczbie wyników doświadczalnych. Pośrednim potwierdzeniem tego założenia był również fakt dużej zgodności wyników doświadczalnych z obliczeniami przeprowadzonymi przy wykorzystaniu warunku granicznego Hubera-Misesa pomijającego wpływ ciśnienia oraz prawa płynięcia plastycznego stowarzyszonego z tym warunkiem, co skutkowało brakiem trwałych odkształceń objętościowych w procesie deformacji plastycznej. Trzeba jednak zwrócić uwagę, że przyjęcie założenia o braku wpływu ciśnienia na początek i przebieg procesu odkształcenia plastycznego od początku nie było pojmowane zupełnie ściśle - już w 1928 roku Mises pisał [67]: *„Daß die Divergenz der Geschwindigkeit gleich Null gesetzt wird, bedeutet nicht die Annahme der Vo-*

*lumbeständigkeit im strengsten Sinn. Es kommt darin nur die Beobachtung zum Ausdruck, daß die Volumänderungen von der Größenordnung der elastischen Deformationen bleiben, die denen des Fließens gegenüber verschwindend klein sind*⁶ [67]. Znaczące są również słowa innego fragmentu tego artykułu: „*Die erste Forderung ist naheliegend, wenn man bedenkt, welche besondere Rolle der hydrostatische Anteil der Gesamtspannung spielt. Uebrigens soll nicht angenommen werden, daß sie in aller Strenge für die Fließgrenze bei allen Körpern erfüllt ist*”⁷ [67]. W podobnym duchu wyrażał się w 1950 roku Hill pisząc o założeniu braku wpływu ciśnienia, jako o wstępnym przybliżeniu: „*... yielding of a metal is, to a first approximation, unaffected by a moderate hydrostatic pressure or tension, either applied alone or superposed on some state of combined stress*”⁸ [41]. Podobnie dwa lata wcześniej, pisząc o związku między brakiem wpływu ciśnienia na granicę plastyczności i na proces deformacji plastycznej, trwałe odkształcenie plastyczne nazwał „*pomijalnie*” małym: „*[Formula $d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = 0$] of course is essential in view of the known fact that the volume change associated with plastic strain is negliable. The zero volume change is directly connected with the assumption that yielding is independent of hydrostatic pressure. Either is a consequence of the other for any yield criterion whatever. This can most readily be seen by considering the stationary work interpretation of the plastic potential method. For a superposed hydrostatic pressure does not change the work done in a given strain when the volume change is zero. Thus if we accept, as experimental facts, the zero plastic volume change and the independence of the yield criterion with respect to hydrostatic pressure, then the method of the plastic potential is not only consistent with both but provides a link between them*”⁹ [40].

Jak wspomniano wyżej, przekonanie o pomijalnie małym udziale naprężenia hydrostatycznego w wyteżeniu materiału oraz w procesie deformacji plastycznej było w ogromnej mierze podyktowane dostępnymi danymi doświadczalnymi. Dopiero lata powojenne dostarczyły na tyle precyzyjnych dowodów wpływu ciśnienia na granicę plastyczności oraz zmian objętości w trakcie procesów deformacji plastycznej, że musiano uwzględnić te fakty w stosowanych modelach plastyczności. Szczególnie cenne w tym obszarze są szeroko zakrojone, dokładne eksperymenty Spitziga, Sobera i Richmonda [95] [96] [83] [97]. W pracach tych pojawiły się

⁶Przyjęcie, iż dywergencja prędkości [tutaj, w sensie: dylatancja - przyp. tłum.] jest równa zero, nie oznacza założenia stałości objętości w najściślejszym sensie. W tym wzorze znajduje swój wyraz jedynie obserwacja, iż zmiany objętości są rzędu wielkości odkształceń sprężystych, które wobec płynięcia plastycznego są pomijalnie małe. - tłum. autora

⁷Pierwszy postulat [o braku wpływu ciśnienia hydrostatycznego - przyp. tłum.] jest zrozumiały po zastanowieniu się, jaką szczególną rolę pełni hydrostatyczna część całego stanu naprężenia. Ponadto nie należy zakładać, iż postulat ten spełniony jest w pełni ściśle dla granicy plastyczności w przypadku wszystkich ciał stałych. - tłum. autora

⁸... na płynięcie plastyczne metalu, w pierwszym przybliżeniu, nie ma wpływu średnie hydrostatyczne ciśnienie lub rozciąganie czy to przyłożone osobno czy dodane do pewnego złożonego stanu naprężenia. - tłum. autora

⁹[Wzór $d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = 0$] jest oczywiście kluczowy wobec znanego faktu, iż zmiana objętości związana z odkształceniem plastycznym jest pomijalna. Zerowa zmiana objętości jest wprost powiązana z założeniem, że płynięcie plastyczne jest niezależne od ciśnienia hydrostatycznego. Jedno jest konsekwencją drugiego dla jakiegokolwiek kryterium płynięcia. Można to najłatwiej zauważyć rozpatrując metodę potencjału plastycznego w jej interpretacji pracy stacjonarnej. Dodane naprężenie hydrostatyczne nie zmienia pracy wykonanej na danym odkształceniu, gdy zmiana objętości jest równa zero. A zatem, jeśli przyjmiemy, jako fakty doświadczalne, zerową plastyczną zmianę objętości oraz niezależność kryterium płynięcia od ciśnienia hydrostatycznego, wtedy metoda ta jest nie tylko zgodna z obydwoma założeniami, lecz stanowi także wieź między nimi. - tłum. autora

także proste propozycje kryteriów stanu granicznego uwzględniające wpływ naprężenia hydrostatycznego - nie były to oczywiście historycznie pierwsze propozycje tego typu. Wpływ ten uwzględniany był pośrednio - trudno stwierdzić na ile świadomie - również i w starszych hipotezach - kryterium Coulomba-Mohra stanowi tutaj dobry przykład takiej hipotezy. Całkiem wprost do wpływu naprężenia hydrostatycznego odniósł się już w 1926 r. Schleicher, a później Burzyński [16] formułując ogólną hipotezę blisko ćwierć wieku przed szerzej znanym pomysłem Druckera i Pragera [27].

Mimo że wpływ naprężenia hydrostatycznego został potwierdzony doświadczalnie oraz jest elementem licznych modeli teoretycznych, w dalszym ciągu można zaobserwować, że w dużej części propozycji kryteriów stanu granicznego dla materiałów tak izotropowych, jak i anizotropowych, wpływ naprężenia hydrostatycznego jest pomijany niemal z założenia.

Z drugiej strony - jeśli skupić się na materiałach anizotropowych - nie sposób nie zgodzić się ze stwierdzeniem Rychlewskiego: „*Привычка выделять шаровую часть напряжений σ_1 и считать давление $-\sigma$ неким универсальным термодинамическим параметром проникла в механику твердого деформируемого тела из механики и термодинамики жидкостей и газов и укоренилась на благодатной почве изотропных тел. Она должна быть, по нашему мнению, пересмотрена. В частности, для анизотропного тела, скажем композита, безопасными могут оказаться совсем другие напряженные состояния, связанные с его структурой (армировкой и т.п.)*”¹⁰ Stwierdzenie to jest w jawnej sprzeczności z przyjmowanym powszechnie postulatem Misesa, iż nawet w przypadku ciał anizotropowych to właśnie stan równomiernego wszechstronnego naprężenia normalnego jest na tyle charakterystycznym dla struktury wewnętrznej materiału, że nie wpływa na miarę jego wyczerpania czy proces płynięcia plastycznego. Być może nie bez znaczenia jest to, że sam Mises w swej pracy [67] stwierdził „*Aus den Grundannahmen über das Verhalten der festen Körper im Fließzustande folgt, daß sie in zweierlei Hinsicht den zähen Flüssigkeiten gleichen*”¹¹ oraz stale posługiwał się terminologią mechaniki płynów (*Fließen, Deformationsgeschwindigkeit*), co wskazuje, że przynajmniej do pewnego stopnia rozważania jego nosiły wpływ (jak sugeruje Rychlewski - nieuzasadniony) koncepcji właściwych dla dynamiki płynów. Rychlewski zwraca uwagę na dość oczywisty fakt, że brak równoważności między kierunkami w przestrzeni struktury materiału (np. poprzez obecność zbrojenia) musi skutkować tym, że również i w postaci stanu bezpiecznego (czy też stanu na tyle charakterystycznego, by wyróżnić specjalnie jego wpływ) musi się uwzględnić jego odmienną interakcję z każdym z tych nierównoważnych sobie kierunków. Wystarczy zauważyć, że odkształcenie spowodowane stanem hydrostatycznym w przypadku anizotropii ma w ogólności składową dewiatorową, co do której uzasadnione jest przypuścić, że nie pozostaje bez wpływu na możliwość inicjacji mechanizmów płynięcia plastycznego.

¹⁰Zwyczaj, aby wydzielać kulistą część naprężenia σ_1 oraz uważać ciśnienie $-\sigma$ za pewien uniwersalny parametr termodynamiczny przeniknął do mechaniki odkształcalnego ciała stałego z mechaniki i termodynamiki płynów i gazów i zakorzenił się w żywym gruncie [teorii] ciał izotropowych. Stanowisko to należy, według naszego mniemania, zrewidować. W szczególności, dla ciała anizotropowego, powiedzmy dla kompozytu, bezpiecznym może okazać się zupełnie inny stan naprężenia, związany z jego strukturą (zbrojenie itp.)- tłum. autora, z wykorzystaniem tłumaczenia na angielski A. Blinowskiego [87]

¹¹Z podstawowych założeń dotyczących zachowania się ciał stałych w stanie płynięcia plastycznego wynika, że pod dwoma względami jest ono takie samo jak ciecz lepka - tłum. autora

Można to ująć w jeszcze inny sposób - struktura materiału w stanie naturalnym (nieobciążonym, nieodkształconym) jest pewnym układem mechanicznym w stanie równowagi. Stan naprężenia, który nazywać będziemy bezpiecznym, jest nim dlatego, że nie zmienia tego układu w sposób istotny, tj. w taki sposób, który mógłby sprawić, że układ ten stanie się niestabilny lub przejdzie on w jakościowo inny stan równowagi. O równowadze układu (w szczególności układu krystalicznego) stanowi m.in. jego geometria powiązana ściśle kierunkami i wielkościami oddziaływań, jakie w nim występują, które z kolei zadane są składem chemicznym, tj. rodzajami cząsteczek budujących rozpatrywany materiał. W przypadku izotropii, naprężenie hydrostatyczne powodujące równomierne odkształcenie objętościowe nie ingeruje istotnie w geometrię układu - wszystkie odległości między cząsteczkami (a przez to wielkości ich wzajemnych oddziaływań) zmieniają się proporcjonalnie, zatem jakościowo jest to ten sam układ (przynajmniej w zakresie stosunkowo niedużych odkształceń). W przypadku ciał anizotropowych rzecz ma się inaczej - nie jest bowiem wcale pewne, że wszechstronnie równe oddziaływanie zewnętrzne dokonuje w - przykładowo - geometrii tego układu takich zmian, które nie naruszają jego równowagi. Jest tak właśnie dlatego, że układ ten reaguje w każdym kierunku inaczej na taki sam zewnętrzny czynnik wymuszający. Nawet jeśli dla pewnych układów rzeczywiście tak jest, nie należy się spodziewać, aby było to prawdą w ogólności. Bardziej prawdopodobne (przez analogię to przypadku izotropowego omówionego zgrubnie powyżej) jest twierdzenie, że bezpiecznym stanem naprężenia jest ten stan, który powoduje tylko deformację objętościową. W przypadku ciał anizotropowych w ogólności jest to stan różny od naprężenia hydrostatycznego. Intuicja podpowiada, że obciążenie, które chcemy uznać za bezpieczne, na kierunkach, na których trwałość oddziaływań międzycząsteczkowych jest najsłabsza, powinno mieć inną miarę niż tam gdzie np. sztywność układu jest znacznie większa - w przeciwnym razie pewne obszary układu ulegną znacznie większym deformacjom niż inne, co z kolei wpłynie na wielkość oddziaływań między cząsteczkami (w rzeczywistości są to zjawiska sprzężone - chodzi jednak tylko o ogólne zarysowanie problemu), które funkcjonować będą musiały w układzie o jakościowo innej geometrii. To znowuż może w konsekwencji doprowadzić do trwałej zmiany stanu układu, osiągającego nowy stan równowagi (dostosowany do nowej, wymuszonej geometrii). Ten właśnie moment przejścia z jednego stanu równowagi w inny (bądź samej utraty równowagi) nazywamy stanem granicznym - najprawdopodobniej więc stan naprężenia hydrostatycznego nie jest w ogólności stanem bezpiecznym w przypadku materiałów anizotropowych. Nie ulega chyba jednak wątpliwości fakt, że stan taki ma niezerową składową hydrostatyczną.

6.5 Wpływ kąta Lodego

Kolejnym zjawiskiem, które uwzględnione powinno być w nowej propozycji warunku stanu granicznego jest różnica wytrzymałości na ścinanie w zależności od postaci dewiatora naprężenia - zjawisko to zwykle się nazywało zależnością od kąta Lodego, który jest ciągłym parametrem opisującym zmienność stanu naprężenia w dwuwymiarowej (dla izotropii) przestrzeni ścinań. Efekt ten jest szczególnie charakterystyczny dla materiałów kruchych lub sypkich (grunt, beton itp.) i stale jest przedmiotem analizy licznych autorów. Wiąże się on ściśle z zależnością warunku stanu granicznego od trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia a objawia się w kształcie przekroju poprzecznego powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń głównych płaszczyzną prostopadłą do osi naprężenia hydrostatycznego. Efekt ten był uwzględniany w

warunkach granicznych na wiele różnych sposobów począwszy od stosunkowo dawnych propozycji Druckera [26] - dość wymienić tu prace Lexcellent'a i in. [61], Podógrskiego [80], Ranieckiego i Mroza [81]. Zestawienie i porównanie różnych propozycji tego typu można znaleźć w pracy Bardeta [4]. Choć sam kąt Lodego zdefiniowany jest zasadniczo dla stanu naprężenia w materiale izotropowym, zastanawiający jest fakt, że systematyczne uwzględnienie zmienności postaci dewiatora naprężenia w kryteriach granicznych dla materiałów anizotropowych jest zagadnieniem niemal zupełnie nie podjętym - wydaje się oczywiste, że skoro efekt tego typu występuje w przypadku ciał izotropowych, winien on mieć jeszcze większe znaczenie w przypadku materiałów anizotropowych, których złożona struktura wewnętrzna musi być bardziej wrażliwa na odmienne postacie naprężenia stycznego, w zależności od orientacji płaszczyzn i kierunków ścinania względem płaszczyzn i osi symetrii materiału. Podobnie rzecz ma się ze złożonymi stanami ścinania. Można przyjąć, iż do pewnego stopnia problem ten uwzględniony został w propozycji Karafillisa-Boyce'a [52] choć nie jest to w żadnym wypadku ścisła analiza. Próbę uogólnienia kryterium Druckera podjęli jednakże Cazacu i Barlat [19].

7 Energetyczne hipotezy wyężenia dla materiałów anizotropowych

Energetyczne kryteria graniczne wyróżniają się spośród innych warunków stanu granicznego stosunkowo najbardziej klarowną interpretacją fizyczną umożliwiającą - przynajmniej w pewnym zakresie - ich weryfikację bądź też precyzyjniejszą specyfikację na różnych poziomach analizy mechanicznej - zarówno w ujęciu makroskopowym (w ujęciu mechaniki ośrodków ciągłych) jak i mikroskopowym czy molekularnym (z wykorzystaniem metod dynamiki molekularnej).

Wspomniano już wcześniej, że energetyczny charakter hipotezy wyężenia materiału sprawia, że zupełnie naturalną staje się możliwość zastosowania tego typu propozycji wysuniętych dla materiałów izotropowych także dla materiałów anizotropowych - w szczególności możliwe jest tu rozpatrywanie propozycji Beltramiego, Maxwella-Hubera, Schleichera czy wreszcie Burzyńskiego. Każda hipoteza sformułowana w kategoriach energii nie musi bowiem orzekać nic o charakterze relacji między naprężeniem i odkształceniem. W takim ujęciu to energia jest wielkością pierwotną definiującą miarę wyężenia. Kluczowa jest tu uniwersalność tej miary - w szczególności chodzi tu o możliwość wyznaczenia odpowiadających sobie wielkości o wymiarze energii na różnych poziomach analizy (makroskopowej, mikroskopowej i molekularnej) nawet w ramach różnych formalizmów matematycznych opisu zjawisk mechanicznych. Z uwagi jednak na fundamentalne różnice między narzędziami matematycznymi stosowanymi w ramach różnych dziedzin mechaniki ta „odpowiedniość” wspomnianych wielkości nie jest oczywiście ścisła i w pewnym stopniu zależy także od interpretacji autora. W tym najogólniejszym, energetycznym sensie - pozostając wciąż w zakresie mechaniki continuum - energetyczne hipotezy wyężenia (w swym pierwotnym sformułowaniu) funkcjonować mogą nie tylko w przypadku anizotropii ale nawet w przypadku nieliniowych związków fizycznych w zakresie sprężystym. I tak ogólna hipoteza Beltramiego bez żadnej modyfikacji może opisywać tak ciała izotropowe jak i anizotropowe. Tym, co musiałoby ulec zmianie, byłaby jedynie matematyczna forma samego warunku stanu granicznego, uwzględniająca inną matematyczną formę związków fizycznych i w konsekwencji inną matematyczną postać równania opisującego wielkość energii. W taki sam sposób dałoby się uogólnić hipotezę Hubera i dalej hipotezę Burzyńskiego na materiały anizotropowe, o ile tylko możliwe byłoby dla nich wydzielenie w całkowitej energii odkształcenia sprężystego części związanych tylko z deformacją postaciową i z deformacją objętościową.

Ogólny zarys energetycznych hipotez wyężenia dla materiałów anizotropowych zaprezentowany był już w rozdziale poprzednim. W obecnej części pracy propozycje kolejnych autorów przedstawiane są bardziej szczegółowo, poddawane są analizie oraz porównywane między sobą. Według wiedzy autora podobne zbiorcze zestawienie porównawcze energetycznych hipotez wyężenia dla materiałów anizotropowych do tej pory nie powstało.

7.1 Hipoteza Burzyńskiego (1928)

Zważywszy na bardzo dużą zgodność przewidywań izotropowej hipotezy Maxwella-Hubera-Misesa z wynikami doświadczalnymi, naturalnym wydawało się, że kryterium plastyczności dla materiałów anizotropowych winno być jakimś uogólnieniem tej właśnie propozycji. I tak historycznie dwie pierwsze propozycje tego typu kryteriów z 1928 r. - hipoteza Misesa [67] oraz hipoteza Burzyńskiego [16] - przyjęły za punkt wyjścia właśnie kryterium Hubera-Misesa. Istotnie różniły się jednak w samej interpretacji tego kryterium, a co za tym idzie, również w sposobie jego uogólnienia na przypadek materiałów anizotropowych. Mises, jako autor hipotezy izotropowej z 1913, rozpatrywał kryterium to w taki sposób, w jaki sam je przedstawił w [66], tj. jako kwadratową funkcję składowych stanu naprężenia, dość sceptycznie odnosząc się do jego energetycznej interpretacji, co być może spowodowane było m.in. założeniem, że ta sama funkcja pełnić ma rolę potencjału pola przyrostów odkształceń w zakresie plastycznym, w którym samo pojęcie energii odkształcenia sprężystego przestaje być pojęciem jednoznaczny z uwagi na trwałe zmiany zachodzące w strukturze materiału. Tym samym i jego propozycja z 1928 wprowadzona była jako jednorodna, kwadratowa funkcja składowych stanu naprężenia spełniająca postulaty związane z brakiem wpływu naprężenia hydrostatycznego oraz niezmienniczością wobec przekształceń należących do grupy symetrii cech sprężystych materiału. Zupełnie odmienne podejście w próbie uogólnienia propozycji Hubera zastosował Burzyński. Uogólnienie to polegało jednak przede wszystkim na wzięciu pod uwagę wpływu deformacji objętościowej na miarę wyężenia - uwzględnienie anizotropii związków fizycznych, jak wskazano to we wstępie do tego rozdziału, jest tylko prostą konsekwencją energetycznego sformułowania hipotezy.

Podstawę tekstu poniższej analizy kryterium Burzyńskiego stanowi wcześniejsza publikacja autora [101] poświęcona temu zagadnieniu, uzupełniona w rozdziale poniższym o dodatkowe informacje.

7.1.1 Koncepcja funkcji wpływu stanu naprężenia

Burzyński zaproponował, aby przyjąć za miarę wyężenia materiału kombinację gęstości energii odkształcenia postaciowego oraz gęstości energii odkształcenia objętościowego, którego udział w całkowitej mierze wyężenia określony jest przez pewien zależny od stanu naprężenia parametr η , przy czym - sugerując się dostępnymi wynikami doświadczeń - Burzyński założył, że parametr ten jest funkcją homograficzną naprężenia hydrostatycznego, mianowicie:

$$\Phi_f + \eta \cdot \Phi_v = H, \quad (7.1)$$

gdzie:

H - graniczna wielkości gęstości energii odkształcenia sprężystego

$$\Phi_v = \frac{1}{2} \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{A}_\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \right)$$

$$\Phi_f = \frac{1}{2} \mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \right) \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \right)$$

$$\eta = \eta(p) = \left(\omega + \frac{\delta}{3p} \right),$$

$\mathbf{A}_\sigma, \mathbf{A}_\varepsilon$ oraz $\mathbf{D}_\sigma, \mathbf{D}_\varepsilon$ to odpowiednio aksjatory i dewiatory tensorów naprężenia i odkształcenia, $\mathbf{1}$ jest izotropowym tensorem drugiego rzędu (tensorem jednostkowym), p oznacza naprężenie hydrostatyczne, zaś H, δ i ω są stałymi parametrami materiałowymi.

Rozkład gęstości energii sprężystej na część postaciową i objętościową jest w ogólności możliwy jedynie dla materiałów izotropowych oraz tych o symetrii kubicznej. Burzyński rozważał szczególną klasę materiałów, dla których rozkład taki jest możliwy niezależnie od ich klasy symetrii¹², co jest równoważne stwierdzeniu, że naprężenie hydrostatyczne i dylatacja są stanami własnymi odpowiednio tensora podatności i tensora sztywności [56]:

$$\mathbf{C}\mathbf{1} = \Theta\mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl}\delta_{kl} = \Theta\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkk} = \Theta\delta_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (7.2)$$

gdzie Θ jest stałą proporcjonalności, wartością własną \mathbf{C} , która interpretowana być może jako odwrotność modułu sztywności objętościowej. Materiały, dla których warunek ten jest spełniony nazywa się *materiałami objętościowo izotropowymi*, lub *materiałami Burzyńskiego*. Zależność (7.2) równoważna jest układowi warunków, jakie spełniać muszą składowe tensorów sprężystości w dowolnym układzie współrzędnych - warunki te nazywa się *warunkami Burzyńskiego*:

$$(3 \text{ niezależne związki}) \quad \begin{cases} C_{1123} + C_{2223} + C_{3323} = 0 \\ C_{1131} + C_{2231} + C_{3331} = 0 \\ C_{1112} + C_{2212} + C_{3312} = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

$$(2 \text{ niezależne związki}) \quad \begin{cases} C_{1111} - C_{2222} = C_{2233} - C_{1133} \\ C_{2222} - C_{3333} = C_{3311} - C_{2211} \\ C_{3333} - C_{1111} = C_{1122} - C_{3322} \end{cases}$$

Z uwagi na obecność tych 5 niezależnych związków między składowymi tensorów sprężystości, maksymalna liczba niezależnych składowych tensorów sprężystości materiałów objętościowo izotropowych wynosi $21-5=16$.

Kryterium Burzyńskiego dla materiałów izotropowych opisywać może szeroką gamę różnych typów powierzchni plastyczności - jest to kwadratowa, izotropowa funkcja stanu naprężenia, która w przestrzeni naprężeń głównych reprezentowana jest przez pewną symetryczną powierzchnię kwadratową. W zależności od wartości stałych parametrów kryterium powierzchnią tą może być elipsoida, paraboloida, hiperboloida, stożek lub walec. Szczególnie użyteczną cechą propozycji Burzyńskiego jest możliwość wyrażenia ogólnego trójparametrowego kryterium w zamkniętej formie przy użyciu jedynie trzech niezależnych wielkości będących stosunkowo

¹²Burzyński twierdził: „Praktycznie rzecz biorąc niema mianowicie żadnych fizykalnych przyczyn po temu, by energia odkształcenia nie dała się rozłożyć na sumę dwu innych mianowicie energii odkształcenia objętościowego i energii odkształcenia postaciowego.” [16]

łatwymi do wyznaczenia na drodze eksperymentalnej - wytrzymałości na rozciąganie k_r , wytrzymałości na ściskanie k_c oraz wytrzymałości na ścinanie k_s . W przypadku izotropowym, po podstawieniu do (7.1) zależności:

$$\frac{1-2\nu}{1+\nu}\omega = \frac{1-2\mu}{1+\mu}, \quad \frac{1-2\nu}{1+\nu}\delta = \frac{3(k_c - k_r)}{1+\mu}, \quad 12GH = \frac{3k_c k_r}{1+\mu}, \quad \mu = \frac{k_c k_r}{2k_s^2} - 1, \quad (7.4)$$

gdzie G - moduł Kirchhoffa, ν - współczynnik Poissona, uzyskujemy:

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2 \left(1 - \frac{k_c k_r}{2k_s^2}\right) (\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22}) + \\ & \left(\frac{k_c k_r}{k_s^2}\right) (\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2) + (k_c - k_r)(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - k_c k_r = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Burzyński przedstawił również propozycję rozszerzenia swojej hipotezy w ten sposób, aby uwzględniała ona także materiały anizotropowe (jednakże w dalszym ciągu objętościowo izotropowe). Celem uproszczenia sformułowania kryterium stanu granicznego wprowadził on tzw. „zasadniczy” układ współrzędnych, w którym w wyrażeniu na gęstość energii sprężystej znikają mieszane wyrażenia zawierające naprężenia normalne i styczne (lub - równoważnie - odkształcenia liniowe i postaciowe), co istotnie redukowało liczbę niezależnych parametrów kryterium. W najogólniejszym przypadku gęstość energii odkształcenia sprężystego wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} 2\Phi = & C_{1111}\sigma_{11}^2 + 2C_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2C_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 4C_{1123}\sigma_{11}\sigma_{23} + 4C_{1131}\sigma_{11}\sigma_{31} + 4C_{1112}\sigma_{11}\sigma_{12} + \\ & C_{2222}\sigma_{22}^2 + 2C_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} + 4C_{2223}\sigma_{22}\sigma_{23} + 4C_{2231}\sigma_{22}\sigma_{31} + 4C_{2212}\sigma_{22}\sigma_{12} + \\ & C_{3333}\sigma_{33}^2 + 4C_{3323}\sigma_{33}\sigma_{23} + 4C_{3331}\sigma_{33}\sigma_{31} + 4C_{3312}\sigma_{33}\sigma_{12} + \\ & 4C_{2323}\sigma_{23}^2 + 8C_{2331}\sigma_{23}\sigma_{31} + 8C_{2312}\sigma_{23}\sigma_{12} + \\ & 4C_{3131}\sigma_{31}^2 + 8C_{3112}\sigma_{31}\sigma_{12} + \\ & 4C_{1212}\sigma_{12}^2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Wykorzystując warunki Burzyńskiego (7.3) składowe tensora podatności w trzech wyrazach mieszanych możemy zastąpić sumą dwu innych:

$$\begin{aligned} C_{1123} &= -(C_{2223} + C_{3323}) \\ C_{2231} &= -(C_{3331} + C_{1131}) \\ C_{3312} &= -(C_{1112} + C_{2212}) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Wtedy dziewięć wyrazów związanych z naprężeniami normalnymi i stycznymi można przepisać w postaci:

$$(\sigma_{22} - \sigma_{33})(C_{2212}\sigma_{12} - C_{3331}\sigma_{31}) + (\sigma_{33} - \sigma_{11})(C_{3323}\sigma_{23} - C_{1112}\sigma_{12}) + (\sigma_{11} - \sigma_{22})(C_{1131}\sigma_{31} - C_{2223}\sigma_{23}) \quad (7.8)$$

Ponieważ układ współrzędnych, którego orientacja zadana jest trzema niezależnymi parametrami, dobrać można dowolnie, zatem przyjąć można taką jego orientację (właśnie orientację „zasadniczą”), w której składowe tensora podatności spełniają następujące trzy równania:

$$\begin{cases} C_{1131}\sigma_{31} - C_{2223}\sigma_{23} = 0 \\ C_{2212}\sigma_{12} - C_{3331}\sigma_{31} = 0 \\ C_{3323}\sigma_{23} - C_{1112}\sigma_{12} = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

Można zauważyć, że warunki te spełnione są w przypadku układu współrzędnych, którego osie pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych, w którym wszystkie składowe tensora naprężenia spoza przekątnej głównej są zawsze równe 0. Nie jest to oczywiście jedyny układ tego typu. Przykładowo, dla każdego materiału, który jest co najmniej ortotropowy (ortotropowy, tetragonalny, cylindryczny, kubiczny) składowe tensora podatności i tensora naprężenia w układzie współrzędnych zbudowanym na osiach symetrii charakterystycznych dla danego materiału spełniają powyższe warunki. W zasadniczym układzie współrzędnych gęstość energii sprężystej może być zapisana w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \Phi = & \underbrace{\frac{1}{2}B(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2}_{\Phi_v} + \\ & + \underbrace{\frac{1}{3} \left[L(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + M(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + N(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \right]}_{\Phi_f} + 2P\sigma_{23}^2 + 2Q\sigma_{31}^2 + 2R\sigma_{12}^2, \end{aligned} \quad (7.10)$$

gdzie:

$$B = \frac{1}{3}(C_{kk11} + C_{kk22} + C_{kk33}) = \frac{1}{3}(C_{11kk} + C_{22kk} + C_{33kk}) \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{nie sumować!})$$

$$L = \frac{3}{2}(B - C_{2233}), \quad M = \frac{3}{2}(B - C_{3311}), \quad N = \frac{3}{2}(B - C_{1122})$$

$$P = \frac{1}{4} \left(C_{2323} + 2C_{2331} \frac{C_{2223}}{C_{1131}} \right), \quad Q = \frac{1}{4} \left(C_{3131} + 2C_{3112} \frac{C_{3331}}{C_{2212}} \right), \quad R = \frac{1}{4} \left(C_{1212} + 2C_{1223} \frac{C_{1112}}{C_{3323}} \right)$$

(7.11)

B - moduł podatności objętościowej, L , M , N , P , Q , R - uogólnione moduły podatności postaciowej. Celem dalszego uproszczenia sformułowania warunku stanu granicznego Burzyński rozważał tylko przypadek, w którym osie rozważanego układu współrzędnych pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych, przy jednoczesnym założeniu że $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (lub odwrotnie). Po podstawieniu do (7.1)

$$\frac{1-2\tilde{\mu}}{1+\tilde{\mu}} = \frac{3BM}{2LN}\omega, \quad \frac{3(k_c-k_r)}{1+\tilde{\mu}} = \frac{3BM}{2LN}\delta, \quad \frac{3k_c k_r}{1+\tilde{\mu}} = \frac{3HM}{LN},$$

$$\lambda = \frac{M^2}{2LN}, \quad \frac{M}{L} = \frac{M}{N} = 2(1-\lambda), \quad \varphi = \sqrt{\frac{2(1+\lambda)}{3}} \quad (7.12)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\varphi^2} \frac{k_c k_r}{2k_s^2} - 1 \quad \tilde{\delta} = \frac{1+\tilde{\mu}}{3}(1-2\lambda)$$

uzyskujemy warunek stanu granicznego zależny od 4 parametrów - trzech wartości granicznych naprężeń w podstawowych próbach wytrzymałościowych oraz parametru λ , którego wartość określona jest przez wzajemne stosunki uogólnionych modułów podatności postaciowej:

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 + \left(\frac{(1-2\lambda)k_c k_r}{2(\lambda+1)k_s^2} + 1 \right) \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + (k_c - k_r)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \\ & + 2 \left(1 - \frac{k_c k_r (2-\lambda)}{2(\lambda+1)k_s^2} \right) \left[\sigma_2 \sigma_3 + \frac{(k_c k_r - 2k_s^2)(\lambda+1)}{k_c k_r (2-\lambda) - 2(\lambda+1)k_s^2} \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 \right] - k_c k_r = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

O ile warunek graniczny dla ciał izotropowych zaproponowany przez Burzyńskiego [16] jest skalarną funkcją pierwszego niezmiennika tensora naprężenia i drugiego niezmiennika jego dewiatora, o tyle - z uwagi na podkreślenie odmiennego charakteru naprężenia pośredniego σ_2 poprzez jego odmienny wpływ na postać warunku granicznego - funkcja (7.13) nie może być już wyrażona jedynie przy użyciu tych dwóch niezmienników. W dalszym ciągu jest to jednak funkcja izotropowa, a co za tym idzie, może zostać wyrażona poprzez niezmienniki tensora naprężenia - dodatkową zmienną niezależną określającą postać powierzchni plastyczności w omawianym rozszerzeniu propozycji Burzyńskiego na ciała anizotropowe może być trzeci niezmiennik dewiatora naprężenia czy też ściśle wiążący się z nim kąt Lodego.

Konieczność spełnienia w każdym punkcie powierzchni granicznej opisanej równaniem (7.13) nierówności $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, skutkuje tym, że równanie to (jako równanie powierzchni w kartezyjskim układzie współrzędnych $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, w którym zależności między wartościami zmiennych niezależnych mogą być dowolne) obowiązuje jedynie w ograniczonym obszarze przestrzeni naprężeń głównych. W pozostałych podobszarach tej przestrzeni równanie to musi być zmodyfikowane w taki sposób, aby za σ_1 podstawić tę współrzędną σ_i , która przyjmuje w tym podobszarze wartość największą itd. Otrzymana w ten sposób powierzchnia graniczna jest w istocie sumą płatów powierzchniowych układu przecinających się wzajemnie powierzchni opisanych różnymi wariantami równania (7.13).

Warunek (7.13) może zostać zapisany w następującej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ & \alpha & \beta \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_c - k_r) \\ (k_c - k_r) \\ (k_c - k_r) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - k_c k_r = 0, \quad (7.14)$$

gdzie $\alpha = 1 + \frac{(1-2\lambda)k_c k_r}{2(\lambda+1)k_s^2}$, $\beta = 1 - \frac{(2-\lambda)k_c k_r}{2(\lambda+1)k_s^2}$, $\gamma = 1 - \frac{k_c k_r}{2k_s^2}$. Rozkład widmowy macierzowego operatora liniowego (który może być uważany za pewien rodzaj tensora stanu granicznego w przestrzeni naprężeń głównych) prowadzi do następujących interesujących wyników:

- **Jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów hydrostatycznych**

Wartość własna: $\chi_1 = 3 - \frac{3k_c k_r}{2k_s^2(\lambda+1)}$, Stan własny: $\mathbf{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}[1; 1; 1]$, $|\boldsymbol{\sigma}_1| = p$

- **Jednowymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań**

Wartość własna: $\chi_2 = \frac{k_c k_r}{2k_s^2}$, Stan własny: $\mathbf{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1; 0; -1]$, $|\boldsymbol{\sigma}_2| = \tau_{max}$

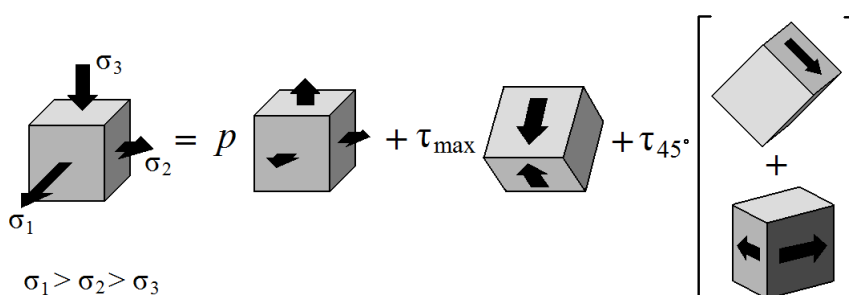
Z nierówności $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ wynika, że drugi stan własny \mathbf{h}_2 odpowiada maksymalnemu naprężeniu stycznemu - jego wpływ na całkowitą miarę wyteżenia materiału jest niezależny od parametru λ .

- **Jednowymiarowa podprzestrzeń własna dewiatorów**

Wartość własna: $\chi_3 = \frac{3k_c k_r (1-\lambda)}{2k_s^2 (1+\lambda)}$, Stan własny: $\mathbf{h}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}[1; -2; 1]$, $|\boldsymbol{\sigma}_3| = \tau_{45}$

Trzeci stan własny \mathbf{h}_3 jest stanem dewiatorowym nie będącym jednak czystym ścianiem. Jest on natomiast złożeniem dwóch nieortogonalnych (w sensie klasycznie zdefiniowanego iloczynu skalarnego) czystych ścinań.

Każdy ze stanów \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 , \mathbf{h}_3 jest ortogonalny do pozostałych dwóch. Rozkład stanu naprężenia w bazie stanów własnych operatora stanu granicznego może zostać zilustrowany w następujący sposób:



Rozkład stanu naprężenia w bazie stanów własnych operatora stanu granicznego wg hipotezy Burzyńskiego.

7.1.2 Analiza energetycznego kryterium Burzyńskiego dla materiałów anizotropowych

We wcześniejszej publikacji autora [101] wskazano na szereg nieścisłości w końcowym sformułowaniu kryterium stanu granicznego Burzyńskiego, wiążących się z następującymi kwestiami:

- Sformułowanie w naprężeniach głównych
- Brak niezmienniczości parametrów kryterium
- Zasadniczy układ współrzędnych
- Współczynnik anizotropii λ
- Izotropia właściwości wytrzymałościowych

Zanim jednak zagadnienia powyższe zostaną omówione w bardziej szczegółowy sposób, konieczne trzeba zwrócić uwagę na fakt, że sam Burzyński przynajmniej po części świadomy był występowania w swej hipotezie pewnych nieścisłości. Z tego też powodu, podsumowując swoją propozycję, zastrzegał się, iż nie ma ona już teraz całkiem ścisłej interpretacji energetycznej - niejasne jest zatem, dlaczego wyprowadzenia swoje opierał na bardzo szczegółowo rozpisanych związkach fizycznych, których znaczenie następnie sam odrzucał. Ponieważ nie

sposób docieć motywacji działań Burzyńskiego oraz stopnia jego zorientowania się we wszystkich nieścisłościach, jakie omówione są w następnych akapitach, nie należy traktować uwag poniższych jako ścisłej analizy krytycznej jego propozycji - jest to raczej wskazanie przyczyn, dla których końcowe jej sformułowanie nie może być w żadnym stopniu wiązane ze sformułowaniem pierwotnym hipotezy w ramach pojęć energii sprężystej.

Sformułowanie w naprężeniach głównych

Kryterium Burzyńskiego prostotę swej postaci zawdzięcza między innymi założeniu, że kierunki własne zadanego stanu naprężenia pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych. Wszystkie wielkości fizyczne występujące w kryterium muszą zatem być określone w takim układzie współrzędnych - w szczególności chodzi tu o stałe sprężyste i inne wielkości poprzez nie definiowane, które w ogólności zmieniać będą swoje wartości wraz ze zmianą orientacji układu współrzędnych. Z tekstu pracy Burzyńskiego można odnieść wrażenie, że stosunki owych stałych sprężystych są niezależne od przyjętego układu współrzędnych - sytuacja taka mogłaby mieć miejsce tylko przy założeniu, że są one niezmiennikami. Problem ten nie został jednak szerzej omówiony.

Układ współrzędnych rozpatrywany przez Burzyńskiego, którego osie pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych nie jest holonomiczny - lokalny układ współrzędnych w danym punkcie nie może zostać wyznaczony poprzez różniczkowanie wektora wodzącego wzdłuż ustalonych krzywych w przestrzeni w tym punkcie choćby dlatego, iż spełnione muszą być nierówności $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Ponadto rozkład stanu naprężenia zawierać może osobliwości oraz nieciągłości.

Aby wyznaczyć w całości stan naprężenia, potrzeba sześciu niezależnych wielkości - odnosząc się jedynie do trzech skalarnych wielkości (naprężeń głównych lub niezmienników stanu naprężenia), nie można uzyskać pełnej informacji na temat stanu naprężenia w danym punkcie - całkowicie pomijana jest bowiem kwestia orientacji kierunków naprężeń głównych w przestrzeni, co w analizie wyteżenia ciał anizotropowych ma decydujące znaczenie.

Brak niezmienniczości parametrów kryterium

Jak wspomniano powyżej stałe sprężyste zmieniają w ogólności swoje wartości zależnie od orientacji osi symetrii materiału w rozpatrywanym układzie współrzędnych. Każda zmiana bądź orientacji próbki, bądź przyjętego układu współrzędnych skutkuje zmianą liczbowej wartości tych parametrów w rozpatrywanym układzie - ponieważ w ogólności orientacja kierunków naprężeń głównych zmieniać się może z punktu do punktu, stąd parametry kryterium Burzyńskiego (jeśli chce zachować ich energetyczną interpretację) winny również zmieniać swe wartości, o ile tylko nie są one niezmiennikami. Moduł podatności objętościowej B jest wielkością proporcjonalną do odwrotności jednego z modułów Kelvina dowolnego materiału objętościowo izotropowego - jest zatem faktycznie niezmiennikiem. Jednak wszystkie pozostałe stałe sprężyste występujące w sformułowaniu kryterium, mianowicie L , M , N zdefiniowane jako różnica niezmiennika i pojedynczej składowej C (patrz: związki (7.11)) nie mogą być w ogólności niezmiennikami.

Zasadniczy układ współrzędnych

Stosunkowo niejasna jest również kwestia zasadniczego układu współrzędnych, który zadany jest układem równości (7.9). Choć układ taki zawsze istnieje, jest nim bowiem rozpatrywany układ, którego osie pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych, to jednak pojawia się pytanie o jego istnienie niezależnie od aktualnego stanu naprężenia. Łatwo wykazać, że w przypadku materiałów ortotropowych lub o wyższej symetrii układ, którego osie pokrywają się z osiami symetrii materiału również ma cechy układu zasadniczego. Problem istnienia zasadniczego układu współrzędnych rozwiązujemy odpowiadając na pytanie czy istnieje taka baza w przestrzeni fizycznej, w której dowolny objętościowo izotropowy tensor podatności \mathbf{C} przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{C} \cong \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ & sym & & & C_{3131} & C_{3112} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

Wystarczy zauważyć, że liczba niezależnych składowych tensora podatności została zredukowana z 16 do 10 (należy pamiętać, że spełnione muszą być dodatkowo warunki Burzyńskiego (7.3)) - istnieją więc takie materiały, dla których nie istnieje taka orientacja w przestrzeni fizycznej, dla której przyjęty układ współrzędnych miałby cechy układu zasadniczego niezależnie od stanu naprężenia.

Współczynnik anizotropii λ

Anizotropia cech sprężystych zadanego materiału znajduje swoje odzwierciedlenie w równaniu warunku granicznego (7.13) w pojedynczym parametrze λ , zdefiniowanym jako $\lambda = \frac{M^2}{2LN}$. Burzyński przyjął ponadto, że $\frac{M}{L} = \frac{M}{N} = 2(1 - \lambda)$, co jest konsekwencją założonej przez Burzyńskiego postaci kryterium - na drodze bezpośrednich podstawień można prosto pokazać, że tylko w przypadku, gdy równania te są prawdziwe, kryterium spełnione jest w granicznych stanach jednoosiowych. Podstawiając $x = \frac{M}{L} = \frac{M}{N}$ otrzymujemy $\lambda = \frac{M^2}{2LN} = \frac{1}{2}x^2$ i wreszcie, podstawiając obydwie powyższe związki do $\frac{M}{L} = \frac{M}{N} = 2(1 - \lambda)$, otrzymujemy:

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad (7.16)$$

Dwa pierwiastki powyższego równania to $x_1 = -2$ and $x_2 = 1$. Ponieważ x zdefiniowane zostało jako iloraz dwóch „modułów sprężystych”, co do których można się spodziewać, iż są dodatnie, należałoby odrzucić pierwszy z pierwiastków. Dla $x = 1$ otrzymujemy $\lambda = \frac{1}{2}$, tj. wartość parametru λ dla której kryterium jest identyczne z kryterium dla ciał izotropowych. Gdyby zaś dopuścić drugie z rozwiązań, wtedy $N = L = -M$ - jest to oczywiście przypadek wyjątkowo specyficzny, drastycznie ograniczający możliwości liczbowych stosunków uogólnionych modułów sprężystych. Wynik ten sugeruje w pewnej mierze równoważność kierunków odpowiadających modułom N i L , a wymagana wartość modułu M sprawia, iż bardzo wątpliwe wydaje się, aby w ogólnym przypadku taka sytuacja mogła zaistnieć w rzeczywistości.

Trzeba jednak wspomnieć, że przed podaniem uproszczonej postaci proponowanego warunku granicznego (7.13) Burzyński napisał: „[parametry M/N , M/L , M^2/LN] nie traktujemy już jako wykładniki stosunku stałych sprężystości, lecz jako współczynniki indywidualnie związane z istotą doświadczalną wyężenia” [16]. Podobnie i w końcowej części rozdziału poświęconego omawianej hipotezie, znajduje się następujące stwierdzenie: „należy na zakończenie podnieść (...) uwagę, że stosowanie nazwy energii do używanych [w energetycznych hipotezach wyężenia](...) wyrażen podyktowane zostało tylko prostotą wyrażania się; że funkcje [te] (...) utraciły częściowo przypisywany im nazwą charakter - nie trzeba tłumaczyć.” [16]. Nie wiadomo jak interpretować te słowa. Jeśli w tych stwierdzeniach Burzyński odrzuca wcześniejsze założenia o λ , to dla każdej wartości $\lambda \neq \frac{1}{2}$ (a dla takich wartości propozycja ta nie redukuje się do przypadku izotropowego) wszystkie dalsze wyprowadzenia pozbawione są fizycznej interpretacji energetycznej, co sprowadza całą hipotezę Burzyńskiego do dość zawiłej, choć w istocie nieskomplikowanej formuły matematycznej dobranej w taki sposób, aby warunek graniczny przez nią określony spełniony był w wybranych stanach. Nie wydaje się również uzasadnione zrównywanie przedstawionego przez Burzyńskiego podejścia z jego własną wcześniejszą propozycją dla materiałów izotropowych, czy też z hipotezą Hubera-Misesa. Przykładowo, miara wyężenia w tej ostatniej może być w zupełnie jasny sposób - dzięki ścisłej proporcjonalności - utożsamiana rzeczywiście z gęstością energii, podczas gdy w końcowej propozycji Burzyńskiego dla materiałów anizotropowych taka analogia nie istnieje. Przyjmując jednak, że Burzyński przynajmniej częściowo świadomy był szeregu nieścisłości związanych z zaprezentowanym podejściem, zupełnie zbędne (a nawet wprowadzające w błąd) wydaje się „wyprowadzanie” tej propozycji ze sformułowania energetycznego z odniesieniem do anizotropowych związków konstytutywnych, w sytuacji, gdy założenia te są następnie całkowicie odrzucane - trudno bowiem mówić o „częściowej” utracie charakteru energetycznego.

Izotropia właściwości wytrzymałościowych

W całej pracy Burzyńskiego [16] zakłada się, że wartości naprężeń granicznych k_c , k_r oraz k_s są niezależne od kierunku przyłożenia obciążenia, a zatem przy uwzględnieniu anizotropii cech sprężystych pomija się całkowicie anizotropię cech wytrzymałościowych.

7.2 Kryterium Olszaka - Urbanowskiego (1956), Olszaka - Ostrowskiej-Maciejewskiej (1985)

Hipoteza Burzyńskiego była pierwszą próbą uogólnienia hipotezy Hubera-Misesa, przyjętej powszechnie dla materiałów izotropowych, która uwzględniałaby anizotropię cech sprężystych. Ograniczeniem stosowalności nowego kryterium było założenie o możliwości rozkładu energii sprężystej na część związaną z odkształceniem postaciowym i odkształceniem objętościowym. Założenie to, przyjęte świadomie przez Burzyńskiego i umożliwiające konsekwentną adaptację koncepcji Hubera na przypadek anizotropowy, nie było jednak poparte ścisłą argumentacją. Nie znajduje ono również jednoznacznego potwierdzenia doświadczalnego, stanowiąc tym samym dość istotną przeszkodę w szerszym stosowaniu hipotezy Burzyńskiego.

Odmianą koncepcję uogólnienia hipotezy Hubera na ciała anizotropowe zaprezentowali w 1956 r. Olszak oraz Urbanowski w [71], inspirowani nieco wcześniejszymi pracami Goldenblata [33] [34]. Trzeba już na wstępie wspomnieć, że pomysł ten stał się następnie przedmiotem badań kolejnych naukowców i doczekał się szczegółowej i wielopłaszczyznowej analizy w pracach Olszaka i Ostrowskiej-Maciejewskiej [72] oraz Rychlewskiego [87]. Rozważania zawarte w przytoczonych pracach oraz wnioski, do których prowadzą, zestawione są w obecnym rozdziale.

Zarysowując rzecz w skrócie, Olszak i Urbanowski rozpatrywali w [71] funkcję Ψ będącą potencjałem plastycznym w równaniach płynięcia plastycznego Lévy'ego-Misesa (5.8). Funkcję tę przyjęto w postaci jednorodnej kwadratowej funkcji stanu naprężenia lub odkształcenia:

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \tilde{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7.17)$$

Warunek plastyczności stowarzyszony z prawem płynięcia jest uogólnionym warunkiem typu Misesa (6.28). Na drodze szeregu przekształceń omówionych poniżej Olszak i Urbanowski wprowadzili tensor stanu granicznego \mathbf{H} w postaci:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{2\tilde{H}} \left[\mathbf{S} - \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S} \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}} \right] \quad (7.18)$$

lub

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2\hat{H}} \left[\mathbf{C} - \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}} \right] \quad (7.19)$$

przy czym lewa strona warunku granicznego (6.28) interpretowana jest jako „pseudoenergia odkształcenia postaciowego” - uogólnienie Huberowskiej miary wyężenia materiału na przypadek dowolnego materiału anizotropowego. Jest to wielkość o wymiarze energii niezmiennicza wobec zmiany stanu odkształcenia lub naprężenia (w zależności od przyjętej postaci (7.18) lub (7.19) tensora \mathbf{H}) o część kulistą (dylatacja lub naprężenie hydrostatyczne). Po opublikowaniu przez Rychlewskiego prac prezentujących metody analizy widmowej tensorów czwartego rzędu, koncepcja ta doczekała się pogłębionej analizy w pracy Olszaka i Ostrowskiej-Maciejewskiej [72], którzy wskazali na tożsamość dewiatorowych stanów własnych tensorów sprężystości oraz wyprowadzonych tensorów stanu granicznego (7.18) i (7.19), jak również zbadali kwestię związków między wartościami własnymi tensorów stanu granicznego a modułami Kelvina badanego materiału. Nieco odmienne podejście, prowadzące jednak do wyników identycznych jak w pracach Olszaka i Urbanowskiego oraz Olszaka i Ostrowskiej-Maciejewskiej, zaprezentował Rychlewski rozważając rozkład przestrzeni naprężeń na dwie podprzestrzenie energetycznie ortogonalne, co umożliwia rozkład energii sprężystej na dwie niezależne od siebie części. O jednej z tych podprzestrzeni założył Rychlewski, iż jest jednowymiarową przestrzenią stanów bezpiecznych a za miarę wyężenia przyjął on energię związaną z drugim z tych stanów. Przy założeniu, że stanem bezpiecznym jest stan hydrostatyczny lub stan powodujący jedynie odkształcenie objętościowe, uzyskał on postać warunku granicznego postulowaną przez Olszaka i Urbanowskiego.

7.2.1 Koncepcja analogii izotropowej [Goldenblat (1955)]

W swych pracach [33], [34] z 1955 r. Goldenblat przedstawił ciekawą koncepcję przedstawienia związków fizycznych dla materiałów anizotropowych w taki sposób, aby ich matematyczna postać wykazywała pewną analogię do formy związków konstytutywnych dla izotropii. Prawo Hooke'a dla materiału izotropowego można przedstawić w powszechnie stosowanej ogólnej postaci:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (7.20)$$

Wprowadzając następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} \varepsilon^I &= \varepsilon_{kk}, & \varepsilon^{II} &= \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik}, & e^{II} &= \varepsilon^{II} - \frac{1}{3}(\varepsilon^I)^2 \\ \sigma^I &= \sigma_{kk}, & \sigma^{II} &= \sigma_{ik} \sigma_{ik}, & s^{II} &= \sigma^{II} - \frac{1}{3}(\sigma^I)^2 \end{aligned} \quad (7.21)$$

oczywiste są zależności:

$$\begin{aligned} \sigma^I &= 3K \varepsilon^I, & s^{II} &= 2G e^{II} \\ \Phi_v &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)(\varepsilon^I)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9K}(\sigma^I)^2 \right], & \Phi_f &= \frac{1}{2} \left[2\mu e^{II} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2G} s^{II} \right] \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \Phi_v + \Phi_f = \frac{1}{2} \left[\lambda(\varepsilon^I)^2 + 2\mu \varepsilon^{II} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9K} \left(1 - \frac{3K}{2G} \right) (\sigma^I)^2 + \frac{1}{2G} \sigma^{II} \right]$$

gdzie λ i μ są odpowiednio pierwszym i drugim parametrem Lamego, zaś $K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$ jest modułem sztywności objętościowej Helmholtza, zaś $G = \mu$ jest modułem sztywności postaciowej Kirchhoffa.

Przez analogię do (7.20) związki między naprężeniem a odkształceniem w przypadku ciał anizotropowych można zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda} A_{ijkl} A_{pqrs} \delta_{kl} \delta_{pq} \varepsilon_{rs} + \tilde{\mu} A_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (7.23)$$

gdzie A_{ijkl} są składowymi pewnego tenora czwartego rzędu - nazwanego przez Goldenblata „tensorem anizotropii” - o takich samych symetriach wewnętrznych oraz zewnętrznych co tensor sztywności rozpatrywanego materiału. Związek tenora sztywności z tensorem anizotropii \mathbf{A} jest następujący:

$$S_{ijkl} = \tilde{\lambda} A_{ijpq} A_{klrs} \delta_{pq} \delta_{rs} + 2\tilde{\mu} A_{ijkl} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S} = \tilde{\lambda} [(\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \cdot \mathbf{1})] + 2\tilde{\mu} \mathbf{A} \quad (7.24)$$

Ponieważ tensory \mathbf{S} oraz \mathbf{A} mają w ogólności taką samą liczbę niezależnych składowych, a ponadto „uogólnione parametry Lamego” $\tilde{\lambda}$ oraz $\tilde{\mu}$ mogą zostać wybrane dowolnie, stąd wniosek, że związek (7.24) nie jest wzajemnie jednoznaczny, tj. istnieje nieskończona ilość trójek $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \mathbf{A})$ spełniających (7.24) dla zadanego \mathbf{S} .

Obliczmy teraz niezmiennik σ^I dokonując w (7.23) zwiężenia po wskaźnikach ij oraz wyznaczmy całkowitą energię sprężystą mnożąc (7.23) przez ε_{ij} . Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sigma^I &= \sigma_{kk} = (\alpha\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{\varepsilon}^I, \\ \Phi &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\lambda}(\tilde{\varepsilon}^I)^2 + 2\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}^{II}\right],\end{aligned}\tag{7.25}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\alpha &= A_{iikk} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} \\ \tilde{\varepsilon}^I &= A_{ijkl}\delta_{ij}\varepsilon_{kl} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\ \tilde{\varepsilon}^{II} &= A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon},\end{aligned}$$

co przy założeniu $\alpha = A_{iikk} = 3$ i podstawieniu $\tilde{K} = 3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}$ stanowi wyraźną analogię do (7.22).

7.2.2 Koncepcja pseudoenergii odkształcenia postaciowego [Olszak, Urbanowski (1956)]

W [71] Olszak i Urbanowski dokonali specyfikacji postaci tensora stanu granicznego \mathbf{H} poprzez dalsze rozwinięcie pomysłów Goldenblata. Po pierwsze wyznaczono wzór określający składowe tensora anizotropii dla zadanego tensora sztywności i przyjętych uogólnionych parametrów Lamego. Przekształcając (7.24) otrzymujemy:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\tilde{\mu}} \left[\mathbf{S} - \tilde{\lambda}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \cdot \mathbf{1}) \right]\tag{7.26}$$

Nasuując z lewej i z prawej strony tensor jednostkowy drugiego rzędu na obie strony równania (7.24) otrzymujemy po przekształceniach:

$$(\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S} \cdot \mathbf{1}) = (\alpha\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})^2 (\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \cdot \mathbf{1})\tag{7.27}$$

Podstawiając otrzymaną zależność do poprzedniego równania i przyjmując $\alpha = A_{iikk} = 3$ uzyskujemy ostatecznie:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\tilde{\mu}} \left[\mathbf{S} - \frac{\tilde{\lambda}}{(3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})^2} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S} \cdot \mathbf{1}) \right]\tag{7.28}$$

W tym miejscu trzeba wspomnieć, że zależność ta jest prawdziwa tylko przy założeniu, że $A_{iikk} = 3$ - z jakichś względów warunek ten nie został wyszczególniony przez autorów w [71]. Warto też zwrócić uwagę na fakt, że zależność ta jest prawdziwa niezależnie od wartości parametrów $\tilde{\lambda}$ i $\tilde{\mu}$ - tym samym można je na tym etapie zdefiniować w dowolny sposób. Wiedząc, że w przypadku izotropii spełnione są zależności:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{iikk} = 9\lambda + 6\mu \\ S_{ikik} = 3\lambda + 12\mu \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{15} (2S_{iikk} - S_{ikik}) \\ \mu = \frac{1}{10} \left(S_{ikik} - \frac{1}{3}S_{iikk} \right) \end{array} \right.,\tag{7.29}$$

stałe te można przyjąć w postaci:¹³

$$\begin{cases} \tilde{\lambda} = \frac{1}{15} (2S_{iikk} - S_{ikik}) \\ \tilde{\mu} = \frac{1}{10} (S_{ikik} - \frac{1}{3}S_{iikk}) \end{cases}, \quad (7.30)$$

przy czym tensor \mathbf{S} jest rzeczywistym anizotropowym tensorem sztywności danego materiału. Wprowadźmy teraz kolejny niezmiennik stanu odkształcenia, mianowicie:

$$\tilde{\varepsilon}^{II} = \tilde{\varepsilon}^{II} - \frac{1}{3}(\tilde{\varepsilon}^I)^2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7.31)$$

Wtedy, uwzględniając powyższą zależność w ogólnych związkach (7.25), całkowitą energię sprężystą można zapisać w postaci:

$$\Phi = \tilde{\Phi}_v + \tilde{\Phi}_f, \text{ gdzie:} \quad (7.32)$$

$$\tilde{\Phi}_v = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(\tilde{\varepsilon}^I)^2 \right], \quad \tilde{\Phi}_f = \frac{1}{2} \left[2\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}^{II} \right],$$

co jest w analogii do związków (7.22).

Dokonując analogicznych przekształceń dla odwróconego związku fizycznego

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9\hat{K}} \left(1 - \frac{3\hat{K}}{2\hat{G}} \right) B_{ijkl} B_{pqrs} \delta_{kl} \delta_{pq} \sigma_{rs} + \frac{1}{2\hat{G}} B_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (7.33)$$

otrzymujemy:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2\hat{G}} \mathbf{B} + \frac{1}{3\hat{K}} \left(1 - \frac{3\hat{K}}{2\hat{G}} \right) (\mathbf{1} \cdot \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{B} \cdot \mathbf{1}) \quad (7.34)$$

$$\mathbf{B} = 2\hat{G} \left[\mathbf{C} - K \left(1 - \frac{3\hat{K}}{2\hat{G}} \right) (\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{1}) \right] \quad (7.35)$$

Uogólnione moduły sztywności można przyjąć jako równe¹⁴

$$\begin{cases} \frac{1}{\hat{K}} = C_{iikk} \\ \frac{1}{2\hat{G}} = \frac{1}{5} \left(C_{ikik} - \frac{1}{3}C_{iikk} \right) \end{cases}. \quad (7.36)$$

Wprowadzając oznaczenia:

¹³W [71] przyjęta była odmienna definicja tych stałych, przy czym (z uwagi na błędy jakie pojawiły się w druku [71]) w kwestii tej mogłem rozeznaczyć się dopiero po udostępnieniu mi przez panią dr Janinę Ostrowską-Maciejewską jej osobistych notatek - w tym miejscu chciałbym złożyć szczególne podziękowania za udzieloną mi pomoc. Autorzy przyjęli $\tilde{\lambda} = \frac{1}{6}(S_{iikk} - S_{ikik})$, $\tilde{\mu} = \frac{1}{4}(S_{ikik} - \frac{1}{3}S_{iikk})$. Przyjmując definicję autorów [71] analogia z niezmiennikami izotropowego tensora sztywności spełniona jest jedynie dla S_{iikk} . Przyjmując jednakże $\tilde{\lambda}$ oraz $\tilde{\mu}$ określone równaniami (7.30) wszystkie dalsze wyprowadzenia przebiegają identycznie jak w [71], stąd pozwoliłem sobie zastąpić oryginalne sformułowanie autorów związkami, które w pełni zachowują analogię z przypadkiem izotropii.

¹⁴W [71] przyjęto $\frac{1}{2\hat{G}} = (C_{ikik} - \frac{1}{3}C_{iikk})$

$$\hat{\sigma}^I = \mathbf{1} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{\sigma}^{II} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{s}^{II} = \hat{\sigma}^{II} - \frac{1}{3}(\hat{\sigma}^I)^2 \quad (7.37)$$

można napisać:

$$\Phi = \hat{\Phi}_v + \hat{\Phi}_f, \text{ gdzie:} \quad (7.38)$$

$$\hat{\Phi}_v = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9K} (\hat{\sigma}^I)^2 \right], \quad \hat{\Phi}_f = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2G} \hat{s}^{II} \right].$$

Tym samym otrzymujemy:

$$\Phi = \tilde{\Phi}_v + \tilde{\Phi}_f = \hat{\Phi}_v + \hat{\Phi}_f, \quad (7.39)$$

przy czym w ogólności

$$\tilde{\Phi}_v \neq \hat{\Phi}_v \quad \text{oraz} \quad \tilde{\Phi}_f \neq \hat{\Phi}_f. \quad (7.40)$$

Wielkości (o wymiarze energii) $\tilde{\Phi}_f$ oraz $\hat{\Phi}_f$ można uznać za pewne możliwe uogólnienia energii odkształcenia postaciowego dla anizotropii - nazwać je można „pseudoenergią odkształcenia postaciowego”. Przez analogię do izotropowej hipotezy Hubera warunek stanu granicznego można sformułować w postaci:

$$\tilde{\Phi}_f = \tilde{H} \quad \text{lub} \quad \hat{\Phi}_f = \hat{H}, \quad (7.41)$$

gdzie \tilde{H} oraz \hat{H} są granicznymi wartościami pseudoenergii odkształcenia postaciowego. Same wyrażenia na $\tilde{\Phi}_f$ oraz $\hat{\Phi}_f$ są formami kwadratowymi odpowiednio stanu odkształcenia i stanu naprężenia - formom tym odpowiadają operatory liniowe:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_f &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_f \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\ \hat{\Phi}_f &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{C}}_f \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (7.42)$$

skąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_f &= 2\tilde{\mu} \left[\mathbf{A} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \cdot \mathbf{1}) \right] \\ \hat{\mathbf{C}}_f &= \frac{1}{2G} \left[\mathbf{B} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{B} \cdot \mathbf{1}) \right]. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Wykorzystując zależności (7.28) oraz (7.27) i odpowiednie dla tensorów \mathbf{C} i \mathbf{B} otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_f &= \mathbf{S} - \frac{1}{3(3\lambda+2\tilde{\mu})}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S} \cdot \mathbf{1}) \\ \hat{\mathbf{C}}_f &= \mathbf{C} - K(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{1}), \end{aligned} \quad (7.44)$$

co wobec zależności (7.30) (7.36) oraz (7.42) pozwala zapisać warunki graniczne (7.41) w postaci uogólnionego anizotropowego warunku granicznego typu Misesa (6.28):

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_f &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_f \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{H} \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \tilde{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 1 \\ \hat{\Phi}_f &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{C}}_f \cdot \boldsymbol{\sigma} = \hat{H} \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 1,\end{aligned}\tag{7.45}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{S}}_f &= \left[\mathbf{S} - \frac{(\mathbf{1}\cdot\mathbf{S})\otimes(\mathbf{S}\cdot\mathbf{1})}{\mathbf{1}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}} \right], & \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{1}{2\tilde{H}}\tilde{\mathbf{S}}_f \\ \hat{\mathbf{C}}_f &= \left[\mathbf{C} - \frac{(\mathbf{1}\cdot\mathbf{C})\otimes(\mathbf{C}\cdot\mathbf{1})}{\mathbf{1}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{1}} \right], & \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{2\hat{H}}\hat{\mathbf{C}}_f.\end{aligned}\tag{7.46}$$

Powyższy zapis (absolutny) nie pojawił się ostatecznie w [71] - autorzy wyrazili składowe tensorów \mathbf{C}_f oraz \mathbf{S}_f poprzez składowe tensorów sprężystości oraz uogólnione parametry Lamego:

$$\begin{aligned}S_{ijkl}^{(f)} &= S_{ijkl} - \frac{1}{3(3\bar{\lambda}+2\bar{\mu})}S_{ijpp}S_{klqq} \\ C_{ijkl}^{(f)} &= C_{ijkl} - \hat{K}C_{ijpp}C_{klqq}\end{aligned}\tag{7.47}$$

Definicje te są oczywiście równoważne, jednak równania (7.46) charakteryzują się bardziej zwartą formą zależną jedynie od tensorów sprężystości (bez wprowadzania dodatkowych parametrów i tak zależnych od \mathbf{C} i \mathbf{S}), niezależnością od przyjętego układu współrzędnych, wreszcie oczywistym podobieństwem między obydwoma definicjami. Tak samo zapisane definicje tensorów stanu granicznego można znaleźć również w późniejszej pracy Olszaka i Ostrowskiej-Maciejewskiej [72].

Trzeba jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że [71]

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{S}}_f \cdot (\boldsymbol{\theta}\mathbf{1}) &= \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{C}}_f \cdot (p\mathbf{1}) &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{7.48}$$

co łatwo sprawdzić bezpośrednimi rachunkami. A zatem stan równomiernego rozciągnięcia jest stanem własnym $\tilde{\mathbf{S}}_f$ odpowiadającym zerowej wartości własnej, natomiast stan naprężenia hydrostatycznego jest stanem własnym $\hat{\mathbf{C}}_f$ odpowiadającym jego zerowej wartości własnej. Stąd wniosek, że pseudoenergia odkształcenia postaciowego $\tilde{\Phi}_f$ nie ulega zmianie, gdy stan odkształcenia ulegnie zmianie jedynie o swoją część kulistą oraz że pseudoenergia odkształcenia postaciowego $\hat{\Phi}_f$ nie ulega zmianie, gdy do stanu naprężenia dodany zostanie stan hydrostatyczny.

7.2.3 Koncepcja pseudoenergii odkształcenia postaciowego [Mises (1928)]

Stosunkowo szeroko znana jest postawa Misesa, który nie tylko nie doszukiwał się energetycznego znaczenia zaproponowanego przez siebie kryterium stanu granicznego (zarówno w przypadku izotropii, jak i anizotropii), ale również starał się udowodnić niezależność a nawet większą ogólność kwadratowej funkcji stanu naprężenia określającej warunek graniczny od energetycznej miary wyciężenia materiału.

Zdaje się, że powszechnej uwadze uszedł fakt, iż Mises w swej pracy z 1928 roku [67] sam podjął próbę uogólnienia pojęcia energii odkształcenia postaciowego na przypadek ciał anizotropowych. W przeciwieństwie do Burzyńskiego, który wyznaczył dodatkowe związki między stałymi sprężystymi, przy których wydzielenie energii odkształcenia postaciowego jest możliwe, Mises rozpatrywał rozkład stanu naprężenia oraz stanu odkształcenia na części, które umożliwiłyby wydzielenie energii odkształcenia objętościowego i energii odkształcenia postaciowego. Załóżmy więc, że zarówno stan naprężenia, jak i stan odkształcenia można rozłożyć na dwie części:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_B \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_A + \boldsymbol{\varepsilon}_B\end{aligned}\tag{7.49}$$

przy czym $\boldsymbol{\varepsilon}_B$ jest odkształceniem zachowującym objętość, tj. $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_B) = 0$. Mises założył, że składowe każdej z części stanu naprężenia (odkształcenia) wiążą się z odpowiednią częścią stanu odkształcenia (naprężenia) uogólnionym prawem Hooke'a:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_A &= \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_A & \boldsymbol{\varepsilon}_A &= \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A \\ \boldsymbol{\sigma}_B &= \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_B & \boldsymbol{\varepsilon}_B &= \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B\end{aligned}\tag{7.50}$$

Poszukiwany rozkład stanu naprężenia i odkształcenia musi zostać wyznaczony w ten sposób, aby możliwy był rozkład energii sprężystej:

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B \quad \text{gdzie} \quad \Phi_A = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_A, \quad \Phi_B = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_B \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_B\tag{7.51}$$

Wtedy najprostszym uogólnieniem pojęcia energii odkształcenia postaciowego byłoby opisanie jej wielkością $\Phi_B = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_B \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_B$ (zgodnie z założeniem $\boldsymbol{\varepsilon}_B$ przyjęte jest jako odkształcenie postaciowe). Całkowita energia sprężysta jest równa:

$$2\Phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_A + \boldsymbol{\sigma}_B \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_B + (\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_B + \boldsymbol{\sigma}_B \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_A)\tag{7.52}$$

Warunek możliwości dokonania rozkładu energii sprężystej (7.51) sprowadza się do równości:

$$\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_B + \boldsymbol{\sigma}_B \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_A = 0\tag{7.53}$$

Wobec związków (7.50) oraz symetrii tensorów sprężystości, mamy:

$$\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_B = \boldsymbol{\sigma}_B \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_A\tag{7.54}$$

Przyjmijmy, że żądać będziemy aby to $\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_B = 0$. Napiszmy:

$$\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_B = \sigma_{Axx}\varepsilon_{Bxx} + \sigma_{Ayy}\varepsilon_{Byy} + \sigma_{Azz}\varepsilon_{Bzz} + 2(\sigma_{Ayz}\varepsilon_{Byz} + \sigma_{Azx}\varepsilon_{Bzx} + \sigma_{Axy}\varepsilon_{Bxy}) = 0\tag{7.55}$$

Równość powyższa może być spełniona dla nieskończonej liczby par ustalonych form stanów naprężenia i odkształcenia. Pamiętając o tym, że $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_B) = \varepsilon_{Bxx} + \varepsilon_{Byy} + \varepsilon_{Bzz} = 0$ oraz że odkształcenia kątowe $\boldsymbol{\varepsilon}_B$ mogą mieć dowolną wartość, nietrudno zauważyć, że zależność ta spełniona jest przy założeniu, że $\boldsymbol{\sigma}_A$ jest naprężeniem hydrostatycznym - $\boldsymbol{\sigma}_A = p\mathbf{1}$. Wobec tego warunek dopuszczalności rozkładu energii sprężystej (7.51) sformułowany przez Misesa brzmi następująco [67]: „*Der Spannungstensor ist so zu spalten, daß der erste Teil ein allseits gleicher Druck oder Zug ist und dem zweiten Teil eine volumbeständige Deformation entspricht*”¹⁵. Jak podaje Mises, warunek ten podał wcześniej niezależnie od niego A. Reuß. Rozkład (7.51) nie jest zatem możliwy w przypadku ogólnym. Możliwe jest wydzielenie części energii związanej odkształceniem postaciowym, rozumianej jako całkowita energia sprężysta pomniejszona o energię związaną z pracą naprężenia hydrostatycznego na spowodowanym przez ten stan stanie odkształcenia. Z założenia $\boldsymbol{\sigma}_A = p\mathbf{1}$ oraz związków (7.50) wynika:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_A = p(\mathbf{C} \cdot \mathbf{1}), \quad (7.56)$$

przy czym p musi być dobrane w ten sposób aby $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_A) = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, ponieważ tylko wtedy $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_B) = 0$. Otrzymujemy zatem

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_A) = p(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}) \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}}. \quad (7.57)$$

Praca naprężenia hydrostatycznego na odpowiadającym mu odkształceniu jest równa:

$$2\hat{\Phi}_v = \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_A = p^2 \mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1} = \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}} \quad (7.58)$$

Odejmując tę wartość od całkowitej miary energii uzyskujemy pewne możliwe uogólnienie energii odkształcenia postaciowego:

$$\hat{\Phi}_f = \Phi - \hat{\Phi}_v = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{2(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1})}, \quad (7.59)$$

co można zapisać w postaci:

$$\hat{\Phi}_f = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{C}}_f \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{\mathbf{C}}_f = \mathbf{C} - \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}}. \quad (7.60)$$

Równanie powyższe jest identyczne z tym przedstawionym przez Olszaka i Urbanowskiego.

Nieco na marginesie, warto jeszcze raz przypomnieć, że Mises nie zgadzał się z energetyczną interpretacją zaproponowanego przez siebie warunku, zaś wyznaczonej przez siebie wielkości $\hat{\Phi}_f$, mającej być uogólnieniem energii odkształcenia postaciowego na przypadek ciał anizotropowych, nie uważał za odpowiednią miarę wyteżenia materiału. Zważywszy na fakt, że Mises stale rozważał swoją propozycję w jej podwójnej roli warunku granicznego oraz potencjału plastycznego, jego niechęć wobec prób energetycznej interpretacji zaproponowanego przez niego warunku granicznego wydaje się uzasadniona. Słuszne wątpliwości w tej kwestii zawarł Mises w [67]: „*Bei isotropen Körpern enthält der Ausdruck für A_G (...) nur eine einzige*

¹⁵Tensor naprężenia może być rozłożony w ten sposób, że pierwsza część jest równa wszechstronnie równemu ścisłaniu lub rozciąganiu, druga część zaś odpowiada odkształceniu zachowującemu objętość - tłum. autora

Materialkonstante, die als gemeinsamer Faktor vor die variablen Glieder tritt. Daher kann sich F von A_G nur in diesem Faktor unterscheiden und die Bedingungen $F = konst.$ und $A_G = konst.$ besagen dasselbe. Bei Kristallen enthält der Ausdruck für A_G mindestens zwei unabhängige Konstanten (...), deren Quotienten das Verhalten des Körpers im rein elastischen Gebiet bestimmen. Es ist nicht einzusehen, warum für den Ausdruck F , der sich allein auf das Fließgebiet bezieht, die gleichen Verhältniswerte maßgebend sein sollen. Die quadratische Fließbedingung $F = konst.$ ist jedenfalls insofern allgemeiner gegenüber einer «Hypothese konstanter Gestaltänderungsarbeit», als sie nicht voraussetzt, daß die in F auftretenden Materialzahlen (...) die für den elastischen Bereich festgestellten Werte besitzen.»¹⁶

Poza szczególnym przypadkiem, w którym wzajemny stosunek wartości stałych sprężystych faktycznie okazałby się właściwym także dla współczynników potencjału plastycznego, funkcja określająca gęstość energii odkształcenia - w myśl sugestii przedstawionej przez Misesa - byłaby zdadna do wykorzystania jako potencjał plastyczny jedynie wtedy, gdy wartości stałych sprężystych ulegałyby zmianie w zakresie plastycznym. Zmiana taka nie byłaby zresztą niczym zaskakującym z uwagi na fakt, że proces deformacji plastycznej skutkuje trwałymi zmianami struktury wewnętrznej materiału, która makroskopowo przejawia się właśnie w wartościach stałych sprężystych. Zresztą ten właśnie fakt może być źródłem zastrzeżeń podobnych do tych, wysuwanych przez Misesa - trudno bowiem spodziewać się, aby proces deformacji plastycznej mógł być poprawnie opisany przy użyciu takich wartości parametrów potencjału plastycznego (związanych ze stałymi sprężystymi), które w zakresie tym dłużej już nie obowiązują. Trzeba jednak rozgraniczyć kwestię formułowania potencjału plastycznego i warunku plastyczności - ten drugi wcale nie musi pełnić roli potencjału i określony jest w dziedzinie sprężystości, określając jej kres (szczególnie w przypadku zastosowanej schematyzacji Prandtla), tj. - w najprostszym ujęciu - dopóki kryterium nie zostanie spełnione, wartości jego zmiennych określone są na podstawie teorii liniowej sprężystości a zatem wykorzystanie stałych materiałowych nie wydaje się wobec tego czymś niewłaściwym.

Pewne stwierdzenia związane pośrednio ze wskazanym powyżej problemem można znaleźć w pracy Burzyńskiego: „*Wszystkie teorie, w których formę matematyczną wchodzi stała Poisson'a (...), są mniej lub więcej błędne. Stałe sprężystości bowiem nie mają nic wspólnego z wyężeniem - albo ściślej - nie wyężenie zależy od nich, tylko one od wyężenia*” [17]. Według osobistej opinii autora, stwierdzenie Burzyńskiego zdaje się być zanedo restrykcyjne, szczególnie jeśli rozpatrywanym modelem ciała jest kontynualny model ciała idealnie sprężystego. Całkowite uniezależnienie miary wyężenia od stałych sprężystych prowadzi do braku uwzględnienia szczegółowej struktury związków konstytutywnych. W rzeczywistości - ponieważ zarówno graniczne wartości naprężeń jak i stałe sprężyste określone są w ostateczności poprzez wielkości oddziaływań międzycząsteczkowych - związek między tymi dwiema grupami

¹⁶W przypadku ciał izotropowych wyrażenie na A_G [tutaj $\hat{\Phi}_f$ - przyp. tłum.] (...) zawiera tylko pojedynczą stałą materiałową, która jest wspólnym czynnikiem wyłączonym przed zmienne człony. Tak więc F [lewa strona warunku plastyczności - przyp. tłum.] i A_G mogą się różnić tylko tym współczynnikiem i warunki $F = konst.$ i $A_G = konst.$ wyrażają to samo. W przypadku kryształów wyrażenie na A_G zawiera co najmniej dwie niezależne stałe (...), których stosunek określają cechy ciała w czysto sprężystym zakresie. Nie widać powodów, dla których dla wyrażenia F , które określa się tylko dla zakresu płynięcia plastycznego, takie same proporcje miałyby być właściwe. Warunek $F = konst.$ jest w każdym razie o tyle ogólniejszy od „hipotezy stałej pracy odkształcenia postaciowego”, że nie zakłada z góry, że występujące w F stałe materiałowe mają wartości ustalone dla zakresu sprężystego. - tłum. autora

wielkości istnieje zawsze, choćby nawet był wyjątkowo trudny do opisania. Warto zauważyć, że nawet hipoteza Burzyńskiego (w szczególności w przypadku ciał anizotropowych), choć w swoim końcowym sformułowaniu pozornie nie zawiera stałych sprężystych, w istocie obejść się bez nich nie może, gdyż bez znajomości i uwzględnienia ich wzajemnych proporcji niemożliwe jest wyznaczenie energii odkształcenia postaciowego i objętościowego. Zastępowanie ich wielkościami wytrzymałościowymi, możliwymi do wyznaczenia na drodze eksperymentalnej, oraz dodatkowymi niezależnymi parametrami (np. „współczynnik anizotropii”) poprzez szereg złożonych podstawień jest zabiegiem czysto matematycznym, który nie ma znaczenia wobec pierwotnego sformułowania hipotezy w ramach pojęcia energii sprężystej, odwołującego się wprost do stałych sprężystych. Co więcej, porównanie pierwotnego sformułowania w ramach pojęć energii i przy użyciu stałych sprężystych oraz końcowego, wyrażonego jedynie przez wielkości wytrzymałościowe, umożliwia nawet wskazanie wprost tych zależności między jedną i drugą grupą parametrów - są one widoczne już na etapie przyjmowania stosowanych później podstawień. Trudność w ocenie stwierdzenia Burzyńskiego wiąże się również ze wspomnianym już we wcześniejszym rozdziale niejasno wyrażonym odrzuceniem przez niego ściśle energetycznej interpretacji przedstawionego warunku granicznego. Jednakże spostrzeżenie Burzyńskiego, że stałe sprężyste zmieniają swoją wartość wraz ze wzrastającą miarą wyteżenia materiału wydaje się w ogólności słuszne - ich zmiana sprzężona jest ze zmianą charakterystyk oddziaływań międzycząsteczkowych wskutek zmiany długości wiązań w czasie postępującego odkształcenia. Wydaje się zatem, że nie tyle wyteżenie wpływa na wartość stałych sprężystych, ile obie te wielkości zależą od aktualnie działających sił atomowych - siły te zmieniają się wraz ze zmianą długości wiązań, której makroskopową miarą w ramach mechaniki continuum jest stan odkształcenia. Uwzględnienie w mierze wyteżenia materiału tak subtelnych zjawisk może okazać się wyjątkowo trudne i jest w sprzeczności z założeniem występowania zakresu liniowo sprężystego, w którym zmiany te są na mocy definicji pomijalnie małe - o stałych sprężystych zakładamy, iż są w istocie „stałe”. Tak szczegółowy model wymagałby uwzględnienia nieliniowości związków konstytutywnych. Jest w stwierdzeniach Burzyńskiego pewna niekonsekwencja związana z wymogiem pominięcia udziału stałych sprężystych, których wartość się zmienia wraz ze wzrastającym wyteżeniem i jednoczesnym zastosowaniem przy wyznaczaniu energii sprężystej uogólnionego prawa Hooke’a ze stałymi parametrami. W przekonaniu autora, jeśli rozpatruje się zjawiska wyteżenia jedynie makroskopowo, w ramach liniowej teorii sprężystości, odwołanie się do stałych sprężystych wydaje się wręcz uzasadnione.

7.2.4 Analiza widmowa tensora stanu granicznego Olszaka-Urbanowskiego [Olszak, Ostrowska-Maciejewska (1985)]

Olszak oraz Ostrowska-Maciejewska w swojej pracy [72] opublikowanej w 1985 r. zaprezentowali odmienne podejście do problemu specyfikacji tensora stanu granicznego w uogólnionym warunku Misesa, wykorzystujące przedstawione niewiele wcześniej przez Rychlewskiego metody analizy widmowej tensorów czwartego rzędu [85]. Autorzy rozpatrywali potencjał plastyczny Ψ dany tensorem stanu granicznego \mathbf{H}

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (7.61)$$

spełniający dwa postulaty Misesa:

- Wartość potencjału plastycznego nie zmienia się, gdy składowe normalne stanu naprężenia powiększone zostaną o tę samą wartość
- Wartość potencjału plastycznego nie zmienia się, gdy przyjęty układ współrzędnych zastąpi się układem krystalograficznie równoważnym.

O tensorze \mathbf{H} autorzy [72] przyjęli, że winien być pewną funkcją tensorów sprężystości (cech sprężystych):

$$\mathbf{H} = \mathcal{F}_S(\mathbf{S}) = \mathcal{F}_C(\mathbf{C}). \quad (7.62)$$

przy czym założyli ponadto, iż tensor stanu granicznego \mathbf{H} spełniać musi następujące warunki:

- Tensor stanu granicznego charakteryzuje się tymi samymi symetriami zewnętrznymi oraz wewnętrznymi, co tensory sprężystości danego materiału

$$H_{ijkl} = H_{jikl} = H_{ijlk} = H_{klij}, \quad \mathcal{O}_{\mathbf{H}} = \mathcal{O}_{\mathbf{S}}$$

- Tensor kulisty (stan naprężenia hydrostatycznego) jest stanem własnym tensora stanu granicznego odpowiadającym zerowej wartości własnej

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

- Jeśli pewien dewiatorowy stan naprężenia jest stanem własnym tensora podatności danego materiału, to jest on również stanem własnym tensora stanu granicznego

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\tau} = \lambda \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad (\lambda \mathbf{H} - \mu \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

- Potencjał plastyczny zadany tensorem stanu granicznego poprzez równanie (7.61) jest częścią energii odkształcenia sprężystego
- W przypadku izotropii tensor stanu granicznego przyjmuje postać odpowiadającą warunkowi granicznemu Hubera-Misesa:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2h} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right], \quad h = \text{const.}$$

Z potencjałem plastycznym Ψ danym równaniem (7.61), który poprzez równania płynięcia plastycznego Lévy'ego-Misesa opisuje deformację ciała w stanie pozasprężystym, wiąże się stowarzyszony z równaniami tymi warunek plastyczności postaci

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \text{const.} \quad (7.63)$$

Autorzy [72] zaproponowali tensor stanu granicznego postaci

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2h} \left[\mathbf{C} - \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}} \right], \quad h = \text{const.}, \quad (7.64)$$

a zatem takiej samej, jak zaproponowano to w [71] (patrz równania (7.46)). Nie przedstawiono jednak bezpośredniego wyprowadzenia tej postaci tensora \mathbf{H} . Należy jednak przypuszczać, że

postać ta zaproponowana została właśnie z uwagi na nawiązanie do wcześniejszej pracy jednego ze współautorów [71]. Nietrudno bowiem sprawdzić, że wszystkie z powyższych warunków spełnia przykładowo tensor stanu granicznego \mathbf{H} w postaci

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2h} \left[\sum_{K=I}^{T < V} \frac{1}{\lambda_K} (\boldsymbol{\omega}_K \otimes \boldsymbol{\omega}_K) \right], \quad (7.65)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_K$ ($K = I, \dots, T < V$) są wzajemnie ortogonalnymi dewiatorowymi stanami własnymi tensora podatności, λ_K są odpowiadającymi im modułami Kelvina, zaś T jest maksymalną liczbą niezależnych (wzajemnie ortogonalnych) dewiatorowych stanów własnych \mathbf{C} , sumą wymiarów dewiatorowych podprzestrzeni własnych. Ponieważ $\boldsymbol{\omega}_K$ ($K = I, \dots, T$) są stanami własnymi \mathbf{C} o zadanej symetrii, zatem kombinacja liniowa odpowiednich diad musi mieć grupę symetrii co najmniej taką jak \mathbf{C} . Z samej definicji (7.65) wynika, że każdy z dewiatorowych stanów \mathbf{C} jest stanem własnym \mathbf{H} . Z uwagi na ich dewiatorowy charakter oczywiste jest także, że stan hydrostatyczny również jest stanem własnym \mathbf{H} o zerowej wartości własnej. W przypadku izotropii, gdy $T = V$, zaś wszystkie moduły Kelvina dewiatorowych podprzestrzeni własnych są sobie równe, \mathbf{H} ma postać ogólną projektora na pięciowymiarową podprzestrzeń dewiatorów, tj. taką jak wymagana wg autorów [72]. Potencjał plastyczny zadany rozpatrywanym tensorem stanu granicznego jest także częścią całkowitej energii odkształcenia sprężystego w tym sensie, że wprost stanowi on tę część rozkładu głównego energii sprężystej¹⁷, która wiąże się z dewiatorowymi stanami własnymi. Jest to zatem jedno z możliwych uogólnień energii odkształcenia postaciowego na ciała anizotropowe - jest to może nawet najprostsze uogólnienie tego typu, nie pozbawione jednak tej wady, iż całkowicie pomija wpływ energii związanej ze stanami własnymi o niezerowej składowej hydrostatycznej, która stanowić może nawet zdecydowaną większość całkowitej miary energii odkształcenia sprężystego.

Aby wniknąć głębiej w strukturę warunku granicznego opisanego tensorem stanu granicznego (7.64) warto zbadać jego wartości i wektory własne. Z definicji jednym ze stanów własnych \mathbf{H} jest dowolny stan hydrostatyczny, zaś odpowiadającą mu wartością własną jest 0. Podobnie, dowolny dewiatorowy stan własny \mathbf{C} jest zarazem stanem własnym \mathbf{H} . W poszukiwaniu pozostałych stanów i wartości własnych zapiszmy zagadnienie własne dla \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{h} = \chi \mathbf{h} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{H} - \chi \mathbb{I}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0}. \quad (7.66)$$

Zagadnienie własne symetrycznego tensora czwartego rzędu jest równoważne zagadnieniu własnemu jego macierzy reprezentacji w \mathcal{S}_{sym}^2 . Wartości własne są pierwiastkami równania wielokowego:

$$W(\chi) = \text{Det}(\mathbf{H} - \chi \mathbb{I}) = \chi^6 + a_1 \chi^5 + a_2 \chi^2 + a_3 \chi^3 + a_4 \chi^2 + a_5 \chi + a_6 = 0 \quad (7.67)$$

W celu znalezienia reprezentacji \mathbf{H} w \mathcal{S}_{sym}^2 , bazę w tej przestrzeni można wybrać dowolnie - z uwagi na postać (7.64) tensora \mathbf{H} , najdogodniejszą bazą będzie baza stanów własnych $\boldsymbol{\omega}_K$ ($K = I, \dots, VI$) tensora podatności \mathbf{C} :

¹⁷zapisanego jako suma sześciu składników, wśród których wykorzystano wszystkie te, wiążące się ze wzajemnie ortogonalnymi dewiatorowymi stanami własnymi \mathbf{C}

$$\boldsymbol{\omega}_I, \boldsymbol{\omega}_{II}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI}, \quad \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_K = \bar{\lambda}_K \boldsymbol{\omega}_K, \quad (K = I, II, \dots, VI), \quad (7.68)$$

gdzie $\bar{\lambda}_K$ są wartościami własnymi tensora podatności, odwrotnościami odpowiednich modułów Kelvina. W bazie tej odpowiednie macierze reprezentacji są równe:

$$\mathbf{C} \cong \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_I & & & & & \\ & \bar{\lambda}_{II} & & & & \\ & & \bar{\lambda}_{III} & & & \\ & & & \bar{\lambda}_{IV} & & \\ & & & & \bar{\lambda}_V & \\ & & & & & \bar{\lambda}_{VI} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \cong \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_I \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I) \\ \bar{\lambda}_{II} \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{II}) \\ \bar{\lambda}_{III} \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{III}) \\ \bar{\lambda}_{VI} \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{IV}) \\ \bar{\lambda}_V \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_V) \\ \bar{\lambda}_{VI} \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI}) \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{1}) \cong \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_I^2 [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I)]^2 & \bar{\lambda}_I \bar{\lambda}_{II} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I)] [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{II})] & \dots & \bar{\lambda}_I \bar{\lambda}_{VI} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I)] [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI})] \\ & \bar{\lambda}_{II}^2 [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I)]^2 & \dots & \bar{\lambda}_{II} \bar{\lambda}_{VI} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{II})] [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI})] \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sym} & & & \bar{\lambda}_{VI}^2 [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI})]^2 \end{bmatrix}$$

zaś niezmiennik

$$\bar{\kappa} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1} = \bar{\lambda}_I [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I)]^2 + \bar{\lambda}_{II} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{II})]^2 + \dots + \bar{\lambda}_{VI} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI})]^2 \quad (7.69)$$

przy czym kwadraty śladów stanów własnych \mathbf{C} spełniają zależność (6.18). Równanie wiekowe (7.67) dane jest wyznacznikiem 6×6 , który w ogólnym przypadku wyraża się bardzo złożonymi wzorami. Jednakże, z uwagi na szczególną postać tensora \mathbf{H} , przy wyznaczaniu postaci równania wiekowego skorzystać można z następującego twierdzenia

Dla każdej macierzy odwracalnej \mathbf{M} oraz wektorów \mathbf{v} i \mathbf{w} zachodzi

$$\det(\mathbf{M} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (1 + \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{v}) \det(\mathbf{M})$$

Podstawmy

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} - \chi \mathbb{I}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\bar{\kappa}} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{C})$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{1}).$$

Wtedy oczywiście

$$\mathbf{M} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{H} - \chi \mathbb{I}$$

Zarówno \mathbf{C} jak i \mathbb{I} mają w rozpatrywanej bazie postać diagonalną. Odwrotność \mathbf{M} ma również postać diagonalną, przy czym jej elementy są po prostu odwrotnościami elementów \mathbf{M} a jej wyznacznik jest iloczynem wszystkich tych elementów. Równanie wiekowe (7.67) można więc zapisać w następującej postaci o stosunkowo prostym schemacie:

$$\begin{aligned}
 W(\chi) = & (\bar{\lambda}_I - \chi)(\bar{\lambda}_{II} - \chi)(\bar{\lambda}_{III} - \chi)(\bar{\lambda}_{IV} - \chi)(\bar{\lambda}_V - \chi)(\bar{\lambda}_{VI} - \chi) \\
 & - \frac{\bar{\lambda}_I^2}{\bar{\kappa}} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I)]^2 (\bar{\lambda}_{II} - \chi)(\bar{\lambda}_{III} - \chi)(\bar{\lambda}_{IV} - \chi)(\bar{\lambda}_V - \chi)(\bar{\lambda}_{VI} - \chi) \\
 & - \frac{\bar{\lambda}_{II}^2}{\bar{\kappa}} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{II})]^2 (\bar{\lambda}_I - \chi)(\bar{\lambda}_{III} - \chi)(\bar{\lambda}_{IV} - \chi)(\bar{\lambda}_V - \chi)(\bar{\lambda}_{VI} - \chi) \\
 & - \frac{\bar{\lambda}_{III}^2}{\bar{\kappa}} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{III})]^2 (\bar{\lambda}_I - \chi)(\bar{\lambda}_{II} - \chi)(\bar{\lambda}_{IV} - \chi)(\bar{\lambda}_V - \chi)(\bar{\lambda}_{VI} - \chi) \\
 & - \frac{\bar{\lambda}_{IV}^2}{\bar{\kappa}} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{IV})]^2 (\bar{\lambda}_I - \chi)(\bar{\lambda}_{II} - \chi)(\bar{\lambda}_{III} - \chi)(\bar{\lambda}_V - \chi)(\bar{\lambda}_{VI} - \chi) \\
 & - \frac{\bar{\lambda}_V^2}{\bar{\kappa}} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_V)]^2 (\bar{\lambda}_I - \chi)(\bar{\lambda}_{II} - \chi)(\bar{\lambda}_{III} - \chi)(\bar{\lambda}_{IV} - \chi)(\bar{\lambda}_{VI} - \chi) \\
 & - \frac{\bar{\lambda}_{VI}^2}{\bar{\kappa}} [\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI})]^2 (\bar{\lambda}_I - \chi)(\bar{\lambda}_{II} - \chi)(\bar{\lambda}_{III} - \chi)(\bar{\lambda}_{IV} - \chi)(\bar{\lambda}_V - \chi) = 0
 \end{aligned} \tag{7.70}$$

W [72] sformułowano szereg wniosków wynikających z analizy widmowej tensora stanu granicznego. W szczególności, warto zwrócić uwagę na następujące fakty: podstawiając $\chi = 0$, czynnik $\bar{\lambda}_I \bar{\lambda}_{II} \bar{\lambda}_{III} \bar{\lambda}_{IV} \bar{\lambda}_V \bar{\lambda}_{VI}$ wyłączyć można przed całe wyrażenie. Pamiętając ponadto o równości (7.69), łatwo przekonujemy się, że jednym z pierwiastków równania charakterystycznego (7.67) jest $\chi = 0$ - jest to oczywiście w zgodzie z założeniem o zerowej wartości własnej \mathbf{H} odpowiadającej stanowi hydrostatycznego naprężenia. Ponadto, nietrudno zauważyć, że jeśli którykolwiek z modułów Kelvina jest wielokrotną wartością własną tensora sztywności, wtedy odpowiedni czynnik $(\bar{\lambda}_K - \chi)$ można wyłączyć przed nawias z lewej strony równania charakterystycznego, co prowadzi do wniosku, że $\chi = \bar{\lambda}_K$ jest wartością własną \mathbf{H} . Ogólnie, jeśli $\bar{\lambda}_K$ jest n -krotną wartością własną \mathbf{C} , to $\chi = \bar{\lambda}_K$ jest $(n - 1)$ -krotną wartością własną \mathbf{H} .

7.2.5 Energetycznie ortogonalna podprzestrzeń stanów bezpiecznych i odpowiadający jej rozkład energii [Rychlewski (1984)]

Rychlewski w swej pracy [87] rozpatrywał bardzo ogólny pomysł wydzielenia pewnej podprzestrzeni stanów bezpiecznych, która byłaby energetycznie ortogonalna do swego dopełnienia w \mathcal{T}_{sym}^2 (przestrzeni stanów niebezpiecznych) - ta jej cecha umożliwiałaby rozkład energii sprężystej na część związaną ze stanami bezpiecznymi i część związaną ze stanami niebezpiecznymi, przy czym ta druga stanowić by mogła miarę wyteżenia materiału.

W [87] rozważania przeprowadzone były dla przypadku jednowymiarowej podprzestrzeni stanów bezpiecznych z zaznaczeniem, że uogólnienie na przypadek podprzestrzeni wielowymiarowych jest stosunkowo proste. Poniżej zamieszczone są rozważania dla ogólnego, wielowymiarowego przypadku.

Przypuśćmy, że znane są stany naprężenia, które (niezależnie od swej intensywności) nie wpływają na miarę wyteżenia materiału - stany bezpieczne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Ich liniowa niezależność musi być sprawdzona. Przypuśćmy, że s z nich jest liniowo niezależnymi ($s < 6$) oraz, że tworzą one s -wymiarową przestrzeń liniową stanów bezpiecznych \mathcal{A} - istnieje więc baza w tej przestrzeni $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$. Przyjmijmy, że jest to baza ortogonalna względem energetycznego iloczynu skalarnego (6.24). Założenie o unormowaniu tej bazy nie jest konieczne oraz zostało świadomie pominięte celem bezpośredniego porównania uzyskanych wyników do propozycji Olszaka-Urbanowskiego oraz Rychlewskiego.

Dana jest przestrzeń stanów bezpiecznych \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} = a_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \dots + a_s \boldsymbol{\alpha}_s, \quad \boldsymbol{\alpha}_i \bullet \boldsymbol{\alpha}_j = \delta_{ij} \ (i = 1, \dots, s)\} \quad (7.71)$$

Jej energetycznie ortogonalne dopełnienie do \mathcal{T}_{sym}^2 , to $(6 - s)$ -wymiarowa przestrzeń \mathcal{B}

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^\perp = \{\mathbf{b} : \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a} \in \mathcal{A}\} \quad (7.72)$$

Trzeba zauważyć, że przestrzeń \mathcal{B} jest ortogonalnym dopełnieniem przestrzeni stanów odkształcenia odpowiadającym bezpiecznym stanom naprężenia $\mathcal{E} = \mathbf{C} \cdot \mathcal{A}$:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} \perp (\mathbf{C} \cdot \mathbf{a}) \quad (7.73)$$

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{e} : \mathbf{e} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{B}^\perp$$

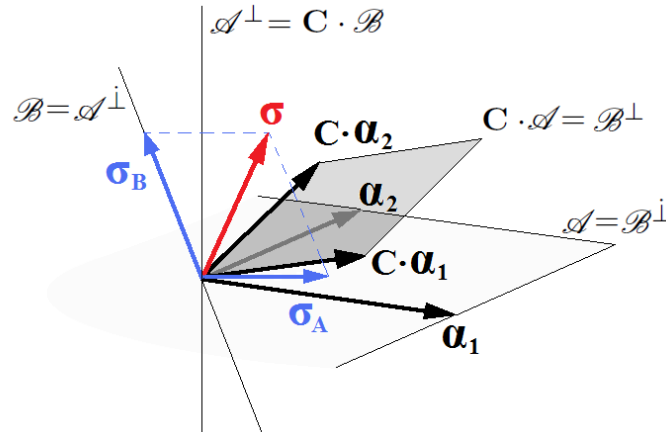
Analogicznie, dopełnienie ortogonalne \mathcal{A} jest przestrzenią stanów odkształcenia odpowiadającym niebezpiecznym stanom naprężenia $\mathcal{F} = \mathbf{C} \cdot \mathcal{B}$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \perp (\mathbf{C} \cdot \mathbf{b}) \quad (7.74)$$

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{f} : \mathbf{f} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \in \mathcal{B}\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{A}^\perp$$

Stąd otrzymujemy szereg zależności zobrazowanych na ilustracji 7.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\perp &= \mathcal{B} & \mathcal{A}^\perp &= \mathbf{C} \cdot \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^\perp &= \mathcal{A} & \mathcal{B}^\perp &= \mathbf{C} \cdot \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^\perp &= \mathbf{S} \cdot \mathcal{A}^\perp & \mathcal{B}^\perp &= \mathbf{S} \cdot \mathcal{B}^\perp \end{aligned} \quad (7.75)$$



Rysunek 7.1: Podprzestrzeń stanów bezpiecznych oraz jego ortogonalne i energetycznie ortogonalne dopełnienia.

Wprowadźmy rozkład \mathcal{T}_{sym}^2 na sumę prostą podprzestrzeni \mathcal{A} i \mathcal{B} :

$$\mathcal{T}_{sym}^2 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \quad (7.76)$$

Dowolny stan naprężenia σ można zapisać w postaci sumy rzutów tego stanu na rozpatrywane podprzestrzenie:

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_B, \quad \sigma_A \in \mathcal{A}, \quad \sigma_B \in \mathcal{B}, \quad (7.77)$$

gdzie σ_A - zwane bezpieczną częścią naprężenia - oraz σ_B - zwane częścią niebezpieczną - są stanami energetycznie ortogonalnymi. Z samej definicji podprzestrzeni \mathcal{A} i \mathcal{B} wynika, że

$$\{\mathcal{A}\} \cap \{\mathcal{B}\} = \emptyset, \quad (7.78)$$

przy czym symbole $\{\mathcal{A}\}$ i $\{\mathcal{B}\}$ oznaczają tu oczywiście zbiory stanów należących do odpowiednich przestrzeni liniowych. Rzuty na odpowiednie podprzestrzenie dane są poprzez projektory:

$$\sigma_A = \mathbf{P}_A \cdot \sigma, \quad \sigma_B = \mathbf{P}_B \cdot \sigma. \quad (7.79)$$

Ponieważ cała przestrzeń \mathcal{T}_{sym}^2 jest sumą prostą rozważanych przestrzeni $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, stąd:

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_B = \mathbf{P}_A \cdot \sigma + \mathbf{P}_B \cdot \sigma = \mathbb{I} \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B = \mathbb{I} \quad (7.80)$$

Projektory na \mathcal{A} i \mathcal{B} zdefiniowane są następująco:

$$\mathbf{P}_A \cdot \sigma = \begin{cases} \sigma & \Leftrightarrow \sigma \in \mathcal{A} \\ \mathbf{0} & \Leftrightarrow \sigma \notin \mathcal{A} \end{cases} \quad \mathbf{P}_B \cdot \sigma = \begin{cases} \sigma & \Leftrightarrow \sigma \in \mathcal{B} \\ \mathbf{0} & \Leftrightarrow \sigma \notin \mathcal{B} \end{cases} \quad (7.81)$$

W ogólności nie są to projektory ortogonalne (patrz rys. 7.1) - tym samym nie muszą to być operatory symetryczne w \mathcal{T}_{sym}^2 . Rzut danego stanu naprężenia na jedną z rozpatrywanych podprzestrzeni ma oczywiście zerowy rzut na drugą z nich, skąd wynika zależność:

$$\mathbf{P}_A \circ \mathbf{P}_B = \mathbf{P}_B \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{0} \quad (7.82)$$

Energetyczna ortogonalność składowych σ_A oraz σ_B skutkuje następującą zależnością dla projektora na przestrzeń stanów bezpiecznych:

$$\begin{aligned} \sigma_A^T \bullet \sigma_B = \sigma_A^T \cdot \mathbf{C} \cdot \sigma_B = 0 & \Rightarrow \quad \forall \sigma \quad (\mathbf{P}_A \cdot \sigma)^T \cdot \mathbf{C} \cdot [(\mathbb{I} - \mathbf{P}_A) \cdot \sigma] = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad \mathbf{P}_A^T \circ \mathbf{C} = \mathbf{P}_A^T \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{P}_A \\ \sigma_B^T \bullet \sigma_A = \sigma_B^T \cdot \mathbf{C} \cdot \sigma_A = 0 & \Rightarrow \quad \forall \sigma \quad [(\mathbb{I} - \mathbf{P}_A) \cdot \sigma]^T \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{P}_A \cdot \sigma) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad \mathbf{C} \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A^T \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{P}_A \end{aligned} \quad (7.83)$$

Konieczność uwzględnienia operacji transpozycji - tradycyjnie pomijanej w notacji z uwagi na symetrię elementów i operatorów w \mathcal{T}_{sym}^2 - bierze się z faktu, że projektory \mathbf{P}_A oraz \mathbf{P}_B nie są projektorami ortogonalnymi a tym samym nie są w ogólności symetryczne. Ogólnie równości powyższe równoważne są warunkowi:

$$\sigma_A^T \bullet \sigma_B = \sigma_B^T \bullet \sigma_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_A^T \circ \mathbf{P}_B = \mathbf{P}_B^T \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{0} \quad (7.84)$$

Z uwagi na energetyczną ortogonalność obydwu podprzestrzeni składowych, całkowitą energię odkształcenia sprężystego dla dowolnego stanu naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ można zapisać w postaci:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \Phi_A + \Phi_B, \quad \Phi_A = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A, \quad \Phi_B = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_B \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B. \quad (7.85)$$

Za miarę wyteżenia materiału można uważać wielkość energii sprężystej związanej ze stanami niebezpiecznymi Φ_B . Biorąc pod uwagę (7.79), warunek graniczny można zapisać w postaci:

$$\Phi_B = h \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 1 \quad (7.86)$$

gdzie h jest graniczną wartością energii sprężystej związanej ze stanami niebezpiecznymi, zaś tensor stanu granicznego \mathbf{H} ma postać:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2h} [\mathbf{P}_B^T \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{P}_B] = \frac{1}{2h} [(\mathbb{I} - \mathbf{P}_A)^T \circ \mathbf{C} \circ (\mathbb{I} - \mathbf{P}_A)], \quad (7.87)$$

co - po uwzględnieniu (7.83) - można przepisać w następującej postaci:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2h} [\mathbf{C} - \mathbf{P}_A^T \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{P}_A]. \quad (7.88)$$

Konieczne jest zatem wyznaczenie \mathbf{P}_A , projektora na przestrzeń stanów bezpiecznych \mathcal{A} . Dowolny stan naprężenia rozkładamy na dwie składowe:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_B, \quad \boldsymbol{\sigma}_A \in \mathcal{A}, \quad \boldsymbol{\sigma}_B \in \mathcal{B} \quad (7.89)$$

Przy znanej bazie przestrzeni \mathcal{A} dowolny element \mathcal{A} można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{\sigma}_A = a_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \dots + a_s \boldsymbol{\alpha}_s. \quad (7.90)$$

Współczynniki rozkładu w bazie, możemy znaleźć wyznaczając energetyczny iloczyn skalarny składowej $\boldsymbol{\sigma}_A$ z każdym ze stanów bazowych

$$\boldsymbol{\sigma}_A \bullet \boldsymbol{\alpha}_k = a_1 \boldsymbol{\alpha}_1 \bullet \boldsymbol{\alpha}_k + \dots + a_s \boldsymbol{\alpha}_s \bullet \boldsymbol{\alpha}_k, \quad (k = 1, \dots, s). \quad (7.91)$$

Po uwzględnieniu energetycznej ortogonalności bazy $\{\boldsymbol{\alpha}_k\}$ przestrzeni \mathcal{A} oraz faktu, że

$$\boldsymbol{\sigma}_A \bullet \boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\alpha}_k$$

będącego konsekwencją energetycznej ortogonalności przestrzeni \mathcal{A} oraz \mathcal{B} - równanie powyższe można zapisać jako

$$\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\alpha}_k = a_k \boldsymbol{\alpha}_k \bullet \boldsymbol{\alpha}_k \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\alpha}_k}{\boldsymbol{\alpha}_k \bullet \boldsymbol{\alpha}_k} \quad (7.92)$$

Składową niebezpieczną stanu naprężenia przyjmujemy po prostu jako równą

$$\boldsymbol{\sigma}_B = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_A. \quad (7.93)$$

Przedstawmy operację rzutowania na \mathcal{A} w następującej formie:

$$\mathbf{P}_A \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{c_1} (\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\alpha}_1) \boldsymbol{\alpha}_1 + \dots + \frac{1}{c_s} (\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\alpha}_s) \boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{\sigma}_A \quad (7.94)$$

Rzut σ na \mathcal{A} jest niezerowy, jeśli tylko σ nie jest energetycznie ortogonalny do pewnego elementu \mathcal{A} , co jest równoznaczne z tym, że jego energetyczny iloczyn skalarny z co najmniej jednym stanem bazowym jest różny od 0. Cechę tę zachowuje operacja rzutowania zdefiniowana poprzez (7.94). Pozostaje jedynie dobrać współczynniki c_k ($k = 1, \dots, s$) w ten sposób, aby $\mathbf{P}_A \cdot \sigma_A = \sigma_A$. Przyrównajmy zatem (7.90) z uwzględnieniem (7.92) oraz (7.94). Ponieważ rozkład wektora w bazie przestrzeni liniowej jest jednoznaczny (niezależnie od jej ewentualnej ortogonalności), stąd możemy napisać

$$a_k = \frac{\sigma \bullet \alpha_k}{\alpha_k \bullet \alpha_k} \equiv \frac{1}{c_k} (\sigma \bullet \alpha_k) \quad (k = 1, \dots, s). \quad (7.95)$$

Równanie powyższe można przepisać w postaci

$$\forall \sigma \quad \sigma \bullet \alpha_k \left(\frac{1}{\alpha_k \bullet \alpha_k} - \frac{1}{c_k} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_k = \alpha_k \bullet \alpha_k. \quad (7.96)$$

A zatem, jeśli stan naprężenia σ ma składową bezpieczną, to z definicji musi się ona dać zapisać w postaci (7.90) ze współczynnikami rozkładu (7.92) - postać tę zachowuje operacja rzutowania za pomocą projektora \mathbf{P}_A , dana równaniem (7.94). Skoro σ_A jest składową należąca do \mathcal{A} , to składowa niebezpieczna σ_B dana równaniem (7.93) musi należeć do \mathcal{B} . Jeśli $\sigma \in \mathcal{B}$, wtedy oczywiście każdy z energetycznych iloczynów skalarnych

$$(\sigma \bullet \alpha_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, s),$$

a zatem spełniony jest warunek $\mathbf{P}_A \cdot \sigma_B = \mathbf{0}$.

Projektor \mathbf{P}_A można więc zapisać ostatecznie w postaci:

$$\mathbf{P}_A = \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k \otimes \mathbf{C} \cdot \alpha_k}{\alpha_k \cdot \mathbf{C} \cdot \alpha_k}, \quad \alpha_i \perp \alpha_j \Leftrightarrow i \neq j. \quad (7.97)$$

Nietrudno pokazać, że tak zdefiniowany projektor spełnia warunki (7.83):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A^T \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{P}_A &= \left[\sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k \cdot \mathbf{C} \otimes \alpha_k}{\alpha_k \cdot \mathbf{C} \cdot \alpha_k} \right] \circ \mathbf{C} \circ \left[\sum_{m=1}^s \frac{\alpha_m \otimes \mathbf{C} \cdot \alpha_m}{\alpha_m \cdot \mathbf{C} \cdot \alpha_m} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^s \sum_{m=1}^s \frac{(\mathbf{C} \cdot \alpha_k) \otimes (\mathbf{C} \cdot \alpha_m)}{(\alpha_k \cdot \mathbf{C} \cdot \alpha_k)(\alpha_m \cdot \mathbf{C} \cdot \alpha_m)} (\alpha_k \cdot \mathbf{C} \cdot \alpha_m) = \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{(\mathbf{C} \cdot \alpha_k) \otimes (\mathbf{C} \cdot \alpha_k)}{(\alpha_k \cdot \mathbf{C} \cdot \alpha_k)} = \mathbf{P}_A^T \circ \mathbf{C} = \mathbf{C} \circ \mathbf{P}_A. \end{aligned} \quad (7.98)$$

W zupełnie analogiczny sposób można sprawdzić, że spełniona jest równość $\mathbf{P}_A \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A$, co dla projektora na \mathcal{B} danego zależnością $\mathbf{P}_B = \mathbb{I} - \mathbf{P}_A$ skutkuje wymaganymi zależnościami:

$$\mathbf{P}_A \circ \mathbf{P}_B = \mathbf{P}_B \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_A^T \circ \mathbf{P}_B = \mathbf{P}_B^T \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{0}.$$

Tensor stanu granicznego \mathbf{H} przyjmuje postać:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2h} \left[\mathbf{C} - \sum_{k=1}^s \frac{(\alpha_k \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \alpha_k)}{\alpha_k \circ \mathbf{C} \circ \alpha_k} \right], \quad (7.99)$$

gdzie $\{\alpha_k\}$ jest dowolną energetycznie ortogonalną (niekoniecznie znormalizowaną) bazą przestrzeni stanów bezpiecznych \mathcal{A} . W przypadku, gdy rozpatrywana przestrzeń stanów bezpiecznych jest przestrzenią jednowymiarową, wtedy:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2h} \left[\mathbf{C} - \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha} \circ \mathbf{C} \circ \boldsymbol{\alpha}} \right], \quad (7.100)$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}$ jest znanym stanem uznanym za bezpieczny. Jest to wynik wskazany przez Rychlewskiego w [87]. Zakładając, że stanem bezpiecznym jest stan hydrostatyczny tj. $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$, wtedy otrzymujemy

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2h} \left[\mathbf{C} - \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{1}} \right], \quad (7.101)$$

co jest tożsame z propozycją Olszaka - Urbanowskiego [71] oraz Olszaka - Ostrowskiej-Maciejewskiej [72] (7.19). Te same rozważania można przeprowadzić w kontekście przestrzeni bezpiecznych stanów odkształcenia i energetycznego warunku granicznego zapisanego poprzez stany odkształcenia. Zakładając, że bezpiecznym stanem odkształcenia jest stan równomiernego odkształcenia objętościowego (lub - równoważnie - że bezpiecznym stanem naprężenia jest ten stan, który powoduje jedynie zmianę objętości), tensor stanu granicznego w warunku zapisanym poprzez odkształcenia ma postać:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2h} \left[\mathbf{S} - \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S} \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1} \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{1}} \right], \quad (7.102)$$

tożsamą z drugą propozycją Olszaka i Urbanowskiego (7.18).

W świetle powyższych rozważań oryginalne propozycje Olszaka i Urbanowskiego [71] znajdują jednoznaczną, ściśle energetyczną interpretację, już nie jako hipotezy krańcowej „pseudoenergii odkształcenia postaciowego” lecz jako hipoteza, w której miarą wyężenia jest energia związana ze stanami naprężenia (albo - nierównoważnie - odkształcenia), które są energetycznie niezależne od pewnego założonego stanu uznanego za bezpieczny. Bardzo istotną cechą - charakterystyczną dla anizotropii - jest konieczność rozróżnienia czy stanem bezpiecznym ma być stan odkształcenia czy naprężenia. Odpowiadające sobie stany naprężenia i odkształcenia w przypadku anizotropii są opisane z reguły tensorami niewspółosiowymi. Szczególnym wyjątkiem są tutaj stany własne tensorów sprężystości.

7.3 Kryterium Rychlewskiego (1984)

W 1984 roku Rychlewski zaproponował w swej pracy [87] warunek stanu granicznego w postaci liniowej kombinacji składników głównego rozkładu energii sprężystej (6.26):

$$\frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_1)}{h_1} + \frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_2)}{h_2} + \dots + \frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho)}{h_\rho} = 1, \quad \rho \leq 6, \quad (7.103)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, \rho$) są rzutami aktualnego stanu naprężenia na podprzestrzenie własne tensorów sprężystości, zaś h_α są granicznymi wartościami energii związanych ze stanami należącymi do odpowiednich podprzestrzeni \mathcal{P}_α . Z uwagi ścisłą proporcjonalność stanów własnych naprężenia i odkształcenia równanie (7.103) można przepisać w postaci:

$$\frac{|\sigma_1|^2}{k_1^2} + \frac{|\sigma_2|^2}{k_2^2} + \dots + \frac{|\sigma_\rho|^2}{k_\rho^2} = 1, \quad k_\alpha^2 = 2\lambda_\alpha h_\alpha, \quad (7.104)$$

gdzie λ_α są modułami Kelvina odpowiadającymi danym podprzestrzeniom własnym, zaś k_α są granicznymi wartościami naprężeń na kierunkach stanów własnych. Jeśli, któryś ze stanów naprężenia σ_α uznawany jest za stan bezpieczny, wtedy odpowiedni parametr $h_\alpha = \infty$ (przez co również i $k_\alpha = \infty$). Kryterium powyższe, wyposażone w jasną interpretację energetyczną, w zwartej i bardzo ogólnej formie uwzględnia anizotropię cech sprężystych materiału. Jest ono kryterium ściśle energetycznym, reprezentowanym w przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 przez symetryczną sześciowymiarową hiperpowierzchnię kwadratową - nie można więc opisać przy jego pomocy materiałów wykazujących różnicę wytrzymałości przy zmianie znaku naprężenia.

Specyfikacja tego kryterium dla różnych klas symetrii sprężystych nie jest zagadnieniem trudnym - ogólne wyrażenia na rzuty stanu naprężenia na podprzestrzenie własne jak również ich interpretację fizyczną można znaleźć w rozdziale poświęconym specyfikacji prezentowanej w niniejszej pracy nowej propozycji kryterium stanu granicznego. Podobne rozważania można znaleźć np. w [76] [55] [57].

Jak wskazano już we wcześniejszej części pracy, Rychlewski przekonany był o tym, że nawet „słaby” związek między właściwościami sprężystymi a właściwościami „granicznymi” (wytrzymałościowymi) w ogólnym przypadku nie powinien być przyjmowany za pewnik. W tym sensie, miara wyężenia nie powinna być - w jego mniemaniu - prostą pochodną wielkości sprężystych, w której różnica między miarą deformacji, jaką jest energia, a miarą wyężenia sprowadzała się do kilku zaledwie parametrów (w szczególności, do pojedynczego skalaru, będącego graniczną wartością energii). Rychlewski proponował rozważać warunek graniczny postaci:

$$F(\sigma_1, \dots, \sigma_\rho) = 1, \quad (7.105)$$

gdzie σ_α ($\alpha = 1, \dots, \rho \leq 6$) są miarami rzutu aktualnego stanu naprężenia na podprzestrzenie własne tensorów sprężystości. Warunek ten nie jest pozbawiony tej zależności swej postaci od cech sprężystych materiału, niemniej jest warunkiem znacznie ogólniejszym, umożliwiającym wprowadzenie znacznie bardziej złożonych zależności funkcyjnych.

7.3.1 Koncepcja energetycznie ortogonalnych rozkładów energii sprężystej

Rychlewski świadomy był możliwości wystąpienia istotnych nawet różnic pomiędzy właściwościami symetrii cech sprężystych oraz cech wytrzymałościowych danego materiału. Dość sceptycznie odnosił się do różnych propozycji warunków stanu granicznego, w których miara wyężenia wiąże się z właściwościami sprężystymi materiału nawet poprzez bardzo „słabe” związki [87] - w swym krytycznym stosunku do tego typu propozycji nie oszczędzał nawet swoich własnych koncepcji. Rychlewski podjął pracę nad bardzo ogólnym warunkiem stanu granicznego, tj. warunkiem postaci

$$\sigma \cdot \mathbf{H} \cdot \sigma = 1 \quad (7.106)$$

Różni się ona od propozycji Misesa [67] w kilku kwestiach - rzecz dotyczy przede wszystkim spełnienia postulatów Misesa, tj. nizemienniczości postaci funkcji kwadratowej po lewej stronie warunku 1) wobec zmiany składowej hydrostatycznej stanu naprężenia, 2) przy zmianie układu współrzędnych na inny „krytalograficznie równoważny”. W języku algebry postulaty te sprowadzają się do stwierdzenia, że 1) stan kulisty jest stanem własnym \mathbf{H} odpowiadającym zerowej wartości własnej oraz 2) grupa symetrii zewnętrznych \mathbf{H} jest taka sama jak grupa symetrii tensorów sprężystości. Żadnego z tych założeń Rychlewski nie przyjął. Założył natomiast, że tensor \mathbf{H} jest symetryczny i dodatnio określony.

Analiza warunku granicznego (7.106), pozwoliła na sformułowanie twierdzenia pozwalającego znaleźć jednoznaczną interpretację energetyczną dowolnego warunku tego typu:

Twierdzenie Rychlewskiego

Dla każdego materiału sprężystego, zdefiniowanego przez swój tensor podatności \mathbf{C} oraz tensor stanu granicznego \mathbf{H} , istnieje dokładnie jeden energetycznie ortogonalny rozkład przestrzeni symetrycznych tensorów drugiego rzędu \mathcal{T}_{sym}^2 :

$$\mathcal{T}_{sym}^2 = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_\chi, \quad \chi \leq 6, \quad (7.107)$$

$$\mathcal{H}_\alpha \perp \mathcal{H}_\beta \text{ for } \alpha \neq \beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \chi$$

i dokładnie jeden zbiór parami różnych stałych

$$h_1, \dots, h_\chi, \quad h_\alpha \neq h_\beta \text{ for } \alpha \neq \beta \quad (7.108)$$

taki, że dla dowolnego stanu naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\chi, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha \quad (7.109)$$

miara wyężenia materiału dana wyrażeniem (6.28) jest równa

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{h_1} \Phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \dots + \frac{1}{h_\chi} \Phi(\boldsymbol{\sigma}_\chi), \quad (7.110)$$

gdzie

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \Phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \dots + \Phi(\boldsymbol{\sigma}_\chi) \quad (7.111)$$

jest całkowitą energią odkształcenia sprężystego.

Wydaje się uzasadnione, aby w zestawieniu porównawczym szeregu energetycznych hipotez wyężenia materiałów anizotropowych zamieścić dowód powyższego twierdzenia - istotnego dla lepszego zrozumienia niektórych propozycji warunku stanu granicznego. Dowód podany za Rychlewskim [87] z drobnymi zmianami, nieistotnymi dla zasadniczej treści.

Stosujemy następujące oznaczenia energetycznego iloczynu skalarnego, odwzorowań liniowych oraz złożenia operatorów:

$$\boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (7.112)$$

$$\mathbf{A} \bullet \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{A} \circ \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (7.113)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \bullet \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C} \circ \mathbf{A} \quad (7.114)$$

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{A} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{B}, \quad (7.115)$$

gdzie \mathbf{C} jest tensorem podatności danego materiału.

Dowód:

Rozważamy bezwymiarową przestrzeń symetrycznych tensorów drugiego rzędu \mathcal{T}_{sym}^2 z wprowadzonym w niej energetycznym iloczynem skalarnym (6.24). Operatorem tożsamościowym w klasie operatorów realizujących odwzorowania liniowe (7.113) jest nie tensor \mathbb{I} lecz tensor sztywności \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} \bullet \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{S} \circ \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \quad (7.116)$$

Lewą stronę warunku granicznego (7.106) można zapisać w następującej postaci:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \bullet (\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}) \bullet \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{L} \bullet \boldsymbol{\sigma} \quad (7.117)$$

Z uwagi na symetrię \mathbf{S} oraz założenie, że $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$ tensor $\mathbf{L} = \mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}$ jest tensorem symetrycznym - ma więc sens zagadnienie własne dla tego operatora, tj. poszukiwanie takich energetycznych stanów własnych $\boldsymbol{\chi}$ oraz energetycznych wartości własnych $\frac{1}{2h}$ symetrycznego operatora liniowego \mathbf{L} , dla których spełniona jest równość

$$\mathbf{L} \bullet \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2h} \boldsymbol{\chi} \quad \Leftrightarrow \quad (2h\mathbf{H} - \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}. \quad (7.118)$$

Wyznaczyć można układ energetycznie ortogonalnych rozwiązań powyższego zagadnienia

$$\boldsymbol{\chi}_I, \dots, \boldsymbol{\chi}_{VI}, \quad \boldsymbol{\chi}_K \bullet \boldsymbol{\chi}_L = \delta_{KL} \quad (7.119)$$

odpowiadających wartościom własnym $\frac{1}{2h_K}$ ($K = I, \dots, VI$). Układ tensorów $\boldsymbol{\chi}_K$ stanowi bazę w \mathcal{T}_{sym}^2 . Zgodnie z fundamentalną tożsamością dla operatora liniowego, tensor \mathbf{L} można zapisać jako kombinację liniową diad swoich stanów własnych, przy czym współczynnikami tej kombinacji są odpowiednimi wartościami własnymi \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2h_I} \boldsymbol{\chi}_I \otimes \boldsymbol{\chi}_I + \dots + \frac{1}{2h_{VI}} \boldsymbol{\chi}_{VI} \otimes \boldsymbol{\chi}_{VI} \quad (7.120)$$

W szczególności niektóre z wartości własnych \mathbf{L} mogą być sobie równe (oznaczymy tę wartość przez $\frac{1}{2h_\alpha}$) - istnieje wtedy nieskończona liczba stanów własnych $\boldsymbol{\chi}_\alpha$ odpowiadających tym wartościom własnym spełniających (7.118). Generują one podprzestrzeń liniową \mathcal{H}_α przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 o wymiarze równym krotności danej wartości własnej jako pierwiastka równania charakterystycznego dla operatora \mathbf{L} . Grupując diady $(\boldsymbol{\chi}_K \otimes \boldsymbol{\chi}_K)$ odpowiadające takim samym wartościom własnym, tensor \mathbf{L} można zapisać jako

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2h_1} \mathbf{H}_1 + \dots + \frac{1}{2h_\chi} \mathbf{H}_\chi, \quad \chi \leq 6. \quad (7.121)$$

gdzie

$$\mathbf{H}_\alpha = \boldsymbol{\chi}_\alpha^{(1)} \otimes \boldsymbol{\chi}_\alpha^{(1)} + \dots + \boldsymbol{\chi}_\alpha^{(d_\alpha)} \otimes \boldsymbol{\chi}_\alpha^{(d_\alpha)} \quad (7.122)$$

zaś $\chi_\alpha^{(k)}$ ($k = 1, \dots, d_\alpha$) są energetycznymi stanami własnymi \mathbf{L} odpowiadającymi d_α -krotnej wartości własnej $\frac{1}{2h_\alpha}$. Z uwagi na energetyczną ortogonalność stanów własnych odpowiadających istotnie różnym wartościom własnym możemy napisać:

$$\mathbf{H}_\alpha \bullet \chi = \begin{cases} \chi & \Leftrightarrow \chi \in \mathcal{H}_\alpha \\ \mathbf{0} & \Leftrightarrow \chi \in \mathcal{H}_\beta, \quad \beta \neq \alpha \end{cases} \quad (7.123)$$

Tensory \mathbf{H}_α ($\alpha = 1, \dots, \chi$) są zatem projektorami energetycznie ortogonalnymi na wzajemnie energetycznie ortogonalne podprzestrzenie \mathcal{H}_α .

$$\mathbf{H}_\alpha \odot \mathbf{H}_\beta = \begin{cases} \mathbf{H}_\alpha & \Leftrightarrow \beta = \alpha \\ \mathbf{0} & \Leftrightarrow \beta \neq \alpha \end{cases} \quad (7.124)$$

Ponieważ układ sześciu stanów własnych \mathbf{L} stanowi bazę w \mathcal{T}_{sym}^2 , zatem energetyczne zagadnienie własne dla \mathbf{L} definiuje rozkład \mathcal{T}_{sym}^2 na sumę prostą

$$\mathcal{T}_{sym}^2 = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_\chi \quad (7.125)$$

skąd operator tożsamościowy dla odwzorowania liniowego danego równaniem (7.113), tj. tensor sztywności \mathbf{S} może zostać przedstawiony w postaci:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}_1 + \dots + \mathbf{H}_\chi \quad (7.126)$$

Powyższy rozkład \mathcal{T}_{sym}^2 umożliwia zapisanie dowolnego stanu naprężenia w postaci

$$\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_\chi, \quad \sigma_\alpha \bullet \sigma_\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, \chi \leq 6 \quad (7.127)$$

W szczególności dla dowolnej podprzestrzeni \mathcal{H}_α

$$\sigma = \sigma_\alpha + \sigma_\alpha^\perp, \quad \sigma_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha, \quad \sigma_\alpha \bullet \sigma_\alpha^\perp = 0 \quad (7.128)$$

Wobec tego oczywista jest zależność

$$\sigma \bullet \mathbf{H}_\alpha \bullet \sigma = (\sigma_\alpha + \sigma_\alpha^\perp) \bullet \sigma_\alpha = \sigma_\alpha \bullet \sigma_\alpha = 2\Phi(\sigma_\alpha) \quad (7.129)$$

Uwzględniając powyższe, podstawiając (7.121) do (7.106) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma \bullet \mathbf{H} \bullet \sigma &= \frac{1}{2h_1} \sigma \bullet \mathbf{H}_1 \bullet \sigma + \dots + \frac{1}{2h_\chi} \sigma \bullet \mathbf{H}_\chi \bullet \sigma = \\ &= \frac{\Phi(\sigma_1)}{h_1} + \dots + \frac{\Phi(\sigma_\chi)}{h_\chi}, \end{aligned} \quad (7.130)$$

co jest zasadniczą tezą twierdzenia. Biorąc pod uwagę rozkład (7.127) oraz energetyczną ortogonalność składników tego rozkładu, całkowita energia odkształcenia sprężystego $\Phi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma \bullet \sigma$, jest równa

$$\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma_1) + \dots + \Phi(\sigma_\chi). \quad (7.131)$$

■ CBDU

7.4 Uogólnienie klasycznych energetycznych kryteriów stanu granicznego na przypadku anizotropii

Jak było już wspomniane na początku rozdziału, każda z klasycznych energetycznych hipotez wyężenia materiału izotropowego przy pewnych założeniach w naturalny sposób może zostać uogólniona na przypadek ciał anizotropowych właśnie dzięki uniwersalności pojęcia energii, które nie zakłada żadnej szczególnej formy związków konstytutywnych sprężystości. Od samego początku, gdy formułowano pierwsze propozycje warunków granicznych dla materiałów anizotropowych, duża zgodność hipotezy Maxwella-Hubera-Misesa z doświadczeniem sugerowała potrzebę uogólnienia tej właśnie propozycji. W rozdziałach poprzednich przedstawiono szereg odmiennych koncepcji, które miały na celu sformułowanie odpowiedniej hipotezy - wśród nich można wyszczególnić:

- założenie objętościowej izotropii materiału (Burzyński [16])
- uogólnienie energii odkształcenia postaciowego (Mises [67] Olszak, Urbanowski [71])
- uogólnienie energii dewiatorowego stanu naprężenia (Olszak-Urbanowski [71])
- założenie bezpiecznych stanów naprężenia (w szczególności naprężenia hydrostatycznego)
 - przyjęcie tensora stanu granicznego ze stanem bezpiecznym jako stanem własnym o zerowej wartości własnej (Mises [67], Olszak, Urbanowski [71], Olszak, Ostrowska-Maciejewska [72]). Przyjęcie dewiatorowych stanów własnych tensorów sprężystości za stany własne tensora stanu granicznego (Olszak, Ostrowska-Maciejewska [72])
 - przyjęcie za miarę wyężenia energię związaną ze stanami należącymi do energetycznie ortogonalnego dopełnienia przestrzeni stanów bezpiecznych (Rychlewski [87])

Różnorodność zastosowanych podejść jest konsekwencją tego, że w ogólnym przypadku anizotropii wydzielenie części energii związanej jedynie z odkształceniem postaciowym i naprężeniem dewiatorowym jest niemożliwe, stąd samo pojęcie „energii odkształcenia postaciowego” okazuje się tutaj być niejednoznaczny i może być interpretowane w różny sposób. Wykorzystując wyniki uzyskane przy próbach uogólnienia hipotezy Maxwella-Hubera-Misesa możliwe są różnorodne dalsze wariacje uogólnień późniejszych propozycji Schleichera oraz Burzyńskiego. Warto również pamiętać o oryginalnym sformułowaniu hipotezy Hubera¹⁸ i

¹⁸Szczególnie w polskiej literaturze naukowej obserwuje się pewne zamieszanie w tej kwestii. Powszechne jest bowiem utożsamianie propozycji Hubera z 1904 r. oraz Misesa z 1913 r. Trzeba jasno stwierdzić, że pierwotny pomysł Hubera zasadniczo różnił się od tego, co zwykle nazywać się hipotezą Hubera-Misesa-Hencky'ego i opierał się na założeniu, że miarą wyężenia przy ściskaniu jest energia odkształcenia postaciowego, przy rozciąganiu zaś - całkowita energia sprężysta [49] (tak samo u Burzyńskiego [16]). Pomysł ten, skrytykowany przez Misesa, nie znalazł, zdaje się, właściwego zrozumienia w środowisku naukowym. Kluczowy może tutaj być fakt, że Huber w swojej pracy stan graniczny nazywał „pęknięciem” nie zaś - jak Mises - uplastycznieniem, co sugerować może, iż w istocie właściwym przedmiotem, którego winna dotyczyć propozycja Hubera, są ciała kruche o diametralnie odmiennych właściwościach przy rozciąganiu i ściskaniu, tym samym wykazujące asymetrię zakresu sprężystego. Mises i inni zakładali, że naprężenie graniczne przy rozciąganiu i przy ściskaniu musi być takie samo, czego z oczywistych względów hipoteza Hubera uwzględnić nie mogła, chyba że przyjąć, iż graniczna wartość energii (prawa strona warunku granicznego) jest odmienna przy rozciąganiu

jego ewentualnym rozszerzeniu na przypadek ciał anizotropowych. Ciekawą koncepcję uogólnienia najstarszej energetycznej hipotezy wytężenia, zaproponowanej przez Beltramię [8], przedstawił Rychlewski [87].

Beltrami postulował, że w stanie granicznym całkowita energia odkształcenia sprężystego osiąga pewną ustaloną wartość.

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = h = \text{const.} \quad (7.132)$$

Doświadczenie wskazuje, że hipoteza ta nie jest poprawna, wydaje się jednak, że może istnieć pewna klasa materiałów, dla których propozycja Beltramię mogłaby znaleźć zastosowanie. Rozstrzygnąć o tym może jedynie doświadczenie. Warto przy tym zwrócić uwagę na kilka interesujących faktów związanych z tą hipotezą. Podstawowymi stanami naprężenia, służącymi weryfikacji wysuwanych propozycji warunków granicznych są stany jednoosiowe, oraz stany czystego ścinania. Rozpatrując jednoosiowy stan naprężenia na kierunku zadanym wersorem \mathbf{n} , tensor naprężenia przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \quad (7.133)$$

Całkowita energia sprężysta związana z tym stanem jest równa:

$$\Phi = \sigma^2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \quad (7.134)$$

Wiadomo jednak, że wyrażenie $(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ oznacza składową (1111) tensora podatności w układzie współrzędnych, którego pierwsza oś pokrywa się z kierunkiem wersora \mathbf{n} , a zatem jest ono równe odwrotności modułu Younga na tym kierunku. Energia związana z tym stanem jest zatem proporcjonalna do kwadratu wielkości naprężenia oraz odwrotnie proporcjonalna do modułu Younga na tym kierunku. Analogicznie rzecz ma się ze stanem czystego ścinania oraz modułem Kirchhoffa. Gdyby zatem przyjąć za Beltramię, że w stanie granicznym energia odkształcenia sprężystego osiąga ustaloną wartość niezależnie od charakteru stanu naprężenia, to w tych dwóch podstawowych stanach naprężenie graniczne przy obciążeniu o dowolnej orientacji, byłoby zawsze proporcjonalne do pierwiastka z odpowiedniego modułu sztywności:

$$k_{(\mathbf{n})} = \sqrt{h \cdot E(\mathbf{n})}, \quad k_{s(\mathbf{m}, \mathbf{n})} = \sqrt{2h \cdot G(\mathbf{m}, \mathbf{n})}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.135)$$

Jest to oczywiście nieprawda w przypadku ogólnym. Tak ścisła zależność między właściwościami sprężystymi będącymi, parafrazując Hoffmana, uśrednioną makroskopową miarą siły wiązań międzycząsteczkowych a podatnymi na wszelkie mikroskopowe defekty właściwościami wytrzymałościowymi nie może z reguły obowiązywać.

Modyfikację ogólnego kryterium Beltramię przedstawił w [87] Rychlewski. Można bowiem przypuszczać, że całkowita energia odkształcenia może być odpowiednią miarą wytężenia materiału, jakkolwiek należy się spodziewać, że dla jakościowo odmiennych stanów naprężenia, jej graniczna wartość określająca moment wystąpienia stanu niebezpiecznego, powinna być różna. Tę uogólnioną hipotezę Beltramię można zapisać w następującej formie:

i przy ściskaniu, co jednak daje w konsekwencji nieciągłą powierzchnię graniczną (walec zakończony połową elipsoidy obrotowej o średnicy różnej od średnicy walca). Zdaje się jednak, że oryginalne sformułowanie Hubera, obecnie jakby zapomniane, może okazać się wartościową propozycją właśnie dla niektórych materiałów kruchych, np. coraz powszechniej stosowanych różnego rodzaju materiałów komórkowych.

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = h\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{|\boldsymbol{\sigma}|}\right) \quad (7.136)$$

lub analogicznie (oznaczając wektor kierunku stanu naprężenia w \mathcal{I}_{sym}^2 przez $\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{|\boldsymbol{\sigma}|}$):

$$\eta(\boldsymbol{\omega})\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 1. \quad (7.137)$$

Swoboda wyboru funkcji η (w szczególności może być to funkcja nieróżniczkowalna, a nawet nieciągła) umożliwia opisanie powyższym równaniem bardzo szerokiej klasy powierzchni granicznych. Powierzchnia taka, a w konsekwencji sama funkcja η , może zostać wyznaczona jako odpowiednia aproksymacja lub interpolacja wyników uzyskanych w szeroko zakrojonych badaniach doświadczalnych na zadanym materiale w różnorodnych stanach i orientacjach obciążenia.

8 Propozycja energetycznego kryterium stanu granicznego dla materiałów anizotropowych wykazujących asymetrię zakresu sprężystego

8.1 Sformułowanie ogólne

Nowa propozycja hipotezy wyteżenia materiału dla materiałów anizotropowych wykazujących asymetrię zakresu sprężystego, opracowana została przez autora przy współpracy z dr Janiną Ostrowską-Maciejewską oraz prof. Ryszardem B. Pęcherskim - rezultaty wspólnych badań opublikowane zostały m.in. w [78] [69], [102], [75], [103]. Prace te w pewnej mierze stanowią bazę poniższego tekstu - w niektórych miejscach pierwotne sformułowania uległy jednak modyfikacjom, niekiedy o kluczowym znaczeniu.

Nowa propozycja bazuje na dwóch koncepcjach przedstawionych w rozdziałach poprzednich - koncepcji rozkładów przestrzeni naprężeń na podprzestrzenie energetycznie ortogonalne zaproponowanej przez Rychlewskiego oraz zaprezentowanej przez Burzyńskiego koncepcji zależnych od stanu naprężenia funkcji określających udział poszczególnych, wyznaczonych na drodze wspomnianego rozkładu \mathcal{T}_{sym}^2 części gęstości energii odkształcenia sprężystego w całkowitej mierze wyteżenia materiału. Nowa propozycja jest uogólnieniem hipotezy Rychlewskiego umożliwiającym uwzględnienie zjawiska różnicy wytrzymałości przy rozciąganiu i przy ścisaniu dokonanym w sposób analogiczny do tego, w jaki Burzyński uogólnił klasyczne kryterium Hubera.

Rozważmy pewien energetycznie ortogonalny rozkład przestrzeni symetrycznych tensorów drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{sym}^2 &= \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_\mu, \quad \mu \leq 6 \\ \alpha \neq \beta &\Leftrightarrow \mathcal{H}_\alpha \perp \mathcal{H}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \mu. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Proponuje się, aby za miarę wyteżenia materiału w danym punkcie uważać następującą kombinację gęstości energii sprężystej związanych z wydzielonymi w powyższym rozkładzie podprzestrzeniami energetycznie ortogonalnymi:

$$\eta_1 \Phi_1 + \eta_2 \Phi_2 + \dots + \eta_\mu \Phi_\mu = 1, \quad \Phi_\alpha = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\alpha, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha, \tag{8.2}$$

gdzie η_α ($\alpha = 1, \dots, \mu$) są pewnymi charakterystycznymi dla danego materiału a ponadto zależnymi od aktualnego stanu naprężenia parametrami - nazywać je będziemy, w zależności od ich roli *funkcjami wpływu* bądź *wskaźnikami formy naprężenia*.

8.2 Funkcje wpływu i wskaźniki form naprężenia - założenia

Podstawową różnicą między stałymi współczynnikami liniowej kombinacji części energii w uogólnionym warunku Misesa (7.110) a wielkościami η , będącymi kluczowymi elementami proponowanej hipotezy, jest fakt, że parametry η są nie tylko wielkościami charakterystycznymi dla danego materiału o zadanych cechach sprężystych i wytrzymałościowych, ale również są funkcjami (zmiennymi zależnymi) aktualnego stanu naprężenia. Koncepcja funkcji tego typu, choć do tej pory nie postulowana w sposób systematyczny, przejawiała się w co najmniej kilku odmiennych propozycjach różnych autorów. Jak wskazano poniżej, o funkcjach tych zakładać się będzie, iż będą funkcjami niezmienników stanów naprężenia, które - w przypadku rozkładu \mathcal{T}_{sym}^2 na podprzestrzenie własne tensorów sprężystości - są stanami niezmienniczymi względem przekształceń grup symetrii zadanego tensora sztywności / podatności (z dokładnością do znaku). W tym sensie koncepcja ta jest rozwinięciem niemal zapomnianego pomysłu Misesa [67], omówionego w rozdziale 6.2.2. Przedstawiona propozycja (8.2) w oczywisty sposób inspirowana jest i nawiązuje do koncepcji Burzyńskiego (6.40) [16]. Z zupełnie niedawnych propozycji, nie można nie zauważyć dużego podobieństwa między postacią pojedynczego składnika nowej propozycji (8.2) a warunkiem granicznym (7.136) będącym próbą uogólnienia hipotezy Beltramiiego podjętą przez Rychlewskiego [87].

O funkcjach wpływu czynimy następujące założenia:

- **Interpretacja - wartość graniczna parametru η**

Jeśli rozważać będziemy stan naprężenia $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, \mu$), który w całości należy do pojedynczej podprzestrzeni \mathcal{H}_α rozkładu (8.1), wtedy, jeśli rozważany stan naprężenia jest stanem granicznym $\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{lim}$, to warunek (8.2) przyjmuje postać

$$\eta_\alpha(\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{lim}) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{lim})^{-1}.$$

Wartość parametru η_α w stanie granicznym jest zatem równa odwrotności granicznej wartości gęstości energii sprężystej odpowiadającej granicznemu stanowi naprężenia należącemu do właściwej podprzestrzeni \mathcal{H}_α .

- **Dziedzina**

Postuluje się, aby zachować energetyczną niezależność poszczególnych składników proponowanej miary wyteżenia, tj. niezależność odpowiadających sobie gęstości energii Φ_α i parametrów η_α od gęstości energii Φ_β i związanych z nimi parametrów η_β ($\alpha \neq \beta$), które odpowiadają innym, energetycznie ortogonalnym podprzestrzeniom $\mathcal{H}_\beta \perp \mathcal{H}_\alpha$. W tym celu należy założyć, że odpowiedni parametr skalujący η_α zależy jedynie od tej części stanu naprężenia, która przynależy do odpowiadającej mu podprzestrzeni \mathcal{H}_α . Zgodnie z (8.1) dowolny stan naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ może zostać zapisany w postaci sumy

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\mu, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha.$$

O każdym z parametrów η_α zakładamy, że jest funkcją jednego argumentu tensorowego, będącego rzutem aktualnego stanu naprężenia na odpowiadającą mu podprzestrzeń \mathcal{H}_α :

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha(\boldsymbol{\sigma}_\alpha).$$

Sugeruje się, aby parametr η_α nazywać *funkcją wpływu*, jeśli zależy on od normy swojego argumentu, tzn. wtedy, gdy wielkość (w szczególności także znak) odpowiedniego naprężenia wpływa na całkowitą miarę wyężenia w sposób, który nie jest proporcjonalny do związanej z nim gęstości energii sprężystej. Funkcje wpływu stanów naprężenia o niezerowej składowej hydrostatycznej, mogą być podstawą opisu zjawiska różnicy wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu.

Jeśli parametr η_α jest niezależny od wielkości (w sensie: normy) swojego argumentu, nazywać go będziemy *wskaźnikiem formy naprężenia* - dotyczy to tylko parametrów związanych z podprzestrzeniami wielowymiarowymi, dla których odpowiadające im stany naprężenia nie muszą być do siebie proporcjonalne i nawet dla ustalonej normy mogą przyjmować całkowicie odmienną jakościowo postać, np. istotnie różnić się udziałem w tej normie poszczególnych składowych stanu naprężenia.

W ogólności parametr η_α może być jednocześnie funkcją wpływu oraz wskaźnikiem formy naprężenia.

- **Zmienne niezależne parametrów η_α**

Każda z funkcji η_α ($\alpha = 1, \dots, \mu$) jest funkcją skalarną argumentu tensorowego - funkcje takie mogą mieć w ogólności bardzo złożoną matematycznie strukturę. Postuluje się, że w przypadku ogólnym funkcję tę można przyjąć w postaci:

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha(|\boldsymbol{\sigma}_\alpha|, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N), \quad N = \dim \mathcal{H}_\alpha - 1,$$

gdzie bezwymiarowe parametry φ_k ($k = 1, \dots, N$) określają rozkład stanu będącego argumentem η_α w układzie przyjętych stanów bazowych w $N + 1$ -wymiarowej podprzestrzeni \mathcal{H}_α . Przykładem tego typu bezwymiarowego parametru jest kąt Lodego określający w przypadku ciał izotropowych postać dewiatorowej składowej stanu naprężenia - rzutu na płaszczyznę dewiatorową (dwuwymiarową podprzestrzeń ścinań) - w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń głównych. W przypadku jednowymiarowej podprzestrzeni \mathcal{H}_α miara rzutu stanu naprężenia na tę podprzestrzeń jest - przy znanej postaci stanu generującego tą przestrzeń - pełną informacją o $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$. Miara ta jest zatem jedynym argumentem funkcji η_α :

$$\mathcal{H}_\alpha = \text{lin}\{\boldsymbol{\omega}\}, \quad \dim \mathcal{H}_\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \eta_\alpha = \eta_\alpha(\sigma_\alpha), \quad \sigma_\alpha = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Jest wiele przypadków, w których natura opisywanego zjawiska sugeruje konieczność stosowania anizotropowych funkcji η_α , tj takich, których cechy zmieniają się znacząco w zależności np. od rozkładu stanu będącego jej argumentem w bazie wielowymiarowej przestrzeni stanowiącej dziedzinę tę funkcji. Warto podać przykład takiej funkcji - może to być wskaźnik formy ścinania dla dwuwymiarowej podprzestrzeni czystych ścinań w przypadku symetrii tetragonalnej (patrz: rozdział 10.3). Ponieważ każdy argument tego parametru jest czystym ścinaniem, biorąc pod uwagę jedynie wartości ich niezmienników (będących jedynymi zmiennymi niezależnymi funkcji izotropowych), są one nierozróżnialne. Różnią się one jednak orientacją w przestrzeni fizycznej, która jest tu kluczowa dla określenia miary powodowanego przez nie wyężenia - należy się bowiem spodziewać, że wytrzymałość materiału przy ścinaniu w płaszczyznach zawierających czterokrotną oś symetrii, jednak nachylonych pod różnymi kątami do osi dwukrotnych, może być w ogólności różna. Z tego względu za argument odpowiedniego wskaźnika formy ścinania przyjmuje się miarę rozkładu tego argumentu między dwa stany bazowe dla tej podprzestrzeni - miara ta, jak łatwo wykazać, jest tożsama z kątem zawartym między płaszczyzną ścinania a płaszczyzną wyznaczoną przez czterokrotną i dwukrotną oś symetrii.

Ortonormalna baza kanoniczna i odpowiadająca jej polibaza w \mathcal{F}_{sym}^2 nie jest z reguły powiązana z abstrakcyjnymi przestrzeniami liniowymi \mathcal{H}_α , stąd stanowi sztuczny układ odniesienia dla opisu rzutów stanu naprężenia na te podprzestrzenie. Ponadto w przypadku wielowymiarowych podprzestrzeni \mathcal{H}_α baza tensorów może być wyznaczona na nieskończenie wiele sposobów. Wybór jednej z nich może doprowadzić - np. w sytuacji próby przewidywania ogólnej postaci funkcyjnej parametru η_α - do wyróżnienia udziału niektórych stanów (właśnie stanów bazowych) jedynie wskutek takiego a nie innego doboru bazy, co jest operacją czysto matematyczną, niezwiązaną z fizyczną interpretacją wpływu tego parametru. Z tego powodu, w pewnych przypadkach uzasadnione może okazać się założyć o parametrach η_α , że są izotropowymi funkcjami swoich argumentów. Nie należy utożsamiać cechy tej z izotropią funkcji w przestrzeni fizycznej - parametry η_α mogą być izotropowe jedynie w swojej dziedzinie, tj. w abstrakcyjnej podprzestrzeni energetycznie ortogonalnego rozkładu \mathcal{F}_{sym}^2 . Jako funkcje izotropowe mogą zostać w szczególności przedstawione jako funkcje niezmienników swojego argumentu (np. śladu, normy, drugiego lub trzeciego niezmiennika argumentu lub jego dewiatora itp.):

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha (I_1(\boldsymbol{\sigma}_\alpha), I_2(\boldsymbol{\sigma}_\alpha), I_3(\boldsymbol{\sigma}_\alpha))$$

W tym miejscu trzeba zwrócić uwagę na fakt, że założenie izotropii funkcji η_α nie powinno być przyjmowane z góry bez żadnych zastrzeżeń i ma ono na celu jedynie uproszczenie problemu identyfikacji postaci funkcyjnej η_α poprzez wskazanie ograniczonego układu wielkości - właśnie niezmienników jej argumentu - które przyjęte być mogą za jedyne zmienne niezależne tej funkcji.

- **Symetria zakresu sprężystego dla dewiatorowych podprzestrzeni \mathcal{H}_α**

W przypadku, gdy zjawisko asymetrii zakresu sprężystego nie jest obserwowane przy ścinaniu, dla \mathcal{H}_α będącej odpowiednią podprzestrzenią dewiatorów (czystych ścinań

i ich złożeniu) o η_α zakładamy, że jest funkcją parzystą (symetryczną, niewrażliwą na zmianę znaku argumentu), tj.

$$\eta_\alpha(-\boldsymbol{\sigma}_\alpha) = \eta_\alpha(\boldsymbol{\sigma}_\alpha).$$

Założeniem upraszczającym identyfikację postaci funkcyjnej parametrów η_α może być, że miara wyteżenia spowodowana stanem należącym do podprzestrzeni dewiatorowej (tj. bez udziału składowej hydrostatycznej) dla ustalonej formy stanu naprężenia jest ściśle proporcjonalna do związanej z nim energii, a tym samym parametr η_α jest niezależny od normy rzutu na odpowiednią podprzestrzeń - jest zatem wskaźnikiem formy ścinania lecz nie jest funkcją wpływu. Założenie to przyjęto w dalszej części pracy. Przez „ustaloną formę stanu naprężenia” rozumiemy tu ustaloną wartość parametrów rozkładu argumentu w bazie dziedziny funkcji, tj. omówionych w punkcie poprzednim parametrów φ_k .

Zakładać będziemy także, że zakres sprężysty w przypadku stanów związanych z dowolnymi podprzestrzeniami dewiatorowymi (nie jedynie podprzestrzeniami czystych ścinań) jest symetryczny. Jeśli ponadto \mathcal{H}_α jest jednowymiarowa (brak różnych form ścinania w ramach danej podprzestrzeni), wtedy parametr η_α jest stałą proporcjonalną do odwrotności kwadratu granicznej wartości rozpatrywanego naprężenia:

$$\eta_\alpha \sim \frac{1}{k_\alpha^2}$$

Szczególnym przypadkiem są jednowymiarowe podprzestrzenie stanów, których składowa zarówno hydrostatyczna jak i dewiatorowa jest niezerowa. Przyjęcie, że skalar będący miarą rzutu stanu naprężenia na tę podprzestrzeń jest jedynym argumentem odpowiedniego parametru η pociąga za sobą istotne konsekwencje. Gdy pewien stan czystego ścinania ma niezerowy rzut na daną podprzestrzeń, wtedy - wobec założenia symetrii zakresu sprężystego w przypadku stanów czystego ścinania - funkcja wpływu musi być parzysta. Jeśli występują tylko jednowymiarowe podprzestrzenie tego typu (np. przestrzenna i płaska ortotropia) i rzecz dotyczy każdej z nich (tj. dowolny stan jednoosiowy o niezerowej składowej hydrostatycznej rozłożony musi być na składowe należące do podprzestrzeni jednowymiarowych, w których niezerową składową mają również pewne stany czystego ścinania o symetrycznym zakresie sprężystym), wtedy niemożliwe jest opisanie materiałów wykazujących różnicę wytrzymałości przy ściskaniu i rozciąganiu ponieważ każdy z parametrów η jest parzysty a zatem cała funkcja określająca warunek graniczny jest symetryczna. Wydaje się jednak uzasadnione, aby przypuszczać, że zakres sprężysty przy ścinaniu nie zawsze musi być symetryczny. O tym czy zakres sprężysty przy danym stanie czystego ścinania jest symetryczny czy nie, stanowiłby fakt czy stan ten posiada niezerowy rzut na którąś z podprzestrzeni niedewiatorowych omówionego powyżej przypadku rozkładu energii sprężystej - w takiej sytuacji należałoby spodziewać się, że wytrzymałość na ścinanie zależeć będzie od zwrotu naprężenia. Zagadnienie to omówione jest szerzej w rozdziale 10.9.1 poświęconym specyfikacji kryterium granicznego dla płaskiej ortotropii.

Kluczową cechą przedstawionej koncepcji jest uwzględnienie wpływu zmiany znaku stanu naprężenia w przypadku stanów o niezerowej składowej hydrostatycznej. W przypadku jednowymiarowej podprzestrzeni stanów o niezerowej składowej hydrostatycznej, argumentem odpowiedniej funkcji wpływu może być po prostu rzut na kierunek stanu wyznaczającego tę podprzestrzeń rozumiany jako wartość iloczynu skalarnego (a zatem z możliwością przyjęcia wartości ujemnej) aktualnego stanu naprężenia i unormowanego jedyne go stanu bezowego w tej podprzestrzeni. Inaczej rzecz ma się w przypadku podprzestrzeni wielowymiarowych - o ile sam rzut na podprzestrzeń uzyskuje się dzięki projektorom o tyle skalarną, niezmienniczą wielkością opisująca miarę naprężenia może tu być tylko norma, która jednak zawsze jest nieujemna i nie wskazuje na znak (zwrot) stanu naprężenia. W takim przypadku parametr η powinien być funkcją wielu zmiennych tj. powinien być zarazem funkcją wpływu zależną od normy jak i wskaźnikiem formy naprężenia zależnym od bezwymiarowych ciągłych parametrów określających w danym rzucie stanu naprężenia udział stanów bazowych.

Sformułowanie warunku stanu granicznego w postaci pojedynczego równania (8.2) jest świadomym uproszczeniem zagadnienia mającym na celu stworzenie propozycji, która mogłaby w sposób stosunkowo prosty znaleźć zastosowanie w praktycznych obliczeniach tak naukowych jak i inżynierskich. Wydaje się jednak, że - podobnie jak istnieje wiele różnych i do pewnego stopnia niezależnych od siebie mechanizmów płynięcia plastycznego - również ściśle sformułowanie warunku stanu granicznego może wymagać podania układu kilku sprzężonych ze sobą równań (patrz: propozycja przedstawiona przez Schreyera i Zuo w [99]). Swego rodzaju uogólnieniem propozycji (8.2) może być zatem sformułowanie warunku stanu granicznego w postaci układu równań:

$$\eta_\alpha \cdot \Phi_\alpha = 1, \quad \alpha = 1, \dots, \mu \quad (8.3)$$

gdzie Φ_α są energiami związanymi z podprzestrzeniami rozkładu (8.1). Ponieważ należy się spodziewać, że równania powyższe winny być od siebie wzajemnie zależne, stąd założyć trzeba, że funkcja η_α byłaby wtedy funkcją całego aktualnego stanu naprężenia nie zaś jedynie jego rzutu na odpowiednią podprzestrzeń \mathcal{H}_α - w takim przypadku analogia do propozycji uogólnienia kryterium Beltramiego przedstawiona przez Rychlewskiego (7.136) jest dość wyraźna. W szczególności może okazać się, że powyższy układ równań faktycznie da się zapisać w postaci prostej kombinacji (8.2). Możliwe jest, iż dałoby się to zrobić nawet dla wielu różnych przypadków, gdyby przyjąć, że parametry η_α w równaniu (8.2) mogą być nieróżniczkowalnymi lub nawet nieciągłymi funkcjami swoich argumentów.

8.3 Stowarzyszone prawo płynięcia Lévy'ego-Misesa

Jak zaznaczono we wstępnej części pracy, rozważania obecne nie dotyczą w większej mierze zagadnień teorii plastyczności, choćby ze względu na fakt, że samo sformułowanie proponowanej hipotezy wyteżenia materiału bazuje na założeniu liniowości związków konstytutywnych. Mimo że formalny zakres obowiązywania prezentowanej teorii ograniczony jest do obszaru liniowo sprężystego, wydaje się, iż warto sięgnąć myślą poza ten graniczny stan by rozejrzeć się, jakie konsekwencje mogłoby mieć przyjęcie wprowadzonej tu hipotezy w klasycznych modelach płynięcia plastycznego. Jednym z najpowszechniej stosowanych modeli tego typu jest

model prawa płynięcia Lévy'ego-Misesa stowarzyszonego z założonym warunkiem plastyczności, w którym przyrost odkształceń plastycznych $d\varepsilon^p$ określony jest przez funkcję potencjału plastycznego $\Psi(\boldsymbol{\sigma})$ utożsamianego z lewą stroną warunku plastyczności $f(\boldsymbol{\sigma}) = \text{const.}$, poprzez równanie (5.8):

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\Lambda \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}}$$

gdzie $d\Lambda$ jest pewnym parametrem zależnym od historii obciążenia.

W przypadku rozważanej hipotezy wyciężenia materiału potencjał plastyczny przyjmuje ogólną postać:

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = \eta_1(\boldsymbol{\sigma}_1) \cdot \Phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \eta_2(\boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \Phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \dots + \eta_\mu(\boldsymbol{\sigma}_\mu) \cdot \Phi(\boldsymbol{\sigma}_\mu), \quad \mu \leq 6. \quad (8.4)$$

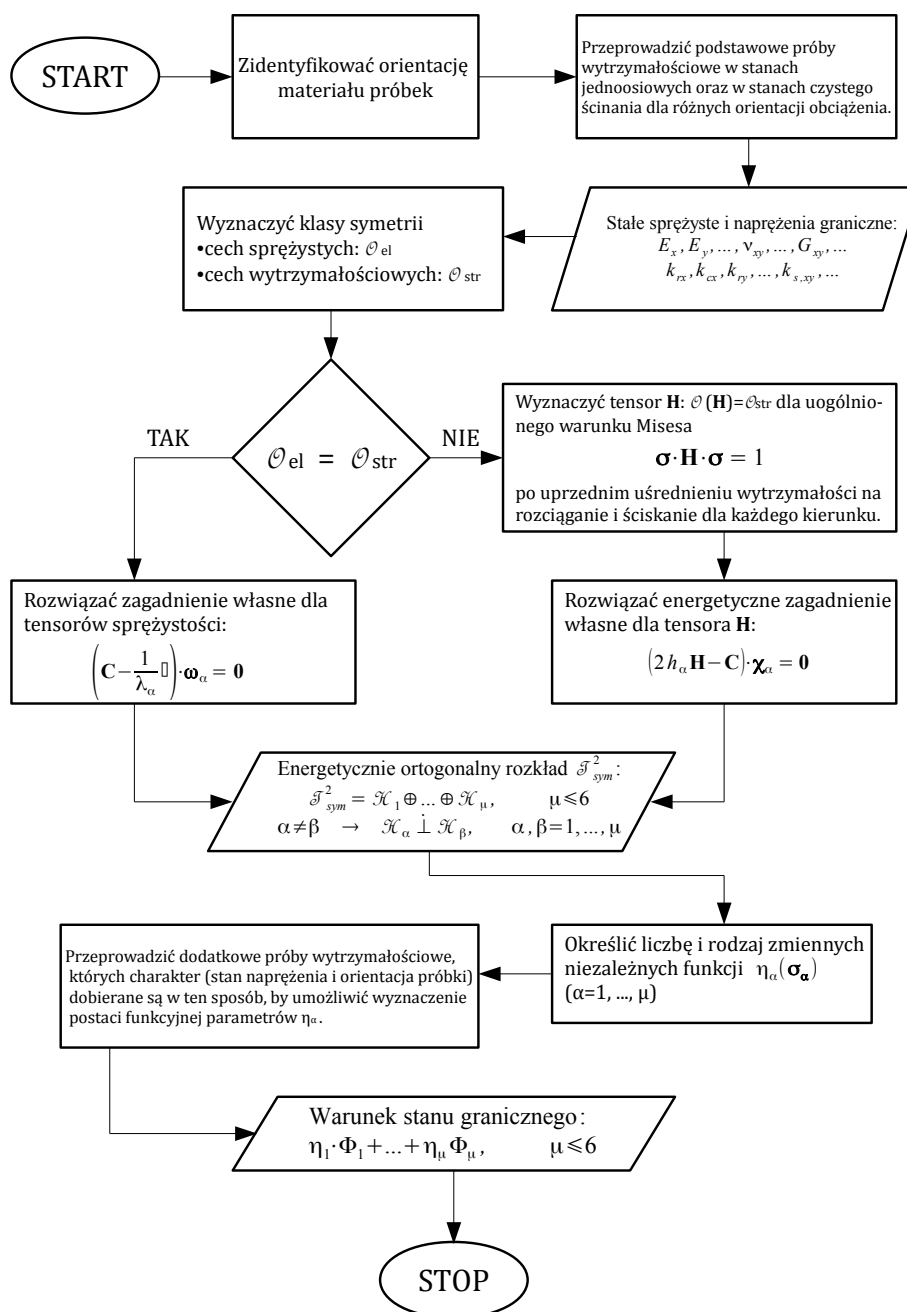
Przyjmijmy tymczasowo, że rozważanym rozkładem \mathcal{T}_{sym}^2 na podprzestrzenie energetycznie ortogonalne jest rozkład na podprzestrzenie własne tensorów sprężystości. Jeśli założymy ponadto, że każda z podprzestrzeni własnych jest jednowymiarowa ($\mu = 6$) to z uwagi na wzajemną ortogonalność tych podprzestrzeni, układ równań teorii Lévy'ego-Misesa zapisany w bazie stanów własnych tensorów sprężystości przyjmuje postać sześciu niezależnych (tj. niesprężonych) równań:

$$d\varepsilon_\alpha^p = d\Lambda \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_\alpha} = d\Lambda \left[\frac{\sigma_\alpha}{\lambda_\alpha} \cdot \eta_\alpha + \frac{\sigma_\alpha^2}{2\lambda_\alpha} \cdot \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \sigma_\alpha} \right], \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{nie sumować po } \alpha) \quad (8.5)$$

W przypadku n -wymiarowej podprzestrzeni własnej ($n > 1$) równania określające przyrost odkształceń plastycznych należących do tej podprzestrzeni własnej tworzą układ n równań niesprężonych z równaniami określającymi przyrosty odkształceń na kierunkach stanów własnych należących do pozostałych podprzestrzeni.

9 Ogólny algorytm identyfikacji kryterium stanu granicznego

Poniżej przedstawiony jest schemat blokowy przykładowego algorytmu postępowania przy identyfikacji zaproponowanego kryterium stanu granicznego:



Choćby z uwagi na pewną dowolność w doborze rozkładu (8.1) nie należy traktować powyższego algorytmu specyfikacji kryterium jako danego jednoznacznie przez samo sformułowanie hipotezy - jest to jedna z możliwych propozycji, wysunięta przez autora. Ważnym elementem przedstawionego schematu postępowania jest konieczność posiadania wstępnych informacji dotyczących symetrii materiału, umożliwiających odpowiednią jego orientację - pojedynczy pomiar wybranej stałej sprężystej w ustalonym układzie współrzędnych przy losowej (nieznanej) orientacji próbki nie niesie ze sobą żadnej informacji. Co więcej, nawet wyznaczenie wszystkich stałych sprężystych dla pewnych dwóch nieznanymi orientacji materiału nie pozwala nam stwierdzić, czy próbki wykonane są z tego samego materiału - nie znany jest bowiem kompletny układ niezmienników opisujących tensory sprężystości z dokładnością do sztywnego obrotu (Ting [107] za: Ostrowska-Maciejewska [73]). Praktycznym powodem, dla którego wstępne określenie orientacji materiału jest bardzo istotne w przygotowaniu programu badań doświadczalnych jest fakt, że w układach współrzędnych, których osie są równoległe do osi symetrii bądź normalnych płaszczyzn symetrii badanego materiału, ilość stałych sprężystych konieczna do opisanie materiału zmniejsza się nieraz bardzo istotnie. W innych układach konieczne jest wyznaczenie znacznie większej ilości stałych, przy czym sam pomiar niektórych spośród nich (np. tych wiążących naprężenia normalne z odkształceniami postaciowymi czy też odkształcenia liniowe z naprężeniami stycznymi) może okazać się bardzo trudny. Orientację materiału, z którego wykonywane będą próbki, można jednak wyznaczyć niekiedy w stosunkowo prosty sposób na podstawie pewnych cech makroskopowych. Umiejąc określić orientację materiału, można wytworzyć próbki o ustalonej orientacji osi symetrii materiału względem dedykowanego dla tych próbek kierunku obciążenia.

Następnym krokiem jest realizacja najprostszyc prób wytrzymałościowych (jednoosiowego rozciągania, jednoosiowego ściskania oraz czystego ścinania na kierunkach trzech wzajemnie prostopadłych osi) umożliwiających pomiar podstawowych parametrów takich jak moduły Younga, współczynniki Poissona, moduły Kirchhoffa oraz naprężenia graniczne przy rozciąganiu, ściskaniu i ścinaniu. Na podstawie tych wielkości określa się klasę symetrii zarówno cech sprężystych jak i cech wytrzymałościowych materiału. Jeśli są one tożsame, to energetycznie ortogonalny rozkład \mathcal{I}_{sym}^2 (8.1) może być przyjęty jako rozkład na podprzestrzenie własne tensorów sprężystości. W przeciwnym wypadku konstruuje się pomocniczy symetryczny tensor czwartego rzędu \mathbf{H} o klasie symetrii odpowiadającej cechom wytrzymałościowym, który może być do pewnego stopnia utożsamiany z tensorem stanu granicznego dla uogólnionego warunku Misesa, np. po uśrednieniu granicznych naprężeń rozciągających i ściskających dla każdego kierunku. Wtedy rozkład (8.1) uzyskać można poprzez rozwiązanie energetycznego zagadnienia własnego dla tensora \mathbf{H} .

Po wyznaczeniu rozkładu \mathcal{I}_{sym}^2 i określeniu specyfiki podprzestrzeni składowych \mathcal{H}_α ($\alpha = 1, \dots, \mu \leq 6$), na podstawie założeń przedstawionych w poprzednim rozdziale można wstępnie określić charakter odpowiadających im funkcji η_α , tj. liczbę oraz typ ich zmiennych niezależnych. Na tej podstawie należy następnie zaprojektować kolejny cykl badań doświadczalnych, dostosowanych w swej formie do uzyskanych wyników - w szczególności chodzi o określenie realizowanego stanu naprężenia oraz jego orientacji względem osi symetrii materiału, tak aby możliwe było zbadanie zmienności funkcji η_α wraz ze zmianą wartości każdej z jej zmiennych niezależnych. W ogólności zmiana orientacji oraz charakteru obciążenia wpływa na zmianę

wartości wielu spośród tych zmiennych, stąd określenie wpływu każdej z nich jest zagadnieniem bardzo złożonym, niemniej koniecznym do wyznaczenia funkcyjnych postaci parametrów η_α , co dopiero umożliwi zapisanie warunku granicznego.

10 Specyfikacja ogólnej postaci warunku granicznego dla wybranych symetrii materiału

W obecnym rozdziale przedstawione zostaną przykładowe specyfikacje kryterium stanu granicznego dla materiałów o różnych symetriach sprężystych. W niemal wszystkich przypadkach **rozważanym rozkładem na podprzestrzenie energetycznie ortogonalne jest rozkład na podprzestrzenie własne tensorów sprężystości** - spośród wszystkich możliwych energetycznie ortogonalnych rozkładów przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 wybór tego rozkładu wydaje się być najbardziej uzasadniony zarówno z fizycznego, jak i matematycznego punktu widzenia. Jest to bowiem jedyny tego typu rozkład, który jednocześnie jest rozkładem ortogonalnym w sensie klasycznie zdefiniowanego iloczynu skalarnego. Ponadto elementy podprzestrzeni tego rozkładu mają jasną interpretację fizyczną jako stany własne tensorów sprężystości, tj. takie, dla których odpowiadające sobie stany naprężenia i odkształcenia są ściśle proporcjonalne (z dokładnością do pojedynczego skalarą) i dla których związana z nimi energia sprężysta osiąga wartości ekstremalne spośród wszystkich stanów o ustalonej normie. Przytoczony będzie również przykład rozkładu (8.1), który nie jest rozkładem związanym z rozkładem głównym energii sprężystej oraz odpowiadające mu kryterium stanu granicznego.

W rozważaniach obecnych nie podajemy specyfikacji kryterium stanu granicznego dla najniższych symetrii sprężystych z uwagi na zbyt dużą ogólność takiej analizy. W przypadku pełnej anizotropii oraz symetrii monoklinicznej nawet ilość istotnie różnych modułów Kelvina, a co za tym idzie, także wymiar odpowiadających im podprzestrzeni własnych może zmieniać się w dość dużym zakresie. Jednocześnie i interpretacja fizyczna uzyskanych wyników nie jest zupełnie jasna (w szczególności chodzi o brak prostej interpretacji charakteru stanów własnych) a nadto i wzory, jakimi wyrażają się podstawowe wielkości charakteryzujące materiały o niskiej symetrii (moduły Kelvina, funkcje dystrybutorów sztywności określające postać stanów własnych) mają bardzo złożoną strukturę.

Celem przedstawienia uzyskanych wyników w zwartej, tj. stosunkowo krótkiej i możliwie przejrzystej formie umożliwiającej porównywanie poszczególnych specyfikacji ze sobą, w rozdziale obecnym podawane są jedynie ostateczne rezultaty analizy wraz z niezbędnymi wyjaśnieniami stosowanych oznaczeń - szczegółowy opis matematycznej struktury liniowej sprężystości dla wszystkich symetrii sprężystych - moduły Kelvina, projektory ortogonalne, indeksy strukturalne, stany własne - przedstawione są w dodatku B.

Wszystkie poniższe rozważania (tak samo jak i analiza widmowa tensorów podatności dla poszczególnych symetrii, jaka przedstawiona jest w dodatku B) dotyczą specyfikacji kryterium tylko i wyłącznie w układzie współrzędnych, którego osie pokrywają się z osiami symetrii materiału.

10.1 Ortotropia

Rozkład spektralny ortotropowego tensora podatności przedstawiony jest w szczegółach w dodatku B. Przyjmujemy, że osie przyjętego układu współrzędnych pokrywają się z osiami symetrii materiału. Rozpatruje się trzy możliwe przypadki ortotropii, w zależności do wymiaru podprzestrzeni stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyteżenia materiału dla poszczególnych przypadków ortotropii przyjmuje następującą postać:

- **Przypadek jednej trójwymiarowej podprzestrzeni własnej stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej**

$$\eta_v(\sigma_v, \varphi, \psi) \cdot \sigma_v^2 + \frac{\sigma_{23}^2}{k_{s23}^2} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_{s31}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{k_{s12}^2} = 1,$$

gdzie $\sigma_v = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2}$ jest normą rzutu na podprzestrzeń trójwymiarową, parametry φ oraz ψ będące argumentami funkcji wpływu η_v określają charakter odpowiedniego rzutu stanu naprężenia (postać stanu własnego, jego orientację w trójwymiarowej podprzestrzeni własnej), $\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$ są naprężeniami stycznymi na kierunkach osi ortotropii, zaś k_{23}, k_{31}, k_{12} są ich granicznymi wartościami.

- **Przypadek jednej dwuwymiarowej i jednej jednowymiarowej podprzestrzeni własnej stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej**

$$\eta_{v1}(\sigma_{v1}, \varphi) \cdot \sigma_{v1}^2 + \eta_{v2}(\sigma_{v2}) \cdot \sigma_{v2}^2 + \frac{\sigma_{23}^2}{k_{s23}^2} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_{s31}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{k_{s12}^2} = 1,$$

gdzie σ_{v1} i σ_{v2} są rzutami odpowiednio na podprzestrzeń dwuwymiarową i jednowymiarową, parametr φ będący argumentem funkcji η_{v1} określa charakter odpowiedniego rzutu stanu naprężenia (postać stanu własnego, jego orientację w dwuwymiarowej podprzestrzeni własnej), $\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$ są naprężeniami stycznymi na kierunkach osi ortotropii, zaś k_{23}, k_{31}, k_{12} są ich granicznymi wartościami. Ponieważ podprzestrzeń własna związana z funkcją wpływu η_{v2} jest jednowymiarowa, stąd jedynym argumentem tej funkcji jest miara rzutu stanu naprężenia na tę podprzestrzeń.

- **Przypadek trzech jednowymiarowych podprzestrzeni własnych stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej**

$$\eta_{v1}(\sigma_{v1}) \cdot \sigma_{v1}^2 + \eta_{v2}(\sigma_{v2}) \cdot \sigma_{v2}^2 + \eta_{v3}(\sigma_{v3}) \cdot \sigma_{v3}^2 + \frac{\sigma_{23}^2}{k_{s23}^2} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_{s31}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{k_{s12}^2} = 1,$$

gdzie σ_{v1}, σ_{v2} i σ_{v3} są rzutami na podprzestrzenie własne stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej, $\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$ są naprężeniami stycznymi na kierunkach osi ortotropii, zaś k_{23}, k_{31}, k_{12} są ich granicznymi wartościami. Ponieważ wszystkie podprzestrzenie własne są jednowymiarowe, stąd funkcje wpływu η_{v1}, η_{v2} i η_{v3} zależą jedynie od miary rzutu na odpowiednie podprzestrzenie własne.

10.2 Symetria trygonalna

Rozkład spektralny tensora podatności o symetrii trygonalnej przedstawiony jest w szczególności w dodatku B. Przyjmujemy, że trzykrotna oś symetrii pokrywa się z osią x_3 przyjętego układu współrzędnych, zaś oś x_1 jest prostopadła do płaszczyzny symetrii materiału. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyężenia materiału dla symetrii trygonalnej przyjmuje postać

$$\eta_{v1}(\sigma_{v1}) \cdot \sigma_{v1}^2 + \eta_{v2}(\sigma_{v2}) \cdot \sigma_{v2}^2 + \eta_{f1}(\varphi) \cdot \sigma_{f1}^2 + \eta_{f2}(\psi) \cdot \sigma_{f2}^2 = 1 \quad (10.1)$$

gdzie:

$$\sigma_{v1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \varkappa_1 + \sigma_{33} \sqrt{2} \cos \varkappa_1],$$

$$\sigma_{v2} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cos \varkappa_1 - \sigma_{33} \sqrt{2} \sin \varkappa_1],$$

$$\sigma_{f1} = \frac{1}{2} \sqrt{[(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos \varkappa_2 + 2\sigma_{23} \sin \varkappa_2]^2 + 4[\sigma_{12} \cos \varkappa_2 + \sigma_{13} \sin \varkappa_2]^2},$$

$$\sigma_{f2} = \frac{1}{2} \sqrt{[(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \varkappa_2 + 2\sigma_{23} \cos \varkappa_2]^2 + 4[\sigma_{13} \cos \varkappa_2 - \sigma_{12} \sin \varkappa_2]^2},$$

zaś parametry \varkappa_1 i \varkappa_2 będące funkcjami dystrybutorów sztywności wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varkappa_1 &= \frac{2\sqrt{2}C_{1133}}{-(C_{1111} + C_{1122} - C_{3333}) - \sqrt{(C_{1111} + C_{1122} - C_{1133})^2 + 8C_{1133}^2}} \\ \operatorname{tg} \varkappa_2 &= \frac{4C_{3112}}{(C_{1111} - C_{1122} - 2C_{3131}) - \sqrt{(C_{1111} - C_{1122} - 2C_{3131})^2 + 16C_{3112}^2}} \end{aligned}$$

gdzie C_{ijkl} są składowymi tensora podatności.

Problem wyznaczenia postaci każdego z parametrów skalujących - tj. dwóch funkcji wpływu η_{v1} i η_{v2} oraz dwóch wskaźników formy ścinania η_{f1} i η_{f2} - na podstawie wyników podstawowych prób wytrzymałościowych (rozciągania, ściskania, ścinania) przy różnej orientacji obciążenia względem osi symetrii materiału jest zagadnieniem silnie złożonym z uwagi na fakt, że zarówno stany jednoosiowe jak i stany czystego ścinania mają w ogólności niezerowe rzuty na każdą z podprzestrzeni własnych. Oznacza to, że funkcje te należy wyznaczać równolegle. Istnieją jednak i takie orientacje obciążenia, dla których wpływ przynajmniej jednego z parametrów zanika. W przypadku symetrii trygonalnej dwiema takimi orientacjami dla stanu czystego ścinania mogą być orientacje odpowiadające wartościom parametrów $\varphi = 90^\circ$ i $\psi = 90^\circ$.

$$\begin{aligned} \sigma_3(\varphi = 90^\circ) = -\sigma_3(\varphi = 270^\circ) &= \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \cos \varkappa_2 & \sin \varkappa_2 \\ \cos \varkappa_2 & 0 & 0 \\ \sin \varkappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_4(\psi = 90^\circ) = -\sigma_4(\psi = 270^\circ) &= \frac{\sigma_4}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varkappa_2 & \cos \varkappa_2 \\ -\sin \varkappa_2 & 0 & 0 \\ \cos \varkappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obracając układ współrzędnych prawoskrętnie wokół osi x_1 o kąt $\varkappa_2 - 90^\circ$, pierwszy z powyższych stanów przyjmuje postać

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

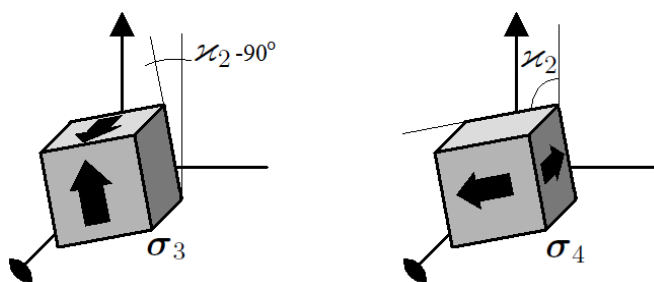
Jest więc to stan czystego ścinania w płaszczyźnie wyznaczonej przez nowe osie x'_1 i x'_3 , na kierunkach tych osi. Ponieważ obrót wykonywany był wokół osi x_1 (normalnej płaszczyzny symetrii zawierającej potrójną oś symetrii) stąd $x'_1 = x_1$, zaś x'_3 tworzy z x_3 (potrójną osią symetrii) kąt $\varkappa_2 - 90^\circ$. Taką samą postać przyjmuje drugi z powyższych stanów po obrocie układu współrzędnych o kąt \varkappa_2 wokół osi x_1 . A zatem:

- stan czystego ścinania w płaszczyźnie wyznaczonej przez oś normalną do płaszczyzny symetrii zawierającą potrójną oś symetrii oraz przez prostopadłą do niej oś tworzącą z potrójną osią symetrii kąt $\varkappa_2 - 90^\circ$ jest stanem własnym tensora podatności - jest tym samym ortogonalny i energetycznie ortogonalny do pozostałych podprzestrzeni własnych. Jeśli graniczne naprężenie styczne przy ścinaniu przy takiej orientacji próbki jest równe k_{s1} to:

$$\eta_{f1}(\varphi = 90^\circ) = \frac{1}{k_{s1}^2}$$

- stan czystego ścinania w płaszczyźnie wyznaczonej przez oś normalną do płaszczyzny symetrii zawierającą potrójną oś symetrii oraz przez prostopadłą do niej oś tworzącą z potrójną osią symetrii kąt \varkappa_2 jest stanem własnym tensora podatności - jest tym samym ortogonalny i energetycznie ortogonalny do pozostałych podprzestrzeni własnych. Jeśli graniczne naprężenie styczne przy ścinaniu przy takiej orientacji próbki jest równe k_{s2} to:

$$\eta_{f2}(\psi = 90^\circ) = \frac{1}{k_{s2}^2}$$



Rysunek 10.1: Interpretacja dystrybutorów sztywności dla symetrii trygonalnej.

10.3 Symetria tetragonalna

Rozkład spektralny tensora podatności o symetrii tetragonalnej przedstawiony jest w szczególności w dodatku B. Przyjmujemy, że czterokrotna oś symetrii pokrywa się z osią x_3 przyjętego układu współrzędnych, zaś osie dwukrotne pokrywają się z pozostałymi osiami tego układu. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyężenia materiału dla symetrii tetragonalnej przyjmuje postać

$$\eta_{v1}(\sigma_{v1}) \cdot \sigma_{v1}^2 + \eta_{v2}(\sigma_{v2}) \cdot \sigma_{v2}^2 + \eta_f(\alpha) \cdot \tau_a^2 + \frac{\tau_b^2}{k_b^2} + \frac{\tau_{b,45}^2}{k_{b,45}^2} = 1 \quad (10.2)$$

gdzie:

$$\sigma_{v1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \varkappa + \sigma_{33} \sqrt{2} \cos \varkappa \right],$$

$$\sigma_{v2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cos \varkappa - \sigma_{33} \sqrt{2} \sin \varkappa \right],$$

$\tau_a = \sqrt{\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2}$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie zawierającej czterokrotną oś symetrii równoległe do osi czterokrotnej,

$\tau_b = \sigma_{12}$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie prostopadłej do czterokrotnej osi symetrii (na kierunkach pary osi dwukrotnych równoległych do osi przyjętego układu współrzędnych),

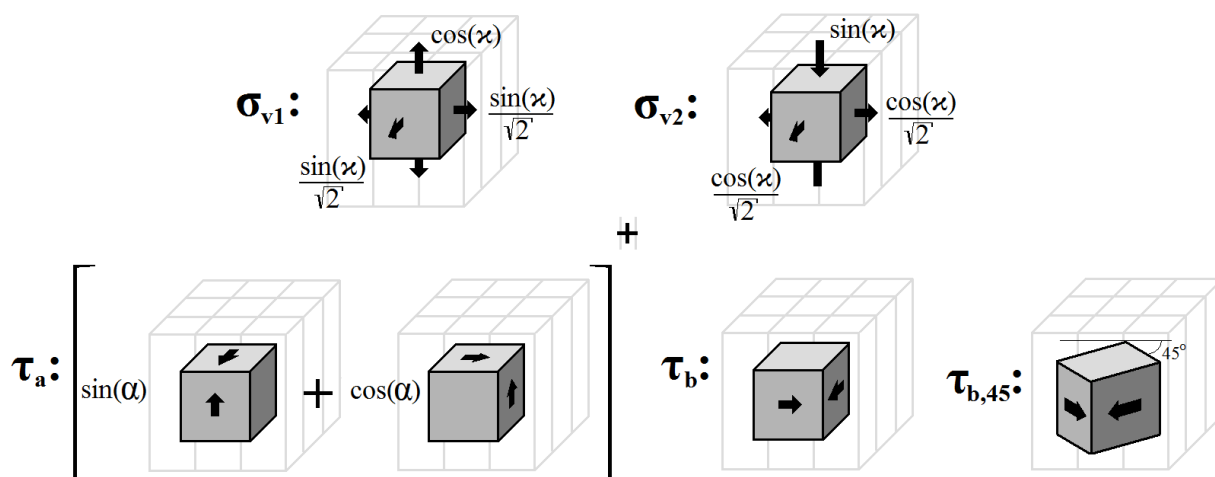
$\tau_{b,45} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie prostopadłej do czterokrotnej osi symetrii (na kierunkach drugiej pary osi dwukrotnych, równo nachylonych do osi przyjętego układu współrzędnych),

$k_b, k_{b,45}$ - graniczne wartości naprężeń odpowiednio τ_b oraz $\tau_{b,45}$,

zaś parametr \varkappa będący funkcją dystrybutora sztywności wyraża się wzorem

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{2\sqrt{2}\nu_{31}}{E_3 \left(\frac{1-\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{E_3} + \sqrt{\left(\frac{1-\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{E_3} \right)^2 + \frac{8\nu_{31}^2}{E_3^2}} \right)},$$

gdzie E_1 i E_3 to moduły Younga przy obciążeniu jednoosiowym równoległe do odpowiednio dwukrotnej (osi x_1) i czterokrotnej (osi x_3) osi symetrii materiału, zaś ν_{12} i ν_{31} to współczynniki Poissona określający przewężenie przy rozciąganiu na kierunku osi dwukrotnej x_1 mierzone na kierunku odpowiednio drugiej (prostopadłej) osi dwukrotnej x_2 oraz osi czterokrotnej x_3 .



Rysunek 10.2: Stany własne tetragonalnych tensorów sprężystości.

Dowolny element dwuwymiarowej podprzestrzeni związanej ze stanem τ_a jest złożeniem dwóch czystych ścinania w prostopadłych płaszczyznach zawierających oś czterokrotną i jedną z osi dwukrotnych. Współczynnikiem rozkładu rzutu stanu naprężenia na daną podprzestrzeń w bazie tej podprzestrzeni jest kąt α . W rozpatrywanym układzie współrzędnych rzut ten ma postać ogólną (patrz: załącznik B):

$$\sigma_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

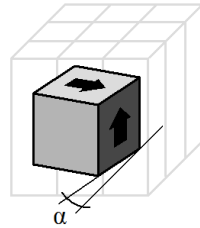
która po obrocie układu współrzędnych o kąt α wokół czterokrotnej osi symetrii przyjmuje postać typową dla czystego ścinania:

$$\sigma_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Postać wskaźnika formy ścinania $\eta_f(\alpha)$ może więc zostać oszacowana na podstawie wystarczająco dużej liczby wyników prób czystego ścinania w płaszczyźnie zawierającej czterokrotną oś symetrii, w kierunku tejże osi oraz w kierunku nachylonym pod kątem α do ustalonej osi wybranej spośród dwukrotnych osi symetrii materiału, prostopadłych do wyróżnionej osi czterokrotnej. W każdym z tych przypadków wskaźnik formy ścinania przyjmuje wartość równą:

$$\eta_f(\alpha) = \frac{1}{k_a^2(\alpha)},$$

gdzie $k_{sa}(\alpha)$ jest graniczną wartością naprężenia stycznego odpowiadającego orientacji opisanej kątem α .



Wyznaczywszy wartości k_b i $k_{b,45}$ a także postać i wartości wskaźnika η_f , pozostałe dwie funkcje η_{v1} oraz η_{v2} mogą zostać wyznaczone na podstawie wyników prób wytrzymałościowych w stanach o niezerowej składowej hydrostatycznej, np. w stanach jednoosiowego rozciągania lub ściskania. Mimo, że realizacja takich prób jest stosunkowo prosta - choć wymagane byłoby przebadanie bardzo dużego zbioru możliwych orientacji obciążenia zewnętrznego względem osi symetrii materiału - to w większości przypadków wpływ obydwu funkcji jest w tym przypadku do pewnego stopnia sprzężony, ponieważ w ogólności składowa hydrostatyczna ma niezerową miarę swojego rzutu na każdą z tych podprzestrzeni. Można jednak znaleźć taką szczególną orientacją obciążenia jednoosiowego, dla której jeden z tych rzutów rzeczywiście jest zerowy. Rozpatrujemy klasę obciążeń jednoosiowych, których kierunek leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez oś czterokrotną (x_3) oraz jedną z osi dwukrotnych (przyjmijmy, iż jest to x_1) i tworzy z osią czterokrotną kąt β :

$$\mathbf{n} = [\sin \beta, 0, \cos \beta], \quad \boldsymbol{\sigma} = k(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cong k \begin{bmatrix} \sin^2 \beta & 0 & \cos \beta \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta \sin \beta & 0 & \cos^2 \beta \end{bmatrix}$$

Od razu można zauważyć, że składowa τ_a jest (niezależnie do kąta β) czystym ścinaniem w płaszczyźnie zawierającej oś czterokrotną i dwukrotną - stąd przyjmujemy wartość argumentu wskaźnika formy ścinania $\alpha = 0$. Żądamy, aby jeden z rzutów na podprzestrzenie niedewiatowe był równy zero:

$$\sigma_{v1} = \frac{k}{\sqrt{2}} [\sin^2 \beta \sin \varkappa + \sqrt{2} \cos^2 \beta \cos \varkappa] = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctg \sqrt{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}$$

$$\sigma_{v2} = \frac{k}{\sqrt{2}} [\sin^2 \beta \cos \varkappa - \sqrt{2} \cos^2 \beta \sin \varkappa] = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctg \sqrt{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa}.$$

Ponieważ znaki funkcji tangens i cotangens są równe, zatem tylko jeden z powyższych przypadków może zajść w rzeczywistości, przy czym zależy to tylko od funkcji dystrybutora sztywności \varkappa . W stanie granicznym, gdy wielkość naprężenia jednoosiowego k osiąga wartość graniczną charakterystyczną dla tej orientacji, równą $k_{\mathbf{n}}$, wtedy możemy napisać:

- $\beta = \operatorname{arctg} \sqrt{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}{1 - \sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa} & 0 & \frac{\sqrt{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}}{1 - \sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}}{1 - \sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa} & 0 & \frac{1}{1 - \sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{v1} = 0, \quad \sigma_{v2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varkappa - \sin \varkappa},$$

$$\tau_a^2 = \frac{\sqrt{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}}{1 - \sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}, \quad \tau_b = 0, \quad \tau_{b,45} = \frac{\cos \varkappa}{\sqrt{2}(\sqrt{2} \cos \varkappa - \sin \varkappa)}$$

$$\eta_{v2}(\sigma_{v2}) = \frac{1}{\sigma_{v2}^2} \left[1 - \frac{\tau_a^2}{k_a^2(0^\circ)} - \frac{\tau_{b,45}^2}{k_{b,45}^2} \right]$$

- $\beta = \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa}{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa} & 0 & \frac{\sqrt{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa}}{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa}}{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa} & 0 & \frac{1}{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{v1} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \varkappa + \cos \varkappa}, \quad \sigma_{v2} = 0,$$

$$\tau_a^2 = \frac{\sqrt{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa}}{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa}, \quad \tau_b = 0, \quad \tau_{b,45} = \frac{\sin \varkappa}{\sqrt{2}(\sqrt{2} \sin \varkappa + \cos \varkappa)}$$

$$\eta_{v1}(\sigma_{v1}) = \frac{1}{\sigma_{v1}^2} \left[1 - \frac{\tau_a^2}{k_a^2(0^\circ)} - \frac{\tau_{b,45}^2}{k_{b,45}^2} \right]$$

W szczególnym przypadku dwie jednowymiarowe podprzestrzenie związane z naprężeniami σ_{v1} i σ_{v2} mogą utworzyć jedną dwuwymiarową podprzestrzeń własną - jest to jednak możliwe tylko wtedy, gdy współczynnik Poissona dla kierunków osi dwukrotnych przy obciążeniu jednoosiowym wzdłuż osi czterokrotnej jest równy 0. Warunek stanu granicznego przyjmuje wtedy postać:

$$\eta_t(\sigma_t, \varphi) \cdot \sigma_t^2 + \eta_f(\alpha) \cdot \tau_a^2 + \frac{\tau_b^2}{k_b^2} + \frac{\tau_{b,45}^2}{k_{b,45}^2} = 1 \quad (10.3)$$

gdzie:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + \sigma_{33}^2},$$

$$\tau_a = \sqrt{\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2}$$

$$\tau_b = \sigma_{12}$$

$$\tau_{b,45} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$$

$k_b, k_{b,45}$ - graniczne wartości naprężeń odpowiednio τ_b oraz $\tau_{b,45}$.

10.4 Symetria cylindryczna (układ heksagonalny)

Rozkład spektralny tensora podatności o symetrii cylindrycznej przedstawiony jest w szczególności w dodatku B. Przyjmujemy, że wyróżniona oś symetrii materiału pokrywa się z osią x_3 przyjętego układu współrzędnych. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyęczenia materiału dla symetrii cylindrycznej przyjmuje postać

$$\eta_{v1}(\sigma_{v1}) \cdot \sigma_{v1}^2 + \eta_{v2}(\sigma_{v2}) \cdot \sigma_{v2}^2 + \frac{\tau_a^2}{k_a^2} + \frac{\tau_b^2}{k_b^2} = 1, \quad (10.4)$$

gdzie:

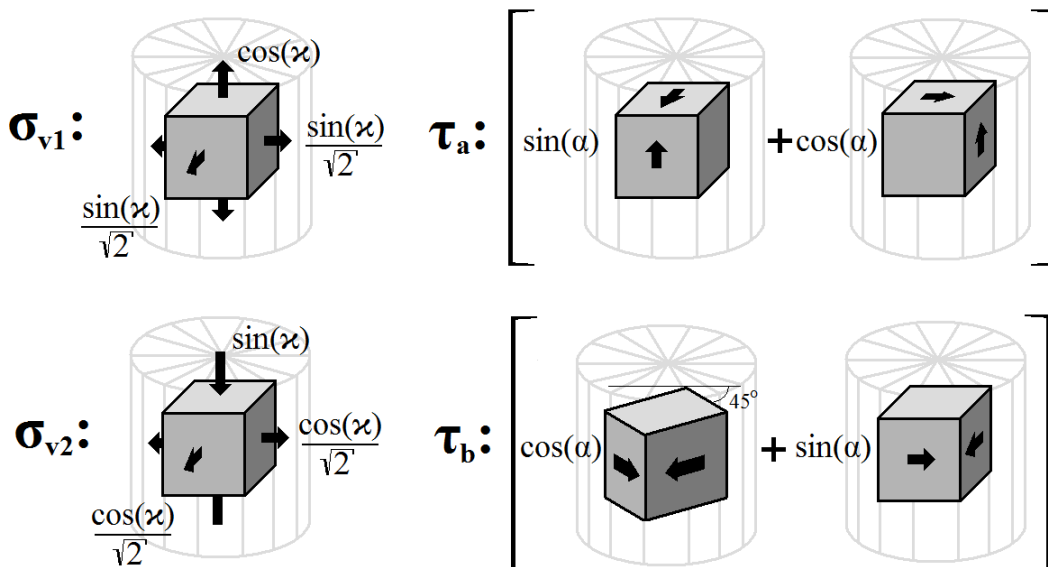
$$\sigma_{v1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \varkappa + \sigma_{33} \sqrt{2} \cos \varkappa \right],$$

$$\sigma_{v2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cos \varkappa - \sigma_{33} \sqrt{2} \sin \varkappa \right],$$

$\tau_a = \sqrt{\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2}$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie zawierającej wyróżnioną oś symetrii materiału równoległe do tej osi

$\tau_b = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie prostopadłej do wyróżnionej osi symetrii materiału,

k_a, k_b - graniczne wartości naprężeń odpowiednio τ_a i τ_b .



Rysunek 10.3: Stany własne tensorów sprężystości o symetrii cylindrycznej.

Parametr \varkappa będący funkcją dystrybutora sztywności wyraża się wzorem

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{2\sqrt{2}\nu_{\parallel}}{E_{\parallel} \left(\frac{1-\nu_{\perp}}{E_{\perp}} - \frac{1}{E_{\parallel}} + \sqrt{\left(\frac{1-\nu_{\perp}}{E_{\perp}} - \frac{1}{E_{\parallel}} \right)^2 + \frac{8\nu_{\parallel}^2}{E_{\parallel}^2}} \right)},$$

gdzie E_{\perp} i E_{\parallel} to moduły Younga przy obciążeniu jednoosiowym odpowiednio prostopadle i równoległe do wyróżnionej osi symetrii materiału, zaś ν_{\perp} i ν_{\parallel} to współczynniki Poissona określający zwięźenie na kierunku prostopadłym do wyróżnionej osi symetrii materiału przy rozciąganiu odpowiednio prostopadle i równoległe do tej osi.

Formalnie obydwie podprzestrzenie czystych ścinania (w płaszczyznach zawierających wyróżnioną oś symetrii i w płaszczyźnie prostopadłej do niej) są podprzestrzeniami dwuwymiarowymi, stąd parametr η określający ich udział w całkowitej mierze wyężenia powinien być w obydwu przypadkach wskaźnikiem formy ścinania zależnym od jednego bezwymiarowego parametru określającego postać tj. orientację kierunków ścinania. Jednakże z uwagi na osiową symetrię zagadnienia wszystkie stany należące do każdej z tych podprzestrzeni muszą być sobie równoważne (z punktu widzenia rozpatrywanej hipotezy wyężenia) - w tym sensie podprzestrzenie te mogą być traktowane jako jednowymiarowe a odpowiadające im parametry skalujące są - zgodnie z poczynionymi założeniami - stałymi.

Jak można zauważyć, całe zagadnienie dla symetrii cylindrycznej wykazuje wyraźne podobieństwo do zagadnienia symetrii tetragonalnej omówionego w poprzednim rozdziale - szczególnie dotyczy to wpływu naprężeń niedewiatorowych. Analogicznie, jak było to w przypadku symetrii tetragonalnej, można wyznaczyć taką orientację obciążenia jednoosiowego (kąt β zawarty między kierunkiem obciążenia a wyróżnioną osią symetrii materiału), dla której wartość jednej z funkcji wpływu naprężenia niedewiatorowego może być określona bezpośrednio na podstawie tego testu, niezależnie od wpływu drugiego z naprężeń niedewiatorowych.

- $\beta = \operatorname{arctg} \sqrt{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}{1-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa} & 0 & \frac{\sqrt{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}}{1-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}}{1-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa} & 0 & \frac{1}{1-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{v1} = 0, \quad \sigma_{v2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varkappa - \sin \varkappa}, \quad \tau_a^2 = \frac{\sqrt{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}}{1 - \sqrt{2} \operatorname{ctg} \varkappa}, \quad \tau_b^2 = \frac{\cos^2 \varkappa}{2(\sqrt{2} \cos \varkappa - \sin \varkappa)^2}$$

$$\eta_{v2}(\sigma_{v2}) = \frac{1}{\sigma_{v2}^2} \left[1 - \frac{\tau_a^2}{k_a^2} - \frac{\tau_b^2}{k_b^2} \right]$$

- $\beta = \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varkappa}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}\operatorname{tg}\varkappa}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\varkappa} & 0 & \frac{\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varkappa}}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\varkappa} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varkappa}}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\varkappa} & 0 & \frac{1}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\varkappa} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{v1} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\varkappa + \cos\varkappa}, \quad \sigma_{v2} = 0, \quad \tau_a^2 = \frac{\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varkappa}}{1 + \sqrt{2}\operatorname{tg}\varkappa}, \quad \tau_b^2 = \frac{\sin^2\varkappa}{2(\sqrt{2}\sin\varkappa + \cos\varkappa)^2}$$

$$\eta_{v1}(\sigma_{v1}) = \frac{1}{\sigma_{v1}^2} \left[1 - \frac{\tau_a^2}{k_a^2} - \frac{\tau_b^2}{k_b^2} \right]$$

Tak samo jak poprzednio, zajść może co najwyżej jeden z powyższych przypadków. Zasadniczą różnicą w stosunku do zagadnienia tetragonalnego, będącą kolejną konsekwencją wysokiej symetrii materiału jest fakt, że rozważania powyższe są o tyle ogólniejsze od analogicznych wyników z przypadku symetrii tetragonalnej, że nie wymaga się aby kierunek obciążenia jednoosiowego leżał w jakiejś szczególnej płaszczyźnie symetrii - tutaj może to być dowolny kierunek tworzący z wyróżnioną osią symetrii kąt β .

W szczególnym przypadku dwie jednowymiarowe podprzestrzenie związane z naprężeniami σ_{v1} i σ_{v2} mogą utworzyć jedną dwuwymiarową podprzestrzeń własną - jest to jednak możliwe tylko wtedy, gdy współczynnik Poissona dla każdego kierunku prostopadłego do wyróżnionej osi symetrii przy obciążeniu jednoosiowym wzdłuż tej osi jest równy 0. Warunek stanu granicznego przyjmuje wtedy postać:

$$\eta_c(\sigma_c, \varphi) \cdot \sigma_c^2 + \frac{\tau_a^2}{k_a^2} + \frac{\tau_b^2}{k_b^2} = 1, \quad (10.5)$$

gdzie:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + \sigma_{33}^2},$$

$$\tau_a = \sqrt{\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2}$$

$$\tau_b = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

k_a, k_b - graniczne wartości naprężeń odpowiednio τ_a i τ_b ,

10.5 Symetria kubiczna (układ regularny)

Rozkład spektralny tensora podatności o symetrii kubicznej przedstawiony jest w szczegółach w dodatku B. Przyjmujemy, że czterokrotne osie symetrii pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wycięcia materiału dla symetrii kubicznej przyjmuje postać

$$\eta_v(p) \cdot p^2 + \eta_{f1}(\theta) \cdot q_1^2 + \eta_{f2}(\varphi, \psi) \cdot q_2^2 = 1 \quad (10.6)$$

gdzie:

$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ - naprężenie hydrostatyczne,

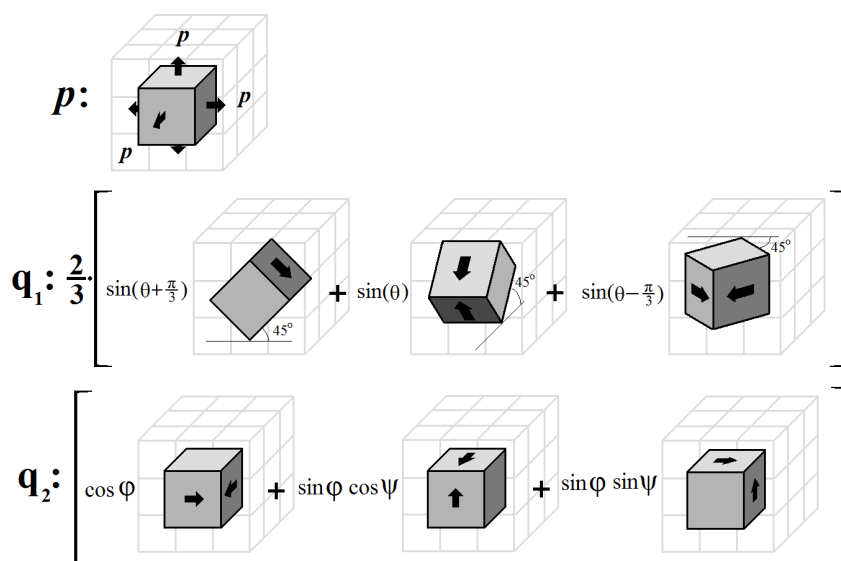
$q_1 = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2]}$ - skośne naprężenie dewiatorowe,

$q_2 = \sqrt{\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2}$ - wzdłużne naprężenie dewiatorowe,

zaś bezwymiarowe argumenty wskaźników form ścinania η_{f1} i η_{f2} spełniają zależności:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3(\boldsymbol{\sigma}_2)}{J_2^{(3/2)}(\boldsymbol{\sigma}_2)} \right]$$

$$\sin 2\psi \cdot [\cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi)] = \frac{J_3(\boldsymbol{\sigma}_3)}{J_2^{(3/2)}(\boldsymbol{\sigma}_3)}$$



Rysunek 10.4: Stany własne tensorów sprężystości o symetrii kubicznej.

Funkcje wpływu naprężenia hydrostatycznego η_v oraz dwa wskaźniki form ścinania η_{f1} oraz η_{f2} należy wyznaczyć na drodze eksperymentalnej. Stany naprężenia powstające w czasie typowych prób wytrzymałościowych, tj. prób jednoosiowego rozciągania lub ściskania lub prób ścinania przy różnych orientacjach obciążenia względem osi symetrii wewnętrznej struktury materiału próbki, należą w ogólności do co najmniej dwóch różnych podprzestrzeni rozpatrywanego rozkładu. Z uwagi na obecność w stanie jednoosiowym składowej dewiatorowej, nie istnieje taka orientacja obciążenia jednoosiowego, dla której dałoby się określić wartość funkcji wpływu η_v bez konieczności jednoczesnego wyznaczenia wartości bądź η_{f1} bądź η_{f2} . Istnieją jednakże takie orientacje obciążenia jednoosiowego, dla których wpływ przynajmniej jednego z naprężeń dewiatorowych jest równy zero. Przykładowo, wpływ skośnego naprężenia dewiatorowego zanika, jeśli naprężenie rozciągające przyłożone jest na kierunku przekątnej (przestrzennej) sześcienniej komórki elementarnej układu regularnego $[1, 1, 1]$:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = k(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cong \frac{k}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$p = \frac{k}{3}, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = \frac{k}{\sqrt{3}}$$

Ponadto oczywiste jest, że dla czystego ścinania w płaszczyznach symetrii, na kierunkach czterokrotnych osi symetrii

$$\boldsymbol{\sigma}_3(\varphi = 0^\circ) = -\boldsymbol{\sigma}_3(\varphi = 180^\circ) = \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3(\varphi = 90^\circ, \psi = 0^\circ) = -\boldsymbol{\sigma}_3(\varphi = 90^\circ, \psi = 180^\circ) = \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3(\varphi = 90^\circ, \psi = 90^\circ) = -\boldsymbol{\sigma}_3(\varphi = 90^\circ, \psi = 270^\circ) = \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

wskaźniki formy wzdłużnego naprężenia dewiatorowego dla odpowiednich wartości parametrów φ i ψ muszą być równe

$$\eta_{f2} = \frac{1}{k_{s2}^2}$$

gdzie k_{s2} jest granicznym naprężeniem stycznym przy ścinaniu w płaszczyznach symetrii, na kierunkach czterokrotnych osi symetrii, które może być wyznaczone w prostych próbach wytrzymałościowych.

Zmienność parametru η_{f2} dla pewnych ustalonych wartości jednej z jego zmiennych niezależnych zbadać można w sposób analogiczny jak dla wskaźnika ścinania w przypadku symetrii tetragonalnej. Przyjmując:

$$\sigma_3(\varphi, \psi = 0^\circ) = \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ \cos \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3(\varphi = 90^\circ, \psi) = \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \end{bmatrix}$$

można zauważyć, że obydwa z powyższych stanów, są stanami czystego ścinania w płaszczyźnie prostopadłej do jednej z czterokrotnych osi symetrii i nachylonej pod kątem odpowiednio φ i ψ do pozostałych dwóch takich osi, zatem:

$$\eta_{f2}(\varphi = \alpha, \psi = 0^\circ) = \eta_{f2}(\varphi = 90^\circ, \psi = \alpha) = \frac{1}{k_{s2,a}^2(\alpha)},$$

gdzie α jest kątem zawartym między płaszczyzną ścinania a płaszczyzną zawartą między dwiema czterokrotnymi osiami symetrii, zaś $k_{s2,a}$ jest zmierzoną graniczną wartością naprężenia ścinającego.

Dla wskaźników formy skośnego naprężenia dewiatorowego mamy

$$\sigma_2(\theta = 30^\circ) = -\sigma_2(\theta = 210^\circ) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2(\theta = 90^\circ) = -\sigma_2(\theta = 270^\circ) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2(\theta = 150^\circ) = -\sigma_2(\theta = 330^\circ) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Są to stany czystego ścinania w płaszczyznach prostopadłych do jednej z czterokrotnych osi symetrii materiału, w kierunkach równo nachylonych do dwóch pozostałych. Ponieważ stan ten w całości należy do drugiej podprzestrzeni własnej, a graniczna wartość naprężenia stycznego k_{s1} w tym przypadku jest stosunkowo prosta do określenia na podstawie testu czystego ścinania przy odpowiedniej orientacji próbki, stąd wyznaczyć można wartości wskaźnika formy ścinania dla odpowiednich wartości parametry θ :

$$\eta_{f1}(30^\circ + n \cdot 60^\circ) = \frac{1}{k_{s1}^2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Orientacje obciążenia jednoosiowego, dla której rzuty tego stanu naprężenia na podprzestrzenie dewiatorowe odpowiadają tym wartościom parametrów θ , φ oraz ψ , dla których znane są wartości wskaźników η_{f1} i η_{f2} umożliwiają wyznaczenie wartości funkcji wpływu η_v . Jedną z możliwych klas orientacji charakteryzujących się tą cechą, są kierunki obciążenia jednoosiowego leżące w płaszczyznach prostopadłych do czterokrotnych osi symetrii. Przyjmując, że kierunek ten tworzy z jedną z dwóch osi wyznaczających tę płaszczyznę kąt α , w stanie granicznym możemy napisać:

$$\mathbf{n} = [\cos \alpha, \sin \alpha, 0] \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = k_\alpha (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cong \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \frac{k_\alpha}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p = \frac{k_\alpha}{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{k_\alpha}{3} \begin{bmatrix} 3 \cos^2 \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \sin^2 \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad q_1^2 = \frac{k_\alpha^2}{3} (3 \cos^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3 = k_\alpha \begin{bmatrix} 0 & \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_2^2 = k_\alpha^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

Argumenty wskaźników formy ścinania:

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{2}(9 \cos 4\alpha + 7)}{(3 \cos 4\alpha + 5)^{(3/2)}}$$

$$\varphi = 0^\circ, \quad \psi \in (0, 2\pi)$$

Wartość funkcji wpływu dla funkcji wpływu $\eta_v \left(p = \frac{k_\alpha}{3} \right)$ (przy czym k_α jest granicznym naprężeniem przy rozciąganiu na kierunku \mathbf{n} tj. w płaszczyźnie symetrii pod kątem α do jednej z osi symetrii leżących w tej płaszczyźnie - jest ono w ogólności różne dla różnych wartości kąta α) można wyznaczyć bezpośrednio z próby rozciągania lub ściskania, jeśli tylko parametr θ przyjmie jedną z wartości, dla których znana jest wartość $\eta_{f1}(\theta)$, tj.:

$$\theta = 30^\circ + n \cdot 60^\circ, (n \in \mathbb{Z}), \quad \Rightarrow \quad \cos 3\theta = 0$$

stąd otrzymujemy:

$$\frac{\sqrt{2}(9 \cos 4\alpha + 7)}{(3 \cos 4\alpha + 5)^{(3/2)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tilde{\alpha} = \frac{1}{4} \arccos \left(-\frac{7}{9} \right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35,264^\circ$$

wtedy:

$$p = \frac{k_\alpha}{3}, \quad q_1^2 = \frac{k_\alpha^2}{9}, \quad q_2^2 = \frac{2k_\alpha^2}{9}$$

$$\eta_{f1} = \frac{1}{k_{s1}^2}, \quad \eta_{f2} = \frac{1}{k_{s2}^2}$$

$$\eta_v \left(\frac{k_\alpha}{3} \right) = \frac{1}{p^2} [1 - \eta_{f1} q_1^2 - \eta_{f2} q_2^2] = \frac{9}{k_\alpha^2} - \frac{1}{k_{s1}^2} - \frac{2}{k_{s2}^2}$$

10.6 Izotropia

Rozkład spektralny izotropowego tensora podatności przedstawiony jest w szczególach w dodatku B. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyężenia materiału izotropowego można zapisać jako

$$\eta_v(p) \cdot p^2 + \eta_f(\theta) \cdot q^2 = 1 \quad (10.7)$$

lub w jeszcze ogólniejszej postaci

$$\eta_p(I_1) + \eta_q(J_2, J_3) - C_0 = 0, \quad (10.8)$$

gdzie:

$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ - napężenie hydrostatyczne

$q = \sqrt{\frac{1}{3}[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]}$ - napężenie dewiatorowe

$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{(3/2)}} \right]$ - kąt Lodego

C_0 - stały parametr materiałowy

Funkcja wpływu $\eta_p(p)$ opisuje zależność wyężenia materiału od napężenia hydrostatycznego, podczas gdy wskaźnik formy ścinania $\eta_q(J_2, J_3)$ może być w węższym sensie rozpatrywany jako funkcja opisująca zależność wyężenia od kąta Lodego $\eta_f(J_2, J_3) = \eta_f(\theta)$. Funkcja kąta Lodego powinna być funkcją okresową o okresie równym 120° , stąd dość częste jest rozpatrywanie funkcji kąta Lodego $\eta_f(\theta)$ w postaci $\eta_f(y)$, gdzie $y = \cos 3\theta$.

W literaturze można znaleźć bardzo dużą ilość różnego rodzaju propozycji funkcji opisujących wpływ napężenia hydrostatycznego oraz kąta Lodego, które potencjalnie mogą zostać wykorzystane jako funkcje wpływu bądź wskaźniki formy ścinania. Przykładowo:

Funkcje wpływu napężenia hydrostatycznego:

- dwuparametrowa funkcja kwadratowa Burzyńskiego [16]

$$\eta_p(p) = \left(\omega + \frac{\delta}{p} \right) p^2,$$

- pięcioparametrowa funkcja Bigoniego i Piccolroaza [9]

$$\eta_p(p) = \begin{cases} -\frac{2K}{p^2} \cdot M p_c \sqrt{(F - F^m) [2(1 - \alpha)F + \alpha]} & \text{jeżeli } F = \frac{-p+c}{p_c+c} \in [0, 1] \\ +\infty & \text{jeżeli } F = \frac{-p+c}{p_c+c} \notin [0, 1] \end{cases}.$$

Wskaźniki formy ścinania:

- jednoparametrowa funkcja trygonometryczna Lexcellenta i in. [61]

$$\eta_f(y) = \cos \left[\frac{1}{3} \arccos [1 - \alpha(1 - y)] \right],$$

- dwuparametrowa funkcja wykładnicza Ranieckiego i Mroza [81]

$$\eta_f(y) = 1 + \alpha \left[1 - e^{-\beta(1+y)} \right],$$
- dwuparametrowa funkcja potęgowa Ranieckiego i Mroza [81]

$$\eta_f(y) = [1 + \alpha y]^\beta.$$
- dwuparametrowa funkcja trygonometryczna Podgórskiego [80]

$$\eta_f(y) = \frac{1}{\cos(30^\circ - \beta)} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(\alpha \cdot y) - \beta \right]$$
- Zestawienie zbiorcze różnych propozycji funkcji opisujących zależność wyteżenia od kąta Lodego można znaleźć w [4].

Proponowane kryterium stanu granicznego dla materiałów izotropowych (10.8) może być uważane za uogólnienie dużej części szeroko stosowanych kryteriów. W szczególności - z uwagi na jego energetyczną interpretację - uważać je można za uogólnienie kryterium Burzyńskiego [16] uwzględniające wpływ kąta Lodego [78]. Redukcja wzoru (10.8) do przypadków prostych kombinacji potęgowych niezmienników tensora naprężenia (np. Huber[49]-Mises[66], Drucker-Prager[27], Drucker [26], Spitzig-Richmond [95], Bresler-Pister [13], Iyer-Lissenden [50]) jest trywialna. W równie prosty sposób - dobierając odpowiednie funkcje - można sprowadzić wzór (10.8) do propozycji Burzyńskiego [16], Podgórskiego [80], Lexcellenta [61], Ranieckiego i Mroza [81] itd. Interesującym zestawieniem mogą być tutaj wyniki analizy przeprowadzonej przez Podgórskiego. Przyjmując funkcję wpływu naprężenia hydrostatycznego wg Burzyńskiego z $\omega = 0$ oraz wykorzystując wskaźnik formy ścinania wg propozycji Podgórskiego po przyjęciu takich wartości parametrów tej funkcji, jak wskazano to w [80], można sprowadzić ogólny wzór (10.8) do wybranego klasycznego warunku granicznego:

$$\begin{aligned} \eta_p(I_1) + \eta_q(J_2, J_3) - C_0 &= 0 \\ \eta_p(I_1) &= \frac{C_1}{3} \cdot I_1 \\ \eta_q(J_2, J_3) &= \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \cdot \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\alpha \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{(3/2)}} \right) - \beta \right] \end{aligned}$$

Tablica 1: Wartości parametrów funkcji η_p , η_q , pozwalających zredukować wzór ogólny (10.8) do wybranych kryteriów stanu granicznego dla materiałów izotropowych [80].

Kryterium	C_0	C_1	α	β
Huber[49]-Mises[66] $J_2 - k^2 = 0$	$\sqrt{\frac{2}{3}}k$	0	0	$\frac{\pi}{6}$
Coulomb[21]-Tresca[108]-Guest[37] $ \tau_{max} - k = 0$	$\sqrt{\frac{2}{3}}k$	0	1	$\frac{\pi}{6}$
Drucker-Prager [27] $\sqrt{J_2} - a + bI_1 = 0$	$\sqrt{\frac{2}{3}}a$	$\sqrt{6}b$	0	$\frac{\pi}{6}$
Coulomb-Mohr $ \tau = c - \text{tg}\phi\sigma$	$\frac{\sqrt{2}c \cos \phi}{\sqrt{3+\sin^2 \phi}}$	$\frac{\sqrt{2} \sin \phi}{\sqrt{3+\sin^2 \phi}}$	1	$\arctg\left(\sqrt{3}\frac{1-\sin \phi}{3+\sin \phi}\right)$
Lade-Duncan [59] $I_1^2 - \varkappa I_3$	0	$\sqrt{\frac{\varkappa-27}{2\varkappa}}$	$\sqrt{\frac{\varkappa-27}{2\varkappa}}$	0
Matsuoka [63] $\frac{I_1 I_2}{I_3} = 9(K^2 + 1)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2(1+\frac{2}{3K^2})}}$	$\frac{1+\frac{1}{K^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{3K^2}}}$	0

Przypadek izotropii był przedmiotem rozważań opublikowanych w [69], [102] a także [78] oraz [75].

10.7 Materiały objętościowo izotropowe

Materiały objętościowo izotropowe, czy też materiały Burzyńskiego tj. takie, dla których składowe ich tensorów sprężystości spełniają układ warunków (7.3), stanowią szczególną klasę materiałów, dla których stan naprężenia hydrostatycznego jest stanem własnym tensora podatności (tym samym dylatacja jest zawsze ściśle proporcjonalna do naprężenia hydrostatycznego - współczynnikiem proporcjonalności jest odpowiedni moduł Kelvina, moduł sztywności objętościowej), co z kolei prowadzi w konsekwencji do rozkładu gęstości energii odkształcenia sprężystego na część związaną z odkształceniem objętościowym i odkształceniem postaciowym, który to rozkład jest w ogólności możliwy jedynie dla symetrii kubicznej oraz dla izotropii.

Wbrew przekonaniu samego Burzyńskiego, nie należy spodziewać się, aby objętościowa izotropia była w ogólności cechą każdego materiału sprężystego. Z drugiej strony równie błędnym przypuszczeniem byłoby przyjąć, że zjawisko objętościowej izotropii nie może w ogóle dotyczyć rzeczywistych materiałów o symetrii niższej niż kubiczna. W szczególny sposób kwestia ta dotyczy materiałów kompozytowych czy też innych materiałów, których wewnętrzna struktura, wytwarzana sztucznie w świadomym procesie jej kształtowania przez człowieka, projektowana jest uprzednio w taki sposób, aby materiał wykazywał pewne pożądane cechy sprężyste i wytrzymałościowe. Czynniki podlegającymi wyznaczeniu na etapie projektowania może być sama geometria komórki elementarnej, geometria i orientacja fazy wtrąconej kompozytu, stosunki sztywności materiałów różnych faz itp. Należy sądzić, że wytworzenie materiału objętościowo izotropowego nie jest istotnie trudniejsze lub mniej prawdopodobne od wytworzenia materiału o innych cechach sprężystych. Wydaje się również prawdopodobne,

że istnieć może nawet naturalna anizotropowa - inna niż regularna - struktura krystaliczna, która dzięki odpowiedniemu kształtowi komórki elementarnej i odpowiednim oddziaływaniom międzycząsteczkowym makroskopowo może wykazywać cechy silnie zbliżone do objętościowej izotropii.

Nie jest więc bezzasadne rozpatrywać tę szczególną klasę materiałów, tym bardziej że całe zagadnienie - tj. specyfikacja kryterium stanu granicznego wyprowadzonego z prezentowanej w niniejszej pracy energetycznej hipotezy wytężenia materiału - upraszcza się znakomicie, tak w samej swej formie matematycznej, jak i w jej interpretacji fizycznej. Nie da się bowiem ukryć, że wprowadzone w rozdziale poprzednim stany własne tensorów sprężystości o niskich symetriach nie dają się łatwo interpretować w kategoriach bądź to stanów jednoosiowych bądź stanu hydrostatycznego czy też stanów czystego ścinania - stąd część z nich nie została nawet scharakteryzowana¹⁹. Podobnie rzecz ma się z interpretacją fizyczną (w szczególności: geometryczną) dystrybutorów sztywności. W przypadku materiałów objętościowo izotropowych niektóre z funkcji dystrybutorów sztywności przyjmują szczególne wartości, dla których postać stanów własnych ulega uproszczeniu - jeden ze stanów musi być przecież stanem hydrostatycznym, pozostałe zaś - jako ortogonalne do niego - dają się łatwo interpretować jako stany czystego ścinania bądź ich kombinacje (złożenia).

Istotnym ograniczeniem w specyfikacjach kryterium granicznego przedstawionych w powyższych rozdziałach była nieznamość postaci funkcji wpływu i wskaźników formy naprężenia. Także i ta niedogodność znika (przynajmniej częściowo) przy założeniu objętościowej izotropii - w większości przypadków podprzestrzenie własne ortogonalne do podprzestrzeni stanów hydrostatycznych mają niski wymiar, przez co odpowiadające im wskaźniki form ścinania są często stałymi, które można wyznaczyć bezpośrednio na drodze doświadczalnej. W poniższych rozważaniach pominiemy przypadki, w których występują zmienne (zależne od parametrów rozkładu w wielowymiarowej podprzestrzeni dewiatorów) wskaźniki formy ścinania²⁰ - wyjątkiem będzie tu przypadek symetrii tetragonalnej, dla której metodyka wyznaczania postaci funkcyjnej wskaźnika η jest jakościowo podobna a jednocześnie całkowicie niezależna od metod wyznaczania funkcji wpływu naprężenia hydrostatycznego. Możemy zatem przyjąć, że wskaźniki form ścinania są znane. Jedyłą funkcją podlegającą wyznaczeniu jest tu tylko funkcja wpływu naprężenia hydrostatycznego. Jednakże, z uwagi na obecności w stanie jednoosiowym składowej hydrostatycznej oraz znajomości wszystkich pozostałych parametrów, wartości funkcji tej mogą być w prosty sposób wyznaczone na podstawie prób rozciągania i ściskania. Ponieważ wytrzymałość na rozciąganie lub ściskanie na różnych kierunkach (które nie są sobie równoważne z punktu widzenia symetrii układu) będzie w ogół-

¹⁹Z tego samego względu w dodatku B odpowiadające stanom tym podprzestrzenie własne zostały dość enigmatycznie nazwane np. „podprzestrzeniami stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej”, co jest określeniem o tyle niefortunnym o ile zależnym od przyjętego układu współrzędnych. Z drugiej strony, w ustalonym układzie, którego osie pokrywają się z osiami symetrii materiału (a taki zawsze jest przyjmowany), definicja ta niesie ze sobą wystarczającą informację dla ogólnego scharakteryzowania tych stanów.

²⁰Pomijając mało prawdopodobne szczególne przypadki zerowych współczynników Poissona przy rozciąganiu wzdłuż osi symetrii o krotności większej niż 2 (symetria trygonalna, tetragonalna, cylindryczna) oraz teoretycznie chyba tylko możliwy przypadek ortotropii o wszystkich współczynnikach Poissona równych 0, w opracowaniu pominięto jedynie najogólniejsze przypadki najniższych symetrii (pełna anizotropia, symetria monokliniczna) oraz symetrię trygonalną z uwagi na występowanie w tym przypadku aż trzech nieznanymi i trudnych do wyznaczenia funkcji stanu naprężenia

ności różna, a argument funkcji wpływu, dla którego wyznaczamy jej wartość, jest do tej wytrzymałości proporcjonalny, zatem dostatecznie duża liczba przebadanych kierunków obciążenia może pozwolić na wyznaczenie funkcji wpływu z wystarczającą dokładnością. Autor ma pełną świadomość trudności i kosztów zarówno samego wykonania stosownych próbek, jak i przeprowadzenia samych eksperymentów oraz możliwego dużego rozrzutu wyników. Jednak nawet stosunkowo nieduża liczba wartości uśrednionych może okazać się wystarczająca by stanowić podstawę wyznaczenia poszukiwanych funkcji bądź to na drodze aproksymacji, bądź interpolacji, a przynajmniej wskazać mogłaby ogólny charakter przebiegu jej zmienności.

10.7.1 Ortotropia objętościowo izotropowa

Rozkład spektralny objętościowo izotropowego ortotropowego tensora podatności przedstawiony jest w szczególach w dodatku B. Przyjmujemy, że dwukrotne osie symetrii pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyteżenia materiału przyjmuje postać

$$\eta_v(p) \cdot p^2 + \frac{\sigma_{f1}^2}{k_{f1}^2} + \frac{\sigma_{f2}^2}{k_{f2}^2} + \frac{\tau_1^2}{k_{s1}^2} + \frac{\tau_2^2}{k_{s2}^2} + \frac{\tau_3^2}{k_{s3}^2} = 1 \quad (10.9)$$

gdzie:

$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ - naprężenie hydrostatyczne,

$$\sigma_{f1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\sigma_{11}(\sin \varkappa - \sqrt{3} \cos \varkappa) + \sigma_{22}(\sin \varkappa + \sqrt{3} \cos \varkappa) - 2\sigma_{33} \sin \varkappa \right],$$

$$\sigma_{f2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\sigma_{11}(\cos \varkappa + \sqrt{3} \sin \varkappa) + \sigma_{22}(\cos \varkappa - \sqrt{3} \sin \varkappa) - 2\sigma_{33} \cos \varkappa \right],$$

$$\tau_1 = \sigma_{23}, \quad \tau_2 = \sigma_{31}, \quad \tau_3 = \sigma_{12},$$

$k_{f1}, k_{f2}, k_{s1}, k_{s2}, k_{s3}$ - graniczne wartości naprężeń odpowiednio $\sigma_{f1}, \sigma_{f2}, \tau_1, \tau_2, \tau_3$,

zaś parametr \varkappa , będący funkcją dystrybutora sztywności, wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{\sqrt{3}(\nu_{31} - \nu_{32})}{E_3 \left(\frac{\nu_{31} + \nu_{32}}{E_3} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} + 2\sqrt{\frac{\nu_{23}(\nu_{23} - \nu_{21})}{E_2^2} + \frac{\nu_{31}(\nu_{31} - \nu_{32})}{E_3^2} + \frac{\nu_{12}(\nu_{12} - \nu_{13})}{E_1^2}} \right)}$$

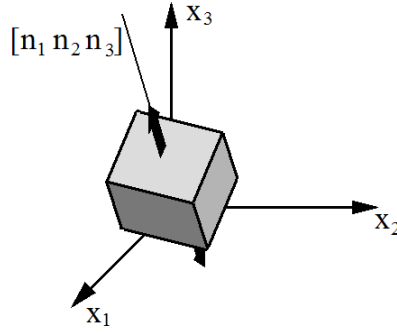
gdzie E_i oznacza moduł Younga przy obciążeniu jednoosiowym na kierunku osi x_i , zaś ν_{ij} oznacza współczynnik Poissona określający zwięźenie na kierunku osi x_j przy rozciąganiu wzdłuż osi x_i (osie $x_i (i = 1, 2, 3)$ pokrywają się z osiami symetrii materiału ortotropowego).

Ponieważ funkcja wpływu naprężenia hydrostatycznego jest jedynym nieznanym parametrem kryterium (10.9), to z uwagi na fakt, że jednoosiowe stany naprężenia mają niezerową składową hydrostatyczną, postać funkcji wpływu można wyznaczyć na podstawie wyników doświadczeń w stanach jednoosiowych przeprowadzonych dla różnych orientacji obciążenia względem osi symetrii materiału. Jednoosiowy stan naprężenia o mierze naprężenia normalnego równej k w kierunku zadanym (w przyjętym układzie współrzędnych) wersorem $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$ reprezentuje tensor naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = k(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cong k \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ & n_2^2 & n_2 n_3 \\ \text{sym} & & n_3^2 \end{bmatrix}.$$

W stanie granicznym, gdy naprężenie normalne osiąga graniczną wartość $k_{\mathbf{n}}$ (charakterystyczną dla kierunku zadanego wektorem \mathbf{n}) warunek graniczny (10.9) można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \eta_v \left(\frac{k_{\mathbf{n}}}{3} \right) = 9 \left[\frac{1}{k_{\mathbf{n}}^2} - \frac{1}{6k_{f1}^2} \left(n_1^2 (\sin \varkappa - \sqrt{3} \cos \varkappa) + n_2^2 (\sin \varkappa + \sqrt{3} \cos \varkappa) - 2n_3^2 \sin \varkappa \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{6k_{f2}^2} \left(n_1^2 (\cos \varkappa + \sqrt{3} \sin \varkappa) + n_2^2 (\cos \varkappa - \sqrt{3} \sin \varkappa) - 2n_3^2 \cos \varkappa \right)^2 - \frac{n_2^2 n_3^2}{k_{s1}^2} - \frac{n_3^2 n_1^2}{k_{s2}^2} - \frac{n_1^2 n_2^2}{k_{s3}^2} \right] \end{aligned} \quad (10.10)$$



10.7.2 Symetria tetragonalna objętościowo izotropowa

Rozkład spektralny objętościowo izotropowego tensora podatności o symetrii tetragonalnej przedstawiony jest w szczegółach w dodatku B. Przyjmujemy, że dwukrotne osie symetrii pokrywają się z osiami x_1 i x_2 przyjętego układu współrzędnych, zaś czterokrotna oś symetrii pokrywa się z osią x_3 . Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyczerpania materiału przyjmuje postać

$$\eta_v(p) \cdot p^2 + \eta_f(\alpha) \cdot \tau_a^2 + \frac{\tau_{a,45}^2}{k_{a,45}^2} + \frac{\tau_b^2}{k_b^2} + \frac{\tau_{b,45}^2}{k_{b,45}^2} = 1 \quad (10.11)$$

gdzie:

$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ - naprężenie hydrostatyczne,

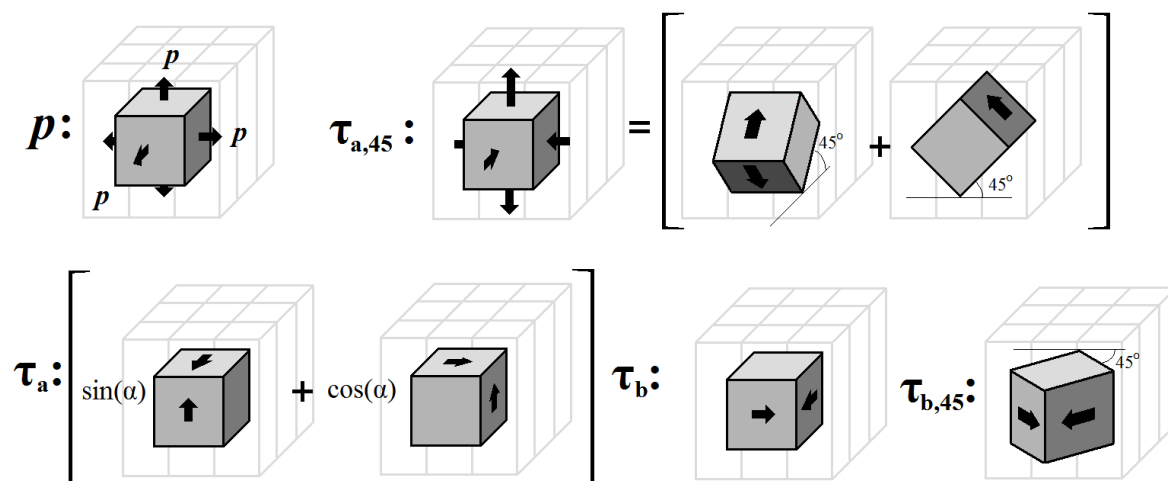
$\tau_a = \sqrt{\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2}$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie zawierającej czterokrotną oś symetrii, równoległe do tej osi,

$\tau_b = \sigma_{12}$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie prostopadłej do czterokrotnej osi symetrii (na kierunkach pary osi dwukrotnych równoległych do osi przyjętego układu współrzędnych),

$\tau_{a,45} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33})$ - deformacja tetragonalna - złożenie dwóch nieortogonalnych czystych ścinania w prostopadłych płaszczyznach zawierających czterokrotną oś symetrii, w kierunkach pod kątem 45° do tej osi,

$\tau_{b,45} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie prostopadłej do czterokrotnej osi symetrii (na kierunkach drugiej pary osi dwukrotnych, równo nachylonych do osi przyjętego, układu współrzędnych)

$k_{a,45}, k_b, k_{b,45}$ - graniczne wartości naprężeń odpowiednio $\tau_{a,45}, \tau_b, \tau_{b,45}$.



Rysunek 10.5: Stany własne objętościowo izotropowych, tetragonalnych tensorów sprężystości.

Metodyka wyznaczania postaci funkcji $\eta_f(\alpha)$ podana została przy opisie specyfikacji kryterium dla ogólnego przypadku symetrii tetragonalnej. Zakładając, iż postać ta jest znana, postępując analogicznie, jak wskazano to przy opisie objętościowo izotropowej ortotropii, wartości funkcji wpływu naprężenia hydrostatycznego można wyznaczyć poprzez graniczne naprężenia normalne $k_{\mathbf{n}}$ w jednoosiowych próbach wytrzymałościowych na kierunku danym wektorem $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$:

$$\eta_v \left(\frac{k_{\mathbf{n}}}{3} \right) = 9 \left[\frac{1}{k_{\mathbf{n}}^2} - \eta_f \left(\arctg \frac{n_2}{n_1} \right) (n_2^2 n_3^2 + n_3^2 n_1^2) - \frac{(n_1^2 + n_2^2 - 2n_3^2)^2}{6k_{a,45}^2} - \frac{n_1^2 n_2^2}{k_b^2} - \frac{(n_1^2 - n_2^2)^2}{4k_{b,45}^2} \right] \quad (10.12)$$

10.7.3 Symetria cylindryczna objętościowo izotropowa

Rozkład spektralny objętościowo izotropowego tensora podatności o symetrii cylindrycznej przedstawiony jest w szczególach w dodatku B. Przyjmujemy, że wyróżniona oś symetrii

pokrywa się z osią x_3 przyjętego układu współrzędnych. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyteżenia materiału przyjmuje postać

$$\eta_v(p) \cdot p^2 + \frac{\tau_a^2}{k_a^2} + \frac{\tau_{a,45}^2}{k_{a,45}^2} + \frac{\tau_b^2}{k_b^2} = 1 \quad (10.13)$$

gdzie:

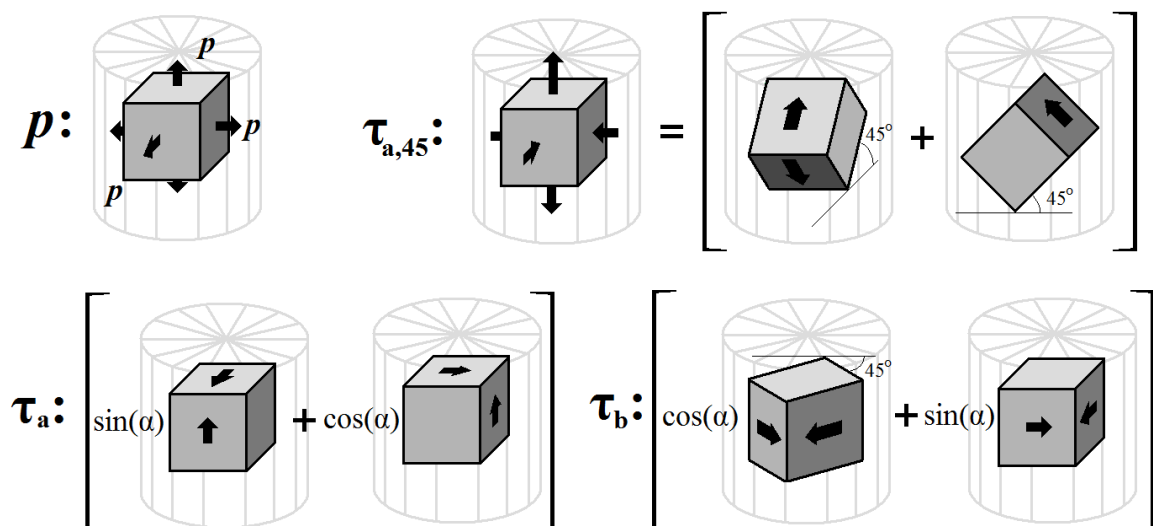
$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ - naprężenie hydrostatyczne,

$\tau_a = \sqrt{\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2}$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie zawierającej wyróżnioną oś symetrii, równoległe do tej osi,

$\tau_b = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$ - czyste ścinanie w płaszczyźnie prostopadłej do wyróżnionej osi symetrii,

$\tau_{a,45} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33})$ - deformacja cylindryczna - złożenie dwóch nieortogonalnych czystych ścinań w prostopadłych płaszczyznach zawierających wyróżnioną oś symetrii, w kierunkach pod kątem 45° do tej osi,

$k_a, k_b, k_{a,45}$ - graniczne wartości naprężeń odpowiednio $\tau_a, \tau_b, \tau_{a,45}$.



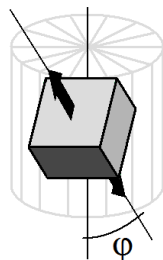
Rysunek 10.6: Stany własne objętościowo izotropowych tensorów sprężystości o symetrii cylindrycznej.

Problem wyznaczenia postaci funkcji wpływu naprężenia hydrostatycznego upraszcza się znacznie dzięki wysokiej symetrii całego zagadnienia - wystarczy bowiem przeprowadzić próby jednoosiowego rozciągania oraz ściskania pod różnymi kątami do wyróżnionej osi symetrii materiału. Dla prostoty zapisu przyjmijmy, że kierunek naprężenia jednoosiowego leży w płaszczyźnie x_1x_3 pod kątem ϕ do wyróżnionej osi symetrii materiału tj. dany jest wektorem $\mathbf{n} = [\sin \phi, 0, \cos \phi]$. Stan naprężenia przy naprężeniu jednoosiowym o wielkości k na danym kierunku opisuje tensor naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = k(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cong k \begin{bmatrix} \sin^2 \phi & 0 & \cos \phi \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi \sin \phi & 0 & \cos^2 \phi \end{bmatrix}$$

W stanie granicznym, gdy naprężenie normalne osiąga wartość k_ϕ (charakterystyczną dla kąta ϕ) otrzymujemy

$$\eta \left(\frac{k_\phi}{3} \right) = 9 \left[\frac{1}{k_\phi^2} - \frac{\cos^2 \phi \sin^2 \phi}{k_a^2} - \frac{(\sin^2 \phi - 2 \cos^2 \phi)^2}{6k_{a,45}} - \frac{\sin^4 \phi}{4k_b^2} \right] \quad (10.14)$$



10.8 Energetycznie ortogonalny rozkład \mathcal{T}_{sym}^2 nie będący rozkładem na podprzestrzenie własne C i S

Rozkład (8.1) będący podstawą sformułowania proponowanego kryterium stanu granicznego może być dowolnym rozkładem energetycznie ortogonalnym. Dotychczas przedstawione były specyfikacje kryterium jedynie dla przypadków, gdy rozkładem tym był rozkład na podprzestrzenie własne tensorów sprężystości. W opinii autora taki właśnie wybór rozkładu \mathcal{T}_{sym}^2 zdaje się być najwłaściwszym z uwagi na jego rozbudowaną interpretację fizyczną oraz z uwagi fakt, iż jest to jedyny rozkład, który jest jednocześnie ortogonalny i energetycznie ortogonalny. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie by rozpatrywać inne rozkłady energetycznie ortogonalne - w tym sensie prezentowana propozycja kryterium stanu granicznego może być interpretowana także jako uogólnienie anizotropowego kryterium Misesa interpretowanego energetycznie w myśl twierdzenia Rychlewskiego.

Istnieje nieskończona ilość energetycznie ortogonalnych rozkładów \mathcal{T}_{sym}^2 - wybór tego właściwego może okazać się zadaniem o tyle trudnym, o ile nie dysponujemy praktycznie żadnymi

przesłankami na temat tego, jakimi cechami winien się taki rozkład charakteryzować. Podobnie i eksperymentalna weryfikacja doboru takiego czy innego rozkładu zdaje się być niewykonalna z uwagi na dużą swobodę w wyborze postaci funkcyjnej parametrów skalujących η , które mają właśnie zapewnić zgodność przewidywań teoretycznych z doświadczeniem. Aspekt czysto praktyczny realizacji ogromnego i złożonego programu takich badań jest sprawą zupełnie odrębną lecz nie mniej uciążliwą.

Jest jednak pewna klasa zagadnień, dla których wyznaczenie odpowiedniego rozkładu energetycznie ortogonalnego jest stosunkowo proste, a nawet - poniekąd wbrew przekonaniu autora wyrażonemu powyżej - uzasadnione. Chodzi o sytuację, w której znamy klasę symetrii tak cech sprężystych jak i cech wytrzymałościowych (wyznaczone np. na podstawie znajomości struktury wewnętrznej oraz schematów zniszczenia lub podstawowych wyników prób wytrzymałościowych), przy czym klasy te są różne. Przykładowym opracowaniem zagadnienia tego typu jest praca [55], która zresztą stanowi podstawę specyfikacji przedstawionej poniżej. W takim przypadku zaproponować można następujący schemat wyznaczenia odpowiedniego rozkładu \mathcal{T}_{sym}^2 - rozpatrujemy pewną formę kwadratową postaci uogólnionego warunku Misesa

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 1,$$

gdzie tensor **H** ma grupę symetrii odpowiadającą klasie symetrii właściwości wytrzymałościowych danego materiału. Poszukiwany rozkład energetycznie ortogonalny dla zadanego tensora podatności **C** otrzymujemy natychmiast na podstawie twierdzenia Rychlewskiego (7.110). Składniki rozkładu energii sprężystej (7.111) przyjmujemy za składniki energetycznej miary wyteżenia (8.2), czy też - ściślej rzecz ujmując - przyjmujemy, że rozkładem (8.1) jest rozkład (7.107). Trzeba jednak zwrócić uwagę na fakt, że tensor **H**, służący wyznaczaniu energetycznie ortogonalnego rozkładu \mathcal{T}_{sym}^2 , nie jest tutaj tensorem stanu granicznego w ścisłym tego znaczeniu tj. postulowany warunek graniczny (8.2) nie jest tożsamy z odpowiednim warunkiem granicznym typu Misesa choćby dlatego, że równanie (8.2), z uwagi na obecność zmiennych parametrów η , nie jest wcale formą kwadratową.

Rozważmy przypadek będący przedmiotem pracy [55], w którym rozpatrywano materiał o kubicznej symetrii sprężystej z ortotropowym stanem granicznym, przy czym założono ponadto, że osie symetrii obydwu tych klas symetrii pokrywają się oraz że jednym ze składników energetycznej miary wyteżenia jest energia odkształcenia objętościowego, co równoważne jest z założeniem o objętościowej izotropii przyjętego tensora **H**. Rozkład widmowy tensora podatności daje nam:

$$\mathcal{T}_{sym}^2 = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3$$

- \mathcal{P}_1 - jednowymiarową podprzestrzeń stanów hydrostatycznych
- \mathcal{P}_2 - dwuwymiarową podprzestrzeń stanów dewiatorowych będących kombinacjami czystych ścinań w płaszczyznach symetrii materiału, na kierunkach równo nachylonych do osi symetrii wyznaczających tę płaszczyznę
- \mathcal{P}_3 - trójwymiarową podprzestrzeń stanów dewiatorowych będących kombinacjami czystych ścinań w płaszczyznach symetrii materiału, na kierunkach równoległych do osi symetrii wyznaczających tę płaszczyznę

Rozkład widmowy objętościowo izotropowego ortotropowego tensora \mathbf{H} daje:

$$\mathcal{T}_{sym}^2 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4 \oplus \mathcal{H}_5 \oplus \mathcal{H}_6$$

- \mathcal{H}_1 - jednowymiarową podprzestrzeń stanów hydrostatycznych
- $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ - dwie jednowymiarowe podprzestrzenie stanów dewiatorowych o zerowych składowych stycznych na kierunkach osi ortotropii
- $\mathcal{H}_4, \mathcal{H}_5, \mathcal{H}_6$ - trzy jednowymiarowe podprzestrzenie czystych ścinań w płaszczyznach symetrii materiału, na kierunkach równoległych do osi symetrii wyznaczających tę płaszczyznę

przy czym

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{P}_2 &= \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \\ \mathcal{P}_3 &= \mathcal{H}_4 \oplus \mathcal{H}_5 \oplus \mathcal{H}_6\end{aligned}$$

W tym szczególnym przypadku rozpatrywany rozkład energetycznie ortogonalny jest również rozkładem ortogonalnym - nie jest to jednak w sprzeczności ze stwierdzeniem, że rozkład na podprzestrzenie własne tensorów sprężystości jest jedynym rozkładem ortogonalnym i energetycznie ortogonalnym. W rzeczywistości bowiem każda z podprzestrzeni \mathcal{H}_α ($\alpha = 1, \dots, 6$) jest podprzestrzenią własną \mathbf{C} - tylko fakt, że odpowiadają one istotnie różnym wartościom własnym tensora \mathbf{H} sprawia, że rozpatrywany rozkład nie może być utożsamiany z rozkładem na podprzestrzenie własne \mathbf{C} . Tensory \mathbf{C} oraz \mathbf{H} są zatem częściowo współosiowe, tj. każdy stan własny \mathbf{H} jest stanem własnym \mathbf{C} , lecz nie odwrotnie.

Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyężenia materiału przyjmuje postać analogiczną do przypadku objętościowo izotropowej ortotropii opisanego powyżej:

$$\eta_v(p) \cdot p^2 + \frac{\sigma_{f1}^2}{k_{f1}^2} + \frac{\sigma_{f2}^2}{k_{f2}^2} + \frac{\tau_1^2}{k_{s1}^2} + \frac{\tau_2^2}{k_{s2}^2} + \frac{\tau_3^2}{k_{s3}^2} = 1 \quad (10.15)$$

gdzie:

$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ - naprężenie hydrostatyczne,

$$\sigma_{f1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\sigma_{11}(\sin \varkappa - \sqrt{3} \cos \varkappa) + \sigma_{22}(\sin \varkappa + \sqrt{3} \cos \varkappa) - 2\sigma_{33} \sin \varkappa \right],$$

$$\sigma_{f2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\sigma_{11}(\cos \varkappa + \sqrt{3} \sin \varkappa) + \sigma_{22}(\cos \varkappa - \sqrt{3} \sin \varkappa) - 2\sigma_{33} \cos \varkappa \right],$$

$$\tau_1 = \sigma_{23}, \quad \tau_2 = \sigma_{31}, \quad \tau_3 = \sigma_{12},$$

$k_{f1}, k_{f2}, k_{s1}, k_{s2}, k_{s3}$ - graniczne wartości naprężeń odpowiednio $\sigma_{f1}, \sigma_{f2}, \tau_1, \tau_2, \tau_3$,

zaś parametr \varkappa , będący funkcją dystrybutora wytrzymałości, wyraża się przez składowe tensora \mathbf{H} wzorem:

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{\sqrt{3}(H_{2233} - H_{3311})}{2H_{1122} - H_{3311} - H_{2233} + 2\sqrt{(H_{2233}^2 + H_{3311}^2 + H_{1122}^2)} - (H_{3311}H_{1122} + H_{1122}H_{2233} + H_{2233}H_{3311})}$$

10.9 Symetrie płaskie

Zagadnienia płaskiego stanu naprężenia oraz płaskiego stanu odkształcenia zajmują szczególne miejsce tak w matematycznej teorii sprężystości i plastyczności jak i szeroko pojętej praktyce eksperymentalnej i przemysłowej. Redukcja wymiaru zagadnienia umożliwia pogłębioną jego analizę oraz uzyskanie wyników czy też zastosowanie metod, które w ogólnym przypadku przestrzennym są niedostępne. Tym większą wagę przykładają się do zagadnień płaskich, że stanowią one podstawę opisu wielu praktycznych zagadnień technicznych. Jednym z nich - kluczowym dla wielu gałęzi przemysłu a będącym jednocześnie przedmiotem dużej liczby publikacji naukowych - jest kwestia wyznaczenia warunku stanu granicznego (ściślej: warunku plastyczności) w płaskich układach anizotropowych, przy czym praktyka przemysłowa wskazuje tu jednoznacznie na ortotropowe blachy walcowane. Blachy walcowane są jednocześnie najpowszechniej stosowanymi materiałami, w których anizotropia cech sprężystych i wytrzymałościowych jest wyraźnie zauważalna i może mieć istotny wpływ na właściwości użytkowe produktów wykonanych z tych materiałów. Z tego też względu specyfikacja kryterium stanu granicznego bazującego na prezentowanej hipotezie wyteżenia dla zagadnień płaskich jest krokiem być może nawet najważniejszym spośród przedstawionych tu elementów analizy nowej propozycji kryterium granicznego, gdyż to właśnie badania na blachach walcowanych mogą stanowić podstawę weryfikacji poprawności tej hipotezy.

W pracy przedstawiono specyfikację kryterium granicznego dla wszystkich klas płaskich symetrii sprężystych poza pełną anizotropią. Część poniższych wyników opublikowana została w [103] oraz [75].

10.9.1 Płaska ortotropia

Rozkład spektralny płaskiego ortotropowego tensora podatności przedstawiony jest w szczególności w dodatku B. Przyjmujemy, że normalne płaszczyzn symetrii w materiale pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyteżenia materiału przyjmuje postać

$$\eta_{p1}(\sigma_{p1}) \cdot \sigma_{p1}^2 + \eta_{p2}(\sigma_{p2}) \cdot \sigma_{p2}^2 + \frac{\tau^2}{k_s^2} = 1 \quad (10.16)$$

gdzie

$$\sigma_{p1} = \sigma_{11} \cdot \cos \varkappa + \sigma_{22} \cdot \sin \varkappa,$$

$$\sigma_{p2} = -\sigma_{11} \cdot \sin \varkappa + \sigma_{22} \cdot \cos \varkappa,$$

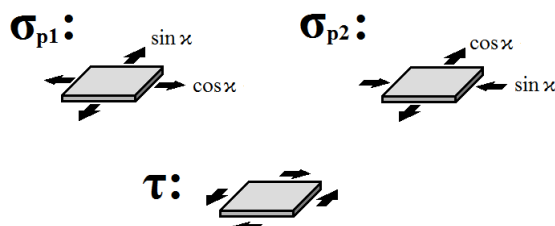
$$\tau = \sigma_{12},$$

k_s - graniczna wartość naprężenia stycznego,

zaś parametr \varkappa będący funkcją dystrybutora sztywności dany jest wzorem:

$$\operatorname{tg}\varkappa = -\frac{E_1}{2\nu_{12}} \left[\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} - \sqrt{\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1}\right)^2 + \frac{4\nu_{12}^2}{E_1^2}} \right]$$

gdzie E_1 oraz E_2 oznaczają moduły Younga na kierunkach osi symetrii materiału, zaś ν_{12} jest współczynnikiem Poissona przy rozciąganiu na kierunku x_1 .



Rysunek 10.7: Stany własne płaskich, ortotropowych tensorów sprężystości.

Funkcje η_{p1} oraz η_{p2} powinny zostać wyznaczone na podstawie wyników doświadczalnych. Ponieważ wiążą się ze stanami o niezerowej składowej hydrostatycznej, stąd podstawą do ich wyznaczenia mogą być próby wytrzymałościowe w stanach jednoosiowych dla różnych orientacji kierunku obciążenia względem osi symetrii materiału. W ogólności jednoosiowy stan naprężenia dla dowolnej orientacji obciążenia ma niezerowe rzuty na każdą z trzech podprzestrzeni własnych tensora podatności, co sprawia, że funkcje wpływu η_{p1} i η_{p2} muszą być wyznaczone równolegle. Istnieją jednak takie orientacje obciążenia jednoosiowego, dla których zanika wpływ przynajmniej jednego ze stanów własnych. Przyjmijmy, że dany jest płaski stan naprężenia odpowiadający jednoosiowemu rozciąganiu pod kątem φ do jednej z osi symetrii materiału (którą utożsamiać można np. z kierunkiem walcowania blachy - niech będzie to kierunek dany osią x_1):

$$\boldsymbol{\sigma} = k(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cong k \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

Rzuty na podprzestrzenie własne tensora podatności

$$\begin{aligned} \sigma_{p1} &= k (\cos^2 \varphi \cos \varkappa + \sin^2 \varphi \sin \varkappa), \\ \sigma_{p2} &= k (-\cos^2 \varphi \sin \varkappa + \sin^2 \varphi \cos \varkappa), \\ \tau &= \cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

Od razu można zauważyć, że wpływ naprężenia stycznego τ zanika tylko dla dwóch orientacji obciążenia, danych kątami $\varphi = 0^\circ$ oraz $\varphi = 90^\circ$, tj. równoległe do osi symetrii materiału. Wtedy:

- Stan naprężenia jednoosiowego równoległego do kierunku walcowania ($\varphi = 0^\circ$)

$$\sigma_{p1} = k \cos \varkappa, \quad \sigma_{p2} = -k \sin \varkappa, \quad \tau = 0$$

- Stan naprężenia jednoosiowego prostopadłego do kierunku walcowania ($\varphi = 90^\circ$)

$$\sigma_{p1} = k \sin \varkappa, \quad \sigma_{p2} = k \cos \varkappa, \quad \tau = 0$$

Orientacje, dla których zanika wpływ jednej z podprzestrzeni niedewiatorowych określają kąty:

$$\sigma_{p1} = k (\cos^2 \varphi \cos \varkappa + \sin^2 \varphi \sin \varkappa) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{-\operatorname{tg} \varkappa}$$

$$\sigma_{p2} = k (-\cos^2 \varphi \sin \varkappa + \sin^2 \varphi \cos \varkappa) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg} \varkappa}$$

Ponieważ \varkappa jest stałe dla danego materiału, stąd oczywiste jest, że zajść może co najwyżej jedna z powyższych sytuacji.

- Gdy $\operatorname{tg} \varkappa > 0$, wtedy $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg} \varkappa}$:

$$\sigma_{p1} = \frac{k}{\cos \varkappa + \sin \varkappa}, \quad \sigma_{p2} = 0, \quad \tau = k \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \varkappa}}{1 + \operatorname{tg} \varkappa}$$

- Gdy $\operatorname{tg} \varkappa < 0$, wtedy $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{-\operatorname{tg} \varkappa}$:

$$\sigma_{p1} = 0, \quad \sigma_{p2} = \frac{k}{\cos \varkappa - \sin \varkappa}, \quad \tau = k \frac{\sqrt{-\operatorname{tg} \varkappa}}{1 - \operatorname{tg} \varkappa}$$

Rozważając stany czystego ścinania w kierunkach nachylonych pod kątem φ do osi symetrii materiału, danych wersorami $\mathbf{n} = [\cos \varphi, \sin \varphi]$ oraz $\mathbf{m} = [-\sin \varphi, \cos \varphi]$ otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{k}{\sqrt{2}} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \cong \frac{k}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \end{bmatrix}$$

Rzuty na podprzestrzenie własne tensora podatności

$$\sigma_{p1} = \frac{k}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi (\sin \varkappa - \cos \varkappa),$$

$$\sigma_{p2} = \frac{k}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi (\sin \varkappa + \cos \varkappa),$$

$$\tau = \frac{k}{\sqrt{2}} \cos 2\varphi.$$

Nietrudno zauważyć, że jedyną orientacją, dla której zanika wpływ podprzestrzeni niedewiatorowych jest ścinanie równoległe do osi symetrii materiału. Interesujące jest jednak, że ścinanie w kierunkach równo nachylonych do osi symetrii materiału generuje stan naprężenia, którego rzut na podprzestrzeń stanów ścinania jest zerowy:

$$\sigma_{p1} = \frac{k}{\sqrt{2}} (\sin \varkappa - \cos \varkappa), \quad \sigma_{p2} = \frac{k}{\sqrt{2}} (\sin \varkappa + \cos \varkappa), \quad \tau = 0$$

Realizacja szczególnych przypadków obciążenia opisanych powyżej ma na celu umożliwienie bądź przynajmniej uproszczenie identyfikacji postaci funkcyjnej parametrów η_{p1} oraz η_{p2} . Zagadnienie to jednak w dalszym ciągu pozostaje bardzo złożone a jego rozwiązanie wiąże się z koniecznością przeprowadzenia licznych, możliwie precyzyjnych i jednocześnie kosztownych pomiarów. Alternatywą dla tego podejścia może być założenie z góry postaci funkcji wpływu. Wartościową propozycją - z uwagi na swoją prostotę i szerokie spektrum klas powierzchni granicznych możliwych do uwzględnienia - może być przyjęcie funkcji wpływu w postaci funkcji homograficznych typu Burzyńskiego:

$$\eta_{p1}(\sigma_{p1}) = A_1 + \frac{B_1}{\sigma_{p1}}, \quad \eta_{p1}(\sigma_{p2}) = A_2 + \frac{B_2}{\sigma_{p2}}. \quad (10.17)$$

Warunek graniczny przyjmuje postać funkcji kwadratowej trzech zmiennych:

$$A_1\sigma_{p1}^2 + B_1\sigma_{p1} + A_2\sigma_{p2}^2 + B_2\sigma_{p2} + \frac{\tau^2}{k_s^2} = 1 \quad (10.18)$$

i jest reprezentowany w przestrzeni naprężeń przez pewną trójwymiarową kwadrykę. Stałe A_1, A_2, B_1, B_2 wyznacza się jednoznacznie z układu równań liniowych uzyskanych przez zapisanie warunku (10.18) w stanie granicznym jednoosiowego rozciągania i jednoosiowego ściskania na kierunkach x_1 oraz x_2 . Przyjmując, że graniczne naprężenie rozciągające na kierunkach x_1 oraz x_2 oznaczymy odpowiednio przez k_{r1} oraz k_{r2} , zaś odpowiednie naprężenia ściskające przez k_{c1} oraz k_{c2} , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{k_{r1}k_{c1}\sin^2\alpha - k_{r2}k_{c2}\cos^2\alpha}{k_{r1}k_{c1}k_{r2}k_{c2}(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)} & B_1 &= \frac{k_{r2}k_{c2}(k_{c1} - k_{r1})\cos\alpha + k_{r1}k_{c1}(k_{c2} - k_{r2})\sin\alpha}{k_{r1}k_{c1}k_{r2}k_{c2}} \\ A_1 &= \frac{k_{r2}k_{c2}\sin^2\alpha - k_{r1}k_{c1}\cos^2\alpha}{k_{r1}k_{c1}k_{r2}k_{c2}(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)} & B_2 &= \frac{k_{r1}k_{c1}(k_{c2} - k_{r2})\cos\alpha - k_{r2}k_{c2}(k_{c1} - k_{r1})\sin\alpha}{k_{r1}k_{c1}k_{r2}k_{c2}} \end{aligned} \quad (10.19)$$

Po przyjęciu oznaczeń

$$C = \frac{k_{r2}}{k_{r1}}, \quad c_1 = \frac{k_{c1}}{k_{r1}}, \quad c_2 = \frac{k_{c2}}{k_{r2}}, \quad (10.20)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{k_{r1}^2} \left[\frac{\sin^2\alpha}{C^2c_2(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{c_1(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)} \right] & B_1 &= \frac{1}{k_{r1}} \left[\cos\alpha \frac{(c_1-1)}{c_1} + \frac{1}{C} \sin\alpha \frac{(c_2-1)}{c_2} \right] \\ A_1 &= \frac{1}{k_{r1}^2} \left[\frac{\sin^2\alpha}{c_1(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{C^2c_2(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)} \right] & B_2 &= \frac{1}{k_{r1}} \left[\frac{1}{C} \cos\alpha \frac{(c_2-1)}{c_2} - \sin\alpha \frac{(c_1-1)}{c_1} \right]. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Charakter powierzchni granicznej danej równaniem (10.18) może zostać określony poprzez analizę niezmienników form kwadratowych określających tę powierzchnię. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_s^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_s^2} & 0 \\ B_1 & B_2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_I = \text{tr}(\mathbf{H}) = A_1 + A_2 + \frac{1}{k_s^2}$$

$$H_{II} = \frac{1}{2} [\text{tr}^2(\mathbf{H}) - \text{tr}(\mathbf{H}^2)] = \frac{1}{k_s^2} [A_1 + A_1 A_2 k_s^2 + A_2]$$

$$H_{III} = \det(\mathbf{H}) = \frac{A_1 A_2}{k_s^2}$$

$$\chi = \det(\mathbf{H}_a) = -\frac{1}{k_s^2} [A_1 A_2 + A_1 B_2^2 + A_2 B_1^2]$$

Charakter powierzchni granicznej określają następujące zależności [14]:

- $H_{III} \neq 0$ - elipsoidy, hiperboloidy, stożki
 - $\chi < 0, H_I \cdot H_{III} < 0, H_{II} > 0$ - elipsoida
 - $\chi < 0, \begin{cases} H_I \cdot H_{III} > 0 \\ H_{II} < 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} H_I \cdot H_{III} < 0 \\ H_{II} > 0 \end{cases}$ - hiperboloida dwupowłokowa
 - $\chi = 0, \begin{cases} H_I \cdot H_{III} > 0 \\ H_{II} < 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} H_I \cdot H_{III} < 0 \\ H_{II} > 0 \end{cases}$ - stożek
 - $\chi > 0, \begin{cases} H_I \cdot H_{III} > 0 \\ H_{II} < 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} H_I \cdot H_{III} < 0 \\ H_{II} > 0 \end{cases}$ - hiperboloida jednopowłokowa
- $H_{III} = 0$ - paraboloidy, walce
 - $H_{II} > 0, \chi < 0$ - paraboloida eliptyczna
 - $H_{II} < 0, \chi > 0$ - paraboloida hiperboliczna
 - Jeśli ponadto spełniony jest warunek

$$A_1 B_2^2 + A_1 A_2 + A_2 B_1^2 + \frac{1}{k_s^2} (A_1 + A_2 + B_1^2 + B_2^2) \neq 0$$

- $H_{II} > 0, \chi = 0$ - walec eliptyczny
- $H_{II} = 0, \chi = 0$ - walec paraboliczny
- $H_{II} < 0, \chi = 0$ - walec hiperboliczny

W przeciwnym razie powierzchnia graniczna redukuje się do pewnej powierzchni zdegenerowanej (układy płaszczyzn lub jedna płaszczyzna).

Celem formułowania kolejnych propozycji kryteriów stanu granicznego jest fakt, iż w przypadku przyjęcia hipotezy możliwie najbardziej odpowiadającej wynikom doświadczalnym znajomość granicznych wartości naprężeń normalnych oraz stycznych w najprostszych stanach naprężenia dla podstawowych orientacji kierunku obciążenia względem osi symetrii materiału pozwala przewidywać graniczne naprężenia uplastyczniające dla dowolnej orientacji obciążenia oraz dla innych, często bardziej złożonych rodzajów obciążenia. W ten sposób, na podstawie równania (10.18), przy znajomości parametrów A_1, A_2, B_1, B_2 , można określić np. wytrzymałość na ścinanie w kierunkach równo nachylonych do osi symetrii materiału.

Przyjmując $\sigma_{11} = -\sigma_{22} = k_{s45}$ oraz $\sigma_{12} = 0$, zapisanie warunku stanu granicznego dostarcza nam równanie, z którego wyznaczamy graniczną wartość naprężenia k_{s45} . Jest to równanie kwadratowe o dwóch, w ogólności różnych pierwiastkach. Wprowadzając oznaczenia

$$a = A_1(\cos \varkappa - \sin \varkappa)^2 + A_2(\cos \varkappa + \sin \varkappa)^2$$

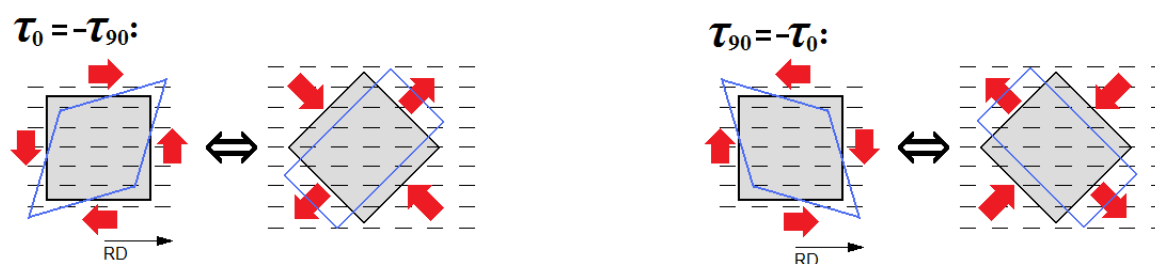
$$b = B_1(\cos \varkappa - \sin \varkappa) - B_2(\cos \varkappa + \sin \varkappa)$$

poszukiwane graniczne naprężenia styczne są równe:

$$k_{s45}^{(1)} = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2a}$$

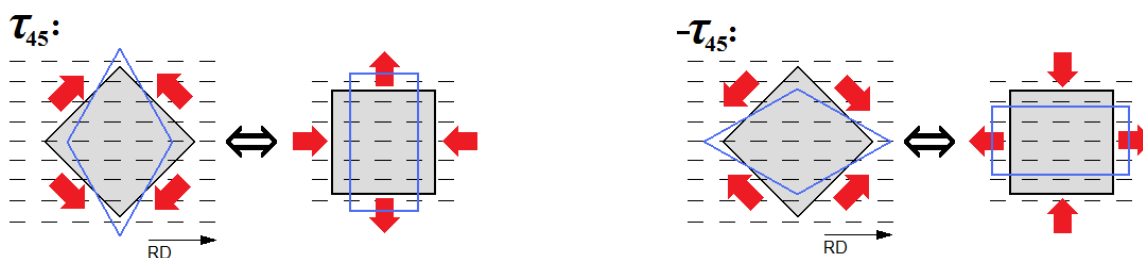
$$k_{s45}^{(2)} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2a}$$

Wynik powyższy sugeruje - co zasygnalizowano już wcześniej, przy omawianiu założeń dotyczących parametrów η_α dla podprzestrzeni dewiatorowych w ogólnym sformułowaniu hipotezy - że wytrzymałość na ścinanie może zależeć od zwrotu naprężenia, tj. że także w przypadku czystego ścinania możliwe byłoby zaobserwowanie asymetrii zakresu sprężystego. Łatwo zauważyć, że efekt ten nie pojawia w przypadku czystego ścinania w kierunkach osi symetrii materiału. Fakt ten nie powinien dziwić po dokładniejszym zastanowieniu się nad tym zjawiskiem. Trzeba bowiem zauważyć, że dwa stany czystego ścinania w kierunkach osi symetrii materiału różniące się zwrotem (znakami) są sobie równoważne z punktu widzenia charakterystyki sprężystej materiału - jeden można otrzymać z drugiego poprzez odbicie symetryczne względem płaszczyzny prostopadłej do jednej z tych osi. Przekształcenie takie należy do grupy symetrii materiału ortotropowego. Wykreśliwszy interpretację graficzną obydwu tych stanów po obróceniu układu współrzędnych o kąt 45° , nietrudno zauważyć, że w obydwu przypadkach rozciąganiu i skróceniu ulegają włókna nachylone pod kątem 45° do osi symetrii (patrz: rys. 10.8 - schematyczny zarys deformacji elementu jest tylko uproszczoną ilustracją omawianego zjawiska).



Rysunek 10.8: Równoważność stanów czystego ścinania w kierunkach osi symetrii materiału ortotropowego różniących się zwrotem.

Odmienne rzecz przedstawia się w przypadku czystego ścinania dla innych orientacji obciążenia - w takim przypadku dwa stany różniące się zwrotem nie są już sobie równoważne - jeden można otrzymać z drugiego tylko poprzez obrót o 90° (patrz: rys 10.9), które to przekształcenie nie należy do grupy symetrii materiału ortotropowego.



Rysunek 10.9: Wpływ zwrotu czystego ścinania na mechanizm deformacji blachy ortotropowej

Zjawisko asymetrii zakresu sprężystego w przypadku czystego ścinania blach ortotropowych staje się jeszcze bardziej oczywiste po uświadomieniu sobie faktu, że dla ścinania w kierunkach równo nachylonych do osi symetrii materiału, w jednym przypadku rozciąganiu ulegają włókna równoległe do osi x_1 (np. kierunku walcowania) ścisaniu zaś te równoległe do nierównoważnej jej osi x_2 , natomiast w przypadku naprężenia o zwrocie przeciwnym sytuacja jest odwrotna. Należy się spodziewać, że graniczne naprężenie w obydwu tych przypadkach będzie miało inną wartość z uwagi na odmienne właściwości mechaniczne tych kierunków. Różnica wytrzymałości będzie najpewniej tym wyraźniejsza, im bardziej orientacja kierunków ścinania odbiega od kierunków osi symetrii materiału. Zjawisko to uwzględnione jest w kryterium (10.18) jako konsekwencja założenia asymetrii zakresu sprężystego w stanach jednoosiowych.

Choć zjawisko to zdaje się pozostawać niezauważone nie oznacza to, że w rzeczywistości ono nie występuje. W istocie badania blach w stanach czystego ścinania są stosunkowo rzadkie. Choć brak tu ścisłych danych, uzasadnione wydaje się przyjęcie, że ponadto większość z tych badań stanowią próby ścinania w kierunkach osi symetrii materiału, dla których zjawisko to występuje najpewniej w najmniejszym stopniu, o ile w ogóle. Odrębną kwestią jest również duża trudność uzyskania powtarzalnych, precyzyjnych wyników umożliwiających określenie dobrych przybliżeń średnich wartości wytrzymałości w tak trudnym do realizacji stanie naprężenia, co wobec faktu, że nawet w stanach jednoosiowych efekt różnicy wytrzymałości nie przekracza zazwyczaj kilku do kilkunastu procent, sprawia, że zjawisko to jest niełatwe do wychwycenia. Wydaje się jednak, że może ono stanowić przedmiot osobnych, precyzyjnych badań.

Problem wyznaczania granicznych wartości naprężeń normalnych oraz stycznych w próbach jednoosiowego rozciągania oraz czystego ścinania dla różnych orientacji obciążenia względem osi symetrii materiału upraszcza się znacznie po założeniu symetrii zakresu sprężystego, gdy $c_1 = 1$ oraz $c_2 = 1$, tj. gdy

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\sin^2 \alpha - C^2 \cos^2 \alpha}{k_{r1}^2 C^2 (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)} & B_1 &= 0 \\
 A_2 &= \frac{C^2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{k_{r1}^2 C^2 (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)} & B_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{10.22}$$

Uzyskujemy wtedy symetryczne kwadratowe kryterium graniczne tożsame z kryterium Ry-chlewskiego (7.104):

$$\frac{\sigma_{p1}^2}{k_{p1}^2} + \frac{\sigma_{p2}^2}{k_{p2}^2} + \frac{\tau^2}{k_s^2} = 1 \quad (10.23)$$

gdzie:

$$k_{p1} = Ck_{r1} \sqrt{\frac{\sin^4 \varkappa - \cos^4 \varkappa}{\sin^2 \varkappa - C^2 \cos^2 \varkappa}} \quad (10.24)$$

$$k_{p2} = Ck_{r1} \sqrt{\frac{\sin^4 \varkappa - \cos^4 \varkappa}{C^2 \sin^2 \varkappa - \cos^2 \varkappa}}$$

Przy założeniu tego szczególnego przypadku (funkcji wpływu postaci Burzyńskiego oraz symetrii zakresu sprężystego) możliwe jest proste wyznaczenie granicznego naprężenia stycznego na podstawie wyników prób w stanach jednoosiowych w różnych kierunkach. Przyjmując graniczne naprężenia rozciągające w kierunkach osi symetrii materiału (k_{r1} , $k_{r2} = Ck_{r1}$) oraz w kierunku pośrednim (k_{r45}) za znane, wytrzymałość na ścinanie jest równa:

$$k_s = \left[\sqrt{\frac{4}{k_{r45}^2} - A_1(1 + \sin 2\varkappa) - A_2(1 - \sin 2\varkappa)} \right]^{-1}. \quad (10.25)$$

Wytrzymałość na rozciąganie w dowolnym kierunku pod kątem φ do kierunku walcowania jest równa:

$$k_\varphi = \left[\sqrt{A_1(\cos^2 \varphi \cos \varkappa + \sin^2 \varphi \sin \varkappa)^2 + A_2(-\cos^2 \varphi \sin \varkappa + \sin^2 \varphi \cos \varkappa)^2 + \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{k_s^2}} \right]^{-1}. \quad (10.26)$$

Powróćmy jeszcze do ogólnych rozważań na temat stowarzyszonego prawa płynięcia Lévy'ego-Misesa z potencjałem plastycznym określonym warunkiem plastyczności wyprowadzonym z rozważanej energetycznej hipotezy wyteżenia. Zagadnienia plastycznej deformacji płaskich blach metalowych są długo i intensywnie rozwijanym i badanym aspektem teorii plastyczności. Świadczy o tym już choćba sama ilość publikacji poświęconych warunkowi plastyczności dla blach ortotropowych, jakie pojawiły się od chwili pojawienia się klasycznej pracy Hilla w 1948 roku [40] (wystarczy wskazać na [5] [6] [7] [15] [29] [35] [36] [42] [43] [44] [62] [68] [110] [111] [113]). Powodem tego stanu rzeczy jest powszechność obróbki plastycznej blach w najróżniejszych procesach przemysłowych.

Szeroko zaakceptowanym podejściem w formułowaniu związków konstytutywnych między naprężeniem a odkształceniem (czy też przyrostem odkształceń plastycznych) jest stosowanie równań płynięcia plastycznego Lévy'ego-Misesa z potencjałem plastycznym określonym tą samą funkcją, która stanowi warunek plastyczności (tzw. stowarzyszone prawo płynięcia). Wykorzystanie tego podejścia w przypadku rozpatrywanego obecnie kryterium prowadzi do interesujących wniosków wspomnianych już ogólnie uprzednio, a które w analizowanym przypadku płaskim łatwo wyprowadzić na drodze bezpośrednich rachunków. Ogólne równanie płynięcia plastycznego:

$$d\varepsilon^p = d\Lambda \boldsymbol{\partial}_\sigma \Psi \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (10.27)$$

Podstawiając w (10.16)

$$\begin{aligned} f_1 &= \eta_{p1} \cdot \sigma_{p1}^2 \\ f_2 &= \eta_{p2} \cdot \sigma_{p2}^2 \end{aligned}$$

potencjał plastyczny Ψ możemy zapisać w postaci:

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = f_1(\sigma_{p1}) + f_2(\sigma_{p2}) + \frac{\tau^2}{k_s^2}.$$

Tensor przyrostu odkształceń plastycznych rozłożyć możemy w ortogonalnej bazie stanów własnych tensora podatności, co po podstawieniu do równań Lévy'ego-Misesa daje:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{p1}^p &= \cos \varkappa d\varepsilon_{11}^p + \sin \varkappa d\varepsilon_{22}^p = d\Lambda \left[\cos \varkappa \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{11}} + \sin \varkappa \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{22}} \right] \\ d\varepsilon_{p2}^p &= -\sin \varkappa d\varepsilon_{11}^p + \cos \varkappa d\varepsilon_{22}^p = d\Lambda \left[-\sin \varkappa \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{11}} + \cos \varkappa \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{22}} \right] \\ d\varepsilon_\tau^p &= \sqrt{2} d\varepsilon_{12}^p = \sqrt{2} d\Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{12}}, \end{aligned} \quad (10.28)$$

co wobec

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{11}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{11}} \left[f_1(\sigma_{p1}) + f_2(\sigma_{p2}) + \frac{\tau^2}{k_s^2} \right] = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{p1}} \frac{\partial \sigma_{p1}}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{p2}} \frac{\partial \sigma_{p2}}{\partial \sigma_{11}} = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{p1}} \cos \varkappa - \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{p2}} \sin \varkappa \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{22}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{22}} \left[f_1(\sigma_{p1}) + f_2(\sigma_{p2}) + \frac{\tau^2}{k_s^2} \right] = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{p1}} \frac{\partial \sigma_{p1}}{\partial \sigma_{22}} + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{p2}} \frac{\partial \sigma_{p2}}{\partial \sigma_{22}} = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{p1}} \sin \varkappa + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{p2}} \cos \varkappa \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{12}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{12}} \left[f_1(\sigma_{p1}) + f_2(\sigma_{p2}) + \frac{\tau^2}{k_s^2} \right] = \frac{1}{k_s^2} \frac{\partial}{\partial \sigma_{12}} \tau^2 = \frac{2}{k_s^2} \tau \end{aligned} \quad (10.29)$$

daje

$$d\varepsilon_{p1}^2 = d\Lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{p1}}, \quad d\varepsilon_{p2}^2 = d\Lambda \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{p2}}, \quad d\varepsilon_\tau^2 = 2\sqrt{2} d\Lambda \frac{\tau}{k_s^2}. \quad (10.30)$$

Zatem deformacja plastyczna na kierunku każdego ze stanów własnych jest niezależna (do pewnego stopnia - o czym za chwilę) od deformacji na kierunkach pozostałych stanów własnych, tj. ewolucję odkształceń plastycznych na kierunkach stanów własnych opisują niezależne od siebie równania, nie zaś układ równań będący konsekwencją wzajemnego sprzężenia przyrostu poszczególnych odkształceń plastycznych na kierunkach zadanych np. osiami symetrii materiału. Takie sformułowanie równań konstytutywnych teorii plastyczności może znakomicie uprościć obliczenia tak analityczne jak i numeryczne. Zjawisko to jest konsekwencją tego, że postać warunku plastyczności (a tym samym potencjału plastycznego) skonstruowana została w ten sposób, aby zachować jego addytywną strukturę i niezależność (ortogonalność zarówno w klasycznym jak i energetycznym sensie) poszczególnych składników.

Trzeba jednak wspomnieć, że uzyskana „niezależność” procesów deformacji plastycznej może (choć nie musi) okazać się jedynie pozorna - musimy bowiem pamiętać, że parametr $d\Lambda$ jest parametrem zależnym od historii odkształcenia. Skoro jego wartość zmieniać się może pod wpływem ewolucji któregokolwiek ze składników odkształcenia plastycznego, zatem i proces deformacji plastycznej na kierunku jednego ze składników musi ulec wpływowi historii odkształcenia na kierunku każdego z pozostałych składników, właśnie poprzez udział zmiennego parametru $d\Lambda$ w jego opisie. Wyjściem z tej sytuacji mogłoby być przyjęcie trzech niezależnych od siebie parametrów $d\Lambda_{p1}$, $d\Lambda_{p2}$, $d\Lambda_{\tau}$ - poprawność jednego lub drugiego podejścia może być zweryfikowana najpewniej tylko doświadczalnie.

Wykorzystanie warunku granicznego w charakterze potencjału plastycznego otwiera nowe możliwości identyfikacji postaci kryterium na podstawie porównania deformacji plastycznej przewidywanej równaniami Lévy’ego-Misesa z obserwacjami doświadczalnymi. W szczególności, kryterium poprawności opisu deformacji może stanowić zgodność takich przewidywanych i pomierzonych wielkości jak np. współczynniki Lankforda. By jednak móc wykorzystać tę dodatkową informację, nie można stosować kryterium plastyczności sformułowanego od podstaw dla płaskiego stanu naprężenia (tak jak kryterium (10.16)), ponieważ nie uwzględnia ono w żadnej mierze zjawisk zachodzących na kierunku prostopadłym do płaszczyzny blachy. Konieczne jest zatem sformułowanie ogólne, trójwymiarowe. Skorzystać możemy tutaj z omówionego już uprzednio przestrzennego kryterium ortotropowego (rozdział 10.1). Schemat postępowania przy wyznaczaniu przewidywanych wartości wytrzymałości oraz współczynników Lankforda dla różnych kierunków badania tych wielkości zarysujemy na modelowym przykładzie przy założeniu symetrii zakresu sprężystego oraz przyjęciu stałych funkcji wpływu. Potencjał plastyczny można zapisać w ogólnej postaci:

$$\psi = A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2 + A_3 p_3^2 + B_1 \tau_1^2 + B_2 \tau_2^2 + B_3 \tau_3^2 - 1, \quad (10.31)$$

gdzie:

$$p_1 = p_{11}\sigma_{11} + p_{12}\sigma_{22} + p_{13}\sigma_{33} \quad \tau_1 = \sigma_{23}$$

$$p_2 = p_{21}\sigma_{11} + p_{22}\sigma_{22} + p_{23}\sigma_{33} \quad \tau_2 = \sigma_{31}$$

$$p_3 = p_{31}\sigma_{11} + p_{32}\sigma_{22} + p_{33}\sigma_{33} \quad \tau_3 = \sigma_{12}$$

$$p_{11} = \cos \varkappa_1 \cos \varkappa_2$$

$$p_{12} = \cos \varkappa_1 \sin \varkappa_2$$

$$p_{13} = \sin \varkappa_1$$

$$p_{21} = -\cos \varkappa_3 \sin \varkappa_2 + \sin \varkappa_3 \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2$$

$$p_{22} = \cos \varkappa_3 \cos \varkappa_2 + \sin \varkappa_3 \sin \varkappa_1 \sin \varkappa_2$$

$$p_{23} = -\sin \varkappa_3 \cos \varkappa_1$$

$$p_{31} = \sin \varkappa_3 \sin \varkappa_2 + \cos \varkappa_3 \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2$$

$$p_{32} = -\sin \varkappa_3 \cos \varkappa_2 + \cos \varkappa_3 \sin \varkappa_1 \sin \varkappa_2$$

$$p_{33} = -\cos \varkappa_3 \cos \varkappa_1$$

Parametry $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ są funkcjami dystrybutorów sztywności i mogą zostać wyznaczone na podstawie pomierzonych stałych sprężystych materiału. Stałe parametry kryterium $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ podlegają wyznaczeniu np. w procesie numerycznego dopasowania przewidywanych wartości wytrzymałości na rozciąganie oraz współczynnika Lankforda dla różnych orientacji próbek z tymi uzyskanymi na drodze doświadczalnej. W przypadku, gdy stałe $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ pozostają nieznane (w istocie, ich wyznaczenie wiąże się z rozbudowanymi i złożonymi pomiarami), stanowią one mogą dodatkowe wolne parametry podlegające wyznaczeniu na drodze numerycznej - choć spodziewać się należy, iż uzyskane w ten sposób wielkości odbiegać będą od rzeczywistych wartości funkcji dystrybutorów rujnując tym samym energetyczną interpretację wyrażenia (10.31), to jednak postępowanie takie niepozbawione jest praktycznego sensu. Otrzymane w ten sposób kryterium może nawet w jeszcze większej mierze odpowiadać doświadczeniu z uwagi na dodatkowe stopnie swobody w postaci kolejnych trzech wolnych parametrów.

Wytrzymałość na rozciąganie oraz współczynnik Lankforda wyznaczać będziemy w stanach jednoosiowych w płaszczyźnie (x_1, x_2) . Przy obciążeniu jednoosiowym pod kątem φ do osi x_1 mamy:

$$\sigma_{11} = \sigma \cos^2 \varphi, \quad \sigma_{22} = \sigma \sin^2 \varphi, \quad \sigma_{12} = \sigma \cos \varphi \sin \varphi.$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} p_{1\varphi} &= \cos^2 \varphi p_{11} + \sin^2 \varphi p_{12} \\ p_{2\varphi} &= \cos^2 \varphi p_{21} + \sin^2 \varphi p_{22} \\ p_{3\varphi} &= \cos^2 \varphi p_{31} + \sin^2 \varphi p_{32} \\ \tau_{3\varphi} &= \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned} \tag{10.32}$$

wytrzymałość na rozciąganie dla dowolnego kierunku danego kątem φ wyrazić można następująco:

$$k_\varphi = \left[\sqrt{A_1 p_{1\varphi}^2 + A_2 p_{2\varphi}^2 + A_3 p_{3\varphi}^2 + B_3 \tau_{3\varphi}^2} \right]^{-1} \tag{10.33}$$

Celem wyznaczenia przewidywanej wartości współczynnika Lankforda konieczne jest wyznaczenie przyrostów odkształceń plastycznych:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11}^p &= d\Lambda \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{11}} = d\Lambda [2A_1 p_{11} p_1 + 2A_2 p_{21} p_2 + 2A_3 p_{31} p_3] \\ d\varepsilon_{22}^p &= d\Lambda \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{22}} = d\Lambda [2A_1 p_{12} p_1 + 2A_2 p_{22} p_2 + 2A_3 p_{32} p_3] \\ d\varepsilon_{33}^p &= d\Lambda \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{33}} = d\Lambda [2A_1 p_{13} p_1 + 2A_2 p_{23} p_2 + 2A_3 p_{33} p_3] \\ d\varepsilon_{12}^p &= d\Lambda \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{12}} = d\Lambda [2B_3 \tau_3] \end{aligned} \tag{10.34}$$

Oznaczmy przez x'_1 kierunek obciążenia jednoosiowego, tj. kierunek pod kątem φ do kierunku x_1 osi symetrii materiału, zaś przez x'_2 kierunek do niego prostopadły. Odpowiednie przyrosty odkształceń plastycznych znajdujemy transformując składowe tensora $d\varepsilon^p$:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{2'2'}^p &= \sin^2 \varphi d\varepsilon_{11}^p + \cos^2 \varphi d\varepsilon_{22}^p - \sin 2\varphi d\varepsilon_{12}^p \\ d\varepsilon_{1'2'}^p &= \frac{1}{2} (d\varepsilon_{22}^p - d\varepsilon_{11}^p) \sin 2\varphi + d\varepsilon_{12}^p \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (10.35)$$

Wartości przyrostów związane z naprężeniem jednoosiowym o wielkości σ na kierunku x'_1 uzyskujemy podstawiając w (10.35) wyrażenia (10.34) przemnożone przez σ (które i tak ulega skróceniu w końcowych wyrażeniach) oraz zastępując w nich p_k ($k = 1, 2, 3$) i τ_3 odpowiednio wyrażeniami (10.32) na $p_{k\varphi}$ oraz $\tau_{3\varphi}$. Współczynniki opisujące deformację plastyczną są równe:

$$R_\varphi = \frac{d\varepsilon_{2'2'}^p}{d\varepsilon_{33}^p}, \quad \Gamma_\varphi = \frac{d\varepsilon_{1'2'}^p}{d\varepsilon_{33}^p}. \quad (10.36)$$

10.9.2 Płaska symetria kwadratu

Rozkład spektralny płaskiego tensora podatności o symetrii kwadratu przedstawiony jest w szczególach w dodatku B. Przyjmujemy, że normalne płaszczyzn symetrii w materiale pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyężenia materiału przyjmuje postać

$$\eta_v(p) \cdot p^2 + \frac{\tau_{45}^2}{k_{s,45}^2} + \frac{\tau^2}{k_s^2} = 1 \quad (10.37)$$

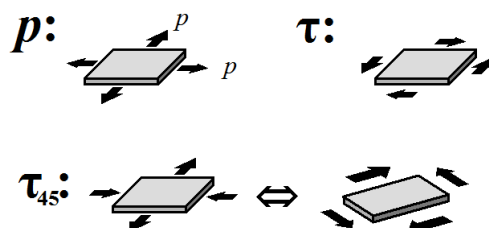
gdzie:

$p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ - płaskie naprężenie hydrostatyczne,

$\tau_{45} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$,

$\tau = \sigma_{12}$,

$k_s, k_{s,45}$ - graniczne wartości naprężeń odpowiednio τ i τ_{45} .



Rysunek 10.10: Stany własne płaskich tensorów sprężystości o symetrii kwadratu.

Wartości parametrów k_s oraz $k_{s,45}$ wyznaczone być mogą na podstawie stosunkowo prostych prób czystego ścinania - możemy więc przyjąć je za znane. Ponieważ jedyny nieznanymi parametr kryterium, tj. funkcja wpływu naprężenia hydrostatycznego, jest jednocześnie jedynym składnikiem, którego wartość ulega zmianie wraz ze zmianą wielkości składowej hydrostatycznej stanu naprężenia, jej postać i wartości mogą zostać oszacowane na podstawie wyników prób wytrzymałościowych w stanie jednoosiowym. Przyjmując, że poddajemy próbkę obciążeniu jednoosiowemu na kierunku pod kątem ϕ do kierunku danym osią x_1 , w stanie granicznym, gdy naprężenie osiąga wartość k_ϕ (charakterystyczną dla danego kąta ϕ), warunek graniczny (10.37) można przepisać w następującej postaci:

$$\eta_v \left(\frac{k_\phi}{2} \right) = 4 \left[\frac{1}{k_\phi^2} - \frac{1}{4k_{s,45}} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)^2 - \frac{1}{k_s} \cos^2 \phi \sin^2 \phi \right] \quad (10.38)$$

Można założyć ogólną postać matematyczną funkcji wpływu naprężenia hydrostatycznego za Burzyńskim [16], tj. funkcję homograficzną postaci:

$$\eta_v(p) = A + \frac{B}{p}. \quad (10.39)$$

Parametry A oraz B można wtedy wyrazić poprzez graniczne wartości naprężeń w stanach jednoosiowego rozciągania k_r , jednoosiowego ściskania k_c oraz czystego ścinania $k_{s,45}$:

$$\eta_v(p) = \left(\frac{4}{k_c k_r} - \frac{1}{k_{s,45}^2} \right) + \frac{2}{p} \cdot \frac{(k_c - k_r)}{k_c k_r}. \quad (10.40)$$

10.9.3 Płaska izotropia

Rozkład spektralny płaskiego izotropowego tensora podatności przedstawiony jest w szczególności w dodatku B. Warunek stanu granicznego wyprowadzony z proponowanej hipotezy wyciężenia materiału przyjmuje postać

$$\eta_v(p)p^2 + \frac{q^2}{k_s^2} = 1 \quad (10.41)$$

gdzie:

$p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ - płaskie naprężenie hydrostatyczne,

$q = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$ - płaskie naprężenie dewiatorowe,

k_s - graniczne naprężenie przy czystym ścinaniu.

Podprzestrzeń własna dewiatorów jest formalnie podprzestrzenią dwuwymiarową stąd - zgodnie z założeniami - całkowity udział stanów dewiatorowych w mierze wyciężenia materiału powinien być określony poprzez zależny od jednego parametru wskaźnik formy ścinania. W rzeczywistości jednak dowolne płaskie naprężenie dewiatorowe jest czystym ścinaniem, które w przypadku izotropowym są sobie równoważne z punktu widzenia wytrzymałości materiału. Z tego względu podprzestrzeń ta może być przez nas traktowana jako jednowymiarowa, przez co odpowiedni wskaźnik ścinania przyjmuje postać stałego parametru.

Postać funkcji wpływu naprężenia hydrostatycznego - z uwagi na równoważność wszystkich kierunków, a przez to i stałą składową hydrostatyczną w każdym granicznym stanie jednoosiowym - musi zostać wyznaczona na podstawie szeregu doświadczeń o różnej wartości składowej hydrostatycznej w stanie granicznym, tj. w stanach dwuosiowych, w szczególności np. w złożeniu jednorodnego dwuosiowego rozciągania (płaskiego naprężenia hydrostatycznego) i rozciągania osiowego (np. rurka cienkościenna rozciągana i poddana wewnętrznemu ciśnieniu). Zakładając - jak w przypadku płaskiej symetrii kwadratu - postać funkcji wpływu $\eta_v(p)$ za Burzyńskim, otrzymujemy:

$$\eta_v(p) = \left(\frac{4}{k_c k_r} - \frac{1}{k_s^2} \right) + \frac{2}{p} \cdot \frac{(k_c - k_r)}{k_c k_r}. \quad (10.42)$$

11 Podsumowanie

Praca niniejsza w ogólny sposób traktuje o zagadnieniu sformułowania kryterium stanu granicznego dla materiałów anizotropowych, wykazujących różnicę wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu, skupiając się na hipotezach, w których miarę wyężenia materiału stanowią wielkości związane z gęstością energii sprężystej. Kluczowym jej elementem jest przedstawienie oraz możliwie szczegółowe omówienie własnej propozycji hipotezy tego typu. Poza przedstawieniem ogólnego jej sformułowania, założeń i analizy kolejnych przypadków symetrii sprężystej, wskazano na pewne rozwiązania, których zastosowanie może stanowić podstawę praktycznej identyfikacji parametrów kryterium stanu granicznego - w szczególności chodzi tu o sam algorytm postępowania oraz propozycje doboru stanów naprężenia i orientacji próbek (charakterystycznych dla zadanej symetrii sprężystej) umożliwiające realizację tego zadania. Trzeba jednak zwrócić uwagę, iż praca - bardziej z konieczności, niż z założenia - ma charakter zaledwie teoretyczny. Skąpy zbiór kompletnych danych doświadczalnych obecnych w publikacjach naukowych oraz duży koszt i trudność przeprowadzenia dostatecznie szeroko zakrojonego programu badań²¹ uniemożliwiły w praktyce zastosowanie zaproponowanych schematów. Eksperymentalna weryfikacja tezy pracy - zarówno na gruncie makroskopowych badań wytrzymałościowych, jak i modelowania i eksperymentu w skali molekularnej - stanowić może temat dalszego toku badań, któremu praca niniejsza wyznaczyć może kierunek, a który rzucić może nowe światło na przedstawione w niej zagadnienia i dostarczyć nowych, ściślej motywowanych fizycznie interpretacji.

²¹ Wyniki przeprowadzonych niezależnie od autora badań na szeregu próbek w różnych stanach naprężenia, dla różnych orientacji, przy określaniu ich cech tak sprężystych jak i wytrzymałościowych, które dostarczyć miały bazę danych doświadczalnych stanowiących podstawę dla weryfikacji przedstawionej w pracy propozycji kryterium granicznego okazały się być - niestety - w zbyt dużym stopniu niemiarodajne.

Załączniki

A Przekształcenia geometryczne w \mathcal{E}^3 i ich reprezentacje w \mathcal{T}_{sym}^2

Szczegółowy opis automorfizmów przestrzeni tensorowych znaleźć można w [73]. Obrót dowolnego wektora w \mathcal{E}^3 , także wersorów bazy przyjętego (tutaj kartezjańskiego) układu współrzędnych, realizowany jest przez odpowiednią macierz obrotu. Ponieważ dowolna macierz ortogonalna

$$\mathbf{Q} \in \mathcal{T}^2 = \mathcal{E}^3 \otimes \mathcal{E}^3 : \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{1} \Leftrightarrow \det \mathbf{Q} = \pm 1$$

nie zmienia długości dowolnego wektora \mathbf{v} , na który działa:

$$|\mathbf{Q}\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v})^T \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2, \quad (\text{A.1})$$

może być zatem interpretowana jako macierz obrotu. Zbiór wszystkich macierzy (trójwymiarowych tensorów drugiego rzędu) ortogonalnych tworzy pełną grupę ortogonalną przekształceń geometrycznych w \mathcal{E}^3 zachowujących długość wektora. Oznaczamy ją symbolem $\mathcal{O}(3)$:

$$\mathcal{O}(3) = \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{T}^2 : \det \mathbf{Q} = \pm 1 \}$$

Działaniem grupowym jest składanie odwzorowań (proste nasunięcie tensorów, mnożenie macierzowe). Podgrupę $\mathcal{O}(3)$ stanowi właściwa grupa ortogonalna $\mathcal{SO}(3)$, tj. zbiór macierzy ortogonalnych o dodatnim wyznaczniku wraz z działaniem składania odwzorowań:

$$\mathcal{SO}(3) = \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{T}^2 : \det \mathbf{Q} = 1 \}$$

Elementy $\mathcal{SO}(3)$ interpretujemy jako operatory obrotu. Operator obrotu o kąt ϕ wokół osi danej wersorem \mathbf{n} oznaczamy przez $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{\phi}$. Zbiór \mathcal{N} macierzy ortogonalnych o ujemnym wyznaczniku:

$$\mathcal{N} = \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{T}^2 : \det \mathbf{Q} = -1 \}$$

nie może stanowić grupy ze względu na ich składanie, ponieważ złożenie jego elementów nie należy do tego zbioru. Zbiór ten nazywamy zbiorem operatorów odbicia. Dowolny jego element $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$, zgodnie z powyższą definicją zbioru \mathcal{N} , może być przedstawiony w postaci:

$$\mathbf{N} = -\mathbf{1} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{A.2})$$

gdzie $\mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3)$ natomiast $-\mathbf{1}$ jest operatorem inwersji przyporządkowującym dowolnemu wektorowi wektor do niego przeciwny $-\mathbf{1} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$, zaś $\mathbf{1}$ jest operatorem tożsamościowym na wektorach w \mathcal{E}^3 . Operator $\mathbf{I}_{\mathbf{n}}$ zdefiniowany jako $\mathbf{I}_{\mathbf{n}} = -\mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{\pi}$ realizuje odbicie lustrzane względem płaszczyzny prostopadłej do wektora \mathbf{n} - w lokalnym prostokątnym układzie współrzędnych danym wzajemnie prostopadłymi wersorami $(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{k})$ mamy:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = (-\mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{\pi}) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{1} \cdot (v_n \mathbf{n} - v_m \mathbf{m} - v_k \mathbf{k}) = -v_n \mathbf{n} + v_m \mathbf{m} + v_k \mathbf{k} \quad (\text{A.3})$$

Współrzędne $A_{ij\dots n}$ dowolnego tensora rzędu n przy zmianie bazy danej macierzą ortogonalną \mathbf{Q} transformują się zgodnie z tensorowym prawem transformacji:

$$\tilde{A}_{pq\dots s} = A_{ij\dots n} Q_{pi} Q_{qj} \dots Q_{sn} \quad (\text{A.4})$$

Obroty dowolnego wektora \mathbf{v} czy tensora rzędu drugiego \mathbf{T} realizowane są działaniem tensora ortogonalnego \mathbf{Q} :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} * \mathbf{v} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{Q} * \mathbf{T} &= \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ogólnie zaś:

$$\mathbf{Q} * \mathbf{A} = A_{ij\dots n} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j) \otimes \dots \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_n) \quad (\text{A.6})$$

Rozważmy macierz obrotu o kąt ψ wokół pewnej, dowolnie wybranej, osi danej wersorem $\boldsymbol{\nu}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\nu^\psi &= e^{\psi \mathbf{X}_\nu} = \cos \psi \mathbf{1} + (1 - \cos \psi) \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} + \sin \psi \mathbf{X}_\nu \cong \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi + \nu_1^2(1 - \cos \psi) & \nu_1 \nu_2(1 - \cos \psi) - \nu_3 \sin \psi & \nu_3 \nu_1(1 - \cos \psi) + \nu_2 \sin \psi \\ \nu_1 \nu_2(1 - \cos \psi) + \nu_3 \sin \psi & \cos \psi + \nu_2^2(1 - \cos \psi) & \nu_2 \nu_3(1 - \cos \psi) - \nu_1 \sin \psi \\ \nu_3 \nu_1(1 - \cos \psi) - \nu_2 \sin \psi & \nu_2 \nu_3(1 - \cos \psi) + \nu_1 \sin \psi & \cos \psi + \nu_3^2(1 - \cos \psi) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

gdzie \mathbf{X}_ν jest antysymetrycznym operatorem (tensorem drugiego rzędu) przyporządkowującym dowolnemu wektorowi \mathbf{v} jego iloczyn wektorowy z $\boldsymbol{\nu}$: $\mathbf{X}_\nu \mathbf{v} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v}$ o następujących właściwościach:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\nu^2 &= \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} - \mathbf{1} \\ \mathbf{X}_\nu &= \mathbf{X}_\nu^{(4k+1)} \\ \mathbf{X}_\nu^2 &= \mathbf{X}_\nu^{(4k+2)} & k \in \mathbb{N} \\ \mathbf{X}_\nu^3 &= \mathbf{X}_\nu^{(4k+3)} = -\mathbf{X}_\nu \\ \mathbf{X}_\nu^4 &= \mathbf{X}_\nu^{(4k+4)} = -\mathbf{X}_\nu^2 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

zaś funkcja wykładnicza argumentu tensorowego zdefiniowana jest jako suma szeregu:

$$f(\mathbf{X}) = e^{\mathbf{X}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{X}}{1!} + \frac{\mathbf{X}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{X}^n}{n!} + \dots \quad (\text{A.9})$$

Macierz obrotu transformuje ona składowe dowolnego elementu $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_{sym}^2$ zgodnie z ogólnym prawem transformacyjnym (A.4):

$$\tilde{T}_{ij} = T_{kl} r_{ik} r_{jl} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{R}_\nu^\psi * \mathbf{T} \cong \begin{bmatrix} r_{11}^2 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & \sqrt{2}r_{12}r_{13} & \sqrt{2}r_{11}r_{13} & \sqrt{2}r_{11}r_{12} \\ r_{21}^2 & r_{22}^2 & r_{23}^2 & \sqrt{2}r_{22}r_{23} & \sqrt{2}r_{21}r_{23} & \sqrt{2}r_{21}r_{22} \\ r_{31}^2 & r_{32}^2 & r_{33}^2 & \sqrt{2}r_{32}r_{33} & \sqrt{2}r_{31}r_{33} & \sqrt{2}r_{31}r_{32} \\ \sqrt{2}r_{21}r_{31} & \sqrt{2}r_{22}r_{32} & \sqrt{2}r_{23}r_{33} & (r_{22}r_{33} + r_{23}r_{32}) & (r_{23}r_{31} + r_{21}r_{33}) & (r_{21}r_{32} + r_{22}r_{31}) \\ \sqrt{2}r_{31}r_{11} & \sqrt{2}r_{32}r_{12} & \sqrt{2}r_{33}r_{13} & (r_{32}r_{13} + r_{33}r_{12}) & (r_{33}r_{11} + r_{31}r_{13}) & (r_{31}r_{12} + r_{32}r_{11}) \\ \sqrt{2}r_{11}r_{21} & \sqrt{2}r_{12}r_{22} & \sqrt{2}r_{13}r_{23} & (r_{12}r_{23} + r_{13}r_{22}) & (r_{13}r_{21} + r_{11}r_{23}) & (r_{11}r_{22} + r_{12}r_{21}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ \sqrt{2}T_{23} \\ \sqrt{2}T_{31} \\ \sqrt{2}T_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Przyjmując następnie wersor kierunku osi obrotu równoległy do kolejnych osi układu współrzędnych, otrzymujemy następujące sześciowymiarowe reprezentacje obrotów w przestrzeni fizycznej:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^\phi \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \cos 2\phi & 1 - \cos 2\phi & -\sqrt{2} \sin 2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos 2\phi & 1 + \cos 2\phi & \sqrt{2} \sin 2\phi & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \sin 2\phi & -\sqrt{2} \sin 2\phi & 2 \cos 2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \phi & 2 \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \phi & 2 \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_3}^\phi \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\phi & 0 & 1 - \cos 2\phi & 0 & \sqrt{2} \sin 2\phi & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \cos 2\phi & 0 & 1 + \cos 2\phi & 0 & -\sqrt{2} \sin 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cos \phi & 0 & -2 \sin \phi \\ -\sqrt{2} \sin 2\phi & 0 & \sqrt{2} \sin 2\phi & 0 & 2 \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \sin \phi & 0 & 2 \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_3}^\phi \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\phi & 1 - \cos 2\phi & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \sin 2\phi \\ 1 - \cos 2\phi & 1 + \cos 2\phi & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \sin 2\phi \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cos \phi & 2 \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \sin \phi & 2 \cos \phi & 0 \\ \sqrt{2} \sin 2\phi & -\sqrt{2} \sin 2\phi & 0 & 0 & 0 & 2 \cos 2\phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Są to macierze ortogonalne o wyznaczniku równym 1. Sześciowymiarową reprezentację operatora obrotu o dowolny kąt wokół wybranej osi podali w [65] Mehrabadi, Cowin, Jaric. Reprezentację obrotu będącego złożeniem obrotów wokół trzech prostopadłych osi podali w [10] Blinowski i Ostrowska-Maciejewska. Odwzorowania geometryczne na płaskich tensorach Hooke'a omówili Blinowski, Ostrowska-Maciejewska oraz Rychlewski w [11] oraz Ostrowska-Maciejewska i Pęcherski w [74].

Postępując w sposób analogiczny do przedstawionego powyżej znajdujemy następującą reprezentację operatora odbicia lustrzanego względem dowolnej płaszczyzny danej wektorem normalnym $\boldsymbol{\nu}$, który reprezentuje macierz:

$$\mathbf{I}_\nu = \mathbf{1} - 2(\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}) \cong \begin{bmatrix} 1 - 2\nu_1^2 & -2\nu_1\nu_2 & -2\nu_3\nu_1 \\ & 1 - 2\nu_2^2 & -2\nu_2\nu_3 \\ \text{sym} & & 1 - 2\nu_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

W przestrzeni sześciowymiarowej przekształceniu temu odpowiada macierz:

$$\mathbf{I}_\nu \cong 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{(1-2\nu_1^2)^2}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2}\nu_1^2\nu_2^2 & \sqrt{2}\nu_1^2\nu_3^2 & \dots \\ \sqrt{2}\nu_1^2\nu_2^2 & \frac{(1-2\nu_2^2)^2}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2}\nu_2^2\nu_3^2 & \dots \\ \sqrt{2}\nu_1^2\nu_3^2 & \sqrt{2}\nu_2^2\nu_3^2 & \frac{(1-2\nu_3^2)^2}{2\sqrt{2}} & \dots \\ 2\nu_1^2\nu_2\nu_3 & \nu_2\nu_3(2\nu_2^2-1) & \nu_2\nu_3(2\nu_3^2-1) & \dots \\ \nu_3\nu_1(2\nu_1^2-1) & 2\nu_1\nu_2^2\nu_3 & \nu_3\nu_1(2\nu_3^2-1) & \dots \\ \nu_1\nu_2(2\nu_1^2-1) & \nu_1\nu_2(2\nu_2^2-1) & 2\nu_1\nu_2\nu_3^2 & \dots \\ \dots & 2\nu_1^2\nu_2\nu_3 & \nu_1\nu_3(2\nu_1^2-1) & \nu_1\nu_2(2\nu_1^2-1) \\ \dots & \nu_3\nu_2(2\nu_2^2-1) & 2\nu_1\nu_2^2\nu_3 & \nu_2\nu_1(2\nu_2^2-1) \\ \dots & \nu_2\nu_3(2\nu_3^2-1) & \nu_1\nu_3(2\nu_3^2-1) & 2\nu_1\nu_2\nu_3^2 \\ \dots & \frac{8\nu_2^2\nu_3^2-2(\nu_2^2+\nu_3^2)+1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\nu_1\nu_2(4\nu_3^2-1) & \frac{1}{\sqrt{2}}\nu_1\nu_3(4\nu_2^2-1) \\ \dots & \frac{1}{\sqrt{2}}\nu_1\nu_2(4\nu_3^2-1) & \frac{8\nu_3^2\nu_1^2-2(\nu_3^2+\nu_1^2)+1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\nu_2\nu_3(4\nu_1^2-1) \\ \dots & \frac{1}{\sqrt{2}}\nu_1\nu_3(4\nu_2^2-1) & \frac{1}{\sqrt{2}}\nu_2\nu_3(4\nu_1^2-1) & \frac{8\nu_1^2\nu_2^2-2(\nu_1^2+\nu_2^2)+1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Macierze reprezentujące odbicia lustrzane względem płaszczyzn prostopadłych do przyjętego prostokątnego układu współrzędnych mają postać:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{e}_1} \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{e}_2} \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{e}_3} \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Oczywistym jest, iż operator tożsamościowy $\mathbf{1} = [\delta_{ij}]$ w \mathcal{E}^3 jest również operatorem tożsamościowym w \mathcal{F}_{sym}^2 - dla dowolnego tensora drugiego rzędu \mathbf{a} :

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a} \quad \rightarrow \quad \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = [\delta_{ik}\delta_{jl}] \quad (\text{A.18})$$

Łatwo zauważyć, iż także inwersji $-\mathbf{1}$, z uwagi na jej symetrycznie przeciwne działanie na tensory o walencji parzystej, w \mathcal{F}_{sym}^2 odpowiada operator tożsamościowy. Ponieważ rozpatrujemy przestrzeń tensorów symetrycznych stąd także operator przyporządkowujący dowolnemu tensorowi \mathbf{a} jego transpozycję:

$$\mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_2 = [\delta_{il}\delta_{jk}] \quad (\text{A.19})$$

w \mathcal{F}_{sym}^2 odpowiada operatorowi tożsamościowemu. Operator tożsamościowy \mathbb{I} w \mathcal{F}_{sym}^2 jest operatorem przyporządkowującym dowolnemu tensorowi jego część symetryczną $\mathbf{a}^S = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^T)$:

$$\mathbb{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{I} = \frac{1}{2}[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] \quad (\text{A.20})$$

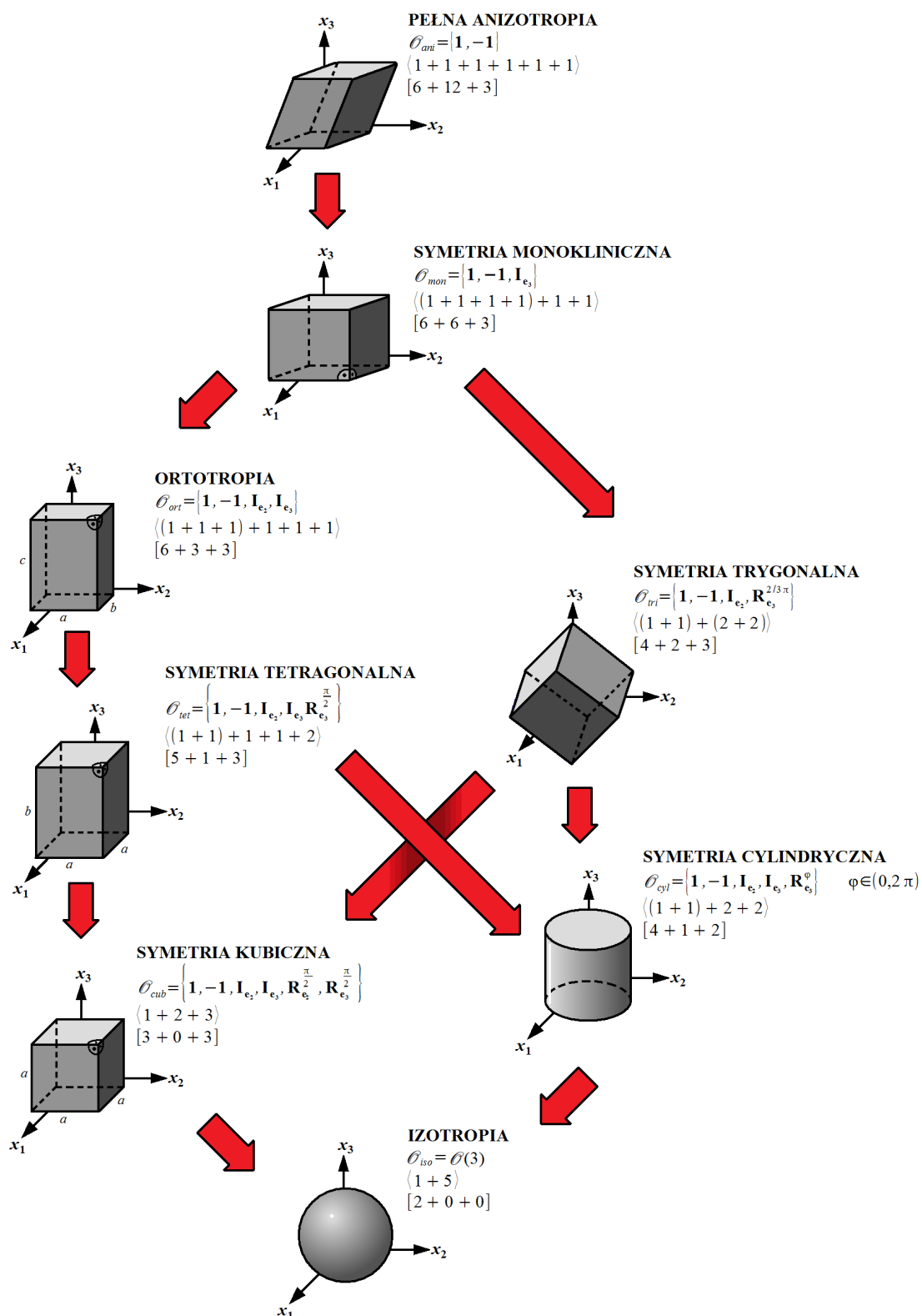
Jego reprezentacją w \mathcal{T}_{sym}^2 jest oczywiście:

$$\mathbb{I} \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Macierzową reprezentację w przestrzeni \mathcal{T}_{sym}^2 (oznaczymy ją nawiasem $\{ \}_{\mathcal{G}}$) dowolnego tensora czwartego rzędu \mathbf{A} spełniającego warunki symetrii (5.5) po przekształceniu $\mathbf{R}_{\mathbf{Q}}$ danym tensorem ortogonalnym \mathbf{Q} (będącym w ogólności obrotem z ewentualnym złożeniem go z odbiciem lustrzanym) można znaleźć na drodze zmiany bazy w \mathcal{T}_{sym}^2 (obrót jej elementów) i znalezienia w niej składowych \mathbf{A} , co sprowadza się do klasycznego obustronnego nasunięcia prostego macierzy reprezentacji przekształcenia $\mathbf{R}_{\mathbf{Q}}$ w \mathcal{T}_{sym}^2 i jej transpozycji na macierz reprezentacji \mathbf{A} :

$$\{\mathbf{R}_{\mathbf{Q}} * \mathbf{A}\}_{\mathcal{G}} = \{\mathbf{R}_{\mathbf{Q}}\}_{\mathcal{G}} \cdot \{\mathbf{A}\}_{\mathcal{G}} \cdot \{\mathbf{R}_{\mathbf{Q}}\}_{\mathcal{G}}^T \quad (\text{A.22})$$

B Symetrie liniowej sprężystości



Rysunek B.1: Symetrie liniowej sprężystości - zbiory generujące grupy symetrii i indeksy strukturalne. Każda strzałka oznacza dodanie kolejnego elementu symetrii

B.1 Pełna anizotropia (układ trójskośny)

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{ani} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} \cong \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \sqrt{2}A_{1123} & \sqrt{2}A_{1131} & \sqrt{2}A_{1112} \\ & A_{2222} & A_{2233} & \sqrt{2}A_{2223} & \sqrt{2}A_{2231} & \sqrt{2}A_{2212} \\ & & A_{3333} & \sqrt{2}A_{3323} & \sqrt{2}A_{3331} & \sqrt{2}A_{3312} \\ & & & 2A_{2323} & 2A_{2331} & 2A_{2312} \\ & \text{sym} & & & 2A_{3131} & 2A_{3112} \\ & & & & & 2A_{1212} \end{bmatrix}$$

$$\text{Pierwszy indeks strukturalny: } \langle 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \rangle$$

$$\text{Drugi indeks strukturalny: } [6 + 12 + 3]$$

Zgodnie z twierdzeniem Abela-Ruffiniego wartości własnych tensora o symetrii trójskośnej nie da się wyrazić poprzez jego składowe dla przypadku ogólnego - także liczba, wymiar i charakter jego podprzestrzeni własnych może się zmieniać w zbyt szerokim zakresie. Z uwagi na zbyt dużą ogólność tego typu analizy nie prezentujemy tutaj żadnych bardziej szczegółowych cech rozkładu spektralnego całkowicie anizotropowego tensora czwartego rzędu.

B.1.1 Symetria trójskośna objętościowo izotropowa

Jeśli składowe w pełni anizotropowego tensora \mathbf{A} spełniają warunki Burzyńskiego (7.3):

$$(3 \text{ niezależne związki}) \quad \begin{cases} A_{1123} + A_{2223} + A_{3323} = 0 \\ A_{1131} + A_{2231} + A_{3331} = 0 \\ A_{1112} + A_{2212} + A_{3312} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$(2 \text{ niezależne związki}) \quad \begin{cases} A_{1111} - A_{2222} = A_{2233} - A_{1133} \\ A_{2222} - A_{3333} = A_{3311} - A_{2211} \\ A_{3333} - A_{1111} = A_{1122} - A_{3322} \end{cases}$$

Wtedy jednym z jego stanów własnych jest stan kulisty. Otrzymujemy wtedy:

$$\text{Pierwszy indeks strukturalny: } \langle 1 + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \rangle$$

$$\text{Drugi indeks strukturalny: } [6 + 7 + 3]$$

Podprzestrzenie własne:

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych
- Pięć jednowymiarowych podprzestrzeni własnych dewiatorów (w szczególności odpowiadające im wartości własne mogą być takie same - wtedy podprzestrzenie te łączą się w podprzestrzeń o większym wymiarze)

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = A_{1111} + A_{1122} + A_{1133} = A_{2211} + A_{2222} + A_{2233} = A_{3311} + A_{3322} + A_{3333}$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Pięć jednowymiarowych podprzestrzeni własnych dewiatorów

Z uwagi na ortogonalność tych podprzestrzeni do przestrzeni stanów kulistych, odpowiadające im stany własne muszą być dewiatorami. Blinowski i Rychlewski udowodnili [12], że jeśli pięć stanów czystego ścinania stanowi pięć stanów własnych tensora podatności odpowiadających istotnie różnym modułom Kelvina, to tensor podatności jest w pełni anizotropowy. W [12] udowodniono także, że jeśli przynajmniej dwa ze stanów własnych tensora podatności są czystymi ścinaniami należącymi do jednej podprzestrzeni czystych ścinań o jednym wspólnym ustalonym kierunku ścinania, to materiał taki posiada co najmniej jedną płaszczyznę symetrii a zatem jest materiałem symetrycznym (nie w pełni anizotropowym). Zatem spośród wszystkich dewiatorowych stanów własnych objętościowo izotropowego tensora o symetrii trójskośnej żadne dwa nie mogą należeć do wspólnej podprzestrzeni czystych ścinań o jednym wspólnym ustalonym kierunku ścinania.

B.2 Symetria monokliniczna (układ jednoskośny)

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{mon} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}\}$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} \cong \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \sqrt{2}A_{1123} & 0 & 0 \\ & A_{2222} & A_{2233} & \sqrt{2}A_{2223} & 0 & 0 \\ & & A_{3333} & \sqrt{2}A_{3323} & 0 & 0 \\ & & & 2A_{2323} & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2A_{3131} & 2A_{3112} \\ & & & & & 2A_{1212} \end{bmatrix}$$

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle (1 + 1 + 1 + 1) + 1 + 1 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[6 + 6 + 3]$

Podprzestrzenie własne:

- Cztery jednowymiarowe podprzestrzenie własne (*w szczególności odpowiadające im wartości własne mogą być takie same - wtedy podprzestrzenie te łączą się w podprzestrzeń o większym wymiarze*)
- Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań

Cztery jednowymiarowe podprzestrzenie

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \sqrt{2}A_{1123} \\ A_{1122} & A_{2222} & A_{2233} & \sqrt{2}A_{2223} \\ A_{1133} & A_{2233} & A_{3333} & \sqrt{2}A_{3323} \\ \sqrt{2}A_{1123} & \sqrt{2}A_{2223} & \sqrt{2}A_{3323} & 2A_{2323} \end{bmatrix}.$$

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right],$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}^3) - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{C}^2) \text{tr}(\mathbf{C}) + \frac{1}{6} (\text{tr}(\mathbf{C}))^3, \quad I_4 = \det(\mathbf{C})$$

Moduły Kelvina są rozwiązaniami równania

$$\lambda^4 - I_1 \lambda^3 + I_2 \lambda^2 - I_3 \lambda + I_4 = 0$$

Pierwiastki te można znaleźć stosując np. znane wzory Lodovico Ferrari. Podobnie jak w przypadku pełnej anizotropii, z uwagi na zbyt dużą ogólność tego typu rozważań (bardzo złożona postać stanów własnych oraz wiele możliwych kombinacji różnych krotności pierwiastków tego równania - co rzutuje na wymiary odpowiednich podprzestrzeni) nie będziemy przeprowadzać szczegółowej analizy charakteru tego rozwiązania.

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań
Moduły Kelvina:

$$\lambda_5 = (A_{2323} + A_{3131}) - \sqrt{(A_{2323} - A_{3131})^2 + 4A_{3112}^2}$$

$$\lambda_6 = (A_{2323} + A_{3131}) + \sqrt{(A_{2323} - A_{3131})^2 + 4A_{3112}^2}$$

Unormowane stany własne:

$$\omega_5 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sin \phi & \cos \phi \\ \sin \phi & 0 & 0 \\ \cos \phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega_6 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ \cos \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\lambda_1 - 2A_{3131}}{2A_{3112}} = \frac{2A_{3112}}{\lambda_1 - 2A_{1212}} = \frac{2A_{3112}}{2A_{3131} - \lambda_2} = \frac{2A_{1212} - \lambda_2}{2A_{3112}}$$

Dokonując obrotu układu współrzędnych o kąt ϕ wokół osi x_3 otrzymujemy

$$\omega_5 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega_6 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projektory ortogonalne:

$$\mathbf{P}_5 \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & \\ & & & & \sin^2 \phi & \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_6 \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & \sin^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi & \\ & & & & \cos^2 \phi & \end{bmatrix}$$

B.2.1 Symetria monokliniczna objętościowo izotropowa

Jeśli składowe monoklinicznego tensora \mathbf{A} spełniają warunki Burzyńskiego (7.3), wtedy jednym z jego stanów własnych jest stan kulisty. Tensor \mathbf{A} przyjmuje wtedy ogólną postać:

$$\mathbf{A} \cong \begin{bmatrix} K - (A_{1122} + A_{1133}) & A_{1122} & A_{1133} & \dots \\ A_{1122} & K - (A_{1122} - A_{2233}) & A_{2233} & \dots \\ A_{1133} & A_{2233} & K - (A_{1133} - A_{2233}) & \dots \\ \sqrt{2}A_{1123} & \sqrt{2}A_{2223} & -\sqrt{2}(A_{1123} + A_{2223}) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \sqrt{2}A_{1123} & 0 & 0 \\ \dots & \sqrt{2}A_{2223} & 0 & 0 \\ \dots & -\sqrt{2}(A_{1123} + A_{2223}) & 0 & 0 \\ \dots & 2A_{2323} & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 2A_{3131} & 2A_{3112} \\ \dots & 0 & 2A_{3112} & 2A_{1212} \end{bmatrix}$$

gdzie moduł K wiąże się ze składowymi A_{ijkl} z ogólnej postaci tensora monoklinicznego następującą zależnością:

$$K = A_{1111} + A_{1122} + A_{1133} = A_{2211} + A_{2222} + A_{2233} = A_{3311} + A_{3322} + A_{3333}$$

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + (1 + 1 + 1) + 1 + 1 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[6 + 3 + 3]$

Podprzestrzenie własne:

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych
- Trzy jednowymiarowe podprzestrzenie własne dewiatorów (*w szczególności odpowiadające im wartości własne mogą być takie same - wtedy podprzestrzenie te łączą się w podprzestrzeń o większym wymiarze*)
- Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = K$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Trzy jednowymiarowe podprzestrzenie własne dewiatorów

Moduły Kelvina odpowiadające tym podprzestrzeniom własnym mogą być znalezione tym samym sposobem, jak w ogólnym przypadku symetrii monoklinicznej. Znajomość λ_1 jako jednej z wartości własnych macierzy \mathbf{C} pozwala zredukować równanie na wartości własne \mathbf{A} do równania stopnia trzeciego - jego pierwiastki można znaleźć stosując znane wzory Girolamo Cardano.

Stany własne odpowiadające tym modułom Kelvina, z uwagi na ortogonalność związanych z nimi podprzestrzeni własnych do podprzestrzeni stanów kulistych, muszą być stanami dewiatorowymi. Jeśli moduły Kelvina związane z trzema omawianymi podprzestrzeniami są istotnie różne, to odpowiadające im stany własne nie mogą być trzema wzajemnie ortogonalnymi stanami czystego ścinania. Gdyby tak było, to łącznie ze stanami własnymi dwóch

ostatnich podprzestrzeni pięć parami ortogonalnych stanów czystego ścinania byłoby stanami własnymi, zaś zgodnie z jednym z twierdzeń Blinowskiego i Rychlewskiego [12] o czystych ścinaniach, sytuacja taka może mieć miejsce tylko dla pełnej anizotropii.

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań

Moduły Kelvina, stany własne oraz projektory ortogonalne jak w ogólnym przypadku symetrii monoklinicznej.

B.3 Ortotropia (układ rombowy)

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{ort} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}, \mathbf{I}_{e_2}\}$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & f & e & 0 & 0 & 0 \\ & b & d & 0 & 0 & 0 \\ & & c & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2p & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2q & 0 \\ & & & & & 2r \end{bmatrix}$$

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle(1 + 1 + 1) + 1 + 1 + 1\rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[6 + 3 + 3]$

Podprzestrzenie własne:

- Trzy jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej (w szczególności odpowiadające im wartości własne mogą być takie same - wtedy podprzestrzenie te łączą się w podprzestrzeń o większym wymiarze)
- Trzy jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinania w płaszczyznach symetrii materiału

Podprzestrzenie własne stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej

Wprowadzamy oznaczenia:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_C = \begin{bmatrix} a - \lambda_m & f & e \\ f & b - \lambda_m & d \\ e & d & c - \lambda_m \end{bmatrix}, \quad \lambda_m = \frac{a + b + c}{3}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{D}_C^2), \quad J_3 = \det(\mathbf{C}), \quad \Delta = \left(\frac{J_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{J_2}{3}\right)^3$$

- **Jedna trójwymiarowa podprzestrzeń własna** ($\Delta = 0, J_3 = 0$)

Moduły Kelvina:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_m$$

Moduł λ_m jest wtedy modułem objętościowym, zaś odpowiadające mu stany własne to dowolne stany o zerowych składowych spoza przekątnej głównej - w szczególności są to np. stany kuliste, stany jednoosiowe a także stany czystego ścinania w płaszczyznach symetrii w kierunkach równo nachylonych do osi symetrii itp. Jest to możliwe tylko, gdy $d = e = f = 0$.

- **Jedna dwuwymiarowa i jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna**
($\Delta = 0, J_3 \neq 0$)

Moduły Kelvina:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_m - \sqrt[3]{\frac{J_3}{2}}, \quad \lambda_3 = \lambda_m + 2\sqrt[3]{\frac{J_3}{2}}$$

- **Trzy jednowymiarowe podprzestrzenie własne** ($\Delta \neq 0, J_3 \neq 0$)

Moduły Kelvina:

$$\lambda_K = \lambda_m + \sqrt{\frac{4J_2}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) + (K-1) \frac{2\pi}{3} \right] \quad K = 1, 2, 3$$

Unormowane stany własne:

$$\omega_1 \cong \begin{bmatrix} \cos \varkappa_1 \cos \varkappa_2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varkappa_1 \sin \varkappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varkappa_1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 \cong \begin{bmatrix} -\cos \varkappa_3 \sin \varkappa_2 + \\ + \sin \varkappa_3 \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varkappa_3 \cos \varkappa_2 + \\ 0 & + \sin \varkappa_3 \sin \varkappa_1 \sin \varkappa_2 & 0 \\ & 0 & -\sin \varkappa_3 \cos \varkappa_1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3 \cong \begin{bmatrix} \sin \varkappa_3 \sin \varkappa_2 + \\ + \cos \varkappa_3 \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varkappa_3 \cos \varkappa_2 + \\ 0 & + \cos \varkappa_3 \sin \varkappa_1 \sin \varkappa_2 & 0 \\ & 0 & -\cos \varkappa_3 \cos \varkappa_1 \end{bmatrix}$$

Projektory ortogonalne dane są ogólnym wyrażeniem (6.14). Bezwymiarowe parametry $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ są funkcjami trzech dystrybutorów sztywności [58].

Trzy jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań

Moduły Kelvina:

$$\lambda_4 = 2p$$

$$\lambda_5 = 2q$$

$$\lambda_6 = 2r$$

Unormowane stany własne:

$$\omega_4 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega_5 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega_6 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projektory ortogonalne:

$$\mathbf{P}_4 \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_5 \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_6 \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

B.3.1 Ortotropia objętościowo izotropowa

Przyjmując, że funkcje dystrybutorów sztywności $\varkappa_1 = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $\varkappa_2 = \frac{\pi}{4}$, stan własny ω_1 okazuje się być stanem kulistym. Tensor ten jest wtedy objętościowo izotropowy a jego składowe spełniają warunki Burzyńskiego (7.3) - przyjmuje on ogólną postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} K - (e + f) & f & e & 0 & 0 & 0 \\ & K - (f + d) & d & 0 & 0 & 0 \\ & & K - (d + e) & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2p & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2q & 0 \\ & & & & & 2r \end{bmatrix}$$

gdzie moduł K wiąże się ze składowymi a, b, \dots, f z ogólnej postaci tensora ortotropowego następującą zależnością:

$$K = a + f + e = b + d + f = c + d + e$$

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + (1 + 1) + 1 + 1 + 1 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[6 + 1 + 3]$

Podprzestrzenie własne:

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych
- Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne dewiatorów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej
- Trzy jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań w płaszczyznach symetrii materiału

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = K$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne dewiatorów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej

Moduły Kelvina:

$$\lambda_2 = K - (d + e + f) - \sqrt{(d^2 + e^2 + f^2) - (ef + fd + de)}$$

$$\lambda_3 = K - (d + e + f) + \sqrt{(d^2 + e^2 + f^2) - (ef + fd + de)}$$

Unormowane stany własne:

$$\omega_2 \cong \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sin \varkappa_3 - \sqrt{3} \cos \varkappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varkappa_3 + \sqrt{3} \cos \varkappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \sin \varkappa_3 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3 \cong \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \cos \varkappa_3 + \sqrt{3} \sin \varkappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varkappa_3 - \sqrt{3} \sin \varkappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cos \varkappa_3 \end{bmatrix}$$

gdzie parametr \varkappa_3 będący funkcją dystrybutora sztywności jest dany wzorem:

$$\operatorname{tg} \varkappa_3 = \frac{\sqrt{3}(d - e)}{2f - e - d + 2\sqrt{(d^2 + e^2 + f^2) - (ef + fd + de)}}$$

Projektory ortogonalne:

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \cos 2\varkappa_3 - \sqrt{3} \sin 2\varkappa_3 + 2 & -2 \cos 2\varkappa_3 - 1 & \cos 2\varkappa_3 + \sqrt{3} \sin 2\varkappa_3 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos 2\varkappa_3 + \sqrt{3} \sin 2\varkappa_3 + 2 & \cos 2\varkappa_3 - \sqrt{3} \sin 2\varkappa_3 - 1 & -2 \cos 2\varkappa_3 + 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -(\cos 2\varkappa_3 - \sqrt{3} \sin 2\varkappa_3) + 2 & 2 \cos 2\varkappa_3 - 1 & -(\cos 2\varkappa_3 + \sqrt{3} \sin 2\varkappa_3) - 1 & 0 & 0 & 0 \\ & -(\cos 2\varkappa_3 + \sqrt{3} \sin 2\varkappa_3) + 2 & -(\cos 2\varkappa_3 - \sqrt{3} \sin 2\varkappa_3) - 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 \cos 2\varkappa_3 + 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Gdy spełniony jest warunek

$$(d^2 + e^2 + f^2) = (ef + fd + de),$$

co jest możliwe tylko dla $d = e = f = 0$, wtedy podprzestrzeń ta staje się podprzestrzenią trójwymiarową tożsamą z trójwymiarową podprzestrzenią stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej opisaną w części poświęconej ogólnemu przypadkowi ortotropii.

Trzy jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań

Moduły Kelvina, stany własne oraz projektory ortogonalne jak w przypadku ogólnej ortotropii.

B.4 Symetria trygonalna (układ trygonalny)

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{tri} = \{1, -1, \mathbf{I}_{e_1}, \mathbf{R}_{e_3}^{120^\circ}\}$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} \cong \begin{bmatrix} a & b & d & \sqrt{2}e & 0 & 0 \\ & a & d & -\sqrt{2}e & 0 & 0 \\ & & c & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2g & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2g & 2e \\ & & & & & (a-b) \end{bmatrix}$$

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle (1+1) + (2+2) \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[4+2+3]$

Podprzestrzenie własne:

- Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej (w szczególności odpowiadające im wartości własne mogą być takie same - wtedy podprzestrzenie te łączą się w podprzestrzeń o większym wymiarze)
- Dwie dwuwymiarowe podprzestrzenie własne dewiatorów (w szczególności odpowiadające im wartości własne mogą być takie same - wtedy podprzestrzenie te łączą się w podprzestrzeń o większym wymiarze)

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej

Moduły Kelvina:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(a+b+c) - \sqrt{(a+b-c)^2 + 8d^2} \right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[(a+b+c) + \sqrt{(a+b-c)^2 + 8d^2} \right]$$

Unormowane stany własne:

$$\boldsymbol{\omega}_1 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin \varkappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varkappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \cos \varkappa_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_2 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \varkappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varkappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \sin \varkappa_1 \end{bmatrix}$$

gdzie parametr \varkappa_1 będący funkcją dystrybutora sztywności jest dany wzorem:

$$\text{tg} \varkappa_1 = \frac{2\sqrt{2}d}{-(a+b-c) - \sqrt{(a+b-c)^2 + 8d^2}}$$

Projektory ortogonalne:

$$\mathbf{P}_1 \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin^2 \varkappa_1 & \sin^2 \varkappa_1 & \sqrt{2} \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \sin^2 \varkappa_1 & \sqrt{2} \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 \cos^2 \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos^2 \varkappa_1 & \cos^2 \varkappa_1 & -\sqrt{2} \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \cos^2 \varkappa_1 & -\sqrt{2} \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 \sin^2 \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Gdy spełniony jest warunek

$$(a + b - c)^2 + 8d^2 = 0,$$

co możliwe jest tylko przy $d = 0$ (co pociąga za sobą $\varkappa_1 = 0$) i $c = a + b$, wtedy podprzestrzeń ta staje się dwuwymiarową podprzestrzenią dewiatorów. Podwójny moduł Kelvina jest równy:

$$\lambda_1 = a + b$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_1 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in (0, 2\pi)$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Dwie dwuwymiarowe podprzestrzenie własne dewiatorów

Moduły Kelvina:

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left[(a - b + 2g) - \sqrt{(a - b - 2g)^2 + 16e^2} \right]$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \left[(a - b + 2g) + \sqrt{(a - b - 2g)^2 + 16e^2} \right]$$

Unormowane stany własne:

$$\boldsymbol{\omega}_3 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \varkappa_2 \cos \varphi & \cos \varkappa_2 \sin \varphi & \sin \varkappa_2 \sin \varphi \\ 0 & -\cos \varkappa_2 \cos \varphi & \sin \varkappa_2 \cos \varphi \\ \text{sym} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\boldsymbol{\omega}_4 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin \varkappa_2 \cos \psi & -\sin \varkappa_2 \sin \psi & \cos \varkappa_2 \sin \psi \\ 0 & \sin \varkappa_2 \cos \psi & \cos \varkappa_2 \cos \psi \\ \text{sym} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \psi \in [0, 2\pi]$$

gdzie parametr \varkappa_2 będący funkcją dystrybutora sztywności jest dany wzorem:

$$\operatorname{tg} \varkappa_2 = \frac{4e}{(a - b - 2g) - \sqrt{(a - b - 2g)^2 + 16e^2}}$$

Projektory ortogonalne:

$$\mathbf{P}_3 \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos^2 \varkappa_2 & -\cos^2 \varkappa_2 & 0 & \sqrt{2} \cos \varkappa_2 \sin \varkappa_2 & 0 & 0 \\ & \cos^2 \varkappa_2 & 0 & -\sqrt{2} \cos \varkappa_2 \sin \varkappa_2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 \sin^2 \varkappa_2 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2 \sin^2 \varkappa_2 & 2 \cos \varkappa_2 \sin \varkappa_2 \\ & & & & & 2 \cos^2 \varkappa_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_4 \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin^2 \varkappa_2 & -\sin^2 \varkappa_2 & 0 & -\sqrt{2} \cos \varkappa_2 \sin \varkappa_2 & 0 & 0 \\ & \sin^2 \varkappa_2 & 0 & \sqrt{2} \cos \varkappa_2 \sin \varkappa_2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 \cos^2 \varkappa_2 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2 \cos^2 \varkappa_2 & -2 \cos \varkappa_2 \sin \varkappa_2 \\ & & & & & 2 \sin^2 \varkappa_2 \end{bmatrix}$$

Gdy spełniony jest warunek

$$(a - b - 2g)^2 + 16e^2 = 0,$$

co możliwe jest tylko przy $e = 0$ (co pociąga za sobą $\varkappa_2 = 0$) i $2g = a - b$ (w istocie tensor \mathbf{A} staje się tensorem o symetrii cylindrycznej), wtedy podprzestrzeń ta staje się czterowymiarową podprzestrzenią dewiatorów. Poczwojny moduł Kelvina jest równy:

$$\lambda_3 = a - b$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_3 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & \sin \varphi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta \\ & -\cos \varphi \cos \vartheta & \cos \psi \sin \vartheta \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi, \psi \in (0, 2\pi), \quad \vartheta \in (0, \pi)$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

B.4.1 Symetria trygonalna objętościowo izotropowa

Przyjmując, że funkcja dystrybutora sztywności $\varkappa_1 = \arctg \sqrt{2}$, stan własny ω_1 okazuje się być stanem kulistym. Tensor ten jest wtedy objętościowo izotropowy a jego składowe spełniają warunki Burzyńskiego (7.3) - przyjmuje on ogólną postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} K - (b + d) & b & d & \sqrt{2}e & 0 & 0 \\ & K - (b + d) & d & -\sqrt{2}e & 0 & 0 \\ & & K - 2d & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2g & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2g & 2e \\ & & & & & (K - d - 2b) \end{bmatrix}$$

gdzie moduł K wiąże się ze składowymi a, b, \dots, d z ogólnej postaci tensora ortotropowego następującą zależnością:

$$K = a + b + d = c + 2d$$

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + 1 + (2 + 2) \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[4 + 1 + 3]$

Podprzestrzenie własne:

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych
- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna dewiatorów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej
- Dwie dwuwymiarowe podprzestrzenie własne dewiatorów (*w szczególności odpowiadające im wartości własne mogą być takie same - wtedy podprzestrzenie te łączą się w podprzestrzeń o większym wymiarze*)

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = K$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń dewiatorów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej

Moduł Kelvina:

$$\lambda_2 = K - 3d$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \cong \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Dwie dwuwymiarowe podprzestrzenie własne dewiatorów

Moduły Kelvina, stany własne oraz projektory ortogonalne jak w przypadku ogólnej symetrii trygonalnej.

B.5 Symetria tetragonalna (układ tetragonalny)

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{tet} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}, \mathbf{I}_{e_2}, \mathbf{R}_{e_3}^{90^\circ}\}$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & d & 0 & 0 & 0 \\ & a & d & 0 & 0 & 0 \\ & & c & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2g & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2g & 0 \\ & & & & & 2h \end{bmatrix}$$

Podprzestrzenie własne

- Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej (w szczególności odpowiadające im wartości własne mogą być takie same - wtedy podprzestrzenie te łączą się w podprzestrzeń o większym wymiarze)
- Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań w płaszczyźnie prostopadłej do czterokrotnej osi symetrii w kierunkach osi dwukrotnych
- Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyznach symetrii zawierających czterokrotną oś symetrii równoległą do tej osi

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle (1+1) + 1 + 1 + 2 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[5 + 1 + 3]$

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(a+b+c) - \sqrt{(a+b-c)^2 + 8d^2} \right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[(a+b+c) + \sqrt{(a+b-c)^2 + 8d^2} \right]$$

Unormowane stany własne:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin \varkappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varkappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \cos \varkappa_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \varkappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varkappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \sin \varkappa_1 \end{bmatrix}$$

gdzie parametr \varkappa_1 będący funkcją dystrybutora sztywności dany jest wzorem:

$$\text{tg} \varkappa_1 = \frac{2\sqrt{2}d}{-(a+b-c) - \sqrt{(a+b-c)^2 + 8d^2}}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin^2 \varkappa_1 & \sin^2 \varkappa_1 & \sqrt{2} \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \sin^2 \varkappa_1 & \sqrt{2} \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos^2 \varkappa_1 & \cos^2 \varkappa_1 & -\sqrt{2} \cos \varkappa_1 \sin \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \cos^2 \varkappa_1 & -\sqrt{2} \cos \varkappa_1 \sin \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 \sin^2 \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Gdy spełniony jest warunek

$$(a + b - c)^2 + 8d^2 = 0,$$

co możliwe jest tylko przy $d = 0$ (co pociąga za sobą $\varkappa_1 = 0$) i $c = a + b$, wtedy podprzestrzeń ta staje się podprzestrzenią dwuwymiarową. Podwójny moduł Kelvina jest równy:

$$\lambda_1 = a + b$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_1 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in (0, 2\pi)$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań w płaszczyźnie prostopadłej do czterokrotnej osi symetrii w kierunkach osi dwukrotnych

Moduły Kelvina:

$$\lambda_3 = 2h$$

$$\lambda_4 = a - b$$

Unormowane stany własne:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projektory ortogonalne:

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyznach symetrii zawierających czterokrotną oś symetrii równoległe do tej osi

Moduł Kelvina:

$$\lambda_5 = 2g$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \phi \\ 0 & 0 & \cos \phi \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad \phi \in (0, 2\pi)$$

Dokonując obrotu układu współrzędnych o kąt ϕ wokół osi x_3 otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\omega}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a zatem dowolny stan własny odpowiadający tej podprzestrzeni jest czystym ścinaniem w pewnej płaszczyźnie zawierającej czterokrotną oś symetrii.

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

B.5.1 Symetria tetragonalna objętościowo izotropowa

Przyjmując, że funkcja dystrybutora sztywności $\varkappa_1 = \arctg \sqrt{2}$, stan własny ω_1 okazuje się być stanem kulistym. Tensor ten jest wtedy objętościowo izotropowy a jego składowe spełniają warunki Burzyńskiego (7.3) - przyjmuje on ogólną postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} K - (b + d) & b & d & 0 & 0 & 0 \\ & K - (b + d) & d & 0 & 0 & 0 \\ & & K - 2d & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2g & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2g & 0 \\ & & & & & 2h \end{bmatrix}$$

gdzie moduł K wiąże się ze składowymi a, b, c, d z ogólnej postaci tensora ortotropowego następującą zależnością:

$$K = a + b + d = c + 2d$$

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[5 + 0 + 3]$

Podprzestrzenie własne:

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych
- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna dewiatorów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej
- Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań w płaszczyźnie prostopadłej do czterokrotnej osi symetrii w kierunkach osi dwukrotnych
- Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyznach symetrii zawierających czterokrotną oś symetrii równoległą do tej osi

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = K$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń dewiatorów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej

Moduł Kelvina:

$$\lambda_2 = K - 3d$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \cong \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne czystych ścinań w płaszczyźnie prostopadłej do czterokrotnej osi symetrii w kierunkach osi dwukrotnych

Moduły Kelvina, stany własne oraz projektory ortogonalne jak w przypadku ogólnej symetrii tetragonalnej.

Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyznach symetrii zawierających czterokrotną oś symetrii równoległą do tej osi

Moduły Kelvina, stany własne oraz projektory ortogonalne jak w przypadku ogólnej symetrii tetragonalnej.

B.6 Symetria cylindryczna (układ heksagonalny)

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{cyl} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{\mathbf{e}_1}, \mathbf{I}_{\mathbf{e}_3}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_3}^\varphi\}$ $\varphi \in [0, 2\pi]$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & d & 0 & 0 & 0 \\ & a & d & 0 & 0 & 0 \\ & & c & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2g & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2g & 0 \\ & & & & & (a-b) \end{bmatrix}$$

Podprzestrzenie własne

- Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej (*w szczególności odpowiadające im wartości własne mogą być takie same - wtedy podprzestrzenie te łączą się w podprzestrzeń o większym wymiarze*)
- Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna ścinań w płaszczyźnie prostopadłej do wyróżnionej osi symetrii
- Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyznach zawierających wyróżnioną oś symetrii równoległe do tej osi

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle(1+1)+2+2\rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[4+1+2]$

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(a+b+c) - \sqrt{(a+b-c)^2 + 8d^2} \right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[(a+b+c) + \sqrt{(a+b-c)^2 + 8d^2} \right]$$

Unormowane stany własne:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin \varkappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varkappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \cos \varkappa_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \varkappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varkappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \sin \varkappa_1 \end{bmatrix}$$

gdzie parametr \varkappa_1 będący funkcją dystrybutora sztywności dany jest wzorem:

$$\text{tg} \varkappa_1 = \frac{2\sqrt{2}d}{-(a+b-c) - \sqrt{(a+b-c)^2 + 8d^2}}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin^2 \varkappa_1 & \sin^2 \varkappa_1 & \sqrt{2} \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \sin^2 \varkappa_1 & \sqrt{2} \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 \cos \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos^2 \varkappa_1 & \cos^2 \varkappa_1 & -\sqrt{2} \cos \varkappa_1 \sin \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \cos^2 \varkappa_1 & -\sqrt{2} \cos \varkappa_1 \sin \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 \sin^2 \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Gdy spełniony jest warunek

$$(a + b - c)^2 + 8d^2 = 0,$$

co możliwe jest tylko przy $d = 0$ (co pociąga za sobą $\varkappa_1 = 0$) i $c = a + b$, wtedy podprzestrzeń ta staje się podprzestrzenią dwuwymiarową. Podwójny moduł Kelvina jest równy:

$$\lambda_1 = a + b$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_1 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in (0, 2\pi)$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyźnie prostopadłej do wyróżnionej osi symetrii

Moduły Kelvina:

$$\lambda_3 = a - b$$

Unormowane stany własne:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi \in (0, 2\pi)$$

Dokonując obrotu układu współrzędnych o kąt $\frac{\pi}{4} + \arctg \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}$ wokół osi x_3 otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a zatem dowolny stan własny odpowiadający tej podprzestrzeni jest czystym ścinaniem w płaszczyźnie prostopadłej do wyróżnionej osi symetrii.

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyznach zawierających wyróżnioną oś symetrii równoległe do tej osi

Moduł Kelvina:

$$\lambda_4 = 2g$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \phi \\ 0 & 0 & \cos \phi \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad \phi \in (0, 2\pi)$$

Dokonując obrotu układu współrzędnych o kąt ϕ wokół osi x_3 otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a zatem dowolny stan własny odpowiadający tej podprzestrzeni jest czystym ścinaniem w pewnej płaszczyźnie zawierającej wyróżnioną oś symetrii.

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

B.6.1 Symetria cylindryczna objętościowo izotropowa

Przyjmując, że funkcja dystrybutora sztywności $\varkappa_1 = \arctg \sqrt{2}$, stan własny ω_1 okazuje się być stanem kulistym. Tensor ten jest wtedy objętościowo izotropowy a jego składowe spełniają warunki Burzyńskiego (7.3) - przyjmuje on ogólną postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} K - (b + d) & b & d & 0 & 0 & 0 \\ & K - (b + d) & d & 0 & 0 & 0 \\ & & K - 2d & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2g & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2g & 0 \\ & & & & & K - (2b + d) \end{bmatrix}$$

gdzie moduł K wiąże się ze składowymi a, b, c, d z ogólnej postaci tensora ortotropowego następującą zależnością:

$$K = a + b + d = c + 2d$$

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + 1 + 2 + 2 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[4 + 0 + 3]$

Podprzestrzenie własne:

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych
- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna dewiatorów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej
- Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyźnie prostopadłej do wyróżnionej osi symetrii
- Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyznach zawierających wyróżnioną oś symetrii równoległe do tej osi

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów kulistych

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = K$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń dewiatorów o zerowych składowych spoza przekątnej głównej

Moduł Kelvina:

$$\lambda_2 = K - 3d$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{1} \cong \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Projektory ortogonalny:

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyźnie prostopadłej do wyróżnionej osi symetrii

Moduły Kelvina, stany własne oraz projektory ortogonalne jak w przypadku ogólnej symetrii cylindrycznej.

Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w płaszczyznach symetrii zawierających wyróżnioną oś symetrii równoległe do tej osi

Moduły Kelvina, stany własne oraz projektory ortogonalne jak w przypadku ogólnej symetrii cylindrycznej.

B.7 Symetria kubiczna (układ regularny)

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{cub} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}, \mathbf{I}_{e_3}, \mathbf{R}_{e_1}^{90^\circ}, \mathbf{R}_{e_2}^{90^\circ}\}$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ & a & b & 0 & 0 & 0 \\ & & a & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2g & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2g & 0 \\ & & & & & 2g \end{bmatrix}$$

Podprzestrzenie własne

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów hydrostatycznych
- Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna stanów będących kombinacją czystych ścinań w płaszczyznach symetrii w kierunkach pod kątem 45° co czterokrotnych osi symetrii
- Jedna trójwymiarowa podprzestrzeń własna stanów będących kombinacją czystych ścinań w płaszczyznach symetrii w kierunkach czterokrotnych osi symetrii

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + 2 + 3 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[3 + 0 + 3]$

Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna stanów hydrostatycznych

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = 2a + b$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna stanów będących kombinacją czystych ścinań w płaszczyznach symetrii w kierunkach pod kątem 45° co czterokrotnych osi symetrii

Moduł Kelvina:

$$\lambda_2 = a - b$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna trójwymiarowa podprzestrzeń własna stanów będących kombinacją czystych ścinań w płaszczyznach symetrii w kierunkach czterokrotnych osi symetrii
Moduł Kelvina:

$$\lambda_3 = 2g$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \psi \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi \in (0, \pi), \psi \in (0, 2\pi)$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

B.8 Izotropia

Grupa symetrii: $\mathcal{O}_{iso} = \mathcal{O}(3)$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ & a & b & 0 & 0 & 0 \\ & & a & 0 & 0 & 0 \\ & & & (a-b) & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & (a-b) & 0 \\ & & & & & (a-b) \end{bmatrix}$$

Podprzestrzeń własne

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów hydrostatycznych

- Jedna pięciowymiarowa podprzestrzeń własna dewiatorów

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + 5 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[2 + 0 + 0]$

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów hydrostatycznych

Moduł Kelvina:

$$\lambda_1 = 2b + a$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna pięciowymiarowa podprzestrzeń własna dewiatorów

Moduł Kelvina:

$$\lambda_2 = a - b$$

Przykładowe unormowane stany własne:

$$\boldsymbol{\omega}_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_{VI} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 3 & 0 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

B.9 Zestawienie podstawowych charakterystyk przestrzennych symetrii sprężystych

Indeksy strukturalne i liczba niezależnych parametrów odpowiadające przestrzennym symetriom sprężystym

Grupa symetrii	I indeks strukturalny	II indeks strukturalny	Liczba niezależnych parametrów
Pełna anizotropia	$\langle 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \rangle$	$[6 + 12 + 3]$	21
Symetria monokliniczna	$\langle (1 + 1 + 1 + 1) + 1 + 1 \rangle$	$[6 + 6 + 3]$	15
Ortotropia	$\langle (1 + 1 + 1) + 1 + 1 + 1 \rangle$	$[6 + 3 + 3]$	12
Symetria trygonalna	$\langle (1 + 1) + (2 + 2) \rangle$	$[4 + 2 + 3]$	9
Symetria tetragonalna	$\langle (1 + 1) + 1 + 1 + 2 \rangle$	$[5 + 1 + 3]$	9
Symetria cylindryczna	$\langle (1 + 1) + 2 + 2 \rangle$	$[4 + 1 + 2]$	7
Symetria kubiczna	$\langle 1 + 2 + 3 \rangle$	$[3 + 0 + 3]$	6
Izotropia	$\langle 1 + 5 \rangle$	$[2 + 0 + 0]$	2

Indeksy strukturalne i liczba niezależnych parametrów odpowiadające objętościowo izotropowym przestrzennym symetriom sprężystym (spełniającym warunki Burzyńskiego (7.3))

Grupa symetrii	I indeks strukturalny	II indeks strukturalny	Liczba niezależnych parametrów
Pełna anizotropia	$\langle 1 + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \rangle$	$[6 + 7 + 3]$	16
Symetria monokliniczna	$\langle 1 + (1 + 1 + 1) + 1 + 1 \rangle$	$[6 + 3 + 3]$	12
Ortotropia	$\langle 1 + (1 + 1) + 1 + 1 + 1 \rangle$	$[6 + 1 + 3]$	10
Symetria trygonalna	$\langle 1 + 1 + (2 + 2) \rangle$	$[4 + 1 + 3]$	8
Symetria tetragonalna	$\langle 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \rangle$	$[5 + 0 + 3]$	8
Symetria cylindryczna	$\langle 1 + 1 + 2 + 2 \rangle$	$[4 + 0 + 2]$	6

B.10 Symetrie płaskie

B.10.1 Pełna płaska anizotropia

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{ani-pl} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & \sqrt{2}A_{1112} \\ A_{2211} & A_{2222} & \sqrt{2}A_{2212} \\ \sqrt{2}A_{1211} & \sqrt{2}A_{1222} & 2A_{1212} \end{bmatrix}$$

Analiza widmowa w pełni anizotropowego płaskiego tensora Hooke'a przebiega podobnie do zwykłego zagadnienia własnego macierzy 3×3 . Wartości własne (moduły Kelvina) znaleźć można poprzez zastosowanie klasycznych rozwiązań (patrz np. wyznaczanie modułów Kelvina w przypadku objętościowo izotropowej przestrzennej ortotropii), zaś unormowane stany własne poprzez rozwiązanie odpowiedniego nieokreślonego układu trzech równań liniowych. Z uwagi na stosunkowo dużą ogólność rozwiązania nie zamieszczamy go w tym zestawieniu.

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + 1 + 1 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[3 + 2 + 1]$

B.10.2 Płaska ortotropia

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{ort-pl} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}\}$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & 2g \end{bmatrix}$$

Podprzestrzenie własne

- Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o niezerowej składowej hydrostatycznej
- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + 1 + 1 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[3 + 1 + 1]$

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o niezerowej składowej hydrostatycznej

Moduły Kelvina:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(c + a) - \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2} \right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[(c + a) + \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2} \right]$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \cos \varkappa & 0 \\ 0 & \sin \varkappa \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \varkappa & 0 \\ 0 & \cos \varkappa \end{bmatrix}$$

gdzie parametr \varkappa będący funkcją dystrybutora sztywności dany jest wzorem:

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{1}{2b} \left[(c - a) - \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2} \right]$$

Projektory ortogonalne:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \varkappa & \cos \varkappa \sin \varkappa & 0 \\ \cos \varkappa \sin \varkappa & \sin^2 \varkappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \sin^2 \varkappa & -\cos \varkappa \sin \varkappa & 0 \\ -\cos \varkappa \sin \varkappa & \cos^2 \varkappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań

Moduły Kelvina:

$$\lambda_3 = 2g$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B.10.3 Płaska symetria kwadratu

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{sq-pl} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_3}^{90^\circ}\}$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2g \end{bmatrix}$$

Podprzestrzenie własne

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów hydrostatycznych
- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w kierunkach równo nachylonych do kierunków wyróżnionych w materiale
- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w kierunkach równoległych do kierunków wyróżnionych w materiale

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + 1 + 1 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[3 + 0 + 1]$

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów hydrostatycznych

Moduły Kelvina:

$$\lambda_1 = a + b$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w kierunkach równo nachylonych do kierunków wyróżnionych w materiale

Moduły Kelvina:

$$\lambda_2 = a - b$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań w kierunkach równoległych do kierunków wyróżnionych w materiale

Moduły Kelvina:

$$\lambda_3 = 2g$$

Unormowany stan własny:

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Projektor ortogonalny:

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B.10.4 Płaska izotropia

Zbiór generujący grupę symetrii: $\mathcal{O}_{iso-pl} = \mathcal{O}(2)$

Ogólna postać tensorów sprężystości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a - b \end{bmatrix}$$

Podprzestrzenie własne

- Jedna jednowymiarowa podprzestrzeń stanów hydrostatycznych
- Jedna dwuwymiarowa podprzestrzeń własna czystych ścinań

Pierwszy indeks strukturalny: $\langle 1 + 2 \rangle$

Drugi indeks strukturalny: $[2 + 0 + 0]$

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o niezerowej składowej hydrostatycznej

Moduły Kelvina:

$$\lambda_1 = a + b$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektory ortogonalne:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o niezerowej składowej hydrostatycznej

Moduły Kelvina:

$$\lambda_2 = a - b$$

Unormowany stan własny:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix}, \quad \phi \in (0, 2\pi)$$

Projektory ortogonalne:

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

B.10.5 Zestawienie podstawowych charakterystyk płaskich symetrii sprężystych

Indeksy strukturalne i liczba niezależnych parametrów odpowiadające płaskim symetriom sprężystym

Grupa symetrii	I indeks strukturalny	II indeks strukturalny	Liczba niezależnych parametrów
Pełna płaska anizotropia	$\langle 1 + 1 + 1 \rangle$	$[3 + 2 + 1]$	6
Płaska ortotropia	$\langle 1 + 1 + 1 \rangle$	$[3 + 1 + 1]$	5
Symetria kwadratu	$\langle 1 + 1 + 1 \rangle$	$[3 + 0 + 1]$	4
Płaska izotropia	$\langle 1 + 2 \rangle$	$[2 + 0 + 0]$	2

C Spis oznaczeń

a, b, c, \dots	-	skalary
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	-	skalary
A, B, C, \dots	-	skalary
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$	-	wektory, tensory
$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \dots$	-	wektory, tensory
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$	-	tensory, operatory
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$	-	zbiory, grupy, przestrzenie

Symbol Kroneckera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow i = j \\ 0 & \Leftrightarrow i \neq j \end{cases}$$

Symbol permutacyjny Levi-Civita:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow j = k \vee k = i \vee i = j \\ 1 & \Leftrightarrow (ijk) - \text{parzysta permutacja } (1,2,3) \\ -1 & \Leftrightarrow (ijk) - \text{nieparzysta permutacja } (1,2,3) \end{cases}$$

NOTACJA ABSOLUTNA - NOTACJA WSKAŹNIKOWA

\mathbf{a}	-	a_i
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	-	$a_i b_i$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	-	$\epsilon_{ijk} a_j b_k$
$\mathbf{1}$	-	δ_{ij}
$\boldsymbol{\omega}$	-	ω_{ij}
$\boldsymbol{\omega}^T$	-	$(\boldsymbol{\omega}^T)_{ij} = \omega_{ji}$
$\text{tr}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\omega}$	-	ω_{ii}
$\mathbf{a} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$	-	$a_{ij} = b_i c_j$
$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}$	-	$\alpha_{ij} a_j$
$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}$	-	$\alpha_{ij} \beta_{jk}$
$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$	-	$\alpha_{ij} \beta_{ij}$

\mathbf{C}	-	C_{ijkl}
$\mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}$	-	$C_{ijkl} = \alpha_{ij}\beta_{kl}$
$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}$	-	$C_{ijkl}\omega_{kl}$
$\mathbf{C} \circ \mathbf{D}$	-	$C_{ijkl}D_{klmn}$
$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$	-	$C_{ijkl}D_{ijkl}$
$\text{Tr}\mathbf{C} = \mathbb{I} \cdot \mathbf{C}$	-	C_{ijij}
$\text{Det}\mathbf{C}$	-	$\det([C_{ijkl}\omega_{ij}^P\omega_{kl}^Q]_{PQ})$
$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\beta}$	-	$C_{ijkl}\alpha_{ij}\beta_{kl}$
$\boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\beta}$	-	$C_{ijkl}\alpha_{ij}\beta_{kl}$
$\mathbf{A} \bullet \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A} \circ \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha}$	-	$A_{ijkl}C_{klmn}\alpha_{mn}$
$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{A} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{B}$	-	$A_{ijkl}C_{klmn}B_{mnpq}$
$\mathbf{Q} * \mathbf{a} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$	-	$Q_{ij}a_j$
$\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}\mathbf{Q}$	-	$Q_{ki}Q_{lj}\omega_{ij}$
$\mathbf{Q} * \mathbf{C} = C_{ijkl}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes \dots \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_l)$	-	$Q_{pi}Q_{qj}Q_{rk}Q_{sl}C_{ijkl}$
$ \mathbf{a} $	-	$(a_i a_i)^{1/2}$
$ \boldsymbol{\omega} $	-	$(\omega_{ij}\omega_{ij})^{1/2}$
$ \mathbf{C} $	-	$(C_{ijkl}C_{ijkl})^{1/2}$
$\nabla\boldsymbol{\alpha} = \text{grad}\boldsymbol{\alpha}$	-	$\alpha_{,i} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}$
$\mathbf{a} \otimes \nabla = \text{grad}\mathbf{a}$	-	$a_{i,j}$
$\mathbf{a} \cdot \nabla = \text{div}\mathbf{a}$	-	$a_{i,i}$
$\mathbf{a} \times \nabla = \text{rot}\mathbf{a}$	-	$\epsilon_{ijk}a_{j,k}$
$\boldsymbol{\omega} \otimes \nabla = \text{grad}\boldsymbol{\omega}$	-	$\omega_{ij,k}$
$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla = \text{div}\boldsymbol{\omega}$	-	$\omega_{ij,j}$
$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{div}\boldsymbol{\omega}$	-	$\omega_{ij,i}$
$\partial_{\boldsymbol{\alpha}}f$	-	$\frac{\partial f}{\partial\alpha_{ij}}$

\mathcal{E}^3	-	Trójwymiarowa euklidesowa przestrzeń wektorowa
\mathcal{T}_{sym}^2	-	Przestrzeń symetrycznych trójwymiarowych tensorów drugiego rzędu
\mathcal{P}_K	-	K -ta podprzestrzeń własna tensorów sprężystości
\mathcal{H}_K	-	K -ta podprzestrzeń energetycznie ortogonalnego rozkładu \mathcal{T}_{sym}^2
\mathcal{O}	-	pełna grupa ortogonalna
\mathcal{SO}	-	właściwa grupa ortogonalna

$\mathbf{1}$	-	tensor jednostkowy drugiego rzędu
$\boldsymbol{\sigma}$	-	tensor naprężeń Cauchy'ego
$\boldsymbol{\varepsilon}$	-	tensor małych odkształceń
$\boldsymbol{\omega}_K$	-	stan własny odpowiadający K -temu modułowi Kelvina
\mathbf{C}, \mathbf{S}	-	tensor podatności, tensor sztywności
\mathbf{H}	-	tensor stanu granicznego

-
- ⓪ - operator zerowy w \mathcal{T}_{sym}^2
Ⅰ - operator tożsamościowy w \mathcal{T}_{sym}^2

D Literatura

Literatura

- [1] K. S. Aleksandrov, *Właściwości sprężyste ośrodków anizotropowych* [w jęz. rosyjskim], dysertacja, Instytut Krystalografii, AN ZSRR (1967) - nieopublikowane
- [2] P. Angles d'Auriac, *Etude du tenseur d'anisotropie, basée sur la représentation d'un tenseur symétrique dans un espace E_3 par un vecteur dans un espace E_6* , C. R. Acad. Sc. Paris, 272, ser. A (1971), str. 612-613
- [3] D. Banabic, *Sheet metal forming processes, constitutive modelling and numerical simulation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 2010
- [4] J. P. Bardet, *Lode dependences for isotropic pressure sensitive materials*, J. Appl. Mech., 57 (1990), str. 498-506
- [5] F. Barlat, J. Lian, *Plastic behaviour and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions*, Int. J. Plast., 5 (1989), str. 51-61
- [6] F. Barlat, D. J. Lege, J. C. Brem, *A six component yield function for anisotropic materials*, Int. J. Plast., 7 (1991), str. 693-712
- [7] J. L. Bassani, *Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties*, Int. J. Mech. Sci., 19 (1977), str. 651-660
- [8] E. Beltrami, *opere matem.*, t IV, Mailand 1920, str. 180-189
- [9] D. Bigoni, A. Piccolroaz, *Yield criteria for quasibrittle and frictional materials*, Int. J. Solids Structures, 41 (2004), str. 2855-2878
- [10] A. Blinowski, J. Ostrowska-Maciejewska, *On the elastic orthotropy*, Arch. Mech., 48, 1 (1996), str. 129-141
- [11] A. Blinowski, J. Ostrowska-Maciejewska, J. Rychlewski, *Two-dimensional Hooke's tensors - isotropic decomposition, effective symmetry criteria*, Arch. Mech., 48, 2 (1996), str. 325-245
- [12] A. Blinowski, J. Rychlewski, *Pure shears in the mechanics of materials* Math. Mech. Solids, 4 (1998), str. 471-503

- [13] B. Bresler, K.S. Pister, *Strength of concrete under combined stresses*, Journal of the American Concrete Institute, 55, 20 (1958), str. 321-345.
- [14] I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew, *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 2010
- [15] B. Budianski, *Anisotropic plasticity of plane isotropic sheets* [w:] G. J. Dvorak, R. T. Shield, *Mechanics of Material Behaviour (Studies in Applied Mechanics 6)*, Elsevier 1984, str. 15-29
- [16] W. Burzyński, *Studium nad hipotezami wyężenia*, Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1928 ; zob. także: *Selected passages from Włodzimierz Burzyński's doctoral dissertation "Study on material effort hypotheses"*, Engng Trans, 57, 3-4 (2009), str. 185-215
- [17] W. Burzyński, *Teoretyczne podstawy hipotez wyężenia*, Czasopismo Techniczne, 47 (1929), str. 1-41 ; zob. także: *Theoretical foundations of the hypotheses of material effort*, Engng. Trans. 56, Special issue (2008), str. 9-45
- [18] R. M. Caddell, R. S. Raghava, A. G. Atkins, *A yield criterion for anisotropic and pressure dependent solids such as oriented polymers*, J. Mater. Sci., 8 (1973), str. 1641-1646
- [19] O. Cazacu, F. Barlat, *Generalization of Drucker's yield criterion to orthotropy*, Math. Mech. Solids, 6, 6 (2001), str. 613-630
- [20] P. Chadwick, M. Vianello, S. C. Cowin, *A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight*, J. Mech. Phys. Solids, 49 (2001), str. 2471-2492
- [21] Ch. A. de Coulomb, *Sur une Application des Règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*, Mém. Acad. Sci. savants étrangers, 7, Paris 1776
- [22] S. C. Cowin, M. M. Mehrabadi, *On the identification of material symmetry for anisotropic elastic materials*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 40, 4 (1987), str. 451-476
- [23] S. C. Cowin, M. M. Mehrabadi, *The structure of the linear anisotropic elastic symmetries*, J. Mech. Phys. Solids, 40, 7 (1992), str. 1459-1471
- [24] S. C. Cowin, *Propagation of Kelvin modes*, Math. Mech. Solids, 1 (1996), 25-43
- [25] V. S. Deshpande, N. A. Fleck, M. F. Ashby, *Effective properties of the octet-truss lattice material*, J. Mech. Phys. Solids, 49 (2001), str. 1747-1769
- [26] D. C. Drucker, *Relations of experiments to mathematical theories of plasticity*, J. Appl. Mech., 16 (1949), str. 349-357
- [27] D. C. Drucker, W. Prager, *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, Q. Appl. Math., 10 (1952), str. 157-165
- [28] D. C. Drucker, *Plasticity theory, strength-differential (SD) phenomenon and volume expansion in metals and plastics*, Metall. Trans., 4 (1973), str. 667-673

- [29] G. Ferron, R. Mokrak, J. Morreale, *A parametric description of orthotropic plasticity in metal sheets*, Int. J. Plast., 10 (1994), str. 431-449
- [30] S. Forte, M. Vianello, *Symmetry classes for elasticity tensors*, J. Elast., 43 (1996), str. 81-108
- [31] M. Georgieff, E. Schmid, *Über die Festigkeit und Plastizität von Wismutkristallen*, Zeitschr. f. Phys., 36, 9-10 (1926), str. 759-774
- [32] V. L. German, *Some theorems on the anisotropic media*, Doklady AN SSSR, 48 (1945), str. 95-98
- [33] И. И. Голденблат, *Теория малых упруго-пластических деформаций анизотропных сред*, Изв. АН. СССР, Отд. Техн. Наук, 2 (1955)
- [34] И. И. Голденблат, *Некоторые вопросы механики деформируемых сред*, Гостехиздат, Москва 1955
- [35] M. Gotoh, *A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order (plane stress state) - I*, Int. J. Mech. Sci., 19 (1977), str. 505-512
- [36] M. Gotoh, *A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order (plane stress state) - II*, Int. J. Mech. Sci., 19 (1977), str. 513-520
- [37] J. J. Guest, *On the strength of ductile materials under combined stress*, Proc. Phys. Soc. London, 17, 1 (1899), str. 202-272
- [38] H. Hencky, *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*, Zeitschr. angew Math. u. Mech., 4 (1924), str. 323-334
- [39] C. Hermann, *Tensoren und Kristallsymmetrie*, Zeitschr. f. Kristallographie, A, 8 (1934)
- [40] R. Hill, *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proc. Roy. Soc. (London), A 193 (1948), str. 281-297
- [41] R. Hill, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950 (dodruk Oxford University Press, Oxford 2009)
- [42] R. Hill, *Theoretical plasticity of textured aggregates*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85 (1979), str. 179-190
- [43] R. Hill, *Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals*, J. Mech. Phys. Solids, 38 (1990), str. 405-417
- [44] R. Hill, *User-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals*, Int. J. Mech. Sci., 35, 1 (1993), str. 19-25
- [45] J. P. Hirth, M. Cohen, *On the strength-differential phenomenon in hardened steel*, Metall. Trans., 1 (1970), str. 3-8
- [46] O. Hoffman, *The brittle strength of Orthotropic Materials*, J. Comp. Mater., 1 (1967), str. 200-206

-
- [47] W. F. Hosford, Proc. 7th North American Metal Working Research Conf, Society of Manufacturing Engineers, Dearborn, Michigan 1979, str. 191.
- [48] L. W. Hu, *Modified Tresca's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and its applications*, J. Franklin Inst., 25 (1958), str. 411 nn
- [49] M. T. Huber, *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materyału*, Czasopismo Techniczne, 15, Lwów, 1904 ; zob. także: *Specific work of strain as a measure of material effort*, Arch Mech, 56, 3 (2004), str. 173-190
- [50] S. K. Iyer, C. J. Lissenden, *Multiaxial constitutive model accounting for the strength-differential in Inconel 718*, Int. J. Palst., 19 (2003), str. 2055-2081
- [51] D. Kalish, M. Cohen, *Anistropy of properties in martensite as developed by thermomechanical treatments*, Trans. ASM, 62 (1969), str. 353
- [52] A. P. Karafillis, M. C. Boyce, *A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor*, J. Mech. Phys. Solids, 12 (1993), str. 1859-1886
- [53] W. Thompson (Lord Kelvin), *On six principal strains of an elastic solid*, Phil. Trans. R. Soc., 166 (1856), str. 495-498
- [54] K. Kowalczyk, J. Ostrowska-Maciejewska, *Energy-based limit conditions for transversally isotropic solids*, Arch. Mech., 54, 5-6 (2002), str. 497-523
- [55] K. Kowalczyk, J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski, *An energy-based yield criterion for solids of cubic elasticity and orthotropic limit state*, Arch. Mech., 55, 5-6 (2003), 431-448
- [56] K. Kowalczyk-Gajewska, J. Ostrowska-Maciejewska, *The influence of internal restrictions on the elastic properties of anisotropic materials*, Arch. Mech., 56, 3 (2004), str. 205-232
- [57] K. Kowalczyk-Gajewska, J. Ostrowska-Maciejewska, *Energy-based limit criteria for anisotropic elastic materials with constraints*, Arch. Mech., 57, 2-3 (2005), str. 133-155
- [58] K. Kowalczyk-Gajewska, J. Ostrowska-Maciejewska, *Review on spectral decomposition of Hooke's tensor for all symmetry groups of linear elastic material*, Engns. Trans., 57, 3-4 (2009), str. 145-183
- [59] P. V. Lade, J. M. Duncan, *Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil*, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, 101, GT10, Proc. Paper 11670 (1975), 1037-1053
- [60] W. C. Leslie, R. J. Sober, *The strength of ferrite and martensite as functions of composition, temperature and strain rate*, Trans ASM, 60 (1967), str. 459.
- [61] C. LExcellent et al., *Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys*, J. Mech. Phys. Sol., 50 (2002), str. 2717-2735

- [62] W. L. Logan, W. F. Hosford, *Upper-bound anisotropic yield locus calculations assuming $\langle 111 \rangle$ -pencil glide*, Int. J. Mech. Sci., 22 (1980), str. 419-430
- [63] H. Matsuoka, *On the significance of the "spatial mobilized plane"*, Soils and Foundations, 16, 1 (1976), str. 91-100
- [64] M. M. Mehrabadi, S. C. Cowin, *Eigentensors of anisotropic elastic materials*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 43, 1 (1990), str. 15-41
- [65] M. M. Mehrabadi, S. C. Cowin, J. Jaric, *Six-dimensional orthogonal tensor representation of the rotation about an axis in three dimensions*, Int. J. Solids Struc., 34, 3/4 (1995), str. 439-449
- [66] R. von Mises, *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Göttin. Nachr. Math. Phys., 1 (1913), str. 582-592
- [67] R. von Mises, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 8, 3 (1928), str. 161-185
- [68] F. Montheillet, J. J. Jonas, M. Benferrah, *Development of anisotropy during the cold rolling of aluminium sheet*, Int. J. Mech. Sci., 33 (1991), str. 197-209
- [69] M. Nowak, J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Peçherski, P. Szeptyński, *Yield criterion accounting for the third invariant of stress tensor deviator. Part I. Derivation of the yield condition basing on the concepts of energy-based hypotheses of Rychlewski and Burzyński.*, Engng. Trans., 59, 4 (2011), str. 273-281
- [70] S. Oller, E. Car, J. Lubliner, *Definition of a general implicit orthotropic yield criterion*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 192 (2003), 895-912
- [71] W. Olszak, W. Urbanowski, *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies*, Arch. Mech., 8 (1956), 671-694
- [72] W. Olszak, J. Ostrowska-Maciejewska, *The plastic potential in the theory of anisotropic elastic-plastic solids*, Engng. Frac. Mech., 21, 4 (1985), 625-632
- [73] J. Ostrowska-Maciejewska, *Podstawy i zastosowania rachunku tensorowego*, Prace IPPT 1/2007, Warszawa 2007
- [74] J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Peçherski, *Anizotropia sprężysta i wyężenie cienkich warstw i powłok*, IMIM PAN, IPPT PAN, Kraków 2006
- [75] J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Peçherski, P. Szeptyński, *Limit condition for anisotropic materials with asymmetric elastic range*, Engng. Trans., 60, 2 (2012), str. 125-138
- [76] J. Ostrowska-Maciejewska, J. Rychlewski, *Plane elastic and limit states in anisotropic solids*, Arch. Mech., 40, 4 (1988), str. 379-386
- [77] J. Ostrowska-Maciejewska, J. Rychlewski, *Generalized proper states for anisotropic elastic materials*, Arch. Mech., 53, 4-5 (2001), str. 501-518

- [78] Pęcherski, R.B., Szeptyński, P., Nowak, M. An extension of Burzyński hypothesis of material effort accounting for the third invariant of stress tensor, *Archives of Metallurgy and Materials*, vol. 56, is. 2, pp. 503-508, (2011)
- [79] A. C. Pipkin, *Constraints in linearly elastic materials*, *J. Elasticity*, 6, 2 (1976), str. 179-193
- [80] J. Podgórski, *Limit state condition and the dissipation function for isotropic materials*, *Arch. Mech.*, 36, 3 (1984), str. 323-342
- [81] B. Raniecki, Z. Mróz, *Yield or martensitic phase transformation conditions and dissipation functions for isotropic, pressure-insensitive alloys exhibiting SD effect*, *Acta. Mech.*, 195 (2008), str. 81-102
- [82] G. C. Rauch, W. C. Leslie, *The extent and nature of the strength-differential effect in steels*, *Metall. Trans.*, 3 (1972), str. 373-385
- [83] O. Richmond, W. A. Spitzig, *Pressure Dependence and Dilatancy of Plastic Flow*, *Int. Union of Theoretical and Applied Mechanics*, 1980, str. 377-386
- [84] P. Rosband, E. Schmid, *Über Verfestigung von Einkristallen durch Legierung und Kaltverformung*, *Zeitschr. f. Phys.*, 32 (1925), str. 197-225
- [85] J. Rychlewski, „*СЕИИНОССТТУУ*” *Математическая структура упругих тел*, Препринт 217, ИПМ АН СССР, ИППТ ПАН, Москва, 1983
- [86] J. Rychlewski, *О законе Гука*, *Прикл. Мат. Мех.*, 48 (1984), 420-435; zob. także: J. Rychlewski, *On Hooke's law*, *J. Appl. Math. Mech.*, 48 (1984), 303-314
- [87] J. Rychlewski, *Разложения упругой энергии и критерии предельности*, *Успехи механики*, 7 (1984), 51 - 80, zob. także: *Elastic energy decomposition and limit criteria*, *Engng. Trans.*, 59, 1 (2011), 31-63
- [88] J. Rychlewski, *Zur abschätzung der Anisotropie*, *Zeitschr. angew. Math. u. Mech.*, 65, 6 (1985), 256-258
- [89] J. Rychlewski, *Symetria przyczyn i skutków*, PWN, Warszawa, 1991
- [90] J. Rychlewski, *Unconventional approach to linear elasticity*, *Arch. Mech.*, 47, 2 (1995), 149-171
- [91] J. Rychlewski, *A qualitative approach to Hooke's tensors. Part I*, *Arch. Mech.*, 52, 4-5 (2000), 737-759
- [92] J. Rychlewski, *A qualitative approach to Hooke's tensors. Part II*, *Arch. Mech.*, 53, 1 (2001), 45-63
- [93] J. Rychlewski, *Elastic waves under unusual anisotropy*, *J. Mech. Phys. Solids*, 49 (2001), str. 2651-2666

- [94] J. Rychlewski, *Anisotropic materials with invariant Kirchhoff shear modulus*, 4th International Conference on Nonlinear Mechanics, Shanghai 2002, str. 137-140
- [95] W. A. Spitzig, R. J. Sober, O. Richmond, *Pressure dependence of yielding and associated volume expansion in tempered martensite*, Acta Metall., 23 (1975), str. 885-893
- [96] W. A. Spitzig, R. J. Sober, O. Richmond, *The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity Theory*, Metall. Trans. A, 7A (1976), str. 1703-1710
- [97] W. A. Spitzig, O. Richmond, *The effect of pressure on the flow stress of metals*, Acta Metall., 32 (1984), str. 457-463
- [98] F. Schleicher, *Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung)*, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 6 (1926), str. 199-216
- [99] H. L. Schreyer, Q. H. Zuo, *Anisotropic yield surfaces based on elastic projection operators*, J. Appl. Mech., 62 (1995), str. 780-785
- [100] S. Sutcliffe, *Spectral decomposition of the elasticity tensor*, Transactions of the ASME 762, vol. 59, (1992)
- [101] P. Szeptyński, *Some remarks on Burzyński's failure criterion for anisotropic materials*, Engng. Trans., 59, 2 (2011), str. 119-136
- [102] P. Szeptyński, *Yield criterion accounting for the influence of the third invariant of stress tensor deviator. Part II: Analysis of convexity condition of the yield surface.*, Engng. Trans., 59, 4 (2011), str. 283-297
- [103] P. Szeptyński, R. B. Pęcherski, *Propozycja nowego kryterium plastyczności dla blach ortotropowych z uwzględnieniem asymetrii zakresu sprężystego*, Rudy i metale nieżelazne, 57, 4 (2012), str. 243-250
- [104] G. J. Taylor, C. F. Elam, *The distortion of iron crystals*, Proc. Roy. Soc. (London), A 112 (1926), str. 337
- [105] P. S. Theocaris, *Decomposition of strain energy density in fiber reinforced composites*, Engng.Frac. Mech., 33, 3 (1989), str. 335-343
- [106] P. S. Theocaris, *The elliptic paraboloid failure criterion for cellular solids and brittle foams*, Acta Mech., 89 (1991), str. 93-121
- [107] T. C. T. Ting, *Invariants of anisotropic elastic constants*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 40 (1987), str. 431-448
- [108] H. É. Tresca, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis a de fortes pressions.* C.R. Acad. Sci. Paris, 59 (1864), str. 754.
- [109] S. W. Tsai, E. M. Wu, *A general theory of strength for anisotropic materials*, J Comp. Mater., 5 (1971), str. 58-80

- [110] H. Vegter , P. Drent, J. Huétink, *A planar isotropic yield criterion based on mechanical testing at multi-axial stress states*, *Simulation of materials processing: theory, methods and applications*, ed. S. F. Shen & P. Dawson, Balkema, Rotterdam, 1995
- [111] H. Vegter, A.H. van den Boogaard, *A plane stress yield function for anisotropic sheet material by interpolation of biaxial stress states*, *Int. J. Plast.*, 22 (2006), str. 557-580
- [112] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*, B. G. Teubner Verlag, Leipzig, Berlin 1910
- [113] W. Zhou, *A new orthotropic yield function describable anomalous behaviour of materials*, *Trans. Nonferrous Metals Soc. China*, 4 (1994), str. 37-41