

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

**Wydział Samochodów  
i Maszyn Roboczych**

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr Tomasz Filip Szmidt

**Aktywne i pasywne tłumienie drgań giętnych belki  
z wykorzystaniem zjawisk elektromagnetycznych**

Promotor  
dr hab. inż. Piotr M. Przybyłowicz

Warszawa 2011



Składam serdeczne podziękowania mojemu promotorowi, dr hab. inż. P. Przybyłowiczowi, za wprowadzenie w dziedzinę mechaniki, wskazanie kierunku badań, pomoc organizacyjną oraz konsultacje merytoryczne.

Dziękuję również osobom i instytucjom, których wsparcie umożliwiło powstanie tej pracy: Instytutowi Podstaw Budowy Maszyn (szczególnie prof. A. Tylikowskiemu), Wydziałowi Samochodów i Maszyn Roboczych Politechniki Warszawskiej, Ministerstwu Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz Narodowemu Centrum Nauki.

Praca wykonana została w ramach następujących projektów badawczych:

1. Grant rektorski promotorski: „Pasywne i aktywne tłumienie drgań giętych belki z wykorzystaniem zjawisk elektromagnetycznych”, porozumienie z dn. 21.05.2010 r.
2. Grant promotorski NCN, N N501 047740: „Aktywne i pasywne tłumienie drgań giętych belki z wykorzystaniem zjawisk elektromagnetycznych”.

Wszystkie obliczenia numeryczne i część symbolicznych wykonano przy pomocy oprogramowania ©Maplesoft Maple<sup>TM</sup>14. Rysunki przygotowano w Maple<sup>TM</sup>14 oraz LaTeXDraw<sup>1</sup>. Rozprawę złożono w systemie L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub> przy użyciu klasy `mwrep.cls`<sup>2</sup>.

★ ★ ★ ★ ★

*„Essentially, all models are wrong, but some are useful.”*

— George E. P. Box, Norman R. Draper, 1987, *Empirical Model-Building and Response Surfaces*, p. 424, Wiley, ISBN 0471810339.

★ ★ ★ ★ ★

---

<sup>1</sup> <http://latexdraw.sourceforge.net/>

<sup>2</sup> <http://www.mimuw.edu.pl/~wolinski/mwcls.html>



## Streszczenie

Celem pracy jest zbadanie wpływu siły magnetycznej generowanej przez aktuatory (siłowniki) na poprzeczne drgania belki poddanej obciążeniu śledzącemu. Najpierw zajęto się drganiami swobodnymi i wymuszonymi uproszczonego układu – oscylatora harmonicznego z dołączonymi aktuatorami magnetycznymi. Efektem jest potwierdzenie skuteczności tłumienia magnetycznego, ilościowe oszacowanie wpływu histerezy magnetycznej na dysypację energii, poznanie nieliniowego charakteru ruchu oraz uogólnienie znanych równań magnetodynamiki aktuatorów na przypadek dowolnej krzywej magnesowania materiału rdzeni. Następnie pokazano, że zastosowanie aktuatorów w kolumnie Leipholza pozwala uzyskać szereg pozytywnych efektów: stabilizację kolumny, zmniejszenie amplitudy drgań okołokrytycznych i zmianę twardego samowzbudzenia w miękkie. Wymagało to udoskonalenia znanego narzędzia, jakim są wzory na przybliżenie rozwiązania bifurkacyjnego. Wykazano także możliwość jeszcze wyraźniejszej stabilizacji kolumny przy pomocy aktywnego sterowania napięciem załączonym do aktuatorów. Pracę kończy badanie modelu realnego układu – rury przenoszącej płyn. Ograniczono się do analizy liniowej, tj. wpływu tłumienia magnetycznego na krytyczną prędkość przepływu. Analiza bifurkacyjna tego układu, a także zastosowanie aktuatorów do stabilizacji, tłumienia drgań i zmiany okołokrytycznego zachowania innych układów – np. wirujących wałów – będą naturalną kontynuacją badań.

## Abstract

In this thesis, we investigate the influence of magnetic force generated by actuators on lateral vibrations of a beam subjected to follower force. Firstly, we examine free and forced vibrations of the simplified system – a harmonic oscillator with magnetic actuators attached. As a result, we confirm the efficiency of magnetic damping, estimate the influence of magnetic hysteresis on energy dissipation, recognize nonlinear response of the system and incorporate arbitrary magnetization curve into equations of magnetodynamics. Then we show that applying actuators to the Leipholz column yields several positive effects: stabilization of the column, decreasing of the amplitude of near-critical vibrations and transformation of hard self-excitation into soft one. This analysis required improving approximate formulas of the bifurcation solution, which are known in the literature. We also prove that active control of the voltage applied to the actuators leads to even further stabilization of the column. Finally, we study the model of a real system – a pipe conveying fluid. The research is confined to the linear analysis, i.e. the influence of magnetic force on the critical flow velocity. A possible further work may be bifurcation analysis of this system and application of actuators to stabilization, vibration damping and modification of near-critical behaviour of another systems, e.g. rotating shafts.



# Spis treści

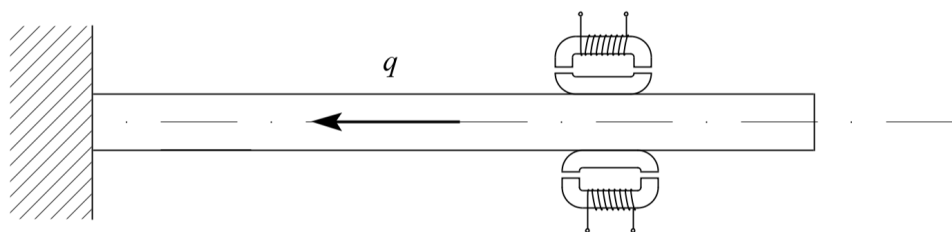
<b>1. Wprowadzenie</b>	9
<b>2. Geneza</b>	13
2.1. Niezachowawcze układy sprężyste z obciążeniem śledzącym	13
2.2. Rury przenoszące płyn	16
2.3. Zastosowanie aktuatorów magnetycznych do tłumienia drgań oraz stabilizacji układów mechanicznych	20
<b>3. Magnetyczne tłumienie drgań</b>	21
3.1. Dynamika oscylatora harmonicznego z dołączonymi aktuatorami magnetycznymi	21
3.1.1. Model fizyczny	21
3.1.2. Statyka – siły, przenikalność magnetyczna	22
3.1.3. Równania elektro-magnetodynamiki, drgania	23
3.1.4. Charakterystyki dynamiczne	24
3.1.5. Stateczność	25
3.1.6. Wnioski	27
3.2. Wpływ histerezy magnetycznej na dysypację energii drgań	27
3.2.1. Układ	27
3.2.2. Model histerezy	28
3.2.3. Równania stanu układu	32
3.2.4. Tłumienie drgań swobodnych i wymuszonych	34
3.2.5. Wpływ histerezy	36
3.2.6. Podsumowanie	36
3.3. Nieliniowa odpowiedź oscylatora na wymuszenie siłą harmoniczną	37
3.3.1. Układ	37
3.3.2. Trajektorie	38
3.3.3. Wykładniki Lapunowa	39
3.3.4. Rezultaty	42
<b>4. Stateczność i okołokrytyczne zachowanie kolumny Leipholza</b>	43
4.1. Nieliniowe równanie ruchu	43
4.2. Dyskretyzacja Galerkina	44
4.3. Krytyczne obciążenie i częstość flutteru	45
4.4. Analiza bifurkacyjna	48
4.5. Konkluzje	54

<b>5. Pasywne tłumienie magnetyczne kolumny Leipholza</b>	57
5.1. Równania dynamiki układu	57
5.2. Stateczność i okołokrytyczne drgania ściskanej kolumny Leipholza z aktuatorami	59
5.3. Przypadek rozciągania śledzącego	62
5.4. Wyniki	64
<b>6. Aktywna stabilizacja magnetyczna kolumny Leipholza</b>	67
6.1. Matematyczny model układu	67
6.2. Sterowanie w pętli sprzężenia zwrotnego	68
6.3. Stabilizacja kolumny obciążonej ściskająco	70
6.4. Aktywne sterowanie przy rozciąganiu śledzącym	73
6.5. Uwagi podsumowujące	76
<b>7. Krytyczna prędkość przepływu w rurze z dołączonymi aktuatorami magnetycznymi</b>	77
7.1. Układ	77
7.1.1. Rura	78
7.1.2. Aktuatory	79
7.2. Dynamika	82
7.2.1. Założenia	82
7.2.2. Równania stanu	82
7.3. Tłumienie wewnętrzne	86
7.4. Tłumienie zewnętrzne	86
7.5. Stateczność	88
7.5.1. Podparcie dwustronne	88
7.5.2. Rura wspornikowa pompująca płyn w dół	89
7.5.3. Wspornikowa rura ssąca	92
7.6. Wnioski	94
<b>8. Uwagi końcowe</b>	95
<b>Bibliografia</b>	97
<b>A. Nieliniowe bezwymiarowe zagadnienie Leipholza</b>	103
A.1. Dyskretyzacja Galerkina – funkcje bazowe oraz współczynniki układu	103
A.2. Współczynniki minorów macierzy Hurwitza dla układu zlinearyzowanego	104



# 1. Wprowadzenie

Celem pracy jest zbadanie możliwości wykorzystania magnetycznych elementów wykonawczych (siłowników, aktuatorów) do tłumienia poprzecznych drgań, stabilizacji oraz modyfikacji okołokrytycznego zachowania belki obciążonej siłą śledzącą, tj. styczną do ugiętej osi. Interesują nas dwa przykłady takiego układu: kolumna Leipholza, gdzie obciążenie śledzące jest rozłożone w sposób ciągły wzdłuż kolumny oraz rura przenosząca płyn, w której siła ta wytwarzana jest wskutek wyrzucania płynu (rys. 1.1). W pewnych warunkach duże obciążenie może prowadzić do utraty stateczności belki i w rezultacie – przy małym zaburzeniu równowagi – do drgań oscylacyjnych lub wyboczenia.

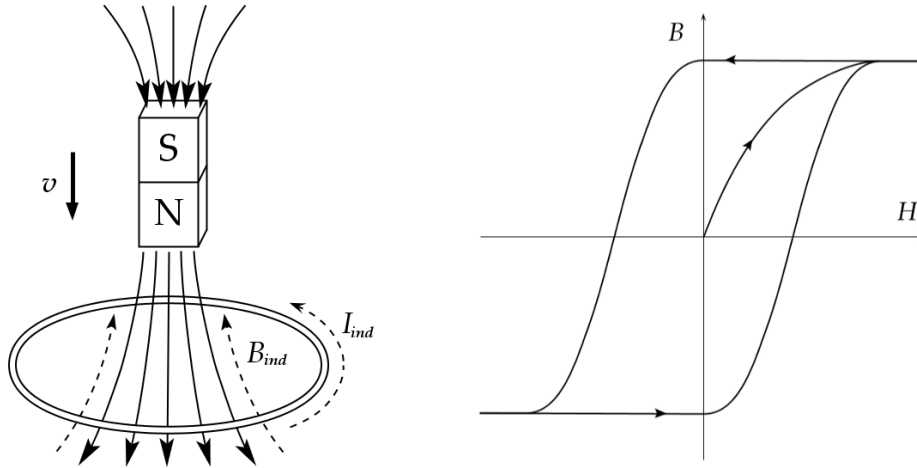


Rysunek 1.1. Badany układ - kolumna z obciążeniem śledzącym.

Przyjmujemy, że ruch układu odbywa się w płaszczyźnie oraz wychylenia są na tyle niewielkie, że mogą być opisane jako funkcja dwóch zmiennych: czasu oraz odległości od początku belki. Taki model jest powszechnie badany w literaturze, którą omawiamy w kolejnym rozdziale.

Belka z umocowanymi do niej stalowymi (ferromagnetycznymi) rdzeniami umieszczona jest pomiędzy dwoma elektromagnesami. Po załączeniu stałego napięcia każdy z aktuatorów przyciąga belkę do siebie, zatem wywiera efekt destabilizujący środkowe położenie równowagi. Stabilizacja układu może być dwojakiego rodzaju: pasywna lub aktywna. Drgania belki zmieniają szczelinę w obwodach magnetycznych, co prowadzi do zmian pola magnetycznego w rdzeniach, a zatem również elektromagnetycznych zjawisk indukcji oraz histerezy, wywołujących pasywny efekt hamujący ruch. Tłumienie aktywne polega na odpowiednim sterowaniu napięciem załączonym do aktuatorów w zależności od stanu układu.

Zjawiska indukcji oraz histerezy pokazane są na rysunku 1.2. Jeśli zamknięty obwód umieścimy w zmiennym polu magnetycznym, to – zgodnie z prawem indukcji Faradaya –



Rysunek 1.2. Zjawiska elektromagnetyczne wykorzystane do dysypacji energii: indukcja (z lewej) i histereza (z prawej).

popłynię w nim prąd, którego pole magnetyczne przeciwdziała wyjściowej zmianie (tzw. reguła Lenza, będąca konsekwencją zasady zachowania energii). Powstaje zatem magnetyczna siła hamująca ruch, a jego energia rozpraszana jest w formie ciepła Joule'a indukowanego prądu.

Histereza magnetyczna także prowadzi do przekształcenia mechanicznej energii drgań w ciepłą. Zmiana pola magnetycznego  $H$  w ferromagnetycznych rdzeniach powoduje indukowanie prądu wirowego, zmianę orientacji domen magnetycznych oraz inne zjawiska zachodzące w mikroskali, których wspólnym efektem jest ograniczenie wynikowej zmiany namagnesowania próbki  $B$ . Pełen cykl prowadzi więc do powstania pętli histerezy, której powierzchnia jest proporcjonalna do energii rozproszonej w formie ciepła.

W kolejnym rozdziale omawiamy genezę pracy, czyli związek podjętych badań z aktualnym stanem wiedzy oraz zarys historyczny tematów.

Rozdział 3 zawiera sprawdzenie skuteczności pasywnego tłumienia magnetycznego drgań swobodnych i wymuszonych, a także oszacowanie wpływu histerezy magnetycznej w rdzeniach na dysypację energii ruchu. Ponadto analizujemy charakter drgań i stanów równowagi pojawiających się w wyniku efektu nasycenia magnetycznego rdzeni i nieliniowej zależności siły magnetycznej od szerokości szczeliny. Wykorzystujemy tutaj uproszczony układ oscylatora harmonicznego z umocowanymi do niego aktuatorami.

Rozdziały 4, 5 i 6 poświęcone są kolumnie Leipholza. W rozdziale 4 badamy stabilność i okołokrytyczne zachowanie tłumionej kolumny bez aktuatorów. Rozdział 5 zawiera omówienie wpływu siły magnetycznej na dynamikę tego układu. Interesuje nas możliwość zwiększenia krytycznego obciążenia przy pasywnym działaniu siłowników, ograniczenie amplitudy drgań okołokrytycznych, a także ich stateczność orbitalna, w tym możliwość

zmiany twardego samowzbudzenia układu w samowzbudzenie miękkie (bifurkacji podkrytycznej w nadkrytyczną). W rozdziale 6 zajmujemy się aktywną stabilizacją kolumny Leipholza. Szukamy możliwości zwiększenia krytycznego obciążenia poprzez sterowanie napięciem załączonym do aktuatorów w zależności od stanu układu.

Rozdział 7 to zwrócenie się w kierunku praktycznych zastosowań. Badamy wpływ tłumienia magnetycznego na stabilność rury przenoszącej płyn i możliwość zwiększenia krytycznej prędkości przepływu.

Pracę kończy podsumowanie otrzymanych wyników i wskazanie możliwości dalszych badań.

Pomysły analizy uproszczonego układu oscylatora oraz sprawdzenia wpływu sił magnetycznych na zachowanie rury z przepływem pochodzą od dr hab. inż. P. Przybyłowicza. Badanie kolumny Leipholza jest pomysłem autora. Wszystkie zadania zostały w całości wykonane przez autora, ale bardzo pomocne tu były konsultacje P. Przybyłowicza.

Wyniki przedstawione w rozdziale 3 zostały opublikowane w artykułach [74], [75], [76]. Rezultaty z rozdziałów 4, 5, 6, 7 nie zostały jeszcze opublikowane.



## 2. Geneza

### 2.1. Niezachowawcze układy sprężyste z obciążeniem śledzącym

Literatura dotycząca dynamiki kolumn z przyłożonymi do nich siłami śledzącymi, tj. podążającymi za ich ugiętym kształtem, jest bardzo bogata. Jej współczesny krytyczny przegląd zawiera artykuł Elishakoffa [18]. Wśród starszych warto wymienić prace Bolotina [8] oraz Bogacza i Janiszewskiego [9].

Jedne z pierwszych badań w tym temacie zaprezentował w 1939 roku Reut [81]. Rozważał zamocowaną sztywno pionową kolumnę z dołączoną na swobodnym końcu platformą. Na platformę działała skupiona siła, stale skierowana wzdłuż osi nieugiętej kolumny w dół. Obciążenie to nie jest śledzące, jednak z uwagi na jego niezachowawczy charakter, problem Reuta zaliczany jest do omawianej klasy. Statyczne kryterium stabilności Eulera, polegające na badaniu zagadnienia brzegowego, doprowadziło do błędnego wniosku, iż dla dowolnej wartości obciążenia układ jest stabilny. W tym samym roku Nikolai [61] zwrócił uwagę na konieczność zastosowania dynamicznego kryterium uwzględniającego bezwładność układu. Podobnie Pflüger [71], badając po wojnie kolumnę z przyłożoną na końcu siłą styczną do ugiętej osi kolumny, stwierdził, że układ jest zawsze stabilny. Błąd ten wskazał Beck [4], który wyliczył krytyczną wartość siły prowadzącą do flatteru.

Zagadnienie stosowalności obu kryteriów przy różnego rodzaju siłach przyciągało naukowców przez wiele lat, zob. [7], [43], [73]. Ponieważ w układach rozważanych w niniejszej pracy występują zarówno siły potencjalne (ciężar, statyczna siła magnetyczna), jak i niezachowawcze (siła śledząca, Coriolisa, indukowana siła magnetyczna), konieczne jest uwzględnienie dynamiki.

Pierwszy eksperyment potwierdzający zjawisko utraty stateczności przez kolumnę obciążoną siłą śledzącą przeprowadzili w 1966 roku Yagn i Parshin [93]. Badali kolumnę wspornikową z umocowanymi na końcu balonami wydmuchującymi powietrze, uzyskując krytyczne obciążenie w przybliżeniu zgodne z wyliczeniami dla kolumny Becka z dodatkową masą na końcu. W 1969 roku Wood i in. [92] zamiast balonów użyli specjalnie zaprojektowanej dyszy wyrzucającej dostarczaną z zewnątrz ciecz (ruch kolumny ograniczony został do płaszczyzny). Uzyskane wyniki były zgodne z teorią, jednak – z powodu nieuwzględnienia wpływu tłumienia wewnętrznego, zewnętrznego oraz przyspieszenia Co-

riolisa płynu w dyszy – również nie stanowiły jednoznacznego jej potwierdzenia. Przeprowadzono szereg kolejnych doświadczeń. Jednym z ostatnich jest badanie Sugiyamy i in. [85], którzy wykazali dynamiczną niestabilność kolumny wspornikowej z zamocowanym na końcu silnikiem raketowym na paliwo stałe. Krótki czas pracy silnika i nierówny ciąg nie pozwoliły na ilościowe porównanie zmierzonego krytycznego obciążenia z teoretycznym.

Na chwilę obecną nie ma więc eksperymentów w pełni potwierdzających teoretyczne wyliczenia krytycznej siły dla klasycznych problemów Reuta, Becka i Leipholza. W tej pracy ograniczamy się do badania modeli matematycznych. Jednak cały czas mamy na uwadze konieczność empirycznej weryfikacji rezultatów, zatem wszystkie parametry dobieramy tak, by miały fizyczny sens, a układy były możliwie jak najprostsze do zbudowania.

W 1952 r. Ziegler [94] stwierdził destabilizujący efekt wprowadzenia niewielkiego tarcia wewnętrznego do układu podwójnego wahadła z siłą śledzącą. Przyczyną paradoksalnej obserwacji było wnioskowanie o stateczności (w sensie Lapunowa) prawdziwego – nieliniowego – układu na podstawie układu zlinearyzowanego, gdy ten drugi jest stateczny, ale nie asymptotycznie, co ma miejsce w sytuacji braku tłumienia. Wówczas wartość własna o największej części rzeczywistej jest czysto urojona. Obciążenie, przy którym trajektoria tej wartości własnej wkracza na prawą półpłaszczyznę zespoloną może być inne od obciążenia, przy którym nieliniowy układ staje się niestateczny.

W rzeczywistości wewnętrzna dysypacja może zarówno stabilizować, jak i destabilizować układ. Ten drugi efekt potwierdzony został teoretycznie i eksperymentalnie dla problemu Reuta: w 1969 r. przez Feldta i in. [21] oraz w 1985 r. przez Qiu i Nemat-Nassera [79]. Jednak przy dostatecznie dużych wartościach tarcia wewnętrznego dalszy jego wzrost zwiększa krytyczne obciążenie kolumny [50], [38], [88]. Tarcie to może mieć także charakter stabilizujący dla kolumn niejednorodnych [37].

Co więcej – tarcie wewnętrzne jakościowo zmienia zachowanie układu na elastycznym podłożu. W 1972 r. Smith i Herrmann [83] stwierdzili, że krytyczne obciążenie prowadzące do flutteru nietłumionej kolumny Becka nie zależy od sztywności podłoża, mimo że sztywność ta wpływa na stabilność kolumny Eulera. Jeśli jednak wprowadzimy do modelu wiskotyczne tarcie wewnętrzne w kolumnie, to krytyczne jej obciążenie zależy od sztywności podłoża, nawet jeśli podłoże to nie ma charakteru dysypacyjnego [89].

Wiskotyczne tłumienie zewnętrzne ma zawsze charakter stabilizujący, co wykazali w 1970 r. Plaut i Infante [72] dla jednorodnej kolumny Becka, a następnie Kar [37] dla kolumny o zmiennym przekroju. W 1983 r. Morgan i Sinhaa [60] pokazali stabilizujący efekt tłumienia dla trzech różnych modeli podłoża: Kelvina-Voigta, Maxwella i standardowego modelu liniowego.

Z powyższego wynika, że chcąc realistycznie ocenić wpływ siły magnetycznej generowanej przez aktuatory na stabilność analizowanych układów oraz badać tę stabilność przy

pomocy zlinearyzowanych równań, musimy uwzględnić w modelu przede wszystkim tarcie wewnętrzne, ale warto uwzględnić także i zewnętrzne.

Istotny dla stabilności elastycznych układów z obciążeniem śledzącym jest wpływ zewnętrznych oddziaływań sprężystych oraz podpór. W 1976 r. Hauger i Wetter [26] pokazali, że odpowiednie częściowe osłabienie podłoża podpierającego kolumnę Becka pozwala – co zaskakuje – zwiększyć krytyczne obciążenie. Z kolei częściowe podparcie kolumny Becka podłożem winklerowskim może zarówno zwiększyć, jak i zmniejszyć krytyczne obciążenie, w zależności od długości części podpartej [20]. W 1990 r. De Rosa i Franciosi [12] zbadali efekt zastosowania pośredniej podpory w problemach Becka, Leipholza i Haugera, przy braku tłumienia wewnętrznego. Odkryli, że w zależności od punktu podparcia zachodzi dywergentna albo oscylacyjna utrata stateczności. W 1996 r. Lee udowodnił [53], że w zależności od sztywności podłoża tłumienie wewnętrzne może stabilizować albo destabilizować kolumnę Becka.

Wymienione wyżej wyniki wskazują, że statyczna siła magnetyczna, którą aktuatory przyciągają kolumnę – każdy w swoją stronę – może istotnie zmienić zachowanie układu i efekt dynamicznej siły tłumiącej drgania.

Nieliniową dynamikę jednorodnej kolumny Becka badali w latach 80-tych XX w. Kolkka [42] i Chen [11]. W 2007 r. Katsikadelis i Tsiatas [38] uogólnili wyniki na przypadek kolumny ze zmienną wzdłuż jej długości masą oraz sztywnością. We wszystkich przypadkach samowzbudne drgania flatterowe zachodziły wskutek miękkiego samowzbudzenia (bifurkacji nadkrytycznej). Z kolei bifurkację podkrytyczną (twarde samowzbudzenie) zaobserwowano po zamocowaniu dodatkowej masy na końcu jednorodnej kolumny [1].

Pierwsze badanie z uwzględnieniem nieliniowości w sytuacji ciągłego rozkładu obciążenia śledzącego zaprezentowali w 1992 r. Kurnik i Pękalak [50]. Okazało się, że ściskana kolumna Leipholza może ulegać zarówno miękkemu samowzbudzeniu (słabe tłumienie wewnętrzne), jak i twardemu (silne tłumienie), natomiast w sytuacji rozciągania zawsze ma miejsce samowzbudzenie miękkie. W 1995 r. Kurnik i Przybyłowicz [51] pokazali możliwość stabilizacji i złagodzenia samowzbudzenia kolumny Leipholza przy pomocy aktuatorów piezoelektrycznych. W 2009 r. Tsiatas i Katsikadelis [88] rozważali różne rozkłady ściskania śledzącego oraz kolumny o zmiennym przekroju. W szczególnym przypadku stałego rozkładu obciążenia i jednorodnej kolumny zaobserwowano – tak jak w zagadnieniu Becka – bifurkację nadkrytyczną. Niestety autorzy nie odnaleźli wcześniejszych prac i nie odnieśli się do ich wyników.

Omawiane wyżej modele niezachowawczych układów były wielokrotnie kwestionowane [18]. Jak piszą Herrmann [28] i Walker [90], układy te są bardzo wrażliwe na niewielkie zmiany parametrów oraz wprowadzenie nowych (np. tłumienia). Nigdy więc nie wiadomo, czy główne czynniki destabilizujące zostały uwzględnione w modelu z odpowiednią

dokładnością. Konieczność uwzględnienia nawet śladowych, ale fizycznie możliwych efektów podkreśla Ziegler [95]. Natomiast Koiter zauważył [41], że obciążenia śledzące zawsze wymagają zewnętrznego źródła energii, na przykład przepływu płynu, w związku z czym koncentrowanie się na abstrakcyjnych siłach śledzących niewiadomego pochodzenia jest bezzasadne.

Dlaczego zatem sporo miejsca w tej pracy poświęcamy kolumnie Leipholza? Po pierwsze, w szczególnym przypadku zerowego napięcia na aktuatorach i przy pominięciu ich masy, wyniki można odnieść do istniejących. Po drugie, nieliniowości związane ze zjawiskami magnetycznymi istotnie komplikują równania. W pierwszym kroku warto więc zbadać układ, którego model matematyczny jest możliwie najprostszy.

## 2.2. Rury przenoszące płyn

Ważnym przykładem układów z obciążeniem śledzącym są rury z przepływającym przez nie płynem. Patrząc na równania dynamiki widać podobieństwo do zagadnienia Becka. Źródłem ścisnącej siły śledzącej jest tutaj reakcja odrzutu wypływającego płynu. Różnicę stanowi składnik równania związany z przyspieszeniem Coriolisa przepływu, który jak się okazuje zmienia wyraźnie zachowanie układu.

Rury przenoszące płyn są wykorzystywane w domowych instalacjach wodnych, systemach chłodzących, rurociągach przesyłających płynne substancje na duże odległości, w urządzeniach do wydobywania rud metali z dna oceanu, itp. Jednak zjawiska ich drgań samowzбудnych lub wybożenia nie są często spotykane. Przyczyną jest fakt, że krytyczna prędkość przepływu, przy której następuje utrata stateczności jest tym większa, im większa jest sztywność rury oraz masa płynu w stosunku do masy rury [24]. Powoduje to trudności z uzyskaniem odpowiednio dużych prędkości w stosunkowo lekkich i sztywnych metalowych rurkach [25]. Znane z codziennego życia zjawisko „rzucania się” przy silnym strumieniu wody swobodnego końca węża ogrodowego obserwujemy dzięki wiotkości tego przewodu.

Przegląd literatury tematu można znaleźć w artykule Ibrahima [31] i Païdoussisa [65] oraz w monografiach drugiego z tych autorów [63], [64].

Według Païdoussisa i Issida [66], jedno z pierwszych badań teoretycznych dla rury dwustronnie podpartej opublikował w 1939 r. Bourrières [10], wyprowadzając m. in. poprawne równania dynamiki. Niestety praca była opublikowana po francusku i pozostała niezauważona. Kolejne analizy teoretyczne z początku lat 50-tych pokazały, że przy dwustronnym przegubowym podparciu rury dostatecznie duża prędkość przepływu zawsze prowadzi do wybożenia [22], [30]. Analogiczne wyniki, ale przy większej prędkości przepływu, otrzymano dla obustronnie sztywnego podparcia [66]. Z kolei Gregory i Païdoussis udowodnili



teoretycznie [24] i potwierdzili eksperymentalnie [25], że rura wspornikowa podatna jest zawsze na niestateczność flutterową.

Przyczyna różnego typu destabilizacji w zależności od mocowania leży w zasadzie zachowania energii. W przypadku dwustronnego podparcia praca wykonywana przez płyn nad rurą w czasie jednego cyklu potencjalnych drgań jest zerowa [66]. Jeśli zatem pominiemy wewnętrzne i zewnętrzne tłumienie, to układ jest zachowawczy i staje się układem żyroskopowo niezachowawczym w przypadku usunięcia jednej z podpór. Rezultat ten otrzymano jednak dla liniowego równania i drgań okresowych; wymagał on zatem potwierdzenia. W 1969 r. Thurman i Mote [87] oraz Holmes w 1978 r. [29] uwzględnili nieliniowości związane z osiowym wydłużeniem i wynikające stąd naprężenie podparte z dwóch stron rury. Okazało się, że przewód taki nie wykazuje żadnej niestabilności oscylacyjnej w zakresie nadkrytycznych prędkości przepływu. Wynik ten potwierdzili Modarres-Sadeghi i Païdoussis w 2009 r. [58], posługując się najbardziej kompletnym na dzień dzisiejszy nieliniowym modelem dynamiki płaskiego ruchu rury z przepływem, zob. Semler i in. [82]. Ponadto wykazali oni możliwość pojawienia się podkrytycznej statycznej bifurkacji, jeśli nadać odpowiednie podłużne naprężenie.

Tłumienie w ośrodku zewnętrznym i materiale rury zależy od prędkości jej ugięcia, więc nie ma wpływu na dywergencję, która jest bifurkacją statyczną. Sytuacja jest zupełnie inna w przypadku zamocowania wspornikowego. W zależności od stosunku mas płynu i rury, oba rodzaje tłumienia mogą zarówno stabilizować układ, jak i zmniejszać krytyczną prędkość przepływu [25].

W 1986 r. Lottati i Kornecki [57] zauważyli, że elastyczne podłoże winklerowskie działa – odwrotnie niż w przypadku kolumny Becka – stabilizująco na nietłumioną rurę z przepływem. Efekt częściowego podparcia różnymi rodzajami podłoża badany był przez Impollonę i Elishakoffa [32], [19] na początku tego wieku. Okazało się, że możliwa jest zarówno stabilizacja, jak i zmniejszenie krytycznej prędkości przepływu, a także zmiana typu utraty stateczności (dywergentna, oscylacyjna).

Wpływ pośredniej podpory sprężystej na stateczność rur wspornikowych był badany teoretycznie i eksperymentalnie przez Sugiyamę i in. w 1985 r. [84]. Dla liniowej sprężyny zamocowanej w połowie długości przewodu, przy niewielkiej stałej sprężystości układ zachowuje się jak w przypadku podparcia jednostronnego, tj. traci stateczność przez flutter; przy dostatecznie dużej jej wartości – ulega wyboczeniu. Wpływ położenia prostej (przegubowej) podpory także okazał się zgodny z przewidywaniami. Jeśli znajduje się ona blisko zamocowania, to rura zachowuje się jak wspornikowa, jeśli blisko końca – zachodzi widełkowa bifurkacja [17]. Efekt działania układu kilku sprężyn oraz sprężyny skrętnej omówiony jest w [63].

Ciekawy jest wątek dotyczący rur wspornikowych zasysających płyn, czyli przenoszą-

cych go od swobodnego końca w górę, takich jak np. używane w morskim górnictwie. W 1985 r. Païdoussis i Luu stwierdzili [67], że przy braku tłumienia układ taki straci stateczność poprzez flutter przy dowolnie małej prędkości przyływu. Co więcej, po wprowadzeniu wewnętrznej dysypacji utrata stateczności nadal zachodziła przy stosunkowo niewielkim przepływie. Przeczyło to fizycznym obserwacjom, ponieważ nigdy wcześniej nie zauważono destabilizacji tego typu rury. W 2005 r. Kuiper i Metrikine [44] wykazali, że uwzględnienie zewnętrznego tłumienia w postaci oporu hydrodynamicznego ośrodka prowadzi do wyraźnego zwiększenia krytycznego przepływu. Tego samego roku Païdoussis i in. [70] zwrócili uwagę na komplikacje związane z opisem warunku brzegowego na swobodnym końcu przewodu i zaproponowali różne postacie tego warunku. W 2008 r. Kuiper i Metrikine [45] opublikowali wyniki pierwszego eksperymentu, w którym doprowadzono do destabilizacji rury zasysającej płyn. Mimo realistycznego opisu oporu hydrodynamicznego [46], model teoretyczny nie pozwolił prawidłowo przewidzieć krytycznej prędkości przepływu, nie był również w stanie opisać złożonego pokrytycznego zachowania układu. Na dzień dzisiejszy problem jest nadal otwarty; przede wszystkim nie wiadomo jakie dokładnie warunki brzegowe występują na swobodnym końcu rury.

Pod koniec lat 80-tych zaczęły pojawiać się badania dotyczące drgań chaotycznych przewodów z przepływającym przez nie płynem. W 1988 r. Tang i Dowel [86] zbadali układ bardzo podobny do naszego: rurę wspornikową z zamocowanym paskiem stalowym, który przyciągany był przez znajdujące się na zewnątrz magnesy trwałe. Siła magnetyczna skutkowała wyboczeniem rury. W tych warunkach wysoka nadkrytyczna prędkość przepływu prowadziła do drgań chaotycznych. Ponadto Païdoussis i Moon [68] oraz Païdoussis i in. [69] zbadali teoretycznie i eksperymentalnie dynamikę przewodu zamocowanego wspornikowo z nieliniowo (kubicznie) sprzężystymi ograniczeniami ruchu. Również tutaj zwiększanie prędkości przepływu powyżej krytycznej prędkości flutteru prowadziło do drgań chaotycznych. Jeszcze ciekawsze zachowanie wykazano teoretycznie dla układu, w którym połączono te same ograniczniki z rurą przy pomocy liniowych sprężyn. Okazało się, że dla odpowiednio dobranych parametrów punkt bifurkacyjny jest podwójnie zdegenerowany, co prowadzi do jednoczesnej statycznej i flutterowej utraty stateczności i – przy dalszym zwiększaniu przepływu - do drgań chaotycznych [35], [36]. Wątek kontynuowany był przez Qiana i in., którzy w 2008 r. zbadali bardziej praktyczny układ – rurę podpartą sprzężystym (liniowo-kubicznym) podłożem [78]. Wraz ze wzrostem przepływu w zakresie nadkrytycznym narastała amplituda drgań, pojawiały się subcykle, następnie środek drgań przesunął się powodując ich asymetryczny charakter, by w końcu układ przeszedł do chaosu.

W omówionych do tej pory publikacjach badany był model płaskich drgań poprzecznych z ewentualnym uwzględnieniem osiowego wydłużenia. Pierwsze prace poświęcone nie-

liniowej dynamice przestrzennego ruchu rury wspornikowej pojawiły się w latach 80-tych. Bajaj i Sethna [3] stwierdzili, że układ taki traci stateczność poprzez nadkrytyczną bifurkację Hopfa, a pojawiające się drgania flutterowe mogą być płaskie lub trójwymiarowe w zależności od stosunku masy płynu do masy rury z płynem. Ponieważ rozważali rurę poziomą pomijając wpływ grawitacji, a większość eksperymentów prowadzona była dla przewodów zamocowanych pionowo, więc w 2008 r. temat podjęty został na nowo w pracy Modarresa-Sadeghi i in. [59]. Numeryczne rozwiązanie równań bez uwzględnienia grawitacji potwierdziło (choć nie idealnie) wnioski Bajaja i Sethny. Wpływ grawitacji nieco zmienił wyniki pod względem ilościowym, jednak nadal mały stosunek mas powodował samowzbudzenie płaskich oscylacji, a duży – drgań przestrzennych. Rezultaty te okazały się też zgodne z doświadczeniami. Co więcej użyta metoda pozwoliła zbadać zachowanie rury dla przepływów daleko przekraczających krytyczne. Okazało się, że dla pewnych stosunków mas wzrost prędkości przepływu powoduje „przełączenie się” układu między oscylacjami 2-D i 3-D.

Dla rozważanej w niniejszej pracy stalowej rury stosunek mas 0,35 powoduje ruch dwuwymiarowy i taki też model uznajemy za wystarczający. Stosujemy go również analizując wpływ aktuatorów na zachowanie ssącego przewodu wykonanego z PCV, mimo stosunku mas równego 0,86. Czynimy tak z dwóch powodów. Po pierwsze, taki model użyty został przez Kuipera i Metrikina w 2008 r. [45] do opisu eksperymentów przeprowadzonych z tym samym przewodem – pierwszych, w których zaobserwowano destabilizację. Po drugie, brak jest badań dotyczących wymiaru ruchu dla wspornikowych rur ssących, model 2-D jest więc pierwszym przybliżeniem.

Niemal wszystkie prace z omawianej dziedziny dotyczą przewodów, których długość jest duża w stosunku do średnicy. Uzasadnione jest zatem pominięcie efektu ścinania elementu rury i jego obrotu, zgodnie z hipotezą Bernoulliego–Eulera, co też czynimy w niniejszej pracy. Istnieją także badania krótkich rur Timoszenki, zob. [56].

Jak pisze Païdoussis [65], zagadnienie dynamiki rur przenoszących płyn stało się modelowym problemem w dynamice – nowym paradygmatem. Opisujące je równanie demonstruje podstawowe własności znacznie bardziej skomplikowanych układów dynamicznych; ponadto teoretyczne przewidywania mogą być stosunkowo łatwo zweryfikowane empirycznie. W rezultacie problem ten może być wykorzystany jako narzędzie do zrozumienia zachowania bardziej skomplikowanych układów, jak również sposób poszukiwania nowych zjawisk i nowych własności dynamicznych. Z tego powodu analiza możliwości zastosowania aktuatorów magnetycznych do stabilizacji i tłumienia drgań mechanicznych podjęta została między innymi na przykładzie przewodów z przepływającym przez nie płynem.

### 2.3. Zastosowanie aktuatorów magnetycznych do tłumienia drgań oraz stabilizacji układów mechanicznych

W latach 90-tych została zaproponowana przez Kurnika koncepcja łożyska hybrydowego, czyli tradycyjnego łożyska ślizgowego z dodatkowymi siłownikami magnetycznymi służącymi do stabilizacji wirującego wału. W pracy [47] przedstawiono metodę polegającą na przesunięciu wirnika – przy pomocy poprzecznych sił magnetycznych generowanych przez te aktulatory – do nowego położenia, w którym poprawie ulega stateczność układu, tj. wzrasta krytyczna prędkość wirowania. W kolejnej pracy [48] wykazano możliwość znacznego zwiększenia skuteczności stabilizacji, dzięki zastosowaniu aktywnego sterowania siłownikami w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego.

Temat był kontynuowany przez Dziedzica i Kurnika [16] oraz Dziedzica [15] z uwzględnieniem zjawiska histerezy magnetycznej. Pokazano możliwość zwiększenia krytycznej prędkości kątowej wirnika przy pomocy sterowania pozycyjnego i prędkościowego oraz stwierdzono złagodzenie charakterystyki rezonansowej dla kinematycznego wymuszenia wynikającego z drgań łożysk. W obu przypadkach sterowanie prędkościowe okazało się skuteczniejsze.

W pracy [52] wykazano, że pasywne działanie siłowników pozwala zwiększyć krytyczne obciążenie kolumny Becka. Poprawa stabilności okazała się szczególnie wyraźna w przypadku rozciągania śledzącego, ale zachodziła także dla obciążenia ściskającego.

Histereza magnetyczna zachodząca w ferromagnetycznych rdzeniach aktuatorów jest jednym z dwóch zjawisk wykorzystywanych do dysypacji energii drgań. Oznacza ona zależność namagnesowania próbki od wartości zewnętrznego pola magnetycznego jakie występowało przez całą jej historię, jak również od obróbki mechanicznej i termicznej próbki, jej geometrii, naprężeń oraz temperatury. Fizycy wciąż poszukują ogólnej teorii wyjaśniającej to zjawisko. Rozważania na ten temat można znaleźć w monografii Bertotti'ego [5], Knoepfela [40] i Nicolaida [62]. Zaproponowany przez Bertotti'ego uproszczony model histerezy wykorzystany został w pracach Dziedzica i Kurnika. Nie określono jednak jaki udział w rozpraszaniu energii drgań wału ma histereza, a jaki – drugie ze zjawisk elektromagnetycznych, czyli indukcja prądu w uzwojeniach aktuatorów.

Nieliniowa zewnętrzna siła sprężysta może prowadzić do chaotycznych drgań rury przenoszącej płyn (2.2). Analogicznego zachowania można spodziewać się po wprowadzeniu aktuatorów, gdyż generowana przez nie siła magnetyczna zależy nieliniowo od wychylenia i prędkości belki. Ponieważ zjawisko chaosu deterministycznego obserwowano wcześniej w znacznie prostszych układach – nieliniowym oscylatorze Duffinga oraz Van der Pola – dlatego najpierw badamy zachowanie uproszczonego układu oscylatora z dołączonymi siłownikami, poddanego harmonicznemu wymuszeniu siłowemu.

## 3. Magnetyczne tłumienie drgań

Rozdział poświęcony jest badaniu możliwości wykorzystania elektromagnetycznych zjawisk indukcji i histerezy do tłumienia drgań mechanicznych. Rozważamy uproszczony układ – klasyczny oscylator harmoniczny z dołączonymi aktuatorami magnetycznymi. W pierwszym punkcie sprawdzamy skuteczność tłumienia drgań swobodnych i wymuszonych przy pominięciu histerezy magnetycznej. Następnie szacujemy ilościowo udział tego zjawiska w całkowitej dysypacji energii w układzie. Na zakończenie analizujemy nieliniową odpowiedź układu na wymuszenie siłą harmonicznie zmienną. Wyprowadzamy różne postacie równań elektro-magnetodynamiki aktuatorów, wykorzystywane dalej w układach ciągłych. Wyniki z tego rozdziału zostały w całości opublikowane [74], [75], [76].

### 3.1. Dynamika oscylatora harmonicznego z dołączonymi aktuatorami magnetycznymi

#### 3.1.1. Model fizyczny

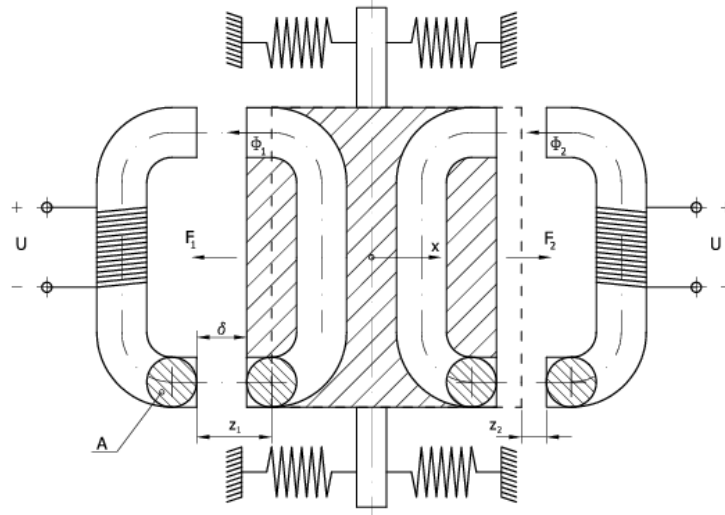
Pomiędzy dwoma identycznym elektromagnesami umieszczony jest oscylator harmoniczny o sztywności  $k$  [N/m] i masie  $m = 0,9$  kg (rys. 3.1). Wewnątrz oscylatora znajdują się żelazne rdzenie tworzące wraz z elektromagnesami obwody magnetyczne, oba o długości  $l = 0,4$  m i przekroju poprzecznym  $A = 0,000314$  m<sup>2</sup>. Na rdzeń każdego z elektromagnesów nawiniętych jest  $N = 1200$  zwojów drutu o oporze  $R = 8,16$   $\Omega$ , do których podłączone jest stałe napięcie  $U$  [V]. Szczeliny pomiędzy zworą i elektromagnesami wynoszą  $z_1 = \delta + x$ ,  $z_2 = \delta - x$ , gdzie  $\delta = 0,01$  m, a  $x \in [0, \delta]$  jest ograniczonym mechanicznie wychyleniem zwory w kierunku prawego elektromagnesu. Zmienianymi parametrami są sztywność sprężyny  $k$  i napięcie  $U$ .

Jako model pierwotnej krzywej magnesowania żelaza, z którego wykonane są rdzenie przyjmujemy funkcję

$$B(H) = 1,7 - 1,65 \exp\left(-\frac{H - 16}{225}\right) + \mu_0 H, \quad H \geq 16.^1 \quad (3.1)$$

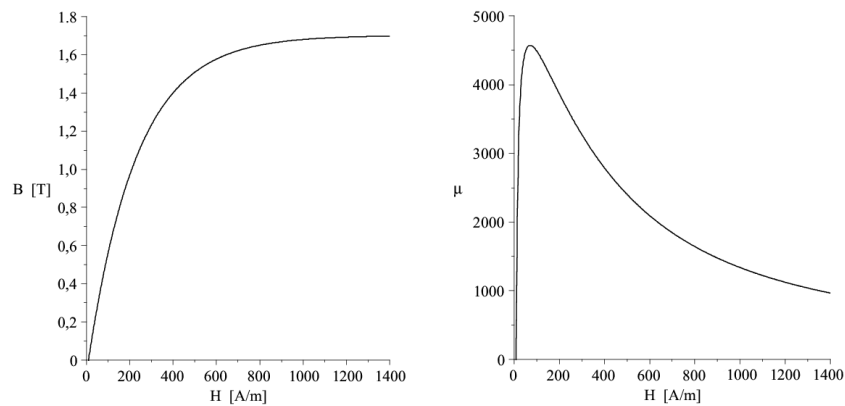
---

<sup>1</sup> Aby prostym wzorem opisać dokładnie krzywą magnesowania żelaza w interesującym nas zakresie napięć przyjmujemy  $H \geq 16$  A/m, co oznacza, że  $U$  musi być powyżej 15 V.



Rysunek 3.1. Oscylator z dołączonymi siłownikami magnetycznymi.

W powyższym wzorze  $H$  [A/m] oznacza natężenie pola magnetycznego,  $B$  [T] jest gęstością strumienia magnetycznego (indukcją pola), a  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Tm/A jest przenikalnością magnetyczną próżni. Krzywa ta uwzględnia zjawisko nasycenia magnetycznego i pozwala zdefiniować względną przenikalność magnetyczną  $\mu(H) = B(H)/(\mu_0 H)$ , mówiącą jak silnie żelazo wzmacnia pole magnetyczne w stosunku do próżni (rys. 3.2).



Rysunek 3.2. Pierwotna krzywa magnesowania i krzywa względnej przenikalności magnetycznej żelaza (model wykładniczy).

### 3.1.2. Statyka – siły, przenikalność magnetyczna

Z praw Ampère'a oraz Gaussa dla pól magnetycznych wynika, że natężenia pola magnetycznego w rdzeniach elektromagnesów dane są równaniami

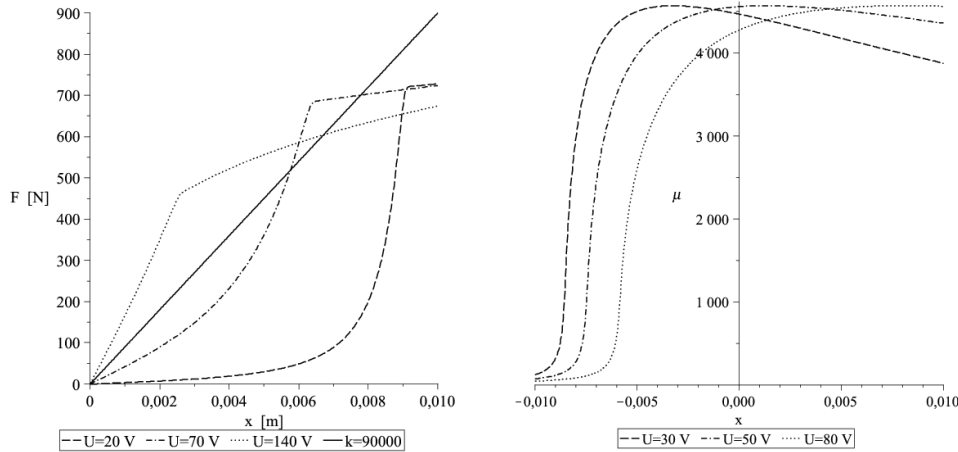
$$H_n = \frac{Ni_n}{2\mu(H_n)z_n + l}, \quad n = 1, 2, \quad (3.2)$$

gdzie  $i_n$ ,  $n = 1, 2$  oznaczają prądy w uzwojeniach elektromagnesów. Równanie to posiada dokładnie jedno rozwiązanie  $H_n \geq 16$ , jeśli  $i_n$  jest dostatecznie duże.

Znając pole magnetyczne możemy wyliczyć siłę, którą każdy z elektromagnesów przyciąga oscylator. Różniczkując energię potencjalną  $U_{B_n}$  zmagazynowaną w polu magnetycznym szczeliny otrzymujemy

$$F_n = 2 \frac{dU_{B_n}}{dz_n} = \frac{\Phi_n^2}{\mu_0 A}, \quad n = 1, 2. \quad (3.3)$$

Wypadkową siłę magnetyczną  $F = F_2 - F_1$  oraz siłę od sprężyny przedstawia rys. 3.3, z lewej. Dla dużych wychyleń oscylatora występuje nasycenie magnetyczne rdzenia,



Rysunek 3.3. Siła magnetyczna i siła od sprężyny (z lewej) oraz względna przenikalność magnetyczna lewego rdzenia (z prawej) w zależności od napięcia i wychYLENIA oscylatora.

objawiające się spowolnieniem tempa wzrostu siły magnetycznej. Liczba i stateczność położeń równowagi układu zmienia się wraz z napięciem  $U$ . Możliwe są sytuacje: (1) zerowe położenie stateczne, (2) zerowe położenie stateczne, dwa niezerowe położenia niestateczne i dwa stateczne, (3) zerowe położenie niestateczne i dwa niezerowe położenia stateczne.

Wykres względnej przenikalności magnetycznej żelaza w lewym rdzeniu (rys. 3.3, z prawej) pokazuje, że w pewnych warunkach możliwe jest przybliżenie  $\mu(H) = \mu^* = 4000$ . Pozwala to wyrazić natężenia pola magnetycznego w rdzeniach jawnymi wzorami.

### 3.1.3. Równania elektro-magnetodynamiki, drgania

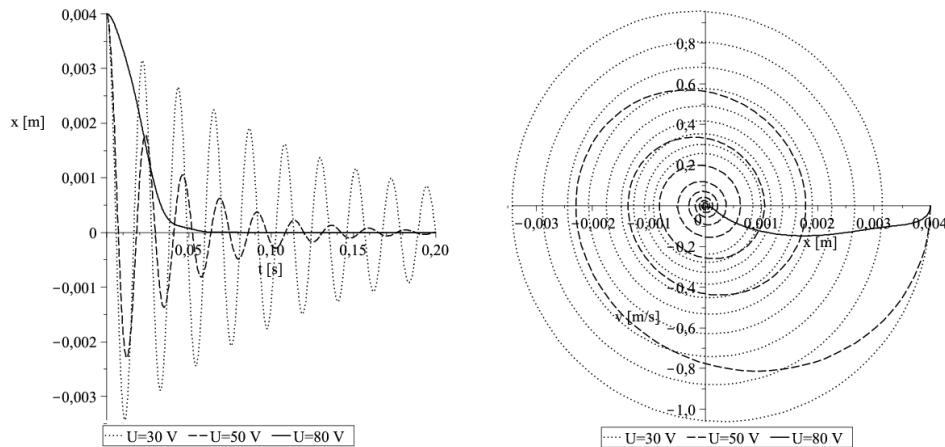
Ruch oscylatora poddanego wymuszeniu siłowemu opisuje II prawo Newtona. Jeśli  $U = 0$ , to siły magnetyczne znikają i oscylator wykonuje drgania nietłumione. Jeśli  $U > 0$ , to elektromagnesy przyciągają oscylator, a ponadto jego ruch indukuje w uzwojeniach dodatkowy prąd, który – zgodnie z regułą Lenza – wytwarza pole magnetyczne przeciwdziałające zmianie pola wywołanej ruchem. Pojawia się siła tłumiąca wyrażająca się poprzez odpowiednią zmianę sił magnetycznych  $F_1$  i  $F_2$ .

Zgodnie z prawem indukcji Faradaya indukowana w obwodach siła elektromotoryczna jest proporcjonalna do prędkości zmiany strumienia magnetycznego. Korzystając z II prawa Kirchhoffa możemy zapisać równanie na prąd indukowany ruchem oscylatora. Otrzymujemy następujący nieliniowy układ równań różniczkowych w postaci niejawnej

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= \frac{1}{\mu_0 A} (\Phi_2^2 - \Phi_1^2) - kx + F_0 \sin(\omega t) \\ Ri_{1,2} &= U - N\dot{\Phi}_{1,2} \\ x(0) &= x_0, \quad v(0) = v_0, \quad i_1(0) = i_2(0) = U/R. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Powyżej  $\Phi_n = \mu(H_n)\mu_0 H_n A$ , gdzie  $H_n = H_n(z_n(t), i_n(t))$  oznacza rozwiązanie równania (3.2) dla danych w chwili  $t$  wartości prądów i wychylenia oscylatora (szczeliny).

Na rys. 3.4 widzimy, że wzrost napięcia zwiększa skuteczność tłumienia drgań swobodnych, aż do nadkrytycznego włączenie (drgania nie występują).



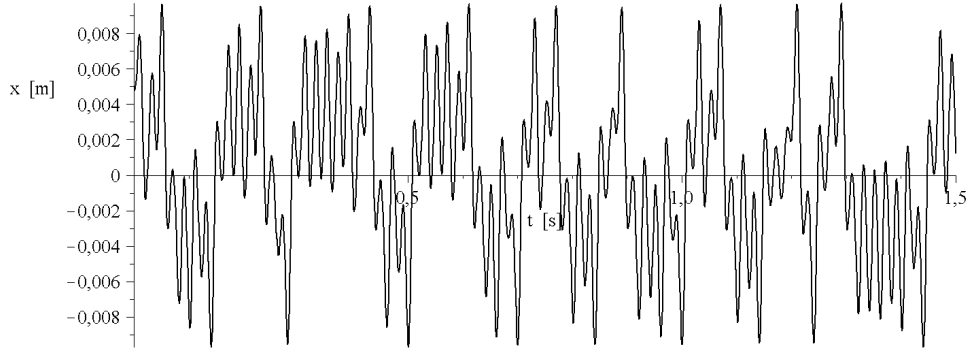
Rysunek 3.4. Drgania oscylatora dla różnych napięć  $U$ ;  $k = 80000$  N/m,  $F_0 = 0$ ,  $x_0 = 0,004$  m,  $v_0 = 0$ .

Kolejny rysunek przedstawia sytuację kiedy napięcie jest na tyle duże, że środkowe położenie oscylatora jest niestateczne, natomiast występują dwa symetryczne wychylone położenia stateczne. Drgania wymuszone odpowiednio dobraną siłą harmoniczną mają wówczas charakter chaotyczny. To zachowanie jest dokładniej analizowane w punkcie 3.3.

### 3.1.4. Charakterystyki dynamiczne

Przyjmijmy stałą przenikalność magnetyczną  $\mu(\cdot) \approx \mu^* = 4000$ , co jest uzasadnione dla następujących par napięcie / zakres wychylenia oscylatora: 30/  $\pm 0,0080$ , 50/  $\pm$





Rysunek 3.5. Drgania oscylatora;  $U = 150$  V,  $k = 110000$  N/m,  $F_0 = 150$  N,  $\omega = 2\pi \cdot 50$  rad/s,  $x_0 = x^*$ ,  $v_0 = 0$ .

0,0065,  $80/\pm 0,0040$  (rys. 3.3, z prawej). Dynamikę układu można wówczas zapisać równaniami w postaci jawnej

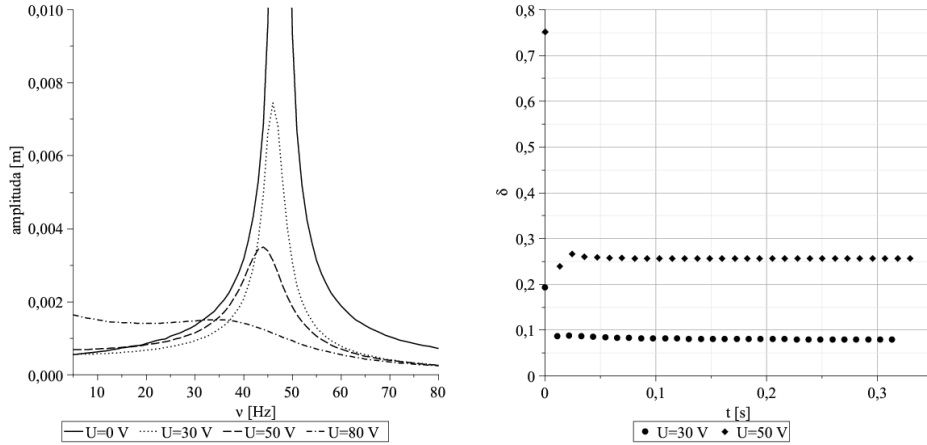
$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= v \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{\mu_0 AN^2}{m} \left[ \frac{i_2^2}{(2(\delta - x) + l/\mu^*)^2} - \frac{i_1^2}{(2(\delta + x) + l/\mu^*)^2} \right] - \frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \\
 \frac{di_1}{dt} &= \left[ \frac{2v}{2(\delta + x) + l/\mu^*} - \frac{(2(\delta + x) + l/\mu^*) R}{\mu_0 AN^2} \right] i_1 + \frac{(2(\delta + x) + l/\mu^*) U}{\mu_0 AN^2} \\
 \frac{di_2}{dt} &= \left[ -\frac{2v}{2(\delta - x) + l/\mu^*} - \frac{(2(\delta - x) + l/\mu^*) R}{\mu_0 AN^2} \right] i_2 + \frac{(2(\delta - x) + l/\mu^*) U}{\mu_0 AN^2} \\
 x(0) &= x_0, \quad v(0) = v_0, \quad i_1(0) = i_2(0) = U/R.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Rozwiązując numerycznie równania (3.5) otrzymujemy charakterystyki dynamiczne układu. Na rys. 3.6 z lewej, widzimy krzywe rezonansowe oscylatora. Mają one przebieg podobny jak w przypadku tłumienia wiskotycznego. Wzrost napięcia powoduje złagodzenie rezonansu (aż do zaniku tego zjawiska) oraz spadek częstotliwości rezonansowej poniżej częstotliwości drgań własnych.

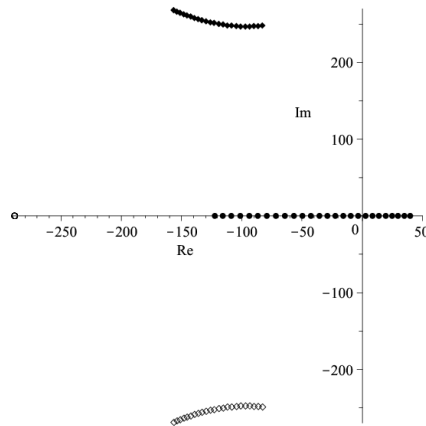
Tłumienie magnetyczne przypomina wiskotyczne również pod względem logarytmicznego dekrementu tłumienia (rys. 3.6, z prawej). Kolejne punkty oznaczają logarytmy ilorazów maksymalnych wychyleń zwory różniących się o jeden okres. Po kilku cyklach następuje ich stabilizacja.

### 3.1.5. Stateczność

Zbadamy stateczność środkowego położenia równowagi układu, przy braku wymuszenia siłowego. Na rysunku 3.7 przedstawione są trajektorie wartości własnych macierzy układu zlinearyzowanego wokół położenia  $x = v = 0$ ,  $i_1 = i_2 = U/R$ , parametryzowane napięciem  $U = 80 \dots 105$  V, przy  $k = 80000$  N/m.



Rysunek 3.6. Krzywa rezonansowa (po lewej,  $F_0 = 40 \text{ N}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ) i logarytmiczny dekrement tłumienia (po prawej,  $F_0 = 0 \text{ N}$ ,  $x_0 = 0,005$ ,  $v_0 = 0$ ) dla różnych napięć przy  $k = 80000 \text{ N/m}$ .



Rysunek 3.7. Wartości własne układu zlinearyzowanego.

Dla  $U < U_{kryt} = 97,6 \text{ V}$  wszystkie cztery wartości własne mają ujemne części rzeczywiste, zatem środkowe położenie jest asymptotycznie statecznym (w sensie Lapunowa) rozwiązaniem stałym układu (3.5). Nieduże jego zaburzenie wywoła gasnące z upływem czasu drgania. Jeśli natomiast  $U > U_{kryt}$ , to jedna z wartości własnych ma dodatnią część rzeczywistą, więc rozwiązanie to jest niestateczne. Ponadto trajektoria decydującej wartości własnej przecina oś urojoną wzdłuż osi rzeczywistej, co oznacza, że mamy do czynienia z bifurkacją dywergentną – pojawiają się nowe rozwiązania równowagi z oscylatorem ściągniętym w stronę jednego z elektromagnesów.

### 3.1.6. Wnioski

Układ elektromagnetyczny umożliwia skuteczne tłumienie drgań oscylatora. Uzyskany efekt jest podobny do tłumienia wiskotycznego. Przyjęcie stałej przenikalności magnetycznej żelaza pozwala zapisać równania ruchu w jawnej postaci, co przyspiesza ich rozwiązywanie, a jednocześnie wnioski dotyczące tłumienia zostają zachowane. Wprowadzenie siły magnetycznej wpływa na zmiany właściwości dynamicznych układu – pojawiają się nowe punkty równowagi i występuje zmiana stateczności dotychczasowych. W pewnych warunkach odpowiedź układu poddanego wymuszeniu harmonicznemu przypomina drgania chaotyczne.

## 3.2. Wpływ histerezy magnetycznej na dysypację energii drgań

### 3.2.1. Układ

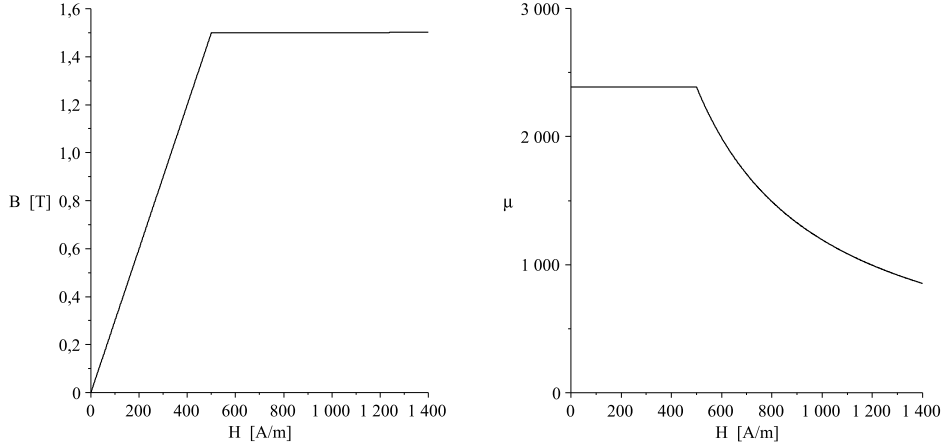
Badany układ jest analogiczny do omawianego w poprzednim punkcie (rys. 3.1). Sztywność sprężyny oscylatora wynosi  $k = 15000$  N/m, a jego masa  $m = 1,5$  kg. Wewnątrz oscylatora znajdują się stalowe rdzenie tworzące wraz z elektromagnesami obwody magnetyczne o długości  $l = 200$  mm i średnicy  $2a = 3$  mm każdy. Na rdzenie elektromagnesów nawiniętych jest  $N = 320$  zwojów drutu o oporze  $R = 1,22$   $\Omega$  (drut miedziany  $\phi = 0,25$  mm), do których podłączone jest stałe napięcie  $U$ . Szczeliny w obwodach magnetycznych wynoszą  $z_1 = \delta + x$ ,  $z_2 = \delta - x$ , gdzie  $\delta = 1$  mm, a  $x \in [0, \delta]$  jest ograniczonym mechanicznie wychyleniem zwory w kierunku prawego elektromagnesu. Zmianianym parametrem jest napięcie  $U$ .

Przewodność elektryczna stali, z której wykonane są rdzenie (stop Si-Fe, zob. [5]) wynosi  $\sigma = 2 \cdot 10^6$  ( $\Omega\text{m}$ )<sup>-1</sup>. Natomiast do opisu jej własności magnetycznych przyjmujemy dwuliniową charakterystykę magnesowania

$$B = \phi(H) = \begin{cases} (B_s/H_s)H, & 0 \leq H \leq H_s \\ B_s + \mu_0(H - H_s), & H > H_s, \end{cases} \quad (3.6)$$

gdzie  $H_s = 500$  A/m jest wartością pola magnetycznego, przy której następuje nasycenie rdzenia,  $B_s = 1,5$  T jest indukcją nasycenia, a  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Tm/A oznacza przenikalność magnetyczną próżni.

Krzywa B-H oraz pochodzącą od niej krzywa względnej przenikalności magnetycznej  $\mu = \mu(H) = \phi(H)/(\mu_0 H)$  przedstawione są na rysunku 3.8. Prawdziwa krzywa magnesowania ma bardziej skomplikowany kształt [5]. Jeśli jednak drgania nie są zbyt duże i załączone napięcie nie jest zbyt wysokie, to zgodnie z wynikami poprzedniego punktu, przyjęcie liniowej charakterystyki materiału rdzenia nie zmienia w sposób zauważalny



Rysunek 3.8. Pierwotna krzywa namagnesowania oraz względna przenikalność magnetyczna stali (model biliniowy).

zachowania układu. Dwuliniowa charakterystyka magnesowania uwzględnia dodatkowo zjawisko nasycenia magnetycznego, została także użyta np. w pracy [15].

### 3.2.2. Model histerezy

Zastosujemy zaproponowany przez Bertotti'ego [5] model wyjaśniający zjawisko histerezy magnetycznej stratami powodowanymi przez prądy wirowe. Powtórzymy rachunki Bertotti'ego dla próbki o geometrii z jaką mamy do czynienia w naszym przypadku, a następnie podamy założenie, przy których otrzymane równanie dobrze przybliży rzeczywistość.

Pełna postać modelu Bertotti'ego pozwala opisać zarówno statyczną, jak i dynamiczną pętlę histerezy. Dla danej próbki pętla statyczna zależy tylko od amplitudy zmiennego pola magnetycznego; pętla dynamiczna zależy również od częstotliwości i postaci (sinusoidalna, trójkątna, itp.) tych zmian. Dokładny opis obu typów histerezy wymaga zidentyfikowania kilku parametrów fizycznych właściwych wyłącznie badanej próbce. Z tego powodu porzucimy na modelu pętli dynamicznej, dodatkowo pomijając jego część związaną ze strukturą domen magnetycznych.

### Straty energii

Gdybyśmy znali gęstość prądu wirowego  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  w każdym punkcie próbki  $\mathbf{r}$  i w każdej chwili czasu  $t$ , to moglibyśmy policzyć energię cieplną traconą w jednym cyklu na jednostkę objętości ( $\text{J/m}^3$ , liczbowo równą polu pętli histerezy) ze wzoru

$$\frac{P}{f} = \frac{1}{V} \int_V dV \int_0^{1/f} \frac{|\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)|^2}{\sigma} dt, \quad (3.7)$$

gdzie  $\sigma$  jest przewodnością elektryczną materiału próbki,  $V$  jest jej objętością, a  $f$  – częstotliwością zmian pola.

Niestety opisanie rozkładu prądu wirowego jest bardzo trudne, ponieważ zależy on nie tylko od geometrii próbki i stałych materiałowych, ale również od struktury domen magnetycznych. Zaproponowany przez Bertotti’ego model traktuje indukowany prąd wirowy jako sumę prądów wywołanych przez losowo pojawiające się skoki Barkhausena, czyli lokalne zmiany struktury domen. Uśrednienie wpływu indywidualnych skoków prowadzi do dekompozycji strat energii (3.7) na trzy składniki: stratę histerezową (*hysteresis loss*), klasyczną (*classical*) i dodatkową (*excess*)

$$\frac{P}{f} = C_0 + C_1 f + C_2 \sqrt{f}. \quad (3.8)$$

Pierwszy składnik odpowiada za statyczną – niezależną od częstotliwości zmian pola – pętlę histerezy. Dwa pozostałe opisują pętlę dynamiczną. Stałe  $C_0$  i  $C_2$  wymagają identyfikacji, natomiast stałą  $C_1$  można wyliczyć znając geometrię próbki, jej przewodność elektryczną oraz funkcję opisującą zmiany pola magnetycznego w czasie. Jak podaje Bertotti [ibid., rozdz. 1], w przypadku zbadanego paska blachy ze stopu Si-Fe o grubości 0,21 mm umieszczonego wzdłuż sinusoidalnie zmiennego pola magnetycznego o maksymalnej indukcji 1,5 T stałe wynoszą:  $C_0 = 33$ ,  $C_1 = 0,058$ ,  $C_2 = 1,4$ .

Dla badanego w pracy układu oscylatora zastosujemy model opisujący drugi, liniowy względem częstotliwości, składnik pętli histerezy. Jest on rezultatem prądu wirowego płynącego w makroskali, kiedy materiał traktowany jest jako jednorodny. Od tej pory będziemy ten prąd oznaczać przez  $\mathbf{j}$ , pamiętając, że całkowity indukowany prąd wirowy w próbce jest większy.

## Równania Maxwella

Korzystać będziemy z równań Maxwella. Kolejno są to: prawo Faradaya, Ampère’a oraz prawo Gaussa dla pola elektrycznego i magnetycznego, w postaci różniczkowej oraz całkowej. W drugim równaniu występuje tylko jeden składnik, ponieważ w drganiach mechanicznych mamy do czynienia ze stosunkowo małymi częstotliwościami, przy których wpływ poprawki Maxwella do prawa Ampère’a jest nieistotny [ib., rozdz. 3].

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t & \int_{\gamma} \mathbf{E} &= -d\Phi / dt \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} & \int_{\gamma} \mathbf{H} &= I \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho & \int_{\Gamma} \mathbf{D} &= \int_V \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \int_{\Gamma} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

W powyższych równaniach  $\mathbf{D}$  [C/m<sup>2</sup>] to indukcja elektryczna,  $\mathbf{B}$  [T] – indukcja magnetyczna,  $\mathbf{E}$  [V/m] – natężenie pola elektrycznego,  $\mathbf{H}$  [A/m] – natężenie pola magne-

tycznego,  $\Phi$  [Wb] – strumień indukcji magnetycznej,  $\mathbf{j}$  [A/m<sup>2</sup>] – gęstość prądu,  $I$  [A] – sumaryczny prąd,  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>] – gęstość ładunku. Przez  $\gamma$  oznaczamy krzywą w przestrzeni, a  $\Gamma$  – powierzchnię ograniczającą obszar przestrzeni  $V$  (krzywa i powierzchnia są zamknięte oraz odpowiednio regularne).

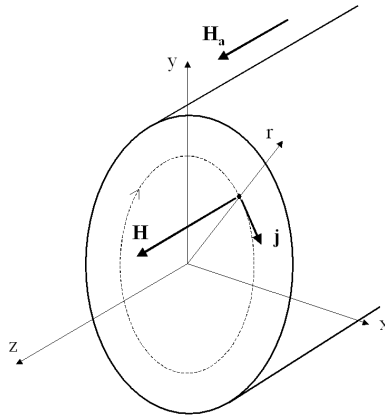
Ponadto spełnione są następujące dwa związki:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.10)$$

gdzie  $\epsilon$  jest przenikalnością elektryczną ośrodka (założenie liniowości elektryzowania materiału rdzenia), a  $\sigma$  jest jego przewodnością elektryczną.

### Równanie konstytutywne rdzenia

Na rysunku 3.9 przedstawiony jest nieskończenie długi rdzeń stalowy, wzdłuż którego przyłożone jest zmienne w czasie zewnętrzne pole magnetyczne  $\mathbf{H}_a = (0, 0, H_a)$ ,  $H_a = H_a(t)$ . Niech  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ ,  $H = H(x, y, t)$  oznacza pole magnetyczne w rdzeniu,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ,  $B = B(x, y, t)$  – indukcję odpowiadającą temu polu, a  $\mathbf{j} = (j_x, j_y, 0)$ ,  $j_x = j_x(x, y, t)$ ,  $j_y = j_y(x, y, t)$  – gęstość indukowanego prądu wirowego. Jeśli rdzenie obwodów magnetycznych są dostatecznie długie, to model ten można zastosować do badanego przez nas układu. Wówczas  $\mathbf{H}_a$  jest polem magnetycznym wytworzonym przez zwoje elektromagnesu.



Rysunek 3.9. Rdzeń stalowy umieszczony w osiowo skierowanym zmiennym polu magnetycznym.

Równania Maxwella w postaci różniczkowej (3.9) oraz zależności (3.10) prowadzą do następującego zagadnienia opisującego pole magnetyczne w rdzeniu

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \sigma \frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.11)$$

$$H|_{\partial A}(t) = H_a(t), \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0, t) = 0. \quad (3.12)$$

Zapisując laplasjan we współrzędnych biegunowych otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = \sigma \frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.13)$$

$$H(a, t) = H_a(t), \quad \frac{\partial H}{\partial r}(0, t) = 0. \quad (3.14)$$

Założmy teraz, że  $B$  i  $\partial B/\partial t$  w niewielkim stopniu zmieniają się wraz z odległością od środka rdzenia  $r$ . Możemy więc zastąpić je przez wartości średnie w przekroju rdzenia, oznaczone odpowiednio przez  $\bar{B}$  i  $d\bar{B}/dt$ . Rozwiązanie równania (3.13) dane jest wówczas wzorem

$$H = H_a - \frac{1}{4} \sigma (a^2 - r^2) \frac{d\bar{B}}{dt}. \quad (3.15)$$

Otrzymany paraboliczny rozkład pola magnetycznego w rdzeniu jest przybliżony. Rzeczywisty rozkład znaleźć można w [40].

Prawo Ampère'a w postaci różniczkowej implikuje, że gęstość prądu wirowego indukowanego w rdzeniu wynosi

$$j = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{1}{2} \sigma r \frac{d\bar{B}}{dt}, \quad (3.16)$$

przy czym ujemny znak wynika z reguły Lenza – wyindukowany skutek zmiany pola magnetycznego prąd wytwarza pole przeciwdziałające wyjściowej zmianie.

Obliczając dla przekroju rdzenia średnie wartości obu stron równania (3.15) otrzymujemy

$$\bar{H} = H_a - \frac{1}{8} \sigma a^2 \frac{d\bar{B}}{dt}. \quad (3.17)$$

Średnia wartość pola magnetycznego w rdzeniu  $\bar{H}$  musi być zgodna z prawem magnesowania materiału  $\bar{H} = \phi^{-1}(\bar{B})$ , co prowadzi do następującego równania konstytutywnego rdzenia

$$\frac{1}{8} \sigma a^2 \frac{d\bar{B}}{dt} + \phi^{-1}(\bar{B}) = H_a. \quad (3.18)$$

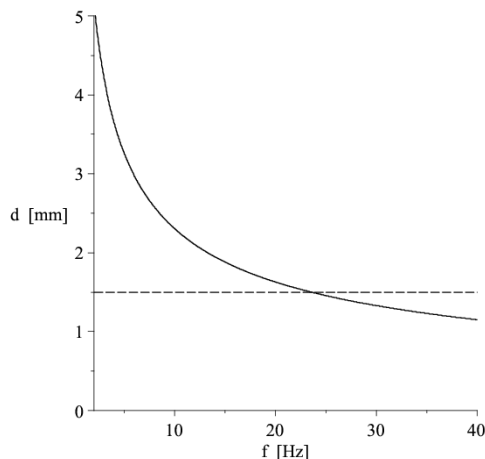
Analogiczne równanie dla geometrii płyty znajduje się w [5]. Różnią się one stałą stojącą przy  $d\bar{B}/dt$  – jeśli płyta ma grubość  $2a$ , to zamiast  $1/8$  występuje  $1/3$ .

W przypadku cienkiej płyty rozważanej przez Bertotti'ego dyfuzja pola w materiale zachodziła szybko i założenie o małych zmianach  $B$  i  $\partial B/\partial t$  na przekroju próbki było spełnione. W naszej sytuacji nie jest to oczywiste. Aby stwierdzić kiedy założenie to można przyjąć użyjemy pojęcia warstwy skórnej rdzenia [40]. W warstwie skórnej wydzielana jest większość ciepła pochodzącego z indukowanych prądów wirowych. Głębiej pod nią amplituda pola magnetycznego jest znacznie mniejsza niż w jej obrębie. Ten efekt ekranowania warstwy skórnej (*shielding effect*) wykorzystuje się na przykład w piecach indukcyjnych do powierzchniowej obróbki cieplnej metali.

Grubość warstwy skórnej rdzenia (*skin depth*) znajdującego się w harmonicznym polu magnetycznym o częstotliwości  $f$  dana jest wzorem

$$d = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma\mu\mu_0 f}}. \quad (3.19)$$

Na rysunku 3.10 widzimy, że wraz ze wzrostem częstotliwości zmian pola grubość warstwy skórnej maleje. Upraszczające założenie można przyjąć, gdy jej grubość jest większa niż



Rysunek 3.10. Grubość warstwy skórnej rdzenia w harmonicznym polu magnetycznym

promień rdzenia. Dla danej w tym punkcie geometrii oraz danych własności elektrycznych i magnetycznych materiału rdzenia oznacza to, że  $f \leq 24$  Hz.

### 3.2.3. Równania stanu układu

Dla ustalenia uwagi analizować będziemy lewy elektromagnes. Na początku ułożymy równanie opisujące zjawiska elektromagnetyczne w rdzeniu. Rozpatrzmy krzywą  $\gamma$  przechodzącą prostopadle przez środek każdego przekroju poprzecznego rdzenia. Stosując do niej prawo Ampère'a w postaci całkowej otrzymujemy, że

$$l \cdot H(0) + 2(\delta + x) \cdot H_z(0) = I. \quad (3.20)$$

gdzie  $H, H_z$  są natężeniami pola magnetycznego w rdzeniu i szczelinie, a  $I$  jest całkowitym prądem przepływającym przez obszar przestrzeni objęty krzywą  $\gamma$ .

Z prawa Gaussa dla pól magnetycznych w postaci całkowej wynika, że przez każdy przekrój poprzeczny obwodu magnetycznego przepływa taki sam strumień magnetyczny. Ponieważ przekrój poprzeczny rdzenia  $A$  jest stały, więc indukcja magnetyczna w rdzeniu jest taka sama jak w szczelinie. Zatem

$$H = \phi^{-1}(B), \quad H_z = \frac{B}{\mu_0}. \quad (3.21)$$



Całkowity prąd  $I$  jest sumą prądu przepływającego przez uzwojenia elektromagnesu oraz prądu wirowego w rdzeniu

$$I = Ni + l \int_0^a j(r) dr = Ni - l(H_a - H(0)), \quad (3.22)$$

gdzie druga równość wynika z (3.16). Podstawiając  $H$ ,  $H_z$  oraz  $I$  do (3.20) oraz zastępując  $H(0)$  i  $B(0)$  przez wartości średnie w przekroju rdzeniu otrzymamy

$$l\phi^{-1}(\bar{B}) + 2(\delta + x)\frac{\bar{B}}{\mu_0} = Ni - l(H_a - \phi^{-1}(\bar{B})). \quad (3.23)$$

Korzystając z (3.18) otrzymamy następujące równanie

$$\frac{1}{8}\sigma la^2 \frac{d\bar{B}}{dt} + \frac{2(\delta + x)}{\mu_0} \bar{B} + l\phi^{-1}(\bar{B}) = Ni. \quad (3.24)$$

Przejdźmy do równania opisującego indukcję w obwodzie elektrycznym. Zgodnie z prawem Faradaya indukowana siła elektromotoryczna jest proporcjonalna do prędkości zmiany strumienia magnetycznego. Korzystając z II prawa Kirchhoffa możemy zapisać

$$i = \frac{U}{R} - \frac{NA}{R} \frac{d\bar{B}}{dt}. \quad (3.25)$$

Wyprowadzimy teraz wzór na siłę magnetyczną. Potraktujmy chwilowo średnią wartość indukcji w rdzeniu jako funkcję wyłącznie szerokości szczeliny,  $\bar{B} = \bar{B}(z)$ . Odsuwając oscylator od przyciągającego go elektromagnesu na odległość  $z$  gromadzimy w polu magnetycznym wypełniającym szczelinę energię potencjalną o gęstości

$$u(z) = \frac{\bar{B}(z)^2}{2\mu_0}. \quad (3.26)$$

Wzór ten wyprowadza się dla idealnego solenoidu, ale jest on prawdziwy dla dowolnego jednorodnego pola magnetycznego. Stąd wynika, że ilość energii zmagazynowanej w szczelinie o szerokości  $z$  wynosi

$$U(z) = \int_0^z u(y) A dy = \frac{A}{2\mu_0} \int_0^z \bar{B}(z)^2 dz \quad (3.27)$$

i w rezultacie siła magnetyczna z jaką elektromagnes przyciąga oscylator jest równa

$$F = 2 \frac{dU}{dz} = \frac{A}{\mu_0} \bar{B}^2. \quad (3.28)$$

Podstawiając (3.25) do (3.24) w celu wyrugowania prądu, a następnie zapisując analogiczne równania dla prawego obwodu elektromagnetycznego, otrzymujemy następujące zagadnienie opisujące dynamikę układu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= \frac{A}{\mu_0} (\bar{B}_2^2 - \bar{B}_1^2) - kx + F_0 \sin(2\pi ft) \\ \left( \frac{AN^2}{R} + \frac{1}{8}\sigma la^2 \right) \frac{d\bar{B}_{1,2}}{dt} + \frac{2(\delta \pm x)}{\mu_0} \bar{B}_{1,2} + l\phi^{-1}(\bar{B}_{1,2}) &= \frac{NU}{R} \\ x(0) &= x_0, \quad v(0) = v_0, \quad \bar{B}_{1,2}(0) = \phi(\bar{H}_{01,2}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

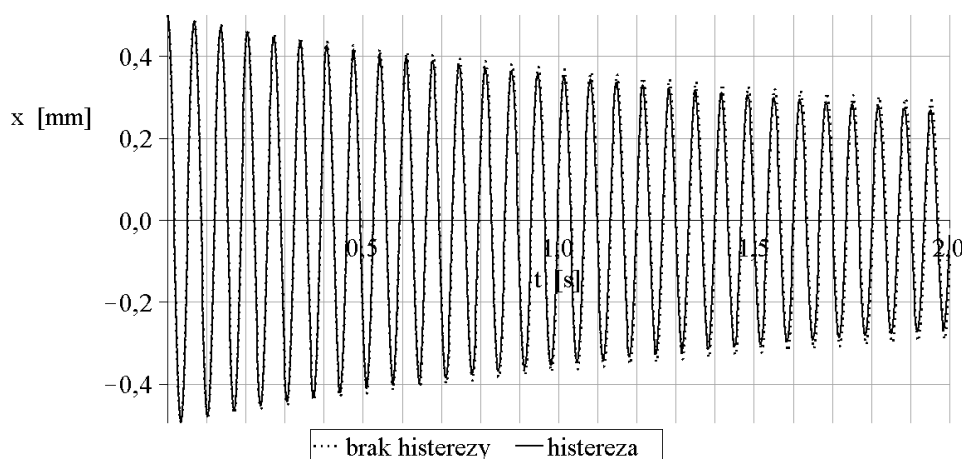
gdzie na mocy (3.20) i przy założeniu zerowego początkowego prądu wirowego  $\bar{H}_{01,2}$  jest rozwiązaniem równania

$$\bar{H}_{01,2} = \frac{NU/R}{2\mu(\bar{H}_{01,2})(\delta \pm x_0) + l}. \quad (3.30)$$

Indeksem 1 oznaczyliśmy tu wszystkie wielkości w lewym obwodzie, a indeksem 2 – w obwodzie prawym. W dalszej części pracy będziemy pomijać – oznaczające wartość średnią na przekroju rdzenia – daszki nad indukcją  $B$  i natężeniem pola magnetycznego  $H$ .

### 3.2.4. Tłumienie drgań swobodnych i wymuszonych

Na rysunku 3.11 przedstawione są drgania oscylatora, w chwili zerowej wychylonego do położenia  $x_0 = 0,5$  mm, przy napięciu  $U = 1,7$  V. Histereza powoduje nieznaczny, ale zauważalny wzrost skuteczności tłumienia.

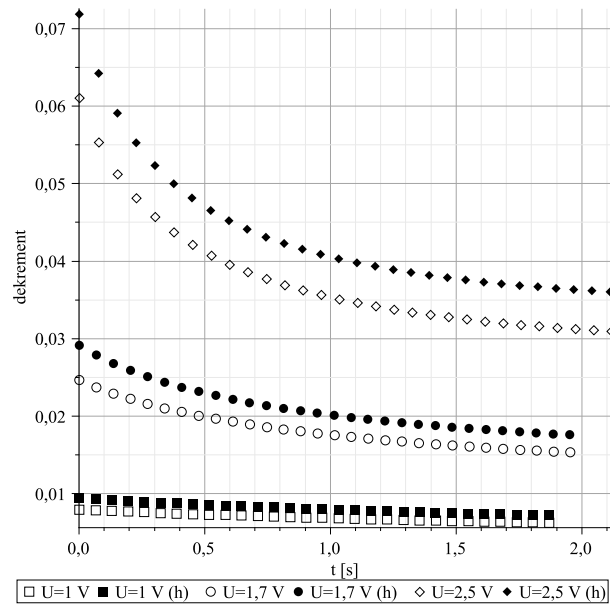


Rysunek 3.11. Drgania swobodne,  $x_0 = 0,5$  mm,  $v_0 = 0$ ,  $U = 1,7$  V.

Logarytmiczny dekrement tłumienia zdefiniowany jest jako  $\log[x(nT)/x((n+1)T)]$ ,  $n = 0, \dots, 29$ , gdzie  $T$  jest okresem drgań (rys. 3.12). Wartość dekrementu z uwzględnieniem histerezy jest od 15 do 19% większa, niż gdy zjawisko histerezy nie jest uwzględnione.

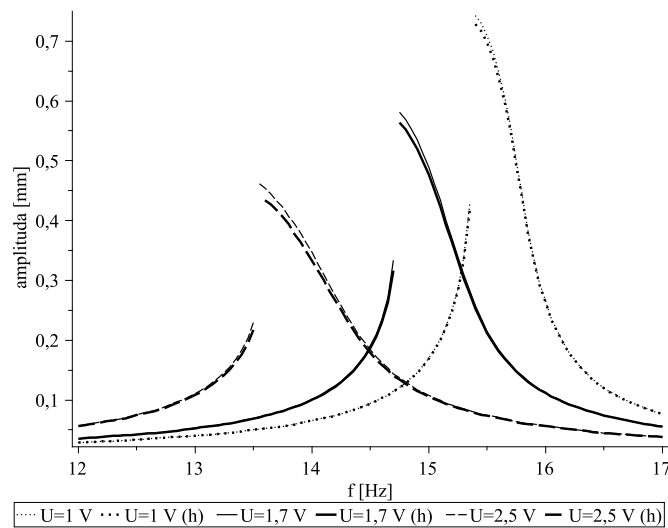
Charakterystyka rezonansowa pokazuje zależność maksymalnej zarejestrowanej amplitudy drgań od częstotliwości wymuszenia harmonicznego. Chcąc zachować zgodność z teorią drgań liniowych można też patrzeć na amplitudę drgań ustabilizowanych. Jednak to podejście jest bardziej czasochłonne, bowiem dla częstotliwości bliskich rezonansowej pojawia się dudnienie, które – z uwagi na przeciętną skuteczność tłumienia magnetycznego dla przyjętych w tym punkcie parametrów – utrzymuje się przez długi czas.

Uwzględnienie histerezy magnetycznej powoduje bardzo niewielkie złagodzenie charakterystyki rezonansowej układu dla wszystkich badanych poziomów napięcia na elektromagnesach (rys. 3.13). Pozorna nieciągłość charakterystyki rezonansowej wynika z nie-



Rysunek 3.12. Logarytmiczny dekrement tłumienia,  $x_0 = 0,5$  mm,  $v_0 = 0$ .

liniowości równań elektro-magnetycznej. W rzeczywistości występuje w tym obszarze cykl niestateczny.



Rysunek 3.13. Charakterystyka rezonansowa,  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $F_0 = 0,1$  N.

### 3.2.5. Wpływ histerezy

Chwilowa moc tracona w jednym rdzeniu wskutek histerezy wyraża się wzorem

$$P_h(t) = \int_V \frac{|\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)|^2}{\sigma} dV = \frac{1}{8} \pi a^4 l \sigma \left( \frac{dB}{dt} \right)^2, \quad (3.31)$$

natomiast chwilowa moc prądu indukowanego w jednym uzwojeniu wynosi (zob. wzór (3.25))

$$P_i(t) = R \left( - \frac{NA}{R} \frac{dB}{dt} \right)^2 = \frac{1}{336} \pi^2 a^5 N \tilde{\sigma} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2, \quad (3.32)$$

gdzie  $\tilde{\sigma}$  jest przewodnością elektryczną materiału uzwojenia (u nas miedzi). Wyprowadzając drugi wzór założyliśmy, że uzwojenie elektromagnesu składa się z drutu o średnicy 12-krotnie mniejszej niż średnica rdzenia. Uzwojenie to nawinięto w dwóch warstwach. Po podstawieniu przyjętych wartości liczbowych otrzymujemy, że chwilowe straty mocy wynikające z histerezy magnetycznej stanowią ok. 19% strat powodowanych przez prąd wyindukowany w uzwojeniu.

### 3.2.6. Podsumowanie

Przyjęte zostały inne niż w punkcie 3.1 zmienne stanu układu. Zamiast prądu w uzwojeniach elektromagnesów wybraliśmy indukcję pola magnetycznego w ich rdzeniach. Pozwoliło to uwzględnić w modelu zjawisko histerezy magnetycznej oraz opisać stan układu równaniami różniczkowymi danymi w postaci jawnej dla dowolnej (odwracalnej) charakterystyki magnesowania.

Wpływ histerezy magnetycznej na tłumienie drgań jest niewielki, ale zauważalny. Model nie uwzględnia strat histerezowych wynikających z prądów wirowych indukowanych w rdzeniu w skali odpowiadającej domenom magnetycznym, więc w rzeczywistości wpływ histerezy jest silniejszy. Z drugiej strony, przy wyższych częstotliwościach daje o sobie znać efekt ekranowania, który zmniejsza wahania pola magnetycznego w rdzeniu, a więc ogranicza straty histerezowe i tym samym zmniejsza skuteczność tłumienia.

Uwzględnienie dwóch pozostałych typów strat histerezowych wymaga identyfikacji parametrów modelu dla fizycznie istniejących rdzeni. Natomiast modelowanie efektu ekranowania pociąga za sobą konieczność uwzględnienia zmiennego rozkładu pola w przekroju rdzeni, co bardzo komplikuje opis matematyczny.

### 3.3. Nieliniowa odpowiedź oscylatora na wymuszenie siłą harmoniczną

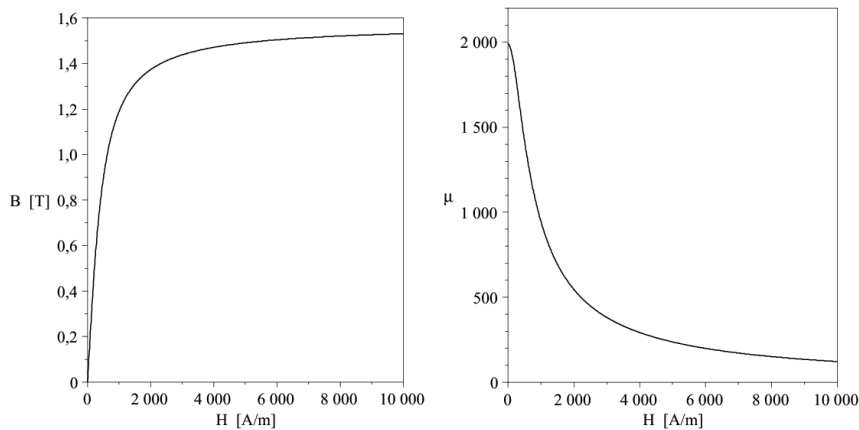
#### 3.3.1. Układ

Rozpatrujemy ten sam układ co w punkcie 3.2, zwiększając jedynie sztywność sprężyn do  $k = 18000$  N/m i ustalając stałe napięcie zasilające elektromagnesy  $U = 7$  V. Zmieniającymi parametrami są amplituda  $F_0$  i częstotliwość  $f$  siłowego wymuszenia harmonicznego.

Ten sam jest również materiał, z którego wykonane są rdzenie. Jego charakterystykę magnesowania opisujemy jednak inną funkcją

$$B = \phi(H) = \arctan(H/400), \quad H \geq 0. \quad (3.33)$$

Krzywą B-H i krzywą względnej przenikalności magnetycznej  $\mu = \mu(H) = \phi(H)/(\mu_0 H)$  przedstawia rysunek 3.14. Dokładny kształt prawdziwej charakterystyki magnesowania



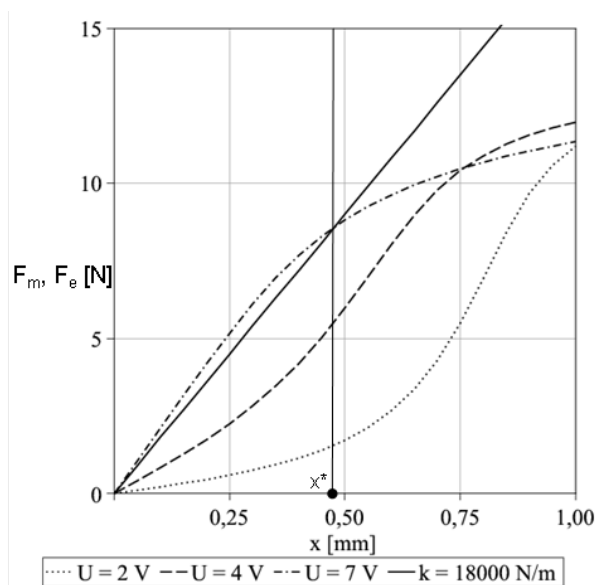
Rysunek 3.14. Pierwotna charakterystyka magnesowania i krzywa względnej przenikalności stali, model (3.33).

może być określony tylko empirycznie. Zależy on nie tylko od składu stopu, lecz również od jego obróbki cieplnej i mechanicznej. Według prac [5] i [6], nasycenie<sup>2</sup> stopu Si-Fe równe około  $B_s = 1,5$  T jest osiągnięte dla natężenia pola  $H_s$  z przedziału  $500 \dots 5000$  A/m, tak więc krzywa przedstawiona na rysunku 3.14 wydaje się być dobrym modelem rzeczywistości.

<sup>2</sup> Według [40], istnieją dwie definicje indukcji nasycenia. Odnosimy się tutaj do praktycznej i dość nieprecyzyjnej definicji, tj. indukcji przy której krzywa B-H zaczyna się wypłaszczać. Teoretyczna definicja nasycenia jako  $\lim_{H \rightarrow \infty} (B - \mu_0 H)$  jest niepraktyczna, gdyż wymaga ogromnych pól magnetycznych, nie spotykanych w naszym układzie.

Powodem zmiany modelu krzywej B-H jest chęć przyspieszenia obliczeń wykładników Lapunowa. Ponadto metoda analizy bifurkacyjnej zastosowana dalej w pracy wymaga analityczności prawa ruchu układu dynamicznego. Numeryczne symulacje drgań tłumionych pokazują, że wszystkie rozważane charakterystyki prowadzą do podobnych rezultatów.

Równania stanu układu są te same co w poprzednim punkcie (3.29). Przyjmując w nich  $\frac{dB_{1,2}}{dt} = 0$ , możemy wyliczyć indukcję  $B_{1,2}$  w zależności od wychylenia oscylatora  $x$ . Wypadkową siłę magnetyczną  $F_m = \frac{A}{\mu_0} (B_2^2 - B_1^2)$  i siłę sprężystą  $F_e = kx$  przedstawia rysunek 3.15. Istotny tutaj będzie efekt nasycenia magnetycznego rdzeni, prowadzący do pojawienia się nowych punktów równowagi  $\pm x^*$ .

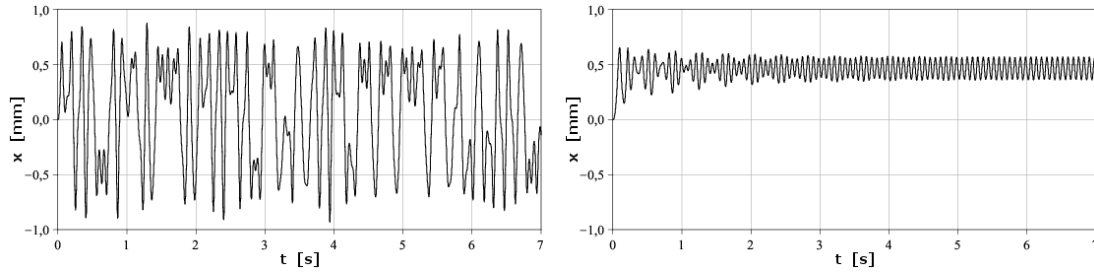


Rysunek 3.15. Siły: magnetyczna  $F_m$  i sprężystości  $F_e$  działające na oscylator.

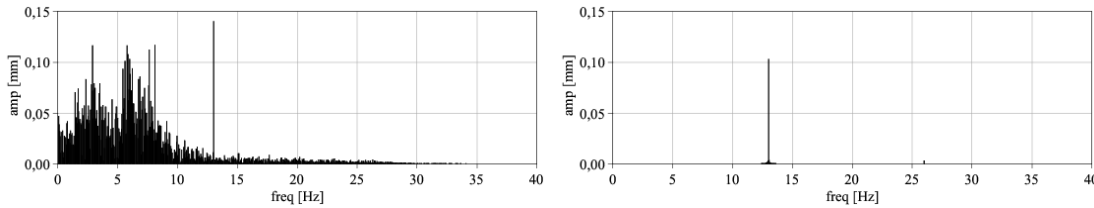
### 3.3.2. Trajektorie

Trajektorie dla  $t = 0, 1/(32f), \dots, 100$  s (próbkiowanie z częstotliwością  $32f$  i czas symulacji 100 s) oraz  $t = 0, 1/(4f), \dots, 2000$  s zostały wygenerowane przy pomocy metody Rungego–Kutty–Fehlberga zastosowanej do równań stanu (3.29). Wychylenie oscylatora przy częstotliwości wymuszenia  $f = 13$  Hz i próbkiowaniu  $32f$  przedstawione jest na rysunku 3.16. Widać, że amplituda wymuszenia  $F_0 = 1,1$  N prowadzi do chaotycznych drgań oscylatora. Kiedy ustalimy  $F_0 = 0,3$  N, oscylator drga okresowo wokół jednego z punktów równowagi  $x^* \approx 0,48$  mm – położenia, przy którym siła magnetyczna równa jest sprężystej, jak na rysunku 3.15.

Widmo częstotliwościowe wychylenia otrzymane dla tych samych parametrów i próbkiowania pokazane jest na rys. 3.17. Analizowane były trajektorie dla chwil czasu pomiędzy 30...50 s, aby pominąć nieustalony stan na początku symulacji. Ciągłe widmo po lewej



Rysunek 3.16. Wychylenie oscylatora, amplituda  $F_0 = 1,1$  N (z lewej) i  $F_0 = 0,3$  N (z prawej), częstotliwość  $f = 13$  Hz, próbkowanie  $32f$ .



Rysunek 3.17. Widmo wychylenia, amplituda  $F_0 = 1,1$  N (z lewej) i  $F_0 = 0,3$  N (z prawej), częstotliwość  $f = 13$  Hz, próbkowanie  $32f$ .

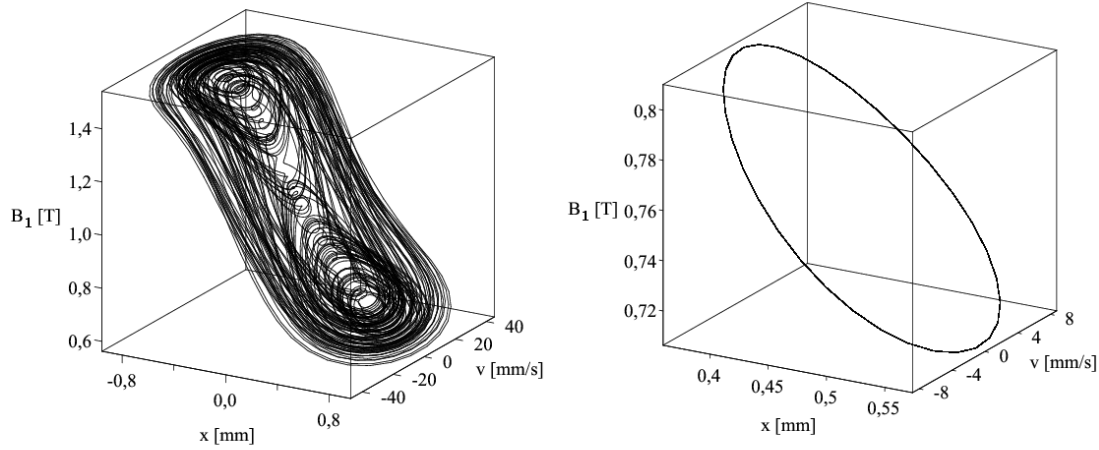
(z pikiem dla częstotliwości wymuszenia) jest charakterystyczne dla układów chaotycznych.

Podobne wnioski można wyciągnąć obserwując zachowanie układu w trójwymiarowej przestrzeni  $(x, v, B_1)$ , rys. 3.18. Tutaj były analizowane trajektorie dla chwil czasu pomiędzy 25...40 s, aby pominąć okres przejściowy na początku symulacji i wyraźnie pokazać chaotyczny atraktor. Z lewej strony widzimy, że atraktor wypłaszcza się u góry, co wynika z efektu nasycenia magnetycznego. Ponadto trajektoria zbiega do zbioru granicznego, który prawdopodobnie ma ułamkowy wymiar Hausdorffa (jakkolwiek obliczenia wymiaru nie zostały wykonane).

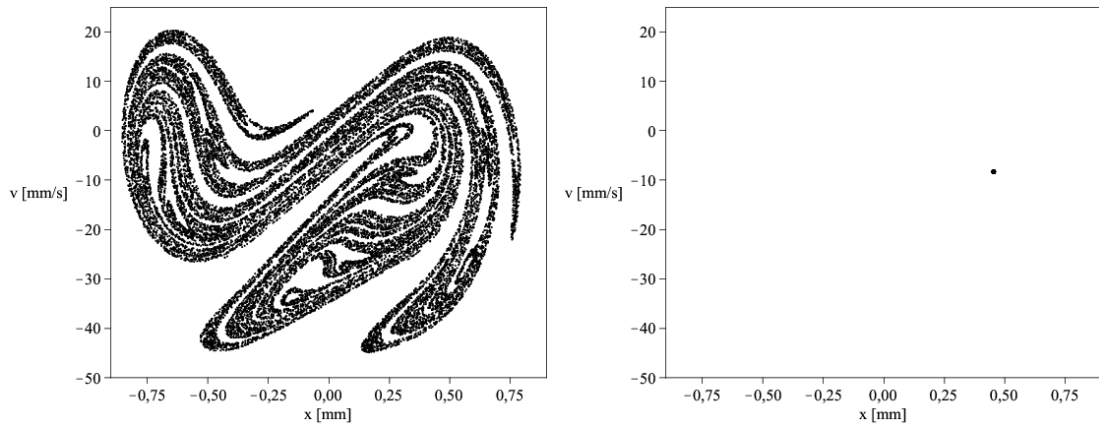
Jakościową analizę nieliniowego zachowania oscylatora zamknijemy przekrojem Poincaré na płaszczyźnie  $x-v$  dla chwil czasu  $t = 0, 1/f, \dots, 2000$  s, rys. 3.19.

### 3.3.3. Wykładniki Lapunowa

Najsilniejszym dowodem na to, że układ dynamiczny prezentuje chaotyczne zachowanie jest dodatnia wartość największego wykładnika Lapunowa. Istnieje kilka metod obliczania największego wykładnika Lapunowa (lub nawet całego widma). Według [2], najbardziej popularny jest algorytm zaproponowany przez Wolfa i in. [91]. Został on użyty w badaniach wielu układów drgających. Wśród nich jest analiza matematycznego wahadła i oscylatora Duffinga poddanego harmonicznemu wymuszeniu z losową (biały szum)



Rysunek 3.18. Atraktor 3-D w przestrzeni  $(x, v, B_1)$ , amplituda  $F_0 = 1,1$  N (z lewej) i  $F_0 = 0,3$  N (z prawej), częstotliwość  $f = 13$  Hz, próbkowanie  $32f$ .



Rysunek 3.19. Przekrój Poincaré na płaszczyźnie  $x-v$  dla  $t = 0, 1/f, \dots, 2000$  s, amplituda  $F_0 = 1,1$  N (z lewej) i  $F_0 = 0,3$  N (z prawej), częstotliwość  $f = 13$  Hz, próbkowanie  $4f$ .

częstotliwością [27], oscylator Duffinga z bezwładnościowym wymuszeniem pochodzącym od niewyważonego wirnika dołączonego do układu [13] i drgania wirnika podpartego aktywnymi łożyskami magnetycznymi [33].

Algorytm Wolfa jest obliczeniowo czasochłonny [2] i „nie bardzo odporny” [23]. Zatem opracowane zostały nowe metody obliczania wykładników, czy ogólniej, rozstrzygania o chaotycznym zachowaniu układów. Elegancka metoda obliczania całego widma Lapunowa, którą użyjemy w tej pracy, została zaproponowana przez Rangarajana i in. [80]. Autorzy wyprowadzają układ równań różniczkowych na wykładniki Lapunowa, który może być bezpośrednio rozwiązany numerycznie. Metoda została przetestowana na przykładzie klasycznego oscylatora Van der Pola z wymuszeniem harmonicznym oraz układu Loren-



za, w obu przypadkach dając dobrą zgodność z numerycznymi rezultatami otrzymanymi wcześniej przy pomocy innych metod. Przedstawimy poniżej opis tego algorytmu.

Prawo ruchu dane jest równaniami (3.29), a w postaci wektorowej

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t), \quad (3.34)$$

gdzie  $\mathbf{u} = (x, v, B_1, B_2)$ . Przypuśćmy, że pewna trajektoria odniesienia  $\mathbf{u}_0(t)$  dana jest dla wszystkich  $t$ . Wykładniki Lapunowa są ściśle powiązane z ewolucją odchyłek od trajektorii odniesienia  $\mathbf{U}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0(t)$ . Ewolucję tę otrzymujemy linearyzując (3.34) wokół  $\mathbf{u}_0$

$$\dot{\mathbf{U}} = D_{\mathbf{u}}\mathbf{F}(\mathbf{u}_0, t) \cdot \mathbf{U}, \quad (3.35)$$

gdzie  $D_{\mathbf{u}}\mathbf{F}(\mathbf{u}_0, t)$  oznacza pochodną  $\mathbf{F}$  względem zmiennych  $\mathbf{u}$  obliczoną w punkcie  $\mathbf{u}_0(t)$  i  $t$ . Rozwiązując powyższe równanie wzdłuż trajektorii odniesienia, możemy określić liniowe przekształcenie  $\mathbf{M}(t)$ , które zastosowane do początkowej odchyłki  $\mathbf{U}_{pocz}$  daje wartość odchyłki w chwili  $t$

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{U}_{pocz}. \quad (3.36)$$

Różniczkując to równanie otrzymujemy wyrażenie na macierz  $\mathbf{M}$

$$\dot{\mathbf{M}} = D_{\mathbf{u}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}. \quad (3.37)$$

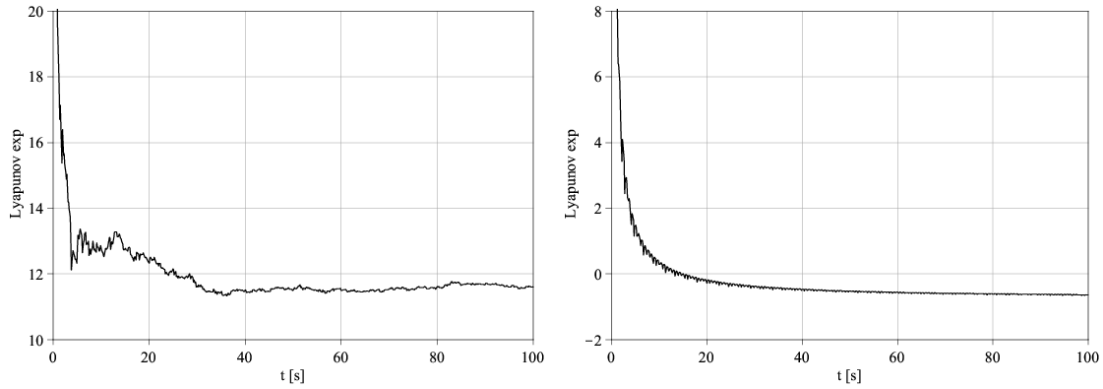
Wykładniki Lapunowa układu (3.34) równe są logarytmom wartości własnych macierzy  $\mathbf{\Lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{1/(2t)}$

Zamiast rozwiązywać równania (3.37), autorzy omawianego algorytmu stosują twierdzenia algebry liniowej do faktoryzacji macierzy  $\mathbf{M}$ , otrzymując w ten sposób równania na wykładniki Lapunowa i dodatkowe zmienne, które lepiej poddają się numerycznemu rozwiązaniu niż równania (3.37). W naszym przypadku podejście to prowadzi do układu czterech równań różniczkowych dynamiki oscylatora z aktuatorami (3.29), czterech równań na wykładniki Lapunowa oraz sześciu równań na dodatkowe zmienne. Układ ten dany jest w postaci jawnej, nie zostanie jednak przytoczony, gdyż równania na dodatkowe zmienne są bardzo długie.

Równania zostały rozwiązane dla  $t = 0, 1/(32f), \dots, 100$  s przy pomocy metody Rungego–Kutty–Fehlberga. Wykładniki Lapunowa zbiegają do swoich prawdziwych wartości, gdy czas dąży do nieskończoności – zob. rysunek 3.20, przedstawiający zbieżność największego wykładnika.

Estymatory wykładników zostały policzone przez uśrednienie ich wartości dla chwil czasu pomiędzy 80...100 s. Rezultaty przedstawione są w tab. 3.1

Do tej pory przyjmowaliśmy amplitudę wymuszenia  $F_0 = 1,1$  N dla przypadku chaotycznych drgań układu i  $F_0 = 0,3$  N dla drgań okresowych. Zależność charakteru drgań od amplitudy przedstawiona jest na rysunku 3.21.



Rysunek 3.20. Zbieżność największego wykładnika Lapunowa, amplituda  $F_0 = 1,1$  N (z lewej) i  $F_0 = 0,3$  N (z prawej), częstotliwość  $f = 13$  Hz, próbkowanie  $32f$ .

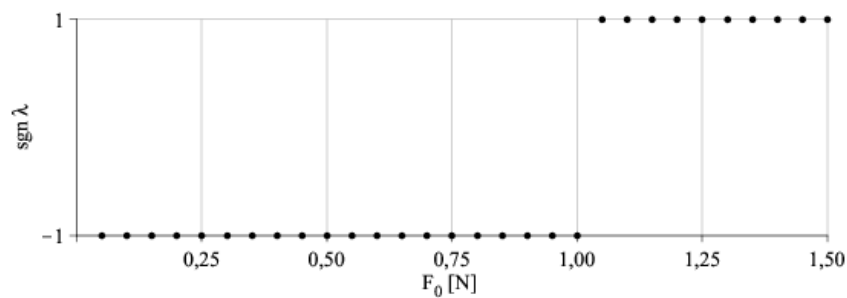
Tabela 3.1. Wykładniki Lapunowa, częstotliwość  $f = 13$  Hz, próbkowanie  $32f$ .

wykl. Lapunowa	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$F_0 = 1,1$ N	11,7	-14,0	-3443	-10202
$F_0 = 0,3$ N	-0,6	-0,8	-3512	-8406

### 3.3.4. Rezultaty

Wykazaliśmy, że elektromagnetycznie tłumiony mechaniczny oscylator w pewnych warunkach prezentuje chaotyczne zachowanie. Algorytm zaproponowany w pracy [80] okazał się efektywny w obliczaniu widma Lapunowa.

Chaotyczne drgania pojawiają się w sytuacji, kiedy środkowe położenie równowagi jest niestateczne. W praktycznych zastosowaniach niestateczność ta jest niepożądana. Mimo to konieczne było zbadanie dynamiki układu z siłownikami magnetycznymi w sposób wyczerpujący, niezależnie od tego czy chaotyczna odpowiedź pojawi się w realnych warunkach, czy nie.



Rysunek 3.21. Znak największego wykładnika Lapunowa, częstotliwość  $f = 13$  Hz, próbkowanie  $32f$ .

## 4. Stateczność i okołokrytyczne zachowanie kolumny Leipholza

Tematem rozdziału jest zagadnienie Leipholza [55] – problem dynamiki jednorodnej belki wspornikowej obciążonej równomiernie rozłożoną siłą śledzącą. Przy dostatecznie dużej wartości obciążenia środkowe położenie równowagi kolumny traci stateczność. Wówczas małe zaburzenie równowagi prowadzi do samowzbudzenia w postaci okresowych drgań poprzecznych, tj. flatteru.

Badamy klasyczny przypadek ściskania śledzącego, jak również układ z obciążeniem rozciągającym. Uwzględniamy wewnętrzne i zewnętrzne tłumienie w układzie. Nieliniowe cząstkowe równanie dynamiki w postaci bezwymiarowej poddajemy dyskretyzacji Galerki z użyciem pierwszych dwóch funkcji własnych belki wspornikowej. Wyprowadzamy wzory na krytyczne obciążenie tłumionej kolumny, które pozwalają otrzymać nowe oraz potwierdzić znane wyniki dotyczące wpływu tłumienia na stateczność układu. Wyprowadzamy także wzory na pierwsze i drugie przybliżenie rozwiązania bifurkacyjnego w otoczeniu krytycznego obciążenia<sup>1</sup>. Poprawność wykonanej analizy bifurkacyjnej sprawdzamy rozwiązując numerycznie równanie dla wybranych parametrów. Ponadto wyniki dla pierwszego przybliżenia rozwiązania porównujemy ze znanymi w literaturze. Omówienie istniejących badań w tym temacie znajduje się w punkcie 2.1 pracy.

### 4.1. Nieliniowe równanie ruchu

Interesuje nas dynamika poprzecznego ruchu kolumny. Tak jak w większości prac przyjmujemy, że ruch ten odbywa się w płaszczyźnie. Wychylenia kolumny są umiarkowane, zatem mogą być opisane jako funkcja położenia i czasu. Ponieważ badamy okołokrytyczne zachowanie układu, uwzględniamy nieliniowości geometryczne związane z krzywizną ugięcia. Wymiary kolumny nie zmieniają się pod wpływem obciążenia. Wewnętrzne i zewnętrzne tłumienie kolumny opisuje liniowy model Kelvina–Voigta. Pominięty jest wpływ grawitacji.

Bezwymiarowe równanie dynamiki jest postaci [50], [49]

$$\ddot{\eta} = -\gamma\dot{\eta} + \left(1 + \beta\frac{\partial}{\partial\tau}\right) \left[\eta'''' (\eta'^2 - 1) + 3\eta''^3 + 8\eta'\eta''\eta'''\right] + \mu\eta'' \int_{\xi}^1 (0,5\eta'^2 - 1), \quad (4.1)$$

<sup>1</sup> Mówimy o przybliżeniu rzędu 2 i 4 rozwinięcia rozwiązania w szereg potęgowy.

gdzie  $\eta = \eta(\xi, \tau)$  – wychylenie kolumny w stosunku do jej długości,  $\xi, \tau$  – bezwymiarowe zmienne oznaczające położenie i czas,  $\beta, \gamma$  – współczynniki tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego,  $\mu$  – bezwymiarowe obciążenie. Znak „+” przy obciążeniu  $\mu$  odpowiada ścisnaniu, przy rozciąganiu zmieniamy znak na „-”, tak by wartość obciążenia  $\mu$  była zawsze dodatnia.

Warunki brzegowe są w postaci zlinearyzowanej

$$\eta(0, \tau) = \eta'(0, \tau) = \eta''(1, \tau) = \eta'''(1, \tau) = 0. \quad (4.2)$$

## 4.2. Dyskretyzacja Galerkina

Rozwiązanie równania cząstkowego (4.1) rzutujemy metodą Galerkina na dwuwymiarową przestrzeń rozpiętą przez unormowane funkcje własne belki wspornikowej (dodatek A.1)

$$\eta(\xi, \tau) = W_1(\xi)T_1(\tau) + W_2(\xi)T_2(\tau), \quad (4.3)$$

otrzymując dwa równania zwyczajne drugiego rzędu na funkcje  $T_j$ ,  $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \ddot{T}_j = -\gamma \dot{T}_j + \left(1 + \beta \frac{\partial}{\partial \tau}\right) & \left(a_{1j}T_1 + a_{2j}T_2 + a_{3j}T_1^3 + a_{4j}T_1^2T_2 + a_{5j}T_1T_2^2 + a_{6j}T_2^3\right) + \\ & + \mu \left(b_{1j}T_1 + b_{2j}T_2 + b_{3j}T_1^3 + b_{4j}T_1^2T_2 + b_{5j}T_1T_2^2 + b_{6j}T_2^3\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Współczynniki  $a_{ij}, b_{ij}$  zależą tylko od funkcji bazowych. Powyższe równania przekształcamy w układ czterech równań pierwszego rzędu przez wprowadzenie nowych funkcji  $u_1 = T_1$ ,  $u_2 = \dot{T}_1$ ,  $u_3 = T_2$ ,  $u_4 = \dot{T}_2$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\gamma u_2 + a_{11}u_1 + a_{21}u_3 + a_{31}u_1^3 + a_{41}u_1^2u_3 + a_{51}u_1u_3^2 + a_{61}u_3^3 + \\ & + \mu \left(b_{11}u_1 + b_{21}u_3 + b_{31}u_1^3 + b_{41}u_1^2u_3 + b_{51}u_1u_3^2 + b_{61}u_3^3\right) + \\ & + \beta \left(a_{11}u_2 + a_{21}u_4 + 3a_{31}u_1^2u_2 + 2a_{41}u_1u_2u_3 + \right. \\ & \left. + a_{41}u_1^2u_4 + a_{51}u_2u_3^2 + 2a_{51}u_1u_3u_4 + 3a_{61}u_3^2u_4\right) \\ \dot{u}_3 &= u_4 \\ \dot{u}_4 &= -\gamma u_4 + a_{12}u_1 + a_{22}u_3 + a_{32}u_1^3 + a_{42}u_1^2u_3 + a_{52}u_1u_3^2 + a_{62}u_3^3 + \\ & + \mu \left(b_{12}u_1 + b_{22}u_3 + b_{32}u_1^3 + b_{42}u_1^2u_3 + b_{52}u_1u_3^2 + b_{62}u_3^3\right) + \\ & + \beta \left(a_{12}u_2 + a_{22}u_4 + 3a_{32}u_1^2u_2 + 2a_{42}u_1u_2u_3 + \right. \\ & \left. + a_{42}u_1^2u_4 + a_{52}u_2u_3^2 + 2a_{52}u_1u_3u_4 + 3a_{62}u_3^2u_4\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Przyjmijmy  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$  oraz  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T$ , gdzie  $f_i = f_i(\mu, \mathbf{u})$ ,  $i = 1, \dots, 4$  oznaczają prawe strony powyższych równań. Traktując obciążenie  $\mu$  jako parametr bifurkacyjny, można zapisać układ w postaci wektorowej

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mu, \mathbf{u}). \quad (4.6)$$

Punkt zerowy jest położeniem równowagi przy dowolnej rzeczywistej wartości obciążenia, tzn.  $\mathbf{f}(\mu, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

### 4.3. Krytyczne obciążenie i częstość flutteru

Środkowe położenie równowagi układu (4.6) traci stateczność przy pewnej wartości obciążenia  $\mu = \mu_{cr}$ . Krytyczne obciążenie wyznaczymy stosując kryterium Hurwitza do wielomianu charakterystycznego układu zlinearyzowanego

$$P(r) = r^4 + c_1 r^3 + c_2 r^2 + c_3 r + c_4. \quad (4.7)$$

Współczynniki tego wielomianu traktujemy jako funkcje obciążenia oraz współczynników tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego,  $c_i = c_i(\mu, \beta, \gamma)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $i = 1 \dots 4$ . Zakładamy, że układ jest tłumiony, tzn.  $\beta > 0$  lub  $\gamma > 0$ . Wszystkie pierwiastki powyższego wielomianu mają ujemne części rzeczywiste (co jest równoważne asymptotycznej stateczności w sensie Lapunowa układu (4.6)) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy Hurwitza są dodatnie

$$\begin{aligned} D_1 &= c_1 > 0, & D_2 &= c_1 c_2 - c_3 > 0, \\ D_3 &= c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_3^2 > 0, & D_4 &= c_4 D_3 > 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Przy założeniu, że układ jest tłumiony otrzymujemy  $c_1 > 0$  oraz  $c_4 > 0$ . Zatem układ jest asymptotycznie stateczny wtedy i tylko wtedy, gdy  $D_2 > 0$  i  $D_3 > 0$ . Pierwszy z tych warunków można zapisać w postaci

$$A\mu + B > 0, \quad (4.9)$$

gdzie  $A = A(\beta, \gamma) < 0$ ,  $B = B(\beta, \gamma) > 0$  są wielomianami stopnia odpowiednio 1 i 3, o współczynnikach zależących wyłącznie od funkcji bazowych (dodatek A.2). Stąd otrzymujemy górne ograniczenie na obciążenie

$$\mu < \mu_0, \quad \mu_0 = -\frac{B}{A} > 0. \quad (4.10)$$

Warunek  $D_3 > 0$  przyjmuje postać nierówności kwadratowej

$$a\mu^2 + b\mu + c > 0, \quad (4.11)$$

przy czym  $a = a(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}$ ,  $b = b(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}$ ,  $c = c(\beta, \gamma) > 0$  są wielomianami stopnia 2, 4 i 4 (dodatek A.2). Wyróżnik  $\Delta = b^2 - 4ac$  jest zawsze dodatni, więc jeśli  $a \neq 0$ , to powyższy trójmian ma dwa pierwiastki

$$\mu_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \mu_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (4.12)$$

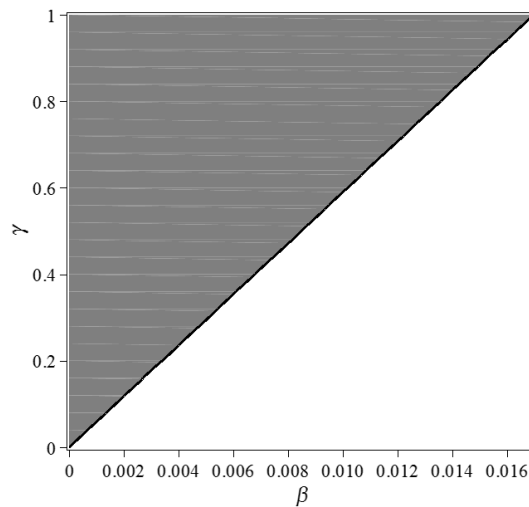
Możliwe są trzy przypadki:

1.  $a > 0 \iff \gamma > 58,9125 \cdot \beta$

Wówczas  $b < 0$ . Ponieważ  $c > 0$ , więc  $\sqrt{\Delta} < |b|$ , zatem minor  $D_3$  ma dwa dodatnie pierwiastki  $\mu_{1,2}$ . Ponadto pierwiastek  $\mu_0$  minora  $D_2$  leży pomiędzy nimi,  $0 < \mu_1 < \mu_0 < \mu_2$ . Stąd wynika, że układ jest asymptotycznie stateczny dla  $\mu < \mu_1$  (w szczególności obciążenie rozciągające nigdy go nie destabilizuje), a krytyczne obciążenie ściskające wynosi

$$\mu_{compr} = \mu_1. \quad (4.13)$$

Graficznie ten przypadek zaznaczony jest na rysunku 4.1. Obszar nieistnienia kry-



Rysunek 4.1. Obszar nieistnienia krytycznego obciążenia rozciągającego.

tycznego obciążenia rozciągającego obejmuje stosunkowo małe wartości  $\beta$ , a z prawej strony brzegu obszaru wartość tego obciążenia dąży do nieskończoności. Z tych powodów wyznaczenie granicy obszaru przez numeryczne obliczanie krytycznego obciążenia jest kłopotliwe – prawdopodobnie dlatego w pracy [50] stwierdzono nieskończone obciążenie rozciągające tylko dla  $\beta = 0$ .

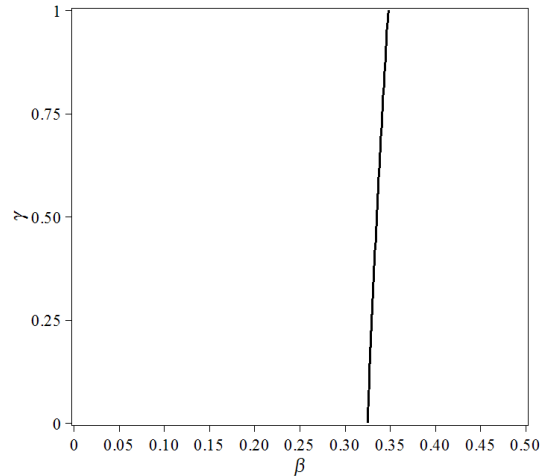
2.  $a < 0 \iff \gamma < 58,9125 \cdot \beta$

W tym przypadku  $\sqrt{\Delta} > |b|$ , a więc niezależnie od znaku  $b$  trójmian (4.11) ma ujemny i dodatni pierwiastek. Ponadto  $\mu_0$  jest większy od obydwu,  $\mu_2 < 0 < \mu_1 < \mu_0$ .

Zatem układ jest asymptotycznie stateczny dla  $\mu_2 < \mu < \mu_1$ , a krytyczne obciążenia – ściskające oraz rozciągające – wynoszą

$$\mu_{compr} = \mu_1, \quad \mu_{tens} = \mu_2. \quad (4.14)$$

Zerowanie się współczynnika  $b$  oznacza sytuację, kiedy krytyczne obciążenie ściskające równe jest co do wartości obciążeniu rozciągającemu, co ilustruje rysunek 4.2.



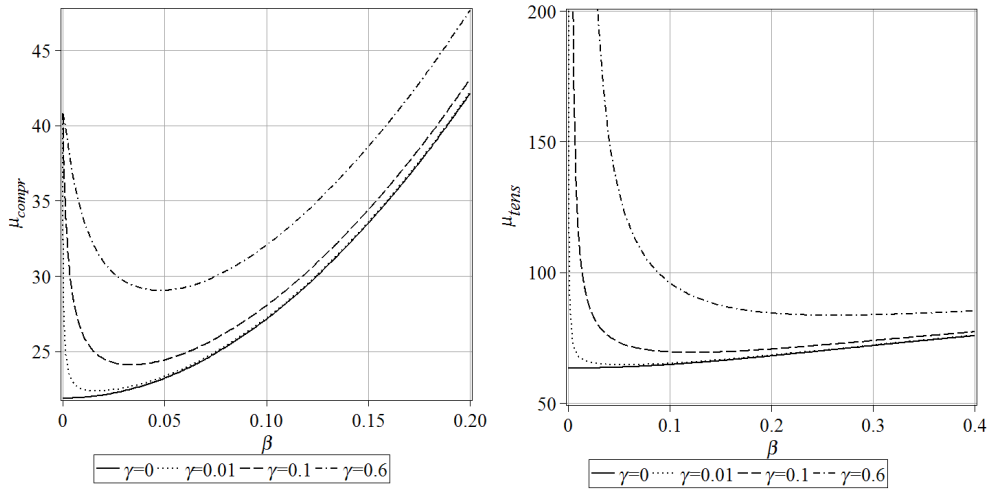
Rysunek 4.2. Współczynniki tłumienia, dla których krytyczne obciążenie ściskające równe jest obciążeniu rozciągającemu.

3.  $a = 0 \iff \gamma = 58,9125 \cdot \beta$

Oczywiście punkty  $(\beta, \gamma)$ , dla których trzeci minor degeneruje się, są punktami ciągłości krytycznego obciążenia ściskającego jako funkcji współczynników tłumienia. Ponadto można pokazać, że krytyczne obciążenie rozciągające nie istnieje.

Otrzymane z powyższych wzorów wartości krytycznego obciążenia jako funkcji tarcia wewnętrznego, dla wybranych współczynników tłumienia zewnętrznego, przedstawia rysunek 4.3 oraz tabela 4.1. Tłumienie wewnętrzne przy niewielkich wartościach obniża wartość krytycznego obciążenia, dla większych – ma charakter stabilizujący. Tłumienie zewnętrzne zawsze stabilizuje układ. Wyniki te są potwierdzeniem rezultatów przedstawionych w [50].

Trajektoria decydującej o stateczności układu (4.6) wartości własnej przecina oś urojoną poza oś rzeczywistą. Zatem układ traci stateczność przez flutter, tzn. zachodzi bifurkacja Hopfa stałego położenia równowagi w okresowy ruch oscylacyjny. Częstość samowzbudzenia równa jest części urojonej decydującej wartości własnej. Tłumienie zewnętrzne zwiększa częstość drgań – zarówno w przypadku ściskania, jak i rozciągania. Dzieje się tak, ponieważ tłumienie to zwiększa krytyczne obciążenie kolumny. Z kolei wzrost tarcia wewnętrznego zmniejsza częstość samowzbudzenia, za wyjątkiem przypadku ściskania kolumny o dużej wartości tego tarcia (rys. 4.4).



Rysunek 4.3. Krytyczne obciążenie ściskające (z lewej) i rozciągające (z prawej) w funkcji tarcia wewnętrznego.

$\beta$	$\mu_{compr}$	$\mu_{tens}$
0	40,7746	—
0,00001	40,4833	—
0,0001	35,7474	—
0,001	25,9780	116,488
0,01	22,4685	68,0005
0,04	22,8831	64,7096
0,1	27,2260	65,1614
0,2	42,2174	68,2671
0,5	134,828	79,0655

Tabela 4.1. Krytyczne wartości obciążenia ściskającego i rozciągającego,  $\gamma = 0,01$ .

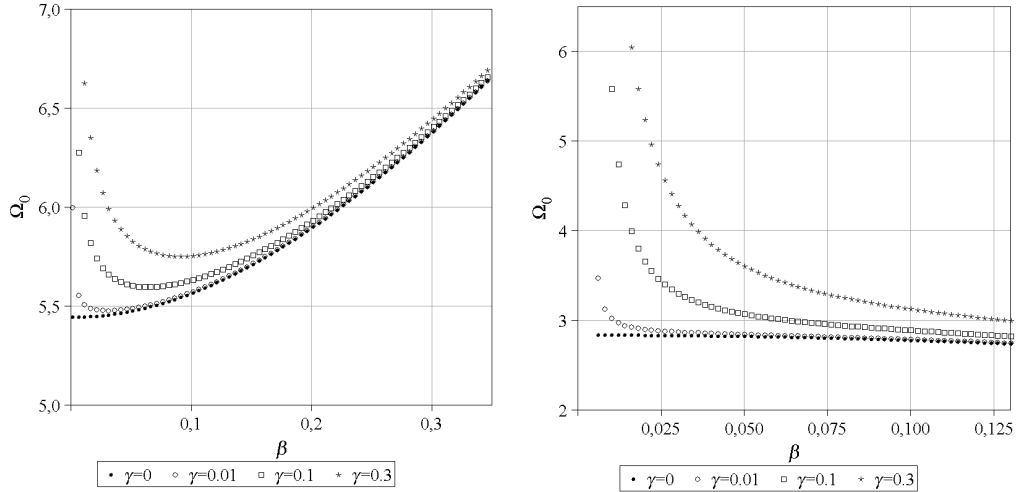
#### 4.4. Analiza bifurkacyjna

Interesuje nas przede wszystkim typ samowzbudzenia oraz stateczność orbitalna drgań flutterowych dla obciążeń bliskich krytycznemu. Samowzbudzenie jest miękkie (bifurkacja nadkrytyczna), jeśli amplituda pojawiających się drgań wzrasta w sposób ciągły wraz z obciążeniem oraz twarde (bifurkacja podkrytyczna), gdy dla krytycznej wartości obciążenia pojawia się nieciągłość. W praktycznie stosowanych układach mechanicznych skokowy wzrost amplitudy jest dużo bardziej niebezpieczny.

Przyjmijmy, że prawo ruchu układu dynamicznego jest postaci

$$\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_N]^T = \mathbf{f}(\mu, \mathbf{u}), \quad \mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ analityczna.} \quad (4.15)$$





Rysunek 4.4. Częstość flutteru w punkcie krytycznym dla obciążenia ściskającego (z lewej) i rozciągającego (z prawej) w funkcji tarcia wewnętrznego.

W naszym przypadku  $N = 4$ , a  $\mathbf{f}$  jest prawą stroną równania (4.6), jednak wyprowadzone zostaną w pełni ogólne wzory. Potrzebne będą pojęcia operatorów wieloliniowych

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}\dots\mathbf{u}} = [f_{\mathbf{u}\dots\mathbf{u},1}, \dots, f_{\mathbf{u}\dots\mathbf{u},N}]^T$$

$$f_{\underbrace{\dots}_{n} \mathbf{u},i}(\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n) = \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_n=1}^N \frac{\partial^n f_i}{\partial u_{k_1} \dots \partial u_{k_n}} \Big|_{\mu=\mu_{cr}, \mathbf{u}=\mathbf{0}} \mathbf{a}_{1,k_1} \dots \mathbf{a}_{n,k_n} \quad (4.16)$$

oraz

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}\dots\mathbf{u}\mu\dots\mu} = [f_{\mathbf{u}\dots\mathbf{u}\mu\dots\mu,1}, \dots, f_{\mathbf{u}\dots\mathbf{u}\mu\dots\mu,N}]^T$$

$$f_{\underbrace{\dots}_{n} \mathbf{u} \underbrace{\dots}_{r} \mu, i}(\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n) = \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_n=1}^N \frac{\partial^{n+r} f_i}{\partial u_{k_1} \dots \partial u_{k_n} \partial \mu^r} \Big|_{\mu=\mu_{cr}, \mathbf{u}=\mathbf{0}} \mathbf{a}_{1,k_1} \dots \mathbf{a}_{n,k_n}, \quad (4.17)$$

gdzie

$$\mathbf{a}_j \in \mathbb{C}^N, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.18)$$

Jeśli  $\mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ , to operator (4.16) wyraża wartość pochodnej rzędu  $n$  funkcji  $\mathbf{f}(\mu_{cr}, \cdot)$  w punkcie  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  policzoną na wektorze  $\mathbf{a}$ . Jeśli parametr potraktujemy jako kolejną zmienną, to analogicznym uogólnieniem pojęcia pochodnej funkcji wektorowej będzie drugi z operatorów.

Metoda Ioossa i Josepha [34] omówiona w pracy [49] polega na konstrukcji rozwiązania bifurkacyjnego w postaci szeregu potęgowego przy wykorzystaniu alternatywy Fredholma. Otrzymane rozwiązanie opisane jest następującymi wyrażeniami

$$\mathbf{u}(t, \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{u}^{(n)}(\Omega(\epsilon)t) \epsilon^n, \quad (4.19)$$

$$\Omega(\epsilon) = \Omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Omega_n \epsilon^n, \quad \mu(\epsilon) = \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_n \epsilon^n, \quad (4.20)$$

gdzie  $\Omega$  – częstość rozwiązania okresowego,  $\mathbf{u}^{(n)}(\cdot)$  –  $2\pi$ -okresowe funkcje różniczkowalne o wartościach w  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Omega_n, \mu_n$  – współczynniki bifurkacyjne,  $\epsilon$  – dodatni parametr proporcjonalny do normy (amplitudy) pierwszego przybliżenia rozwiązania bifurkacyjnego.

Początkowe wyrazy powyższych szeregów pozwalają opisać zachowanie rozwiązania w otoczeniu punktu krytycznego  $\mu_{cr} = \mu_0$ . Poniżej przedstawiamy wzory na pierwsze i drugie przybliżenie rozwiązania bifurkacyjnego otrzymane przy użyciu w/w metody. Wyprowadzenia wzorów są długie, toteż zostaną pominięte.

Oznaczmy przez  $\mathbf{A}(\mu)$  macierz układu (4.6) zlinearyzowanego w położeniu zerowym. Zatem  $\mathbf{A}(\mu_{cr})\mathbf{a} = \mathbf{f}_u(\mathbf{a})$  dla dowolnego  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ . Ponadto niech  $r_1(\mu) = a(\mu) + b(\mu)i$ , gdzie  $a(\mu_{cr}) = 0$ ,  $b(\mu_{cr}) = \Omega_0 > 0$  będzie decydującą o stateczności wartością własną. Wektor własny  $\mathbf{q}$  odpowiadający  $r_1$  oraz wektor sprzężony  $\mathbf{q}^*$  są rozwiązaniami równań

$$[\mathbf{A}(\mu_{cr}) - r_1(\mu_{cr})\mathbf{I}]\mathbf{q} = 0 \quad (4.21)$$

$$[\mathbf{A}^T(\mu_{cr}) - \bar{r}_1(\mu_{cr})\mathbf{I}]\mathbf{q}^* = 0. \quad (4.22)$$

Niech wektor sprzężony będzie unormowany tak, że  $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q}^* \rangle = 1$ , gdzie  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum a_i \bar{b}_i$  jest iloczynem skalarnym w  $\mathbb{C}^N$ . Ponadto oznaczmy przez  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{L}$  wektory będące rozwiązaniami liniowych równań

$$\mathbf{A}(\mu_{cr})\mathbf{K} = -2\mathbf{f}_{uu}(\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}) \quad (4.23)$$

$$[\mathbf{A}(\mu_{cr}) - 2i\Omega_0\mathbf{I}]\mathbf{L} = -\mathbf{f}_{uu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}), \quad (4.24)$$

Wówczas **pierwsze przybliżenie rozwiązania bifurkacyjnego** opisane jest wzorami

$$\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}^{(1)} = 2\epsilon \Re \{ \mathbf{q} e^{i\Omega t} \} \quad (4.25)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2}\Omega_2\epsilon^2, \quad \mu = \mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2\epsilon^2 \quad (4.26)$$

$$\mu_2 = -\frac{\Re \{ D_2 \}}{3a'(\mu_{cr})}, \quad \Omega_2 = \mu_2 b'(\mu_{cr}) + \frac{1}{3}\Im \{ D_2 \} \quad (4.27)$$

$$D_2 = 3 \langle \mathbf{f}_{uu}(\mathbf{q}|\mathbf{K}) + \mathbf{f}_{uu}(\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{L}) + \mathbf{f}_{uuu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}), \mathbf{q}^* \rangle. \quad (4.28)$$

Amplituda funkcji  $u_i$  wynosi  $2\epsilon|q_i|$  i można pokazać, że nie zależy ona od wyboru wektora własnego  $\mathbf{q}$ . Z kolei faza początkowa wynosi  $\arg q_i$ , a więc zależy od wektora własnego – co jest zgodne z tezą tw. Hopfa, która mówi, że rodzina rozwiązań okresowych określona jest z dokładnością do fazy.

Otrzymane wzory różnią się od przedstawionych w [49] i [50]. Dokładne rachunki oraz porównanie numerycznego rozwiązania pierwszego przybliżenia z teoretycznymi przewidywaniami wskazują, że powyższe wzory są poprawne. Pierwsza różnica jest w wyrażeniu

oznaczonym  $D_2$ . Jednak w przypadku bezwymiarowego zagadnienia Leipholza bez aktuatorów  $\mathbf{K} = \mathbf{L} = \mathbf{0}$  i błędny składnik znika (ale będzie już występować w układzie z dołączonymi aktuatorami), zatem błąd ten nie wpływa na wyniki z pracy [50]. Drugi błąd występuje we wzorze na  $\Omega_2$ , zatem również nie wpływa na najważniejsze wnioski z wymienionej pracy, które dotyczą typu samowzbudzenia.

Oznaczmy teraz przez  $\mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{X}$  wektory będące rozwiązaniami równań

$$[\mathbf{A}(\mu_{cr}) - 3i\Omega_0\mathbf{I}]\mathbf{M} = -3\mathbf{f}_{uu}(\mathbf{q}|\mathbf{L}) - \mathbf{f}_{uuu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\mathbf{q}) \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mu_{cr})\mathbf{V} = & -3\mathbf{f}_{uu}(\mathbf{K}|\mathbf{K}) - 6\mathbf{f}_{uu}(\mathbf{L}|\bar{\mathbf{L}}) - 6\mathbf{f}_{uuu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\bar{\mathbf{L}}) + \\ & -6\mathbf{f}_{uuu}(\bar{\mathbf{q}}|\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{L}) - 12\mathbf{f}_{uuu}(\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{K}) - 6\mathbf{f}_{uuuu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}|\bar{\mathbf{q}}) + \\ & -6\mu_2\mathbf{f}_{u\mu}(\mathbf{K}) - 12\mu_2\mathbf{f}_{uu\mu}(\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(\mu_{cr}) - 2i\Omega_0\mathbf{I}]\mathbf{X} = & -4\mathbf{f}_{uu}(\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{M}) - 6\mathbf{f}_{uu}(\mathbf{K}|\mathbf{L}) + \\ & -6\mathbf{f}_{uuu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\mathbf{K}) - 12\mathbf{f}_{uuu}(\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{L}) - 4\mathbf{f}_{uuuu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}|\bar{\mathbf{q}}) + \\ & -6\mu_2\mathbf{f}_{u\mu}(\mathbf{L}) - 6\mu_2\mathbf{f}_{uu\mu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}) + 12\Omega_2i\mathbf{L}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

gdzie  $\mu_2, \Omega_2$  określone są wzorami (4.27). **Drugie przybliżenie rozwiązania bifurkacyjnego** dane jest wyrażeniami

$$\mathbf{u} = \epsilon\mathbf{u}^{(1)} + \frac{1}{2}\epsilon^2\mathbf{u}^{(2)} = 2\epsilon\Re\{\mathbf{q}e^{i\Omega t}\} + \frac{1}{2}\epsilon^2\mathbf{K} + \epsilon^2\Re\{\mathbf{L}e^{2i\Omega t}\} \quad (4.32)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2}\Omega_2\epsilon^2 + \frac{1}{24}\Omega_4\epsilon^4, \quad \mu = \mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2\epsilon^2 + \frac{1}{24}\mu_4\epsilon^4 \quad (4.33)$$

$$\mu_4 = -\frac{\Re\{D_4\}}{5a'(\mu_{cr})}, \quad \Omega_4 = \mu_4b'(\mu_{cr}) + \frac{1}{5}\Im\{D_4\} \quad (4.34)$$

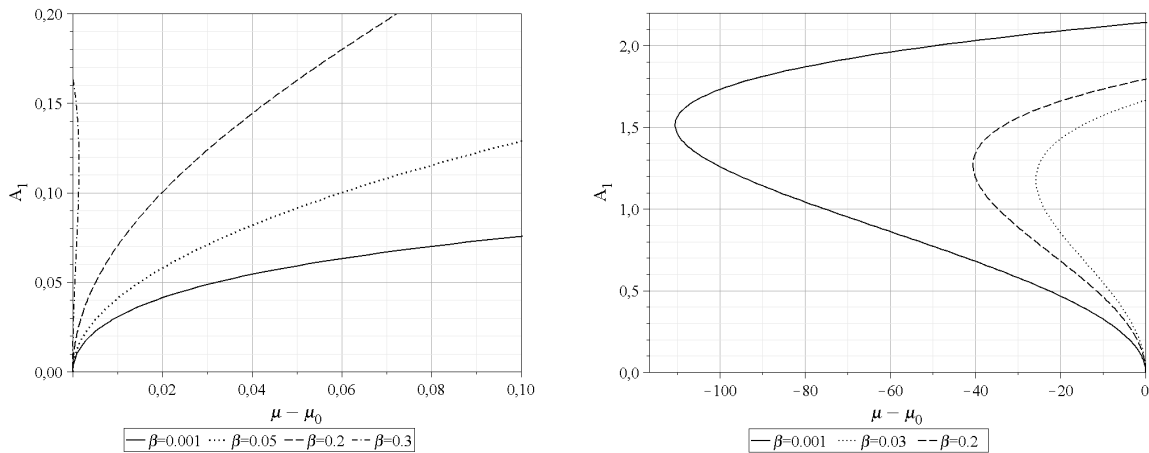
$$\begin{aligned} D_4 = & \langle 5\mathbf{f}_{uu}(\mathbf{q}|\mathbf{V}) + 5\mathbf{f}_{uu}(\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{X}) + 10\mathbf{f}_{uu}(\bar{\mathbf{L}}|\mathbf{M}) + \\ & + 10\mathbf{f}_{uuu}(\bar{\mathbf{q}}|\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{M}) + 15\mathbf{f}_{uuu}(\mathbf{q}|\mathbf{K}|\mathbf{K}) + 30\mathbf{f}_{uuu}(\mathbf{q}|\mathbf{L}|\bar{\mathbf{L}}) + 30\mathbf{f}_{uuu}(\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{K}|\mathbf{L}) + \\ & + 30\mathbf{f}_{uuuu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{K}) + 30\mathbf{f}_{uuuu}(\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}|\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{L}) + 10\mathbf{f}_{uuuu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\mathbf{q}|\bar{\mathbf{L}}) + \\ & + 10\mathbf{f}_{uuuuu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}|\bar{\mathbf{q}}) + \\ & + 30\mu_2\mathbf{f}_{uu\mu}(\mathbf{q}|\mathbf{K}) + 30\mu_2\mathbf{f}_{uu\mu}(\bar{\mathbf{q}}|\mathbf{L}) + 30\mu_2\mathbf{f}_{uuu\mu}(\mathbf{q}|\mathbf{q}|\bar{\mathbf{q}}) + 15\mu_2^2\mathbf{f}_{u\mu\mu}(\mathbf{q}), \mathbf{q}^* \rangle. \end{aligned} \quad (4.35)$$

W przypadku kolumny Leipholza bez aktuatorów funkcje  $f_i(u_1, u_2, u_3, u_4)$  zawierają wyłącznie składniki rzędu 1 i 3, a więc  $\mathbf{f}_{uu} = \mathbf{f}_{uuuu} = \mathbf{f}_{uuuuu} = 0$ . Ponadto  $\mathbf{f}_{u\mu\mu} = \mathbf{f}_{uu\mu} = 0$ . Zatem powyższe wyrażenia znacząco się upraszczają – w szczególności  $\mathbf{K} = \mathbf{L} = 0$  i drugie przybliżenie rozwiązania  $\mathbf{u}$  jest równe pierwszemu.

Amplituda przybliżenia rozwiązania bifurkacyjnego dla pierwszej postaci własnej na końcu kolumny wyrażona jest wzorem

$$A_1 = 2\epsilon|q_1| \cdot W_1(1). \quad (4.36)$$

Diagramy bifurkacyjne na rysunku 4.5 przedstawiają wzajemną zależność między amplitudą oraz okołokrytycznym obciążeniem, ustaloną wzorem (4.33) na  $\mu(\epsilon)$  dla różnych wartości współczynników tłumienia wewnętrznego, przy tłumieniu zewnętrznym  $\gamma = 0,01$ . Gałąź odgięta w lewo oznacza dodatni wykładnik Floqueta i niestateczność orbitalną okre-

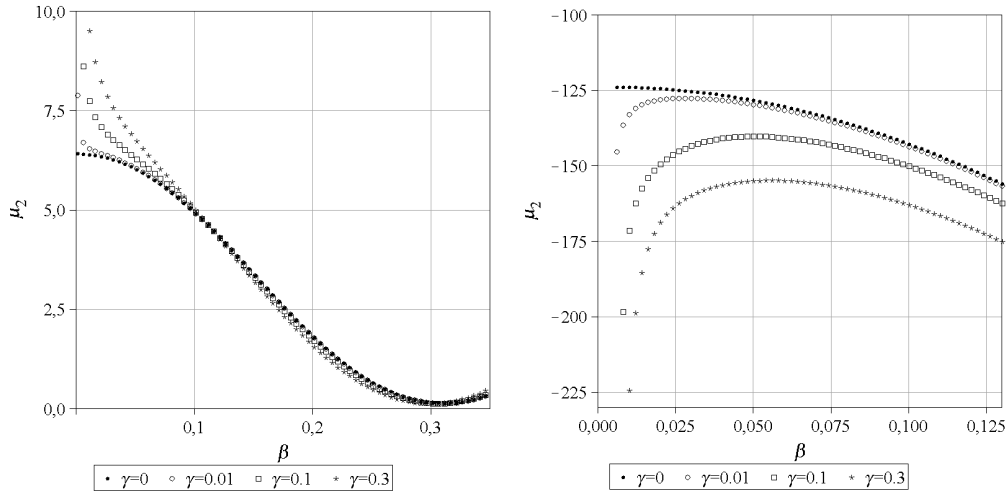


Rysunek 4.5. Amplituda rozwiązania bifurkacyjnego w zależności od obciążenia ściskającego (z lewej) i rozciągającego (z prawej),  $\gamma = 0,01$ .

sowego rozwiązania, gałąź odgięta w prawo – asymptotycznie stateczny cykl graniczny.

W przypadku obciążenia ściskającego zawsze ma miejsce bifurkacja nadkrytyczna. Wraz ze wzrostem tłumienia wewnętrznego gałąź bifurkacyjna staje się coraz bardziej stroma, co oznacza szybkie narastanie amplitudy drgań dla obciążenia rosnącego powyżej wartości krytycznej. Ekstremalne położenie osiągnęte jest prawdopodobnie dla tej samej wartości  $\beta$ , przy której krytyczne ściskanie jest równe rozciąganiu. Dalszy wzrost tłumienia wewnętrznego prowadzi do stopniowego opadania gałęzi. Zachowanie to opisuje wykres współczynnika  $\mu_2$  w zależności od tłumienia wewnętrznego (rys. 4.6, po lewej). Zauważmy, że w okolicach ekstremalnego położenia gałąź zagina się w lewo, co oznacza istnienie niestatecznego cyklu o bardzo dużej amplitudzie dla obciążeń bliskich krytycznemu.

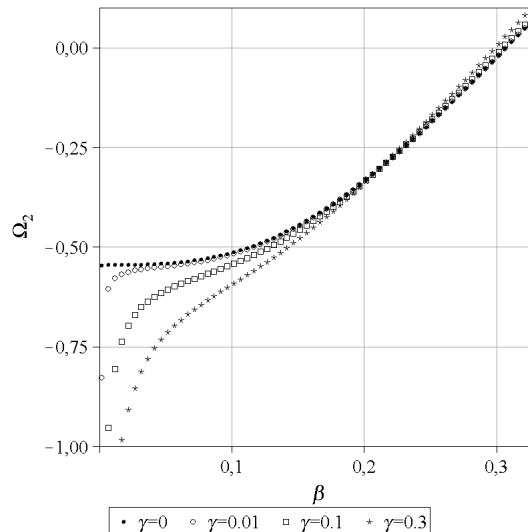
Dla kolumny poddanej śledzącemu rozciąganiu mamy do czynienia z bifurkacją podkrytyczną niezależnie od współczynnika tarcia wewnętrznego. Oznacza to, że nawet dla obciążeń mniejszych od krytycznego, niewielkie zaburzenie środkowego położenia równowagi kolumny może spowodować gwałtowny wzrost amplitudy drgań. Dla obciążeń nadkrytycznych taka sytuacja będzie miała miejsce przy dowolnie małym zaburzeniu. Jak wynika w przebiegu gałęzi rozwiązania, amplituda statecznego cyklu jest daleko poza zakresem stosowności modelu, który wydaje się być ograniczony do amplitud maks. rzędu  $\sim 0,2$ . W praktyce drgania ustaliłyby się na mniejszym poziomie lub doprowadziły do zniszczenia konstrukcji. Wzrost tłumienia wewnętrznego – przy niewielkich jego wartościach – łagodzi zjawisko twardego samowzbudzenia, tzn. katastrofalny wzrost wychylenia



Rysunek 4.6. Współczynnik  $\mu_2$  dla obciążenia ściskającego (z lewej) i rozciągającego (z prawej) w funkcji tarcia wewnętrznego.

następuje przy większym początkowym zaburzeniu i dla większego obciążenia. Duże wartości tarcia wewnętrznego przynoszą odwrotny skutek; podobnie negatywny – niezależnie od wewnętrznej dysypacji – jest też wpływ tarcia zewnętrznego (rys. 4.6, po prawej).

Jeśli chodzi o częstość statecznych drgań flutterowych, to jest sens o niej mówić tylko dla ściskania śledzącego. Z wyjątkiem przypadku bardzo silnego tłumienia wewnętrznego, wzrost obciążenia w zakresie nadkrytycznym powoduje spadek częstości drgań (rys. 4.7).



Rysunek 4.7. Współczynnik  $\Omega_2$  dla obciążenia ściskającego w funkcji tarcia wewnętrznego.

Powyższe rezultaty są inne od zaprezentowanych przez Kurnika i Pękalaka [50], gdzie ściskana kolumna mogła wykazywać zarówno miękkie, jak i twarde samowzbudzenie, a w przypadku rozciągania śledzącego zawsze zachodziła bifurkacja nad-, a nie podkrytycz-

na. Tsiatas i Katsikadelis [88] zbadali okołokrytyczne zachowanie tylko jednej kolumny o stałym przekroju, ze stałym ciągłym rozkładem ściskającego obciążenia śledzącego. Rozwiązując numerycznie zdyskretyzowane równanie ruchu pokazali, że zachodzi bifurkacja nadkrytyczna. Jednak dla przyjętych parametrów autorzy pierwszej pracy przewidywali ten sam typ samowzbudzenia, zatem wątpliwości pozostały (tym bardziej, że układ w [88] opisano nieco innym równaniem – uwzględniającym osiowe odkształcenie).

W związku z powyższym sprawdzona została poprawność wykonanej i opisanej w tym rozdziale analizy bifurkacyjnej. Nieliniowy układ równań otrzymany przy użyciu metody Galerkina rozwiązany został numerycznie dla nadkrytycznego ściskania i podkrytycznego rozciągania. W pierwszym przypadku rozwiązanie zbiegało do wyznaczonego cyklu granicznego, dla początkowego zaburzenia zarówno mniejszego, jak i większego od prognozowanej amplitudy, a wyznaczona numerycznie częstość drgań zgadzała się z teoretyczną. W sytuacji rozciągania śledzącego początkowe zaburzenie o amplitudzie niższej od dolnej gałęzi bifurkacyjnej powodowało gaśnięcie drgań, a wyższe – ich nieograniczone wzrost (amplituda statecznego cyklu jest nieosiągalna w przyjętym modelu). Ponadto drugie przybliżenie dało lepszą zgodność wyników niż pierwsze.

Przeprowadzony test jest zatem w 100% zgodny z teorią i potwierdza poprawność wyprowadzonych wzorów oraz wykonanej analizy bifurkacyjnej. Przyczyną niezgodności wyników najprawdopodobniej jest błąd w dyskretyzacji Galerkina w pracy [50] (błędy znalezione we wzorach na pierwsze przybliżenie rozwiązania bifurkacyjnego nie wpływają na główne wyniki dotyczące typu samowzbudzenia).

## 4.5. Konkluzje

1. Wyprowadzone zostały analityczne wzory na krytyczne obciążenie kolumny. Pozwoliły one wykazać, że przy danym tłumieniu wewnętrznym krytyczne obciążenie rozciągające nie istnieje, jeśli tłumienie zewnętrzne jest dostatecznie duże. Ponadto umożliwiły określenie parametrów tłumienia, przy których krytyczne obciążenie rozciągające równe jest ściskającemu.
2. Potwierdziliśmy fakt, że wzrost tłumienia wewnętrznego przy niewielkich jego wartościach obniża krytyczne obciążenie, a przy dużych – stabilizuje układ. Potwierdziliśmy stabilizujący wpływ tłumienia zewnętrznego.
3. Wzrost tłumienia wewnętrznego zmniejsza częstość drgań samowzbudnych, z wyjątkiem przypadku ściskania kolumny o dużej wartości tego tłumienia. Tarcie zewnętrzne zwiększa częstość drgań samowzbudnych.
4. Kolumna poddana ściskającemu obciążeniu śledzącemu ulega miękkiemu samowzbudzeniu. Wzrost obciążenia w zakresie nadkrytycznym powoduje zwiększenie amplitudy

drgań samowzbudnych i spadek ich częstości (słabe i umiarkowane tarcie wewnętrzne) lub wzrost częstości (silne tarcie wewnętrzne). Amplituda drgań samowzbudnych rośnie wraz ze wzrostem tłumienia wewnętrznego, gdy jest ono słabe lub umiarkowane lub spada, gdy tłumienie wewnętrzne jest silne. Tarcie zewnętrzne w niewielkim stopniu zwiększa amplitudę drgań dla umiarkowanej wewnętrznej dysypacji i zmniejsza, gdy jest ona słaba lub silna.

5. Rozciąganie śledzące prowadzi do bifurkacji podkrytycznej. Orbitalnie stateczne drgania okołokrytyczne znajdują się poza zakresem stosowalności modelu. Wzrost tłumienia wewnętrznego – przy niewielkich jego wartościach – łagodzi zjawisko twardego samowzbudzenia, tzn. katastrofalny wzrost wychylenia następuje przy większym początkowym zaburzeniu i dla większego podkrytycznego obciążenia. Umiarkowane i duże wartości tarcia wewnętrznego przynoszą odwrotny skutek; podobnie negatywny – niezależnie od wewnętrznej dysypacji – jest też wpływ tarcia zewnętrznego.



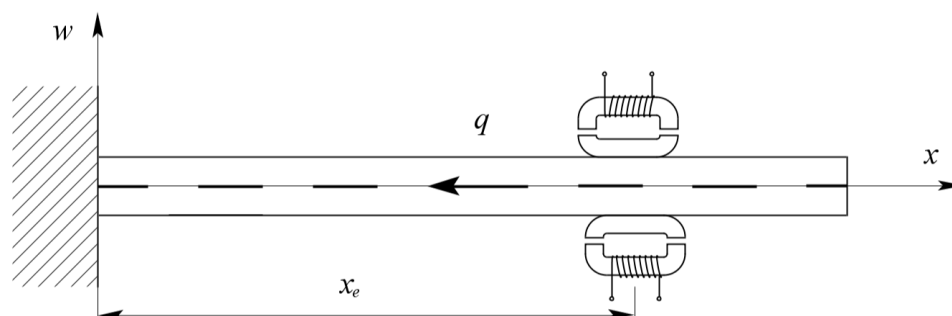


## 5. Pasywne tłumienie magnetyczne kolumny Leipholza

Badamy dynamikę kolumny Leipholza z dołączonymi siłownikami magnetycznymi, zasilanymi stałym napięciem elektrycznym. Sprawdzamy wpływ siłowników na krytyczne obciążenie i częstość samowzbudzenia. Analizujemy rozwiązanie bifurkacyjne układu, w szczególności badamy możliwość wykorzystania sił magnetycznych do zmiany twardego samowzbudzenia w miękkie oraz ograniczenia amplitudy drgań okołokrytycznych.

### 5.1. Równania dynamiki układu

Badanym układem jest kolumna Leipholza, czyli belka wspornikowa obciążona siłą śledzącą o wartości  $q$  [N/m], z dołączonymi siłownikami magnetycznymi, rys. 5.1. Przyjmujemy te same założenia co w rozdziale 4. Dodatkowo zakładamy, że częstotliwość



Rysunek 5.1. Kolumna Leipholza z dołączonymi siłownikami magnetycznymi.

drgań jest na tyle niska, że indukcja magnetyczna oraz prędkość jej zmiany są w przybliżeniu stałe na przekroju poprzecznym rdzeni każdego z dwóch obwodów magnetycznych, co pozwala zastosować model Bertotti'ego histerezy magnetycznej (zob. podpunkt 3.2.2).

Kolumną jest zamocowana wspornikowo rura stalowa o długości  $L = 2000$  mm, średnicy zewnętrznej  $D = 11,11$  mm i wewnętrznej  $d = 10$  mm. Przy tych parametrach wyliczamy masę na jednostkę długości  $m$  i sztywność giętną  $EI$ . Wychylenia kolumny opisuje funkcja  $w = w(x, t)$ .

Każdy z dwóch obwodów magnetycznych składa się z rdzenia elektromagnesu, na który nawiniętych jest  $N = 1000$  zwojów drutu miedzianego o oporze  $R = 2,38 \Omega$  oraz części

rdzenia na stałe zamocowanej do kolumny. Masa tej części stanowi ok. 4% masy całego układu, zatem można pominąć jej wpływ na dynamikę. Długość obwodu magnetycznego wynosi  $l = 300$  mm, promień kołowego przekroju  $a = 2$  mm, a jego pole  $A = \pi a^2$ . Szczelina w obwodach magnetycznych (tj. między rdzeniami zamocowanymi na kolumnie i elektromagnesami) w środkowym położeniu kolumny wynosi  $z = 4$  mm. Inne zbadane wartości – 0,13 mm i 1 mm – prowadzą do jakościowo takich samych rezultatów.

Zewnętrznym ośrodkiem jest powietrze (współczynnik tłumienia  $\gamma^* = 0,00097$  kg/m/s oraz masa powietrza przyspieszanego ruchem kolumny, na jednostkę długości,  $M_a = 0,00018$  kg/m) lub woda (0,17086, 0,11158). Parametry ośrodków oraz stała tłumienia wewnętrznego kolumny  $\beta^* = 0,00019$  s zostały wyznaczone przy pomocy własnych procedur, które opisane są w rozdziale 7.

Przewodność elektryczna właściwa stali wynosi  $\sigma = 2 \cdot 10^6$  ( $\Omega\text{m}$ )<sup>-1</sup>, a jako model charakterystyki magnesowania przyjmujemy funkcję  $B = \phi(H) = \arctan(H/400)$  T, uwzględniającą efekt nasycenia magnetycznego oraz gładką. Przenikalność magnetyczna próżni wynosi  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/(Am).

Zmienianymi parametrami są: odległość zamocowania aktuatorów od podstawy  $x_e$ , która wynosi 33%, 50%, 67% i 100% długości kolumny oraz załączone do nich napięcie  $U$ .

Przy tych oznaczeniach dynamika kolumny oraz zmiany indukcji w obwodach opisane są następującymi równaniami (zob. [50] i równanie (3.29)):

$$\begin{aligned} (m + M_a) \ddot{w} = & -\gamma^* \dot{w} + \left(1 + \beta^* \frac{\partial}{\partial t}\right) EI \left[ w'''' (w'^2 - 1) + 3w''^3 + 8w'w''w'''' \right] + \\ & + qw'' \int_x^L (0,5w'^2 - 1) + \frac{A}{\mu_0} (B_2^2 - B_1^2) \delta_e, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\left( \frac{AN^2}{R} + \frac{1}{8} \sigma l a^2 \right) \frac{dB_{1,2}}{dt} + \frac{2(z \pm w(x_e, t))}{\mu_0} B_{1,2} + l \phi^{-1}(B_{1,2}) = \frac{NU}{R}.$$

Znak „+” przy obciążeniu  $q$  odpowiada ścisaniu, przy rozciąganiu zmieniamy znak na „-”, tak by wartość obciążenia  $q$  była zawsze dodatnia.

Analogicznie jak w rozdziale 4, rozwiązanie równania cząstkowego (5.1) rzutujemy metodą Galerkina na dwuwymiarową przestrzeń, której bazą są dwie pierwsze funkcje własne belki wspornikowej (oczywiście funkcje te są przeskalowane na całą długość kolumny i unormowane)

$$w(x, t) = \widetilde{W}_1(x)T_1(t) + \widetilde{W}_2(x)T_2(t). \quad (5.2)$$

Otrzymujemy dwa równania zwyczajne drugiego rzędu na funkcje  $T_{1,2}$ , które sprowadzamy do układu czterech równań rzędu pierwszego przez wprowadzenie funkcji  $u_1 = T_1$ ,  $u_2 = \dot{T}_1$ ,  $u_3 = T_2$ ,  $u_4 = \dot{T}_2$ . Oznaczając dodatkowo  $u_5 = B_1 - B_0$  oraz  $u_6 = B_2 - B_0$ , gdzie  $B_0$  jest

indukcją w obwodach magnetycznych dla środkowego położeniu kolumny, otrzymujemy ostatecznie układ sześciu równań zwyczajnych, zapisany w postaci wektorowej

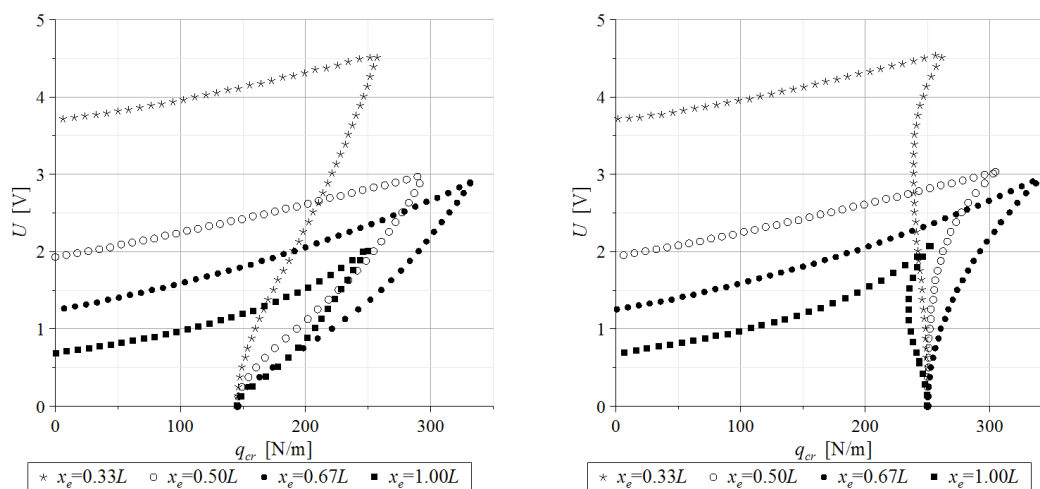
$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(q, \mathbf{u}). \quad (5.3)$$

Punkt zerowy jest położeniem równowagi przy dowolnym obciążeniu  $q$ , tzn.  $\mathbf{f}(q, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  oraz  $q = q_{cr}$  jest krytyczną wartością tego parametru, przy której położenie to traci stateczność. Analizę bifurkacyjną wykonujemy przy pomocy tych samych wzorów co w rozdziale 4, zastępując bezwymiarowe obciążenie  $\mu$  przez parametr  $q$  wyrażony w [N/m] i pamiętając, że wymiar zagadnienia wynosi teraz  $N = 6$ .

## 5.2. Stateczność i okołokrytyczne drgania ściskanej kolumny Leipholza z aktuatorami

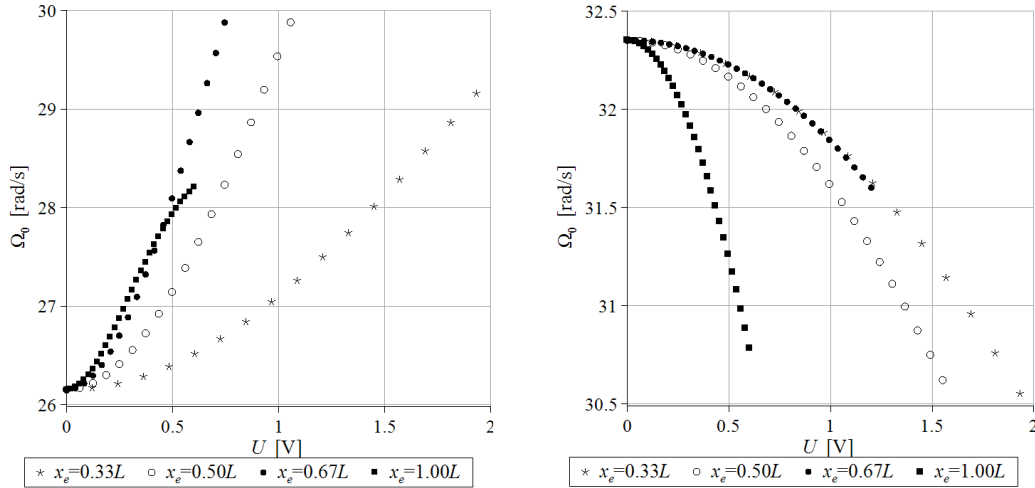
Przy zerowym napięciu na aktuatorach umieszczony w powietrzu układ traci stateczność dla obciążenia  $q_{cr} = 146,0$  (250,6 w wodzie) N/m, przy częstotliwości drgań  $\Omega_0 = 26,15$  (32,35) rad/s. Częstotliwość drgań jest wyższa w wodzie, ponieważ dla ich samowzbudzenia wymagane jest znacznie większe obciążenie. Współczynnik bifurkacyjny  $q_2 = 0,250$  (1,023) N/m jest dodatni, co oznacza bifurkację nadkrytyczną. Wartości współczynnika  $\Omega_2 = -0,016$  ( $-0,068$ ) rad/s oznaczają, że wraz ze wzrostem obciążenia powyżej krytycznego częstotliwość drgań flatterowych maleje.

Zastosowanie aktuatorów magnetycznych pozwala zwiększyć  $q_{cr}$ . Szczególnie wyraźna poprawa stateczności zachodzi w powietrzu oraz po zamocowaniu aktuatorów w okolicach 67% długości kolumny. Dla układu umieszczonego w wodzie, zamocowanie ich blisko podstawy lub na końcu kolumny działa destabilizująco (rys. 5.2).



Rysunek 5.2. Krytyczne obciążenie ściskające: powietrze (z lewej), woda (z prawej).

Jeśli chodzi o częstość drgań samowzbudnych, to w powietrzu rośnie ona wraz ze wzrostem napięcia, natomiast w wodzie – maleje (rys. 5.3). Dzieje się tak niezależnie od punktu zamocowania aktuatorów. Zachowanie to można wyjaśnić interpretując tłumienie magnetyczne jako wiskotyczne tłumienie ośrodka o gęstości i lepkości pośredniej między powietrzem a wodą.



Rysunek 5.3. Częstość flutteru dla obciążenia równego krytycznemu, powietrze (z lewej), woda (z prawej), ściskanie śledzące.

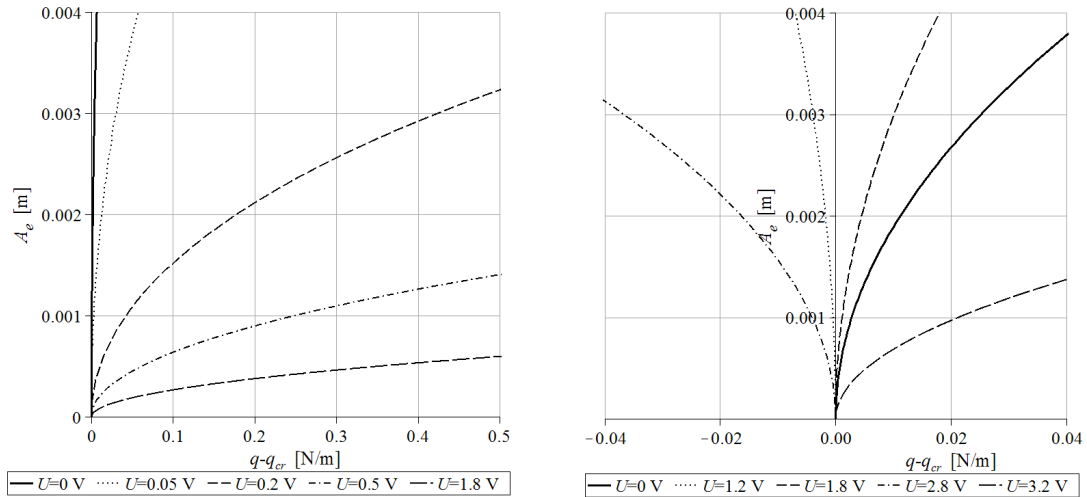
Analogicznie jak w przypadku kolumny bez aktuatorów (4.36), amplituda pierwszego przybliżenia rozwiązania bifurkacyjnego dla pierwszej funkcji bazowej – tym razem w punkcie zamocowania aktuatorów – wynosi

$$A_e = 2\epsilon|q_1| \cdot \widetilde{W}_1(x_e). \quad (5.4)$$

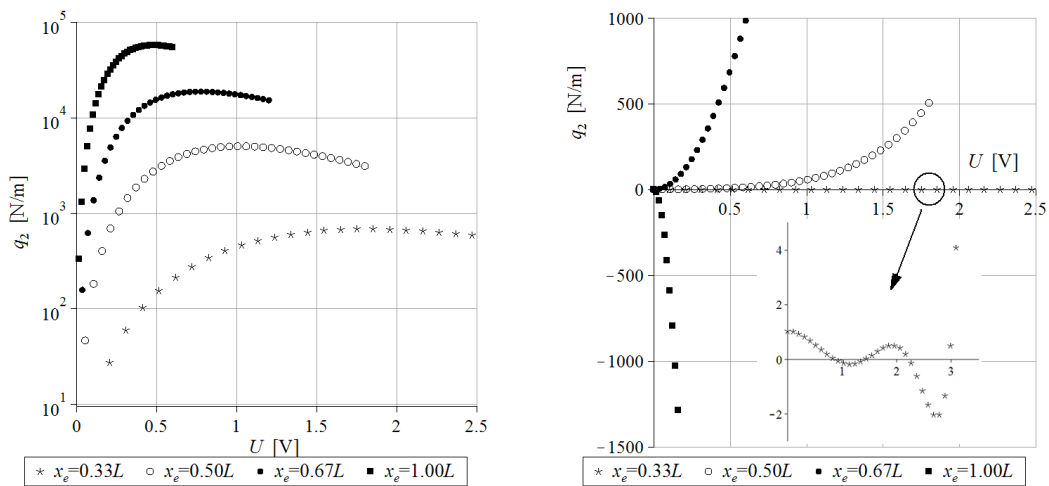
Ponieważ pierwsze cztery współrzędne wektorów  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{L}$  są zerowe dla rozważanego układu, więc powyższy wzór określa także amplitudę drgań drugiego przybliżenia rozwiązania. Uwzględniając drugie przybliżenie okołokrytycznej parametryzacji obciążenia (4.33), możemy zredukować parametr  $\epsilon$  i wyprowadzić zależność między amplitudą oraz obciążeniem, którą przedstawiają diagramy bifurkacyjne na rysunku 5.4.

Decydujące dla tych diagramów wartości współczynnika bifurkacyjnego  $q_2$  pokazane są na kolejnym rysunku. Dla układu umieszczonego w powietrzu, dodatnie i bardzo duże (skala logarytmiczna) wartości  $q_2$  oznaczają, że siłowniki magnetyczne znacznie zmniejszają amplitudę drgań pokrywicznych. Skuteczność ich jest tym większa, im dalej od podstawy kolumny są zamocowane.

Zanurzenie kolumny w wodzie czyni sytuację bardziej złożoną. Jeśli zamocujemy aktuator w 33% długości kolumny, to współczynnik  $q_2$  kilkakrotnie zmienia znak w funkcji



Rysunek 5.4. Amplituda drgań okołokrytycznych dla wybranych poziomów napięcia,  $x_e = 0,33L$ , powietrze (z lewej), woda (z prawej), ściskanie śledzące.

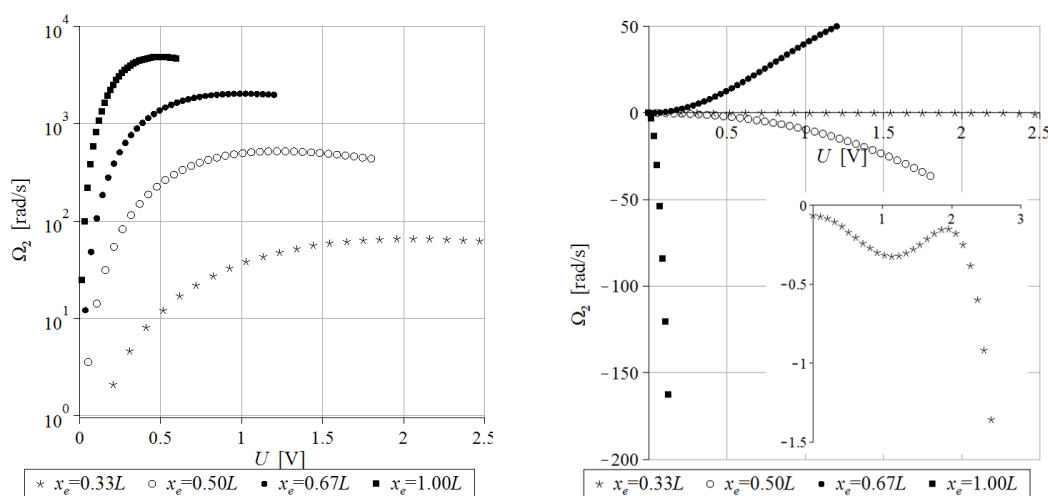


Rysunek 5.5. Współczynnik bifurkacyjny  $q_2$ , powietrze (z lewej), woda (z prawej), ściskanie śledzące.

napięcia i jest mniejszy od wartości dla  $U = 0$ . Zatem nie jest możliwe ograniczenie amplitudy cyklu, co gorsza w pewnym zakresie napięć zachodzi bifurkacja podkrytyczna. Odsunięcie aktuatorów poprawia sytuację, bowiem dla  $x_e = 0,50L$  i  $x_e = 0,67L$  tłumienie magnetyczne pozwala wyraźnie (jednak nie tak bardzo jak w powietrzu) zmniejszyć amplitudę drgań pokrytycznych. Jednak zamocowanie ich na końcu kolumny przynosi jednoznacznie negatywny efekt – twarde samowzbudzenie, które wraz ze wzrostem napięcia pojawia się przy coraz mniejszym obciążeniu i ma coraz większą amplitudę.

Dla układu umieszczonego w powietrzu zastosowanie siłowników magnetycznych sprawia, że częstość nadkrytycznego flutteru rośnie wraz z obciążeniem. W wodzie sytuacja

jest odwrotna, z wyjątkiem przypadku, kiedy akтуatory zamocowane są w 2/3 długości kolumny (rys. 5.6).



Rysunek 5.6. Współczynnik bifurkacyjny  $\Omega_2$ , powietrze (z lewej), woda (z prawej), ściskanie śledzące.

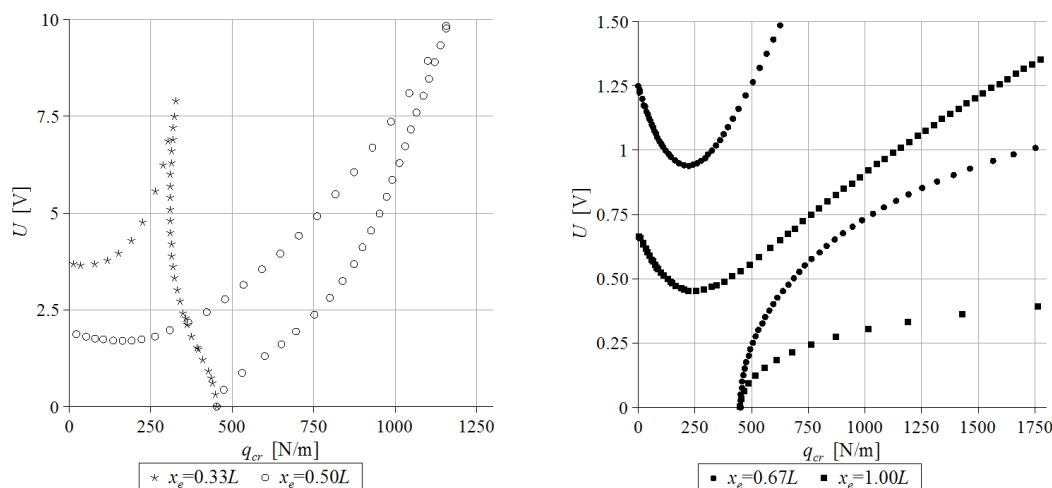
### 5.3. Przypadek rozciągania śledzącego

Jeśli tłumienie zewnętrzne jest dostatecznie silne (w tym wypadku oznacza to wodę jako ośrodek otaczający układ), wówczas nie istnieje krytyczne obciążenie rozciągające kolumny; zostało to wykazane w rozdziale 4.

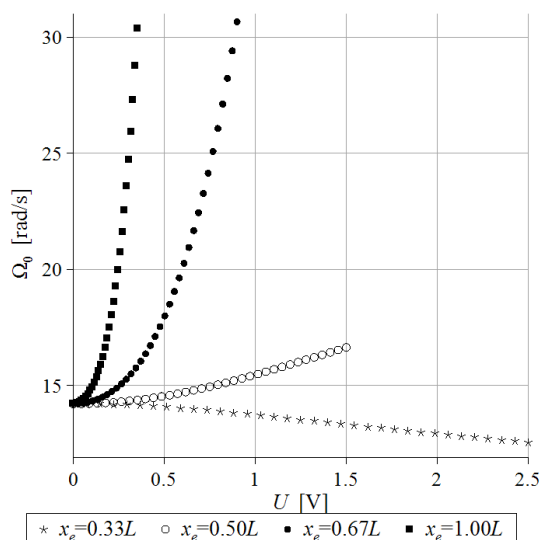
Układ umieszczony w powietrzu traci stateczność dla obciążenia  $q_{cr} = 454,5$  N/m, przy częstotliwości drgań  $\Omega_0 = 14,21$  rad/s. Współczynnik bifurkacyjny  $q_2 = -5,286$  N/m jest ujemny, co oznacza bifurkację podkrytyczną (odwrotnie niż przy ścisaniu śledzącym). Wartość współczynnika  $\Omega_2 = -0,441$  rad/s jest także ujemna, zatem można by spodziewać się, że – tak samo jak w sytuacji ścisania śledzącego – częstota flatteru będzie malała wraz z obciążeniem. Pamiętajmy jednak, że amplituda statecznych drgań znajduje się poza zakresem stosowalności modelu, tutaj dodatkowo ograniczonym szerokością szczeliny z między kolumną a elektromagnesami.

Obszar stateczności na płaszczyźnie  $(q, U)$  przedstawiony jest na rysunku 5.7. Zamocowanie akтуatorów w punkcie  $x_e = 0,33L$  zmniejsza krytyczne obciążenie. W pozostałych przypadkach następuje poprawa stateczności, tym wyraźniejsza, im dalej od podstawy kolumny znajdują się akтуatory.

Częstota samowzbudzenia – analogicznie jak przy ścisaniu – rośnie wraz napięciem na akтуatorach, z wyjątkiem sytuacji, kiedy destabilizują one układ (rys. 5.8).



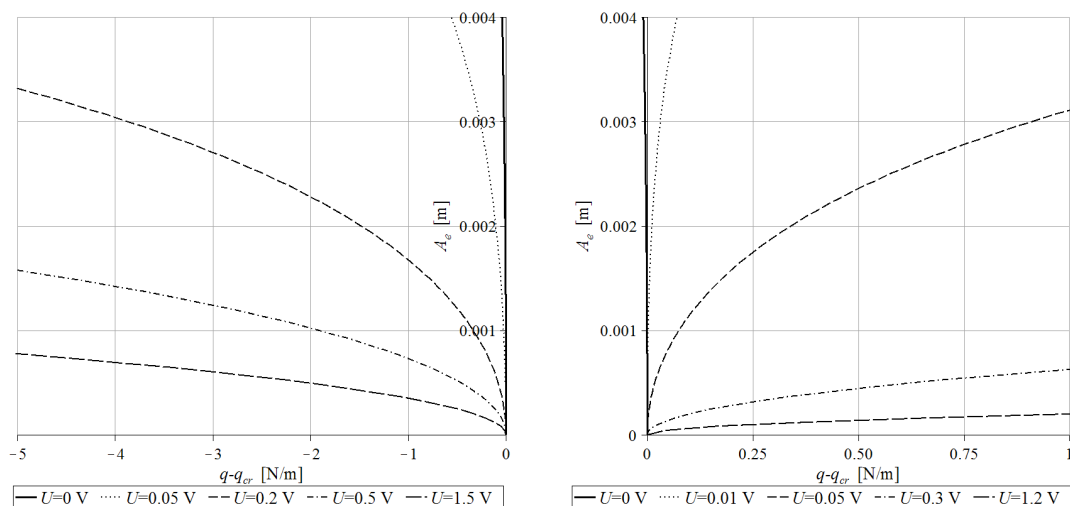
Rysunek 5.7. Krytyczne obciążenie rozciągające w powietrzu.



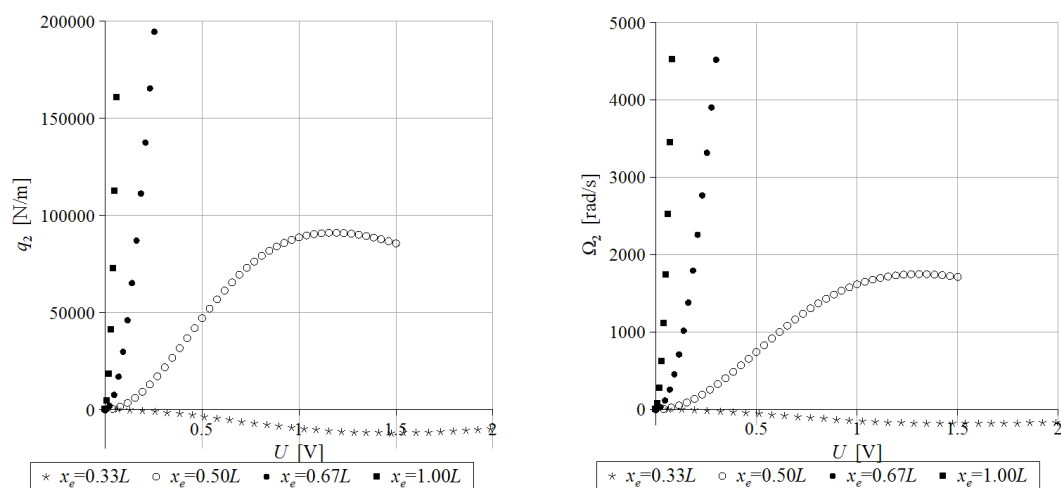
Rysunek 5.8. Częstość flatteru dla krytycznego obciążenia, rozciąganie śledzące.

Diagramy bifurkacyjne na rysunku 5.9 pokazują negatywny efekt zamocowania aktuatorów w 33% długości kolumny (większe napięcie pogłębia twarde samowzbudzenie) i pozytywny efekt zamocowania ich w połowie długości kolumny (wzrost napięcia powoduje przejście od samowzbudzenia twardego do miękkiego oraz dalsze zmniejszanie amplitudy nadkrytycznych drgań flatterowych). Patrząc na wartości współczynnika  $q_2$  na kolejnym rysunku widzimy, że skuteczność aktuatorów rośnie jeśli odsuwamy je od podstawy kolumny, co jest analogicznym wnioskiem jak w przypadku ściskania śledzącego.

Jeśli chodzi o częstość drgań nadkrytycznych, to wprowadzenie tłumienia magnetycznego powoduje – podobnie jak przy ściskaniu – że rośnie ona, gdy zwiększamy obciążenie powyżej krytycznego, z wyjątkiem sytuacji  $x_e = 0,33L$  (wtedy samowzbudzenie jest twar-



Rysunek 5.9. Amplituda drgań okołokrytycznych dla wybranych poziomów napięcia,  $x_e = 0,33L$  (z lewej),  $x_e = 0,50L$  (z prawej), rozciąganie śledzące.



Rysunek 5.10. Współczynniki bifurkacyjne  $q_2$  (z lewej) i  $\Omega_2$  (z prawej) w zależności od napięcia, rozciąganie śledzące.

de, a amplituda statecznego cyklu przekracza dopuszczalne wychylenie, równe szerokości szczeliny  $z$ ).

## 5.4. Wyniki

Ponieważ w układzie bez aktuatorów wiele spośród składników występujących we wzorach na przybliżenie rozwiązania bifurkacyjnego znika, więc porównanie numerycznej symulacji oraz teoretycznych wyliczeń przeprowadziliśmy również dla układu tłumionego magnetycznie. Wyniki potwierdzają poprawność wykonanego badania.



1. Zastosowanie siłowników magnetycznych pozwala zwiększyć krytyczne obciążenie. Stabilizacja jest najwyraźniejsza, gdy siłowniki umieszczone są w okolicach  $2/3$  długości kolumny liczonej od podstawy.
2. W sytuacji ściskania śledzącego kolumny słabo tłumionej zewnątrz (powietrze), częstość drgań samowzbudnych wzrasta wraz z napięciem na aktuatorach. Przy silnym tłumieniu (woda) obserwujemy odwrotną zależność. Umieszczona w powietrzu i rozciągana kolumna także zwykle zwiększa częstość drgań samowzbudnych wraz z napięciem, chociaż zamocowanie aktuatorów blisko podstawy – a więc wtedy, gdy destabilizują one układ – przynosi odwrotny efekt.
3. Siłowniki magnetyczne pozwalają znacząco zmniejszyć amplitudę drgań nadkrytycznych powstających w wyniku samowzbudzenia miękkiego ściskanej kolumny.
4. W przypadku rozciągania śledzącego, tłumienie magnetyczne pozwala zmienić niekorzystne samowzbudzenie twarde w miękkie, a przy jeszcze większym napięciu – ograniczyć amplitudę drgań nadkrytycznych.
5. Wpływ aktuatorów na okołokrytyczne drgania kolumny wyraźnie zależy od tego w jakiej odległości od podstawy kolumny są one zamocowane. W pewnych warunkach ich użycie powoduje pojawienie się niebezpiecznej bifurkacji podkrytycznej.
6. Efekt działania siłowników silnie zależy od zewnętrznego tłumienia układu. Wyższą skuteczność – zarówno w stabilizacji układu, jak i ograniczaniu amplitudy drgań okołokrytycznych – obserwujemy dla kolumny umieszczonej w powietrzu, niż w wodzie.



## 6. Aktywna stabilizacja magnetyczna kolumny Leipholza

W rozdziale tym sprawdzamy możliwość aktywnego stabilizowania kolumny Leipholza przy pomocy aktuatorów magnetycznych. Celem jest wyznaczenie takiego sterowania napięciem załączonym do aktuatorów, które pozwoli zwiększyć krytyczne obciążenie kolumny. Rozważamy sterowanie w pętli sprzężenia zwrotnego, tj. zależne od stanu układu i niezależne od czasu. Dokładniej mówiąc, badamy liniowe sterowania napięciem, które zależą od: położenia kolumny, jej prędkości oraz prądu w uzwojeniach elektromagnesów.

### 6.1. Matematyczny model układu

W praktyce pomiar indukcji w obwodach magnetycznych jest trudny, dlatego zamiast niej do opisu stanu elektromagnesów używany będzie prąd płynący w ich uzwojeniach. Przy takim wyborze zmiennych konieczne jest pominięcie wpływu histerezy magnetycznej i przyjęcie liniowej charakterystyki magnesowania. Tłumiący efekt histerezy jest niewielki (choć zauważalny), a krzywą B-H można aproksymować liniowo, jeśli napięcie na elektromagnesach nie jest zbyt duże (nie modeluje ona bowiem nasycenia magnetycznego rdzeni), zob. rozdział 3. Zatem oba te uproszczenia są dopuszczalne, a numeryczne rozwiązanie równań pokazuje, że w bardzo niewielkim stopniu zmieniają one małe drgania kolumny tłumionej magnetycznie. Dotychczas stosowaną krzywą  $B(H) = \arctan(H/400)$  zastępujemy przez styczną w zerze, tj.  $B = \mu^* \mu_0 H$ , gdzie względna przenikalność rdzenia  $\mu^* = 1989$ , a  $\mu_0$  jest przenikalnością magnetyczną próżni.

Dynamikę układu opisują równania analogiczne do (5.1), z tą różnicą, że stan aktuatorów określa prąd w ich uzwojeniach, tak jak w (3.5). Częstkowe równanie ruchu kolumny poddajemy dyskretyzacji Galerkina w ten sam sposób, co w rozdziale 5. Definiujemy  $u_{5,6} = i_{1,2} - U_0/R$ , gdzie  $U_0$  jest napięciem na każdym z dwóch elektromagnesów dla kolumny znajdującej się w środkowym – początkowym – położeniu równowagi, a  $i_{1,2}$  – prądem w uzwojeniu pierwszego i drugiego elektromagnesu. Sterowaniem będzie odchyłka napięcia  $y_{1,2} = U_{1,2} - U_0$ . Otrzymujemy następujący układ równań, w którym pomijamy związane z krzywizną ugięcia jednomiany stopnia 3, ponieważ nie wpływają one na sta-

teczność położenia równowagi

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2 \\
\dot{u}_2 &= \frac{1}{m + M_a} \left( -\gamma^* u_2 + EI(\tilde{a}_{11}u_1 + \tilde{a}_{21}u_3) + q(\tilde{b}_{11}u_1 + \tilde{b}_{21}u_3) + \right. \\
&\quad \left. + \beta^* EI(\tilde{a}_{11}u_2 + \tilde{a}_{21}u_4) + F_m \tilde{W}_1(x_e) \right) \\
\dot{u}_3 &= u_4 \\
\dot{u}_4 &= \frac{1}{m + M_a} \left( -\gamma^* u_4 + EI(\tilde{a}_{12}u_1 + \tilde{a}_{22}u_3) + q(\tilde{b}_{12}u_1 + \tilde{b}_{22}u_3) + \right. \\
&\quad \left. + \beta^* EI(\tilde{a}_{12}u_2 + \tilde{a}_{22}u_4) + F_m \tilde{W}_2(x_e) \right) \\
\dot{u}_5 &= \left( \frac{2\dot{w}_e}{2(z + w_e) + \frac{l}{\mu^*}} - \frac{2(z + w_e) + \frac{l}{\mu^*}}{\mu_0 AN^2} R \right) \left( u_5 + \frac{U_0}{R} \right) + \frac{2(z + w_e) + \frac{l}{\mu^*}}{\mu_0 AN^2} (y_1 + U_0) \\
\dot{u}_6 &= \left( -\frac{2\dot{w}_e}{2(z - w_e) + \frac{l}{\mu^*}} - \frac{2(z - w_e) + \frac{l}{\mu^*}}{\mu_0 AN^2} R \right) \left( u_6 + \frac{U_0}{R} \right) + \frac{2(z - w_e) + \frac{l}{\mu^*}}{\mu_0 AN^2} (y_2 + U_0)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

gdzie  $w_e, \dot{w}_e$  oznaczają wychylenie i prędkość kolumny w punkcie zamocowania aktuatorów

$$w_e = \tilde{W}_1(x_e)u_1 + \tilde{W}_2(x_e)u_3, \quad \dot{w}_e = \tilde{W}_1(x_e)u_2 + \tilde{W}_2(x_e)u_4, \tag{6.2}$$

a wypadkowa siła magnetyczna w kierunku drugiego elektromagnesu  $F_m$  wynosi

$$F_m = \mu_0 AN^2 \left( \left( \frac{u_6 + \frac{U_0}{R}}{2(z - w_e) + \frac{l}{\mu^*}} \right)^2 - \left( \frac{u_5 + \frac{U_0}{R}}{2(z + w_e) + \frac{l}{\mu^*}} \right)^2 \right) \tag{6.3}$$

Współczynniki  $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_{ij}$  wyrażone są analogicznymi wzorami jak w dodatku A.1, z tą różnicą, że całkowanie odbywa się po długości kolumny  $L$  (funkcje bazowe przeskalowane są na całą jej długość i unormowane). Parametry fizyczne układu są takie same jak przyjęte do analizy bifurkacyjnej.

## 6.2. Sterowanie w pętli sprzężenia zwrotnego

Wprowadźmy wektorowe zmienne stanu  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_6]^T$  i sterowania  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$ . Ponadto niech  $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_6]^T$ , gdzie  $f_i = f_i(\mathbf{u}, \mathbf{y}, q)$ ,  $i = 1, \dots, 6$  oznaczają prawe strony równań (6.1). Wówczas badany układ dynamiczny można zapisać w postaci wektorowej

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, q). \tag{6.4}$$

Zerowy stan oraz sterowanie  $(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  są punktem równowagi przy dowolnej wartości obciążenia  $q$ , tzn.  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, q) = \mathbf{0}$ , a  $q = q_{cr}$  jest krytyczną wartością obciążenia, przy której środkowe położenie traci stateczność.

Niech  $\psi$  będzie różniczkowalną funkcją określoną na zbiorze stanów  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^6$  o wartościach w  $\mathbb{R}^2$ , spełniającą  $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Szukamy takiego sterowania  $\mathbf{y} = \psi(\mathbf{u})$ , by układ (6.4) był stabilny w punkcie zerowym przy danym obciążeniu  $q$ . Oznaczmy  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}, q) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \psi(\mathbf{u}), q)$ . Asymptotyczna stabilność układu (6.4) jest równoważna stabilności macierzy pochodnej w zerze  $\tilde{\mathbf{A}}$  funkcji  $\tilde{\mathbf{f}}$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}, q) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, q) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, q) \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}). \quad (6.5)$$

Widać więc, że bez utraty ogólności możemy analizę ograniczyć do liniowych sterowań

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}\mathbf{u}, \quad (6.6)$$

gdzie  $\mathbf{K} = (K_{ij})_{2 \times 6}$  jest pewną macierzą rzeczywistą, nazywaną macierzą sterowania.

Ponieważ przyjęty model dobrze przybliża realny układ pod warunkiem, że indukcja w rdzeniach nie jest zbyt duża, więc normy rozpatrywanych macierzy muszą być ograniczone. Przedstawione w dalszej części sterowania przy typowych drganiach układu nie prowadzą do nadmiernego wzrostu indukcji.

Obserwowany w rzeczywistości ruch zdominowany jest przez pierwszą funkcję bazową, toteż sterowanie nie powinno zależeć od położenia  $u_3$  i prędkości  $u_4$  drugiej funkcji. Przyjmujemy zatem  $K_{13} = K_{14} = K_{23} = K_{24} = 0$ . Zbadamy efektywność trzech najprostszych rodzajów sterowania.

### 1. *Sterowanie zależące od położenia*

W tym przypadku niezerowe są jedynie elementy  $K_{11}$  i  $K_{21}$  macierzy sterowania  $\mathbf{K}$ . Każdy ze współczynników wielomianu charakterystycznego macierzy  $\tilde{\mathbf{A}}$  jest postaci

$$C(K_{11} - K_{21}) + D, \quad (6.7)$$

gdzie  $C$  i  $D$  nie zależą od sterowania, przy czym jedna z nich może być równa 0. Wynika stąd, że  $K_{11}$  i  $K_{21}$  powinny mieć przeciwne znaki, gdyż w przeciwnym razie sterowania pierwszym i drugim elektromagnesem działałyby przeciwko sobie. Ponadto, dowolne wartości współczynników tego wielomianu można osiągnąć przyjmując  $K_{11} = -K_{21} = \kappa_w$ . Zatem macierz sterowania jest postaci

$$\mathbf{K}_w = \begin{bmatrix} \kappa_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

### 2. *Sterowanie zależące od prędkości*

Analogicznie jak w powyższym przypadku, otrzymujemy macierz sterowania

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_v & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

### 3. Sterowanie zależące od prądu

Ten rodzaj sterowania jest w praktyce najważniejszy, bo łatwiej jest mierzyć prąd w uzwojeniach elektromagnesów, niż położenie – a tym bardziej prędkość – kolumny. Ponieważ układ jest symetryczny, więc sterowanie napięciem załączonym do pierwszego elektromagnesu w zależności od prądu w jego uzwojeniu jest takie samo, jak sterowanie napięciem załączonym do drugiego elektromagnesu w zależności od prądu w drugim uzwojeniu, tj.  $K_{15} = K_{26} = \kappa_s$ . Tak samo jest w przypadku krzyżowego sterowanie stanem wybranego aktuatora w zależności od stanu drugiego,  $K_{25} = K_{16} = \kappa_c$ . Współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy  $\tilde{\mathbf{A}}$  są postaci

$$C\kappa_s + D\kappa_c + E(\kappa_s^2 - \kappa_c^2), \quad (6.10)$$

gdzie stałe  $C$ ,  $D$  i  $E$  (inne niż w pierwszym przypadku i oczywiście inne dla każdego współczynnika) nie zależą od sterowania. Dla uproszczenia zbadamy osobno sterowanie *proste* ( $\kappa_c = 0$ ) i *krzyżowe* ( $\kappa_s = 0$ ), które wyrażają macierze

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_c & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Połączenie kilku rodzajów sterowania może przynieść lepszy efekt, jednak czyni analizę bardziej skomplikowaną. W tej pracy ograniczamy się do najprostszych przypadków.

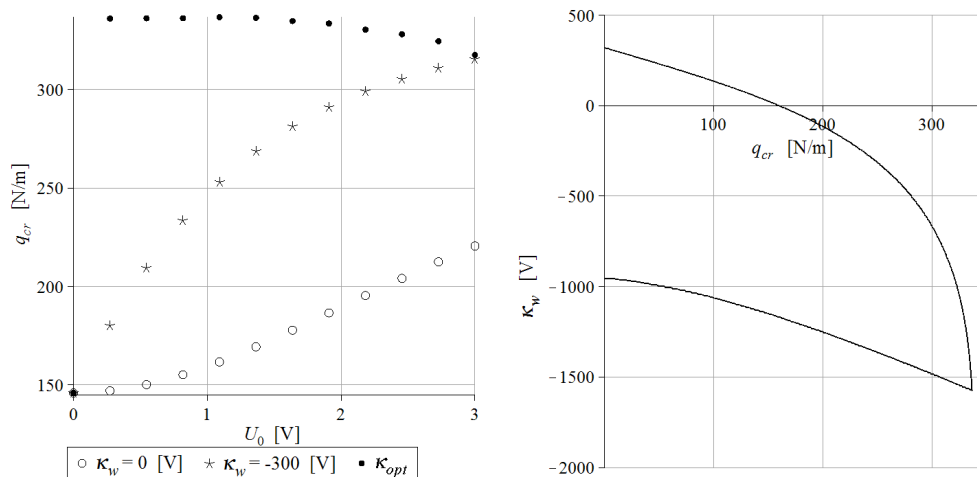
## 6.3. Stabilizacja kolumny obciążonej ściskająco

Na początku zbadamy sytuację, kiedy pasywne działanie siły magnetycznej poprawia stateczność kolumny. Aktuatory są zamocowane w 33% długości kolumny licząc od jej podstawy, a cały układ umieszczony jest w powietrzu.

Niech sterowanie zależy od położenia kolumny. Na rysunku 6.1 z lewej strony pokazana jest zależność krytycznego obciążenia od stałego napięcia na aktuatorach: przy braku aktywnego sterowania, przy stałym sterowaniu  $\kappa_w = -300$  V oraz przy sterowaniu dobieranym każdorazowo do danego napięcia tak, by  $q_{cr}$  było maksymalne możliwe do osiągnięcia. Aktywne sterowanie pozwala bardzo wyraźnie poprawić stateczność układu.

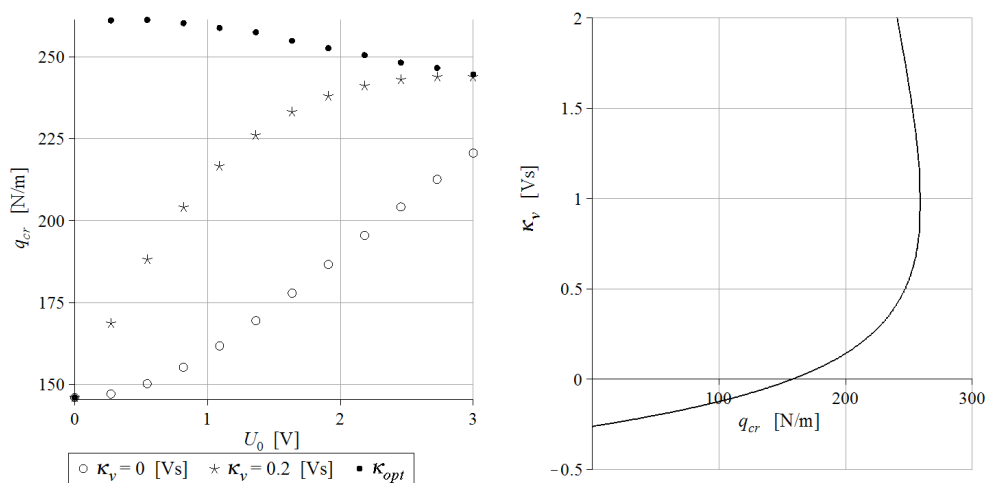
Na rysunku obok, pokazującym zależność między krytycznym obciążeniem i sterowaniem przy napięciu  $U_0 = 1$  V widać, że maksymalne obciążenie osiągnane jest przy sterowaniu prowadzącym do niestateczności nieobciążonej kolumny. Znak  $\kappa_w$  jest ujemny, a więc sterowanie zwiększa napięcie na tym elektromagnesie, w kierunku którego wychylona jest kolumna, co nie jest intuicyjnym wynikiem.

Rysunek 6.2 dotyczy aktywnego sterowania zależącego od prędkości. Jego skuteczność jest mniejsza niż sterowania zależącego od położenia, ale za to optymalne sterowanie nie



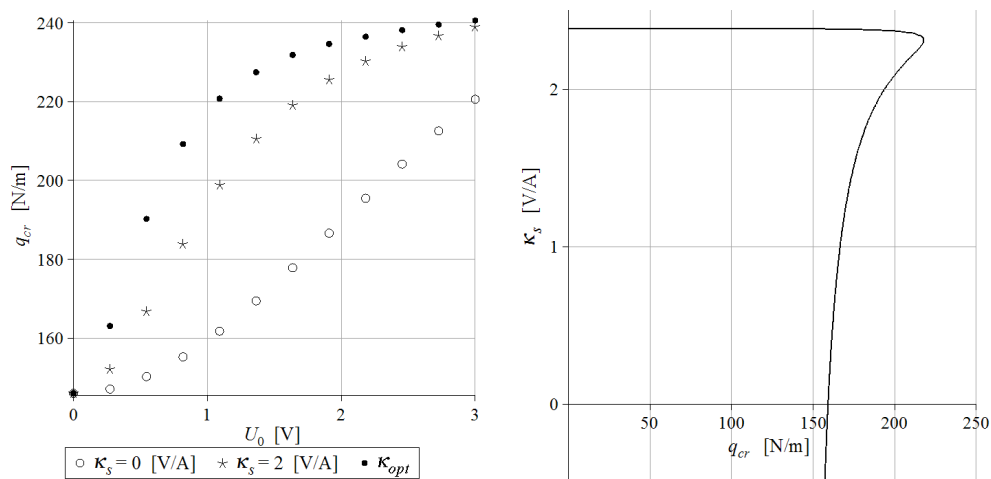
Rysunek 6.1. Krytyczne obciążenie ściskające ze sterowaniem zależącym od położenia i bez sterowania (z lewej) oraz zależność tego obciążenia od sterowania dla  $U_0 = 1$  V (z prawej),  $x_e = 0,33L$ , powietrze.

destabilizuje nieobciążonej kolumny. W tym wypadku współczynnik  $\kappa_v > 0$ , co jest zgodne z intuicją – ruch kolumny w kierunku któregoś z aktuatorów wymaga zwiększenia napięcia z przeciwnej strony.



Rysunek 6.2. Krytyczne obciążenie ściskające ze sterowaniem zależącym od prędkości i bez sterowania (z lewej) oraz zależność tego obciążenia od sterowania dla  $U_0 = 1$  V (z prawej),  $x_e = 0,33L$ , powietrze.

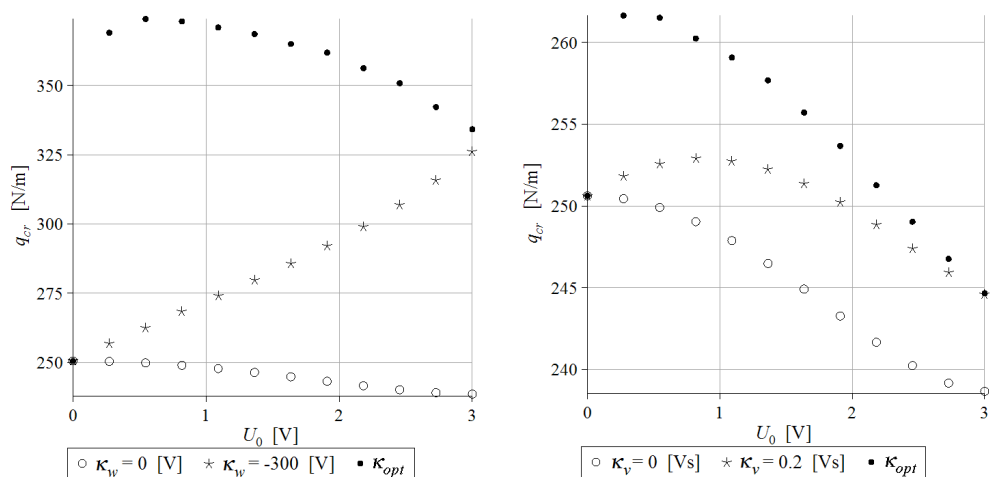
Jeśli chodzi o proste sterowanie zależące od prądu (rys. 6.3), to przy niedużym napięciu jest ono najmniej skuteczne ze wszystkich, przy większym – przynosi podobny efekt jak sterowanie zależące od prędkości. Ruch kolumny w kierunku któregoś z aktuatorów powoduje wzrost prądu w uzwojeniu znajdującym się z przeciwnej strony (reguła Lenza), stabilizujące sterowanie powinno wzmacniać ten efekt, zatem  $\kappa_s > 0$ .



Rysunek 6.3. Krytyczne obciążenie ściskające z prostym sterowaniem zależącym od prądu i bez sterowania (z lewej) oraz zależność tego obciążenia od sterowania dla  $U_0 = 1$  V (z prawej),  $x_e = 0,33L$ , powietrze.

Sterowanie krzyżowe stabilizuje układ tak samo efektywnie jak proste, choć przy innych wartościach współczynnika  $\kappa_c$ .

Jeśli ten sam układ umieścimy w wodzie, wówczas pasywne tłumienie magnetyczne destabilizuje kolumnę. Mimo to, sterowanie „położeniowe” i „prędkościowe” pozwalają zwiększyć krytyczne obciążenie ponad wartość dla układu bez aktuatorów (to drugie – w znacznie mniejszym stopniu i tylko wówczas, kiedy napięcie nie jest zbyt duże), rys. 6.4. W tym wypadku obydwa rodzaje sterowania zależącego od prądu jedynie zmniejszają



Rysunek 6.4. Krytyczne obciążenie ściskające ze sterowaniem zależącym od położenia (z lewej) i od prędkości (z prawej),  $x_e = 0,33L$ , woda.

destabilizujący efekt pasywnego działania aktuatorów. Ciekawa jest też w ich przypadku zależność efektywności sterowania od wartości współczynników  $\kappa_s$ ,  $\kappa_c$  przy różnych



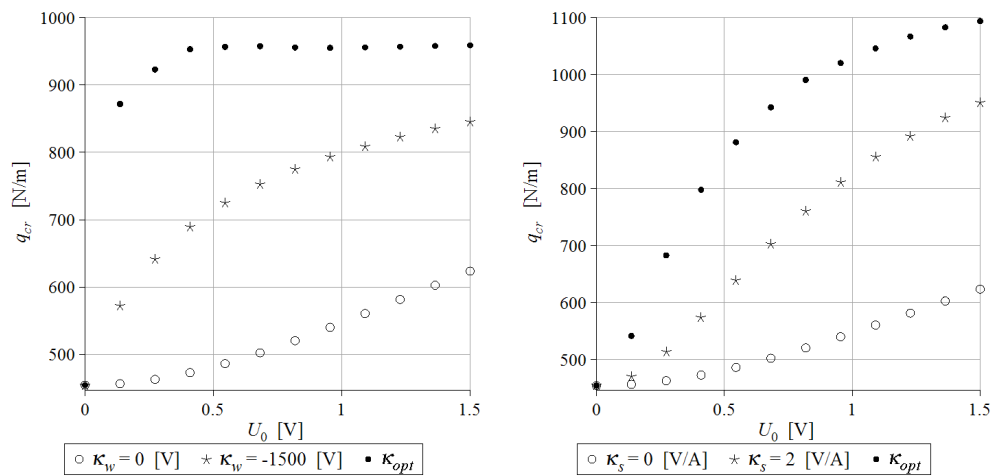
poziomach napięcia. Przykładowo, przy niskim napięciu proste sterowanie poprawia stateczność, jeśli  $\kappa_s$  jest ujemne. Jeśli jednak dodatnia wartość  $\kappa_s$  jest dostatecznie duża, to również może nastąpić wzrost krytycznego obciążenia do identycznego poziomu. Z kolei większe napięcie odwraca zależność, z tą różnicą, że ujemne wartości  $\kappa_s$  zawsze pogarszają stateczność.

Pasywne działanie aktuatorów umieszczonych w punkcie  $x_e = 0,67L$  stabilizuje zarówno układ umieszczony w powietrzu, jak i w wodzie. Zastosowanie sterowania prowadzi do jakościowo identycznych wniosków jak w przypadku  $x_e = 0,33L$  i niskiego tłumienia zewnętrznego ośrodka.

## 6.4. Aktywne sterowanie przy rozciąganiu śledzącym

Zajmiemy się wyłącznie układem umieszczonym w powietrzu, ponieważ w wodzie nie istnieje krytyczne rozciąganie śledzące i kolumna jest zawsze stateczna.

Tak jak w poprzednim punkcie, najpierw sprawdzimy aktywne sterowanie w przypadku, kiedy pasywne tłumienie magnetyczne zwiększa krytyczną siłę śledzącą. Inaczej niż przy ściskaniu, konieczne jest tu większe odsunięcie aktuatorów od podstawy, przyjmijmy  $x_e = 0,50L$ . Zarówno sterowanie zależące od położenia, jak i proste sterowanie zależące od prądu, bardzo wyraźnie poprawiają pasywne działanie aktuatorów. Ostatnie pozwala osiągnąć większe krytyczne obciążenie, ale wymaga to dużego napięcia. Sterowanie zależące od położenia ma tu równiejsze działanie i jest bardzo skuteczne także przy niskim  $U_0$  (rys. 6.5).

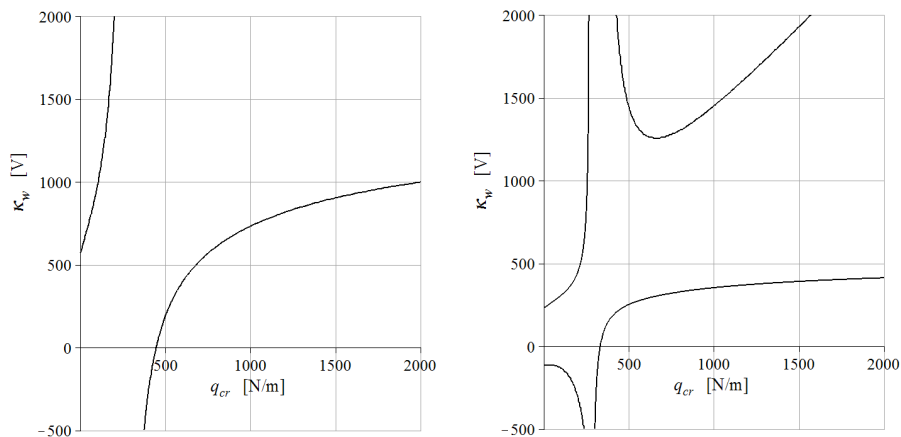


Rysunek 6.5. Krytyczne obciążenie rozciągające ze sterowaniem zależącym od położenia (z lewej) i od prądu (z prawej),  $x_e = 0,50L$ , powietrze.

Jeśli chodzi o sterowanie prędkościowe, to jest ono – odwrotnie niż przy ściskaniu – nieco bardziej skuteczne od położeniowego. Natomiast krzyżowe sterowanie zależące od prądu prowadzi do identycznego  $q_{cr}$  jak sterowanie proste.

Tak samo jak w sytuacji ściskania śledzącego, optymalna stabilizacja zależąca od położenia destabilizuje nieobciążoną kolumnę. Znak współczynnika  $\kappa_w$  jest w tym przypadku przeciwny niż przy ściskaniu, tj. dodatni. Sterowanie prędkościowe i oba sterowania prądowe są pod tym względem bezpieczniejsze, tzn. jeśli  $q_{cr} = 0$ , to sterowany układ jest stateczny. W ich przypadku współczynniki sterowania mają ten sam znak, co przy ściskaniu.

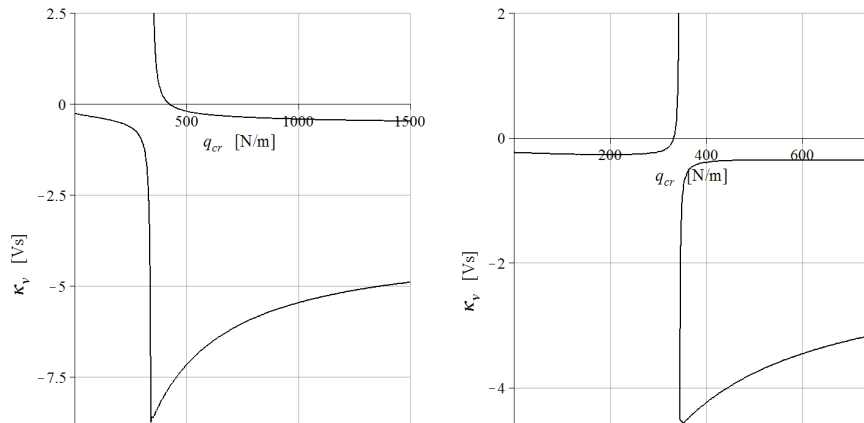
Przejdźmy teraz do sytuacji, kiedy pasywne działanie aktuatorów destabilizuje kolumnę, przyjmując  $x_e = 0,33L$ . Na rysunkach 6.6, 6.7 i 6.8 przedstawione są zależności między krytycznym rozciąganiem oraz sterowaniem zależącym od – odpowiednio – położenia, prędkości i prądu (proste), przy różnych poziomach napięcia. W dwóch pierwszych



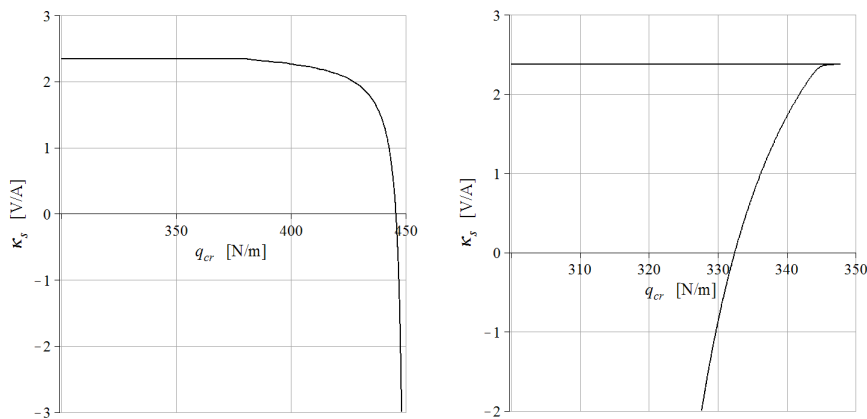
Rysunek 6.6. Relacja między krytycznym rozciąganiem i sterowaniem zależącym od położenia dla  $U_0 = 0,5$  V (z lewej) i  $U_0 = 3$  V (z prawej),  $x_e = 0,33L$ , powietrze.

przypadkach można teoretycznie osiągnąć stabilność przy dowolnie dużej sile rozciągającej. Zatem jako  $\kappa_{opt}$  przyjmujemy maksymalną przy danym  $U_0$  wartość  $\kappa_{w,v}$ , przy której nieobciążona kolumna jest jeszcze stateczna. Jeśli chodzi o znaki współczynników sterowania poprawiającego stateczność, to  $\kappa_w$  jest dodatnie (znowy przeciwnie niż przy ściskaniu). Natomiast znak stabilizującego  $\kappa_{v,s}$  zależy od napięcia  $U_0$ .

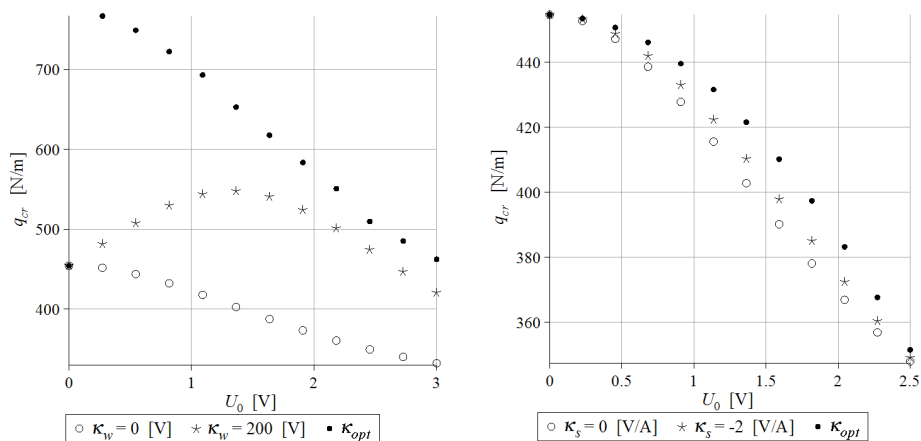
Rysunek 6.9 przedstawia możliwe do osiągnięcia w tej sytuacji krytyczne rozciąganie śledzące ze sterowaniem zależącym od położenia i prostym sterowaniem zależącym od prądu. Sterowanie prędkościowe jest nieco mniej skuteczne od położeniowego, a krzyżowe – od prostego. Tak jak przy ściskaniu, jedynie mechaniczne rodzaje sterowania pozwalają skompensować całkowicie pasywną destabilizację tłumienia magnetycznego, zwiększając krytyczne obciążenie powyżej wartości bez aktuatorów.



Rysunek 6.7. Relacja między krytycznym rozciąganiem i sterowaniem zależącym od prędkości dla  $U_0 = 1$  V (z lewej) i  $U_0 = 3$  V (z prawej),  $x_e = 0,33L$ , powietrze.



Rysunek 6.8. Relacja między krytycznym rozciąganiem i prostym sterowaniem zależącym od prądu dla  $U_0 = 0,5$  V (z lewej) i  $U_0 = 3$  V (z prawej),  $x_e = 0,33L$ , powietrze.



Rysunek 6.9. Krytyczne obciążenie rozciągające ze sterowaniem zależącym od położenia (z lewej) i od prądu (proste, z prawej),  $x_e = 0,33L$ , powietrze.

## 6.5. Uwagi podsumowujące

Wykazaliśmy możliwość efektywnej stabilizacji kolumny Leipholza przy pomocy magnetycznych elementów wykonawczych. Skuteczność poszczególnych metod sterowania wyraźnie zależy od punktu zamocowania aktuatorów, napięcia zasilającego elektromagnesu, tłumienia zewnętrznego oraz rodzaju obciążenia (ściskające lub rozciągające).

Najefektywniej działają sterowania mechaniczne, tj. zależące od położenia albo prędkości. Pozwalają na osiągnięcie największych krytycznych obciążeń, które przekraczają krytyczne obciążenia kolumny bez aktuatorów również w przypadku destabilizującego pasywnego działania siły magnetycznej. Co więcej, ich skuteczność jest wysoka również przy niewielkim napięciu zasilającym elektromagnesu.

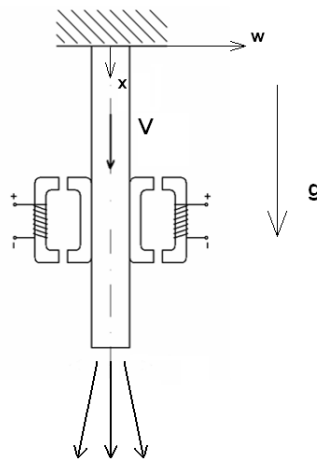
Proste i krzyżowe sterowania zależące od prądu działają bardzo podobnie do siebie. Również pozwalają na zwiększenie krytycznego obciążenia, ale ich użycie ma sens tylko wtedy, gdy chodzi o wzmocnienie pasywnej stabilizacji układu przez aktuatory magnetyczne. Wymagają też wyższego napięcia zasilającego.

## 7. Krytyczna prędkość przepływu w rurze z dołączonymi aktuatorami magnetycznymi

W tym rozdziale badamy możliwość stabilizacji rury przenoszącej płyn przy pomocy tłumienia elektromagnetycznego. Sensowność użycia siłowników ograniczona jest do rur wykonujących drgania o niewielkiej amplitudzie, a więc metalowych i plastikowych. Oznacza to konieczność użycia ekstremalnych przepływów, zatem również odpowiedniego doboru parametrów układów tak, by otrzymane wyniki mogły być w przyszłości potwierdzone eksperymentalnie. Przedstawione wyniki zostały zreferowane na konferencji [77], ale nie zostały jeszcze opublikowane.

### 7.1. Układ

Badanym układem jest rura, do której zamocowane są aktuatory magnetyczne (rys. 7.1). Rura zawieszona jest wzdłuż pola grawitacyjnego  $g$  i przepływa w niej woda z prędkością  $V$ .



Rysunek 7.1. Układ – rura z przepływem i dołączonymi siłownikami magnetycznymi.

kością  $V$ . Podparcie jest wspornikowe, dwustronne przegubowe albo dwustronne sztywne. Woda pompowana jest w dół lub zasysana do góry. Parametry badanych układów znajdują się w tabeli 7.1. Są to:  $L$  – długość rury,  $d$  – średnica wewnętrzna,  $D$  – średnica zewnętrzna,  $a$  – promień rdzenia obwodu magnetycznego aktuatora,  $l$  – długość obwodu magnetycznego,  $n$  – liczba warstw uzwojenia elektromagnesów,  $b$  – promień drutu

Tabela 7.1. Parametry badanych układów (rur i aktuatorów).

parametr	rura stalowa	rura PCV	jednostka
$L$	2000	4750	mm
$d$	10	70	mm
$D$	11,11	75	mm
$a$	2	3	mm
$l$	300	600	mm
$n$	4	5	[·]
$b$	0,2	0,3	mm
$x_e$	300	800	mm
$z$	0,13	1	mm
$U$	0,08	0,37	V

uzwojenia,  $x_e$  – odległość zamocowania aktuatorów od górnego końca rury,  $z$  – szczelina w obwodach magnetycznych w środkowym położeniu równowagi oraz  $U$  – napięcie na elektromagnesach.

Ten sam układ stalowej rury z siłownikami (przy innej tylko szerokości szczeliny  $z$ ) badany był w rozdziałach poświęconych kolumnie Leipholza. Z kolei parametry rury plastikowej są takie jak w eksperymentalnej pracy [45].

### 7.1.1. Rura

Materiał z jakiego wykonana jest rura oraz jej wymiary określają dopuszczalne ciśnienie, pod którym dostarczana jest woda. Z kolei to ciśnienie i geometria rury determinują prędkość przepływu. Potrzebne stałe materiałowe i parametry fizyczne płynów zamieszczone są w tabeli 7.2.

Tabela 7.2. Stałe materiałowe i parametry fizyczne ośrodków.

materiał / płyn	gęstość $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	moduł Younga $E$ [GPa]	naprężenie uplastyczniające $\sigma_{Yield}$ [MPa]	kinematyczny wsp. lepkości $\nu$ [m <sup>2</sup> /s]
stal	7850	200	250	—
PCV	1060	2,4	40	—
woda 20 °C	998	—	—	$1,004 \cdot 10^{-6}$
powietrze 20 °C	1,204	—	—	$1,516 \cdot 10^{-5}$

Największe naprężenie występuje na wewnętrznej ścianie rury przy górnym końcu, niezależnie od tego czy woda jest pompowana w dół, czy zasysana. Warunek wytrzymałościowy określamy za pomocą hipotezy Hubera, tak jak w grubościennej rurze z denkami

w dużej odległości od nich. Wyliczona ze współczynnikiem bezpieczeństwa 2 maksymalna dopuszczalna wartość bezwzględna różnicy pomiędzy ciśnieniem w górnej części rury oraz ciśnieniem otoczenia wynosi

$$p_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{Yield}}{2} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right). \quad (7.1)$$

Prędkość przepływu w rurze przy bezwzględnej różnicy ciśnień wynoszącej  $p$  obliczamy z równania Bernoulli'ego, zakładając brak strat lokalnych

$$\pm L + \frac{p}{\rho g} = \lambda \frac{LV^2}{2dg}, \quad (7.2)$$

gdzie znak „+” występuje gdy woda pompowana jest w dół, a „-” pojawia się w przypadku ssania. Współczynnik liniowych oporów tarcia  $\lambda$  określony jest zależnością Blasiusa

$$\lambda = 0,3164 Re^{-1/4}, \quad (7.3)$$

gdzie

$$Re = \frac{Vd}{\nu} \quad (7.4)$$

jest liczbą Reynoldsa przepływu. Zależność Blasiusa stosuje się do rur hydraulicznie gładkich i przepływów turbulentnych, dokładniej  $2300 (4000) \leq Re \leq 10^6$ . Ostatecznie prędkość przepływu dana jest wzorem

$$V = \left( \frac{2}{0,3164} \left( \frac{d}{\nu} \right)^{1/4} \frac{d}{L} \left( \pm Lg + \frac{p}{\rho} \right) \right)^{4/7}. \quad (7.5)$$

Szczególnie trudne było znalezienie stalowej rury, dla której warunków wytrzymałościowych pozwoli osiągnąć wymaganą do utraty stateczności – dużą w tym wypadku – prędkość krytyczną, a jednocześnie prędkość ta nie spowoduje przekroczenia górnego ograniczenia na liczbę Reynoldsa przepływu, przy której można jeszcze stosować zależność Blasiusa.

W przypadku rury ssącej dodatkowym problemem jest kawitacja. Temperatura wrzenia wody pod ciśnieniem 123,5 hPa wynosi 50 °C. Przyjmujemy zatem, że ciśnienie w górnej części rury nie może być mniejsze niż 10% ciśnienia atmosferycznego.

### 7.1.2. Aktuatory

Dla wybranej rury szukamy aktuatora optymalnie tłumiącego drgania swobodne przy podparciu wspornikowym. Potrzebne parametry elektromagnetyczne znajdują się w tabeli 7.3.

W chwili początkowej wolny koniec rury wypełnionej wodą wychylamy o 20% zewnętrznej średnicy do położenia  $w(L, 0)$ . Przyjmujemy, że ugięcie następuje według pierwszej funkcji własnej belki wspornikowej. Następnie szukamy parametrów  $a, l, n, b, x_e, z$  i  $U$ ,

Tabela 7.3. Charakterystyki elektromagnetyczne materiałów i ośrodków.

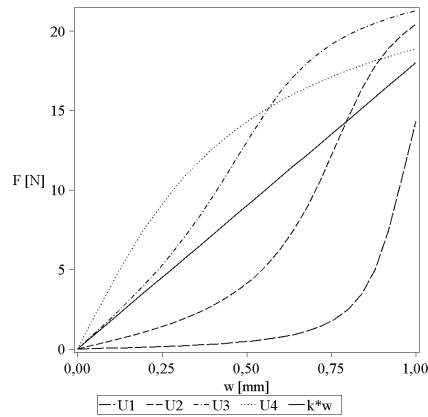
parametr	wartość
krzywa magnesowania stali	$B = \phi(H) = \arctan(H/400)$ T
przewodność elektryczna właściwa rdzeni (stal)	$\sigma = 2 \cdot 10^6$ 1/(Ohm · m)
przewodność elektryczna właściwa uzwojenia (miedź)	$58,6 \cdot 10^6$ 1/(Ohm · m)
przenikalność magnetyczna próżni	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am)

przy których po 10 cyklach amplituda drgań swobodnego końca jest minimalna. Optymalizację wykonujemy metodą systematycznego przeszukiwania. Parametry  $a, l, n, b, x_e$  i  $U$  przebiegają pewną arbitralnie wybraną kostkę, a szerokość szczeliny  $z$  zmienia się w zależności od punktu zamocowania aktuatorów  $x_e$ . Każdy określony w ten sposób wektor parametrów staje się rozwiązaniem dopuszczalnym, gdy spełnione są następujące warunki:

1. Masa rdzeni zamocowanych na rurze nie przekracza 5% masy wypełnionej wodą rury z rdzeniami.
2. Przynajmniej jedna z indukcji w obwodach magnetycznych  $B_{1,2}$  jest nie większa niż 70% indukcji nasycenia.
3. Wartość wypadkowej siły magnetycznej od aktuatorów przy maksymalnie wychylonej rurze (tj. w chwili początkowej) nie przekracza 50% wartości siły sprężystej wytwarzanej przez rurę w punkcie ich zamocowania.
4. Wartość wypadkowej siły magnetycznej od aktuatorów w zależności od wychylenia rury w punkcie ich zamocowania  $w(x_e, \cdot)$  albo jest funkcją wypukłą na przedziale  $[0, w(x_e, 0)]$ , albo nie jest funkcją wypukłą i w żadnym punkcie nie przekracza siły sprężystej ugiętej rury.

Pierwszy warunek oznacza, że wpływ – nie uwzględnianej w równaniach – masy słowników na dynamikę jest niewielki. Drugi prowadzi do odrzucenia układów, w których indukcja jest bliska poziomowi nasycenia, zatem nie zmienia się istotnie podczas drgań i tym samym daje niewielki efekt tłumiący. Dwa ostatnie warunki wyjaśnia rysunek 7.2. Oba aktulatory przyciągają rurę w przeciwnych kierunkach siłami, które zależą od szerokości szczelin  $z \pm w(x_e, \cdot)$ . Wypadkowa siła magnetyczna jest zerowa tylko w środkowym położeniu rury i wraz z jej wychyleniem rośnie nieliniowo. Przy niskich napięciach ten wzrost w przedziale  $[0, w(x_e, 0)]$  opisuje funkcja wypukła, przy dużych – wklęsła; możliwe są też bardziej złożone przypadki. Jednocześnie wraz z wychyleniem rośnie liniowo siła sprężysta rury, dla której stałą proporcjonalności można wyliczyć jak przy klasycznym zginaniu belki. Jeśli siła ta jest co do wartości wyższa od siły magnetycznej, to środkowe położenie równowagi jest stateczne – to właśnie gwarantują warunki trzeci i czwarty. W warunku trzecim żądamy stosunkowo niskiej wartości siły magnetycznej, ponieważ wartość siły sprężystej wyliczona ze wzorów znanych z wytrzymałości materiałów stosuje się

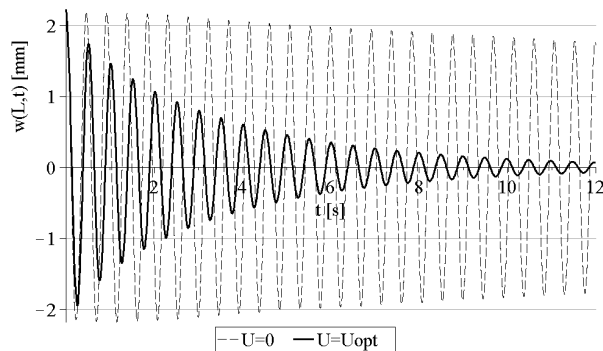




Rysunek 7.2. Wypadkowa siła magnetyczna dla różnych napięć i siła sprężysta w zależności od wychylenia przykładowej rury

w naszym układzie jedynie w przybliżeniu. Wynika to stąd, że punktowemu obciążeniu odpowiada ugięcie belki opisane wielomianem, podczas gdy przyjęliśmy ugięcie według pierwszej postaci własnej.

Znalezione parametry siłowników optymalnie tłumiących drgania swobodne pokazane są w tabeli 7.1. Wpływ tłumienia magnetycznego na swobodne drgania wypełnionej wodą stalowej rury umieszczonej w powietrzu przedstawiony jest na rysunku 7.3.



Rysunek 7.3. Wychylenie końca wypełnionej wodą stalowej rury z dołączonymi aktuatorami optymalnie tłumiącymi drgania.

Im bliżej podparcia umieszczone są aktuatory, tym mniejsze wychylenie rury oraz większa siła sprężysta, co pozwala zmniejszyć początkową szczelinę w obwodach magnetycznych i zwiększyć załączone napięcie. Okazuje się, że poprawia to skuteczność tłumienia – optymalna wartość  $x_e$  to dolne ograniczenie na ten parametr. Ograniczenie to zostało ustalone z tego powodu, że w rzeczywistości rdzenie mają pewną niezerową długość i każdy z aktuatorów działa parą sił, co może mieć niezaniebnywalny wpływ, gdy umieszczony zostanie bardzo blisko podparcia.

## 7.2. Dynamika

### 7.2.1. Założenia

#### 1. Rura

- a) Ruch odbywa się w płaszczyźnie  $x-w$ , ponieważ zgodnie z istniejącym stanem wiedzy (zob. rozdział 2) dwuwymiarowy model jest wystarczający do prognozowania zjawiska niestabilności.
- b) Wymiary rury nie zmieniają się pod wpływem wewnętrznego ciśnienia płynu ani tarcia wywołanego przepływem.
- c) Drgania są niewielkie, rura jest smukła, zatem można zastosować liniowy model belki Bernoulli’ego-Eulera.
- d) Materiał jest wiskoelastyczny i wewnętrzną dysypację opisuje model Kelvina-Voigta.

#### 2. Siłowniki magnetyczne

- a) Częstotliwość drgań rury jest na tyle niska, że indukcja magnetyczna oraz prędkość jej zmiany są w przybliżeniu stałe na przekroju poprzecznym rdzeni każdego z dwóch obwodów magnetycznych, co pozwala zastosować Bertotti’ego model histerezy magnetycznej [75].
- b) Niewielkie drgania rury skutkują dużymi wahaniami indukcji magnetycznej w aktuatorach, toteż konieczne jest użycie nieliniowych równań magnetodynamiki.

#### 3. Przepływ

- a) Płyn jest lepki i nieściśliwy.
- b) Przepływ jest w pełni rozwinięty turbulentny, a więc można modelować go jako tzw. *plug flow* – nieskończenie elastyczny pręt poruszający się w rurze.

### 7.2.2. Równania stanu

#### Rura obustronnie podparta lub wspornikowa przenosząca płyn w kierunku swobodnego końca

Dynamikę opisuje liniowe równanie cząstkowe drgań poprzecznych rury sprzężone z nieliniowym równaniem zwyczajnym zmian indukcji w obwodach magnetycznych

$$\begin{aligned} \left(1 + \beta^* \frac{\partial}{\partial t}\right) EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [MV^2 - (m + M)g(L - x)] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MV \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \\ + (m + M)g \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma^* \frac{\partial w}{\partial t} + (m + M + M_a) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{A}{\mu_0} (B_2^2 - B_1^2) \delta_e \quad (7.6) \\ \left(\frac{AN^2}{R} + \frac{1}{8}\sigma l a^2\right) \frac{dB_{1,2}}{dt} + \frac{2(z \pm w(x_e, t))}{\mu_0} B_{1,2} + l\phi^{-1}(B_{1,2}) = \frac{NU}{R}. \end{aligned}$$

W pierwszym równaniu  $\beta^*$  i  $\gamma^*$  to współczynniki tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego wyznaczone wg. procedur opisanych w punktach 7.3 i 7.4,  $EI$  – sztywność giętna rury,

$m, M, M_a$  – masa rury, przepływającej cieczy oraz płynu otaczającego rurę i przyspieszanego jej ruchem, na jednostkę długości,  $A$  – pole przekroju poprzecznego obwodów magnetycznych,  $N$  – liczba zwojów każdego z elektromagnesów,  $R$  – opór drutu uzwojenia. Pozostałe oznaczenia wyjaśnione są wcześniej.

Równanie dynamiki rury znane jest od wielu lat, np. [66]. Omówimy jego składniki pogrupowane według pochodnych wychylenia rury.

Pierwszy składnik znany jest z liniowej teorii belki i oznacza siły sprężystości oraz siły tłumienia wewnętrznego na jednostkę długości rury.

Składnik  $MV^2 \cdot \partial^2 w / \partial x^2$  związany jest z bezwładnością przepływającej cieczy wynikającą ze zmiany jej kierunku ruchu. Jeśli w przyjętym układzie współrzędnych dany fragment rury opisuje wypukła funkcja, to ciecz działa siłą skierowaną od środka krzywizny. Podobny składnik pojawi się, gdy przyłożymy na końcu rury ściskające obciążenie śledzące (problem Becka), bowiem wypływająca ciecz wytwarza siłę odrzutu. Zatem wywiera on efekt destabilizujący rurę. Jego wartość zmniejszona jest wskutek ciężaru części rury i cieczy poniżej danego punktu.

Kolejny składnik, tj.  $2MV \cdot \partial^2 w / \partial x \partial t$  opisuje efekt przyspieszenia Coriolisa płynu znajdującego się w rurze. Jeśli jego element przepływa przez fragment rury o rosnącym w czasie kącie wychylenia, czyli wykonujący obrót przeciwny do wskazówek zegara, to prędkość tego elementu w poziomie rośnie, a więc działa on na ścianki rury siłą skierowaną w lewo. Zatem ten składnik ma efekt stabilizujący rurę. Ponieważ rośnie on liniowo wraz z prędkością przepływu, czyli wolniej niż składnik bezwładnościowy, więc przy małych prędkościach dominuje ustatecznianie (numeryczne rozwiązanie równania potwierdza, że drgania zanikają wówczas znacznie szybciej niż przy braku przepływu), ale przy dużych przepływach destabilizacja bierze górę i układ traci stateczność analogicznie do kolumny Becka.

Dalej znajdują się składowe siły ciężkości rury i przepływającego przez nią płynu, które przywracają układ do położenia środkowego.

Składnik  $\gamma^* \cdot \partial w / \partial t$  opisuje wiskotyczne tłumienie ośrodka (u nas: powietrza lub wody), w którym znajduje się układ, jednak w przyjętym modelu stała  $\gamma^*$  zależy od częstości drgań rury.

Składniki związane z siłami magnetycznymi oraz równania zmian indukcji w obwodach magnetycznych są takie same jak omówione wcześniej w pracy.

## Warunki początkowe i brzegowe

Przyjmujemy, że w chwili początkowej rura wygięta jest według pierwszej postaci własnej dla danego typu podparcia, jej wychylenie w punkcie zamocowania aktuatorów

wynosi  $w_0$ , a prędkość w każdym punkcie jest zerowa

$$w(x_e, 0) = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 \quad (7.7)$$

$$B_{1,2}(0) = \phi(H_{01,2}), \quad NU/R = 2\phi(H_{01,2})(z \pm w_0)/\mu_0 + lH_{01,2}.$$

Warunki brzegowe zależą od wybranego podparcia

$$w(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) = 0, \quad \text{wspornikowe} \quad (7.8)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \text{dwustronnie sztywne} \quad (7.9)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad \text{dwustronnie przegubowe.} \quad (7.10)$$

W przypadku dwustronnego podparcia zakładamy dodatkowo, że rura może przesuwać się osiowo, tj. podparcie nie generuje reakcji wzdłuż rury.

## Rozwiązanie

Zakładamy, że przybliżone rozwiązanie układu jest postaci

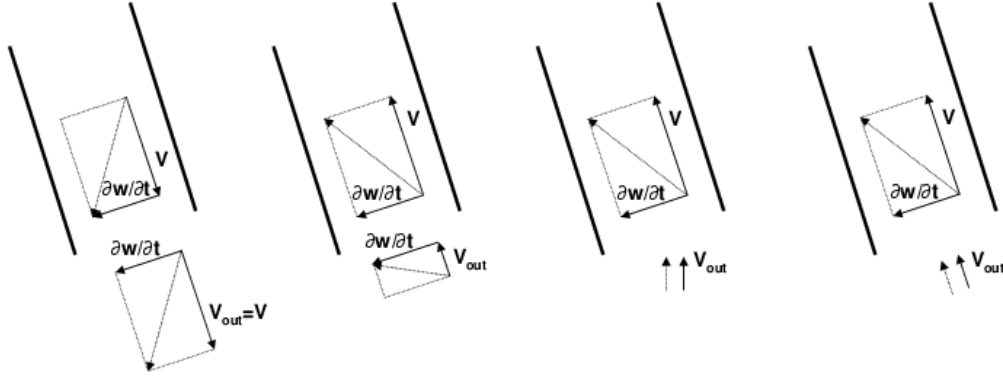
$$\tilde{w}(x, t) = \tilde{W}_1(x)T_1(t) + \tilde{W}_2(x)T_2(t), \quad (7.11)$$

gdzie  $\tilde{W}_{1,2}$  są unormowanymi względem całek z kwadratów funkcjami własnymi belki dla wybranego typu podparcia. Stosując metodę Galerkina, otrzymujemy układ 6 nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu na funkcje  $T_{1,2}$ ,  $\dot{T}_{1,2}$  i  $B_{1,2}$ . Równania te rozwiązujemy algorytmem Rungego-Kutty–Fehlberga, wykorzystując warunki początkowe (7.7) oraz jedno z warunków brzegowych (7.8), (7.9) lub (7.10). Stateczność środkowego położenia równowagi badamy przy pomocy wartości własnych układu zlinearyzowanego.

## Wspornikowa rura ssąca

Odwroćcie przepływu w rurze wspornikowej zmienia znak prędkości w równaniu (7.6) i siła Coriolisa ma efekt destabilizujący. Pierwsze teoretyczne prace przewidywały, że przy braku tłumienia rura traci stateczność poprzez flutter przy dowolnie małej prędkości przepływu [67]. Eksperymenty nie pokazały jednak niestateczności. Kuiper i Metrikine stwierdzili, że czynnikiem stabilizującym może być tłumienie ośrodka zewnętrznego [44].

Inne wyjaśnienie zaproponowali Paidoussis i in. [70]. Zwrócili uwagę, że w przypadku przewodu ssącego na jego wlocie zmienia się pęd płynu, co generuje reakcję. Spójrzmy na rysunek 7.4. W każdym z czterech przypadków ciągle strzałki we wnętrzu rury oznaczają względną prędkość płynu  $V$  oraz poziomą prędkość swobodnego końca rury  $\partial w/\partial t(L, t)$ , a strzałka kropkowana oznacza prędkość wypadkową. Tuż poniżej końca ciągle strzałki oznaczają składowe uśrednionej przestrzennie prędkości płynu.



Rysunek 7.4. Strumień płynu na końcu rury wspornikowej - wyrzut płynu oraz trzy modele ssania, szkic według [45].

W pierwszym przypadku – rury wyrzucającej strumień – płyn nie zmienia prędkości na wylocie i podąża za swobodnym końcem, zatem nie wytwarza na tym końcu reakcji. W każdym z pozostałych trzech przypadków rury ssącej płyn jest przyspieszany na wlocie, toteż powoduje powstanie rozciągającej reakcji stycznej do końca rury. Z równania Bernoulli’ego wynika, że dodatkowy składnik ma wartość  $-1/2 \cdot MV^2 \cdot \partial^2 w / \partial x^2$ , więc zmniejsza o połowę efekt sił bezwładności płynu wewnątrz przewodu [70].

Różnice między modelami dotyczą reakcji poprzecznej wywieranej przez płyn na wlot rury. Na drugim rysunku strumień jest styczny do ugiętego końca i podąża za nim, zatem nie wywołuje reakcji poprzecznej. W kolejnych dwóch sytuacjach strumień nie podąża za wlotem do rury i albo jest pionowy, albo styczny do ugiętego końca, w obu przypadkach generując reakcję poprzeczną.

Nie jest wiadome, który model właściwie opisuje zachowanie płynu na wlocie. Eksperyment opisany w [45] pokazuje, że utrata stateczności następuje przez flutter, zatem model przedstawiony na trzecim rysunku jest błędny, gdyż prowadzi do dywergencji. Model drugi i czwarty prognozują flutter, jednak pierwszy niedoszacowuje prędkość krytyczną, a drugi ją przeszacowuje. Przyjmujemy model czwarty, choć ze świadomością, że rzeczywiste zachowanie płynu w okolicy wlotu jest bardziej złożone. Poprzeczną reakcję na swobodnym końcu można włączyć do równania (7.6) poprzez deltę Diraca nie zmieniając klasycznych warunków brzegowych dla rury wspornikowej. Odpowiedni składnik wynosi  $+MV\delta_L \cdot \partial w / \partial x$  [70].

Ostatecznie dynamikę drgań poprzecznych rury ssącej opisuje równanie

$$\left(1 + \beta^* \frac{\partial}{\partial t}\right) EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[\frac{1}{2} MV^2 - (M + m)g(L - x)\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2MV \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M + m)g \frac{\partial w}{\partial x} + MV\delta_L \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma^* \frac{\partial w}{\partial t} + (M + M_a + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{A}{\mu_0} (B_2^2 - B_1^2) \delta_e. \quad (7.12)$$

### 7.3. Tłumienie wewnętrzne

Stałą wiskotycznego tłumienia wewnętrznego  $\beta^*$  obliczamy wykorzystując współczynnik pochłaniania (tłumienia właściwego) materiału. Współczynnik ten zdefiniowany jest jako stosunek energii rozproszonej w formie ciepła na skutek oporów wewnętrznych do całkowitej energii odkształcenia [14].

Ustalmy rurę wspornikową o interesującej nas geometrii, bez aktuatorów i cieczy wewnątrz oraz w warunkach braku tłumienia zewnętrznego i grawitacji. Wówczas jej drgania opisuje równanie

$$\beta^* EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (7.13)$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci iloczynu funkcji

$$w(x, t) = W(x)T(t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \quad (7.14)$$

otrzymujemy dwa niezależne równania zwyczajne. Rozwiązaniem równania na  $W(x)$  jest ciąg funkcji własnych  $W_i$  opisujących kształt ugięcia rury, którym odpowiadają wartości własne  $k_i$  ( $i = 1, \dots, \infty$ ). Interesuje nas pierwsza postać własna, ponieważ wartości współczynnika pochłaniania podane są dla próby zginania. Drgania tej postaci opisuje drugie z równań otrzymanych w wyniku rozdzielenia zmiennych

$$m\ddot{T}_1(t) + \beta EI k_1^4 \dot{T}_1(t) + EI k_1^4 T(t) = 0. \quad (7.15)$$

Jest to równanie ruchu oscylatora harmonicznego z tłumieniem, dla którego można obliczyć logarytmiczny dekrement tłumienia. Z drugiej strony dekrement ten jest równy połowie współczynnika pochłaniania materiału  $\psi$ . Łącząc te wielkości wyznaczamy stałą tłumienia wewnętrznego

$$\beta^* = \frac{1}{k_1^2} \sqrt{\frac{m}{EI}} \frac{\psi}{\sqrt{4\pi^2 + \psi^2/4}}. \quad (7.16)$$

Wartość współczynnika pochłaniania dla stali zawiera się w przedziale 0,01 ... 0,03, przyjmujemy wartość  $\psi = 0,02$ . Niestety nie udało się znaleźć w literaturze wartości  $\psi$  dla PCV, więc przyjmujemy wartość średnią ze współczynnika stali oraz twardej gumy, tj.  $\psi = 0,1$ . Obliczone w ten sposób wartości stałej tłumienia wewnętrznego dla badanych rur znajdują się w tabeli 7.4.

### 7.4. Tłumienie zewnętrzne

Użyty jest model tłumienia zewnętrznego opisany w [39] (znany był i stosowany wcześniej). Współczynnik tłumienia  $\gamma^*$  i masa płynu przyspieszanego drganiami rury  $M_a$  wyliczane są ze wzorów wyprowadzonych z analitycznego rozwiązania równania Naviera–Stokesa

Tabela 7.4. Obliczone parametry tłumienia wewnętrznego  $\beta^*$  oraz zewnętrznego  $\gamma^*$  i  $M_a$  dla wybranych rur i ośrodków

	rura stalowa		rura PCV	
	powietrze	woda	powietrze	woda
$\gamma^*$ [kg/m/s]	0,000966	0,170864	0,002753	0,477095
$M_a$ [kg/m]	0,000180	0,111576	0,006244	4,644865
$\beta^*$ [s]	0,000192		0,002646	

dla opływu rury przez płyn ośrodka. W modelu tym zakłada się, że rura wykonuje niewielkie drganie harmoniczne o częstości  $\omega$  oraz umieszczona jest daleko od ścian zbiornika. Kinetyczna liczba Reynoldsa opływu  $Re$  może być niewiele większa od jedności, zatem konieczne jest użycie wzorów w bardziej skomplikowanej postaci

$$\gamma^* = -\frac{1}{4}\pi\rho D^2\omega\Im\left(1 + \frac{4K_1(\alpha)}{\alpha K_0(\alpha)}\right), \quad M_a = \frac{1}{4}\pi\rho D^2\Re\left(1 + \frac{4K_1(\alpha)}{\alpha K_0(\alpha)}\right), \quad (7.17)$$

gdzie

$$\alpha = \sqrt{iRe}, \quad Re = \frac{\omega D^2}{\nu} \quad (7.18)$$

oraz  $K_0$  i  $K_1$  są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela drugiego rodzaju, odpowiednio zerowego i pierwszego rzędu.

Problemem jest to jaką częstość drgań  $\omega$  należy przyjąć. Ponieważ celem jest zbadanie obszarów stateczności, toteż powinna to być częstość spodziewanego flatteru. Tłumienie zewnętrzne zmienia tę częstość, zatem konieczna jest procedura iteracyjna. Niestety rura z przepływającym płynem może tracić stateczność według kilku postaci własnych jednocześnie, co nie gwarantuje zbieżności takiej metody i czyni ją kłopotliwą [46]. Autorzy wspomnianej pracy zaproponowali nowy model oporu hydrodynamicznego, w którym uniezależniają się częstości. Jednak zakres jego stosowalności ograniczony do dużych wartości liczby Reynoldsa opływu.

Stosujemy tutaj inne podejście, które bazuje na numerycznie wyznaczonej częstości drgań swobodnych środka rury wypełnionej nieruchomą cieczą. Model rury uwzględnia wyznaczone wcześniej tłumienie wewnętrzne, natomiast pomija wpływ aktuatorów. Podparcie rury jest wspornikowe, ponieważ tylko w takiej sytuacji utrata stateczności następuje przez flatter. Punktem startu dla procedury iteracyjnej jest obliczona ze wzoru częstość drgań swobodnych pierwszej postaci własnej w warunkach braku tłumienia zewnętrznego. W kolejnych krokach wyliczana jest numerycznie na podstawie pierwszych 10 cykli częstość drgań w połowie długości rury oraz parametry  $\gamma^*$  i  $M_a$ . Procedura zatrzymuje się, gdy względna zmiana  $\gamma^*$  staje się mniejsza niż 1%, co następuje po kilku iteracjach.

Otrzymane wartości współczynnika tłumienia zewnętrznego oraz masę dołączonego płynu dla obu wybranych rur oraz ośrodków przedstawia tabela 7.4. Ich wartości oraz

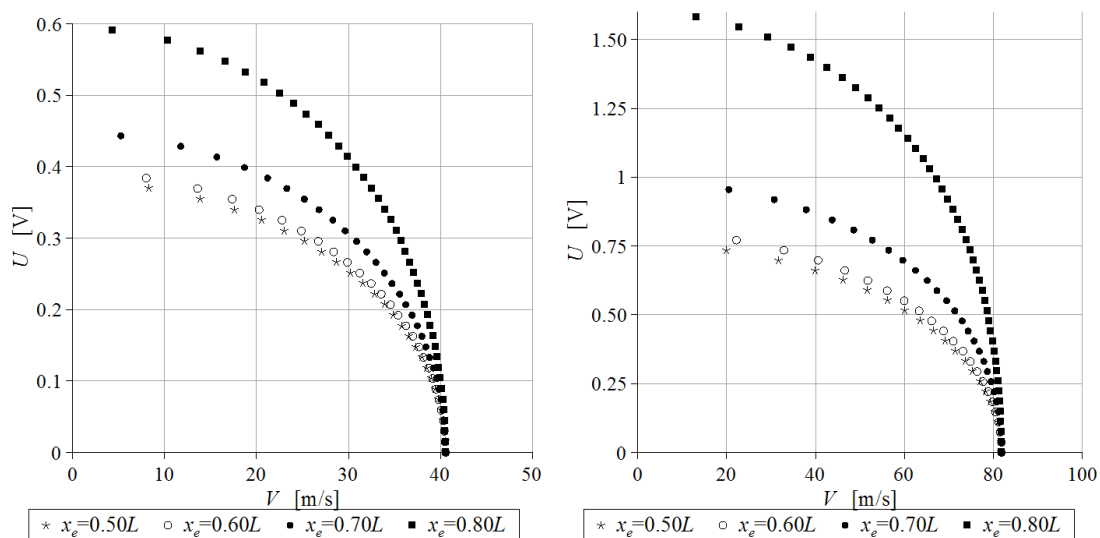
symulacje pokazują, że wpływ tłumienia zewnętrznego na drgania oraz na utratę stateczności jest bardzo istotny. Model użyty w niniejszej pracy oraz przez Kuipera i in. [46] zawierają uproszczenia nie pozwalające na dokładne prognozowanie krytycznej prędkości przepływu.

## 7.5. Stateczność

Zbadamy wpływ aktuatorów magnetycznych na stateczność układów. Rysunki w kolejnych podpunktach przedstawiają granice obszarów stateczności na płaszczyźnie  $(V, U)$  dla rur: stalowej z podparciem dwustronnym, stalowej wspornikowej przenoszącej płyn w dół oraz ssącej wspornikowej z PCV. Punkty na wykresach oznaczają krytyczną prędkość przepływu dla danego napięcia. Została ona obliczona przez badanie znaku największej rzeczywistej części wartości własnych układu zlinearyzowanego na wybranej siatce punktów.

### 7.5.1. Podparcie dwustronne

Rozważamy układ stalowej rury z dołączonymi siłownikami o parametrach podanych w tabeli 7.1, z tą różnicą, że szczelina w obwodach magnetycznych wynosi 1 mm. Na rysunku 7.5 pokazane są obszary stateczności dla umieszczonej w powietrzu rury podpartej z dwóch stron – przegubowo (z lewej) i sztywno (z prawej). Kolejne wykresy odpowiadają



Rysunek 7.5. Stateczność rury stalowej, podparcie dwustronne przegubowe (z lewej) i sztywne (z prawej), powietrze,  $z = 1$  mm.

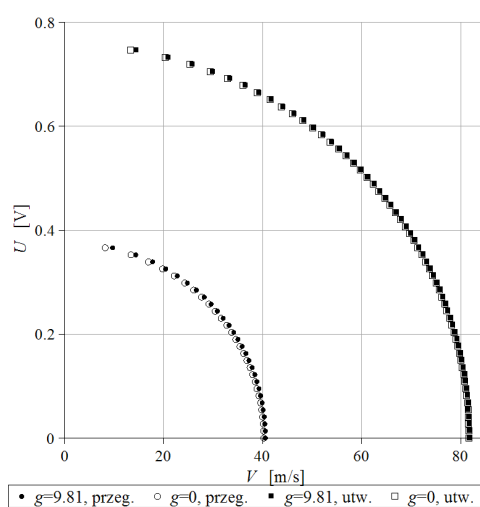
różnej odległości aktuatorów od górnego końca rury. W obu przypadkach ma miejsce



utrata stateczności przez wyboczenie, a sztywne podparcie dwukrotnie zwiększa krytyczną prędkość przepływu. Są to znane wyniki [66].

Na bifurkację statyczną nie wpływają siły tłumiące zależne od prędkości. Potwierdzają to, już nie pokazywane, identyczne rysunki z wodą jako zewnętrznym ośrodkiem. Z tego też powodu nie ujawnia się dynamiczny (reguła Lentza) efekt tłumiący siłowników, a jedynie efekt destabilizujący związany z przyciąganiem rury przez każdy z nich. W związku z tym wzrost napięcia pogarsza stateczność układów, tym silniej, im bliżej połowy długości przewodu zamocowane są akulatory.

Rysunek 7.6 pokazuje, że wpływ grawitacji na poprawę stateczności rur podpartych dwustronnie przegubowo i sztywno jest minimalny.



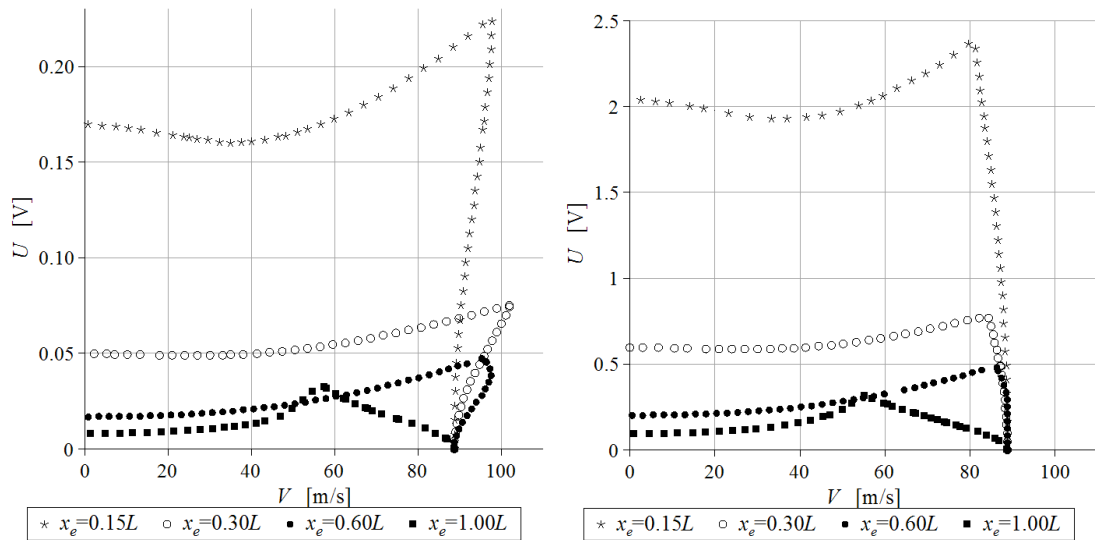
Rysunek 7.6. Stateczność rury stalowej – wpływ grawitacji, podparcie dwustronne, powietrze,  $z = 1 \text{ mm}$ ,  $x_e = 0,50L$ .

### 7.5.2. Rura wspornikowa pompująca płyn w dół

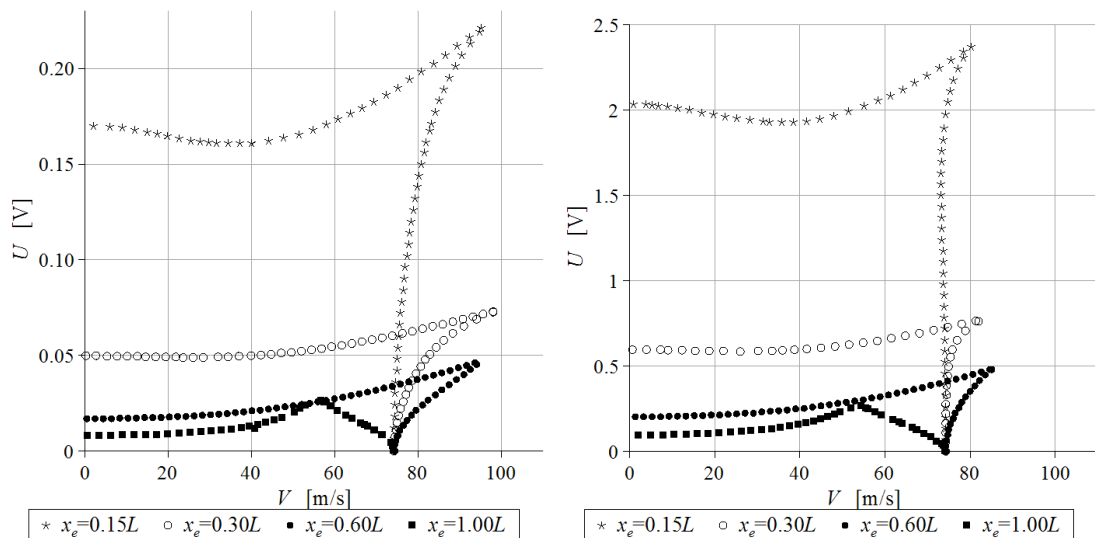
W tym podpunkcie przedstawione są wyniki dla stalowej rury z akuatorami (tab. 7.1) zamocowanej sztywno na górnym jej końcu. Udowodnione jest, że wspornikowa rura pompująca płyn w dół traci stateczność przez flutter [24], [25], co pozwala ujawnić się siłom tłumiącym w układzie.

Na rysunku 7.7 i 7.8 pokazany jest wpływ akuatorów magnetycznych na obszar stateczności, odpowiednio dla rury zawieszony w powietrzu i w wodzie. Przekroczenie prawej granicy obszaru prowadzi do flutteru, a granicy górnej – do dywergencji.

Widać, że akulatory mogą zarówno stabilizować, jak i destabilizować układ. Jeśli umieszczone są na swobodnym końcu rury, to zdecydowanie pogarszają stateczność. Zapewne rura jest na tyle wiotka, że ich statyczny wpływ destabilizujący dominuje nad tłumiącym. Trudno na podstawie wykresów wskazać optymalne położenie akuatorów.



Rysunek 7.7. Stateczność rury stalowej – małe napięcie, podparcie wspornikowe, powietrze,  $z = 0,13$  mm (z lewej),  $z = 1$  mm (z prawej).



Rysunek 7.8. Stateczność rury stalowej – małe napięcie, podparcie wspornikowe, woda,  $z = 0,13$  mm (z lewej),  $z = 1$  mm (z prawej).

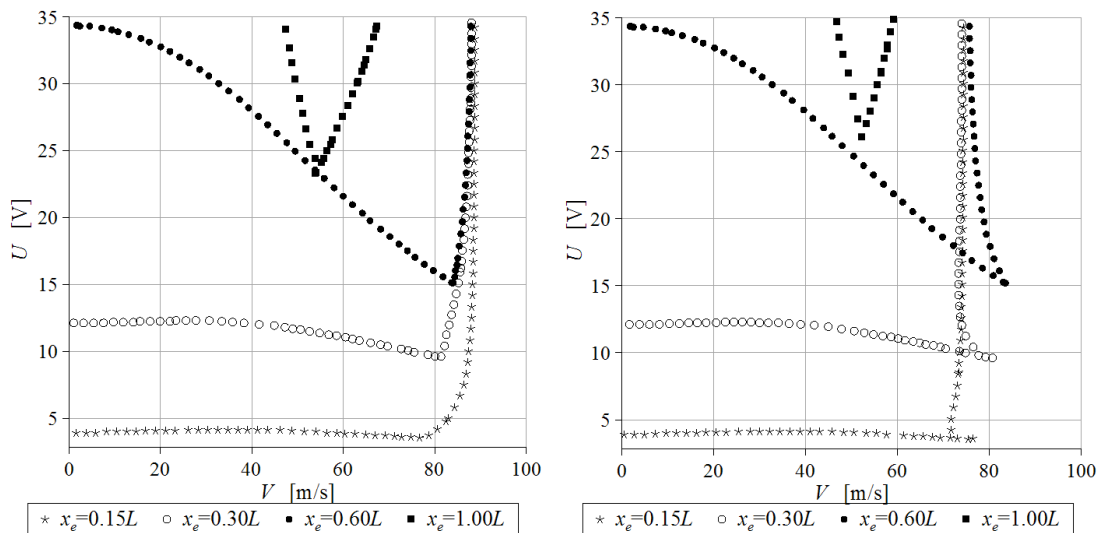
Ważne jest to, że najbardziej praktyczne zamocowanie ich w górnej części (mniejsze wychylenia rury, łatwiejsza realizacja techniczna) również pozwala wyraźnie zwiększyć prędkość krytyczną.

Przy zerowym napięciu krytyczna prędkość przepływu dla układu zanurzonego w wodzie jest mniejsza niż dla układu umieszczonego w powietrzu (dany stosunek mas cieczy i rury sprawia, że tłumienie zewnętrzne ma charakter destabilizujący), i tam też wyraźniej objawia się stabilizacja po załączeniu napięcia. Dla tej samej rury ze ściskającym obciążeniem śledzącym wzrost siły krytycznej również był większy w sytuacji, kiedy tłu-

mienie zewnętrzne prowadziło do mniejszej jej wartości, co jednak miało miejsce dla układu umieszczonego w powietrzu (tłumienie zewnętrzne ustataczniało). Ponadto generalnie efektywność magnetycznej stabilizacji kolumny Leipholza była znacznie wyższa.

Zmniejszenie szerokości szczeliny w obwodach magnetycznych poprawia działanie siłowników. Ten wniosek oraz fakt wzrostu skuteczności tłumienia drgań swobodnych wraz ze zmniejszaniem szczeliny oznaczają, że siłowniki są szczególnie skuteczne dla układów podatnych na drgania o niewielkiej amplitudzie. Z tego powodu badamy stosunkowo sztywną rurę stalową oraz rurę z PCV, zupełnie pomijając gumowe przewody, mimo że znacznie łatwiej doprowadzić do ich destabilizacji. Ponadto potencjalnym obszarem zastosowań siłowników może być stabilizacja i tłumienie drgań wirujących wałów [47].

Wzrost napięcia na aktuatorach powoduje zwiększenie siły magnetycznej, z jaką przyciągają one rurę. Przy dostatecznie dużej jej wartości środkowe położenie rury jest niestateczne. Dalszy wzrost napięcia prowadzi do nasycenia magnetycznego rdzeni. Wówczas siła magnetyczna zmienia się niewiele przy wychylaniu rury i środkowe położenie odzyskuje stateczność. Rysunek 7.9 pokazuje odpowiadające nasyceniu rdzeni obszary stateczności dla szczeliny 0,13 mm oraz układu umieszczonego w powietrzu (z lewej) i w wodzie (z prawej). W tym drugim przypadku można uzyskać zwiększenie krytycznej prędkości przepływu. Poprawa stateczności jest jednak mniejsza niż dla małych napięć, a siłowniki pracują poza swoim optymalnym zakresem, zatem przypadek dużego napięcia jest mniej interesujący.



Rysunek 7.9. Stateczność rury stalowej – duże napięcie, podparcie wspornikowe, powietrze (z lewej), woda (z prawej),  $z = 0,13$  mm.

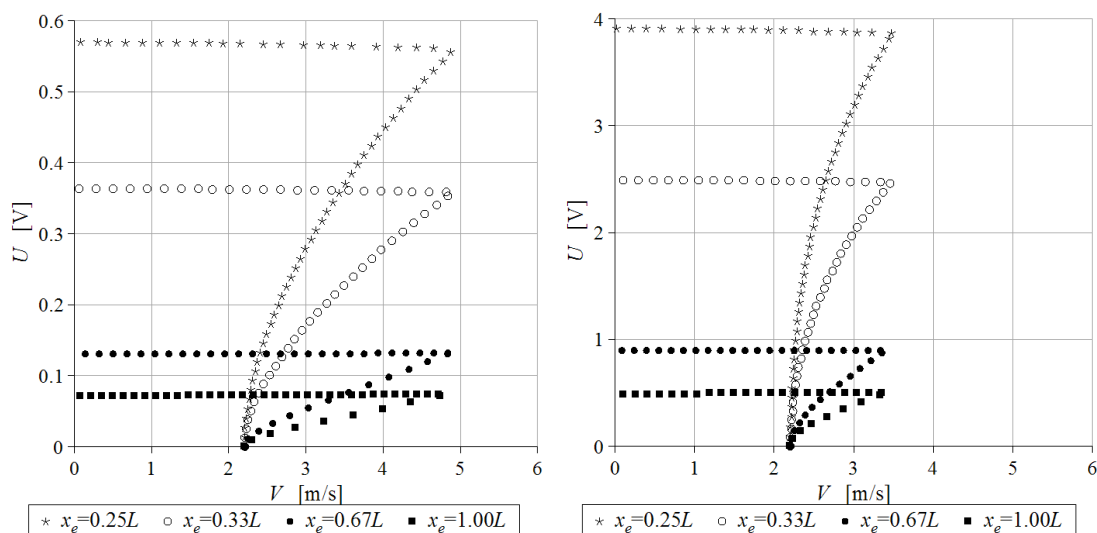
Użycie szerszej szczeliny magnetycznej daje niemal identyczny efekt.

Podobnie jak w przypadku dwustronnego podparcia, grawitacja w minimalnym tylko stopniu zwiększa krytyczną prędkość przepływu.

### 7.5.3. Wspornikowa rura ssąca

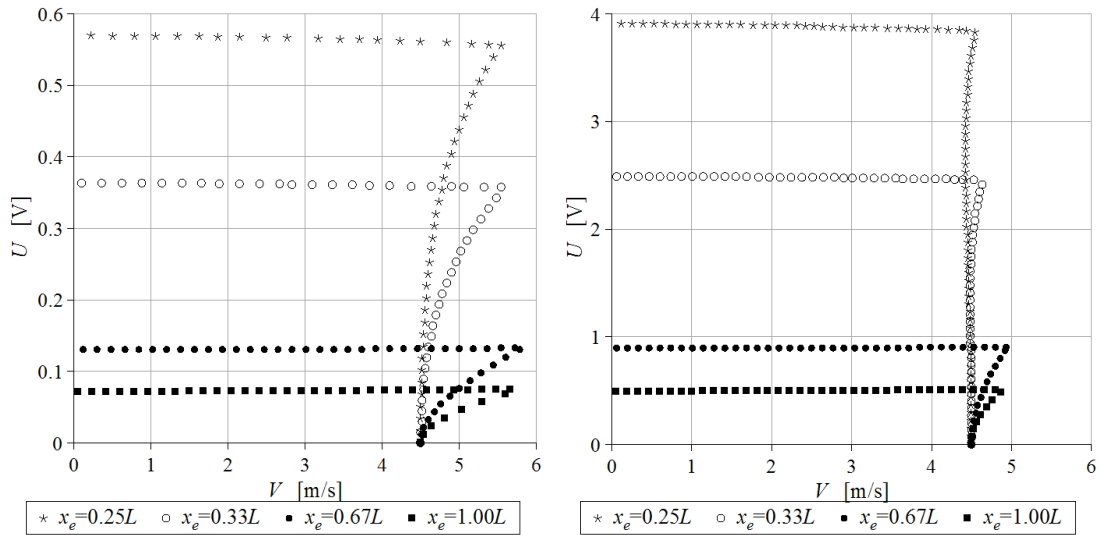
Na zakończenie przedstawiamy wyniki dla tłumionej magnetycznie rury PCV (tabela 7.1), przez którą woda zasysana jest do góry. Stateczność identycznej rury została zbadana teoretycznie i eksperymentalnie przez Kuipera i Metrikine'a [45]. Zaobserwowana krytyczna prędkość przepływu dla rury częściowo – na głębokość 1,95 m – zanurzonej w wodzie wyniosła pomiędzy 2,1–2,4 m/s, a utrata stateczności następowała poprzez flutter. Prędkość krytyczna prognozowana przez model z konwencjonalnymi warunkami brzegowymi (brak reakcji poprzecznej na wolnym końcu – sytuacja druga na rys. 7.4) wyniosła 0,73 m/s. Z kolei użycie warunków brzegowych generujących reakcję poprzeczną na wolnym końcu (tych samych co w niniejszej pracy – sytuacja czwarta na rys. 7.4) przeszacowywało obserwację, bowiem wyliczony krytyczny przepływ wyniósł 6,8 m/s. W obu przypadkach model prawidłowo przewidywał niestateczność oscylacyjną.

Rysunki 7.10 i 7.11 pokazują obszar stateczności dla przewodu umieszczonego odpowiednio w powietrzu i w wodzie, dla dwóch różnych szczelin w obwodach magnetycznych:  $z = 1$  mm i  $z = 4$  mm. Przy zerowym napięciu krytyczna prędkość przepływu w powie-



Rysunek 7.10. Stateczność ssącej rury PCV, podparcie wspornikowe, powietrze,  $z = 1$  mm (z lewej),  $z = 4$  mm (z prawej).

trzu wynosi ok. 2,2 m/s, a dla wody jako zewnętrznego ośrodka tłumiącego – ok. 4,5 m/s. Zatem prędkość krytyczna w modelu przewodu częściowo zanurzonego w wodzie (tak jak w doświadczeniu Kuipera i Metrikine'a) wyniosłaby około 3,5-4 m/s, co jest wartością bliższą zaobserwowanej, niż wartość wyliczona w [45].



Rysunek 7.11. Stateczność ssącej rury PCV, podparcie wspornikowe, woda,  $z = 1$  mm (z lewej),  $z = 4$  mm (z prawej).

Przyczyną różnicy jest użycie innego modelu oporu hydrodynamicznego. Kuiper i Metrikine użyli opracowanego przez siebie i Battjesa [46] modelu liniowo–kwadratowego, ze współczynnikami niezależnymi od częstości drgań. Model taki nie wymaga iteracyjnej procedury szacowania współczynników. Ponieważ jednak o utracie stateczności decyduje część liniowa funkcji opisującej układ dynamiczny, więc w niniejszej pracy został wykorzystany znany model liniowy, którego współczynnik szacujemy iteracyjnie.

Dodatknie napięcie ujawnia pozytywny wpływ tłumienia magnetycznego, które wyraźnie zwiększa przepływ niezbędny do destabilizacji. Tak jak w przypadku rury wspornikowej pompującej płyn w dół, poprawa jest wyraźniejsza dla układu mającego mniejszą prędkość krytyczną bez aktuatorów – jednak w tym wypadku jest układ umieszczony w powietrzu, a nie w wodzie (tak samo jak dla kolumny Leipholza, zewnętrzne tłumienie ma charakter ustateczniający).

Mniejsza szczelina oznacza większą skuteczność tłumienia magnetycznego.

Na efektywność siłowników wpływa ich punkt zamocowania. Bez dodatkowej analizy trudno określić optymalne położenie. Istotne z praktycznego punktu widzenia zamocowanie siłowników w górnej części rury pozwala wyraźnie poprawić stateczność. Co ciekawe, siłowniki umieszczone na swobodnym końcu nadal zwiększają krytyczny przepływ, podczas gdy takie ich zamocowanie w każdym przypadku pogarszało stateczność rury pompującej wodę w dół.

Jeśli chodzi o wpływ grawitacji, to odwrotnie niż w przypadku rury pompującej płyn w dół, destabilizuje ona układ. Choć efekt jest silniejszy aniżeli poprzednio, to jednak

spadek prędkości krytycznej nadal jest niewielki, w związku z czym nie pokazujemy rysunków.

## 7.6. Wnioski

Zastosowanie siłowników magnetycznych destabilizuje rurę podpartą z obu końców, ale może wyraźnie poprawić stateczność rury wspornikowej. Wynika to stąd, że dynamiczna utrata stateczności pozwala ujawnić się magnetycznej sile tłumiącej, natomiast przy dywergencji siłowniki generują jedynie statyczny efekt destabilizujący.

Skuteczność magnetycznej stabilizacji silnie zależy od punktu zamocowania siłowników. Istotne z praktycznego punktu widzenia zamocowanie w górnej części rury także pozwala zwiększyć krytyczny przepływ, ale znalezienie optymalnego położenia wymaga osobnych badań.

Poprawa stateczności jest silniejsza dla zewnętrznego ośrodka dającego mniejszą krytyczną prędkość przepływu. W przypadku rury pompującej wodę w dół jest to woda, dla rury ssącej – powietrze.

Mniejsza szczelina w obwodach magnetycznych prowadzi do zwiększenia efektywności działania siłowników.

Siłowniki pracują optymalnie w zakresie niskich napięć, kiedy nie następuje nasycenie magnetyczne ich rdzeni.

Uwzględnienie grawitacji w równaniach dynamiki nie ma dużego wpływu na obszar stateczności. Grawitacja minimalnie zwiększa prędkość krytyczną w przypadku dwustronnego podparcia oraz rury wspornikowej pompującej wodę w dół, natomiast – nieco wyraźniej – zmniejsza ją dla rury ssącej.

Użyty, dobrze znany, model oporu hydrodynamicznego pozwala dokładniej prognozować krytyczną prędkość przepływu, niż model zaproponowany w [46] (ten drugi jednak lepiej nadaje się do badania pokrytycznego zachowania układu).

Destabilizacja wszystkich rozważanych rur zachodzi przy bardzo dużych przepływach. Takie ekstremalne przepływy nie są spotykane na codzień w technice i są bardzo trudne (ale możliwe) do osiągnięcia.

## 8. Uwagi końcowe

Zbadana została metoda tłumienia drgań mechanicznych przy pomocy aktuatorów magnetycznych.

Wyprowadzono w jawnej postaci równania opisujące stan aktuatorów zamocowanych do drgającego układu, przy realistycznie dobranej i gładkiej charakterystyce magnesowania materiału rdzeni, z uwzględnieniem zjawiska histerezy magnetycznej. Na przykładzie oscylatora harmonicznego wykazano, że siły magnetyczne pozwalają skutecznie tłumić drgania. Za efekt tłumiący odpowiada przede wszystkim indukcja prądu w uzwojeniach elektromagnesów. Udział histerezy magnetycznej w dysypacji energii jest znacznie mniejszy, choć zauważalny. Nieliniowy charakter siły magnetycznej może w pewnych warunkach prowadzić do chaotycznego zachowania oscylatora.

Stwierdzono możliwość efektywnej stabilizacji magnetycznej niezachowawczych układów sprężystych – kolumny Leipholza i rury z przepływem. Pasywne oddziaływanie aktuatorów umożliwia zwiększenie krytycznych wartości parametrów, tj. obciążenia kolumny lub prędkości przepływu cieczy w rurze.

Aktywne sterowanie napięciem na siłownikach pozwala jeszcze bardziej stabilizować kolumnę Leipholza. Szczególnie skuteczne jest sterowanie zależące od położenia i prędkości kolumny, nieco mniej – sterowanie zależące od prądu.

Wyprowadzone zostały wg. metody Ioossa i Josepha wzory na I i II przybliżenie rozwiązania bifurkacyjnego układu dynamicznego, których poprawność została potwierdzona wynikami numerycznego rozwiązania równań stanu. Przy ich pomocy zbadano okółokrytyczne zachowanie kolumny Leipholza. Siłowniki magnetyczne pozwalają ograniczyć amplitudę drgań pokrytycznych, a także zmienić niekorzystne samowzbudzenie twarde w bifurkację nadkrytyczną.

Na skuteczność stabilizacji bardzo wyraźnie wpływa miejsce zamocowania aktuatorów. W niektórych ich położeniach stateczność układów pogarsza się, może też pojawić się niebezpieczna bifurkacja podkrytyczna. Bardzo istotny jest także wpływ tłumienia zewnętrznego. Stabilizacja jest wyraźniejsza w ośrodku, w którym krytyczne wartości parametrów są niższe.

Bardziej szczegółowe lub mniej istotne wyniki znajdują się w podsumowaniach kolejnych rozdziałów.

Wszystkie teoretyczne badane modele mają parametry dobrane w ten sposób, by opisy-

wały układy mogące być fizycznie zbudowane. Umożliwia to eksperymentalną weryfikację wyników tej pracy.

Dalsze badania mogą objąć okołokrytyczne zachowanie rury przenoszącej płyn oraz zastosowanie aktuatorów magnetycznych do stabilizacji i poprawy okołokrytycznego zachowania wirujących wałów.



# Bibliografia

- [1] Andersen S. B., Thomsen J. J., 2002, Post-critical behaviour of Beck's column with a tip mass, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 37, 135–151.
- [2] Awrejcewicz J., Mosdorf R., 2003, *Analiza numeryczna wybranych zagadnień dynamiki chaotycznej*, WNT, Warszawa.
- [3] Bajaj A. K., Sethna P. R., 1984, Flow induced bifurcations to three-dimensional oscillatory motions in continuous tubes, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 44, 270–286.
- [4] Beck M., 1952, Die Knicklast des Einseitig Eingespannten Tangential Gedrückten Stabes *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 3, 225–228 (in German).
- [5] Bertotti G., 1998, *Hysteresis in Magnetism*, Academic Press, San Diego.
- [6] Biorci G., Pescetti D., 1958, Analytical Theory of the Behaviour of Ferromagnetic Materials, *Il Nuovo Cimento*, 7, 6.
- [7] Bolotin V. V., 1963, *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability* (Moscow, English translation), Pergamon Press Ltd., Oxford, 1963.
- [8] Bolotin V. V., 1999, Dynamic Instabilities in Mechanics of Structures, *Appl. Mech. Rev.*, 52 (1), R1–R9.
- [9] Bogacz R., Janiszewski R., 1986, Zagadnienia analizy i syntezy kolumn obciążonych siłami śledzącymi ze względu na stateczność, *Prace IPPT PAN*, 6.
- [10] Bourrières F.-J., 1939, Sur un phénomène d'oscillation auto-entretenu en mécanique des fluides réels, *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, 147.
- [11] Chen M., 1987, Hopf bifurcation in Beck's problem, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 11 (9), 1061–1073.
- [12] De Rosa M. A., Franciosi C., 1990, The Influence of an Intermediate Support on the Stability Behaviour of Cantilever beams Subjected to Follower Forces, *Journal of Sound and Vibration*, 137, 107–115.
- [13] De Souza S. L. T., Caldas I. L., Viana R. L., Balthazar J. M., Brasil R. M. L. R. F., 2007 A simple feedback control for a chaotic oscillator with limited power supply, *Journal of Sound and Vibration*, 299, 664–671.
- [14] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., 2000, *Wytrzymałość materiałów*, tom II, wyd. 2, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa, 222–228.
- [15] Dziejdz K., 2005, *Dynamika wirników z aktywnym tłumieniem magnetycznym w łożyskach*, rozprawa doktorska, Wydział SiMR Politechniki Warszawskiej.
- [16] Dziejdz K., Kurnik W., 2002, Stability of a Rotor with Hybrid Magneto-hydrodynamic Support, *Machine Dynamics Problems*, Vol. 26, No. 4, 33–43.

- [17] Edelstein W. S., Chen S. S., 1985, Flow-induced instability of an elastic tube with a variable support, *Nuclear Engineering and Design*, 84, 1–11.
- [18] Elishakoff I., 2005, Controversy Associated With the So-Called “Follower Forces”: Critical Overview, *Applied Mechanics Reviews*, 58, 117–142.
- [19] Elishakoff I., Impollonia N., 2001, Does a Partial Elastic Foundation Increase the Flutter Velocity of a Pipe Conveying Fluid?, *J. Appl. Mech.*, 68, 206–212.
- [20] Elishakoff I., Wang X. F., 1987, Generalization of Smith–Herrmann Problem With the Aid of Computerized Symbolic Algebra, *J. Sound Vib.*, 117 (3), 537–542.
- [21] Feldt W. T., Nemat-Naser S., Prasad S. N., and Herrmann G., 1969, Instability of a Mechanical System Induced by an Impinging Fluid Jet, *J. Appl. Mech.*, 36, 693–701.
- [22] Feodos’ev V. P., 1951, Vibrations and stability of a pipe when liquid flows through it, *Inzhenernyi Sbornik* 10, 169–170.
- [23] Gan H., 2006 Noise-Induced Chaos in Duffing Oscillator with Double Wells, *Nonlinear Dynamics*, 45, 305–317.
- [24] Gregory R. W., Païdoussis M. P., 1966, Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid. I. Theory, *Proceedings of the Royal Society (London) A*, 293, 512–527.
- [25] Gregory R. W., Païdoussis M. P., 1966, Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid. II. Experiments, *Proceedings of the Royal Society (London) A*, 293, 528–542.
- [26] Hauger W., and Wetter K., 1976, Influence of an Elastic Foundation on the Stability of a Tangentially Loaded Column, *J. Sound Vib.*, 47 (2), 296–299.
- [27] Hein H., Lepik Ü., Response of nonlinear oscillators with random frequency of excitation, revisited, *Journal of Sound and Vibration*, 301, 1040–1049.
- [28] Herrmann G., 1971, Determinism and Uncertainty in Stability, in *Instability of Continuous Systems*, H. Leipholz, ed., Springer, Berlin, 240–247.
- [29] Holmes P. J., 1978, Pipes supported at both ends cannot flutter, *Journal of Applied Mechanics*, 45, 619–622.
- [30] Housner G. W., 1952, Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid, *Journal of Applied Mechanics*, 19, 205–208.
- [31] Ibrahim R. A., 2010, Overview of mechanics of pipes conveying fluids — Part I: Fundamental studies, *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 132.
- [32] Impollonia N., Elishakoff I., 2000, Effect of Elastic Foundation On Divergence and Flutter of an Articulated Pipe Conveying Fluid, *J. Fluids Struct.*, 14, 559–573.
- [33] Inayat-Hussain J. I., 2007, Chaos via torus breakdown in the vibration response of a rigid rotor supported by active magnetic bearings, *Chaos, Solitons and Fractals*, 31, 912–927.
- [34] Iooss G., Joseph D. D., 1989, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Second Edition, Springer–Verlag New York Inc.
- [35] Jin J. D., 1997, Stability and chaotic motions of a restrained pipe conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 208, 427–439.
- [36] Jin J. D., Zou G. S., 2003, Bifurcations and chaotic motions in the autonomous system of a restrained pipe conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 260, 783–805.

- [37] Kar R. C., 1980, Stability of a nonuniform cantilever subjected to dissipative and nonconservative force, *Comput. Struct.*, 11, 175–180.
- [38] Katsikadelis J. T., Tsiatas G. C., 2007, Non-linear dynamic stability of damped Beck's column with variable cross-section, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42, 164–171.
- [39] Kirstein S., Mertesdorf M., Schönhoff M., 1998, The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers, *Journal Of Applied Physics*, 84 (4), 1782–1790.
- [40] Knoepfel H. E., 2000, *Magnetic Fields*, John Wiley & Sons, Inc.
- [41] Koiter W. T., 1980, Buckling of a Flexible Shaft Under Torque Loads Transmitted by Cardan Joints, *Ingenieurs*, 49, 369–373.
- [42] Kolkka R. W., 1984, On the non-linear Beck's problem with external damping, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 14, 497–505.
- [43] Kounadis A. N., 1994, On the Failure of Static Stability Analysis of Nonconservative Systems in Regions of Divergence Instability, *Int. J. Solids Struct.*, 31 (15), 2099–2120.
- [44] Kuiper G. L., Metrikine A. V., 2005, Dynamic stability of a submerged, free-hanging riser conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 280, 1051–1065.
- [45] Kuiper G. L., Metrikine A. V., 2008, Experimental investigation of dynamic stability of a cantilever pipe aspirating fluid, *Journal of Fluids and Structures*, 24, 541–558.
- [46] Kuiper G. L., Metrikine A. V., Battjes J. A., 2007, A new time-domain drag description and its influence on the dynamic behaviour of a cantilever pipe conveying fluid, *Journal of Fluid and Structures*, 23, 429–445.
- [47] Kurnik W., 1994, Magnetic Stabilization of a Rotor with Hydrodynamic Bearings, *Machine Dynamics Problems*, 7, 117–133.
- [48] Kurnik W., 1995, Active Magnetic Antiwhirl Control of a Rigid Rotor Supported on Hydrodynamic Bearings, *Machine Dynamics Problems*, 10, 21–36.
- [49] Kurnik W., 1997, *Bifurkacje dywergentne i oscylacyjne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [50] Kurnik W., Pękalak M., 1992, Stability and Bifurcation Analysis of the Non-Linear Damped Leipholz Column, *Journal of Sound and Vibration*, 152 (2), 285–294.
- [51] Kurnik W., Przybyłowicz P. M., 1995, Nonlinear Behavior of the Leipholz Column Actively Stabilized by Piezoelements, Proceedings of the International Symposium on Active Control of Sound and Vibration ACTIVE'95 (Eds. S. Sommerfeldt, H. Hamada), Newport Beach, CA, USA, 139–150.
- [52] Kurnik W., Przybyłowicz P., Szmidt T., 2009, An application of electromagnetic phenomena to damping of mechanical vibrations, rozdział w: Tylikowski A., *Influence of parameter modifications on structure vibrations*, Warsaw University of Technology, 53–87.
- [53] Lee H. P., 1996, Dynamic Stability of a Tapered Cantilever Beam On an Elastic Foundation Subjected to a Follower Force, *Int. J. Solids Struct.*, 33 (10), 1409–1424.

- [54] Lee H. P., 1996, Effects of damping on the dynamic stability of a rod with an intermediate spring support subjected to follower forces, *Computers and Structures*, 60 (1), 31–39.
- [55] Leipholz H. H. E., 1962, Die Knicklast des Einseitig Eingespannten Stabes Mit Gleichmaessig Verteilter, Tangentialer Laengsbelastung (in German), *Z. Angew. Math. Phys.*, 6, 581–589.
- [56] Lin Y.-H., Tsai Y.-K., 1997, Nonlinear vibrations of Timoshenko pipes conveying fluid *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, Is. 23, 2945–2956.
- [57] Lottati I., Kornecki A., 1986, The Effect of Elastic Foundation and Dissipative Forces on the Stability of Fluid Conveying Pipes, *J. Sound Vib.*, 109, 327–338.
- [58] Modarres-Sadeghi Y., Païdoussis M. P., 2009, Nonlinear dynamics of extensible fluid-conveying pipes supported at both ends, *Journal of Fluids and Structures*, 25, 535–543.
- [59] Modarres-Sadeghi Y., Païdoussis M. P., Semler C., 2008, Three-dimensional oscillations of a cantilever pipe conveying fluid *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43, 18–25.
- [60] Morgan M.R., Sinha S.C., 1983, Influence of a viscoelastic foundation on the stability of Beck’s column: An exact analysis, *Journal of Sound and Vibration*, 91 (1), 85–101.
- [61] Nikolai E. V., 1939, About Criterion of Stability of Elastic Systems, *Proceedings of the Odessa Institute of Civil and Communal Engineering*, No. 1 (in Russian).
- [62] Nicolaide A., 2001, *Magnetism an Magnetic Materials: Theory, Properties, Modeling*, Transilvania University Press.
- [63] Païdoussis M. P., 1998, *Fluid–Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, Vol. 1, Academic Press, London.
- [64] Païdoussis M. P., 2004, *Fluid–Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, Vol. 2, ElsevierAcademicPress, London.
- [65] Païdoussis M. P., 2008, The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics, *Journal of Sound and Vibration*, 310, 462–492.
- [66] Païdoussis M. P., Issid N. T., 1974, Dynamic stability of pipes conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 33 (3), 267–294.
- [67] Païdoussis M. P., Luu T. P., 1985, Dynamics of a pipe aspirating fluid, such as might be used in ocean mining, *ASME Journal of Energy Resources Technology*, 107, 250–255.
- [68] Païdoussis M. P., Moon F. C., 1988, Non-linear and chaotic fluidelastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid, *Journal of Fluids and Structures*, 2, 567–591.
- [69] Païdoussis M. P., Li G. X., Moon F. C., 1989, Chaotic oscillations of the autonomous system of a constrained pipe conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 135, 1–19.
- [70] Païdoussis M. P., Semler C., Wadham-Gagnon M., 2005, A reappraisal of why cantilever pipes do not flutter at infinitesimal flow, *Journal of Fluid and Structures*, 20, 147–156.
- [71] Pflüger, A., 1950, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer-Verlag, Berlin, p. 217 (in German).

- [72] Plaut R. H., Infante E. F., 1970, The effect of external damping on the stability of Beck's column, *Int. J. Solids Struct.*, 6, 491–496.
- [73] Plaut R., 1976, Analysis of Nonconservative Elastic Systems, *J. Struct. Mech.*, 4, 395–416.
- [74] Przybyłowicz P., Szmidt T., 2008, Magnetyczne tłumienie drgań oscylatora harmonicznego, *Modelowanie Inżynierskie*, 35, 101–106.
- [75] Przybyłowicz P., Szmidt T., 2009, Electromagnetic damping of a mechanical harmonic oscillator with the effect of magnetic hysteresis, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 47 (2), 259–273.
- [76] Przybyłowicz P., Szmidt T., 2010 Nonlinear response of a harmonically driven oscillator in magnetic field, *Archives of Control Sciences*, Vol. 20 (LVI), No. 1, 19–30.
- [77] Przybyłowicz P., Szmidt T., referat p.t. „Krytyczna prędkość przepływu w rurze z dołączonymi aktuatorami magnetycznymi”, XVII Warsztaty Naukowe PTSK, 7–9 września 2010.
- [78] Qian Q., Wang L., Ni Q., 2008, Nonlinear response of a fluid-conveying pipe embedded in nonlinear elastic foundations, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 21, No. 2., 170–176.
- [79] Qiu Z. L., Nemat-Nasser S., 1985, Instability of an Articulated Cantilever Induced by an Impinging Airjet, *Int. J. Solids Struct.*, 21 (2), 145–154.
- [80] Rangarajan G., Habib S., Ryne R., 1998, Lyapunov Exponents without Rescaling and Reorthogonalization, *Physical Review Letters*, 80, 3747–3750.
- [81] Reut V. I., 1939, About the Theory of Elastic Stability, *Proceedings of the Odessa Institute of Civil and Communal Engineering*, No. 1.
- [82] Semler C., Li G. X., Païdoussis M. P., 1994, The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 169, 577–599.
- [83] Smith T. E., and Herrmann G., 1972, Stability of a Beam on an Elastic Foundation Subjected to a Follower Force, *J. Appl. Mech.*, 39, 628–629.
- [84] Sugiyama Y., Tanaka Y., Kishi T., Kawagoe, H., 1985, Effect of a spring support on the stability of pipes conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 100, 257–270.
- [85] Sugiyama Y., Katayama T., Kirayama K., and Ryu B. J., 2000, Experimental Verification of Dynamic Stability of Vertical Cantilevered Columns Subjected to a Subtangential Force, *J. Sound Vib.*, 236 (2), 193–207.
- [86] Tang D. M., Dowel E. H., 1988, Chaotic oscillations of a cantilevered pipe conveying fluid, *Journal of Fluids and Structures*, 1988, 2, 263–283.
- [87] Thurman A.L., Mote Jr. C.D., 1969, Nonlinear oscillation of a cylinder containing flowing fluid, *ASME Journal of Engineering for Industry*, 91, 1147–1155.
- [88] Tsiatas G. C., Katsikadelis J. T., 2009, Post-critical behavior of damped beam columns with variable cross section subjected to distributed follower forces *Nonlinear Dynamics*, 56, 429–441.
- [89] Voloshin I. I., Gromov V. G., 1977, On a Stability Criterion for a Bar on an Elastic Base Acted on by a Follower Force, *Mech. Solids*, 12 (4), 148–150.

- [90] Walker J. A., 1972, Mathematical Modeling of Discrete Nonconservative Dynamic Systems, *Int. J. Solids Struct.*, 18, 249–259.
- [91] Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A., 1985, Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica D*, 16, 285–317.
- [92] Wood W. G., Saw S. S., Saunders P. M., 1969, The Kinetic Stability of a Tangentially Loaded Strut, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 313, 239–248.
- [93] Yagn I. Yu., Parshin L. K., 1966, Experimental Study of Stability of a Column Compressed by a Follower Force, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 167 (1), 49–50 (in Russian).
- [94] Ziegler H., 1952, Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, *Ingenieur-Archiv*, 20, 49–56.
- [95] Ziegler H., 1971, Trace Effects in Stability, in *Instability of Continuous Systems*, H. Leipholz, ed., Springer, Berlin, 96–111.

# A. Nieliniowe bezwymiarowe zagadnienie Leipholza

## A.1. Dyskretyzacja Galerkinia – funkcje bazowe oraz współczynniki układu

$$W_j(\xi) = (\sinh k_j + \sin k_j) (\cosh k_j \xi - \cos k_j \xi) - (\cosh k_j + \cos k_j) (\sinh k_j \xi - \sin k_j \xi)$$

$$\cosh k \cos k = -1$$

$$k_1 = 1,87510$$

$$k_2 = 4,69409$$

$$W_j(\xi) := W_j(\xi) / \sqrt{\int_0^1 W_j^2}, \quad \xi \in [0, 1]$$

$$a_{1j} = - \int_0^1 W_1'''' W_j$$

$$a_{2j} = - \int_0^1 W_2'''' W_j$$

$$a_{3j} = \int_0^1 (W_1'^2 W_1'''' + 3W_1''^3 + 8W_1' W_1'' W_1''') W_j$$

$$a_{4j} = \int_0^1 (2W_1' W_1'''' W_2' + W_1'^2 W_2'''' + 9W_1''^2 W_2'' + 8W_1' W_1'' W_2'''' + 8W_1' W_1'''' W_2'' + 8W_1'' W_1'''' W_2') W_j$$

$$a_{5j} = \int_0^1 (W_1'''' W_2'^2 + 2W_1' W_2' W_2'''' + 9W_1'' W_2''^2 + 8W_1' W_2'' W_2'''' + 8W_1'' W_2' W_2'''' + 8W_1'''' W_2' W_2'') W_j$$

$$a_{6j} = \int_0^1 (W_2'^2 W_2'''' + 3W_2''^3 + 8W_2' W_2'' W_2''') W_j$$

$$b_{1j} = \int_0^1 W_1''(\xi - 1) W_j$$

$$b_{2j} = \int_0^1 W_2''(\xi - 1) W_j$$

$$b_{3j} = 0,5 \int_0^1 W_1'' \left( \int_\xi^1 W_1'^2 \right) W_j$$

$$b_{4j} = \int_0^1 \left( W_1'' \int_\xi^1 W_1' W_2' + 0,5 W_2'' \int_\xi^1 W_1'^2 \right) W_j$$

$$b_{5j} = \int_0^1 \left( 0,5 W_1'' \int_\xi^1 W_2'^2 + W_2'' \int_\xi^1 W_1' W_2' \right) W_j$$

$$b_{6j} = 0,5 \int_0^1 W_2'' \left( \int_\xi^1 W_2'^2 \right) W_j$$

$a_{11} = -k_1^4$	$a_{12} = 0$	$b_{11} = -0,42912$	$b_{12} = -1,18178$
$a_{21} = 0$	$a_{22} = -k_2^4$	$b_{21} = 4,33714$	$b_{22} = 6,64714$
$a_{31} = 0$	$a_{32} = -168,182$	$b_{31} = 1,42070$	$b_{32} = 3,71821$
$a_{41} = 168,182$	$a_{42} = 1855,83$	$b_{41} = -22,4374$	$b_{42} = -39,3342$
$a_{51} = 8146,33$	$a_{52} = -5907,71$	$b_{51} = 99,2435$	$b_{52} = 146,935$
$a_{61} = 1840,05$	$a_{62} = 0$	$b_{61} = -137,067$	$b_{62} = -180,441$

Uwaga: W obliczeniach numerycznych użyte zostały współczynniki wyznaczone z dokładnością do 12 cyfr.

## A.2. Współczynniki minorów macierzy Hurwitza dla układu zlinearyzowanego

$$A(\beta, \gamma) = -3222,01\beta - 6,21802\gamma$$

$$B(\beta, \gamma) = 2,98836 \cdot 10^6 \beta^3 + 2,59890 \cdot 10^5 \gamma \beta^2 + 1493,64 \gamma^2 \beta + 2,00000 \gamma^3 + \\ + 2,35881 \cdot 10^5 \beta + 497,881 \gamma$$

$$a(\beta, \gamma) = -9,70002 \cdot 10^5 \beta^2 + 14723,0 \beta \gamma + 29,5713 \gamma^2$$

$$b(\beta, \gamma) = +3,77049 \cdot 10^8 \beta^4 + 1,42092 \cdot 10^7 \beta^3 \gamma - 1,42754 \cdot 10^6 \beta^2 \gamma^2 - 9035,16 \beta \gamma^3 + \\ - 12,4360 \gamma^4 - 4,01926 \cdot 10^7 \beta^2 - 3,33399 \cdot 10^6 \beta \gamma - 6696,36 \gamma^2$$

$$c(\beta, \gamma) = +3,58733 \cdot 10^{10} \beta^4 + 4,60765 \cdot 10^9 \beta^3 \gamma + 1,47325 \cdot 10^8 \beta^2 \gamma^2 + 7,67666 \cdot 10^5 \beta \gamma^3 + \\ + 995,762 \gamma^4 + 1,34375 \cdot 10^9 \beta^2 + 1,11464 \cdot 10^8 \beta \gamma + 2,23877 \cdot 10^5 \gamma^2$$