

MARCIN A. WIKŁO

**Projektowanie ustrojów  
adaptacyjnych poddawanych  
obciążeniom udarowym**



WARSZAWA 2007

P R A C A D O K T O R S K A

**Autor :**

Mgr inż. MARCIN A. WIKŁO

**Promotor :**

Prof. dr hab. JAN HOLNICKI-SZULC

**Recenzenci :**

Prof. dr hab. ....

Doc. dr hab. ....

# Spis treści

---

<b>Oznaczenia</b>	<b>5</b>
<b>1. Wstęp</b>	<b>7</b>
1.1. Motywacja . . . . .	7
1.2. Przegląd metod . . . . .	8
1.3. Cel pracy . . . . .	10
1.4. Zakres i zawartość pracy . . . . .	12
<b>2. Modelowanie systemów Aktywnej Absorpcji Impaktu (AIA)</b>	<b>15</b>
2.1. Drgania swobodne oscylatora . . . . .	15
2.1.1. Odpowiedź układu na dowolną siłę wymuszającą . . . . .	16
2.2. Numeryczne całkowanie równań ruchu . . . . .	18
2.3. Wirtualne metody modelowania . . . . .	19
2.3.1. Impulsowa Metoda Dystorsji Wirtualnych (IMDW) . . . . .	20
2.3.2. Impulsowa Metoda Sił Wirtualnych (IMFW) . . . . .	21
2.4. Przemodelowywanie sztywności elementów konstrukcji (zmienna $E$ ) . . . . .	23
2.4.1. Wykorzystanie Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych . . . . .	23
2.4.2. Wykorzystanie Impulsowej Metody Sił Wirtualnych . . . . .	28
2.5. Przemodelowywanie redystrybucji masy (zmienna $M$ ) w konstrukcji . . . . .	32
2.6. Przemodelowywanie masy uderzającej . . . . .	35
2.6.1. Analiza wrażliwości dla zmiany parametru modyfikacji masy uderzającej . . . . .	38
2.7. Przemodelowywanie redystrybucji pola przekroju w ustrojach (sprzężona zmienna $A$ ) . . . . .	40
2.7.1. Analiza wrażliwości na zmianę pola przekroju elementów . . . . .	43
2.8. Przemodelowywanie redystrybucji nieliniowości materiałowej (zmienna $\sigma^*$ ) . . . . .	45
2.8.1. Analiza wrażliwości na zmianę progu plastycznego . . . . .	52
2.9. Sprzężone zadanie redystrybucji sztywności, masy i nieliniowości materiałowej (zmiennne $K$ , $M$ i $\sigma^*$ ) . . . . .	53
2.9.1. Modelowanie przekroju poprzecznego $A$ w zadaniu sprzężonym . . . . .	56
2.9.2. Modelowanie sztywności i masy w zadaniu sprzężonym . . . . .	61
2.9.3. Analiza wrażliwości w zadaniu sprzężonym . . . . .	65
<b>3. Optymalne projektowanie konstrukcji obciążonych dynamicznie</b>	<b>69</b>
3.1. Optymalna redystrybucja materiału. . . . .	69
3.2. Optymalna absorbcja udaru . . . . .	76
3.3. Optymalne projektowanie konstrukcji <i>AIA</i> . . . . .	79
<b>4. Identyfikacja obciążenia</b>	<b>89</b>
4.1. Identyfikacja historii obciążenia na podstawie lokalnych pomiarów . . . . .	90
4.1.1. Identyfikacja obciążenia dla konstrukcji sprężystej . . . . .	90
4.1.2. Przykłady numeryczne . . . . .	91

4.1.3. Identyfikacja obciążenia dla konstrukcji sprężysto - plastycznej . . . . .	101
4.2. Konkluzje i potencjalne aplikacje . . . . .	102
<b>5. Podsumowanie</b>	<b>103</b>
5.1. Wnioski ogólne . . . . .	103
5.2. Osiągnięte cele szczegółowe . . . . .	103
5.3. Planowane kroki na przyszłość . . . . .	104
<b>A. Dodatek</b>	<b>105</b>
<b>B. Dodatek</b>	<b>109</b>

# Oznaczenia

---

## Akronimy :

- MDW – Metoda Dystorsji Wirtualnych
- MES – Metoda Elementów Skończonych
- IMDW – Impulsowa Metoda Dystorsji Wirtualnych
- IMFW – Impulsowa Metoda Sił Wirtualnych
- MRS – Metoda Różnic Skończonych

## Oznaczenia :

- $^0$  – w przypadku odkształceń, np.:  $\varepsilon^0$ , oznacza dystorsję wirtualną (wstępną deformację);
- $\hat{\phantom{x}}$  – w przypadku parametrów konstrukcyjnych, np.:  $\hat{A}$ ,  $\hat{M}$ ,  $\hat{E}$ , oznacza ich zmodyfikowaną wartość (przy czym modyfikacje tych parametrów,  $\hat{A}/A$ ,  $\hat{E}/E$ ,  $\hat{M}/M$ , można modelować wirtualnie za pomocą dystorsji);
- $L$  – oznacza liniową część danej wielkości (przemieszczeń odkształceń lub sił wewnętrznych) – tj. pochodzącą od obciążenia zewnętrznego, dla konstrukcji sprężystej nie zmodyfikowanej;
- $R$  – oznacza rezydualną część, czyli będącą wynikiem wstępnego wirtualnego sprężenia dystorsjami modelującymi modyfikacje ustroju;
- $M$  – oznacza wielkości otrzymane z pomiarów doświadczalnych, dla przykładów numerycznych oznacza wielkość referencyjną otrzymaną z testów numerycznych;
- $^u$  – oznacza maksymalne dopuszczalne wielkości np.:  $\sigma^u$  oznacza maksymalne dopuszczalne naprężenie.

## Indeksy :

W pracy przyjęto indeksowanie elementów konstrukcji literami greckimi, natomiast stopnie swobody oraz węzły konstrukcji indeksowane są literami rzymskimi. Przyjęto również konwencję sumacyjną Einstein'a, z wyróżnieniem przez podkreślenie indeksów wyłączonych z sumowania;

- $t, \tau$  – indeksuje chwile w dyskretnej przestrzeni czasu;
- $\mathfrak{K}$  – zbiór wszystkich lokalizacji dystorsyjnych odpowiedzialnych za modyfikacje sztywności;
- $\mathfrak{B}$  – zbiór wszystkich lokalizacji dystorsyjnych odpowiedzialnych za modelowanie plastyczności;
- $\mathfrak{M}$  – zbiór wszystkich lokalizacji dystorsyjnych odpowiedzialnych za modyfikacje masy;
- $\mathfrak{A}$  – zbiór wszystkich lokalizacji dystorsyjnych odpowiedzialnych za modyfikacje pola przekroju.

## Pozostałe symbole :

- $\delta_{ij}$  – symbol Kroneckera; ( $\delta_{ij} = 1$  dla  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  dla  $i \neq j$ )
- $\mathbf{K}$  – globalna macierz sztywności konstrukcji;
- $\mathbf{M}$  – globalna macierz bezwładności konstrukcji (macierz mas);
- $\mathbf{C}$  – globalna macierz tłumienia konstrukcji;
- $\mathbf{G}$  – macierz przemieszczenie odkształcenie;

- $\varepsilon^0 = [\varepsilon_\alpha^0]$  – wektor dystorsji modelującej sztywność (w konstrukcji dyskretnej);  
 $\varepsilon_\alpha^0$  – dystorsja wirtualna modelująca sztywność (w konstrukcji dyskretnej);  
 $\beta^0 = [\beta_\alpha^0]$  – wektor dystorsji modelującej plastyczne zachowanie elementu konstrukcji (w konstrukcji dyskretnej);  
 $\beta_\alpha^0$  – dystorsja wirtualna modelująca plastyczne zachowanie elementu (w konstrukcji dyskretnej);  
 $p^0 = [p_i^0]$  – wektor sił wirtualnych modelujący:
  - intensywność obciążenia  $p^0$  w stopniach swobody konstrukcji dla identyfikacji obciążenia;
  - sztywność  $p^{0K}$  i/lub masę  $p^{0M}$  w stopniach swobody konstrukcji skojarzonych z modelowanym elementem;
- $\sigma_\alpha^*$  – granica plastyczności;  
 $\varepsilon_\alpha^*$  – odkształcenie sprężyste, odpowiadające granicy plastyczności  $\sigma_\alpha^* = E_\alpha \varepsilon_\alpha^*$ ;  
 $\gamma_\alpha$  – parametr wzmocnienia;  
 $\mathbf{D}^\varepsilon = [D_{\alpha\xi}^\varepsilon]$  – odkształceniowa macierz wpływu generowana impulsem dystorsyjnym;  
 $\mathbf{D}^P = [D_{\alpha j}^P]$  – odkształceniowa macierz wpływu generowana impulsem siłowym;  
 $\mathbf{B}^\varepsilon = [B_{i\xi}^\varepsilon]$  – przemieszczeniowa macierz wpływu generowana impulsem dystorsyjnym;  
 $\mathbf{B}^P = [B_{ij}^P]$  – przemieszczeniowa macierz wpływu generowana impulsem siłowym;  
 $\mu_\alpha^E = \frac{\hat{E}_\alpha}{E_\alpha}$  – współczynnik zmiany sztywności elementu;  
 $\mu_\alpha^R = \frac{\hat{\rho}_\alpha}{\rho_\alpha}$  – współczynnik zmiany masy elementu;  
 $\mu_\alpha^A = \frac{\hat{A}_\alpha}{A_\alpha}$  – współczynnik zmiany pola przekroju elementu;  
 $E$  – moduł Younga;  
 $A$  – pole przekroju poprzecznego pręta;  
 $L$  – długość elementu prętowego.

# Rozdział 1

## Wstęp

---

Obciążenie udarowe i jego neutralizacja w układach mechanicznych jest niezwykle ważnym problemem inżynierskim i naukowym.

Pojęcie dysypacji obejmuje zarówno tłumienie drgań konstrukcji jak również rozpraszanie energii dostarczanej w trakcie uderzenia lub wybuchu. Nadmierne drgania konstrukcji wpływają niekorzystnie na jej trwałość i obniżają znacznie jej walory użytkowe, jednak w większości przypadków nie stanowią zagrożenia dla niej samej lub jej otoczenia.

Zupełnie inaczej jest w przypadku wystąpienia nagłych i silnych obciążeń dynamicznych, takich jak: zderzenia pojazdów zarówno samochodowych jak i szynowych, obciążenia podczas lądowania samolotów (śmigłowców) itp., mogących doprowadzić do poważnych konsekwencji dla samej struktury, jak również dla otoczenia (pasażerowie, przechodnie itp.). Dlatego coraz więcej badań poświęca się podniesieniu odporności udarowej konstrukcji (ang. *crashworthiness*).

### 1.1. Motywacja

Motywacją podjęcia badań nad aktywną adaptacją do obciążenia udarowego (impaktu) są wymagania wysokiej odporności udarowych, np. konstrukcji narażonych na ryzyko wybuchu, konstrukcji cienkościennych z wysoką odpornością na uderzenia, barier, zderzaków, pojazdów zarówno samochodowych jak i szynowych z wysokimi zdolnościami, pozwalającymi pasażerom przetrwać bezpiecznie kolizję. Typowym rozwiązaniem są konstrukcje pasywne, pochłaniające energię impaktu. Systemy te często bazują na aluminiowych bądź stalowych *plastrach miodu* złożonych w pakiety charakteryzujące się wysoką odpornością udarową. Struktury te pomimo wysokiej zdolności absorpcji energii są elementami zbędnymi, nie pełnią roli konstrukcyjnych i nie przenoszą obciążeń w trakcie normalnej pracy. Poza tym pasywne absorbery energii zaprojektowane są tylko dla jednego, najbardziej prawdopodobnego kierunku uderzenia. Na przykład struktury typu *plaster miodu* są bardzo efektywne podczas symetrycznego zderzenia pojazdów, lecz bezużyteczne w przypadku innego scenariusza uderzenia. Dlatego często opracowuje się całkowicie niezależne systemy dla różnych scenariuszy uderzenia.

Autor w tejże pracy proponuje, w odróżnieniu od pasywnych systemów pochłaniających energię, konstrukcje aktywnie sterowane (wyposażone w sensory identyfikujące

uderzenie oraz kontrolowane semi-aktywnie bądź aktywnie dysypatory, tzn. *bezpieczniki strukturalne*) z wysokimi zdolnościami adaptacji do ekstremalnego przeciążenia.

Ideą autora jest sformułowanie problemu optymalnej Aktywnej Absorpcji Impaktu (ang. *Adaptive Impact Absorption AIA*) oraz stworzenie narzędzia numerycznego bazującego na Impulsowej Metodzie Dystorsji Wirtualnych, umożliwiającego analizę wrażliwości pozwalającą na optymalną redystrybucję masy, sztywności oraz granic plastyczności w aktywnie sterowanych *elementach adaptacyjnych*.

## 1.2. Przegląd metod

Od momentu przedstawienia idei optymalizacji topologii konstrukcji jako problem dystrybucji materiału w 1988 roku [32] tematyka ta jest wciąż rozwijana dla coraz to bardziej złożonych konstrukcji, również z uwzględnieniem zachowania nieliniowego, na projektowaniu odporności udarowej dla pojazdów samochodowych skończywszy. Sformułowanie zadania dla wielu stanów obciążenia zostało zaprezentowane w [8]. Minimalizacja maksymalnej podatności dla wielu stanów obciążenia może zostać osiągnięta przy użyciu metody  $\beta$  [2, 60] lub metody funkcji KS [57]. W analizie odporności udarowej pojazdów można oczekiwać długiej listy specyficznych zagadnień: materiały nieliniowe (plastyczność, wzmocnienie itp.), nieliniowa geometria (duże przemieszczenia, odkształcenia, wyboczenia), dynamika, kontakt. W dziedzinie optymalnego projektowania odporności udarowej konstrukcji pierwszymi pracami były [51, 6] oraz prace [12, 33, 49, 39, 18, 40, 58] dodatkowo poświęcone niektórym specyficznym zagadnieniom tej dziedziny. Duży postęp w zrozumieniu sformułowania optymalizacji problemu dla zagadnienia odporności udarowej konstrukcji ramowych z pominięciem problemu kontaktu wniosły prace [48, 47, 46].

Projektowanie konstrukcji złożonych i skomplikowanych, takich jak konstrukcje samochodów osobowych, ze względu na bezpieczeństwo jest procesem iteracyjnym. Najpierw dokonywane są zmiany projektowe, a następnie struktura jest ponownie poddana symulacji. Pojedyncza analiza całej konstrukcji może trwać wiele godzin (24-30 godzin z użyciem superkomputerów, kilka dni przy użyciu stacji roboczych wg. danych na rok 2002 [55]). Ocenienie wpływu każdej zmiany wymaga ponownej analizy systemu. Przy ręcznej zmianie parametrów oraz przy zastosowaniu dokładnego modelu proces symulacji może być nużący, nieefektywny, kosztowny numerycznie i czasochłonny. W związku z tym we wczesnej fazie projektowania i przeprojektowywania wskazane jest użycie modeli prostszych, znacznie mniej kosztownych numerycznie i pozwalających proces przemodelowywania zautomatyzować. Dla systemów liniowych technika modeli uproszczonych była używana i rozwijana od wielu lat, lecz dla systemów nieliniowych, zwłaszcza poddanych obciążeniu dynamicznemu powstało do tej pory niewiele prac [14]. Modele z masą skupioną dla analizy i projektowania konstrukcji używane były w przemyśle samochodowym dla podniesienia bezpieczeństwa podczas zderzeń już od wczesnych lat 70 [30, 31]. W tych modelach elementy niekonstrukcyjne modelowane są za pomocą masy skupionej, natomiast deformowane elementy strukturalne jako nieliniowe elementy sprężyste, dla których charakterystyka siła-przemieszczenie pokrywa się z charakterystyką wygenerowaną dla zgniatanych tub. Modele z masą skupioną stosowane były w dynamicznej symulacji pasażer-samochód [61]. W [54] przedstawiono 3 metody symulacji struktur samochodowych poddawanych uderzeniu: metodę hybrydową, analityczną, oraz metodę mieszaną wraz z przykładami. W metodach tych elementy strukturalne zostały zamodelowane z uży-



ciem nieliniowych elementów sprężynowych, których charakterystyka siła-przemieszczenie została wygenerowana w trakcie testów w laboratorium. W pracy [8] opisana została szczegółowo szybka metoda symulacji i projektowania ramy dla konstrukcji samochodowych pod nazwą v-Crash. Nieodzownym etapem zastosowania modeli zgrubnych jest identyfikacja modelu. Na ten temat powstało dość dużo prac dla różnych konstrukcji (reaktory atomowe, w inżynierii lądowej w budynkach narażonych na trzęsienia ziemi itp.). Na temat analizy odporności udarowej pojazdów samochodowych wymienić należy również następujące pozycje [21, 22].

Pierwsze wzmianki o aktywnej adaptacji konstrukcji pojawiły się we wczesnych latach siedemdziesiątych. Znalazła ona wtedy zastosowania w budownictwie do tłumienia drgań (wysokie konstrukcje typu kominy, maszty). Następne wzmianki pojawiły się wraz z rozwojem lotów kosmicznych i potrzebą aktywnego kontrolowania wiotkich struktur umieszczanych na orbicie Ziemi. Ze względu na narzucone silne ograniczenia dotyczące minimalizacji masy pojawił się problem związany z drganiami konstrukcji, które zmniejszono wprowadzając dodatkowe aktywne elementy [11, 7]. Aktywne sterowanie konstrukcji zazwyczaj jest realizowane przez wprowadzenie do konstrukcji dodatkowych elementów generujących siły zewnętrzne, realizowanych za pomocą różnego rodzaju aktywatorów, aktywnych cięgien, podpór, sterowanych tłumików itp. zmieniających swoją charakterystykę zależnie od zmieniających się warunków pracy sterowanej struktury. W latach dziewięćdziesiątych obserwujemy stały rozwój idei aktywnego sterowania w różnych dziedzinach, już nie tylko dla konstrukcji kosmicznych i wysokich budynków, ale też dla sterowania konstrukcji maszyn i budowli (wysokie budynki na terenach sejsmicznych, mosty o dużej rozpiętości); świadczy o tym duża liczba konferencji, oraz prac poświęconych tej tematyce. Często zaprezentowane rozwiązania przedstawione są teoretycznie i jak na razie nie mają szansy na praktyczne wykorzystanie, ze względu na ograniczenia technologiczne elementów aktywnych. Głównymi barierami są na przykład: czas reakcji dla siłowników hydraulicznych, ograniczenia w generowanej sile dla piezo-elementów.

Można wyróżnić jednak pewną podklasę problemów zagadnienia aktywnego sterowania, w której oddziaływanie na konstrukcje odbywa się nie przez wprowadzenie dodatkowych sił zewnętrznych, a przez zmianę charakterystyki elementu z zastosowaniem różnego rodzaju aktywatorów. Konstrukcje realizujące taką strategię działania możemy nazwać konstrukcjami aktywnymi, pochłaniającymi energię uderzenia w kontrolowany sposób. Aktywatory mogą być sterowane w czasie rzeczywistym lub reagować we wcześniej zaprogramowany sposób na zaistniałe zdarzenie. Pełnią one rolę bezpieczników konstrukcyjnych ustępujących w kontrolowany sposób pod wpływem obciążenia, realizując odpowiednią strategię dyssypacji uderzenia. Bardzo ważnym elementem takiego działania jest odpowiednie rozmieszczenie bezpieczników w konstrukcji i dobór odpowiedniej strategii sterowania.

Autor w tej pracy będzie wykorzystywał Impulsową Metodą Dystorsji Wirtualnych. Metoda ta bazuje na Metodzie Dystorsji Wirtualnych rozwijanej intensywnie od połowy lat osiemdziesiątych w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki. Termin dystorsja został zaadoptowany z [42]. Natomiast termin Metoda Dystorsji Wirtualnych przedstawiono w [17], w której również zaproponowano terminy *dystorsja wirtualna* oraz *macierz wpływu*. Metoda ta dla zagadnień statycznych, wraz z jej historią, rozwojem i zastosowaniem została przedstawiona w [36, 16]. MDW jest również często identyfikowana jako szybka i uniwersalna metoda re-analizy konstrukcji [37].

Rozwój *Metody Dystorsji Wirtualnych* w problemach dynamicznych z zastosowaniem

dla konstrukcji wielokrotnie składających się (ang. *multifolding*) przedstawiono w [19], natomiast dla problemów optymalnego projektowania w [62, 63]. Zastosowanie MDW dla problemów identyfikacji sił przedstawiono w [26, 27, 28]

Jednym z etapów adaptacji konstrukcji na obciążenie udarowe, jest identyfikacja obciążenia. Ma ona znaczący wpływ na sposób pochłonięcia energii w czasie uderzenia. Dla konstrukcji aktywnych jest to operacja realizowana w czasie rzeczywistym. Pozwala ona oszacować działającą w czasie zdarzenia siłę i kierunek jej działania (oszacowanie energii działającej w czasie zdarzenia). Proces identyfikacji obciążenia udarowego można podzielić na dwa typy według stosowanego algorytmu.

Pierwszy typ algorytmu wymaga modelowania konstrukcji, model jest następnie poddany znanemu dynamicznemu obciążeniu. Mierzone za pomocą sensorów odpowiedzi struktury są następnie porównywane z odpowiedzią modelu numerycznego. Jeżeli odpowiedź nie jest identyczna, algorytm uaktualnia model, aby dopasować wyniki. Proces jest iterowany do momentu dopasowania odpowiedzi (tzw. zadanie odwrotne). Podstawową wadą tego algorytmu jest konieczność modelowania systemu, co nie jest prostym zadaniem dla konstrukcji złożonych. Drugi typ algorytmu wykorzystuje sieci neuronowe, umożliwiające w relatywnie prosty sposób modelowanie złożonych zależności pomiędzy wejściem a wyjściem. Pomimo znakomitych możliwości lokalizacji siły wymagają one jednak znacznej liczby danych wstępnych do wytrenowania sieci.

Problem identyfikacji obciążenia udarowego w czasie rzeczywistym dla konstrukcji kompozytowych z użyciem cienkiej warstwy z piezo-sensorami *smart layer*, został przedstawiony między innymi w [4], dla konstrukcji z wzmocnieniami, z zastosowaniem algorytmu smoother- filter, [20] jest jedną z nielicznych prac, w której analiza przeprowadzona jest w dziedzinie czasu, a nie częstotliwości. Dla detekcji obciążenia po zaistnieniu zdarzenia, gdzie odpowiedź konstrukcji została w trakcie uderzenia zarejestrowana w tzw. czarnej skrzynce (ang. *black box*) [10, 9], w [3] przeanalizowano dodatkowo wpływ wibracji oraz temperatury na detekcję obciążenia w [5] zastosowano algorytmy genetyczne z możliwością zastosowania metody do identyfikacji obciążenia w czasie rzeczywistym. Powyższe prace umożliwiają identyfikację miejsca działania jednej siły i jej wartości.

Inny typ identyfikacji obciążenia, gdzie zamiast piezo-elementów zastosowano siatkę z włókien optycznych umożliwiającą (w dużych konstrukcjach typu samoloty, promy kosmiczne) identyfikację miejsca i wielkości zniszczenia przedstawiono w [59]. Identyfikacja historii zdarzenia na podstawie czujników przyspieszenia w pojazdach samochodowych, została wbudowana w komercyjne programy WinSmash i V-Crash, w których identyfikacja historii zdarzenia realizowana jest z uwzględnieniem czujników dostępnych w samochodach (czujnik prędkości pojazdu, położenia pedału gazu itp.).

### 1.3. Cel pracy

Metoda Dystorsji Wirtualnych (ang. *VDM "Virtual Distortion Method"*) jest skutecznym narzędziem numerycznym pozwalającym na dokonywanie szybkich modyfikacji modelu numerycznego konstrukcji, takich jak:

- wprowadzanie nieliniowości fizycznej (odcinkami liniowej) w statyce [36, 16],
- wprowadzanie redystrybucji materiału (do całkowitego usunięcia elementu włącznie w statyce) [36, 15, 16],
- wprowadzanie modyfikacji sztywności elementów w dynamice [64, 35],

- dokonywanie analizy wrażliwości odpowiedzi ustroju na powyższe modyfikacje, przy zdefiniowanym obciążeniu zewnętrznym.

Analiza wrażliwości pozwala na uruchomienie efektywnego numerycznie procesu przeprojektowywania ustroju, bazującego na jednej z gradientowych metod optymalizacji (gradienty uzyskiwane analitycznie), bez konieczności kosztownej modyfikacji globalnej macierzy sztywności ustroju po każdej modyfikacji.

Aktualny stan rozwoju metody VDM obejmuje wymienione wyżej zagadnienia statyki oraz dynamiki, lecz te ostatnie ograniczone jedynie do modyfikacji sztywności. Zatem, następujące problemy szybkich reanaliz metodą VDM w zagadnieniach dynamicznych stanowią ciągle wyzwanie badawcze:

- modelowanie redystrybucji masy,
- modelowanie nieliniowości fizycznych,
- modelowanie modyfikacji sprzężonych (jednoczesne modyfikacje masy, sztywności, oraz nieliniowości fizycznych),
- analiza wrażliwości odpowiedzi dynamicznych ze względu na powyższe modyfikacje.
- Głównym celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest rozwiązanie wymienionych powyżej problemów badawczych, opracowanie związanych z nimi algorytmów oraz skutecznych narzędzi numerycznych w postaci oprogramowania uogólnionej metody IVDM. Wymagać to będzie wprowadzenia obok dystorsji wirtualnych modelujących różne modyfikacje elementów konstrukcji, także sił wirtualnych, modelujących modyfikacje rozkładu masy. W zagadnieniach sprzężonych stosowana będzie superpozycja pól dystorsyjnych, modelujących poszczególne modyfikacje.
- Drugim wyzwaniem badawczym rozprawy jest zademonstrowanie skuteczności nowo stworzonych narzędzi numerycznych do rozwiązywania następujących, niestandardowych problemów inżynierskich:
  - przeprojektowywanie ustrojów adaptacyjnych AIA w celu zwiększenia ich możliwości absorpcji udarów pochodzących od obciążeń losowych,
  - identyfikacja “off-line” scenariusza obciążeń dynamicznych ustroju uszkodzonego wskutek kolizji, na podstawie pomiarów zarejestrowanych w systemie monitorującym “on-line” odpowiedzi lokalne.

Zagadnienie przeprojektowywania ustrojów AIA poprzez odpowiednią redystrybucję materiału, z uwzględnieniem możliwości sterowania progami plastycznymi (w zależności od zidentyfikowanego “on-line” udaru), w celu zwiększenia skuteczności absorpcji udarów losowo generowanych jest zagadnieniem nowym, nie analizowanym dotychczas (wedle wiedzy autora) w literaturze naukowej. Uogólniona metoda IVDM pozwala opisać i rozwiązać ten problem na drodze gradientowych metod optymalizacji. Konieczność przybliżenia związków fizycznych charakterystykami odcinkowo-liniowymi powoduje, że błąd symulowanej odpowiedzi dynamicznej narasta z czasem, jednak stwarza też szansę na stworzenie skutecznego narzędzia, pozwalającego na określenie redystrybucji materiału w początkowej fazie zniszczenia, gdy deformacje ustroju są jeszcze niewielkie (arbitralnie zadane). Po dokonaniu redystrybucji materiału, precyzyjna numeryczna symulacja odpowiedzi dynamicznej ustroju o dużych deformacjach może być dokonana przy użyciu jednego z dostępnych na rynku kodów analizy odporności udarowej.

Zagadnienie identyfikacji “off-line” obciążeń dynamicznych (problem czarnej skrzyni-

ki) jest problemem tzw. inżynierii śledczej (ang. *forensic engineering*) szybko rozwijającej się na świecie w ostatnich latach, głównie ze względu na rosnące zapotrzebowanie monitorowania kolizji w transporcie drogowym. Zaproponowane w rozprawie podejście bazujące na uogólnionej metodzie IVDM jest obiecujące i pozwala dokonać (w odróżnieniu od innych opublikowanych metod [24, 13, 38]) identyfikacji wielu równoczesnych obciążeń uderowych. Metoda identyfikacji sprawdzona została do optymalizacji gradientowej.

#### 1.4. Zakres i zawartość pracy

Jako ustroje aktywnie sterowane wykorzystano konstrukcje kratowe z materiałem sprężysto-plastycznym. Masa przyłożona jest w węzłach (diagonalna macierz mas), lub rozłożona wzdłuż długości pręta (konsystentna macierz mas).

W zakresie pracy mieści się:

- przedstawienie metody modelowania parametrów konstrukcji (sztywność, masa) w konstrukcjach narażonych na obciążenia dynamiczne,
- przedstawienie modelowania nieliniowości fizycznych (sprężysto-plastyczny model konstytutywny) dla *elementów adaptacyjnych*,
- analityczna analiza wrażliwości konstrukcji,
- optymalizacja konstrukcji ze względu na ilość pochłoniętej energii oraz minimalizację różnicy pomiędzy odpowiedzią konstrukcji wymaganą i modelowaną z wykorzystaniem analitycznie wyznaczonych gradientów,
- stworzenie efektywnych algorytmów numerycznych oraz stworzenie pakietu oprogramowania umożliwiającego projektowanie konstrukcji narażonych na obciążenie dynamiczne,
- zastosowania Metody Dystorsji Wirtualnych do identyfikacji obciążenia uderowego.

Praca została podzielona na następujące części:

1. Rozdział pierwszy wstęp do pracy.
2. W rozdziale drugim pt. “Modelowanie systemów Aktywnej Absorpcji Impaktu (AIA)”, zostały przedstawione *metody wirtualne* podzielone przez autora na:
  - IMDW - Impulsową Metodę Dystorsji Wirtualnych, zastosowaną do modelowania sztywności [64], oraz do modelowania nieliniowości fizycznych,
  - IMFW - Impulsową Metodę Sił Wirtualnych, zastosowaną do modelowania sztywności i masy elementów, masy uderzającej oraz w identyfikacji obciążenia uderowego.

W rozdziale przedstawiona została metodologia modelowania redystrybucji materiału, pola przekroju oraz nieliniowości fizycznych w konstrukcji, jak również modelowania sprężonego.

Bazując na metodach wirtualnych zaprezentowana została również analityczna analiza wrażliwości oraz efektywne algorytmy numeryczne, pozwalające na wykorzystanie *metod wirtualnych* w problemach optymalnego przeprojektowywania struktur adaptacyjnych *AIA* narażonych na obciążenia uderowe.

3. W rozdziale trzecim pt. “Optymalne projektowanie konstrukcji obciążonych dynamicznie” przedstawiono trzy przykłady wykorzystania *metod wirtualnych* w opty-

malnym przeprojektowywaniu struktur poddawanych wymuszeniom dynamicznym. Pierwszy przedstawia optymalną redystrybucję materiału w konstrukcji, w wyniku minimalizacji funkcji celu zdefiniowanej jako średnią kwadratową różnicą pomiędzy przemieszczeniami wymaganymi a modelowanymi. W przykładzie rozpatrzono dwa rodzaje wymuszenia. W przykładzie drugim poszukiwano optymalnych progów plastycznych zderzaka chroniącego konstrukcję. Natomiast przykład trzeci prezentuje zaproponowany sposób postępowania w projektowaniu konstrukcji *AIA*.

4. W rozdziale czwartym pt. "Identyfikacja obciążenia" został przedstawiony sposób wykorzystania *metod wirtualnych*, do identyfikacji historii sił zmiennych w czasie działających na konstrukcję z elementami ulegającymi uplastycznieniu. Zaprezentowano przykłady numeryczne przedstawiające wykorzystanie metody IMFW w zadaniach sprężystych. W rozdziale tym zostały również przedstawione algorytmy numeryczne oraz algorytm heurystyczny.
5. W rozdziale piątym pt. "Podsumowanie" przedstawiono wnioski oraz osiągnięte cele. Obiecujący rozwój *metod wirtualnych* pozwala na sformułowanie ambitnych planów na przyszłość, które również zostały przedstawione.
6. Załączniki przedstawiają opis języka komend utworzonego pakietu *AIA*-rem pozwalającego na samodzielne uruchomienie dowolnego zadania (dla elementów kratowych dwuwymiarowych), demonstrującego działanie przedstawionych *metod wirtualnych* oraz opracowanych algorytmów numerycznych. W załączniku *B* przedstawiono przykładowe dane zadania dla pakietu *AIA*-rem oraz programu ANSYS (plik wsadowy w języku komend ANSYS ADPL).



## Rozdział 2

# Modelowanie systemów Aktywnej Absorpcji Impaktu (AIA)

---

W rozdziale tym przedstawiony zostanie dokładny opis metody oraz opracowanych algorytmów numerycznych, służących do modelowania i przeprojektowywania struktur narażonych na obciążenia dynamiczne. Zaprezentowana metoda ograniczona jest w pracy do elementów kratowych, z wyłączeniem nieliniowości związanej z dużymi odkształceniami.

Projektując konstrukcje obciążone dynamicznie należy, uwzględnić wiele czynników mających na nią wpływ tj.: możliwe kierunki działania sił i ich intensywności, przewidywane masy zarówno konstrukcji jak i uderzające oraz wiele innych.

W zależności od zastosowania konstrukcje powinny spełniać różne kryteria postawione przez projektantów, minimalne ugięcie, maksymalna podatność, minimalne maksymalne przyspieszenia, itp. Osiągnięcie tych wymagań wiąże się przemodelowaniem konstrukcji poprzez wpływ na zmianę przekrojów elementów, zastosowanych materiałów lub przez zastosowanie *bezpieczników strukturalnych*.

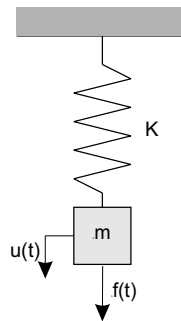
Zaprezentowana w tym rozdziale grupa *metod wirtualnych* daje możliwości optymalnego projektowania konstrukcji poprzez:

1. Modyfikacje sztywności elementów konstrukcji  $E$  lub ich przekrojów poprzecznych  $A$ , bez zmiany masy elementu (odpowiada to zmianie przekroju sprzężonej ze zmianą materiału, a dokładniej gęstości, w celu zachowania tej samej masy elementu).
2. Modyfikacje mas elementów  $M$ , bez zmiany ich przekrojów poprzecznych (dobieranie odpowiednich materiałów z różną gęstością).
3. Modyfikacje przekrojów poprzecznych  $A$  elementów konstrukcji, sprzężona zmiana sztywności  $E$  ze zmianą masy  $M$ , co odpowiada dynamicznemu sformułowaniu zadania przeprojektowania konstrukcji, polegającego na przenoszeniu materiału pomiędzy elementami.

### 2.1. Drgania swobodne oscylatora

Rozważmy drgania swobodne układu o jednym stopniu swobody Rys. 2.1. Dla rozważanego układu o sztywności  $k$  bez tłumienia równanie ruchu przyjmuje postać:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f(t). \quad (2.1)$$



Rys. 2.1. Oscylator o jednym stopniu swobody

Po podzieleniu powyższego układu przez masę oraz zakładając, że na układ nie działa żadna siła  $f(t) = 0$  dostajemy:

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0, \quad (2.2)$$

gdzie  $\omega$  jest częstością kołową drgań i jest wyrażona zależnością:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.3)$$

Równanie (2.2) jest jednorodnym równaniem różniczkowym którego rozwiązanie dane jest w postaci:

$$u(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (2.4)$$

lub w następującej formie:

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.5)$$

gdzie  $\varphi$  jest przesunięciem fazowym.

Zakładając warunki początkowe w postaci  $u(0) = u_0$  i  $\dot{u}(0) = v_0$ , rozwiązanie równania (2.2) wyrażone jest następującą zależnością:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (2.6)$$

### 2.1.1. Odpowiedź układu na dowolną siłę wymuszającą

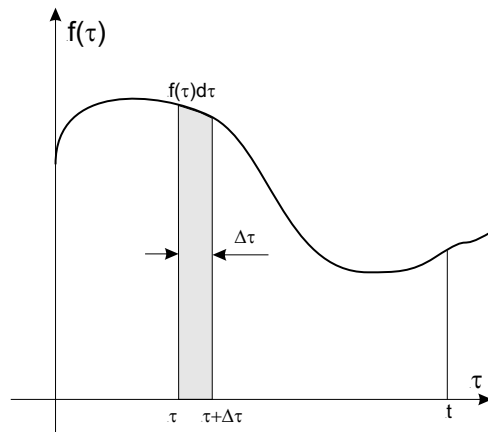
Postulat małych odkształceń pozwala na zastosowanie znanej z teorii drgań metody całki Duhamela. Metoda ta przedstawiona została w wielu publikacjach poświęconych drganiom mechanicznym między innymi [45, 23, 50].

Ogólny przypadek obciążenia dowolną zmienną w czasie funkcją możemy rozpatrywać jako sekwencyjne złożenie kolejnych elementarnych impulsów sił o wielkości równej wartości funkcji w kolejnych chwilach  $\tau$ . Na przykład impuls siły  $F(\tau)$  przedstawiony jako zaciemniony prostokąt na Rys. 2.2 w chwili  $\tau$  działający w przedziale  $d\tau$  jest równy  $f(\tau)d\tau$ . Odpowiedź konstrukcji na tak zadany impuls równa jest  $h(t)$ , gdzie  $h$  jest impulsową funkcją przejścia.

Impuls siły działający na ciało o masie  $m$  wywołuje zmianę prędkości, która może być określona z drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$m \frac{dv}{d\tau} = f(\tau), \quad (2.7)$$





RYS. 2.2. Ogólna historia obciążenia jako obciążenie impulsowe

po przekształceniach:

$$dv = \frac{f(\tau)d\tau}{m}, \quad (2.8)$$

gdzie  $F(\tau)d\tau$  jest impulsem siły, natomiast  $dv$  jest przyrostem prędkości, który może być rozważany jako prędkość początkowa masy w czasie  $\tau$ . Rozważmy impuls siły  $F(\tau)d\tau$  działający na konstrukcję reprezentowaną przez nie tłumiony oscylator przedstawiony na Rys. 2.1. W czasie  $\tau$  oscylator doznaje zmiany prędkości wyrażonej równaniem (2.8). Zmiana ta jest podstawiona do równania (2.6) jako prędkość początkowa  $\dot{u}(\tau) = dv$  razem z  $u(\tau) = 0$  w czasie  $t$  co daje odpowiedź w następującej formie:

$$du(t) = \frac{f(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau). \quad (2.9)$$

Historia obciążenia może zostać przeformułowana jako seria krótkich impulsów działających sekwencyjnie w czasie  $d\tau$ , każdy generujący swoją odpowiedź w czasie  $t$  w formie (2.9). W związku z tym całkowite przemieszczenie w czasie  $t$  w wyniku ciągłego działania siły  $F(\tau)$  dane jest sumą przyrostów  $du(t)$  od czasu 0 do czasu  $t$ :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Równanie (2.10) znane jest w literaturze jako całka Duhamela. Jest ono prawdziwe tylko i wyłącznie dla układów liniowych w trakcie działania siły kiedy to rozważane odkształcenia są małe.

Uogólnienie przedstawionej powyżej metody na układ o skończonej liczbie stopni swobody którego równanie ruchu dane jest zależnością

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.11)$$

gdzie  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  są odpowiednio macierzami mas, tłumienia i sztywności prowadzi do:

$$e_i(t) = \sum_{\tau} B_{ij}(t - \tau) f_j(\tau), \quad (2.12)$$

gdzie: macierz  $\mathbf{B}$  jest macierzą impulsowych funkcji przejścia dla układów liniowych. W metodach wirtualnych jest ona nazywana dynamiczną macierzą wpływu. Elementy tej macierzy opisują wpływ jednostkowego impulsu w stopniu swobody  $j$  na odpowiedź konstrukcji w stopniu swobody  $i$ . Macierz  $\mathbf{B}$  jest macierzą trójwymiarową.

## 2.2. Numeryczne całkowanie równań ruchu

W ogólnym przypadku metody całkowania równań ruchu można podzielić na metody jawne (ang. *Explicit*), metody niejawne (ang. *Implicit*), metody mieszane oraz modalne. Wybór schematu całkowania w metodzie elementów skończonych zależy od wielu czynników, spośród których najważniejszym jest fizyczna natura problemu. Zadania z *szybką* dynamiką (np. zderzenia samochodów z dużą prędkością) są zazwyczaj analizowane z wykorzystaniem metod *explicit*, natomiast w zadaniach z *wolną* dynamiką (np. rolowanie samochodu) preferowane są metody całkowania *implicit*. Innym głównym wskaźnikiem wyboru metod całkowania jest czas obliczeń. W metodach *explicit* niezbędne jest stosowanie drobnego kroku całkowania [34, 1],

$$\Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{T_N}{\pi}, \quad (2.13)$$

gdzie  $T_N$  jest najmniejszym okresem drgań własnych układu o  $N$  stopniach swobody. Powyższy warunek jest bardzo silnym ograniczeniem długości kroku i jego przestrzeganie powoduje znaczne wydłużenie procesu obliczeń.

Metody niejawne są szeroko rozpowszechnione w dynamice konstrukcji. Do tej grupy możemy zaliczyć następujące metody:

- metoda Wilsona,
- metoda Newmarka,
- metoda Rungego-Kutty,
- inne

Ponieważ w pracy do całkowania równań ruchu została zastosowana metoda Newmarka, dlatego w dalszej części rozdziału zostanie przedstawiona jej krótka charakterystyka.

W 1959 roku Newmark zaprezentował rodzinę metod całkowania równań ruchu dla problemów dynamicznych takich jak wybuchy oraz zagadnienia sejsmiczne. Przez ostatnie 40 lat metody Newmarka zostały zastosowane do wielu różnych aplikacji inżynierskich, jak również opracowano wiele wariacji tejże metody.

Newmark wykorzystał rozwinięcie w szereg Taylora przemieszczeń i prędkości w otoczeniu punktu  $t$ , przyjął że:

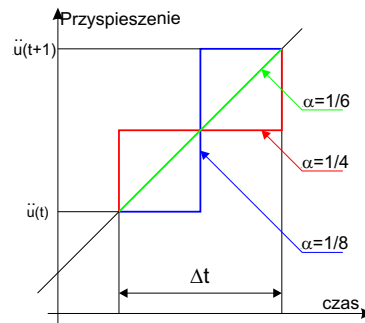
$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + (1 - \delta) \ddot{u}(t) \Delta t + \delta \ddot{u}(t) \Delta t, \quad (2.14)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t) \Delta t + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}(t) \Delta t^2 + \alpha \ddot{u}(t + \Delta t) \Delta t^2, \quad (2.15)$$

gdzie parametry metody całkowania  $\alpha$  oraz  $\delta$  przyjmowane są na podstawie rozważań o dokładności i stabilności otrzymywanych rozwiązań. Parametr  $\delta$  określa stopień tłumienia numerycznego, natomiast parametr  $\alpha$  określa w jaki sposób narastają przyspieszenia w trakcie kroku czasowego Rys. 2.3. Dla  $\alpha = 1/6$  metoda Newmarka sprowadza się do metody liniowego przyspieszenia.

Najbardziej atrakcyjną właściwością metody Newmarka jest jej bezwarunkowa stabilność dla  $\delta \geq 0.25$  i  $\alpha \geq 0.5(\delta + 0.5)^2$  [1]. Zazwyczaj przyjmuje się  $\alpha = 0.25$  i  $\delta = 0.5$ . Możliwe jest również stosowanie schematów warunkowo stabilnych, jednak wtedy musi być spełniony warunek nałożony na długość kroków czasowych.

$$\Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{T_N}{\pi \sqrt{1 - 4\alpha}}. \quad (2.16)$$



Rys. 2.3. Graficzna reprezentacja metody Newmarka

Rozwiązując (2.15) względem  $\ddot{u}(t + \Delta t)$  i podstawiając obliczoną wartość do równania (2.14) otrzymywane są zależności na  $\ddot{u}(t + \Delta t)$  oraz  $\dot{u}(t + \Delta t)$  w funkcji jedynie nieznanego przemieszczenia  $u(t + \Delta t)$  oraz znanych z poprzedniego kroku wartości  $u(t)$ ,  $\dot{u}(t)$ ,  $\ddot{u}(t)$ . Algorytm całkowania równań ruchu metodą Newmarka przedstawiono w Tab. 2.1:

TABLICA 2.1. Algorytm Newmarka, numerycznego całkowania równań ruchu

#### Obliczenia wykonywane przed pierwszym krokiem czasowym

- określenie warunków początkowych  $u(0)$ ,  $\dot{u}(0)$
- określenie stałych całkowania dla metody Newmark'a
 
$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta), a_7 = \delta \Delta t$$
- wyznaczenie efektywnej macierzy sztywności
 
$$K^{ef} = K + a_0 M + a_1 C$$

#### Obliczenia wykonywane w każdym kroku czasowym

- Wyznaczenie efektywnego wektora siły
 
$$F^{ef} = f(t + \Delta t) + M(a_0 u(t) + a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t)) + C(a_1 u(t) + a_4 \dot{u}(t) + a_5 \ddot{u}(t))$$
- Rozwiązanie liniowego układu równań ze względu na przemieszczenia
 
$$K^{ef} u(t + \Delta t) = F^{ef}$$
- Określenie z formuł Newmarka wektorów prędkości i przyspieszeń
 
$$\ddot{u}(t + \Delta t) = a_0(u(t + \Delta t) - u(t)) - a_2 \dot{u}(t) - a_3 \ddot{u}(t)$$

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + a_6 \ddot{u}(t) + a_7 \ddot{u}(t + \Delta t)$$

## 2.3. Wirtualne metody modelowania

W rozdziale tym zostaną zaprezentowane dwie metody wirtualne modelowania parametrów konstrukcji. Poza przypomnieniem *Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych* szczegółowo przedstawionej w pracy [64] z zastosowaniem do modelowania rozkładu sztywności ustrojów sprężystych, zostanie zaprezentowane również rozwinięcie wspomnianej metody, przez autora nazwanej *Impulsową Metodą Sił Wirtualnych* IMFW. Połączenie obydwu wyżej wspomnianych metod, daje podstawy teoretyczne do stworzenia narzędzia przydatnego w kompleksowym modelowaniu parametrów konstrukcyjnych struktur poddawanych obciążeniom dynamicznym.

Poniżej przedstawione zostały podstawowe wykorzystywane pojęcia:

**konstrukcja zmodyfikowana** - struktura w której dokonano zmian parametrów konstrukcyjnych (sztywności, masy itp.),

**konstrukcja modelowana** - to konstrukcja w której zmiany są modelowane przez pola wirtualne (dystorsje wirtualne i/lub siły wirtualne),

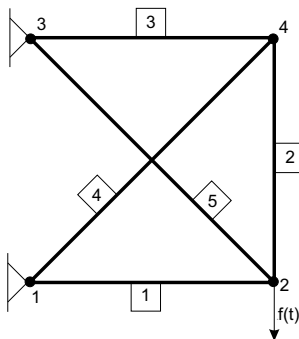
**funkcja przejścia** - odpowiedź na zadane wymuszenie (siły lub odkształcenia w funkcji czasu) uzyskana w odpowiednim miejscu konstrukcji.

### 2.3.1. Impulsowa Metoda Dystorsji Wirtualnych (IMDW)

Metody wirtualne dają możliwość wyznaczenia odpowiedzi struktury, w której dokonana została modyfikacja zmiennych konstrukcyjnych. Otrzymywana jest ona na podstawie znajomości tylko odpowiedzi dynamicznej (funkcji przejścia) modelu oryginalnego. Odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej określana jest bez konieczności ponownej analizy całej struktury z wprowadzonymi zmianami. Poniżej przedstawiono charakterystykę *Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych*.

Opis *Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych* przedstawiono na przykładzie konstrukcji kratowej Rys. 2.4 o początkowej dystrybucji parametrów konstrukcyjnych. Strukturę poddano wymuszeniu dynamicznemu siłą  $f(t)$ . Zmiana parametrów konstrukcyjnych modelowana jest w elemencie czwartym.

Odpowiedź konstrukcji z oryginalną dystrybucją parametrów konstrukcyjnych zapisana jest w wektorze  $\varepsilon^L(t)$ .



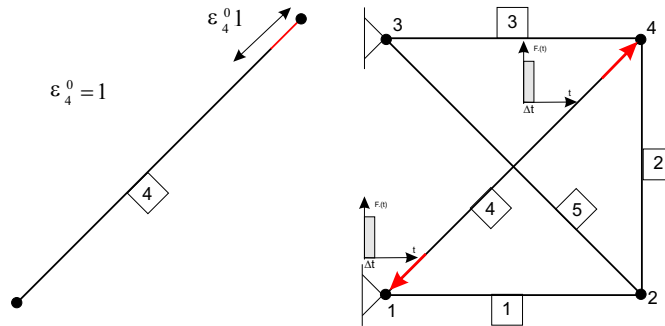
Rys. 2.4. Konstrukcja z oryginalną dystrybucją parametrów konstrukcyjnych

W celu wyznaczenia odpowiedzi konstrukcji sprężonej element czwarty poddany został wydłużeniu jednostkowemu Rys. 2.5, które może być wywołane np. ogrzaniem pręta. Odkształcenie to zostało nazwane dystorsją wirtualną, która dla zagadnień dynamicznych jest zmienna w czasie  $\varepsilon^0(t)$ . Odkształcenie to zostało przyłożone impulsowo w chwili czasowej  $t = 1$ , w konstrukcji z oryginalną dystrybucją parametrów konstrukcyjnych Rys. 2.5(b). Wprowadzenie dystorsji powoduje powstanie w konstrukcji rezydualnego pola odkształceń również zmiennego w czasie  $\varepsilon^R(t)$  (konstrukcja sprężona).

$$\varepsilon_\alpha^R(t) = \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha\xi}^\varepsilon(t - \tau) \varepsilon_\xi^0(\tau), \quad (2.17)$$

gdzie wektor  $\mathbf{B}^\varepsilon(t - \tau)$  jest dynamiczną macierzą wpływu. Macierz ta zawiera w sobie odpowiedź konstrukcji na jednostkową dystorsję wirtualną  $\varepsilon_4^0$  przyłożoną w elemencie

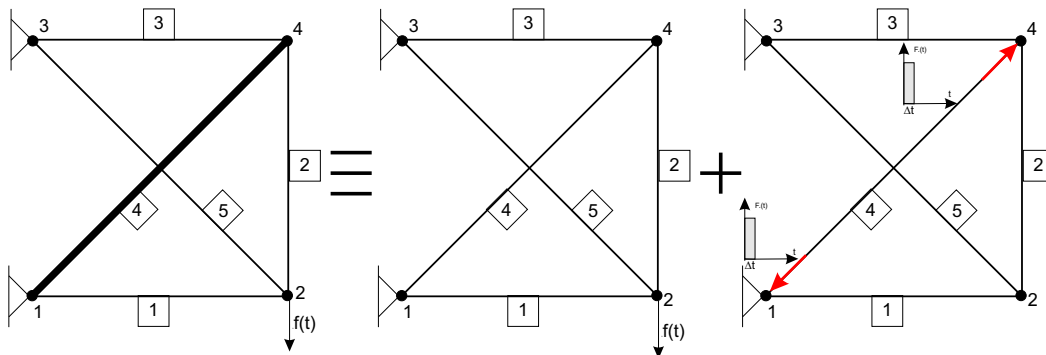
czwartym Rys. 2.5(b).



RYS. 2.5. Generacja impulsu dystorsji jednostkowej

Zakładając liniowość geometryczną można zastosować zasadę superpozycji. Odpowiedź konstrukcji modelowanej można wyrazić jako sumę odpowiedzi liniowej  $\epsilon^L(t)$  oraz sprężonej  $\epsilon^R(t)$  Rys. 2.6.

$$\epsilon_\alpha(t) = \epsilon_\alpha^L(t) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha\xi}^\epsilon(t - \tau) \epsilon_\xi^0(\tau). \quad (2.18)$$



RYS. 2.6. Wyznaczanie odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej z wykorzystaniem IMDW

### 2.3.2. Impulsowa Metoda Sił Wirtualnych (IMFW)

Drugą metodą wirtualną zaproponowaną przez autora jest *Impulsowa Metoda Sił Wirtualnych* IMFW. Metoda ta może być również stosowana do modelowania różnych parametrów konstrukcyjnych. W niektórych przypadkach może być stosowana zastępczo z *Impulsową Metodą Dystorsji Wirtualnych*.

Postępowanie przy wyznaczaniu odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej z wykorzystaniem IMFW jest analogiczne do *Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych*. Dla przedstawienia metody wybrany został identyczny wspornik kratowy jak dla IMDW, z modelowaniem parametrów konstrukcyjnych również elementu czwartego (por. 2.3.1).

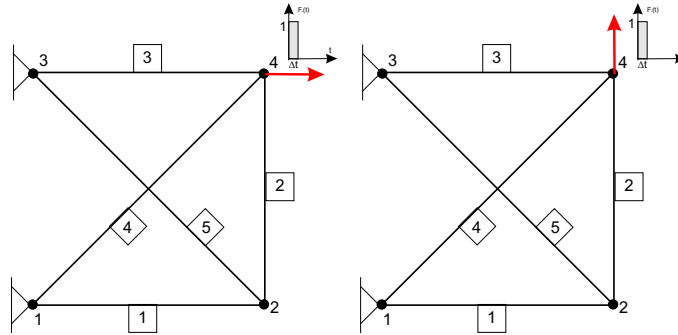
Pierwszym krokiem jaki należy wykonać jest określenie odpowiedzi struktury niezmięnionej i zapisanie odpowiedzi w wektorze  $\mathbf{u}^L(t)$ .

Odpowiedź konstrukcji sprężonej wyznaczana jest przez przyłożenie jednostkowych sił  $f(t) = 1 \cdot \delta$ . Siły te przykładane są kolejno w stopniach swobody powiązanych z elemen-

tem modyfikowanym Rys. 2.7. W rozpatrywanym przykładzie jest to element czwarty. Wymuszenia jednostkowymi siłami realizowane są dla konstrukcji z oryginalną dystrybucją parametrów konstrukcyjnych. Siły te zostały przez autora nazwane siłami wirtualnymi (analogicznie do dystorsji wirtualnych). Wprowadzenie impulsu sił wirtualnych powoduje powstanie w konstrukcji rezydualnego pola przemieszczeń zmiennego w czasie  $\mathbf{u}^R(t)$  (konstrukcja sprzężona).

$$u_i^R(t) = \sum_{\tau \leq t} D_{ij}^p(t - \tau) p_j^0(\tau), \quad (2.19)$$

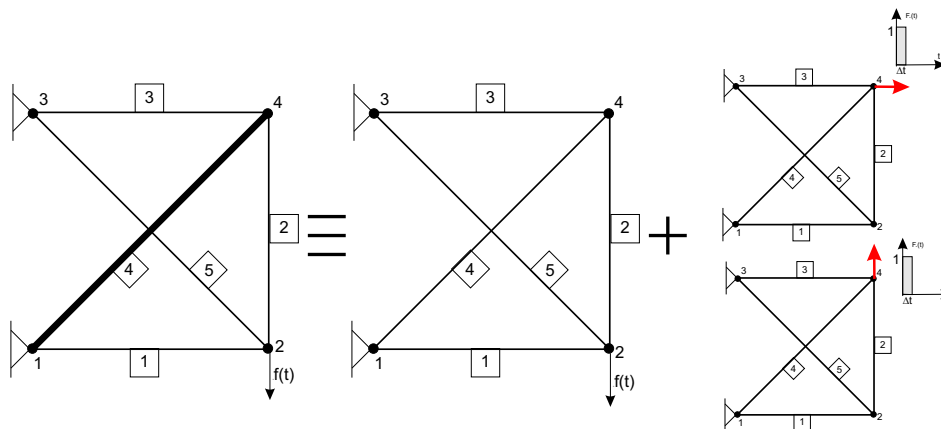
gdzie wektor  $\mathbf{D}^p(t - \tau)$  jest dynamiczną macierzą wpływu. Macierz ta zawiera w sobie odpowiedź konstrukcji na jednostkowe siły wirtualne  $p^0$  przyłożoną w stopniach swobody elementu czwartego 2.5(b).



Rys. 2.7. Generacja impulsu sił jednostkowych

Zakładając liniowość geometryczną można zastosować zasadę super-pozyycji. Odpowiedź konstrukcji modelowanej można wyrazić jako sumę odpowiedzi liniowej  $\mathbf{u}^L(t)$ , oraz sprzężonej  $\mathbf{u}^R(t)$  Rys. 2.8.

$$u_i^R(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} D_{ij}^p(t - \tau) p_j^0(\tau). \quad (2.20)$$



Rys. 2.8. Wyznaczanie odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej z wykorzystaniem IMFW

Każda z wyżej wymienionych metod wirtualnych ma swoje zalety oraz wady. Na przykład wykorzystując *Impulsową Metodę Dystorsji Wirtualnych* dysponujemy dynamiczną

macierzą wpływu znacznie mniejszą niż w przypadku *Impulsowej Metody Sił Wirtualnych*, spowodowane jest to powiązaniem dynamicznej macierzy wpływu  $D^p$  (IMFW) ze stopniami swobody elementów modyfikowanych, a nie z samymi elementami jak to ma miejsce w IMDW. Jednak dla konstrukcji kratowych przesztywnionych różnica w rozmiarze zadania przestaje być znacząca, ponieważ liczba elementów konstrukcji jest niewiele mniejsza od liczby stopni swobody układu. *Impulsowa Metoda Dystorsji Wirtualnych* nie pozwala na modelowanie innych parametrów modelu poza sztywnością i modelowaniem nieliniowości fizycznych. Natomiast *Impulsowa Metoda Sił Wirtualnych* umożliwia modelowanie zarówno sztywności, masy elementów jak również masy uderzającej.

Odpowiednie sformułowanie IMFW pozwala na wykorzystanie tej metody również w identyfikacji obciążenia udarowego. Specyfika zadania rekonstrukcji historii siły umożliwia wykorzystanie bardziej złożonych elementów skończonych takich jak ramy czy elementy płytowe.

Wykorzystanie superpozycji pól dystorsyjnych w metodach wirtualnych implikuje ograniczenie zadań do liniowej geometrii.

Dokładny opis metod oraz algorytmów postępowania dla zadań modelowania rozkładu sztywności, masy oraz nieliniowości fizycznych zostanie przedstawiony w następnych rozdziałach.

## 2.4. Przemodelowywanie sztywności elementów konstrukcji (zmien- na $E$ )

W rozdziale tym zostanie przedstawiona metoda modelowania sztywności (modułu Young'a) w elementach konstrukcji kratowej. Do modelowania sztywności wykorzystane zostaną obie *metody wirtualne* IMDW oraz IMFW. Poprawność przyjętych założeń zostanie zaprezentowana na przykładzie pięcio elementowego wspornika kratowego.

### 2.4.1. Wykorzystanie Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych

Równanie ruchu<sup>1)</sup> dla konstrukcji z nie zmienioną sztywnością  $K$  sformułowane jest w następujący sposób:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.21)$$

gdzie  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  są odpowiednio macierzami mas i sztywności,  $\mathbf{f}(t)$  jest wektorem sił zewnętrznych.

Jednym ze składników macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  jest moduł Young'a  $E$ , którego modyfikację można zapisać w następującej formie:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}]\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.22)$$

gdzie  $\Delta\mathbf{K}$  opisuje modyfikacje macierzy sztywności konstrukcji. Modyfikację macierzy sztywności może spowodować zarówno zmiana sztywności  $E$ , jak również zmiana pola przekroju elementów  $A$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup>W całej pracy założono brak tłumienia  $\mathbf{C}$  w konstrukcji

<sup>2)</sup>Zmiana pola przekroju poprzecznego w zagadnieniach dynamicznych musi sprzęgać ze sobą zmianę zarówno sztywności jak i zmianę masy elementów, co zostanie przedstawione w następnych rozdziałach.

Równania ruchu dla konstrukcji zmodyfikowanej (2.23), oraz modelowanej (2.24) mogą być przedstawione wprowadzając składniki wirtualne do równań (2.21) i (2.22):

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T \hat{S}_{\alpha\varphi} G_{\varphi j} u_j(t) = f_i(t), \quad (2.23)$$

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T S_{\alpha\varphi} \left[ G_{\varphi j} u_j(t) - L_{\varphi} \varepsilon_{\varphi}^0(t) \right] = f_i(t), \quad (2.24)$$

gdzie  $\hat{S}_{\alpha\varphi}$  i  $S_{\alpha\varphi}$  są macierzami diagonalnymi, z elementami na diagonalu odpowiednio  $\hat{S}_{\alpha\alpha} = \hat{E}_{\alpha} A_{\alpha} / l_{\alpha}$  oraz  $S_{\alpha\alpha} = E_{\alpha} A_{\alpha} / l_{\alpha}$  gdzie  $A_{\alpha}$  - przekrój poprzeczny elementu,  $l_{\alpha}$  - długość elementów,  $E_{\alpha}$  - moduł Young'a oraz  $\hat{E}_{\alpha}$  zmodyfikowany moduł Young'a. Podkreślone indeksy oznaczają, iż nie ma po nich sumowania. Macierz  $\mathbf{G}$  jest macierzą transformacji, jej elementy są równe kosinusom pomiędzy elementami, a kierunkami stopni swobody. Równanie (2.24) może zostać zapisane z użyciem wektora odkształceń w następującej formie:

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T S_{\alpha\varphi} \left[ L_{\varphi} \left( \varepsilon_{\varphi}(t) - \varepsilon_{\varphi}^0(t) \right) \right] = f_i(t), \quad (2.25)$$

gdzie wektor odkształceń  $\varepsilon(t)$  jest wyrażony w następujący sposób:

$$L_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}(t) = G_{\alpha i} u_i(t). \quad (2.26)$$

Odpowiedź dynamiczna konstrukcji w przedziale czasu  $\langle 0, t \rangle$  wyznaczana jest jako superpozycja pól wirtualnych, oraz odpowiedzi liniowej w następujący sposób:

$$u_i(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} D_{i\xi}^{\varepsilon}(t - \tau) \varepsilon_{\xi}^0(\tau), \quad (2.27)$$

gdzie wektor dystorsji wirtualnych  $\varepsilon^0(t)$  odpowiada za modelowanie sztywności elementu, wektor  $u_i^L(t)$  oznacza rozwój przemieszczeń w stopniach swobody  $i$ , wyznaczony dla konstrukcji sprężystej z początkową redystrybucją sztywności.  $D_{i\xi}^{\varepsilon}(t - \tau)$  jest dynamiczną macierzą wpływu opisującą przemieszczeniową odpowiedź konstrukcji w stopniu swobody  $i$  w chwili czasowej  $t$  na jednostkowy impuls dystorsji wirtualnej (zadanej jak para zrównoważonych sił, wywołujących jednostkowe odkształcenie), wygenerowany w chwili czasowej  $\tau$  w elemencie  $\xi$ . Macierz  $\mathbf{D}$  zawiera w sobie informacje o całej konstrukcji (włącznie z warunkami brzegowymi) i opisuje dynamiczną (a nie statyczną) odpowiedź na lokalnie wygenerowany impuls. Indeksy,  $i$  przebiegają po wszystkich stopniach swobody układu natomiast indeksy  $\xi$  po elementach ze zbioru elementów z modyfikacją sztywności  $\xi \in \mathfrak{E}$ .

Dynamiczna macierz wpływu (DMW) występująca w równaniu (2.27) generowana jest przez numeryczne całkowanie równań ruchu, dla konstrukcji z oryginalną dystrybucją sztywności. Numeryczne całkowanie realizowane jest z zastosowaniem algorytmu Newmarka, w którym siły efektywne rozwijają się począwszy od chwili  $t = 1$  Tab. 2.1. Jeżeli dynamiczna macierz wpływu generowana jest za pomocą sił przykładowych w chwili  $t = 1$  równanie (2.27) powinno zostać formalnie zapisane w następującej formie:

$$u_i(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau=1}^t D_{i\xi}^{\varepsilon}(t + 1 - \tau) \varepsilon_{\xi}^0(\tau), \quad (2.28)$$

Uaktualniony wektor odkształceń  $\varepsilon(t)$  można otrzymać przez przemnożenie równania (2.28) przez wielkość  $\frac{1}{L_{\alpha}} G_{\alpha i}$  otrzymując:

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = \frac{1}{L_{\alpha}} G_{\alpha i} u_i(t) = \varepsilon_{\alpha}^L(t) + \sum_{\tau \leq t} \frac{1}{L_{\alpha}} G_{\alpha i} D_{i\xi}^{\varepsilon}(t + 1 - \tau) \varepsilon_{\xi}^0(\tau). \quad (2.29)$$



Dla opisu odkształceń i naprężeń wprowadzono nową zmienną  $\mathbf{B}$ , będąca również dynamiczną macierzą wpływu. Macierz ta w odróżnieniu od macierzy  $\mathbf{D}$  opisuje jednak nie przemieszczenia węzłów a odkształcenia elementów:

$$B_{\alpha\xi}^\varepsilon = \frac{1}{L_\alpha} G_{\alpha i} D_{i\xi}^\varepsilon. \quad (2.30)$$

Podstawiając zmienną (2.30) do równania (2.29), zależność z której wyznaczane są odkształcenia przyjmuje postać:

$$\varepsilon_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha^L(t) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha\xi}^\varepsilon(t+1-\tau) \varepsilon_\xi^0(\tau), \quad (2.31)$$

gdzie  $\varepsilon_\alpha^L(t)$  oznacza rozwój odkształceń w elementach  $\alpha$  konstrukcji, wyznaczony dla konstrukcji sprężystej z początkową redystrybucją sztywności,  $B_{\alpha\xi}^\varepsilon(t-\tau)$  jest dynamiczną macierzą wpływu opisującą ewolucję odkształceń w elemencie  $\alpha$ , w chwili czasowej  $t$  w wyniku jednostkowego impulsu dystorsji wirtualnej wygenerowanego w chwili czasowej  $\tau$  w elemencie  $\xi$ .

Naprężenia dla konstrukcji modelowanej dystorsjami wirtualnymi można zapisać w następującej formie:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(t) &= E_\alpha (\varepsilon_\alpha(t) - \varepsilon_\alpha^0(t)), \\ \sigma_\alpha(t) &= \sigma_\alpha^L(t) + E_\alpha \left( \sum_{\tau < t} B_{\alpha\xi}^\varepsilon(t+1-\tau) \varepsilon_\xi^0(\tau) + (B_{\alpha\xi}^\varepsilon(1) - \delta_{\alpha\xi}) \varepsilon_\xi^0(t) \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

gdzie  $\sigma^L(t)$  oznacza rozwój naprężeń w elementach konstrukcji, wyznaczony dla początkowej redystrybucji sztywności.

Aby, wyznaczyć dystorsje wirtualne  $\varepsilon^0(t)$  odpowiedzialne za modelowanie sztywności, autor postuluje równość sił i deformacji w konstrukcji *zmodyfikowanej* (2.33) oraz w konstrukcji *modelowanej* dystorsjami (2.34).

$$p_\alpha(t) = \hat{E}_\alpha A_\alpha \varepsilon_\alpha(t), \quad (2.33)$$

$$p_\alpha(t) = E_\alpha A_\alpha (\varepsilon_\alpha(t) - \varepsilon_\alpha^0(t)). \quad (2.34)$$

Porównując siły dla obu konstrukcji *modelowanej* i *zmodyfikowanej* zdefiniowane powyżej, można wyznaczyć wektor dystorsji wirtualnych  $\varepsilon^0$  w następującej formie:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha^0(t) &= (1 - \mu_\alpha^E) \varepsilon_\alpha(t), \\ [\delta_{\alpha\xi} - (1 - \mu_\alpha) B_{\alpha\xi}^\varepsilon(1)] \varepsilon_\xi^0(t) &= (1 - \mu_\alpha) \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t), \end{aligned} \quad (2.35)$$

gdzie  $\varepsilon_\alpha^{\neq t}$  opisuje odkształcenia w elemencie z pominięciem wpływu dystorsji wirtualnej w chwili  $t$ .

$$\varepsilon_\alpha^{\neq t}(t) = \varepsilon_\alpha^L(t) + \sum_{\tau=1}^{t-1} B_{\alpha\xi}^\varepsilon(t+1-\tau) \varepsilon_\xi^0(\tau), \quad (2.36)$$

natomiast  $\mu_\alpha^E$  jest parametrem modyfikacji sztywności konstrukcji i wyrażony jest następującą zależnością:

$$\mu_\alpha^E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{E}_\alpha}{E_\alpha} = \frac{\varepsilon_\alpha(t) - \varepsilon_\alpha^0(t)}{\varepsilon_\alpha(t)} = \frac{\hat{A}_\alpha}{A_\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_\alpha^A. \quad (2.37)$$

Parametrem modyfikacji opisuje stosunek sztywności nowej (zmienionej)  $\hat{E}$ , do sztywności niezmienionej (oryginalnej)  $E$  lub  $A$ . Parametr modyfikacji  $\mu_\alpha^E$  należy do przedziału  $\mu_\alpha^E \in \langle 0, \mu^{E\max} \rangle$  i należy go interpretować w następujący sposób: dla  $\mu = 0$  znika sztywność elementu, dla  $\mu = 1$  nie ma zmiany sztywności w elemencie natomiast dla  $\mu = \mu^{E\max}$  osiągana jest maksymalna dopuszczalna zmiana sztywności elementu.

Algorytm modelowania sztywności z wykorzystaniem IMDW przedstawiono w Tab. 2.2.

TABLICA 2.2. Algorytm modelowania sztywności Impulsową Metodą Dystorsji Wirtualnych

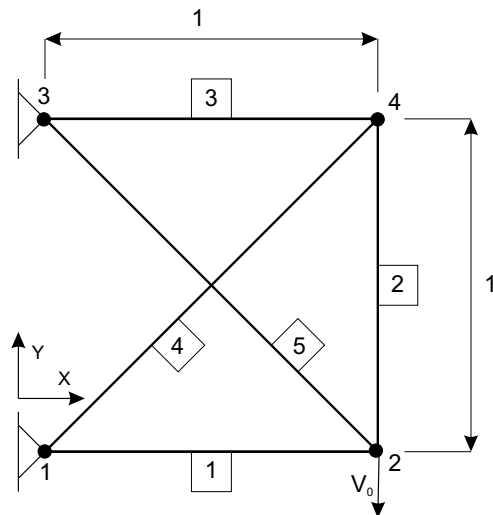
<p>Dane oraz obliczenia inicjujące</p> <p>Dane wejściowe zadania</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• konstrukcja pod ustalonym obciążeniem zewnętrznym <math>\mathbf{Q}(t)</math></li> <li>• lokalizacje zmian sztywności <math>\mathcal{E}</math></li> <li>• parametry modyfikacji sztywności <math>\mu^E</math></li> </ul> <p>Obliczamy</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odpowiedź konstrukcji na obciążenie <math>\mathbf{Q}(t)</math> dla konstrukcji z niezmodyfikowaną sztywnością <math>\varepsilon^L(t)</math></li> <li>• macierz wpływu <math>\mathbf{B}^\varepsilon(t)</math></li> <li>• główna macierz dla wyznaczania dystorsji wirtualnych niezależna od czasu  <math display="block">F_{\alpha\xi} = \left[ \delta_{\alpha\xi} - (1 - \mu_\alpha) B_{\alpha\xi}^\varepsilon(1) \right]</math> </li> </ul> <p>Obliczenia dla każdej chwili <math>t</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Odkształcenia <math>\varepsilon^{\neq t}(t)</math> bez uwzględnienia dystorsji wirtualnych <math>\varepsilon E(t)</math>  <math display="block">\varepsilon_\alpha^{\neq t}(t) = \varepsilon_\alpha^L(t) + \sum_{\tau &lt; t} B_{\alpha\xi}^\varepsilon(t+1-\tau) \varepsilon_\xi^0(\tau)</math> </li> <li>2. Wyznaczenie dystorsji wirtualnych <math>\varepsilon^0(t)</math> odpowiedzialnych za modelowanie sztywności elementów,  <math display="block">F_{\alpha\xi} \varepsilon_\xi^0(t) = (1 - \mu_\alpha) \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t)</math> </li> <li>3. Uaktualnienie przemieszczeń  <math display="block">\varepsilon_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t) + B_{\alpha\xi}^\varepsilon(1) \varepsilon_\xi^0</math> </li> <li>4. Jeżeli konieczne wyznaczenie: przemieszczeń, naprężeń itp. dla chwili <math>t</math></li> <li>5. <math>t = t + 1</math></li> </ol>
---

### Przykład 2.1

Dla przedstawienia poprawności modelowania sztywności z wykorzystaniem IMDW rozpatrzony zostanie płaski wspornik kratowy zaprezentowany na Rys. 2.4.1. Dynamiczne wymuszenie konstrukcji realizowane jest przez przyłożenie prędkości początkowej  $V_0 = 20[m/s]$  w prawym dolnym węźle.

Dla wszystkich elementów konstrukcji przyjęto jednakowy materiał dla którego moduł Young'a i gęstość wynoszą odpowiednio  $E = 2.1e11[Pa]$ ,  $\rho = 7800[kg/m^3]$ . Przekrój poprzeczny dla wszystkich elementów wynosi  $A = 1.0e-5[m]$ , natomiast wymiary konstrukcji przedstawione są na rysunku. W zadaniu założono zmianę sztywności (zmianę modułu Young'a) we wszystkich elementach konstrukcji. W Tab. 2.3 podano wartości parametrów modyfikacji sztywności  $E$  dla elementów, oraz odpowiadające im nowe wartości modułów Young'a.

Wyniki otrzymane za pomocą *Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych* porównano z wynikami z Metody Elementów Skończonych i przedstawiono na wykresach poniżej. Dla analizy MES przyjęto wartości modułu Young'a przedstawione w Tab. 2.3.



Rys. 2.9. Wspornik pięcio-elementowy modelowanie sztywności

TABLICA 2.3. Zmiana sztywności w elementach konstrukcji

Nr Elem.	$\mu^E$	$\hat{E}$ [Pa]
1	0.5	$1.05 \times 10^{11}$
2	1.1	$2.31 \times 10^{11}$
3	1.5	$3.15 \times 10^{11}$
4	1.2	$2.52 \times 10^{11}$
5	0.2	$4.2 \times 10^{10}$

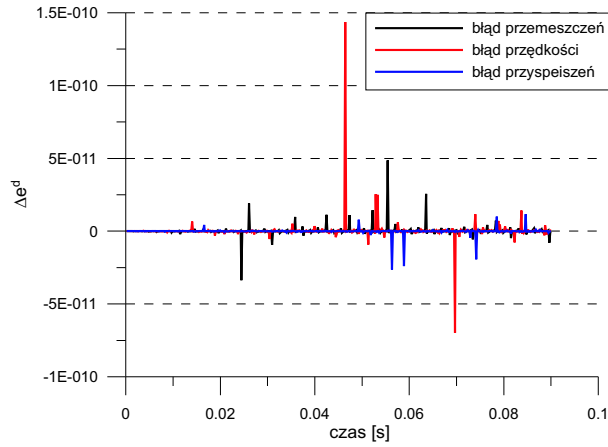
Ze względu na bardzo małe rozbieżności w otrzymanych wynikach dla porównania została wprowadzona dodatkowa zmienna opisująca względną różnicę otrzymanych wyników wyznaczana z formuły:

$$\Delta e_i^d(t) = \frac{e_i^d(t) - e_i^{MDW}(t)}{e_i^d(t)}, \quad (2.38)$$

gdzie  $e$  jest wyznaczaną wielkością (przemieszczenia, prędkości itp.), indeksy górne  $()^d$ ,  $()^{MDW}$  oznaczają odpowiednio wielkości referencyjne oraz wielkości wyznaczone z wykorzystaniem *metod wirtualnych*. W prezentowanym przykładzie wielkości referencyjne wyznaczane są za pomocą metody elementów skończonych.

Na wykresie Rys. 2.10 przedstawiono względną różnicę otrzymanych wyników przemieszczeń, prędkości oraz przyspieszeń dla węzła 2 w kierunku poziomym wspornika pokazanego na Rys. 2.4.1. Maksymalne wartości błędów wahają się w granicach  $1.5 \times 10^{-10}$  i bliskie są błędowi numerycznemu. Porównywalne błędy są zarówno dla wyznaczonych przemieszczeń prędkości jak i przyspieszeń. Porównanie świadczy o poprawności przedstawionej metody.

Wykres Rys. 2.10 pozwala zauważyć nieuniknioną niekorzystną cechę IMDW. Mianowicie ze względu na wyznaczanie odpowiedzi konstrukcji w dowolnej chwili czasowej  $t$ , jako funkcji określonych w poprzednich krokach  $\tau$  dystorsji wirtualnych  $\varepsilon^0(\tau)$ . Błędy przy ich wyznaczaniu ulegają sumowaniu, dlatego należy stosować jak najmniejszą o ile to możliwe liczbę kroków czasowych. Chociaż błędy są i tak na tyle małe, że nie mają wpływu na ostateczną odpowiedź konstrukcji.



Rys. 2.10. Wykres względnych rozbieżności przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń dla węzła 2 kierunku  $u_x$  przy modelowaniu IMDW

### 2.4.2. Wykorzystanie Impulsowej Metody Sił Wirtualnych

Zmianę sztywności konstrukcji można modelować również z wykorzystaniem pola sił wirtualnych stosując *Impulsową Metodę Sił Wirtualnych*. W takim przypadku równanie ruchu dla konstrukcji modelowanej siłami wirtualnymi wygląda następująco:

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T S_{\alpha\varphi} G_{\varphi j} u_j(t) = f_i(t) + p_i^{0E}(t), \quad (2.39)$$

gdzie  $p^{0E}(t)$  jest wektorem sił wirtualnych modelujących sztywność konstrukcji,  $S_{\alpha\varphi}$  jest macierzą diagonalną, z elementami na diagonalu  $S_{\alpha\alpha} = E_{\alpha} A_{\alpha} / l_{\alpha}$  gdzie  $A_{\alpha}$  - przekrój poprzeczny elementu,  $l_{\alpha}$  - długość elementów,  $E_{\alpha}$  - moduł Young'a. Podkreślone indeksy oznaczają, iż nie ma po nich sumowania. Indeksy rzymskie oznaczają stopnie swobody natomiast indeksy greckie są powiązane z elementami.

Odpowiedź dynamiczna konstrukcji zmodyfikowanej, wyznaczana jest jako superpozycja odpowiedzi konstrukcji z niezmienionymi sztywnościami, oraz liniowej kombinacji dynamicznej macierzy wpływu i sił wirtualnych.

$$u_i(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} D_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{0E}(\tau), \quad (2.40)$$

gdzie wektor sił wirtualnych  $\mathbf{p}^{0E}(t)$  odpowiada za modelowanie sztywności elementu,  $u_i^L(t)$  oznacza rozwój przemieszczeń w stopniach swobody  $i$ , wyznaczony dla konstrukcji sprężystej z początkową dystrybucją sztywności.  $D_{ij}^p(t-\tau)$  jest dynamiczną macierzą wpływu opisującą ewolucję przemieszczeń w stopniu swobody  $i$  w chwili czasowej  $t$ , w wyniku jednostkowego impulsu siły wirtualnej<sup>3)</sup>, wygenerowanego w chwili czasowej  $\tau$ . Impuls zadawany jest jako nie zrównoważona siła w stopniach swobody  $i$  o arbitralnej wartości. Stopnie swobody do których przykładane są sekwencyjnie impulsy siły powiązane są z elementami z modyfikowaną sztywnością.

Indeksy  $i$  przebiegają po wszystkich stopniach swobody układu, indeksy  $j$  tylko po stopniach swobody elementów z modyfikacją sztywności  $j \in \mathfrak{E}$ .

Postulując równość sił i przemieszczeń dla konstrukcji modelowanej i zmodyfikowanej (2.41)

$$\hat{K}_{ij} u_j(t) = K_{ij} u_j(t) - p_i^{0E}(t), \quad (2.41)$$

<sup>3)</sup>W odróżnieniu od Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych gdzie wymuszenie konstrukcji dla wyznaczenia macierzy wpływu realizowane było jednostkową dystorsją  $\varepsilon^0$

można wyznaczyć siły wirtualne,

$$p_i^{0E}(t) = -\Delta K_{ij} u_j(t), \quad (2.42)$$

gdzie  $\Delta \mathbf{K}$  opisuje przyrost macierzy sztywności spowodowany zmianą sztywności, który może być wyznaczany z zależności:

$$\Delta K_{ij} = G_{i\alpha}^T \Delta S_{\alpha\varphi} G_{\varphi j}, \quad (2.43)$$

gdzie  $\Delta S_{\alpha\varphi}$  jest macierzą diagonalną, z elementami na diagonalu  $\Delta S_{\alpha\alpha} = (\mu_{\alpha}^E - 1) E_{\alpha} A_{\alpha} / l_{\alpha}$  gdzie  $A_{\alpha}$  - przekrój poprzeczny elementu,  $l_{\alpha}$  - długość elementów,  $E_{\alpha}$  - moduł Young'a.

Przyrost macierzy sztywności można również wyznaczyć z zależności:

$$\Delta K_{ij} = \sum_{\alpha} (\mu_{\alpha}^E - 1) E_{\alpha} A_{\alpha} / L_{\alpha} \underline{\hat{a}}_{ir}^T K_{rs}^{el} \underline{\hat{a}}_{sj}, \quad (2.44)$$

gdzie macierz  $\mathbf{a}$  określa związek pomiędzy stopniami swobody elementu skończonego  $\alpha$  (indeksy  $r, s$ ), a stopniami swobody całej struktury (indeksy  $i, j$ ),  $K^{el}$  dla elementu kratowego dwu wymiarowego ma postać [29]:

$$K^{el} = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

gdzie  $s, c$  oznaczają odpowiednio sinus i kosinus kąta nachylenia elementu.

Z (2.44) widać, że zmianę sztywności może powodować zmiana modułu Young'a  $E$  jak również pola przekroju  $A$ .

Podstawienie do równania na siły wirtualne (2.42) zależności na przemieszczenia (2.40) prowadzi do układu równań (2.46), który należy rozwiązać dla każdej chwili czasowej aby wyznaczyć siły wirtualne.

$$[\delta_{ik} + \Delta K_{ij} D_{jk}^p(1)] p_k^{0E}(t) = -\Delta K_{ij} u_j^{\neq t}(t), \quad (2.46)$$

gdzie  $u_j^{\neq t}(t)$  jest przemieszczeniem w stopniu swobody  $j$  które nie uwzględnia sił wirtualnych  $p^0(t)$  dla chwili czasowej  $t$ .

$$u_i^{\neq t}(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau=1}^{t-1} D_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{0E}(\tau). \quad (2.47)$$

W Tab. 2.4 przedstawiono algorytm modelowania sztywności elementów z wykorzystaniem IMFV.

TABLICA 2.4. Algorytm modelowania sztywności Impulsową Metodą Sił Wirtualnych

<p>Dane oraz obliczenia inicjujące</p> <p>Dane wejściowe zadania</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• konstrukcja pod ustalonym obciążeniem zewnętrznym <math>\mathbf{Q}(t)</math></li> <li>• lokalizacje zmian sztywności <math>j \in \mathcal{E}</math></li> <li>• parametry modyfikacji sztywności <math>\mu^E</math></li> </ul> <p>Obliczamy</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odpowiedź konstrukcji na obciążenie <math>\mathbf{Q}(t)</math> dla konstrukcji z niezmodyfikowaną sztywnością <math>\mathbf{u}^L(t)</math></li> <li>• macierz wpływu <math>\mathbf{D}^P(t)</math></li> <li>• macierz odpowiedzialna za wyznaczanie sił wirtualnych niezależna od czasu</li> </ul> $F_{ik} = [\delta_{ik} + \Delta K_{ij} D_{jk}^P(1)]$ <p>Obliczenia dla każdej chwili <math>t</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Przeszacowanie <math>\mathbf{u}^{\neq t}(t)</math> bez uwzględnienia sił wirtualnych <math>p^{0E}(t)</math>  <math display="block">u_i^{\neq t}(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau &lt; t} D_{ij}^P(t - \tau) p_j^{0E}(\tau)</math></li> <li>2. Wyznaczenie sił wirtualnych <math>\mathbf{p}^{0E}(t)</math> odpowiedzialnych za modelowanie sztywności elementów,  <math display="block">F_{ik} p_k^{0E}(t) = -\Delta K_{ij} u_j^{\neq t}(t)</math></li> <li>3. Uaktualnienie przemieszczeń dla <math>t</math>  <math display="block">u_i(t) = u_i^{\neq t}(t) + D_{ij}^P(1) p_j^{0E}(t)</math></li> </ol>
--

### Przykład 2.2

W przykładzie przeprowadzona zostanie analiza wspornika przedstawionego na Rys. 2.4.1, dla którego założono parametry modyfikacji sztywności jak dla poprzedniego przykładu przedstawione w Tab. 2.3. Wyniki otrzymane za pomocą zaprezentowanej w powyższym rozdziale *Impulsowej Metody Sił Wirtualnych* zostaną porównane z wynikami otrzymanymi *Metodą Dystorsji Wirtualnych*, która to została zaprezentowana w rozdziale poprzednim.

Dla wyznaczenia przyrostu macierzy sztywności  $\Delta K$  została wykorzystana formuła (2.44). W której macierz  $\mathbf{a}$  dla elementów 1 i 4 przyjmuje następujące wartości:

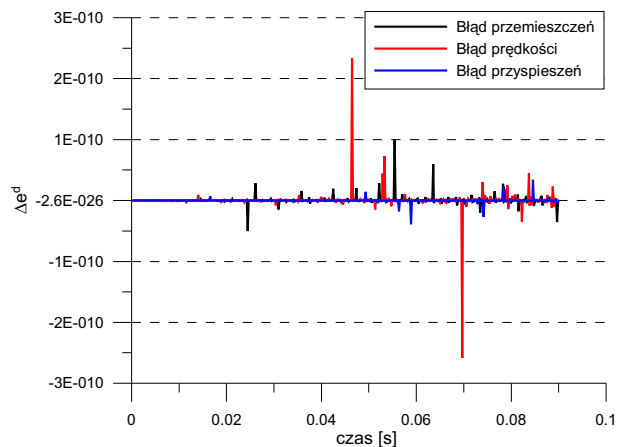
$$\mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Ponieważ wszystkie elementy podlegają modyfikacji sztywności, w związku z tym macierz  $\Delta K$  ma formę identyczną z macierzą sztywności konstrukcji.

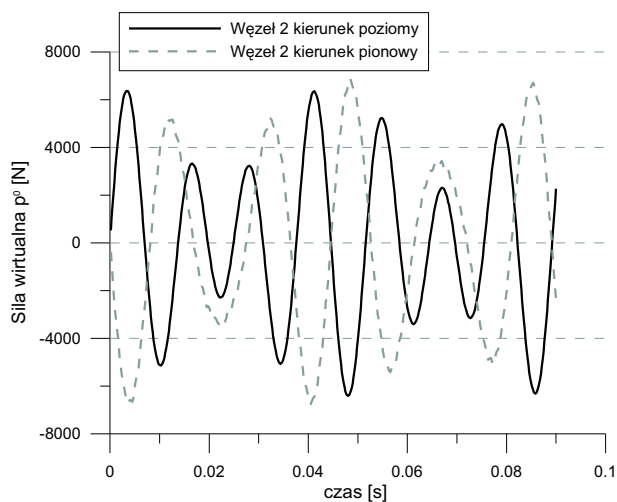
$$\Delta K = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1643969.6 & 593969.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 593969.6 & -383969.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -210000.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1198492.4 & 148492.4 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -210000.0 & 0.0 & 0.0 & 148492.4 & 358492.4 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Na wykresie Rys. 2.11 przedstawiono względną różnicę otrzymanych wyników przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Dla porównania wybrano te same stopnie swobody co w przykładzie modelowania sztywności Impulsową Metodą Dystorsji Wirtualnych. Zachowano również tą samą dyskretyzację przestrzeni czasowej. Zauważyć można prawie identyczny przebieg błędów dla obu metod wirtualnych przy modelowaniu sztywności. Dodatkowo przedstawiono na wykresie Rys. 2.12 przebiegi sił wirtualnych dla węzła drugiego w kierunku poziomym i pionowym.

Przedstawione wyniki pokazują możliwość stosowania zamiennie zależnie od potrzeb obu metod wirtualnych w zagadnieniach modelowania sztywności elementów konstrukcji.



RYS. 2.11. Względny błąd przyspieszeń, prędkości i przyspieszeń dla węzła 2 w kierunku pionowym przy wykorzystaniu IMFW



RYS. 2.12. Siły wirtualne modelujące sztywność elementu dla węzła drugiego

Modelowanie sztywności w następnych rozdziałach realizowane będzie za pomocą IMDW. Warunkiem wyboru tejże metody jest nie tylko jej mniejszy koszt numeryczny (patrz komentarz po (2.20)), ale również to, że wspomniana metoda umożliwia modelowanie nieliniowości fizycznych, które także zostaną zaprezentowane.

## 2.5. Przemodelowywanie redystrybucji masy (zmienna $M$ ) w konstrukcji

Do modelowania masy elementów konstrukcji może zostać użyta wyłącznie *Impulsowa Metoda Sił Wirtualnych*, ze względu na charakter macierzy  $\mathbf{D}^P$  generowanej niezrównoważonymi siłami wirtualnymi, dostaje się informacje o bezwładności konstrukcji.

Równanie równowagi dla konstrukcji z początkową dystrybucją masy, sformułowane jest w sposób (2.21). Macierz  $\mathbf{M}$  zawiera w sobie gęstość  $\rho$ , której modyfikacja może zostać zapisana w formie:

$$[\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.50)$$

gdzie  $\Delta\mathbf{M}$  opisuje modyfikację macierzy mas konstrukcji.

Równania ruchu dla konstrukcji zmodyfikowanej (2.51), oraz modelowanej (2.52) mogą być przedstawione wprowadzając składniki wirtualne do równań (2.21) i (2.50).

$$\hat{M}_{ij}\ddot{u}_j(t) + K_{ij}u_j(t) = f_i(t), \quad (2.51)$$

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + K_{ij}u_j(t) = f_i(t) + p_i^{\text{OM}}(t), \quad (2.52)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{M}}$  opisuje zmodyfikowaną przez zmianę gęstości materiału macierz mas,  $\mathbf{p}^{\text{OM}}(t)$  jest wektorem sił wirtualnych odpowiedzialnych za modelowanie masy.

Dla wyznaczenia siły wirtualnej  $\mathbf{p}^{\text{OM}}$  odpowiedzialnej za modelowanie masy elementu, należy zapostulować równość sił bezwładności dla konstrukcji modelowanej (2.52) i zmodyfikowanej (2.51) otrzymując:

$$\hat{M}_{ij}\ddot{u}_j = M_{ij}\ddot{u}_j - p_i^{\text{OM}}(t). \quad (2.53)$$

Z otrzymanego równania określona zostaje zależność na wyznaczenie sił wirtualnych odpowiedzialnych za modyfikację masy elementu:

$$p_i^{\text{OM}}(t) = -\Delta M_{ij}\ddot{u}_j(t). \quad (2.54)$$

Przyrost macierzy mas konstrukcji  $\Delta\mathbf{M}^k$  można określić zależnością:

$$\Delta M_{ij} = \sum_{\alpha} (\mu_{\alpha}^A - 1) A_{\alpha} \rho_{\alpha} l_{\alpha} a_{ir}^T M_{rs}^{el} a_{sj}, \quad (2.55)$$

gdzie:  $\rho_{\alpha}$  jest gęstością elementu, macierz  $\mathbf{a}$  określa związek pomiędzy stopniami swobody elementu skończonego  $\alpha$  (indeksy  $r, s$ ), a stopniami swobody całej struktury (indeksy  $i, j$ ). Macierz  $\mathbf{M}^{el}$  dla konsystentnej macierzy mas elementu kratowego dwuwymiarowego przyjmuje postać:

$$M^{el} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Z (2.55) widać, że modyfikację macierzy mas może spowodować zarówno zmiana pola przekrojów elementów  $A$ , jak również gęstości  $\rho$

Wielkość  $\mu^A$  jest parametrem modyfikacji pola przekroju (2.57) zdefiniowanym jako stosunek nowego pola przekroju  $\hat{A}$  do oryginalnego  $A$ .

$$\mu_{\alpha}^A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{A}_{\alpha}}{A_{\alpha}} = \frac{\hat{\rho}_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{\alpha}^R. \quad (2.57)$$



Odpowiedź dynamiczna konstrukcji dla IMFW wyznaczana jest jako superpozycja pól wirtualnych, oraz odpowiedzi liniowej w następujący sposób:

$$u_i(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} D_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{0M}(\tau), \quad (2.58)$$

gdzie wektor sił wirtualnych  $\mathbf{p}^{0M}(t)$  odpowiada za modelowanie masy elementu, wektor  $\mathbf{u}^L(t)$  oznacza rozwój przemieszczeń w stopniach swobody  $i$ , wyznaczony dla konstrukcji elastycznej z początkową redystrybucją sztywności,  $D_{ij}^p(t-\tau)$  jest dynamiczną macierzą wpływu. Indeksy  $i$  przebiegają po wszystkich stopniach swobody układu natomiast indeksy  $j$  po stopniach swobody elementów z modyfikacją masy  $j \in \mathfrak{M}$ .

Niezbędne do wyznaczenia sił wirtualnych  $\mathbf{p}^{0M}(t)$ , są wartości przyspieszeń  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  wyznaczane dla każdej chwili czasowej. Prędkości i przyspieszenia można wyznaczyć z następujących zależności:

$$\dot{u}_i(t) = \dot{u}_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} \dot{D}_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{0M}(\tau) \quad (2.59)$$

$$\ddot{u}_i(t) = \ddot{u}_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} \ddot{D}_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{0M}(\tau) \quad (2.60)$$

gdzie:  $\dot{\mathbf{u}}^L(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}^L(t)$  to wektory opisujące odpowiednio prędkości i przyspieszenia konstrukcji konstrukcji nie zmodyfikowanej. Macierze  $\dot{\mathbf{D}}^P(t+1-\tau)$  oraz  $\ddot{\mathbf{D}}^P(t+1-\tau)$  są dynamicznymi macierzami wpływu opisują one odpowiednio historię prędkości i przyspieszeń konstrukcji dla odpowiednich stopni swobody, wygenerowanych w wyniku działania jednostkowych sił w stopniach swobody elementów ze zmienionym polem przekroju (gęstością)  $j \in \mathfrak{M}$ . Macierze te są również macierzami trójwymiarowymi.

Równanie z którego wyznaczane są siły wirtualne otrzymywane jest przez podstawienie przyspieszeń (2.60) do zależności na siłę wirtualną (2.54).

$$\left[ \delta_{ik} + \Delta M_{ij} \ddot{D}_{jk}^p(1) \right] p_k^0(t) = -\Delta M_{ij} \ddot{u}_j^{\neq t}(t) \quad (2.61)$$

gdzie  $\ddot{\mathbf{u}}^{\neq t}(t)$  jest wektorem przyspieszeń w którym nie uwzględniono wpływu sił wirtualnych  $p^{0M}(t)$  dla aktualnej chwili czasowej  $t$ .

$$\ddot{u}_i^{\neq t}(t) = \ddot{u}_i^L(t) + \sum_{\tau < t} \ddot{D}_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{0M}(\tau) \quad (2.62)$$

Algorytm modelowania masy przedstawiono w tabeli Tab. 2.5.

TABLICA 2.5. Algorytm modelowania masy elementów Impulsową Metod Sił Wirtualnych

Dane oraz obliczenia inicjujące	
Dane wejściowe zadania	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• konstrukcja pod ustalonym obciążeniem zewnętrznym <math>\mathbf{Q}(t)</math></li> <li>• lokalizacje zmian masy <math>j \in \mathfrak{M}</math></li> <li>• parametry modyfikacji masy <math>\mu^M</math></li> </ul>	
Obliczamy	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• odpowiedź konstrukcji na obciążenie <math>\mathbf{Q}(t)</math> dla konstrukcji z niezmodyfikowaną mas <math>\ddot{\mathbf{u}}^L(t)</math></li> <li>• macierz wpływu <math>\ddot{\mathbf{D}}^P(t)</math></li> <li>• główna macierz odpowiedzialna za wyznaczanie sił wirtualnych niezależna od czasu</li> </ul>	
$F_{ik} = \left[ \delta_{ik} + \Delta M_{ij} \ddot{D}_{jk}^P(1) \right]$	
Obliczenia dla każdej chwili $t$	
1.	Przyspieszenia $\ddot{\mathbf{u}}^{\neq t}(t)$ bez uwzględnienia sił wirtualnych $p^{OM}(t)$
	$\ddot{u}_i^{\neq t}(t) = \ddot{u}_i^L(t) + \sum_{\tau < t} \ddot{D}_{ij}^P(t - \tau) p_j^{OM}(\tau)$
2.	Wyznaczenie sił wirtualnych $\mathbf{p}^{OM}(t)$ odpowiedzialnych za modelowanie masy elementów,
	$F_{ik} p_k^{OM}(t) = -\Delta M_{ij} \ddot{u}_j^{\neq t}(t)$
3.	Uaktualnienie przyspieszeń dla $t$
	$\ddot{u}_i(t) = \ddot{u}_i^{\neq t}(t) + \ddot{D}_{ij}^P(1) p_j^{OM}(t)$
4.	$t = t + 1$

**Przykład 2.3**

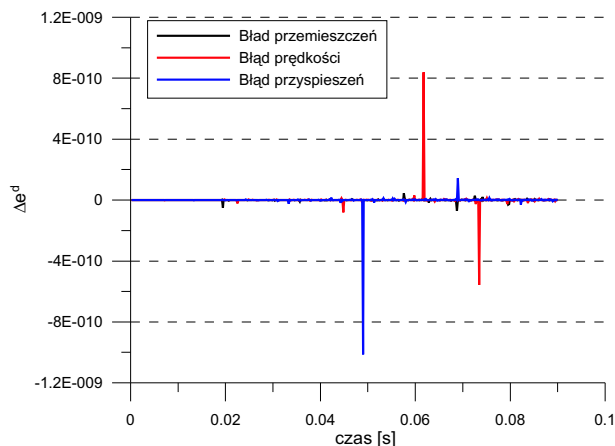
Poprawność modelowania masy przedstawiono na przykładzie konstrukcji Rys. 2.4.1. Dla wszystkich elementów konstrukcji przyjęto jednakowy materiał dla którego moduł Young’a oraz gęstość wynoszą odpowiednio  $E = 2.1e11[Pa]$ ,  $\rho = 7800[\frac{kg}{m^3}]$ . Przekrój poprzeczny dla wszystkich elementów wynosi  $A = 1.0e - 5[m]$ , natomiast wymiary konstrukcji przedstawione są na rysunku.

W konstrukcji założono zmianę masy we wszystkich elementach. Parametry modyfikacji  $\mu^R$  zostały przedstawione w Tab. 2.6. Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniem zadania metod elementów skończonych w którym masę elementów zmieniano przez wpływ na gęstość materiału  $\rho$ . Nowe wartości gęstości przedstawiono również w tabeli Tab. 2.6.

TABLICA 2.6. Zmiana masy elementów konstrukcji

Nr Elementu	Parametr modyfikacji $\mu^R$	Nowa wartość gęstości $[kg.m^3]$
1	0.5	3900
2	1.1	8580
3	1.5	11700
4	1.2	9360
5	0.2	1560

Ze względu na bardzo małe rozbieżności otrzymanych wyników na wykresie Rys. 2.13 przedstawiono bezwzględne różnice (2.38) pomiędzy wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych oraz IMFW.



Rys. 2.13. Bezwzględne różnice przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń dla węzła 4 w kierunku poziomym

Na wykresie Rys. 2.13 przedstawiono bezwzględne błędy przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Charakter przebiegu błędów jest zbliżony do błędu modelowania sztywności i również jest na granicy błędu numerycznego.

## 2.6. Przemodelowywanie masy uderzającej

W rozdziale tym autor przedstawi idee modelowania obciążenia dynamicznego (impaktu) z wykorzystaniem *Impulsowej Metody Sił Wirtualnych* IMFW. W sposób numeryczny uderzenie realizowane jest przez dodanie masy w węzle struktury, oraz zadanie prędkości w tym węzle jako warunku początkowego zadania.

Masa uderzająca w chwili początkowej jest “przyklejona” do węzła i porusza się razem z nim w trakcie całej analizy. W związku z tym jest ona częścią macierzy mas  $\mathbf{M}$  całego układu. Macierz tę można przedstawić jako sumę macierzy mas konstrukcji  $\mathbf{M}^k$  oraz macierzy mas uderzających  $\mathbf{M}^i$ .

W związku z powyższym równanie ruchu można przedstawić w następujący sposób:

$$[M_{ij}^k + M_{ij}^i] \ddot{u}_j(t) + K_{ij}u_j(t) = f_i(t), \quad (2.63)$$

gdzie macierze  $\mathbf{M}^k$ ,  $\mathbf{M}^i$ ,  $\mathbf{K}$ , są odpowiednio macierzami masy konstrukcji, masy uderzającej oraz sztywności, natomiast  $\mathbf{f}(\mathbf{t})$  jest wektorem sił zewnętrznych zależnych od czasu.

Zmiana mas uderzających może zostać zapisana w następujący sposób:

$$[M_{ij}^k + M_{ij}^i + \Delta M_{ij}^i] \ddot{u}_j(t) + K_{ij}u_j(t) = f_i(t), \quad (2.64)$$

gdzie macierz  $\Delta \mathbf{M}^i$  oznacza przyrost masy uderzającej.

Równanie ruchu dla konstrukcji z modelowaną (siłami wirtualnymi  $\mathbf{p}^{0I}(\mathbf{t})$ ) masą uderzającą można przedstawić w następujący sposób:

$$(M_{ij}^k + M_{ij}^i) \ddot{u}_j(t) + K_{ij}u_j(t) = f_i(t) + p_i^{0I}(t). \quad (2.65)$$

Po porównaniu (2.64) z (2.65) dostajemy formułę na wyznaczenie siły wirtualnej odpowiedzialnej za modelowanie masy uderzającej:

$$p_i^{0I}(t) = -\Delta M_{ij}^i \ddot{u}_j(t). \quad (2.66)$$

Macierz mas uderzających  $\mathbf{M}^i$ , wyznaczona została z wykorzystaniem następującej formuły:

$$M_{ij}^i = \sum_n m_n \underline{b}_{is}^n \delta_{sr} \underline{b}_{rj}^n, \quad (2.67)$$

gdzie  $n$  przebiega po węzłach w których jest przyłożona masa uderzająca  $m_n$ . Macierz  $\underline{\mathbf{b}}^n$  wiąże ze sobą stopnie swobody  $r, s$  masy  $m$  ze stopniami swobody całej konstrukcji  $i, j$  natomiast  $\delta$  jest deltą Kronecera.

Przyrost masy uderzającej wyrażono zależnością:

$$\hat{M}_{ij}^i - M_{ij}^i = \Delta M_{ij}^i = \sum_n (\mu_n^I - 1) m_n \underline{b}_{is}^n \delta_{sr} \underline{b}_{rj}^n, \quad (2.68)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{M}}^i$  oznacza macierz ze zmodyfikowanymi masami uderzającymi, wektor  $\mu^I$  przedstawia parametr modyfikacji i oznacza stosunek zmienionej masy uderzającej do oryginalnej:

$$\mu_n^I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{m}_n}{m_n}. \quad (2.69)$$

Przemieszczenia konstrukcji z modelowaną masą uderzającą można przedstawić jako super pozycję odpowiedzi konstrukcji na uderzenie masą oryginalną  $u_i^L(t)$  oraz części rezydualnej wyrażającej wpływ zmiany masy.

$$u_i(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau < t} D_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{0I}(\tau), \quad (2.70)$$

gdzie wektor  $\mathbf{u}^L(\mathbf{t})$  oznacza odpowiedź konstrukcji na uderzenie oryginalną masą,  $\mathbf{p}^{0I}(\mathbf{t})$  jest wektorem sił wirtualnych. Indeks  $j$  przebiega po zbiorze  $j \in \mathcal{J}$  stopni swobody związanych z masą uderzającą.

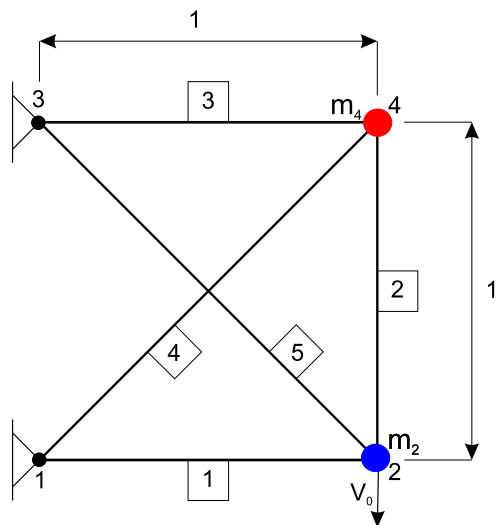
Zależność na przyspieszenia można zapisać w następujący sposób:

$$\ddot{u}_i(t) = \ddot{u}_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} \ddot{D}_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{0I}(\tau), \quad (2.71)$$

gdzie  $\ddot{\mathbf{D}}^p(\mathbf{t})$  oznacza dynamiczną macierz wpływu, opisującą dynamiczną odpowiedź układu z oryginalną masą uderzającą wyrażoną w przyspieszeniach. Macierz wpływu wygenerowana została przez przyłożenie jednostkowego impulsu siły w odpowiednich stopniach swobody. Niezbędny do wyznaczenia wirtualnych sił  $p^{0I}$  układ równań, otrzymywany jest przez podstawienie przyspieszeń (2.71) od zależności (2.66).

$$\left[ \delta_{ik} + \Delta M_{ij}^I \ddot{D}_{jk}^p(1) \right] p_k^{0I}(t) = -\Delta M_{ij}^i \ddot{u}_j^{\neq t}(t) \quad (2.72)$$

gdzie  $\ddot{\mathbf{u}}^{\neq t}(t)$  jest wektorem przyspieszeń w którym nie uwzględniono wpływu sił wirtualnych modelujących masę uderzającą dla danego kroku czasowego.



Rys. 2.14. Konstrukcja kratowa obciążona dynamicznie

Algorytm modelowania jest analogiczny do algorytmu modelowania masy elementów konstrukcji przedstawionego w poprzednim rozdziale.

#### Przykład 2.4

Poprawności modelowania zmiany masy uderzającej przedstawiono na przykładzie konstrukcji złożonej z elementów kratowych przedstawionej na Rys. 2.14. Właściwości materiałowe konstrukcji to: gęstość =  $7800[\frac{kg}{m^3}]$ , moduł Young'a =  $2.1e11 [Pa]$ , Wymiary konstrukcji pokazane są na Rys. 2.14.

Waga całej konstrukcji to  $0.48 [kg]$ , masa uderzająca wynosi dla węzła drugiego i czwartego  $m_2 = m_4 = 1[kg]$ .

Ustalono różne parametry modyfikacji dla każdej masy uderzającej. Dla drugiego węzła  $\mu_2 = 0.5$  i dla czwartego  $\mu_4 = 1.9$ . W związku z tym w drugim węźle masa zostanie zmniejszona o połowę i będzie równa  $\hat{m}_2 = 0.5[kg]$ , a w węźle 4 masa zostanie zwiększona do  $\hat{m}_4 = 1.9[kg]$

Macierz mas uderzających jest macierzą diagonalną i dla konstrukcji zmodyfikowanej przedstawionej na Rys. 2.14 wygląda następująco:

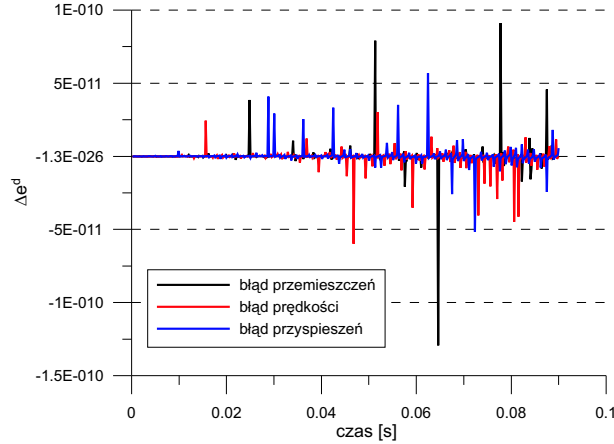
$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Macierze  $\mathbf{b}$  dla mas uderzających mają postać.

$$\mathbf{b}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{b}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Po wykonaniu obliczeń metodami MES i IMFV, porównano bezwzględne różnice pomiędzy przemieszczeniami, prędkościami oraz przyspieszeniami dla węzła 2 w kierunku

poziomym Rys. 2.15. Błąd pomiędzy otrzymanymi wynikami jest bliski błędowi numerycznemu i nie przekracza  $1 \times 10^{-10}$ . Świadczy to o poprawności metody.



RYS. 2.15. Porównanie błędów wartości przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia dla węzła 2 w kierunku poziomym

### 2.6.1. Analiza wrażliwości dla zmiany parametru modyfikacji masy uderzającej

W rozdziale tym zostanie przeprowadzona przykładowa analiza wrażliwości pola przemieszczeń  $\mathbf{u}(t)$  na zmianę parametru modyfikacji masy uderzającej  $\mu^I$ . Aby wyznaczyć wrażliwość pola przemieszczeń na zmianę parametru modyfikacji masy  $\mu_m^I$ , należy zróżniczkować równanie (2.70), otrzymując następujące zależności:

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial \mu_m^I} = \sum_{\tau < t} D_{ij}^p(t - \tau) \frac{\partial p_j^{0I}(\tau)}{\partial \mu_m^I}, \quad (2.75)$$

gdzie składnik  $\frac{\partial p_j^{0I}(\tau)}{\partial \mu_m^I}$  wyznaczamy różniczkując (2.72):

$$\left[ \delta_{ik} + \Delta M_{ij} \ddot{D}_{jk}(1) \right] \frac{\partial p_j^{0I}(t)}{\partial \mu_m^I} = - \frac{\partial \Delta M_{ji}^i}{\partial \mu_m^I} \ddot{u}_i(t) - \Delta M_{ji}^i \frac{\partial \ddot{u}_i(t)}{\partial \mu_m^I}. \quad (2.76)$$

Główna macierz równania (2.76)  $\left[ \delta_{ik} + \Delta M_{ij} \ddot{D}_{jk}(1) \right]$  jest identyczna z macierzą w równaniu (2.72) i może być wyznaczona tylko raz. Składnik  $\frac{\partial \Delta M_{ji}^i}{\partial \mu_m^I}$  wyznaczamy różniczkując zależność (2.68),

$$\frac{\partial \Delta M_{ji}^i}{\partial \mu_m^I} = m_m^m b_{is}^{mT} \delta_{sr}^m b_{rj}^m. \quad (2.77)$$

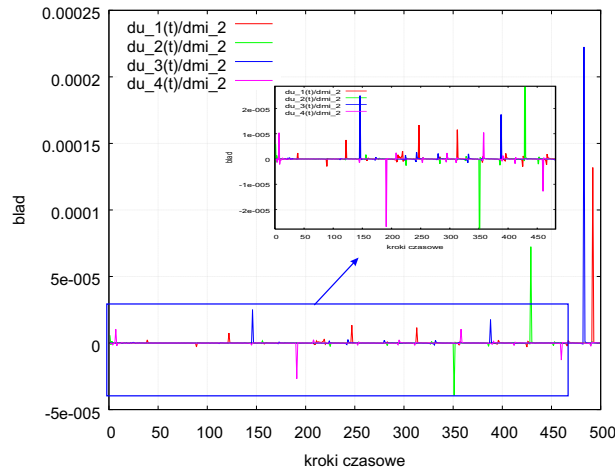
Natomiast aby wyznaczyć brakujący składnik  $\frac{\partial \ddot{u}_i(t)}{\partial \mu_m^I}$  w równaniu (2.75) należy zróżniczkować zależność (2.60) otrzymując:

$$\frac{\partial \ddot{u}_k(t)}{\partial \mu_m^I} = \sum_{\tau < t} \ddot{D}_{ij}^p(t - \tau) \frac{\partial p_j^{0I}(\tau)}{\partial \mu_m^I}. \quad (2.78)$$

Test analizy wrażliwości pola przemieszczeń na zmianę parametru modyfikacji masy uderzającej wykonano wg. algorytmu przedstawionego w Tab. 2.7. Otrzymane wyniki analitycznej analizy wrażliwości porównano z metodą różnic skończonych, korzystając z zależności (2.38). W tym przykładzie wielkością referencyjną  $()^d$  są gradienty wyznaczone metodą różnic skończonych. Wielkość błędu pomiędzy wrażliwością wyznaczoną metodą różnic skończonych, a wyznaczoną analitycznie IMFW przedstawiono na wykresie Rys. 2.16. Maksymalna wartość nie przekracza wynosi  $2.225e - 4$ .

TABLICA 2.7. Algorytm dla dynamicznego zadania modelowania masy uderzającej, z analizą wrażliwości

<p><b>Dane oraz obliczenia inicjujące</b></p> <p>Dane wejściowe zadania</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• konstrukcja pod ustalonym obciążeniem zewnętrznym <math>\mathbf{Q}(t)</math></li> <li>• lokalizacje mas uderzających <math>j \in \mathcal{J}</math></li> <li>• parametry modyfikacji masy uderzającej <math>\mu^I</math></li> </ul> <p>Obliczamy</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odpowiedź konstrukcji na obciążenie <math>\mathbf{Q}(t)</math> dla konstrukcji z niezmodyfikowaną masą uderzającą <math>\mathbf{u}^L(t)</math></li> <li>• macierze wpływu <math>\mathbf{D}^P(t)</math>, <math>\mathbf{\ddot{D}}^P(t)</math></li> <li>• główna macierz dla wyznaczania sił wirtualnych niezależna od czasu</li> </ul> $F_{ik} = [\delta_{ik} + \Delta M_{ij}^I \ddot{D}_{jk}^P(1)]$ <p>Obliczenia dla każdej chwili <math>t</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Przyspieszenia <math>\ddot{\mathbf{u}}^{\neq t}(t)</math>  <math display="block">\ddot{u}_i^{\neq t}(t) = \ddot{u}_i^L(t) + \sum_{\tau &lt; t} \ddot{D}_{ij}^p(t - \tau) p_j^{0I}(\tau)</math> </li> <li>2. Wyznaczenie siły wirtualnej odpowiedzialnej za modelowanie uderzenia,  <math display="block">F_{ik} p_k^{0I}(t) = -\Delta M_{ij} \ddot{u}_j^{\neq t}(t)</math> </li> <li>3. Analiza wrażliwości pola przemieszczeń na zmianę parametru modyfikacji <math>\mu^I</math>, wyznaczenie składników gradientu zależnych od czasu dla każdej chwili <math>t</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>(a) Wrażliwości przyrostu masy uderzającej <math>\Delta M^i</math> na zmianę parametru modyfikacji masy <math>\mu^I</math>,  <math display="block">\frac{\partial \Delta M_{ji}^i}{\partial \mu_m^I} = m_m \overset{n}{b}_{is}^T \delta_{sr} \overset{n}{b}_{rj}</math> </li> <li>(b) Wrażliwości przyspieszenia na przyrost parametru modyfikacji masy,  <math display="block">\frac{\partial \ddot{u}_k(t)}{\partial \mu_m^I} = \sum_{\tau &lt; t} \ddot{D}_{ij}^p(t - \tau) \frac{\partial p_j^{0I}(\tau)}{\partial \mu_m^I}</math> </li> <li>(c) Wrażliwości siły wirtualnej na przyrost parametru modyfikacji masy,  <math display="block">F_{ik} \frac{\partial p_k^{0I}(t)}{\partial \mu_m^I} = -\frac{\partial \Delta M_{ji}^i}{\partial \mu_m^I} \ddot{u}_i(t) - \Delta M_{ji}^i \frac{\partial \ddot{u}_i(t)}{\partial \mu_m^I}</math> </li> <li>(d) Wrażliwości przemieszczeń na przyrost parametru modyfikacji masy,  <math display="block">\frac{\partial u_i(t)}{\partial \mu_m^I} = \sum_{\tau &lt; t} D_{ij}^p(t - \tau) \frac{\partial p_j^{0I}(\tau)}{\partial \mu_m^I}</math> </li> </ol> </li> </ol>
--



RYS. 2.16. Porównanie wartości błędu gradientu dla analizy wrażliwości pola przemieszczeń  $u_i(t)$  na zmianę parametru modyfikacji masy przyłożonej w węzle drugim  $\mu_2$

## 2.7. Przemodelowywanie redystrybucji pola przekroju w ustrojach (sprężona zmienna $A$ )

W zadaniach analizy dynamicznej modelowanie przekrojów  $A$  wiąże się nie tylko ze zmianą sztywności  $K$ , lecz również ze zmianą masy  $M$  elementów<sup>4</sup>).

Równanie ruchu dla układu z elementami ze zmodyfikowanym przekrojem  $\hat{A}$ , (zmodyfikowana masa  $\hat{M}$ , jak również zmodyfikowana sztywności  $\hat{K}$ ), zapisano w następujący sposób:

$$\hat{M}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T \hat{S}_{\alpha\varphi} G_{\varphi j} u_j(t) = f_i(t). \quad (2.79)$$

Równanie ruchu (2.79) można zapisać z użyciem sił wirtualnych  $p^{0M}(t)$  odpowiedzialnych za modyfikacje masy, oraz dystorsji wirtualnych  $\varepsilon^0(t)$  odpowiedzialnych za modyfikacje sztywności w następujący sposób:

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T S_{\alpha\varphi} \left[ G_{\varphi j} u_j(t) - L_{\varphi} \varepsilon_{\varphi}^0(t) \right] = f_i(t) + p_i^{0A}(t), \quad (2.80)$$

gdzie  $\hat{S}_{\alpha\varphi}$  i  $S_{\alpha\varphi}$  są macierzami diagonalnymi, z elementami na diagonalu odpowiednio  $\hat{S}_{\alpha\alpha} = E_{\alpha} \hat{A}_{\alpha} / l_{\alpha}$  oraz  $S_{\alpha\alpha} = E_{\alpha} A_{\alpha} / l_{\alpha}$ . Równanie (2.80) może zostać zapisane z użyciem wektora odkształceń w następujący sposób:

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T S_{\alpha\varphi} \left[ L_{\varphi} \left( \varepsilon_{\varphi}(t) - \varepsilon_{\varphi}^0(t) \right) \right] = f_i(t) + p_i^{0A}(t), \quad (2.81)$$

Odpowiedź dynamiczna konstrukcji wyznaczana jest jako superpozycja odpowiedzi struktury z nie zmienionymi przekrojami oraz pól wirtualnych ( $\varepsilon^0$  odpowiedzialnych za modelowanie sztywności oraz  $p^{0A}$  odpowiedzialnych za modelowanie masy w elementach) w następujący sposób:

$$u_i(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} D_{i\xi}^{\varepsilon}(t + 1 - \tau) \varepsilon_{\xi}^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} D_{ij}^p(t + 1 - \tau) p_j^{0A}(\tau), \quad (2.82)$$

gdzie indeksy,  $i$  przebiegają po wszystkich stopniach swobody układu, indeksy  $\xi$  po elementach ze zbioru elementów z modyfikacją pola przekroju  $\xi \in \mathfrak{A}$ ,  $j$  po stopniach swobody powiązanych z elementami z modyfikowanym przekrojem  $j \in \mathfrak{A}$ .

<sup>4</sup>) Pole przekroju jest składnikiem zarówno macierzy sztywności jak również macierzy bezwładności



Wektor odkształceń  $\varepsilon(t)$  można otrzymać przez przemnożenie równania (2.82) przez wielkość  $\frac{1}{L_\alpha}G_{\alpha i}$ , oraz stosując zdefiniowane w poprzednim rozdziale zmienne (2.30) w formie:

$$\varepsilon_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha^L(t) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha\xi}^\varepsilon(t+1-\tau)\varepsilon_\xi^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha j}^p(t+1-\tau)p_j^{0A}(\tau). \quad (2.83)$$

Dla wyznaczenia pól wirtualnych, autor postuluje, aby odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej (2.84) jak i odpowiedź konstrukcji modelowanej dystorsjami wirtualnymi (2.85) były identyczne.

$$p_\alpha(t) = E_\alpha \hat{A}_\alpha \varepsilon_\alpha(t), \quad (2.84)$$

$$p_\alpha(t) = E_\alpha A_\alpha (\varepsilon_\alpha(t) - \varepsilon_\alpha^0(t)). \quad (2.85)$$

Zakładając modyfikacje pola przekroju elementu (składnika odpowiedzialnego za sztywność), wektor modyfikacji może zostać wyrażony w następujący sposób (por. (2.37)):

$$\mu_\alpha^A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{A}_\alpha}{A_\alpha} = \frac{\varepsilon_\alpha(t) - \varepsilon_\alpha^0(t)}{\varepsilon_\alpha(t)}. \quad (2.86)$$

Przekształcając równanie (2.86) oraz podstawiając odkształcenia (2.83) można wyznaczyć dystorsje wirtualne odpowiedzialne za modyfikacje pola przekroju:

$$[\delta_{\alpha\xi} - (1 - \mu_\alpha^A)B_{\alpha\xi}^\varepsilon(1)] \varepsilon_\xi^0(t) - (1 - \mu_\alpha^A)B_{\alpha k}^p(1)p_k^{0A}(t) = (1 - \mu_\alpha^A) \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t). \quad (2.87)$$

Aby otrzymać drugi składnik modyfikacji  $A$  (odpowiedzialny za modyfikacje masy elementu  $p^{0M}$ ), należy zapostulować równość sił bezwładności dla konstrukcji zmodyfikowanej i modelowanej (por. (2.53)):

$$\hat{M}_{ij}\ddot{u}_j = M_{ij}\ddot{u}_j - p_i^{0A}(t). \quad (2.88)$$

Z otrzymanego równania określona zostaje zależność na wyznaczenie sił wirtualnych odpowiedzialnych za modyfikacje masy elementu (por. (2.54)):

$$p_i^{0A}(t) = -\Delta M_{ij}\ddot{u}_j(t). \quad (2.89)$$

Przyrost macierzy mas konstrukcji  $\Delta \mathbf{M}$  wyznaczany jest z zależności (2.55), przedstawionej w poprzednich rozdziałach.

Wektor przyspieszenia  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  niezbędny dla określenia siły wirtualnej, należy wyznaczyć z następującej zależności:

$$\ddot{u}_i(t) = \ddot{u}_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} \ddot{D}_{ij}^p(t+1-\tau)p_j^{0A}(\tau) + \sum_{\tau \leq t} \ddot{D}_{i\alpha}^\varepsilon(t+1-\tau)\varepsilon_\alpha^0(\tau). \quad (2.90)$$

Dynamiczne macierze wpływu  $\ddot{\mathbf{D}}(t)$  opisują historie przyspieszeń będących skutkiem jednostkowego impulsu siły lub jednostkowej dystorsji.

Drugi układ równań niezbędny do wyznaczenia sił wirtualnych otrzymujemy przez podstawienie (2.90) do zależności (2.89) otrzymując:

$$\Delta M_{ij} \ddot{D}_{j\xi}^\varepsilon(1)\varepsilon_\xi^0(t) + [\delta_{ik} + \Delta M_{ij} \ddot{D}_{jk}^p(1)] p_k^{0A}(t) = -\Delta M_{ij} \ddot{u}_j^{\neq t}. \quad (2.91)$$

Ostatecznie otrzymany układ równań dla wyznaczenia dystorsji i sił wirtualnych modelujących pole przekroju przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} [\delta_{\alpha\xi} - (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A)B_{\underline{\alpha}\xi}^\varepsilon(1)] & (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A)B_{\underline{\alpha}k}^p(1) \\ \Delta M_{ij}\ddot{D}_{j\xi}^\varepsilon(1) & [\delta_{ik} + \Delta M_{ij}\ddot{D}_{jk}^p(1)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi^0(t) \\ p_k^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A)\varepsilon_{\underline{\alpha}}^{\neq t}(t) \\ -\Delta M_{ij}\ddot{u}_j^{\neq t} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Macierz główna w powyższym układzie równań jest niezależna od czasu i może być wyznaczana tylko raz. Jest ona również niezbędna przy analizie wrażliwości. Całe równanie możemy zapisać w formie macierzowej:

$$\mathbf{F}\mathbf{d}^0 = \mathbf{b} \quad (2.93)$$

gdzie  $\mathbf{d}^0$  jest wektorem, w którym zebrane są wszystkie wielkości wirtualne.

Niektóre zadania mogą uwzględniać zmianę pola przekroju elementów w jednym sumowaniu po czasie, co w znaczący sposób zmniejsza czas analizy,

$$u_i(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} D_{ij}^p(t + 1 - \tau)p_j^{0A}(\tau). \quad (2.94)$$

Możliwe jest to zakładając modelowanie masy i sztywności za pomocą *Impulsowej Metody Sił Wirtualnych*. Siła wirtualna  $\mathbf{p}^{0A}(t)$  składa się wtedy z dwóch członów: pierwszy odpowiedzialny za modelowanie sztywności  $\mathbf{p}^{0E}(t)$  (por. 2.4.2), a drugi za modelowanie masy  $\mathbf{p}^{0M}(t)$  (por. 2.5)

$$\mathbf{p}^{0A}(t) = \mathbf{p}^{0E}(t) + \mathbf{p}^{0M}(t). \quad (2.95)$$

### Przykład 2. 5

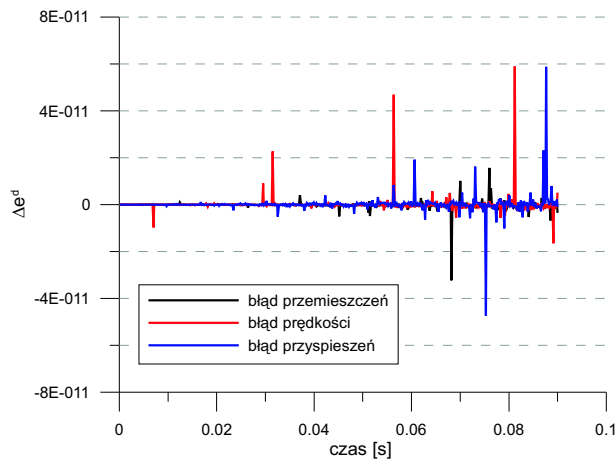
Poprawność metody modelowania pola przekroju  $A$  elementów została zaprezentowana na przykładzie przedstawionym na Rys. 2.4.1.

Przekroje poprzeczne dla wszystkich elementów konstrukcji są równe i wynoszą  $A = 1 \times 10^{-5} [m^2]$ . Założone zostały różne dla każdego elementu parametry modyfikacji  $\mu$ , przedstawione w tabeli:

TABLICA 2.8. Parametry modyfikacji oraz nowe wartości pola przekroju.

nr elementu	parametr modyfikacji $\mu$	nowy przekrój $\hat{A} [m^2]$
1	1.2	$1.2 \times 10^{-5}$
2	0.8	$0.8 \times 10^{-5}$
3	0.1	$0.1 \times 10^{-5}$
4	1.2	$1.2 \times 10^{-5}$
5	0.2	$0.2 \times 10^{-5}$

Na wykresie Rys. 2.17 przedstawiono bezwzględne wartości błędów przemieszczeń, prędkości oraz przyspieszeń wyznaczone z zależności (2.38), dla konstrukcji z przemodelowanymi polami przekrojów IMFV, oraz dla konstrukcji ze zmienionymi polami przekrojów Tab. 2.7 MES. Maksymalne wartości błędów nie przekraczają  $4 \times 10^{-11}$ . Można stwierdzić, że mimo sprzęgnięcia masy i sztywności w jednym zadaniu nie zwiększa się bezwzględny błąd pomiędzy wyznaczonymi wielkościami.



RYS. 2.17. Bezwzględne wartości błędów przemieszczeń prędkości i przyspieszeń w kierunku poziomym w węźle 2.

### 2.7.1. Analiza wrażliwości na zmianę pola przekroju elementów

Dla przedstawienia możliwej analizy wrażliwości, wyznaczono gradienty pola odkształceń po polach przekroju. Pierwszą czynnością jaka należy wykonać jest zróżniczkowanie zależności (2.83), po polu przekroju otrzymując następujący związek:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\alpha}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} = \sum_{\tau < t} B_{\alpha\xi}^{\varepsilon}(t+1-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{\xi}^0(\tau)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} + \sum_{\tau < t} D_{\alpha j}^p(t+1-\tau) \frac{\partial p_j^{0M}(\tau)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \quad (2.96)$$

Wrażliwość pola dystorsji wirtualnych  $\frac{\partial \varepsilon_{\xi}^0(\tau)}{\partial \hat{A}_{\varphi}}$  po polu przekroju jest określane przez zróżniczkowanie zależności (2.86), natomiast wrażliwość sił wirtualnych otrzymana jest po zróżniczkowaniu zależności (2.89).

$$\frac{\partial \varepsilon_{\alpha}^0(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} = -\frac{\partial \mu_{\alpha}}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \varepsilon_{\alpha}(t) + (1 - \mu_{\alpha}) \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \quad (2.97)$$

Gradient pola odkształceń po polu przekroju  $\frac{\partial \varepsilon_{\alpha}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}}$  zawiera w sobie również składniki pól wirtualnych dla danego kroku czasowego  $t$ :

$$\frac{\partial \varepsilon_{\alpha}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} + B_{\alpha\xi}^{\varepsilon}(1) \frac{\partial \varepsilon_{\xi}^0(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} + B_{\alpha j}^p(1) \frac{\partial p_j^0(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \quad (2.98)$$

gdzie  $\frac{\partial \varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}}$  jest wrażliwością pola odkształceń na zmianę pola przekroju nie zawierającą w sobie wrażliwości pól dystorsyjnych dla danego kroku czasowego  $t$ :

$$\frac{\partial \varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} = \sum_{\tau=1}^{t-1} B_{ij}^{\varepsilon}(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{\xi}^0(\tau)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} + \sum_{\tau=1}^{t-1} B_{\alpha j}^p(t-\tau) \frac{\partial p_j^0(\tau)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \quad (2.99)$$

Po podstawieniu (2.98) do (2.97) i przekształceniu otrzymano:

$$\left[ \delta_{\alpha\xi} - (1 - \mu_{\alpha}^A) B_{\alpha\xi}^{\varepsilon}(1) \right] \frac{\partial \varepsilon_{\xi}^0(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} - (1 - \mu_{\alpha}^A) B_{\alpha j}^p(1) \frac{\partial p_j^0(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} = (1 - \mu_{\alpha}) \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} - \frac{\partial \mu_{\alpha}}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \varepsilon_{\alpha}(t) \quad (2.100)$$

Gradient sił wirtualnych wyrażony jest w postaci:

$$\frac{\partial p_i^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = -\frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \hat{A}_\varphi} \ddot{u}_j(t) - \Delta M_{ij} \frac{\partial \ddot{u}_j(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \quad (2.101)$$

Podobnie do (2.98), wrażliwość pola przyspieszeń po polu przekroju powinna być wyrażona w funkcji składników wirtualnych zależnych od danego kroku czasowego  $t$  w formie:

$$\frac{\partial \ddot{u}_j(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = \frac{\partial \ddot{u}_j^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} + \ddot{D}_{j\xi}^\varepsilon(1) \frac{\partial \varepsilon_\xi^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} + \ddot{D}_{jk}^p(1) \frac{\partial p_k^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \quad (2.102)$$

Podstawiając (2.102) do (2.101) otrzymuje się drugi składnik niezbędny do wyznaczenia wrażliwości pól wirtualnych:

$$\Delta M_{ij} \ddot{D}_{j\xi}^\varepsilon(1) \frac{\partial \varepsilon_\xi^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} + \left[ \delta_{ik} + \Delta M_{ij} \ddot{D}_{jk}^p(1) \right] \frac{\partial p_j^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = -\frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \hat{A}_\varphi} \ddot{u}_j(t) - \Delta M_{ij} \frac{\partial \ddot{u}_j(t)}{\partial \hat{A}_\varphi}. \quad (2.103)$$

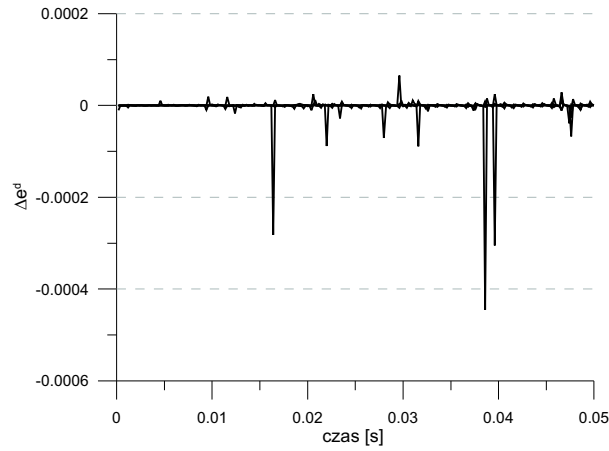
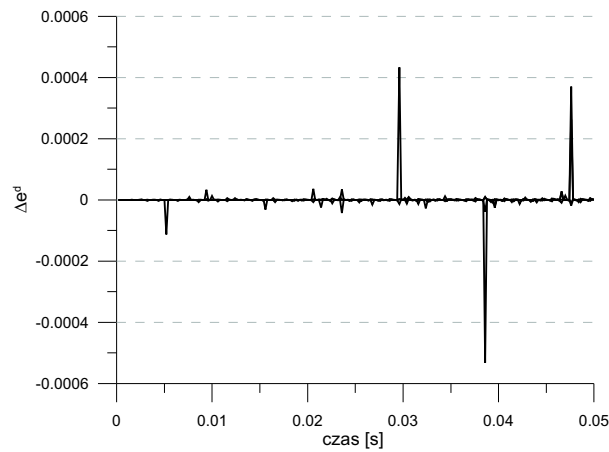
Ostateczna forma równania (2.104) jest podobna do zależności otrzymanej dla modelowania zmiany pola przekroju (2.92). Główna macierz równania jest taka sama. Jest ona niezależna od czasu i nie ma potrzeby przebudowywania jej w trakcie całej analizy.

$$\begin{bmatrix} \left[ \delta_{\alpha\xi} - (1 - \mu_{\alpha}^A) B_{\alpha\xi}^\varepsilon(1) \right] & (1 - \mu_{\alpha}^A) B_{\alpha k}^P(1) \\ \Delta M_{ij} \ddot{D}_{j\xi}^\varepsilon(1) & \left[ \delta_{ik} + \Delta M_{ij} \ddot{D}_{jk}^p(1) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_\xi^0(\tau)}{\partial \hat{A}_\varphi} \\ \frac{\partial p_k^0(\tau)}{\partial \hat{A}_\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \mu_\alpha) \frac{\partial \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} - \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial \hat{A}_\varphi} \varepsilon_\alpha(t) \\ -\frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \hat{A}_\varphi} \ddot{u}_j(t) - \Delta M_{ij} \frac{\partial \ddot{u}_j^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Składnik  $\frac{\partial \Delta M_{ji}}{\partial \hat{A}_\varphi}$  pojawiający się w powyższym równaniu określa zależność:

$$\frac{\partial \Delta M_{ji}^k}{\partial \hat{A}_\varphi} = \rho_\varphi l_\varphi a_{ir}^{\varphi T} M_{rs}^{el\varphi} a_{sj}. \quad (2.105)$$

Na wykresach poniżej przedstawiono różnicę (2.38) gradientów wyznaczonych metodą różnic skończonych *MRS* z gradientami wyznaczonymi analitycznie *metodami wirtualnymi*. Na Rys. 2.18 przedstawiono różnice wrażliwości pól odkształceń wszystkich elementów po zmianie pola przekroju w elemencie czwartym. Natomiast wykres Rys. 2.19 przedstawia różnicę pól przyspieszeń w swobodnych stopniach swobody po zmianie pola przekroju w elemencie drugim.

Rys. 2.18. Różnica gradientów odkształceń  $\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial A_4}$  wyznaczonych MRS oraz MDWRys. 2.19. Różnica gradientów przyspieszeń  $\frac{\partial \ddot{u}_i}{\partial A_2}$  wyznaczonych MRS oraz MDW

## 2.8. Przemodelowywanie redystrybucji nieliniowości materiałowej (zmienna $\sigma^*$ )

Zachowanie elementów aktywnie sterowanych zostało zamodelowane odcinkami liniowym sprężysto-plastycznym związkiem konstytutywnym. Uwzględnienie nieliniowości fizycznych implikuje wprowadzenie dodatkowego sterowalnego parametru, jakim jest granica plastyczności  $\sigma^*$  <sup>5)</sup>.

Równanie ruchu dla konstrukcji sprężysto-plastycznej modelowanej dystorsjami wyraża się zależnością:

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T S_{\alpha\varphi} \left[ G_{\varphi j} u_j(t) - L_{\varphi} \beta_{\varphi}^0(t) \right] = f_i(t), \quad (2.106)$$

Równanie (2.106) może zostać zapisane z użyciem wektora odkształceń w następujący sposób:

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T S_{\alpha\varphi} \left[ L_{\varphi} \left( \varepsilon_{\varphi}(t) - \beta_{\varphi}^0(t) \right) \right] = f_i(t), \quad (2.107)$$

<sup>5)</sup>możliwe jest również sterowanie parametrem wzmocnienia

który to wyrażony jest zależnością:

$$L_{\underline{\alpha}}\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) = G_{\alpha i}u_i(t). \quad (2.108)$$

Dynamiczna odpowiedź konstrukcji zastaje wyznaczona jako superpozycja odpowiedzi konstrukcji sprężystej oraz części rezydualnej odpowiedzialnej za modelowanie zachowania sprężysto-plastycznego.

$$u_i(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} D_{i\zeta}^\varepsilon(t+1-\tau)\beta_\zeta^0(\tau), \quad (2.109)$$

gdzie wektor  $\mathbf{u}^L(t)$  oznacza rozwój przemieszczeń w stopniach swobody  $i$ , wyznaczony dla konstrukcji sprężystej, natomiast  $\beta^0(t)$  opisuje dystorsje modelujące zachowanie plastyczne elementu. Indeksy,  $i$  przebiegają po wszystkich stopniach swobody układu, indeksy  $\zeta$  po elementach ze zbioru elementów uplastycznionych  $\zeta \in \mathfrak{B}$ .

Uaktualniony wektor odkształceń  $\varepsilon(t)$  otrzymuje się przez przemnożenie równania (2.109) przez wielkość  $\frac{1}{L_{\underline{\alpha}}}G_{\underline{\alpha}i}$ , oraz wprowadzając zdefiniowaną wcześniej macierz  $\mathbf{B}$  (2.30)

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = \varepsilon_{\alpha}^L(t) + \sum_{\tau \leq t} \sum_{\zeta \in \mathfrak{B}} B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(t+1-\tau)\beta_\zeta^0(\tau), \quad (2.110)$$

gdzie wektor  $\varepsilon^L(t)$  oznacza rozwój odkształceń w elementach konstrukcji sprężystej,  $B_{\alpha\zeta}^\varepsilon$  jest dynamiczną macierzą wpływu opisującą ewolucję odkształceń w elemencie  $\alpha$ , w chwili czasowej  $t$  w wyniku jednostkowego impulsu dystorsji wirtualnej wygenerowanego w chwili czasowej  $\tau$  w elemencie  $\zeta$ .

Wektor naprężeń wyznaczany jest z następującej zależności:

$$\sigma_{\alpha}(t) = E_{\underline{\alpha}}(\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t)), \quad (2.111a)$$

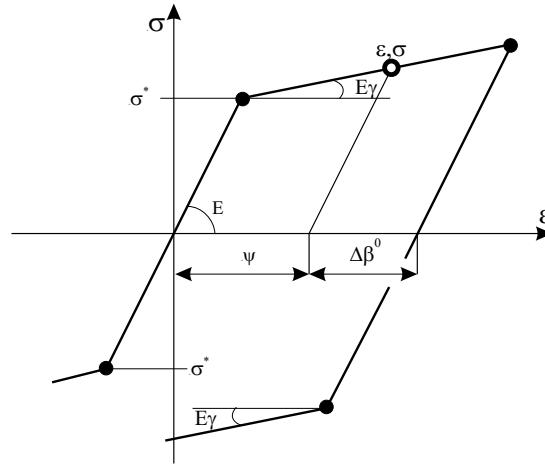
$$\sigma_{\alpha}(t) = \sigma_{\alpha}^L(t) + E_{\underline{\alpha}} \left[ \sum_{\tau < t} B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(t+1-\tau)\beta_\zeta^0(\tau) + (B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(1) - \delta_{\alpha\zeta})\beta_\zeta^0(t) \right]. \quad (2.111b)$$

W celu modelowania elementów aktywnych (tzw. *bezpieczników strukturalnych*) w konstrukcjach aktywnie sterowanych AIA, zastosowany został odcinkami liniowy związek konstytutywny materiału sprężysto-plastycznego z wzmocnieniem Rys. 2.20. Równanie konstytutywne dla tego związku można zapisać w postaci (2.112).

$$(1 - \gamma_{\underline{\alpha}})(\sigma_{\underline{\alpha}}(t) - \text{sign}(\sigma_{\underline{\alpha}}^{TR})\sigma_{\underline{\alpha}}^*) = \gamma_{\alpha}E_{\alpha}(\text{sign}(\sigma_{\alpha}^{TR})\Psi_{\alpha} + \Delta\beta_{\alpha}^0(t)), \quad (2.112)$$

gdzie  $\sigma_{\alpha}^* = E_{\underline{\alpha}}\varepsilon_{\underline{\alpha}}^*$  oznacza granicę plastyczności,  $\gamma_{\alpha}$  opisuje parametr wzmocnienia w elemencie  $\alpha$ . Wektor  $\sigma^{TR}$  opisuje naprężenia próbne wyznaczane w pierwszym etapie analizy dla każdego kroku czasowego. Naprężenia te wyznaczane z zależności (2.113) są niezbędne do określania zbioru elementów wchodzących do strefy plastycznej, decydują także o znaku zależnie od tego czy element  $\alpha$  jest ściskany czy rozciągany.

$$\sigma_{\alpha}^{TR} = E_{\underline{\alpha}}(\varepsilon_{\underline{\alpha}}^{\neq t}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t-1)). \quad (2.113)$$



Rys. 2.20. Odcinkami liniowy sprężysto-plastyczny model konstytutywny

Natomiast  $\Psi_\alpha$  opisuje całkowite odkształcenie plastyczne przy wzmocnieniu izotropowym [53] dla elementu  $\alpha$  zdefiniowane jako:

$$\Psi_\alpha = \sum_t |\Delta\beta_\alpha^0(t)|, \quad (2.114)$$

gdzie  $\Delta\beta_\alpha^0(t)$  oznacza przyrost dystorsji plastycznej dla danego kroku czasowego  $t$ .

Dla analizy sprężysto-plastycznej konstrukcji z wykorzystaniem IMDW, wygodnie jest przedstawić zależności na odkształcenia i naprężenia w takiej formie aby przyrost dystorsji plastycznej dla każdej chwili czasowej  $\Delta\beta_\alpha^0(t)$  dany był jawnie. Odkształcenia (2.110) można zapisać formie

$$\varepsilon_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha(t-1) + \Delta\varepsilon_\alpha(t), \quad (2.115)$$

gdzie przyrost odkształceń  $\Delta\varepsilon(t)$  zdefiniowany jest następująco:

$$\Delta\varepsilon_\alpha(t) = \Delta\varepsilon_\alpha^L(t) + \sum_{\tau < t-1} B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(t+1-\tau)\Delta\beta_\zeta^0(\tau) + B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(1)\Delta\beta_\zeta^0(t). \quad (2.116)$$

Wprowadzając dodatkową zmienną  $\Delta\varepsilon_i^{\neq t}(t)$  opisującą przyrost odkształceń, w którym nie uwzględniono aktualnego przyrostu dystorsji plastycznej w kroku czasowym  $t$ , zależność (2.115) można zapisać następująco:

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i(t-1) + \Delta\varepsilon_i^{\neq t}(t) + B_{ik}^\varepsilon(1)\Delta\beta_k^0(t). \quad (2.117)$$

Naprężenia w każdym kroku czasowym (2.111) należy przedstawić w formie umożliwiającej wyznaczenie przyrostu dystorsji plastycznej:

$$\sigma_\alpha(t) = \sigma_\alpha(t-1) + E_\alpha\Delta\varepsilon_\alpha(t) - E_\alpha\Delta\beta_\alpha^0. \quad (2.118)$$

Po podstawieniu odkształceń (2.117) od powyższej zależności otrzymujemy ostateczną formę na naprężenia:

$$\sigma_\alpha(t) = \sigma_\alpha(t-1) + E_\alpha\Delta\varepsilon_\alpha^{\neq t}(t) + E_\alpha(B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(1) - \delta_{\alpha\zeta})\Delta\beta_\zeta^0(t). \quad (2.119)$$

Uwzględniając przedstawione zależności, przyrost dystorsji plastycznej  $\Delta\beta^0$  można wyznaczyć z poniższego układu równań:

$$\begin{aligned} [E_\alpha\delta_{\alpha\zeta} + (1 - \gamma_\alpha)E_\alpha B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(1)]\Delta\beta_\zeta^0(t) &= (1 - \gamma_\alpha) (\sigma_\alpha(t-1) + E_\alpha\Delta\varepsilon_\alpha^{\neq f(t)}(t)) \\ &\quad - \text{sign}(\sigma_\alpha^{TR}) ((1 - \gamma_\alpha)\sigma_\alpha^* + \gamma_\alpha E_\alpha \Psi_\alpha). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Zauważając, że:

$$\sigma_\alpha(t-1) + E_\alpha\Delta\varepsilon_\alpha^{\neq f(t)}(t) = \sigma_\alpha^{TR}. \quad (2.121)$$

Układ równań (2.120) można przedstawić w formie:

$$\begin{aligned} [E_\alpha\delta_{\alpha\zeta} - (1 - \gamma_\alpha)E_\alpha B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(1)]\Delta\beta_\zeta^0(t) &= (1 - \gamma_\alpha)\sigma_\alpha^{TR} \\ &\quad - \text{sign}(\sigma_\alpha^{TR}) ((1 - \gamma_\alpha)\sigma_\alpha^* + \gamma_\alpha E_\alpha \Psi_\alpha). \end{aligned} \quad (2.122)$$

Podobna zależność dla określenia przyrostu dystorsji plastycznej  $\Delta\beta^0(t)$  została sformułowana między innymi w [43, 53] pod nazwą (ang. *Return-Mapping Algorithm for Rate-Independent Plasticity. Isotropic Hardening*). W którym to składnik pojawiający się w powyższym układzie równań:

$$F_\alpha^{TR} = (1 - \gamma_\alpha)\sigma_\alpha^* + \gamma_\alpha E_\alpha \Psi_\alpha \quad (2.123)$$

opisuje stan próbny decydujący o wejściu elementu do strefy plastycznej (ang. *loading condition*). Algorytm analizy sprężysto-plastycznej przedstawiono w Tab. 2.9.

W konstrukcjach o znacznej liczbie elementów, może dojść do niekorzystnego zjawiska. Polega ono na niewłaściwym określeniu strefy plastycznej  $\mathfrak{B}$ , uwzględnieniu zbyt wielu elementów w jednym kroku czasowym.

Problem ten można rozwiązać na trzy sposoby. Pierwszy polega na zwiększaniu liczby kroków czasowych, co jednak wiąże się ze znacznym zwiększeniem czasu obliczeń zwłaszcza przy wykorzystaniu metod wirtualnych.

Drugi sposób, zaproponowany przez autora, polega na wykorzystaniu w algorytmie wpływu wygenerowanej w danym kroku czasowym dystorsji plastycznej na rozwój naprężeń (2.119). Umożliwia to sekwencyjne włączanie elementów do zbioru  $\mathfrak{B}$  w każdym kroku czasowym. Elementy są dołączane do zbioru kolejno. Za każdym razem sprawdzany jest wpływ dodania elementu na rozwój strefy plastycznej. Działanie takie podejmowane jest tylko wtedy gdy w danym kroku uplastyczniony jest więcej niż jeden nowy element. Przy złożonych konstrukcjach daje to znaczne skrócenie czasu analizy w porównaniu z zagęszczeniem kroku czasowego.

Trzeci sposób poprawnego uwzględniania rozwoju strefy plastycznej, polega na sprawdzaniu w każdym kroku czasowym, czy znak wygenerowanego przyrostu dystorsji plastycznej  $\text{sign}(\Delta\beta_\alpha^0(t))$  jest zgodny ze znakiem naprężeń  $\text{sign}(\sigma_\alpha(t))$ . Jeżeli nie należy iteracyjnie usuwać elementy ze strefy plastycznej modyfikując układ równań (2.122).

Algorytm modelowania nieliniowości fizycznej *Impulsową Metodą Dystorsji Wirtualnych* z uwzględnieniem sekwencyjnego dołączania elementów przedstawiony jest w Tab. 2.10.



TABLICA 2.9. Algorytm modelowania nieliniowości fizycznych, z wykorzystaniem *Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych*

<p>Dane oraz obliczenia inicjujące</p> <p>Dane wejściowe zadania</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• konstrukcja pod ustalonym obciążeniem zewnętrznym</li> <li>• granica plastyczności <math>\sigma^*</math>, parametr wzmocnienia <math>\gamma</math></li> </ul> <p>Obliczamy</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odpowiedź liniową konstrukcji na zadane obciążenie</li> </ul> <p>Obliczenia dla każdej chwili <math>t</math></p> <p>1. Odkształcenia <math>\varepsilon^{\neq t}(t)</math></p> $\varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t) = \varepsilon_{\alpha}^L(t) + \sum_{\tau < t} D_{\alpha\zeta}^{\varepsilon}(t+1-\tau)\beta_{\zeta}^0(\tau)$ <p>2. Naprężenia próbne</p> $\sigma_{\alpha}^{TR} = E_{\alpha} \left( \varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t) - \beta_{\alpha}^0(t-1) \right)$ <p>3. Określenie strefy plastycznej (zbioru elementów uplastycznionych <math>\mathfrak{B}</math>)</p> $ \sigma_{\alpha}^{TR}  \geq ((1 - \gamma_{\alpha})\sigma_{\alpha}^* + \gamma_{\alpha}E_{\alpha}\Psi_{\alpha})$ <p>TAK</p> <p>(a) wektor macierzy wpływu <math>\mathbf{D}^{\varepsilon}(t)</math> (tylko raz dla każdego nowego uplastycznego elementu).</p> <p>(b) wyznaczenie odpowiedniego składnika głównej macierzy <math>\mathbf{F}</math> niezależnej od czasu (tylko raz dla każdego nowego uplastycznego elementu)</p> $F_{\alpha\zeta} = [E_{\alpha}\delta_{\alpha\zeta} - (1 - \gamma_{\alpha})E_{\alpha}D_{\alpha\zeta}^{\varepsilon}(1)]$ <p>(c) Przyrost dystorsji plastycznych <math>\beta^0(t)</math></p> $F_{\alpha\zeta}\Delta\beta_{\zeta}^0(t) = (1 - \gamma_{\alpha})\sigma_{\alpha}^{TR} - \text{sign}(\sigma_{\alpha}^{TR}) \left( (1 - \gamma_{\alpha})\sigma_{\alpha}^* + \gamma_{\alpha}E_{\alpha}\Psi_{\alpha} \right)$ <p>(d) Dystorsje plastyczne</p> $\beta^0(t) = \beta^0(t-1) + \Delta\beta^0(t)$ <p>(e) Parametr wzmocnienia izotropowego</p> $\Psi_{\alpha} = \Psi_{\alpha} +  \Delta\beta^0(t) $ <p>(f) Odkształcenia</p> $\varepsilon_{\alpha}(t) = \varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t) + B_{\alpha\zeta}^{\varepsilon}(1)\beta_{\zeta}^0(t)$ <p>(g) Naprężenia dla aktualnego kroku czasowego</p> $\sigma_{\alpha}(t) = E_i(\varepsilon_{\alpha}(t) - \beta_{\alpha}^0(t))$ <p>(h) Sprawdzenie czy <math>\Delta\beta_{\alpha}^0(t)\sigma_{\alpha}(t) &gt; 0</math> jeżeli nie powrót do c) i uaktualnienie macierzy <math>\mathbf{F}</math></p> <p>NIE</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Uaktualnienie odkształceń</li> </ul> $\varepsilon_{\alpha}(t) = \varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t) + B_{\alpha\zeta}^{\varepsilon}(1)\beta_{\zeta}^0(t-1)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Naprężenia</li> </ul> $\sigma_{\alpha}(t) = \sigma_{\alpha}^{TR}$ <p>4. Powrót do punktu 1</p>
--

TABLICA 2.10. Algorytm modelowania nieliniowości fizycznych *Impulsową Metodą Dystorsji Wirtualnych* z sekwencyjnym włączaniem elementów

<p>Dane oraz obliczenia inicjujące</p> <p>Dane wejściowe zadania</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• konstrukcja pod ustalonym obciążeniem zewnętrznym</li> <li>• granica plastyczności <math>\sigma^*</math>, parametr wzmocnienia <math>\gamma</math></li> </ul> <p>Obliczamy</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odpowiedź liniową konstrukcji na zadane obciążenie</li> </ul> <p>Obliczenia dla każdej chwili <math>t</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Odształceń <math>\varepsilon(t) \neq f(t)</math> bez uwzględnienia <math>\Delta\beta^0(t)</math>  <math display="block">\varepsilon_{\alpha}^{\neq f(t)}(t) = \varepsilon_{\alpha}^L(t) + \sum_{\tau &lt; t} \sum_{\zeta} D_{\alpha\zeta}^{\varepsilon}(t - \tau) \beta_{\zeta}^0</math> </li> <li>2. Naprężeń próbnych  <math display="block">\sigma_{\alpha}^{TR} = E_{\alpha} \left( \varepsilon_{\alpha}^{\neq f(t)}(t) - \beta_{\alpha}^0(t - 1) \right)</math> </li> <li>3. Określenie strefy plastycznej (zbioru elementów uplastycznionych <math>\mathfrak{B}</math>)  <math display="block"> \sigma_{\alpha}^{TR}  \leq (\sigma_{\alpha}^* + \gamma_{\alpha} E_{\alpha} \Psi_{\alpha})</math> <p>TAK</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(a) Znalezienie element najbardziej wyjątkowego  <math display="block">\varsigma_{\max} = \text{agr} \max_{1 \leq \alpha \leq n_e} (\sigma_{\alpha}^{TR})</math>                     oraz dodanie go do zbioru elementów uplastycznionych  <math display="block">\mathfrak{B} \in \mathfrak{B} + \varsigma</math> </li> <li>(b) wektor macierzy wpływu <math>\mathbf{D}^{\varepsilon}(t)</math> (tylko raz dla każdego nowego uplastycznionego elementu).</li> <li>(c) wyznaczenie odpowiedniego składnika głównej macierzy <math>\mathbf{F}</math> niezależnej od czasu (tylko raz dla każdego nowego uplastycznionego elementu)  <math display="block">F_{\alpha\zeta} = [E_{\alpha}(1 + \gamma_{\alpha})\delta_{\alpha\zeta} + E_{\alpha}D_{\alpha\zeta}^{\varepsilon}(1)]</math> </li> <li>(d) Wyznaczenie przyrostu dystorsji plastycznej <math>\Delta\beta^0(t)</math>  <math display="block">F_{\alpha\zeta}\Delta\beta_{\zeta}^0(t) = \sigma_{\alpha}^{TR} - \text{sign}(\sigma_{\alpha}^{TR}) (\sigma_{\alpha}^* + \gamma_{\alpha} E_{\alpha} \alpha_{\alpha})</math> </li> <li>(e) Wyznaczenie dystorsji plastycznej  <math display="block">\beta_{\zeta}^0(t) = \beta_{\zeta}^0(t - 1) + \Delta\beta_{\zeta}^0(t)</math> </li> <li>(f) Uaktualnienie parametru <math>\Psi</math>  <math display="block">\Psi_{\varsigma} = \Psi_{\varsigma} +  \Delta\beta_{\varsigma}^0 </math> </li> <li>(g) Sprawdzenie wpływu wyznaczonej dystorsji na rozkład naprężeń w konstrukcji w kroku <math>t</math>  <math display="block">\sigma_{\varsigma}(t) = \sigma_{\varsigma}^{TR} + E_{\varsigma} \left( D_{\varsigma\xi}^{\varepsilon}(1) - \delta_{\varsigma\xi} \right) \Delta\beta_{\xi}^0(t)</math> </li> <li>(h) Sprawdzenie czy do zbioru <math>\mathfrak{B}</math> nie wchodzi dodatkowe elementy jeśli tak powrót do (a)</li> </ol> <p>NIE</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Odształceń  <math display="block">\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}^{\neq f(t)} + B_{\alpha\xi}^{\varepsilon}(1)\beta_{\xi}^0(t - 1)</math> </li> <li>• Naprężeń  <math display="block">\sigma_{\alpha}(t) = \sigma_{\alpha}^{TR}</math> </li> </ul> </li> </ol> <p>4. Powrót do punktu 1</p>
---

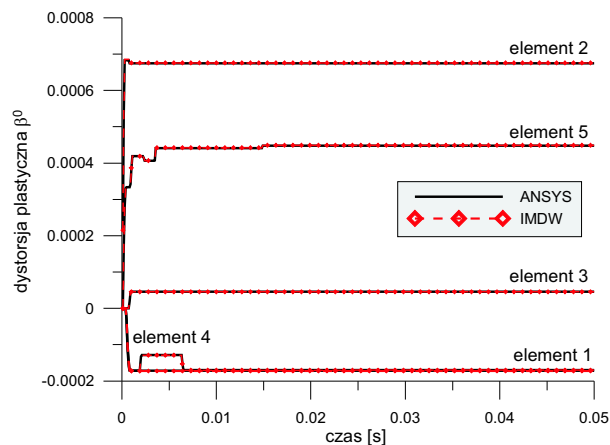
### Przykład 2.6

Analiza sprężysto-plastyczna została wykonana z wykorzystaniem modelu kratowego Rys. 2.4.1. Wyniki otrzymane z *Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych* porównane zostały z wynikami otrzymanymi w komercyjnym programie ANSYS.

W programie ANSYS do analizy wybrano dwuwymiarowy element kratowy LINK1. Model sprężysto-plastyczny odpowiadający przyjętemu w pracy to BILINEAR ISOTROPIC HARDENING. Plik wsadowy do programu ANSYS zawierający testowany model został dołączony do pracy w załączniku B.

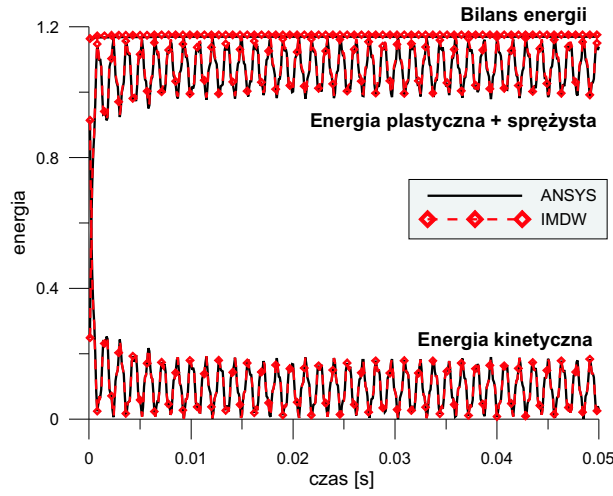
Granica plastyczności  $\sigma^*$  została ustalona na tym samym poziomie dla wszystkich elementów równa  $5.0 \times 10^7 [Pa]$ . Parametr wzmocnienia  $\gamma$  równy jest 0.01. Wymuszenie dynamiczne realizowane jest przez przyłożenie prędkości początkowej  $V = -5 [m/s]$  przyłożonej w węźle drugim w kierunku pionowym.

Do porównania wybrano odkształcenia plastyczne dla wszystkich elementów, przedstawione na Rys. 2.21. Mimo zastosowania zupełnie różnych metod otrzymane wyniki są bardzo zbliżone zważywszy na bardzo małą miarę odkształceń. Ponieważ rozbieżność pomiędzy otrzymanymi wynikami jest prawie nie do odróżnienia, porównano dodatkowo błąd pomiędzy dystorsjami plastycznym dla konstrukcji modelowanej IMDW i zmiennej, otrzymane wyniki przedstawiono na Rys. 2.23. Wyznaczone różnice bezwzględne są poniżej wartości 0.05.

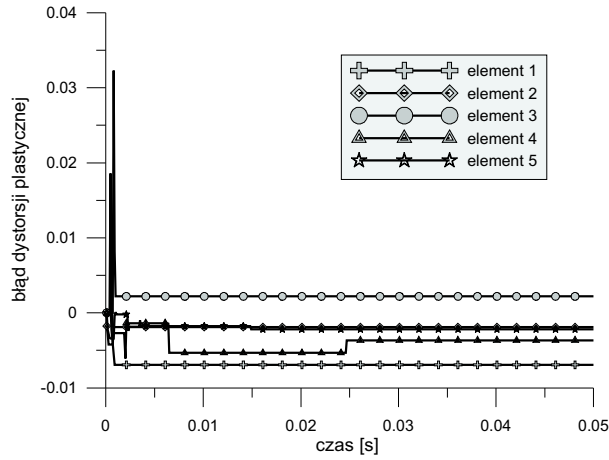


RYS. 2.21. Porównanie odkształceń plastycznych w elemencie czwartym i piątym. Dla konstrukcji modelowanej i zmodyfikowanej

Inną wielością, dającą miarę poprawności analizy sprężysto-plastycznej jest bilans energii. Porównanie to zostało przedstawione na Rys. 2.22 dla analizy przeprowadzonej zarówno IMDW, jak również za pomocą programu ANSYS. Porównanie bilansu energii również wskazuje na poprawność przyjętych założeń.



Rys. 2.22. Porównanie bilansów energii. Dla konstrukcji modelowanej i zmodyfikowanej



Rys. 2.23. Błąd dystorsji plastycznej dla konstrukcji modelowanej i zmodyfikowanej

### 2.8.1. Analiza wrażliwości na zmianę progu plastycznego

Przykładową analizę wrażliwości, przedstawiono wyznaczając gradienty pola odkształceń  $\varepsilon(t)$  po granicy plastyczności  $\sigma^*$ . Dla wyznaczenia wspomnianej zależności należy zróżniczkować odkształcenia otrzymując zależność:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\alpha}(t)}{\partial \sigma_{\varphi}^*} = \sum_{\tau \leq t} \sum_{\tilde{\tau} \leq \tau} D_{\alpha\zeta}^{\varepsilon}(\tau + 1 - \tilde{\tau}) \frac{\partial \Delta \beta_{\zeta}^0(\tilde{\tau})}{\partial \sigma_{\varphi}^*}. \quad (2.124)$$

Składnik  $\frac{\partial \Delta \beta_{\zeta}^0(t)}{\partial \sigma_{\varphi}^*}$  otrzymany został różniczkując równanie (2.120).

$$\left[ E_{\alpha}(1 + \gamma_{\alpha})\delta_{\alpha\zeta} - E_{\alpha}B_{\alpha\zeta}^{\varepsilon}(1) \right] \frac{\partial \Delta \beta_{\zeta}^0(t)}{\partial \sigma_{\varphi}^*} = \frac{\partial \sigma_{\alpha}^{TR}}{\partial \sigma_{\varphi}^*} - \text{sign}(\sigma_{\alpha}^{TR}) \left( \delta_{\alpha\varphi} + \gamma_{\alpha}E_{\alpha} \frac{\partial \Psi_{\alpha}}{\partial \sigma_{\varphi}^*} \right), \quad (2.125)$$

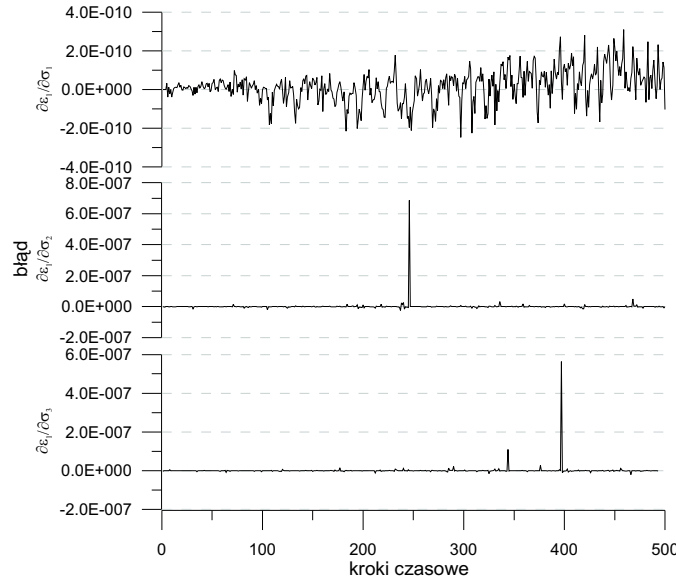
gdzie  $\frac{\partial \sigma_{\alpha}^{TR}}{\partial \sigma_{\varphi}^*}$  wyznacza się z zależności:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha}^{TR}}{\partial \sigma_{\varphi}^*} = E_{\alpha} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}(t)}{\partial \sigma_{\varphi}^*} - \frac{\partial \beta_{\alpha}^0(t-1)}{\partial \sigma_{\varphi}^*} \right) \quad (2.126)$$

natomiast składnik  $\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \sigma_\varphi^*}$  wyznaczony jest z zależności:

$$\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \sigma_\varphi^*} = \begin{cases} \sum_t \text{sign}(\Delta \beta_\alpha^0(t)) \frac{\partial \Delta \beta_\alpha^0(t)}{\partial \sigma_\varphi^*} & \text{if } \Delta \beta_\alpha^0(t) \neq 0 \\ 0 & \text{if } \Delta \beta_\alpha^0(t) = 0 \end{cases} \quad (2.127)$$

Na wykresie Rys. 2.24 przedstawiono błąd bezwzględny dla gradientów wyznaczonych analitycznie z wykorzystaniem IMDW oraz wyznaczonych metodą różnic skończonych, dla wybranych elementów. Błąd pomiędzy otrzymanymi wyniki nie przekracza wartości  $6e - 7$ .



RYS. 2.24. Błąd bezwzględny wrażliwości pola odkształceń w elemencie pierwszym na zmianę granicy plastyczności w elementach 1,2 oraz 3

## 2.9. Sprężone zadanie redystrybucji sztywności, masy i nieliniowości materiałowej (zmienne $K$ , $M$ i $\sigma^*$ )

W rozdziale tym autor przedstawi sposób sprężonego modelowania pola powierzchni przekroju poprzecznego  $A$  (zmiana sztywności z równoczesną zmianą masy) elementu, sprężonego z modelowaniem nieliniowego zachowania materiału (zachowanie sprężysto plastyczne).

Równanie ruchu dla konstrukcji z nie zmienionymi parametrami przedstawione zostało w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.128)$$

gdzie macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  opisują odpowiednio macierz mas i sztywności, a  $\mathbf{f}(t)$  jest wektorem sił zewnętrznych.

Każda z powyższych macierzy opisuje grupę parametrów które mogą zostać zmodyfikowane w następujący sposób:

$$[\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}] \ddot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}] \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.129)$$

gdzie  $\Delta \mathbf{M}$ ,  $\Delta \mathbf{K}$  opisują modyfikację odpowiednio masy elementów oraz sztywności konstrukcji z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych.

Równania ruchu dla konstrukcji zmodyfikowanej (2.130) oraz modelowanej (2.131) poprzez wprowadzenie dodatkowych składników wirtualnych można przedstawić w postaci:

$$\hat{M}_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T \hat{S}_{\alpha\varphi} G_{\varphi j} u_j(t) = f_i(t), \quad (2.130)$$

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T S_{\alpha\varphi} \left[ G_{\varphi j} u_j(t) - L_{\varphi} \varepsilon_{\varphi}^0(t) - L_{\varphi} \beta_{\varphi}^0(t) \right] = f_i(t) + p_i^{\text{OM}}(t), \quad (2.131)$$

gdzie  $\hat{S}_{\alpha\varphi}$  i  $S_{\alpha\varphi}$  są macierzami diagonalnymi, z elementami na diagonalu odpowiednio  $\hat{S}_{\alpha\alpha} = E_{\underline{\alpha}} \hat{A}_{\underline{\alpha}} / l_{\underline{\alpha}}$  oraz  $S_{\alpha\alpha} = E_{\underline{\alpha}} A_{\underline{\alpha}} / l_{\underline{\alpha}}$  gdzie  $E_{\underline{\alpha}}$  - moduł Young'a,  $l_{\underline{\alpha}}$  - długość elementów,  $A_{\underline{\alpha}}$  - przekrój poprzeczny elementu oraz  $\hat{A}_{\underline{\alpha}}$  - zmodyfikowany przekrój poprzeczny. Równanie (2.131) może zostać zapisane z użyciem wektora odkształceń w następujący sposób:

$$M_{ij}\ddot{u}_j(t) + G_{i\alpha}^T S_{\alpha\varphi} \left[ L_{\varphi} \left( \varepsilon_{\varphi}(t) - \varepsilon_{\varphi}^0(t) - \beta_{\varphi}^0(t) \right) \right] = f_i(t) + p_i^{\text{OM}}(t), \quad (2.132)$$

gdzie wektor odkształceń  $\varepsilon(t)$  jest wyrażony w następujący sposób:

$$L_{\underline{\alpha}} \varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) = G_{\alpha i} u_i(t) \quad (2.133)$$

Odpowiedź dynamiczna konstrukcji wyznaczana jest jako superpozycja pól wirtualnych oraz odpowiedzi liniowej w następujący sposób:

$$u_i(t) = u_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} D_{i\xi}^{\varepsilon}(t+1-\tau) \varepsilon_{\xi}^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} D_{i\zeta}^{\varepsilon}(t+1-\tau) \beta_{\zeta}^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} D_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{\text{OA}}(\tau), \quad (2.134)$$

gdzie wektory  $\varepsilon^0(\mathbf{t})$ ,  $\beta^0(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{p}^{\text{OM}}(\mathbf{t})$  odpowiadają odpowiednio za modelowanie: sztywności elementu (dystorsje wirtualne), modelowanie nieliniowości fizycznych (dystorsje plastyczne), modelowanie masy elementu (siły wirtualne). Indeksy  $i$  przebiegają po wszystkich stopniach swobody układu, indeksy  $\xi$  po elementach ze zbioru elementów z modyfikacją pola przekroju  $\xi \in \mathfrak{A}$ ,  $\zeta$  przebiegają po elementach będących w zbiorze elementów uplastycznionych  $\zeta \in \mathfrak{B}$ ,  $j$  po stopniach swobody powiązanych z elementami ze zmodyfikowanym polem przekroju  $j \in \mathfrak{A}$ .

Uaktualniony wektor odkształceń  $\varepsilon(t)$  można otrzymać przez przemnożenie równania (2.134) przez wielkość  $\frac{1}{L_{\underline{\alpha}}} G_{\alpha i}$  otrzymując:

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = \frac{1}{L_{\underline{\alpha}}} G_{\alpha i} u_i(t) = \frac{1}{L_{\underline{\alpha}}} G_{\alpha i} u_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} \frac{1}{L_{\underline{\alpha}}} G_{\alpha i} D_{i\xi}^{\varepsilon}(t+1-\tau) \varepsilon_{\xi}^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} \frac{1}{L_{\underline{\alpha}}} G_{\alpha i} D_{i\zeta}^{\varepsilon}(t+1-\tau) \beta_{\zeta}^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} \frac{1}{L_{\underline{\alpha}}} G_{\alpha i} D_{ij}^p(t+1-\tau) p_j^{\text{OA}}(\tau). \quad (2.135)$$

Stosując zdefiniowane w poprzednich rozdziałach macierze  $\mathbf{B}^{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{B}^p$  powyższą zależność można zapisać następująco:

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = \varepsilon_{\alpha}^L(t) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha\xi}^{\varepsilon}(t+1-\tau) \varepsilon_{\xi}^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha\zeta}^{\varepsilon}(t+1-\tau) \beta_{\zeta}^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha j}^p(t+1-\tau) p_j^{\text{OA}}(\tau). \quad (2.136)$$

Niezbędne przy metodach wirtualnych jest określenie wielkości wirtualnych odpowiedzialnych za przemodelowywanie parametrów konstrukcyjnych. Wyznaczanie tych wielkości przeprowadza się analogicznie jak w poprzednich rozdziałach.

Zadanie przemodelowywania pola przekroju i nieliniowości fizycznych sprzęga ze sobą trzy zdefiniowane poprzednio wielkości wirtualne tj. dystorsje wirtualne  $\varepsilon^0(t)$  (sztywność), dystorsje plastyczne  $\beta^0(t)$  (nieliniowość fizyczna), oraz siły wirtualne  $p^0(t)$  (masa). Wyznaczanie każdej z powyższych zmiennych z osobna pozwala na zbudowanie odpowiedniego układu równań, który to dopiero umożliwi wyznaczenie wszystkich wielkości wirtualnych.

Po pierwsze, autor postuluje, iż siły odpowiedzialne za sztywność konstrukcji zmodyfikowanej (2.137) i modelowanej dystorsjami wirtualnymi (2.138) muszą być identyczne.

$$\hat{p}_\alpha(t) = E_{\underline{\alpha}} \hat{A}_{\underline{\alpha}} (\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t)), \quad (2.137)$$

$$p_\alpha(t) = E_{\underline{\alpha}} A_{\underline{\alpha}} (\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \varepsilon_{\underline{\alpha}}^0(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t)). \quad (2.138)$$

Porównując powyższe zależności wektor modyfikacji pola przekroju elementu może zostać wyrażony w następujący sposób:

$$\mu_\alpha^A = \frac{\hat{A}_{\underline{\alpha}}}{A_{\underline{\alpha}}} = \frac{\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t) - \varepsilon_{\underline{\alpha}}^0(t)}{\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t)}. \quad (2.139)$$

Parametr modyfikacji opisuje stosunek pola przekroju nowego (zmienionego)  $\hat{A}$ , do pola przekroju niezmienionego (oryginalnego)  $A$ . Parametr modyfikacji  $\mu_\alpha^A$  należy do przedziału  $\mu_\alpha^A \in \langle 0, \mu^{A \max} \rangle$  i należy go interpretować w następujący sposób: dla  $\mu^A = 0$  element jest eliminowany z konstrukcji, dla  $\mu^A = 1$  nie ma zmiany przekroju w elemencie natomiast dla  $\mu^A = \mu^{A \max}$  osiągnięta jest maksymalna dopuszczalna zmiana pola przekroju elementu.

Przekształcając równanie (2.139) można wyznaczyć dystorsje wirtualne  $\varepsilon^0$  odpowiedzialne za modyfikację pola przekroju (składnika odpowiedzialnego za sztywność):

$$\varepsilon_\alpha^0(t) = (1 - \mu_\alpha^A) (\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t)) \quad (2.140)$$

Ponieważ podczas przemodelowywania nieliniowości fizycznej wyznaczany jest przyrost dystorsji plastycznej  $\Delta\beta^0(t)$ , powyższe równanie należy rozpisać w taki sposób, aby był on dany wprost:

$$\varepsilon_\alpha^0(t) = (1 - \mu_\alpha^A) (\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t-1) - \Delta\beta^0(t)). \quad (2.141)$$

Również wektor odkształceń (2.136) należy rozpisać w takiej formie, aby można było w prosty sposób wyodrębnić z niego przyrost dystorsji plastycznej.

$$\varepsilon_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha^L(t) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha\xi}^\varepsilon(t+1-\tau) \varepsilon_\xi^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} \sum_{\hat{\tau} \leq \tau} B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(t+1-\hat{\tau}) \Delta\beta_\zeta^0(\hat{\tau}) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha j}^p(t+1-\tau) p_j^{0A}(\tau). \quad (2.142)$$

Wprowadzając zmienną  $\varepsilon^{\neq t}(t)$  opisującą odkształcenia bez uwzględnienia wielkości wirtualnych dla danego kroku czasowego  $t$ , odkształcenia w chwili  $t$  można wyrazić następująco:

$$\varepsilon_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t) + B_{\alpha\xi}^\varepsilon(1) \varepsilon_\xi^0(t) + B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(1) \Delta\beta_\zeta^0(t) + B_{\alpha j}^p(1) p_j^{0A}(t). \quad (2.143)$$

Po podstawieniu powyższej zależności od (2.141), pierwsze równanie zadania sprzężonego można przedstawić w formie:

$$\begin{aligned} [\delta_{\alpha\xi} - (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A) B_{\underline{\alpha}\xi}^\varepsilon(1)] \varepsilon_\xi^0(t) - (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A) B_{\underline{\alpha}j}^p(1) p_j^0(t) - (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A) [B_{\underline{\alpha}\zeta}^\varepsilon(1) - \delta_{\underline{\alpha}\zeta}] \Delta\beta_\zeta^0 \\ = (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A) (\varepsilon_{\underline{\alpha}}^{\neq t}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t-1)) \end{aligned} \quad (2.144)$$

Dla otrzymania drugiego równania zadania sprzężonego (odpowiedzialnego za modyfikacje masy elementu), należy założyć równość sił bezwładności dla konstrukcji zmodyfikowanej i modelowanej:

$$\hat{M}_{ij} \ddot{u}_j = M_{ij} \ddot{u}_j - p_i^{0A}(t). \quad (2.145)$$

Z otrzymanego równania określona zostaje zależność na wyznaczenie sił wirtualnych odpowiedzialnych za modyfikacje masy elementu:

$$p_i^{0A}(t) = -\Delta M_{ij} \ddot{u}_j(t). \quad (2.146)$$

Przyrost macierzy mas konstrukcji  $\Delta \mathbf{M}$  można określić z zależności (2.55), przedstawionej w rozdziale 2.8. Wektor przyspieszenia  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ , należy wyznaczyć z następującej zależności:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i(t) = \ddot{u}_i^L(t) + \sum_{\tau \leq t} \ddot{D}_{i\xi}^\varepsilon(t - \tau) \varepsilon_\xi^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} \ddot{D}_{ij}^p(t + 1 - \tau) p_j^{0A}(\tau) + \\ \sum_{\tau \leq t} \sum_{\hat{\tau} \leq \tau} \ddot{D}_{i\zeta}^\varepsilon(t + 1 - \hat{\tau}) \Delta\beta_\zeta^0(\hat{\tau}). \end{aligned} \quad (2.147)$$

Podstawiając zależność (2.147) do (2.146) otrzymuje się drugie równanie zadania sprzężonego.

$$\Delta M_{ij} \ddot{D}_{j\xi}^\varepsilon(1) \varepsilon_\xi^0(t) + [\delta_{ik} + \Delta M_{ij} \ddot{D}_{jk}^p(1)] p_k^0(t) + \Delta M_{ij} \ddot{D}_{j\zeta}^\varepsilon(1) \Delta\beta_\zeta^0 = -\Delta M_{ij} \ddot{u}_j^{\neq t}, \quad (2.148)$$

gdzie  $\ddot{\mathbf{u}}^{\neq t}$  opisuje wektor przyspieszenia bez uwzględnienia wielkości wirtualnych w danym kroku czasowym  $t$ .

Trzecią wielkością wirtualną w zadaniu sprzężonym jest dystorsja plastyczna  $\beta^0(t)$ , która odpowiada za modelowanie nieliniowości fizycznej elementu.

Przy przemodelowywaniu nieliniowości fizycznych należy rozpatrzeć dwa przypadki:

1. Zmiana modułu Young'a - naprężenia w danej chwili czasowej wyrażone są zależnością:

$$\sigma_\alpha(t) = E_{\underline{\alpha}} (\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \varepsilon_{\underline{\alpha}}^0(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t)). \quad (2.149)$$

2. Zmiana przekroju poprzecznego elementu  $A$  - naprężenia (2.149) należy przeskalować przez parametr modyfikacji przekroju (2.139), otrzymując:

$$\hat{\sigma}_\alpha(t) = \frac{\sigma_\alpha(t)}{\mu_{\underline{\alpha}}^A} = E_{\underline{\alpha}} (\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t)). \quad (2.150)$$

### 2.9.1. Modelowanie przekroju poprzecznego $A$ w zadaniu sprzężonym

W rozdziale tym założono przemodelowywanie przekrojów poprzecznych w elementach konstrukcji. W związku z tym w związku konstytutywnym należy użyć naprężeń przeskalowanych przez parametr modyfikacji przekroju  $\mu^A$  (2.149).



Dla wyznaczenia ostatniego składnika macierzy przemodelowania sprzężonego, naprężenia (2.150) należy rozpisać następująco:

$$\sigma_{\alpha}(t) = E_{\underline{\alpha}}(\varepsilon_{\underline{\alpha}}^{\neq t}(t) + B_{\underline{\alpha}\xi}^{\varepsilon}(1)\varepsilon_{\xi}^0(t) + B_{\underline{\alpha}j}^p(1)p_j^0(t) + B_{\underline{\alpha}\zeta}^{\varepsilon}(1)\Delta\beta_{\zeta}^0(t) - \Delta\beta_{\underline{\alpha}}^0(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t-1)). \quad (2.151)$$

Podstawiając naprężenia (2.151) oraz odkształcenia (2.143) do związku konstytutywnego (2.112) dostaje się:

$$\begin{aligned} & [E_{\underline{\alpha}}(1 + \gamma_{\underline{\alpha}})\delta_{\alpha\zeta} - E_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}\zeta}^{\varepsilon}(1)]\Delta\beta_{\zeta}^0(t) - E_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}\xi}^{\varepsilon}(1)\varepsilon_{\xi}^0(t) - E_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}j}^p(1)p_j^0(t) \\ & = E_{\underline{\alpha}}(\varepsilon_{\underline{\alpha}}^{\neq t}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t-1)) - \text{sign}(\sigma_{\alpha}^{TR})(\sigma_{\alpha}^* + \gamma_{\underline{\alpha}}E_{\underline{\alpha}}\alpha_{\underline{\alpha}}), \end{aligned} \quad (2.152)$$

gdzie

$$E_{\underline{\alpha}}(\varepsilon_{\underline{\alpha}}^{\neq t}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t-1)) = \sigma_{\alpha}^{TR}. \quad (2.153)$$

Ostateczna forma układu równań zadania sprzężonego przyjmuje postać:

$$\mathbf{F}^S \mathbf{d}^0 = \mathbf{b}, \quad (2.154)$$

gdzie

$$F^S = \begin{bmatrix} \left[ \delta_{\alpha\xi} - (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A)B_{\underline{\alpha}\xi}^{\varepsilon}(1) \right] & (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A)B_{\underline{\alpha}k}^p(1) & (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A) \left[ B_{\underline{\alpha}\zeta}^{\varepsilon}(1) - \delta_{\alpha\zeta} \right] \\ \Delta M_{ij}\ddot{D}_{j\xi}^{\varepsilon}(1) & \left[ \delta_{ik} + \Delta M_{ij}\ddot{D}_{jk}^p(1) \right] & \Delta M_{ij}\ddot{D}_{j\zeta}^{\varepsilon}(1) \\ -E_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}\xi}^{\varepsilon}(1) & -E_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}k}^p(1) & \left[ E_{\underline{\alpha}}(1 + \gamma_{\underline{\alpha}})\delta_{\alpha\zeta} - E_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}\zeta}^{\varepsilon}(1) \right] \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

$$d^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi}^0(t) \\ p_k^0(t) \\ \Delta\beta_{\zeta}^0(t) \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

$$b = \begin{bmatrix} (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^A) (\varepsilon_{\underline{\alpha}}^{\neq t}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t-1)) \\ -\Delta M_{ij}\ddot{u}_j^{\neq t} \\ \sigma_{\alpha}^{TR} - \text{sign}(\sigma_{\alpha}^{TR})(\sigma_{\alpha}^* + \gamma_{\underline{\alpha}}E_{\underline{\alpha}}\Psi_{\underline{\alpha}}) \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

Ponieważ w zadaniu sprzężonym przemodelowany jest poza nieliniowością fizyczną również przekrój elementów, dlatego wprowadzenie wyznaczonych w danym kroku czasowym sił oraz dystorsji wirtualnych zmienia rozkład strefy plastycznej. W związku z tym niezbędnym elementem algorytmu sprzężonego jest uaktualnianie zbioru elementów uplastycznionych po każdym kroku i ewentualne dołączenie dodatkowych elementów do zbioru  $\mathfrak{B}$ . W Tab. 2.11 przedstawiony został algorytm modelowania sprzężonego.

TABLICA 2.11. Algorytm dla dynamicznego zadania sprzężonego z modelowaniem zmiany pola przekroju

<p><b>Dane oraz obliczenia inicjujące</b></p> <p>Dane wejściowe zadania</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• konstrukcja pod ustalonym obciążeniem zewnętrznym <math>\mathbf{Q}(t)</math></li> <li>• lokalizacje dystorsyjne <math>\xi, j, k \in \mathfrak{A}</math></li> <li>• parametry modyfikacji pola przekroju <math>\mu^A</math>, granica plastyczności <math>\sigma^*</math>, parametr wzmocnienia <math>\gamma</math></li> </ul> <p>Obliczamy</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odpowiedź liniową konstrukcji nie zmodyfikowanej <math>\mathbf{u}^L(t)</math>, <math>\ddot{\mathbf{u}}^L(t)</math> na obciążenie <math>\mathbf{Q}(t)</math></li> <li>• macierze wpływu <math>\mathbf{D}^\varepsilon(\mathbf{t})</math>, <math>\mathbf{D}^p(\mathbf{t})</math>, <math>\ddot{\mathbf{D}}^\varepsilon(\mathbf{t})</math>, <math>\ddot{\mathbf{D}}^p(\mathbf{t})</math></li> <li>• określenie głównej macierzy zadania sprzężonego <math>\mathbf{F}</math>(2.154)</li> </ul> <p>Obliczenia dla każdej chwili <math>t</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Odkształcenia <math>\varepsilon^{\neq t}(t)</math> oraz przyspieszenia <math>\ddot{\mathbf{u}}_i^{\neq t}(t)</math></li> <li>2. Naprężenia próbne  <math display="block">\sigma_\alpha^{TR} = E_\alpha \left( \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t) - \beta_\alpha^0(t-1) \right)</math> </li> <li>3. Określenie strefy plastycznej (zbioru elementów uplastycznionych <math>\mathfrak{B}</math>)  <math display="block"> \sigma_\alpha^{TR}  \geq (\sigma_\alpha^* + \gamma_\alpha E_\alpha \Psi_\alpha)</math> </li> </ol> <p>TAK</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Uaktualnienie macierzy <math>\mathbf{F}</math> w zależności od strefy plastycznej</li> <li>• Dodanie elementu <math>\alpha</math> do zbioru elementów uplastycznionych <math>\mathfrak{B} \in \mathfrak{B} + \alpha</math></li> <li>• Wyznaczenie przyrostu dystorsji plastycznych <math>\Delta\beta^0(t)</math>, dystorsji wirtualnych <math>\varepsilon^0(t)</math> oraz sił wirtualnych <math>p^0(t)</math> z równania (2.154)</li> <li>• Wyznaczenie dystorsji plastycznych  <math display="block">\beta^0(t) = \beta^0(t-1) + \Delta\beta^0(t)</math> </li> <li>• Określenie parametru wzmocnienia izotropowego  <math display="block">\Psi_\alpha = \Psi_\alpha +  \Delta\beta^0(t) </math> </li> <li>• Uaktualnienie przemieszczeń <math>\mathbf{u}(t)</math> i przyspieszeń <math>\ddot{\mathbf{u}}(t)</math></li> <li>• Odkształcenia  <math display="block">\varepsilon_\alpha(t) = G_{\alpha i} u_i(t)</math> </li> <li>• Naprężenia  <math display="block">\sigma_\alpha(t) = E_i(\varepsilon_\alpha(t) - \beta_\alpha^0(t))</math> </li> </ul> <p>NIE</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wyznaczenie dystorsji <math>\varepsilon^0(t)</math> i sił wirtualnych <math>p^0(t)</math> z równania (2.154)</li> <li>• Uaktualnienie przemieszczeń <math>\mathbf{u}(t)</math> i przyspieszeń <math>\ddot{\mathbf{u}}(t)</math></li> <li>• Wyznaczenie odkształceń <math>\varepsilon(t)</math></li> <li>• Wyznaczenie naprężeń <math>\sigma(t)</math></li> <li>• Sprawdzenie czy do strefy plastycznej nie wchodzi dodatkowe elementy jeżeli tak powrót do punktu czwartego</li> </ul>
--

### Przykład 2.7

Do testu numerycznego zadania sprzężonego, wykorzystano przykładowy model kratowy przedstawiony na Rys. 2.4.1. Wyniki otrzymane z *Metod Wirtualnych* porównane zostały z wynikami otrzymanymi w komercyjnym programie metody elementów skończonych ANSYS.

W programie ANSYS do analizy wybrano dwuwymiarowy element kratowy LINK1. Model sprężysto-plastyczny odpowiadający przyjętemu w pracy to BILINEAR ISOTROPIC HARDENING.

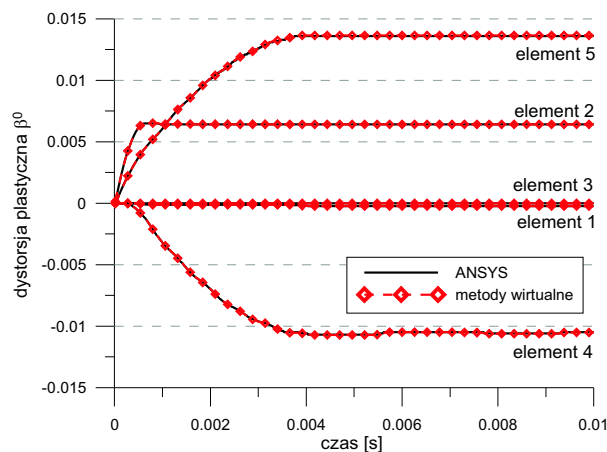
Granica plastyczności  $\sigma^*$  została ustalona na tym samym poziomie dla wszystkich elementów równa  $5.0 \times 10^5 [Pa]$ . Parametr wzmocnienia  $\gamma$  równy jest 0.01. Założono różne parametry modyfikacji przekrojów poprzecznych  $\mu^A$ . Wymuszenie dynamiczne realizowane jest prędkością początkową  $V = -20 [m/s]$  przyłożoną w węzle 2 w kierunku pionowym. Dane dla zadania sprężonego przedstawiono w tabeli Tab. 2.12:

TABLICA 2.12. Dane zadania modelowania sprężonego

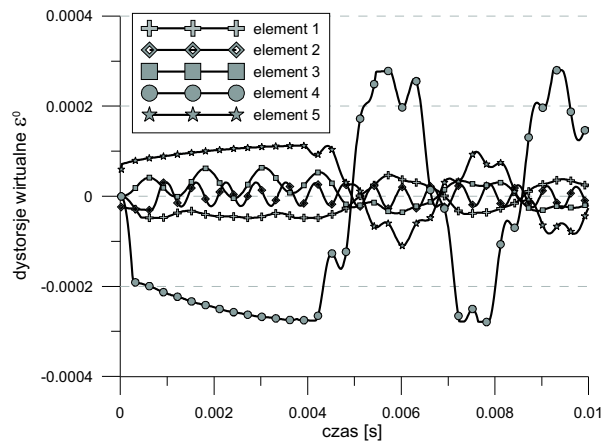
nr elem.	$\sigma^*[Pa]$	$\gamma$	$A[mm]$	$\mu^A$	$\hat{A}[mm]$
1	$5.0 \times 10^7$	0.01	$1 \times 10^{-5}$	0.8	$8 \times 10^{-6}$
2	$5.0 \times 10^7$	0.01	$1 \times 10^{-5}$	1.1	$1.1 \times 10^{-5}$
3	$5.0 \times 10^7$	0.01	$1 \times 10^{-5}$	0.6	$6 \times 10^{-6}$
4	$5.0 \times 10^7$	0.01	$1 \times 10^{-5}$	0.2	$2 \times 10^{-6}$
5	$5.0 \times 10^7$	0.01	$1 \times 10^{-5}$	0.7	$7 \times 10^{-6}$

Do porównania wybrano odkształcenia plastyczne. Ponieważ odkształcenia dla wszystkich elementów są w podobnym zakresie, dlatego na jednym wykresie Rys. 2.25 przedstawiono dystorsje plastyczne dla wszystkich elementów. Na wykresach przedstawiono przebieg dystorsji wirtualnej  $\varepsilon^0$  Rys. 2.26 oraz sił wirtualnych  $p^0(t)$  Rys. 2.27 w funkcji czasu.

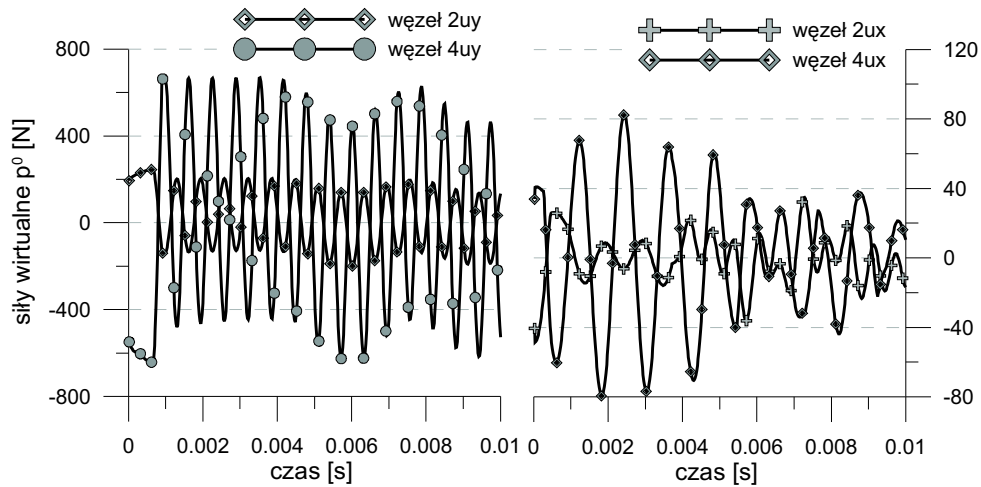
Natomiast na wykresie Rys. 2.28 przedstawiono porównanie bilansu energii zadania sprężonego. Dla wyników przemodelowania otrzymanych metodami wirtualnymi oraz struktury ze zmienionymi parametrami konstrukcyjnymi z wykorzystaniem programu ANSYS. Maksymalny błąd pomiędzy wynikami z ANSYS'a i wynikami otrzymanymi z wykorzystaniem metod wirtualnych Rys. 2.29 nie przekraczają wartości 0.02.



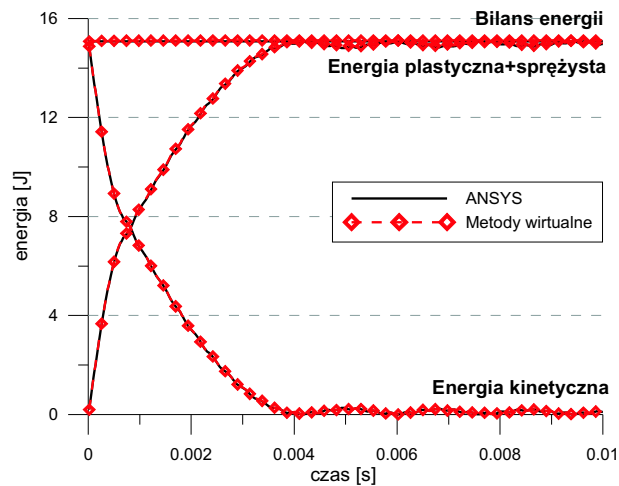
Rys. 2.25. Porównanie odkształceń plastycznych. Dla konstrukcji modelowanej metodami wirtualnymi i zmodyfikowanej ANSYS.



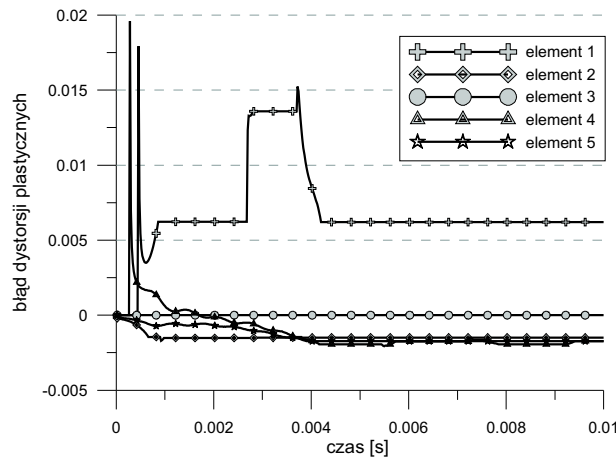
Rys. 2.26. Przebieg dystorsji wirtualnych, modelujących sztywność elementu



Rys. 2.27. Przebieg sił wirtualnych, modelujących masę elementu



Rys. 2.28. Porównanie bilansu energii. Dla konstrukcji modelowanej metodami wirtualnymi i zmodyfikowanej ANSYS



RYS. 2.29. Błąd odkształceń plastycznych dla konstrukcji modelowanej metodami wirtualnymi i zmodyfikowanej ANSYS

### 2.9.2. Modelowanie sztywności i masy w zadaniu sprzężonym

Często zdarza się iż zamiast zmiany pola przekroju elementów trzeba zamodelować zmianę materiału (gęstość oraz sztywność). W takim przypadku w związku konstytutywnym należy uwzględnić naprężenia (2.149). Co skutkuje zmianą w ostatnim składniku macierzy przemodelowywania sprzężonego w następujący sposób:

$$\begin{aligned} [E_{\underline{\alpha}}(1 + \gamma_{\underline{\alpha}})\delta_{\alpha\zeta} - E_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}\zeta}^{\varepsilon}(1)]\Delta\beta_{\zeta}^0(t) - E_{\underline{\alpha}}(B_{\underline{\alpha}\xi}^{\varepsilon}(1) - \delta_{\underline{\alpha}\xi})\varepsilon_{\xi}^0(t) - E_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}j}^p(1)p_j^0(t) \\ = E_{\underline{\alpha}}(\varepsilon_{\underline{\alpha}}^{\neq t}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t - 1)) - \text{sign}(\sigma_{\alpha}^{TR})(\sigma_{\alpha}^* + \gamma_{\underline{\alpha}}E_{\underline{\alpha}}\Psi_{\underline{\alpha}}), \end{aligned} \quad (2.158)$$

Algorytm zadania sprzężonego z modelowaniem zmiany materiały musi zostać zmodyfikowany w stosunku do algorytmu modelowania pola przekroju poprzecznego Tab. 2.11. Modyfikacja związana jest z rozwojem strefy plastycznej, która to przy zmianie materiału jest określana na podstawie naprężeń próbnich. Naprężenia te wyznaczone na początku każdej pętli czasowej muszą uwzględniać dystorsję modelującą sztywność  $\varepsilon^0(t)$ .

$$\sigma_{\alpha}^{TR} = E_{\underline{\alpha}}(\varepsilon_{\underline{\alpha}}^{\neq t}(t) - \varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t - 1)) \quad (2.159)$$

Problem ten można rozwiązać na dwa sposoby:

- sprawdzenia znaku naprężeń  $\sigma(t)$  ze znakiem przyrostu dystorsji plastycznej  $\Delta\beta^0(t)$ , i odpowiednia modyfikacja zbioru elementów wchodzących do strefy plastycznej  $\mathfrak{B}$ ,
- drugim sposobem prostszym i nie wymagającym ingerencji w macierz modelowanie sprzężonego jest wstępne oszacowanie dystorsji modelującej sztywność. Można to wykonać traktując zadanie jako rozsprężone wykorzystując zależność:

$$\varepsilon_{\alpha}^0(t) = (1 - \mu_{\underline{\alpha}}^E)(\varepsilon_{\underline{\alpha}}(t) - \beta_{\underline{\alpha}}^0(t)). \quad (2.160)$$

Algorytm modelowania sprzężonego przedstawiono w Tab. 2.13

TABLICA 2.13. Algorytm dla dynamicznego zadania sprzężonego z modelowaniem zmiany materiału

<p><b>Dane oraz obliczenia inicjujące</b></p> <p>Dane wejściowe zadania</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• konstrukcja pod ustalonym obciążeniem zewnętrznym <math>\mathbf{Q}(t)</math></li> <li>• lokalizacje dystorsyjne <math>\xi, j, k \in \mathfrak{A}</math></li> <li>• parametry modyfikacji gęstości <math>\mu^R</math>, oraz sztywności <math>\mu^E</math>, granica plastyczności <math>\sigma^*</math>, parametr wzmocnienia <math>\gamma</math></li> </ul> <p>Obliczamy</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odpowiedź liniową konstrukcji nie zmodyfikowanej <math>\mathbf{u}^L(t)</math>, <math>\ddot{\mathbf{u}}^L(t)</math> na obciążenie <math>\mathbf{Q}(t)</math></li> <li>• macierze wpływu <math>\mathbf{D}^\varepsilon(t)</math>, <math>\mathbf{D}^p(t)</math>, <math>\ddot{\mathbf{D}}^\varepsilon(t)</math>, <math>\ddot{\mathbf{D}}^p(t)</math></li> <li>• określenie głównej macierzy zadania sprzężonego <math>\mathbf{F}</math>(2.154) z uwzględnieniem (2.158)</li> </ul> <p>Obliczenia dla każdej chwili <math>t</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Odształcenia <math>\varepsilon^{\neq t}(t)</math> oraz przyspieszenia <math>\ddot{\mathbf{u}}_i^{\neq t}(t)</math></li> <li>2. Oszacowanie zgrubne dystorsji modelującej sztywność <math>\varepsilon^0(t)</math>  <math display="block">\varepsilon_\alpha^0(t) = (1 - \mu_\alpha^E) (\varepsilon_\alpha^{\neq t}(t) - \beta_\alpha^0(t-1))</math></li> <li>3. Naprężenia próbne  <math display="block">\sigma_\alpha^{TR} = E_\alpha (\varepsilon_\alpha^{\neq t}(t) - \varepsilon_\alpha^0(t) - \beta_\alpha^0(t-1))</math></li> <li>4. Określenie strefy plastycznej (zbioru elementów uplastycznionych <math>\mathfrak{B}</math>)  <math display="block"> \sigma_\alpha^{TR}  \geq (\sigma_\alpha^* + \gamma_\alpha E_\alpha \Psi_\alpha)</math></li> </ol> <p><b>TAK</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Uaktualnienie macierzy <math>\mathbf{F}</math> w zależności od strefy plastycznej</li> <li>• Wyznaczenie przyrostu dystorsji plastycznych <math>\Delta\beta^0(t)</math>, dystorsji wirtualnych <math>\varepsilon^0(t)</math> oraz sił wirtualnych <math>p^0(t)</math> z równania (2.154)</li> <li>• Wyznaczenie dystorsji plastycznych  <math display="block">\beta^0(t) = \beta^0(t-1) + \Delta\beta^0(t)</math></li> <li>• Określenie parametru wzmocnienia izotropowego  <math display="block">\Psi_\alpha = \Psi_\alpha +  \Delta\beta^0(t) </math></li> <li>• Uaktualnienie odkształceń <math>\varepsilon(t)</math> i przyspieszeń <math>\ddot{\mathbf{u}}(t)</math></li> <li>• Naprężenia  <math display="block">\sigma_\alpha(t) = E_i (\varepsilon_\alpha(t) - \varepsilon_\alpha^0(t) - \beta_\alpha^0(t))</math></li> </ul> <p><b>NIE</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wyznaczenie dystorsji <math>\varepsilon^0(t)</math> i sił wirtualnych <math>p^0(t)</math> z równania (2.154)</li> <li>• Uaktualnienie odkształceń <math>\varepsilon(t)</math> i przyspieszeń <math>\ddot{\mathbf{u}}(t)</math></li> <li>• Wyznaczenie naprężeń <math>\sigma(t)</math></li> <li>• Sprawdzenie czy do strefy plastycznej nie wchodzi dodatkowe elementy jeżeli tak powrót do punktu czwartego</li> </ul>
---

### Przykład 2.8

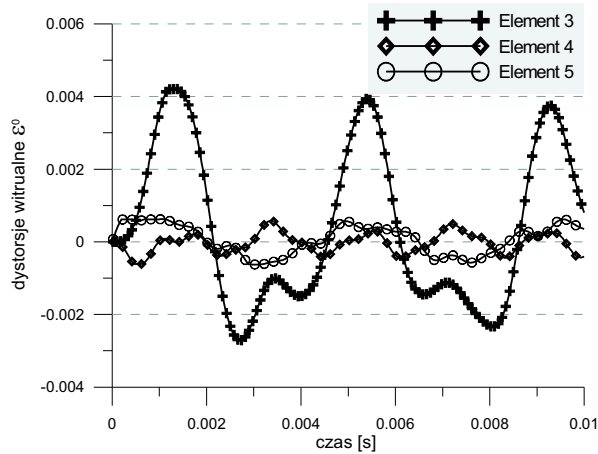
W przykładzie tym, przedstawiono poprawność przemodelowania materiału w konstrukcji według tabeli Tab. 2.13. Konstrukcja obciążona jest prędkością początkową o wartości  $v = 20 \text{ m/s}$  przyłożoną w węźle 2. Wykonana została analiza z wykorzystaniem metod wirtualnych oraz za pomocą programu ANSYS. W zadaniu założono zmianę materiału elementu 3 ze stali na magnez, natomiast w elementach 4 i 5 ze stali na miedź.

Na przedstawionych wykresach Rys. 2.32 i Rys. 2.33 widać iż wyniki z metod wirtualnych i ANSYS'a są bardzo blisko siebie i prawie nie do odróżnienia.

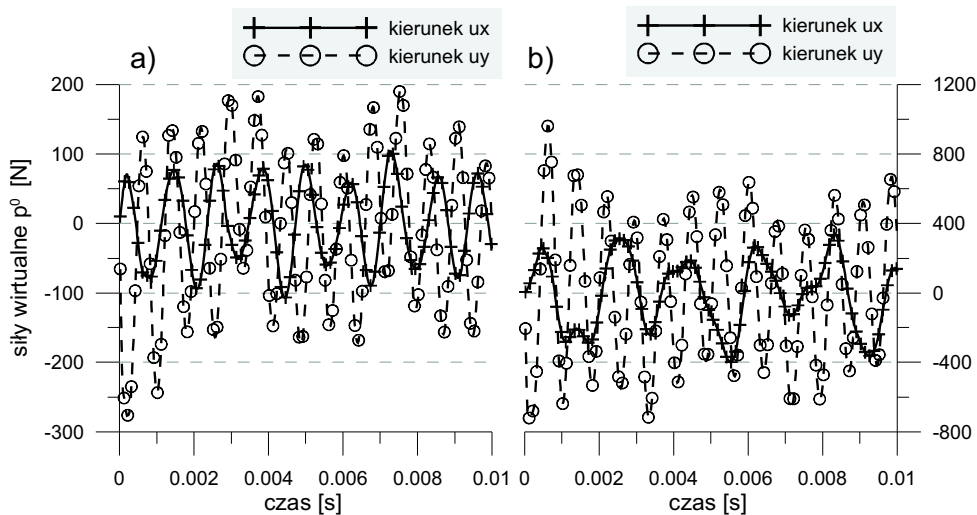
TABLICA 2.14. Modyfikacja gęstości i masy konstrukcji.

Element	$\mu^E$	$\mu^R$	$\sigma^*$	$\gamma$
1	1.00	1.00	294	0.01
2	1.00	1.00	294	0.01
3	0.12	0.22	120	0.01
4	0.62	1.14	210	0.01
5	0.62	1.14	210	0.01

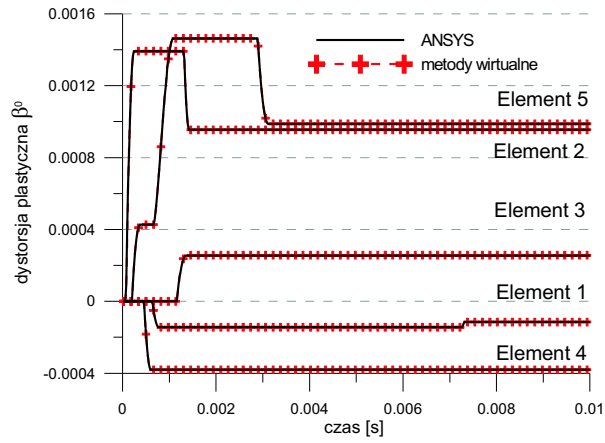
Ze względu na małe rozbieżności otrzymanych wyników na Rys. 2.34 porównano błąd określonych dystorsji plastycznych  $\beta^0(t)$ . Największą rozbieżność zarejestrowano w elemencie 2 nie przekraczającą jednak wartości  $8e - 2$ .



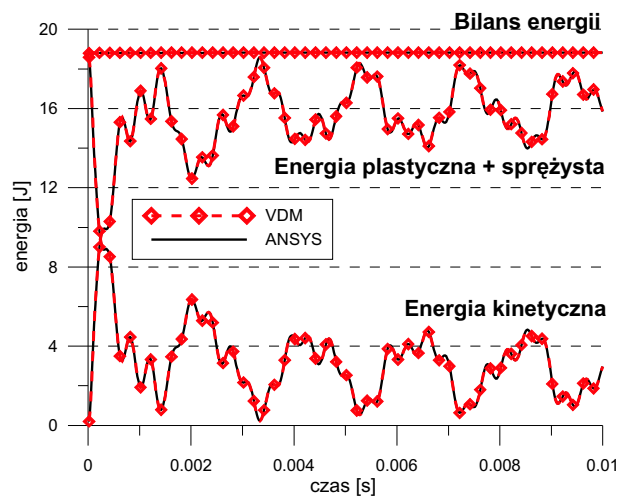
RYS. 2.30. Dystorsje wirtualne modelujące sztywność.



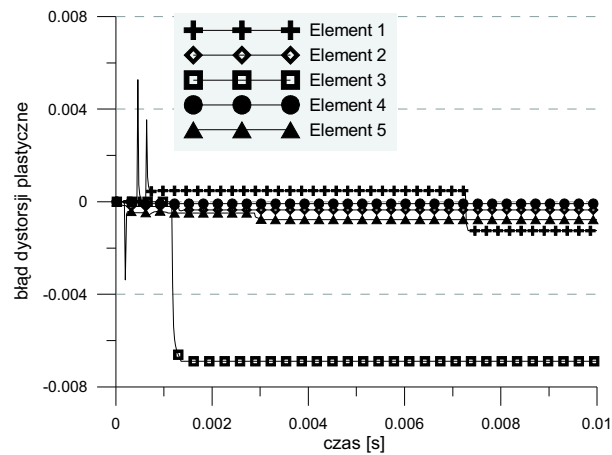
RYS. 2.31. Siły wirtualne modelujące gęstość. (a) w węźle 2, (b) w węźle 4.



Rys. 2.32. Dystorsje plastyczne.



Rys. 2.33. Bilans energii.



Rys. 2.34. Bezwzględna wartość błęd (VDM vs. ANSYS)



### 2.9.3. Analiza wrażliwości w zadaniu sprzężonym

Intencją autora jest wykorzystanie metod wirtualnych dla optymalnego projektowania konstrukcji obciążonych dynamicznie. Jednym z rozpatrywanych zagadnień będzie maksymalizacja energii dyssypacji konstrukcji. W związku z tym dla testu analizy wrażliwości wybrano jako funkcję celu przyrost energii dyssypacji wyrażoną zależnością:

$$\Delta U(t) = \sigma_\alpha(t) \Delta \beta_\alpha^0(t) l_\alpha A_\alpha \mu_\alpha. \quad (2.161)$$

Wrażliwość funkcji celu na zmianę pola przekroju otrzymujemy po zróżniczkowaniu powyższej zależności w następującej formie:

$$\frac{\partial \Delta U(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = \frac{\partial \sigma_\alpha(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \Delta \beta_\alpha^0(t) A_\alpha l_\alpha \mu_\alpha + \frac{\partial \Delta \beta_\alpha^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \sigma_\alpha(t) A_\alpha l_\alpha \mu_\alpha + \sigma_\alpha(t) \Delta \beta_\alpha^0(t) l_\alpha \delta_{\alpha\varphi}. \quad (2.162)$$

Składnik  $\frac{\partial \sigma_\alpha(t)}{\partial \hat{A}_\varphi}$  wyznaczany jest z zależności:

$$\frac{\partial \sigma_\alpha(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = E_\alpha \left( \frac{\partial \varepsilon_\alpha(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} - \frac{\partial \beta_\alpha^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \right). \quad (2.163)$$

Ponieważ w przykładzie tym rozpatrywane jest zadanie sprzężone w związku z tym, wrażliwość wielkości wirtualnych na zmianę pola przekroju poprzecznego  $\hat{A}$ , wyznaczana jest podobnie jak wielkości wirtualne z układu równań. Układ równań generowany jest w trzech etapach. Dla otrzymania pierwszego składnika równania, zależność z której wyznaczana jest dystorsji wirtualna modelująca sztywność  $\varepsilon^0(t)$  (2.140) została zróżniczkowanie względem pola przekroju  $\hat{A}$  otrzymując

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = (1 - \mu_\alpha^A) \left( \frac{\partial \varepsilon_\alpha(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} - \frac{\partial \beta_\alpha^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \right) - \frac{\partial \mu_\alpha^A}{\partial \hat{A}_\varphi} (\varepsilon_\alpha(t) - \beta_\alpha^0(t)) \quad (2.164)$$

Po rozpisaniu zależności (2.164) i wprowadzeniu zmiennej  $\frac{\partial \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi}$ , która nie zawiera w sobie wrażliwości z chwili  $t$  danej zależnością

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = \sum_{\tau=1}^{t-1} B_{\alpha\xi}^\varepsilon(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_\xi^0(\tau)}{\partial \hat{A}_\varphi} + \sum_{\tau=1}^{t-1} B_{\alpha j}^p(t-\tau) \frac{\partial p_j^0(\tau)}{\partial \hat{A}_\varphi} + \sum_{\tau=1}^t \sum_{\hat{\tau}=1}^{\tau-1} B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(\tau-\hat{\tau}) \frac{\partial \Delta \beta_\zeta^0(\hat{\tau})}{\partial \hat{A}_\varphi}, \quad (2.165)$$

pierwszą część równania dostaje się w następującej formie:

$$\begin{aligned} & [\delta_{\alpha\xi} - (1 - \mu_\alpha^A) B_{\alpha\xi}^\varepsilon(1)] \frac{\partial \varepsilon_\xi^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} - (1 - \mu_\alpha^A) B_{\alpha j}^p(1) \frac{\partial p_j^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} - (1 - \mu_\alpha^A) [B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(1) - \delta_{\alpha\zeta}] \frac{\partial \Delta \beta_\zeta^0(\hat{\tau})}{\partial \hat{A}_\varphi} \\ & = (1 - \mu_\alpha^A) \left( \frac{\partial \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} - \frac{\partial \beta_\alpha^0(t-1)}{\partial \hat{A}_\varphi} \right) - \frac{\partial \mu_\alpha^A}{\partial \hat{A}_\varphi} (\varepsilon_\alpha(t) - \beta_\alpha^0(t)), \quad (2.166) \end{aligned}$$

gdzie,

$$\frac{\partial \mu_\alpha^A}{\partial A_\varphi} = \frac{1}{A_\alpha} \delta_{\alpha\varphi}. \quad (2.167)$$

Drugi składnik równia zadania sprzężonego dla analizy wrażliwości otrzymuje się przez zróżniczkowanie względem pola przekroju  $\hat{A}$  równania (2.146) otrzymując:

$$\frac{\partial p_i^{0A}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = -\frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \hat{A}_\varphi} \ddot{u}_j(t) - \Delta M_{ij} \frac{\partial \ddot{u}_j(t)}{\partial \hat{A}_\varphi}. \quad (2.168)$$

Rozpisanie zależności (2.168) pozwala na zapisania w następującej formie drugiego składnika równia zadania sprzężonego dla rozpatrywanej analizy wrażliwości:

$$\begin{aligned} \Delta M_{ij} \ddot{D}^{\varepsilon}_{j\xi}(1) \frac{\partial \varepsilon_\xi^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} + \left[ \delta_{ik} + \Delta M_{ij} \ddot{D}^p_{jk}(1) \right] \frac{\partial p_j^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} + \Delta M_{ij} \ddot{D}^{\varepsilon}_{j\zeta}(1) \frac{\partial \Delta \beta_\zeta^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = \\ - \frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \hat{A}_\varphi} \ddot{u}_j(t) - \Delta M_{ij} \frac{\partial \ddot{u}_j^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi}, \end{aligned} \quad (2.169)$$

gdzie  $\frac{\partial \ddot{u}_j^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi}$  opisuje wrażliwość pola przyspieszeń  $\ddot{u}(t)$  na zmianę pola przekroju poprzecznego  $\hat{A}$ , bez uwzględnienia wrażliwości wielkości wirtualnych w danym kroku czasowym  $t$ , natomiast wrażliwość  $\frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \hat{A}_\varphi}$  określa się z zależności (2.105). Ostatni składnik równia sprzężonego dla analizy wrażliwości otrzymuje się różniczkując równanie (2.152) względem pola przekroju  $\hat{A}$ <sup>6)</sup>,

$$\begin{aligned} - E_\alpha B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(1) \frac{\partial \varepsilon_\zeta^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} - E_\alpha B_{\alpha j}^p(1) \frac{\partial p_j^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} + \left[ E_\alpha (1 + \gamma_\alpha) \delta_{\alpha\zeta} - E_\alpha B_{\alpha\zeta}^\varepsilon(1) \right] \frac{\partial \Delta \beta_\zeta^0(\hat{\tau})}{\partial \hat{A}_\varphi} \\ = E_\alpha \left( \frac{\partial \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} - \frac{\partial \beta_\alpha^0(t-1)}{\partial \hat{A}_\varphi} \right) - \text{sign}(\sigma_\alpha^{TR}) \left( \sigma_\alpha^* + \gamma_\alpha E_\alpha \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \hat{A}_\varphi} \right), \end{aligned} \quad (2.170)$$

gdzie składnik  $\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \hat{A}_\varphi}$  wyznaczamy z zależności

$$\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \hat{A}_\varphi} = \begin{cases} \sum_t \text{sign}(\Delta \beta_\alpha^0(t)) \frac{\partial \Delta \beta_\alpha^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} & \text{if } \Delta \beta_\alpha^0(t) \neq 0 \\ 0 & \text{if } \Delta \beta_\alpha^0(t) = 0 \end{cases} \quad (2.171)$$

Równanie analizy wrażliwości zadania sprzężonego przyjmuje postać:

$$\mathbf{F}^S \mathbf{g}^0 = \mathbf{b}^g, \quad (2.172)$$

gdzie macierz  $\mathbf{F}^S$  ma identyczną formę jak w równaniu modelowania sprzężonego (2.154)<sup>7)</sup>, wektor  $\mathbf{g}^0$  przyjmuje postać:

$$g^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_\xi^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \\ \frac{\partial p_k^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \\ \frac{\partial \Delta \beta_\zeta^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} (1 - \mu_\alpha^A) \left( \frac{\partial \varepsilon_\alpha^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} - \frac{\partial \beta_\alpha^0(t-1)}{\partial \hat{A}_\varphi} \right) - \frac{\partial \mu_\alpha^A}{\partial \hat{A}_\varphi} (\varepsilon_\alpha(t) - \beta_\alpha^0(t-1)) \\ - \frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \hat{A}_\varphi} \ddot{u}_j(t) - \Delta M_{ij} \frac{\partial \ddot{u}_j^{\neq t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \\ \frac{\partial \sigma_\alpha^{TR}}{\partial \hat{A}_\varphi} - \text{sign}(\sigma_\alpha^{TR}) \left( \sigma_\alpha^* + \gamma_\alpha E_\alpha \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \hat{A}_\varphi} \right) \end{bmatrix}. \quad (2.173)$$

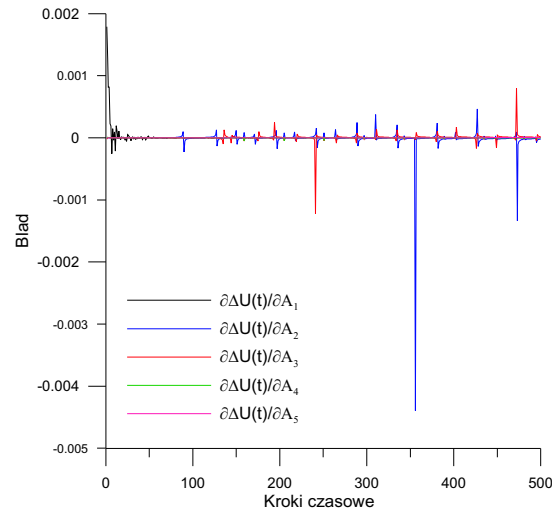
<sup>6)</sup>Jeżeli uwzględniamy modelowanie sztywności i masy niezależnie, a nie modyfikacje przekroju, należy wtedy zróżniczkować równanie(2.158).

<sup>7)</sup>W algorytmie modelowania sprzężonego z analizą wrażliwości macierz  $\mathbf{F}^S$  jest generowana tylko raz i w trakcie całej analizy zostaje niezmienniona.

Ostatnim składnikiem jaki trzeba wyznaczyć jest wrażliwość pola odkształceń na zmianę pola przekroju poprzecznego elementów, występujący w (2.163). Składnik jest wyznaczony przez uaktualnienie komponentu (2.165) w następujący sposób:

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = \frac{\partial \varepsilon_\alpha^{t}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} + D_{\alpha j}^p(1) \frac{\partial p_j^{0M}(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} + D_{\alpha \xi}^\varepsilon(1) \frac{\partial \varepsilon_\xi^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} + D_{\alpha \zeta}^\varepsilon(1) \frac{\partial \beta_\zeta^0(t)}{\partial \hat{A}_\varphi}, \quad (2.174)$$

Analizę wrażliwości przeprowadzono dla przykładu przedstawionego na Rys. 2.4.1. Przy parametrach zadania podanych w tabeli powyżej. Dla porównania wyników analizy wrażliwości wykonanej Metodą Różnic Skończonych oraz z wykorzystaniem *metod wirtualnych* wykorzystano zależność (2.38). Maksymalna wartość błędu jest mniejsza niż: 0.002.



Rys. 2.35. Wartość błędu gradientów wyznaczonych analitycznie i metodą różnic skończonych

Jeżeli natomiast funkcja celu przedstawiona jest jako całkowita energia plastyczna, wartości błędu wynoszą:

$$U = \sum_t \Delta U(t) \quad (2.175)$$

TABLICA 2.15. Porównanie wartości funkcji celu dla analizy wrażliwości zadania sprzężonego

	MRS	IMDW	Błąd
$\frac{\partial U}{\partial A_1}$	0.996206E+04	0.996205E+04	0.833870E-06
$\frac{\partial^2 U}{\partial A_1^2}$	0.204749E+05	0.204739E+05	0.467989E-04
$\frac{\partial^3 U}{\partial A_1^3}$	0.259559E+05	0.259552E+05	0.300264E-04
$\frac{\partial^4 U}{\partial A_1^4}$	0.443956E+06	0.443955E+06	0.250197E-05
$\frac{\partial^5 U}{\partial A_1^5}$	0.610193E+06	0.610192E+06	0.176812E-05



## Rozdział 3

# Optymalne projektowanie konstrukcji obciążonych dynamicznie

---

Optymalne projektowanie konstrukcji w zagadnieniach dynamicznych jest procesem znacznie bardziej złożonym niż projektowanie konstrukcji w statyce. W dużej mierze związane jest to z kosztami numerycznymi pojawiającymi się wraz z dyskrytyzacją przestrzeni czasowej, co z kolei wiąże się z uwzględnianiem ograniczeń oraz analizą wrażliwości również zależną od czasu. W problemach poświęconych uderzeniom dodatkowym utrudnieniem jest konieczność stosowania gęstej siatki czasowej.

W rozdziale tym zaprezentowane zostaną trzy zadania przedstawiające możliwości wykorzystania *metod wirtualnych* w problemach optymalnego projektowania konstrukcji obciążonych dynamicznie.

Pierwsze zadanie przedstawia problem optymalnego przeprojektowania konstrukcji w celu otrzymania konstrukcji najsztyniejszej.

Zadanie drugie prezentuje natomiast problem związany z optymalnym sterowaniem programami plastycznymi elementów konstrukcji *bezpieczników strukturalnych* w taki sposób aby zminimalizować przyspieszenia wybranych węzłów.

Zadanie trzecie przedstawia propozycje projektowania *konstrukcji adaptacyjnych AIA* poddanych działaniu obciążenia udarowego.

### 3.1. Optymalna redystrybucja materiału.

Przedstawiony problem polega na optymalnej redystrybucji elementów (pól przekrojów  $A$ ) konstrukcji w taki sposób aby otrzymać konstrukcję najsztyniejszą. Jako kryterium rozkładu elementów w strukturze przyjęta została funkcja celu, zdefiniowana jako kwadratowa różnica pomiędzy odpowiedzią konstrukcji wymaganą, a odpowiedzią wyznaczoną z wykorzystaniem *metod wirtualnych*.

$$f(\hat{A}) = \sum_t \sum_k \left[ u_k^d(t) - u_k(\hat{A}, t) \right]^2 \quad (3.1)$$

gdzie  $u_k^d(t)$ ,  $u_k(t)$  opisują odpowiednio wymagane, oraz wyznaczone przemieszczenia konstrukcji w dziedzinie czasu, w stopniach swobody  $k$ . Indeks  $k$  przebiega po zbiorze stopni swobody konstrukcji, w których minimalizowana jest kwadratowa różnica przemieszczeń. Rozwiązanie zadania optymalizacji ograniczone jest zadaną objętością materiału  $\tilde{V}$  oraz

dopuszczalnymi naprężeniami  $\tilde{\sigma}$ . Dodatkowe ograniczenie które musi być spełnione związane jest z nieujemnym polem przekroju elementów.

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} l_{\alpha} \mu_{\alpha} = V \leq \tilde{V} \quad (3.2a)$$

$$|\sigma(t)| < \tilde{\sigma} \quad (3.2b)$$

$$0 < \mathbf{A} \quad (3.2c)$$

Dla ułatwienia procesu optymalizacji, pierwotne zadanie (3.1) z ograniczeniami (3.2a), (3.2b) oraz (3.2c) zostało zastąpione zadaniem bez ograniczeń. Zdefiniowana została nowa funkcja celu  $f_c$  (3.3) złożona z pierwotnej funkcji celu (3.1) oraz funkcji kary nakładanej przy przekroczeniu aktywnych ograniczeń. Takie iteracyjne postępowanie, wygodne w komputerowej realizacji, w literaturze nosi nazwę *Algorytm funkcji kary*. W zadaniu tym zastosowano kwadratową zewnętrzną funkcję kary (*ang.* Quadratic penalty method) [41],[56].

$$f_c(\hat{A}) = f(\hat{A}) + c_1 (V - \tilde{V})^2 \mathbf{1}_{V > \tilde{V}} + c_2 \sum_{\alpha} (\hat{A}_{\alpha})^2 \mathbf{1}_{0 > A_{\alpha}} + c_3 \sum_t \sum_{\alpha} \left[ (\sigma_{\alpha}(t) + \tilde{\sigma}_{\alpha})^2 \mathbf{1}_{-\tilde{\sigma}_{\alpha} > \sigma_{\alpha}(t)} + (\sigma_{\alpha}(t) - \tilde{\sigma}_{\alpha})^2 \mathbf{1}_{\tilde{\sigma}_{\alpha} < \sigma_{\alpha}(t)} \right] \quad (3.3)$$

gdzie stałe  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$  są parametrami funkcji kary. Zastosowany algorytm optymalizacji wymaga analitycznie wyznaczonych pierwszych i drugich pochodnych nowej funkcji celu  $f_c$ . Mają one następującą postać

$$\frac{\partial}{\partial \hat{A}_{\varphi}} f_c(\hat{A}) = \frac{\partial}{\partial \hat{A}_{\varphi}} f(\hat{A}) + 2c_1 (V - \tilde{V}) l_{\varphi} \mathbf{1}_{V > \tilde{V}} + 2c_2 \hat{A}_{\varphi} \mathbf{1}_{0 > A_{\varphi}} + 2c_3 \sum_t \sum_{\alpha} \left[ (\sigma_{\alpha}(t) + \tilde{\sigma}_{\alpha}) \frac{\partial \sigma_{\alpha}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \mathbf{1}_{-\tilde{\sigma}_{\alpha} > \sigma_{\alpha}(t)} + (\sigma_{\alpha}(t) - \tilde{\sigma}_{\alpha}) \frac{\partial \sigma_{\alpha}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \mathbf{1}_{\tilde{\sigma}_{\alpha} < \sigma_{\alpha}(t)} \right] \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{A}_{\varphi} \partial \hat{A}_{\delta}} f_c(\hat{A}) \approx \frac{\partial^2}{\partial \hat{A}_{\varphi} \partial \hat{A}_{\delta}} f(\hat{A}) + 2c_1 l_{\varphi} l_{\delta} \mathbf{1}_{V > \tilde{V}} + 2c_2 \delta_{\varphi \delta} \mathbf{1}_{0 > A_{\varphi}} + 2c_3 \sum_t \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial \sigma_{\alpha}(t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \frac{\partial \sigma_{\alpha}(t)}{\partial \hat{A}_{\delta}} \mathbf{1}_{\tilde{\sigma}_{\alpha} > |\sigma_{\alpha}(t)|} \right] \quad (3.5)$$

Biorąc pod uwagę problemy z wyznaczeniem składnika  $\frac{\partial^2 \sigma_i(t)}{\partial \hat{A}_l \partial \hat{A}_k}$  został on w zależności (3.5) pominięty.

Pochodne funkcji celu  $f$ , dane są zależnościami:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{A}_{\varphi}} f(\hat{A}) = -2 \sum_t \sum_k \left[ u_k^d(t) - u_k(\hat{A}, t) \right] \frac{\partial u_k(\hat{A}, t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{A}_{\varphi} \partial \hat{A}_{\delta}} f(\hat{A}) = 2 \sum_t \sum_k \frac{\partial u_k(\hat{A}, t)}{\partial \hat{A}_{\varphi}} \frac{\partial u_k(\hat{A}, t)}{\partial \hat{A}_{\delta}} - 2 \sum_t \sum_k \left[ u_k^d(t) - u_k(\hat{A}, t) \right] \frac{\partial^2 u_k(\hat{A}, t)}{\partial \hat{A}_{\varphi} \partial \hat{A}_{\delta}} \quad (3.7)$$

Ze względu na trudności w wyznaczeniu drugiej pochodnej przemieszczenia po polu przekroju  $\frac{\partial^2 u_k(\hat{A}, t)}{\partial \hat{A}_\varphi \partial \hat{A}_\delta}$  do analizy wykorzystana zostanie przybliżona druga pochodna z pominięciem niewygodnego składnika.

$$\tilde{H}(\hat{A}) = 2 \sum_t \sum_k \frac{\partial u_k(\hat{A}, t)}{\partial \hat{A}_\varphi} \frac{\partial u_k(\hat{A}, t)}{\partial \hat{A}_\delta} \quad (3.8)$$

Do minimalizacji funkcji celu  $f_c$  wykorzystany został schemat postępowania, bazujący na algorytmie Levenberga-Marquardt'a [25] przedstawiony w tabeli 3.1.

Algorytm powinien dodatkowo zawierać składnik, który w przypadku zerowania wszystkich przekrojów elementów  $A$  związanych z danym węzłem, musi pomijać wyznaczanie przemieszczeń oswobodzonego węzła. Na przykład, jeżeli w procesie optymalizacji zostają usunięte elementy 2, 9, 10 Rys. 3.1, algorytm musi uwzględniać pominięcie wyznaczania przemieszczenia węzła 3. Korzystając z metod wirtualnych jest to bardzo proste do zaimplementowania, gdyż nie wymaga przebudowywania macierzy sztywności konstrukcji. Innym sposobem ominięcia tej niedogodności jest zastosowanie przekrojów minimalnych, po przekroczeniu których zakładamy, iż element został usunięty z konstrukcji.

TABLICA 3.1. Algorytm optymalizacji

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Pochodna odpowiedzi konstrukcji po zmianie pola przekroju <math>\frac{\partial u_k(t)}{\partial \hat{A}_\varphi}</math></li> <li>2. Gradient funkcji celu <math>\nabla f_c(\hat{A})</math></li> <li>3. Przybliżony hesjan funkcji celu <math>\tilde{H}(\hat{A})</math></li> <li>4. Adaptacyjny dobór kroku optymalizacji: powtarzaj <ul style="list-style-type: none"> <li>• Długość kroku optymalizacji  <math display="block">\left[ \tilde{H}(\hat{A}) + \lambda \mathbf{I} \right] \Delta \hat{A} = -\nabla f_c(\hat{A})</math></li> <li>• Odpowiedź konstrukcji w nowym punkcie <math>\hat{A} + \Delta \hat{A}</math>, <math>u_k(\hat{A} + \Delta \hat{A}, t)</math> oraz <math>f(\hat{A} + \Delta \hat{A})</math></li> <li>• Przewidywana poprawa funkcji celu w nowym punkcie <math>\hat{A} + \Delta \hat{A}</math>  <math display="block">\tilde{f}(\hat{A} + \Delta \hat{A}) = \frac{1}{2} \Delta \hat{A} \left[ \lambda \mathbf{I} \Delta \hat{A} - \nabla f(\hat{A}) \right]</math></li> <li>• Parametr poprawy funkcji celu  <math display="block">\rho = \frac{\tilde{f}(\hat{A}) - \tilde{f}(\hat{A} + \Delta \hat{A})}{f(\hat{A}) - f(\hat{A} + \Delta \hat{A})} = \frac{\text{przewidywana poprawa}}{\text{aktualna poprawa}}</math></li> <li>• jeżeli <math>\rho &lt; \rho_{\min}</math> wtedy <math>\lambda = k\lambda</math></li> <li>• w przeciwnym razie <math>\rho &gt; \rho_{\max}</math>, wtedy <math>\lambda = \lambda/k</math> dopóki <math>\rho &lt; 0</math></li> </ul> </li> </ol>
---

Wykorzystując przedstawioną funkcję celu (3.3) rozwiązano dwa przypadki przedstawionego zadania z różnym wymuszeniem zadaniem w węzle 6.

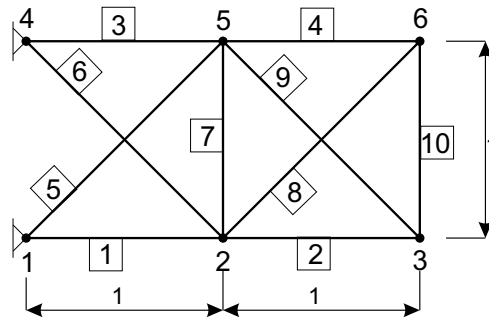
1. Uderzenie (przyłożona masa z prędkością początkową).
2. Siła oscylująca z zadaną częstością  $\omega$ .

W obu przypadkach, minimalizujemy przemieszczenie pionowe węzła nr 6 Rys. 3.1. Tak sformułowane zadane determinuje ugięcie jak najbliższe zeru, czyli wektor  $\mathbf{u}^d(t) = \mathbf{0}$ .<sup>8)</sup>

<sup>8)</sup>Rzeczywiste rozwiązanie zadania powinno uwzględnić wartość wymaganego przemieszczenia  $u^d$  na

Początkowa konfiguracja konstrukcji jest dwu-wymiarowym wspornikiem kratowym o wymiarach przedstawionych na Rys. 3.1. Konstrukcja składa się z dziesięciu elementów o początkowym polu przekroju równym  $A = 110[mm]$ . Wszystkie elementy wykonane są z tego samego materiału o module Younga  $E = 2 \times 10^5[MPa]$  oraz gęstości równej  $\rho = 7800[kg/m^3]$ .

Uwzględniając wymiary zadania przedstawione na Rys. 3.1 objętość maksymalna materiału wynosi  $\bar{V} = 1.28 \times 10^{-3}[m^3]$ . Czas analizy równy jest  $0.08[s]$ . Masa uderzająca wynosi  $10[kg]$  i przyłożona jest z prędkością początkową równą  $5[m/s]$  do węzła 6 w kierunku pionowym.



RYS. 3.1. Dziesięcio-elementowy wspornik kratowy.

### Przykład 3.1

Optymalne rozwiązanie zadania dla wymuszenia impaktem, prowadzi do uzyskania dystrybucji pól przekrojów elementów przedstawionej w tabeli Tab. 3.2, oraz na Rys. 3.2.

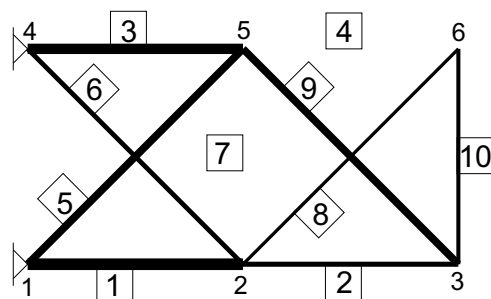
TABLICA 3.2. Porównanie optymalnej i początkowej redystrybucji elementów w konstrukcji Rys. 3.1.

nr elementu	Przekrój początkowy	Przekrój optymalny
1	110	233.3
2	110	103.6
3	110	205.1
4	110	0.0
5	110	142.8
6	110	95.7
7	110	0.0
8	110	69.1
9	110	154.3
10	110	87.0

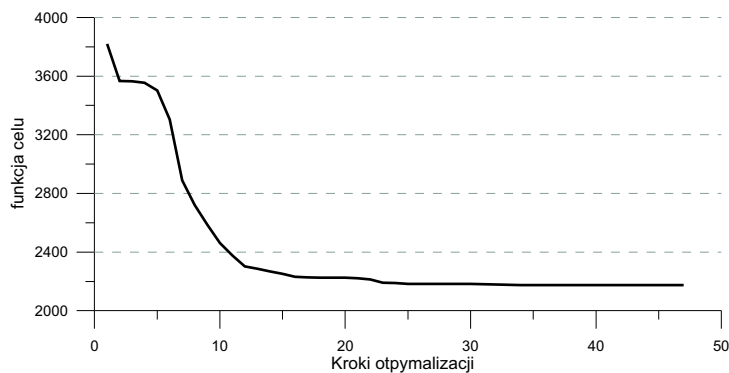
Na wykresie Rys. 3.3 przedstawiono zmianę funkcji celu w procesie optymalizacji. Wykresy Rys. 3.4 oraz Rys. 3.5 przedstawiają historię zmian pól przekrojów  $A$  elementów konstrukcji w funkcji kroków optymalizacji. Natomiast na Rys. 3.6 przedstawiono porównanie historii przemieszczenia węzła szóstego w kierunku pionowym, dla konstrukcji z początkową oraz optymalną dystrybucją przekrojów poprzecznych.

poziomie statycznego ugięcia konstrukcji. Ponieważ jednak konstrukcja jest dość sztywna, założono, iż jest ono równe zero.

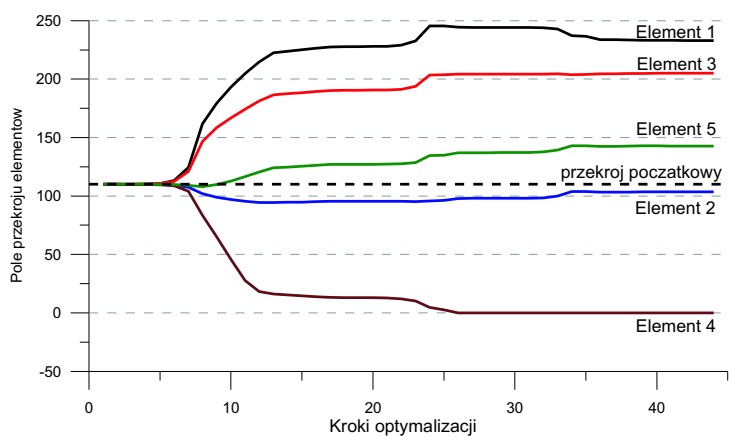




RYS. 3.2. Dziesięcio-elementowy wspornik kratowy, rozwiązanie optymalne.

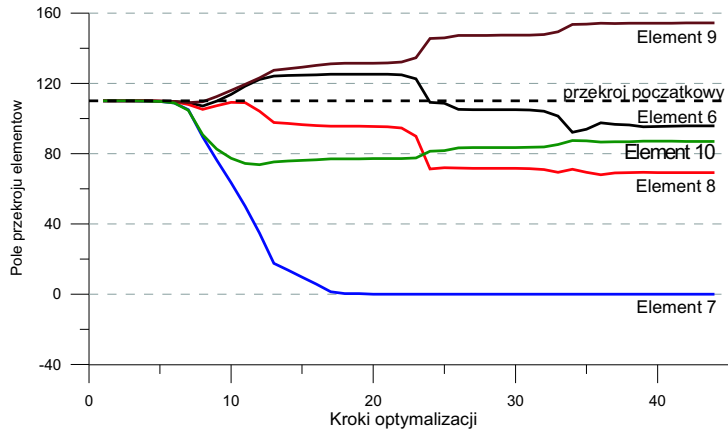


RYS. 3.3. Historia optymalizacji

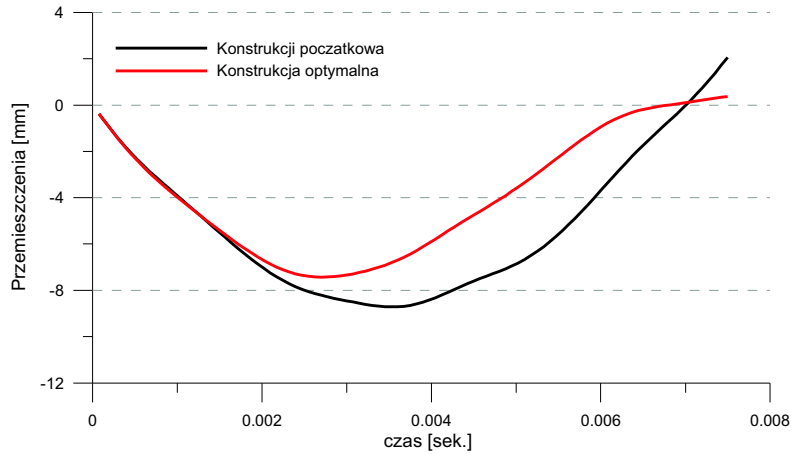


RYS. 3.4. Zmiany pola przekroju poprzecznego w trakcie optymalizacji dla elementów 1-5

Warto nadmienić, iż mimo oczekiwanego wyniku zadania, zerowania elementów 2, 5, 9 oraz 10, co odpowiadałoby znanej z literatury optymalnej najszywniejszej konstrukcji dla zadania statycznego. Dla zadania dynamicznego, dla funkcji celu sformułowanej w postaci (3.1), rozwiązanie to jest minimum lokalnym.



Rys. 3.5. Zmiany pola przekroju poprzecznego w trakcie optymalizacji dla elementów 6-10

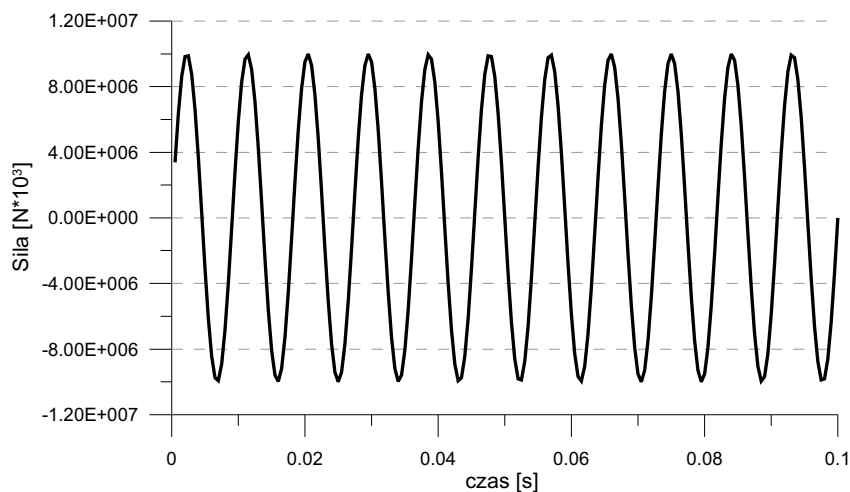


Rys. 3.6. Przemieszczenia węzła 6 w kierunku pionowym dla konstrukcji z początkową redystrybucją przekrojów poprzecznych, a optymalna dystrybucja przekrojów

### Przykład 3.2

W drugim przypadku obciążenia w węźle 6 konstrukcji Rys. 3.1 przyłożona została siła zmienna w czasie. Historia siły zadana jest w formie harmoniczej w postaci  $F(t) = A \sin(\omega t)$  Rys. 3.7, gdzie amplituda działającej siły wynosi  $A = 10\text{kN}$ , natomiast częstotliwość z jaką działa siła wynosi  $f = 110\text{Hz}$ . Częstotliwość działania siły wymuszającej jest w pobliżu pierwszej częstotliwości drgań własnych przedstawionej konstrukcji, która wynosi  $144\text{Hz}$ .

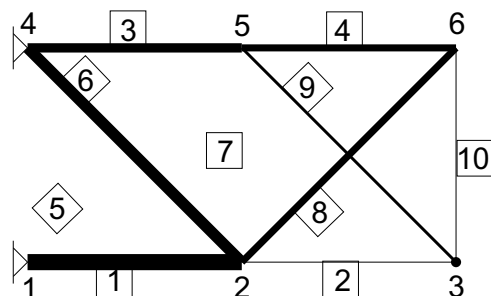
Proces optymalizacji realizowany według algorytmu przedstawionego w Tab. 3.1, doprowadził do 2 typów konstrukcji. Funkcja celu dla obu rozwiązań jest różna i wynosi  $0.435 \times 10^3$  dla pierwszego oraz  $0.106 \times 10^4$  dla drugiego rozwiązania. Drugie rozwiązanie jest minimum lokalnym. Wartość początkowa funkcji celu wynosi  $0.137 \times 10^5$ . Wybieranie różnych punktów startowych prowadziło do jednego z dwóch przedstawionych rozwiązań. Na wynik optymalizacji bardzo duży wpływ ma dobór parametru  $k$  Tab. 3.1.



RYS. 3.7. Siła działająca na konstrukcję.

TABLICA 3.3. Optymalna redystrybucja elementów w konstrukcji porównana z oryginalnym rozmieszczeniem, dla wymuszenia harmonicznego.

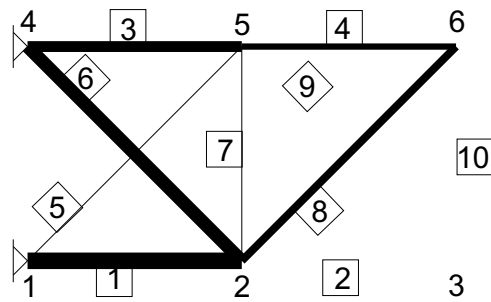
nr elementu	Przekrój początkowy	Przekrój dla roz. lokal.	Przekrój optymalny
1	110	327	323
2	110	0	19.6
3	110	219	188
4	110	126	145
5	110	10.5	0
6	110	262	228
7	110	1.6	0
8	110	156	140
9	110	0	58
10	110	0	3.8



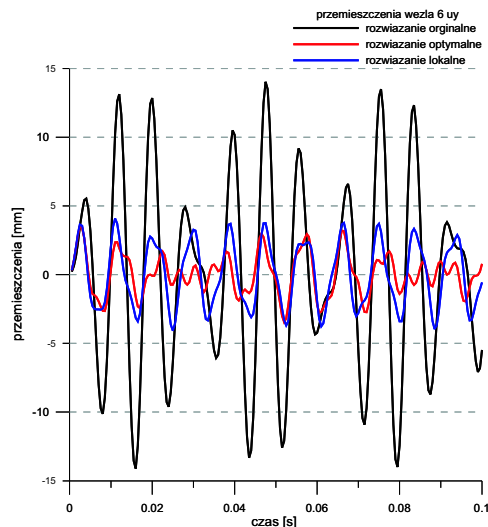
RYS. 3.8. Rozwiązanie optymalne kraty 10-elementowej poddanej działaniu siły harmoniczej.

Pojawiająca się w algorytmie wrażliwość pola przemieszczeń zmiennego w czasie po polu przekroju wyznacza się różniczkując zależność (2.82). Pozostałe składniki zostały wyznaczone w 2.7.1.

$$\frac{\partial u_j(t)}{\partial \hat{A}_\varphi} = \sum_{\xi} D_{i\xi}^\varepsilon(t+1-\tau) \frac{\partial \varepsilon_\xi^0(\tau)}{\partial \hat{A}_\varphi} + \sum_n D_{in}^\varepsilon(t+1-\tau) \frac{\partial p_n^0(\tau)}{\partial \hat{A}_\varphi} \quad (3.9)$$



Rys. 3.9. Rozwiązanie lokalne kraty 10-elementowej poddanej działaniu siły harmonicznej.



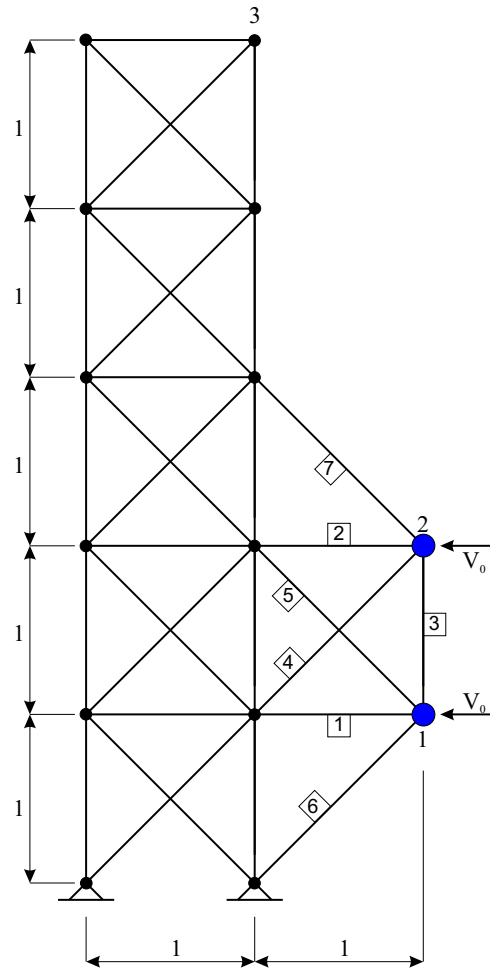
Rys. 3.10. Odpowiedź konstrukcji z oryginalną, lokalną i optymalną redystrybucją elementów w konstrukcji, obciążonej siłą harmoniczną.

### 3.2. Optymalna absorbcja udaru

Zadanie przedstawia wykorzystanie *metod wirtualnych* w optymalnym doborze parametrów sterujących dla semi-aktywnie sterowanych absorberów impaktu. Jako przykład obliczeniowy wybrana została wieża złożona z 30 elementów kratowych Rys. 3.11 [44]. Wysokość wieży wynosi sześć metrów. Konstrukcja doznaje w chwili  $t = 0$ , obciążenia dynamicznego wywołanego uderzeniem w węzłach pierwszym i drugim. Jest ono modelowane przez przyłożenie w tych węzłach dodatkowych mas skupionych z prędkością początkową  $V_0$ . Masa uderzająca dla obydwóch węzłów jest taka sama i wynosi  $m = 5[kg]$ .

Wszystkie elementy wieży mają identyczne parametry materiałowe, moduł Younga  $E = 2 \times 10^5 [Pa]$  oraz gęstość równą  $\rho = 7800 [kg/m^3]$ . Przekrój wynosi  $A = 1 \times 10^{-5} [m^2]$ . Dodatkowe elementy dołączone do wieży z prawej strony, ponumerowane od jeden do pięć, pełnią rolę semi-aktywnego zderzaka, chroniącego konstrukcję przed uderzeniem. Konstrukcja zderzaka składa się również z elementów kratowych, których zachowanie symuluje dysypatory energii. Dysypatory modelowane są odcinkami-liniowym związkem konstytutywnym Rys. 2.20. Parametrem sterującym jest granica plastyczności  $\sigma^*$ . Wielkość ta modeluje poziom naprężenia, przy którym zostaje uruchomiony element sterowany.

Zadanie polega na takim dobraniu progu uruchamiania elementów zderzaka, aby zarejestrowane przyspieszenia w węźle trzecim na szczycie wieży, były jak najmniejsze.



Rys. 3.11. Wieża kratowa z semi-aktywnym zderzakiem.

Jako kryterium rozmieszczenia granic plastyczności w zderzaku, przyjęta została funkcja celu zdefiniowana jako kwadratowa różnica pomiędzy przyspieszeniami konstrukcji wymaganymi, a wyznaczonymi z wykorzystaniem *metod wirtualnych*.

$$f(\sigma^*) = \sum_t \sum_k [\ddot{u}_k^d(t) - \ddot{u}_k(t, \sigma^*)]^2 \quad (3.10)$$

gdzie  $\ddot{u}_k^d(t)$ ,  $\ddot{u}_k(t)$  opisują odpowiednio wymagane, oraz wyznaczone przyspieszenia konstrukcji w dziedzinie czasu, w stopniach swobody  $k$ . Indeks  $k$  przebiega po zbiorze stopni swobody konstrukcji w których minimalizowana jest różnica przyspieszeń, dla przedstawionego przykładu  $k \in \langle 3 \rangle$ . Ponieważ w zadaniu wymagane są jak najmniejsze przyspieszenia węzła, w związku z tym przyjęto  $\ddot{u}_k^d(t) = 0$

Rozwiązanie zadania optymalizacji ograniczone jest maksymalną dopuszczalną granicą plastyczności  $\tilde{\sigma}^*$ , oraz dopuszczalnymi dystorsjami plastycznymi  $\tilde{\beta}^0$ .

$$|\sigma^*| \leq \tilde{\sigma}^* \quad (3.11a)$$

$$|\beta^0(t)| \leq \tilde{\beta}^0 \quad (3.11b)$$

Dla ułatwienia procesu optymalizacji, pierwotne zadanie optymalizacji (3.10) z ograniczeniami (3.11a), (3.11b) zostało zastąpione zadaniem bez ograniczeń. Zdefiniowana

została nowa funkcje celu  $f_c$  (3.12) złożona z pierwotnej funkcji celu (3.10) oraz funkcji kary nakładanej przy przekroczeniu aktywnych ograniczeń (por. Przykład 3.1).

$$f_c(\sigma^*) = f(\sigma^*) + c_1 \sum_t \sum_\xi \left[ \left( \beta_\xi^0(t, \sigma^*) + \tilde{\beta}_\xi^0 \right)^2 \mathbf{1}_{-\tilde{\beta}_\xi^0 > \beta_\xi^0(t)} + \left( \beta_\xi^0(t, \sigma^*) - \tilde{\beta}_\xi^0 \right)^2 \mathbf{1}_{\beta_\xi^0(t) > \tilde{\beta}_\xi^0} \right] + c_2 \sum_\alpha \left[ (\sigma_\alpha^* + \tilde{\sigma}_\alpha^*)^2 \mathbf{1}_{-\tilde{\sigma}_\alpha > \sigma_\alpha^*} + (\sigma_\alpha^* - \tilde{\sigma}_\alpha^*)^2 \mathbf{1}_{\sigma_\alpha^* > \tilde{\sigma}_\alpha} \right] \quad (3.12)$$

gdzie stałe  $c_1, c_2$  są parametrami funkcji kary. Zastosowany algorytm optymalizacji wymaga analitycznie wyznaczonych pierwszych i drugich pochodnych nowej funkcji celu  $f_c$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma_\varphi^*} f_c(\sigma^*) &= \frac{\partial}{\partial \sigma_\varphi^*} f(\sigma^*) + \\ 2c_1 \sum_t \sum_\xi \left[ \left( \beta_\xi^0(t, \sigma^*) + \tilde{\beta}_\xi^0 \right) \frac{\partial \beta_\xi^0(t, \sigma^*)}{\partial \sigma_\varphi^*} \mathbf{1}_{-\tilde{\beta}_\xi^0 > \beta_\xi^0(t)} + \left( \beta_\xi^0(t, \sigma^*) - \tilde{\beta}_\xi^0 \right) \frac{\partial \beta_\xi^0(t, \sigma^*)}{\partial \sigma_\varphi^*} \mathbf{1}_{\beta_\xi^0(t) > \tilde{\beta}_\xi^0} \right] + \\ 2c_2 \left[ (\sigma_\alpha^* + \tilde{\sigma}_\alpha^*) \mathbf{1}_{-\tilde{\sigma}_\alpha > \sigma_\alpha^*} + (\sigma_\alpha^* - \tilde{\sigma}_\alpha^*) \mathbf{1}_{\sigma_\alpha^* > \tilde{\sigma}_\alpha} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Formalnie druga pochodna funkcji kary odpowiadającej za przekroczenie dystorsji plastycznej  $\beta^0(t)$ , powinna być wyznaczana z zależności:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \sigma_\varphi^* \partial \sigma_\delta^*} \left[ \left( \beta_\xi^0(t, \sigma^*) + \tilde{\beta}_\xi^0 \right)^2 \right] &= \frac{\partial \beta_\xi^0(t, \sigma^*)}{\partial \sigma_\varphi^*} \frac{\partial \beta_\xi^0(t, \sigma^*)}{\partial \sigma_\delta^*} + \\ &\left( \beta_\xi^0(t, \sigma^*) + \tilde{\beta}_\xi^0 \right) \frac{\partial^2 \beta_\xi^0(t, \sigma^*)}{\partial \sigma_\varphi^* \partial \sigma_\delta^*} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Jednak ze względu na trudności z wyznaczeniem składnika  $\frac{\partial^2 \beta_\xi^0(t, \sigma^*)}{\partial \sigma_\varphi^* \partial \sigma_\delta^*}$ , do obliczeń przyjęto tylko pierwszą część wyrażenia (3.14). Ostatecznie otrzymano przybliżoną drugą pochodną nowej funkcji celu (3.12) wyrażoną zależnością:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \sigma_\varphi^* \partial \sigma_\delta^*} f_c(\sigma^*) &\approx \frac{\partial^2}{\partial \sigma_\varphi^* \partial \sigma_\delta^*} f(\sigma^*) + \\ 2c_1 \sum_t \sum_\xi \left[ \frac{\partial \beta_\xi^0(t, \sigma^*)}{\partial \sigma_\varphi^*} \frac{\partial \beta_\xi^0(t, \sigma^*)}{\partial \sigma_\delta^*} \mathbf{1}_{\tilde{\beta}_\xi^0 < |\beta_\xi^0(t)|} \right] &+ 2c_2 \left[ \delta_{\xi\delta} \delta_{\xi\varphi} \mathbf{1}_{\tilde{\sigma} < |\sigma^*|} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pochodne funkcji celu (3.10) wyrażone są następującymi zależnościami:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_\varphi^*} f(\sigma^*) = -2 \sum_t \sum_k \left[ \dot{u}_k^d(t) - \ddot{u}_k(\sigma^*, t) \right] \frac{\partial \ddot{u}_k(\sigma^*, t)}{\partial \sigma_\varphi^*} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \sigma_\varphi^* \partial \sigma_\delta^*} f(\sigma^*) &= 2 \sum_t \sum_k \frac{\partial \ddot{u}_k(\sigma^*, t)}{\partial \sigma_\varphi^*} \frac{\partial \ddot{u}_k(\sigma^*, t)}{\partial \sigma_\delta^*} - \\ 2 \sum_t \sum_k \left[ \dot{u}_k^d(t) - \ddot{u}_k(\sigma^*, t) \right] &\frac{\partial^2 \ddot{u}_k(\sigma^*, t)}{\partial \sigma_\varphi^* \partial \sigma_\delta^*} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Do analizy wykorzystano przybliżoną drugą pochodną:

$$\tilde{H}(\sigma^*) \approx 2 \sum_t \sum_k \frac{\partial \ddot{u}_k(\sigma^*, t)}{\partial \sigma_\varphi^*} \frac{\partial \ddot{u}_k(\sigma^*, t)}{\partial \sigma_\delta^*} \quad (3.18)$$

Do minimalizacji funkcji celu  $f_c$  wykorzystany został schemat postępowania bazujący na algorytmie Levenberga-Marquardt'a przedstawiony w tabeli 3.4 (por. 3.1).

TABLICA 3.4. Algorytm optymalizacji, dla optymalnego sterowania

1. Pochodną przyspieszeń konstrukcji po zmianie granicy plastyczności  $\sigma^*$ ,  $\frac{\partial \ddot{u}_k(t, \sigma^*)}{\partial \sigma_\varphi^*}$
2. Gradient funkcji celu  $\nabla f_c(\sigma^*)$
3. Przybliżony hesjan funkcji celu  $\tilde{H}(\sigma^*)$
4. Adaptacyjny dobór kroku optymalizacji: powtarzaj
  - Długość kroku optymalizacji  

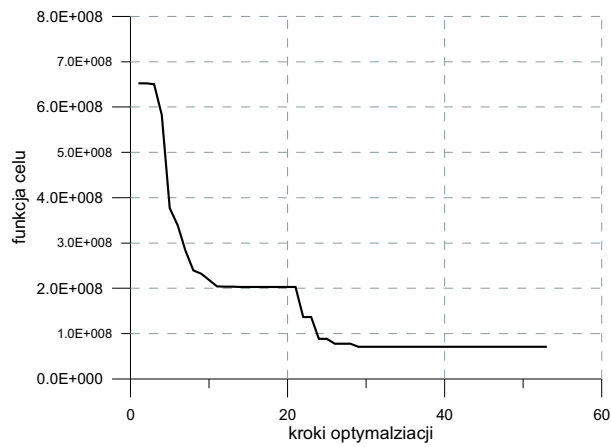
$$\left[ \tilde{H}(\sigma^*) + \lambda \mathbf{I} \right] \Delta \sigma^* = -\nabla f_c(\sigma^*)$$
  - Odpowiedź konstrukcji w nowym punkcie  $\sigma^* + \Delta \sigma^*$ ,  $\ddot{u}_k(\sigma^* + \Delta \sigma^*, t)$  oraz  $f(\sigma^* + \Delta \sigma^*)$
  - Przewidywana poprawa funkcji celu w nowym punkcie  $\sigma^* + \Delta \sigma^*$   $\tilde{f}(\sigma^* + \Delta \sigma^*) = \frac{1}{2} \Delta \sigma^* [\lambda \mathbf{I} \Delta \sigma^* - \nabla f(\sigma^*)]$
  - Parametr poprawy funkcji celu  

$$\rho = \frac{\tilde{f}(\sigma^*) - f(\sigma^* + \Delta \sigma^*)}{f(\sigma^*) - f(\sigma^* + \Delta \sigma^*)} = \frac{\text{przewidywana poprawa}}{\text{aktualna poprawa}}$$
  - jeżeli  $\rho < \rho_{\min}$  wtedy  $\lambda = k\lambda$
  - w przeciwnym razie  $\rho > \rho_{\max}$  wtedy  $\lambda = \lambda/k$   
dopóki  $\rho < 0$

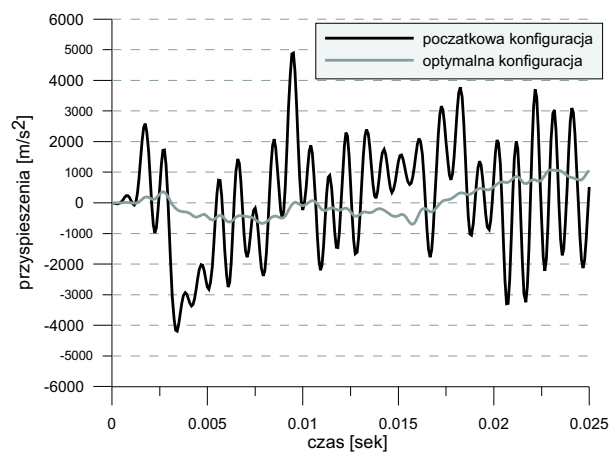
Na wykresie Rys. 3.14 przedstawiono historię optymalizacji zdefiniowanego zadania (3.10). Wykres Rys. 3.13 przedstawia porównanie przyspieszenia poziomego dla węzła 3 na szczycie wieży dla którego przeprowadzono proces optymalizacji. Można stwierdzić, iż optymalne dobór progów plastycznych konstrukcji pozwala na zmniejszenie przyspieszeń występujących na szczycie pięć razy. Można również zauważyć, iż przyspieszenia zarejestrowane w węzłach pierwszym i drugim, rozciągają się na prawie dwukrotnie większy przedział czasowy jednocześnie zmniejszając swoją maksymalną wartość. Jest to zjawisko bardzo porządane przy projektowaniu konstrukcji chroniących ludzkie życie Rys. ???. Spostrzeżenie to pozwala na sformułowanie problemu projektowania *crashworthiness* z wykorzystaniem elementów sterowanych z zastosowaniem *metod wirtualnych*. Dla tego typu problemów należy zdefiniować dodatkowo wymagany poziom przyspieszeń  $\ddot{u}^d(t)$ , zmienny w czasie z charakterystyką dopuszczalnych przyspieszeń tolerowanych przez człowieka.

### 3.3. Optymalne projektowanie konstrukcji AIA

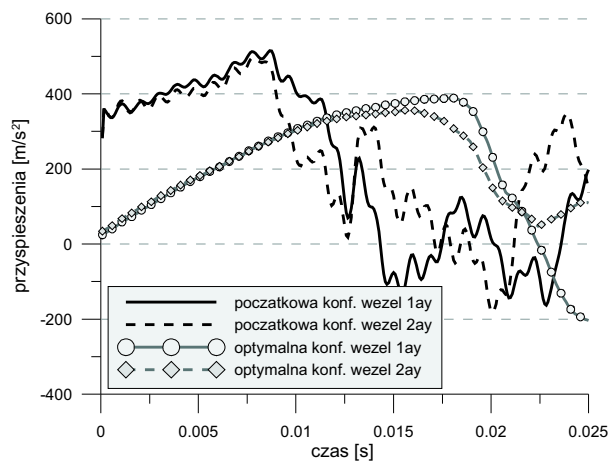
Przedstawione w poprzednim rozdziale *metody wirtualne* zastosowane jako narzędzie do szybkiej reanalizy konstrukcji włącznie z nieliniowościami fizycznymi, połączone z dokładnie analitycznie wyznaczoną wrażliwością dla struktur narażonych na obciążenia dy-



RYS. 3.12. Historia optymalizacji progów plastycznych semi-aktywnego zderzaka wieży kratowej.



RYS. 3.13. Porównanie przyspieszeń węzła 3 w kierunku poziomym, dla konstrukcji bez zderzaka i z optymalnie sterowanym zderzakiem.



RYS. 3.14. Porównanie przyspieszeń węzłów 1, 2 w kierunku poziomym, dla konstrukcji bez zderzaka, i z optymalnie sterowanym zderzakiem.



numericzne, pozwala na stworzenie silnego numerycznego narzędzia do rozwiązywania różnych problemów optymalizacyjnych.

Jeden z problemów może być sformułowany jako projektowanie *konstrukcji adaptacyjnych*. Zakładając odpowiednie rozmieszczenie w konstrukcji aktywnie kontrolowanych dyssypatorów *bezpieczników strukturalnych*, zachowujących się podobnie do elementów z nieliniowością fizyczną można poniżej przedstawione narzędzie numeryczne użyć do projektowania konstrukcji aktywnych, adaptujących się w czasie rzeczywistym do losowego scenariusza obciążenia udarowego.

Problem można sformułować w następujący sposób:

1. Założona konstrukcja z początkową konfiguracją (ograniczona dopuszczalną objętością materiału  $\tilde{V}$ ) narażona na zbiór zdefiniowanych potencjalnych impaktów.
2. Przeprojektowanie początkowej konstrukcji w taki sposób aby stosując tylko kilka (tak mało jak to tylko możliwe) elementów aktywnych z charakterystyką podobną do modelu sprężysto plastycznego oraz z takiej samej objętości materiału  $\tilde{V}$ , odpowiedź konstrukcji adaptującej się do wszystkich możliwych obciążeń spełniała kompromisowe kryterium nałożone na średnie ugięcie oraz możliwości absorpcji dynamicznego wymuszenia.

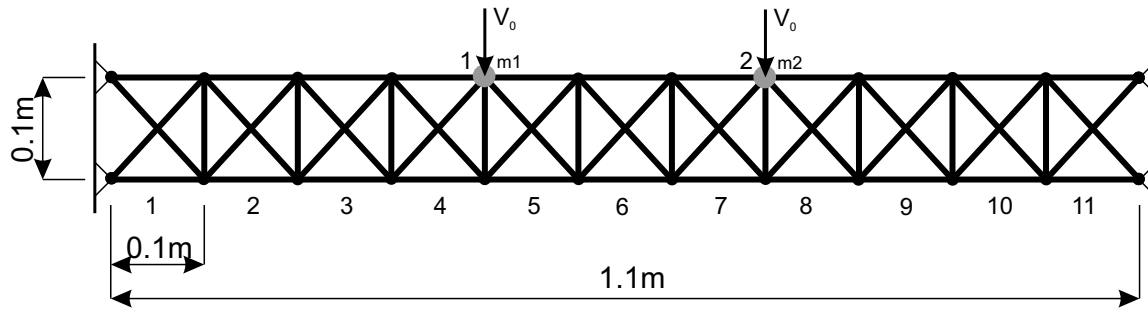
Założono następującą metodykę podzieloną na trzy etapy zdefiniowanego powyżej wyzwania:

1. Przeprojektowanie początkowej konfiguracji konstrukcji (modyfikacja topologii w wyniku redystrybucji materiału), prowadzące do *konstrukcji najsztynniejszej* (minimalizacja ugięcia) pod wpływem wielu scenariuszy obciążenia. Efektem ubocznym takiego działania jest nowa konstrukcja, swoją topologią zbliżona do konstrukcji izostatycznej ze znacznie zmniejszoną liczbą elementów oraz znaczącą redukcją maksymalnych naprężeń pojawiających się w konstrukcji.
2. Określenie optymalnej lokalizacji *bezpieczników strukturalnych* - elementów z kontrolowanymi właściwościami sprężysto-plastycznymi dla konstrukcji najsztynniejszej, określonej w poprzednim punkcie. Jest bardzo ważne aby liczba elementów aktywnych była jak najmniejsza (minimalizacja kosztów) a za razem pozwalała na znaczącą poprawę odpowiedzi konstrukcji.
3. *Konstrukcja adaptacyjna* została zaprojektowana zgodnie z p. 1 oraz wyposażona w aktywne elementy (lokalizacja określona w p. 2). Tak zdefiniowana konstrukcja jest narażona na zbiór określonych losowych wymuszeń dynamicznych. Zakładając, iż wymuszenia mogą być w czasie rzeczywistym zidentyfikowane [52], optymalna *adaptacja konstrukcji adaptacyjnej* może być realizowana dla maksymalizowania funkcji celu zdefiniowanej jako energia dyssypacji.

Zaproponowana metodologia optymalnego przeprojektowywania *konstrukcji adaptacyjnych* jest przedstawiona poniżej na przykładzie dwuwymiarowej belki kratowej Rys. 3.15 dla której przedstawiono efekt znaczącego wzrostu możliwości przeniesienia obciążenia dynamicznego oraz pochłaniania energii impaktu.

Zgodnie z pierwszym punktem założonej metodyki projektowania *konstrukcji adaptacyjnych* konieczne jest znalezienie najsztynniejszej topologii. W celu realizacji tego zadania, konstrukcję poddano procesowi optymalizacji. Problem optymalizacji konstrukcji spełniający warunek minimalnego ugięcia, zdefiniowany został w poprzednim rozdziale (3.1) wraz z ograniczeniami na dopuszczalną objętość materiału (3.2a) oraz dopuszczalny poziom naprężeń (3.2c). Założono również, iż pole przekroju musi mieć wartość dodatnią

(3.2b). W procesie optymalizacji wykorzystano algorytm przedstawiony w Tab. 3.1.

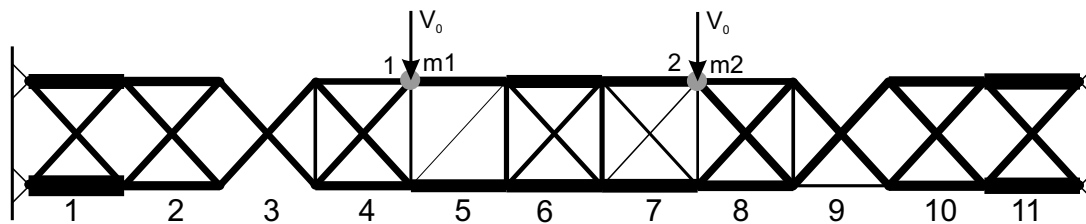


RYS. 3.15. Dwuwymiarowa belka kratowa, konstrukcja początkowa

Dwuwymiarowa belka kratowa jest zamocowana sztywno na obu swoich końcach. Składa się z jedenastu sekcji Rys. 3.15. Wymiary każdej z nich są identyczne  $0.1m \times 0.1m$ , natomiast jej długość wynosi  $1.1m$ . Początkowa dystrybucja elementów konstrukcji jest jednorodna. Początkowa wartość pól przekrojów wynosi  $A = 110m^2$ . Materiał z którego wykonano strukturę to stal o module Younga  $E = 2.1e5MPa$  oraz gęstości równej  $7.8e3kg/m^3$ .

Wymuszenie dynamiczne realizowane jest przez dwie różne masy skupione, przyłożone w dwóch węzłach jednocześnie z zadaną jednakową prędkością początkową. Masa  $m1$  przyłożona w pierwszym węzle wynosi  $0.1kg$ , natomiast  $m2$  jest równa  $2kg$ . Prędkość początkowa wynosi  $5m/s$  dla obu węzłów.

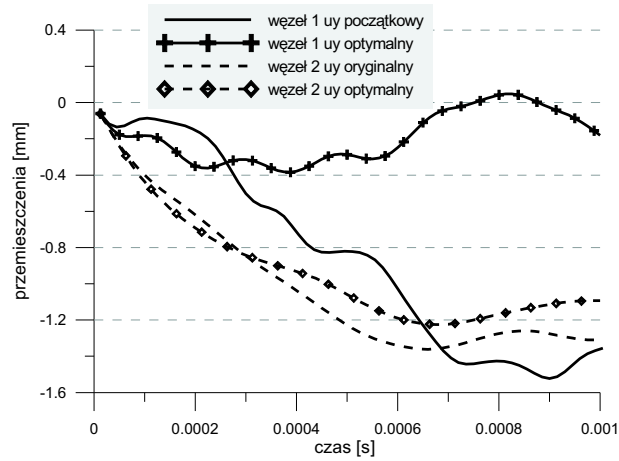
Wyniki optymalnego przemodelowania problemu (3.3), przedstawiono na Rys. 3.16. Węzły wybrane w których minimalizowano ugięcie to te same węzły w których wystąpiło wymuszenie dynamiczne 1 oraz 2. Czas wybrany dla funkcji celu równy jest  $\langle 0, 0.001sec \rangle$ . Rys. 3.17 przedstawia odpowiedź konstrukcji optymalnej z odpowiedzią konstrukcji początkowej. Funkcja celu została zredukowana z wartości początkowej równej  $172.24$  do wartości  $80.92$  dla rozwiązania optymalnego.



RYS. 3.16. Optymalnie przemodelowana konstrukcja (zadanie asymetryczne)

Znacząca koncentracja pola powierzchni w wybranych elementach konstrukcji jest ważnym efektem ubocznym procesu przeprojektowywania, który będzie wykorzystany w punkcie drugim założonego postępowania, podczas lokalizacji absorberów uderzenia w *adaptacyjnej* wersji omawianej struktury.

Niezmiernie ważnym problemem dla dalszej dyskusji jest rozpatrzenie przypadku wystąpienia wielu scenariuszy możliwego obciążenia dynamicznego. Kontynuując proces projektowania, założono dwa scenariusze wystąpienia impaktu. Pierwszy z nich został omówiony powyżej, drugi natomiast różni się dystrybucją mas skupionych symulujących wymuszenie, masa  $m1 = 0.1kg$  przyłożona została w węzle drugim, a masa  $m2 = 2kg$  w węzle



Rys. 3.17. Odpowiedź konstrukcji oryginalnej oraz optymalnej (zadanie asymetryczne)

pierwszym. Proces optymalizacji wciąż bazuje na algorytmie optymalizacji przedstawionym w Tab. 3.1. Różnica związana jest z uwzględnianiem przyrostu pola przekroju  $\Delta \hat{A}$ , który to jest rozdzielony pomiędzy symetryczne elementy.

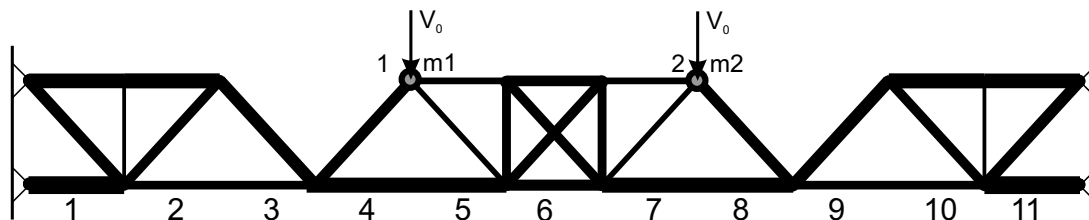
$$\hat{A}_\alpha + \frac{(\Delta \hat{A}_\alpha + \Delta \hat{A}_{\bar{\alpha}})}{2} = \hat{A}_{\bar{\alpha}} + \frac{(\Delta \hat{A}_\alpha + \Delta \hat{A}_{\bar{\alpha}})}{2} \quad (3.19)$$

gdzie  $\bar{\alpha}$  oznacza elementy symetryczne względem  $\alpha$ .

Konstrukcja optymalnie przemodelowana dla dwóch możliwych stanów obciążenia przedstawiona została na Rys. 3.18, natomiast Rys. 3.20 prezentuje historię optymalizacji konstrukcji 30 elementowej. Rys. 3.19 przedstawia porównanie przemieszczeń dla konstrukcji optymalnej i konstrukcji z początkową dystrybucją pól przekrojów.

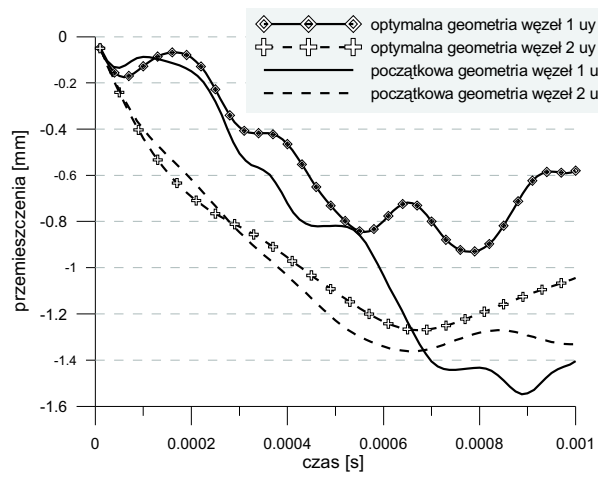
Algorytm optymalizacji w aktualnej formie nie pozwala na eliminowanie niepotrzebnych węzłów oraz zastępowanie pozostawionych elementów współliniowych jednym (lokalne minimum). W związku z tym modyfikacje, o których była mowa są dokonywane ręcznie. Jakkolwiek zautomatyzowanie takiej operacji z wykorzystaniem *metod wirtualnych* jest także możliwe. Opisany sposób postępowania doprowadził do redukcji liczby elementów z 54 Rys. 3.15 do 30 Rys. 3.18.

Z punktu widzenia funkcji celu (3.3) wynik otrzymany dla zadania z w dwoma stanami obciążenia jest gorszy, ale pozwala na otrzymanie cennej poprawy w momencie uwzględnienia strukturalnej adaptacji konstrukcji.

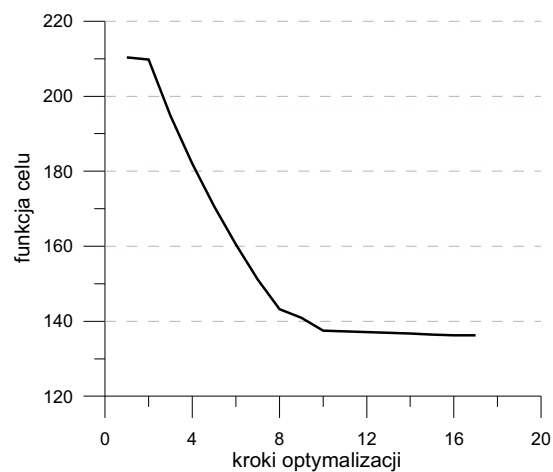


Rys. 3.18. Optymalnie przemodelowana konstrukcja (zadanie symetryczne)

Należy zwrócić uwagę na inne rozwiązanie (Rys. 3.21 oraz Rys. 3.22 z wartością funkcji celu bliską otrzymanej powyżej), które można otrzymać dodatkowo zmniejszając liczbę

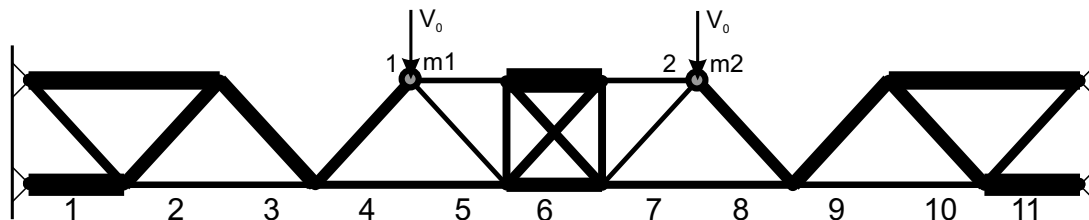


Rys. 3.19. Odpowiedź konstrukcji oryginalnej oraz optymalnej (zadanie symetryczne)



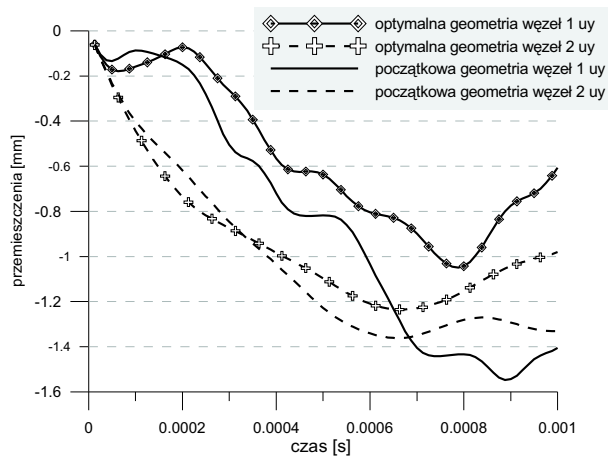
RYS. 3.20. Historia zmiany funkcji celu (zadanie symetryczne) dla konstrukcji 30-elementowej

elementów do 26, zastępując elementy górnej warstwy pomiędzy sekcjami 1, 2 oraz 10, 11 jednym elementem. Przekrój zastąpionych elementów został przyjęty jako ich wartość średnia. Do dalszych rozważań zostanie wykorzystana otrzymana w ten sposób konstrukcja 26 elementowa.



RYS. 3.21. Optymalnie przemodelowana konstrukcja (zadanie symetryczne) dla 26 elementów

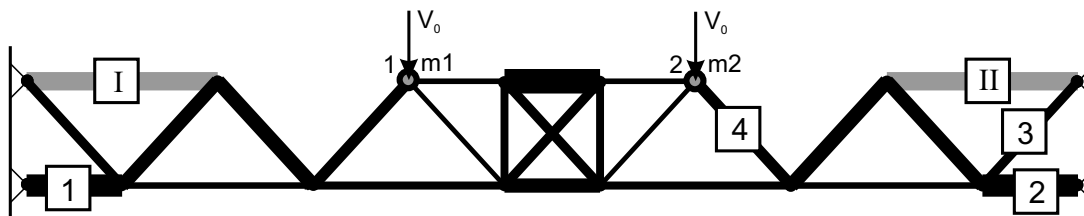
Kontynuując założoną metodykę projektowania *konstrukcji adaptacyjnych* dla najlepszej otrzymanej konstrukcji Rys. 3.21 należy optymalnie dobrać rozmieszczenie elementów aktywnych. Naturalnym wyborem umieszczenia bezpieczników strukturalnych



Rys. 3.22. Odpowiedź konstrukcji oryginalnej oraz optymalnej 26 elementowej (zadanie symetryczne)

są elementy górnej warstwy pomiędzy sekcjami 1, 2 oraz 10, 11. Gromadzą one najwięcej energii sprężystej konstrukcji (p. 1).

Jednak, w przypadku tylko jednego scenariusza obciążenia (np. dla przypadku  $m1 > m2$ ), lepszą lokalizacją *bezpieczników strukturalnych* były by: element górnej warstwy sekcji 10, 11 oraz element dolnej warstwy sekcji 11.



Rys. 3.23. Optymalnie przemodelowana konstrukcja z wybranymi adaptacyjnym elementami I oraz II

Mając zdefiniowaną optymalnie przemodelowaną konstrukcję wyposażoną w *bezpieczniki strukturalne* Rys. 3.23, problem optymalnej adaptacji do zidentyfikowanego w czasie rzeczywistym obciążenia (ze zbioru założonych potencjalnych wymuszeń) prowadzi do określenia takiej niezależnej w czasie granicy plastyczności  $\sigma^*$  w kontrolowanych elementach aby energia dyssypacji (3.20) scałkowana w założonym przedziale czasowym  $\langle 0, \tilde{t} \rangle$  była maksymalna.

$$\max = \sum_{\tilde{t}} \sum_i \sigma_i(t) \Delta \beta_i^0(t) l_i A_i \mu_i \quad (3.20)$$

gdzie  $l_i A_i \mu_i$  określają odpowiednio długość, przekrój oraz parametr modyfikacji elementów,  $\Delta \beta_i^0(t)$  and  $\sigma_i(t)$  opisują odpowiednio przyrost dystorsji plastycznej oraz naprężenia w elemencie  $i$  dla danego kroku czasowego  $t$ . Ważną czynnością jest dokładne określenie przedziału całkowania.

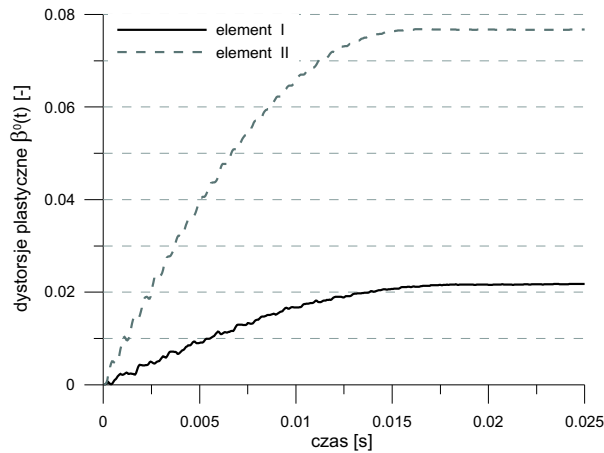
Problem maksymalizacji (3.20) ograniczony jest dopuszczalnym limitem naprężeń, oraz dystorsją plastyczną (powiązaną ze skokiem dyssypatora).

$$|\sigma(t)| < \tilde{\sigma} \quad (3.21)$$

$$|\beta^0(t)| < \tilde{\beta} \quad (3.22)$$

Gradientowa optymalizacja (wykorzystująca narzędzie numeryczne opisane powyżej) prowadzi do rozwiązania przedstawionego na wykresach poniżej. Rys. 3.24 przedstawia rozwój dystorsji plastycznej w *elementach adaptacyjnych* z granicami plastyczności ustalonymi na optymalnym poziomie  $\sigma_I^*=2.8$  MPa,  $\sigma_{II}^*=3.6$  MPa. Bilans energii dla adaptacyjnej konstrukcji optymalnej oraz początkowej przedstawiono na Rys. 3.25. Rys. 3.26 oraz Rys. 3.27 przedstawiają historię naprężeń dla konstrukcji z początkową dystrybucją pól przekrojów porównaną z naprężeniami w odpowiednich elementach dla konstrukcji adaptacyjnej (znacząca redukcja poziomu naprężeń w wybranych maksymalnie wyężonych elementach 1,2,3 oraz 4 zdefiniowanych na Rys. 3.23). Porównanie wyników przedstawionych poniżej prezentuje finalny efekt adaptacyjnej absorpcji optymalnie zaprojektowanej *konstrukcji adaptacyjnej* w porównaniu z początkową konfiguracją konstrukcji. Dodatkowym cennym elementem jest gładkie przyjęcie energii impaktu w pierwszych 15 ms. Należy również zwrócić uwagę, iż założony limit dla dystorsji plastycznych (3.22) nie został osiągnięty w elementach adaptacyjnych (osiągnięto 40% limitu, Rys. 3.24) w związku z czym zdolność pochłaniania energii optymalnie zaprojektowanej konstrukcji może zostać powiększona. Również granice plastyczności w wybranych elementach osiągają mniej niż 2% założonego limitu określonego na 200 Mpa (granica plastyczności dla stali) (3.21).

W związku z powyższym możliwe jest zwiększenie o 250% pochłoniętej w trakcie impaktu energii dla dyskutowanej *struktury adaptacyjnej*. Biorąc pod uwagę symetrię geometrii konstrukcji oczywiste jest, że dla przypadku drugiego scenariusza obciążenia (masy  $m_2$  oraz  $m_1$  uderzające odpowiednio w węzły 11 oraz 14), optymalne progi plastyczne zostaną zmodyfikowane:  $\sigma_I^*=3.6$  MPa,  $\sigma_{II}^*=2.8$  MPa.

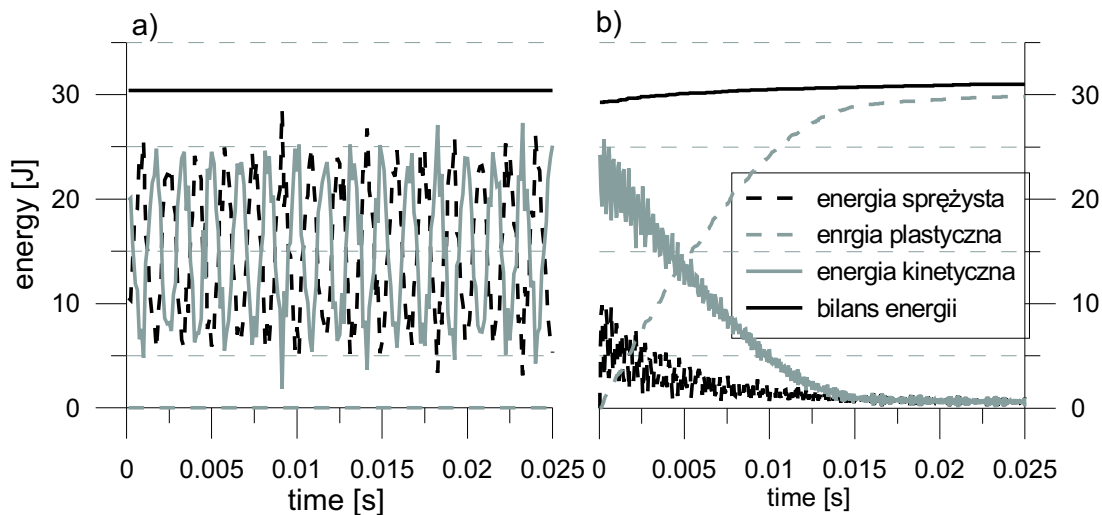


Rys. 3.24. Rozwój dystorsji plastycznych w elementach aktywnych nr I i II (konstrukcja adaptacyjna Rys. 3.23)

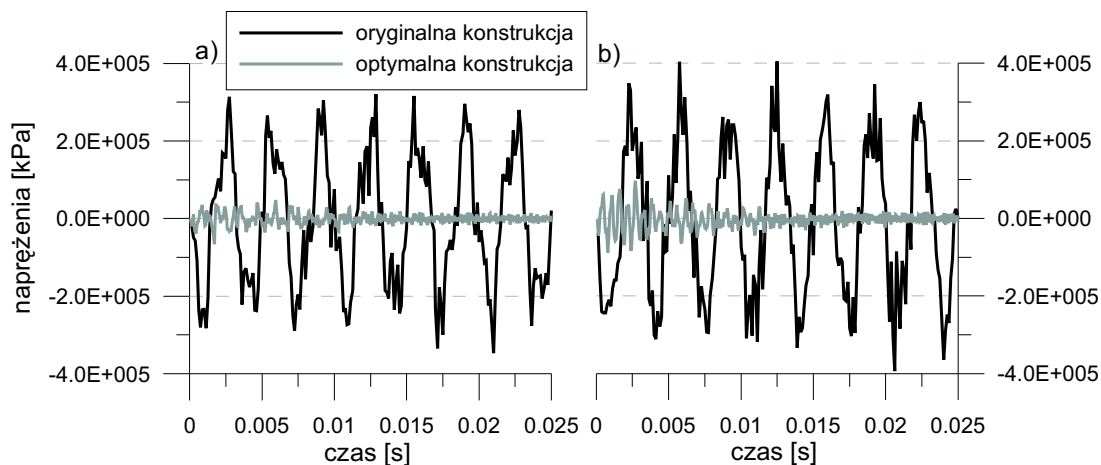
Przedstawiony efekt końcowy przeprojektowywania konstrukcji zaproponowany powyżej związany jest z problemem *optymalnego projektowania konstrukcji narażonych na wiele stanów obciążenia* może być określony w jedno-krokovym sformułowaniu:

$$\max = \frac{a}{n} \sum_{\bar{t}} \sum_i \sigma_i(t) \Delta \beta_i^0(t) l_i A_i \mu_i \quad (3.23)$$

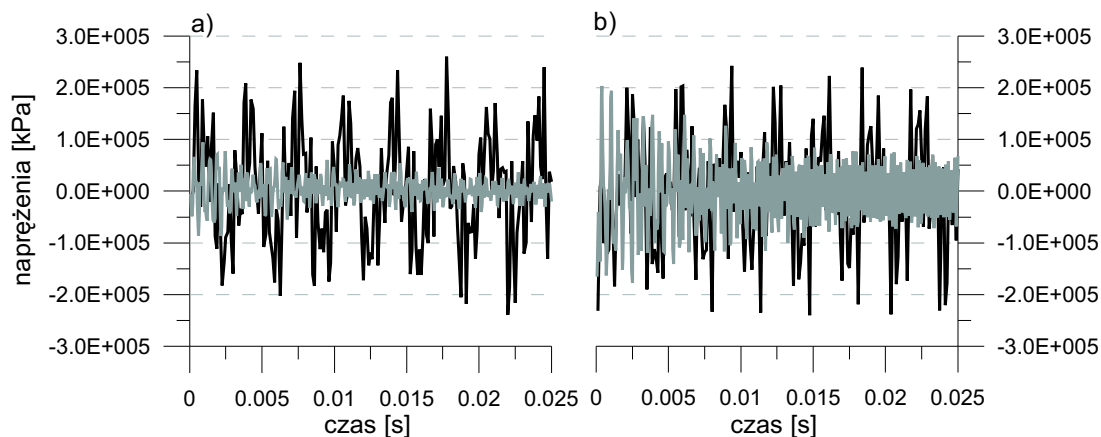
z ograniczeniami nałożonym na dopuszczalne naprężenia (3.21), oraz całkowite dystorsje plastyczne (3.22). gdzie  $n$  oznacza liczbę zastosowanych *bezpieczników strukturalnych*,



Rys. 3.25. Bilans energii dla adaptacyjnej konstrukcji optymalnej oraz konfiguracji początkowej



Rys. 3.26. Rozwój naprężeń w maksymalnie obciążonych elementach a) Nr 1, b) Nr 2. (konstrukcji adaptacyjnej Rys. 3.23)



Rys. 3.27. Rozwój naprężeń w maksymalnie obciążonych elementach a) Nr 3, b) Nr 4. (konstrukcji adaptacyjnej Rys. 3.23)

$a$  jest parametrem skalującym określonym na bazie testów numerycznych oraz parametrów sterujących:  $n$  and  $\sigma_i^*$

W trakcie dyskusji założono obserwowalność on-line obciążenia dynamicznego, umożliwiającą zidentyfikowanie uderzenia (np. spadającej masy wraz z jej prędkością) w przeciągu kilku milisekund. Zadanie to jest dużym wyzwaniem i krytycznym punktem od którego zależy proces *adaptacyjnej absorpcji impaktu*. Aktualny stan badań np. [52] pokazuje, iż koncepcja ta jest możliwa w realizacji, przynajmniej dla kilku typów zastosowań.

Następnym tematem którego dyskusję pominięto związany jest z rozdzieleniem *szybkiej* dynamiki oraz *wolnej* dynamiki określonej w wyniku proporcji pomiędzy prędkością impaktu a uderzającą masą. Taka sama wielkość energii kinetycznej może być przeniesiona na konstrukcję przez małą masę poruszającą się z dużą prędkością oraz przez dużą masę z małą prędkością. Odpowiedź konstrukcji będzie jakościowo inna dla obu przypadków. Również proces optymalnego przeprojektowywania przedstawiony powyżej będzie prowadził do różnych dystrybucji materiału w konstrukcji. W związku z tym definiując zbiór możliwych scenariuszy obciążenia ważne jest poza zdefiniowaniem różnych lokalizacji uderzenia, zdefiniowanie również różnych możliwych “*prędkości*” (np. proporcji masy uderzającej do kwadratu prędkości). W związku z powyższym całkowita energia dyssypacji przedstawiona na Rys. 3.25 może zastać zwiększona zwiększając masę i prędkość z zachowaniem proporcji pomiędzy nimi. Jednak w związku z dużym skokiem elementów aktywnych, nieliniowość geometryczna powinna zostać wzięta pod uwagę w celu dokładnego określenia odpowiedzi układu w przypadku większej intensywności obciążenia.



## Rozdział 4

# Identyfikacja obciążenia

---

Nieodzownym etapem adaptacji konstrukcji do obciążeń udarowych, jest identyfikacja sił działających na nią. Proces identyfikacji obciążenia może zostać rozdzielony na dwa niezależne od siebie rodzaje, występujące w różnych miejscach sekwencji adaptacji konstrukcji obciążonej dynamicznie.

1. Identyfikacja obciążenia przed bądź w trakcie zdarzenia (realizowana w czasie rzeczywistym *ang.* on-line).
2. Rekonstrukcja sił, realizowana po zaistnieniu zdarzenia (*ang.* off-line.)

Identyfikacja obciążenia realizowana w czasie rzeczywistym, jest pierwszym etapem efektywnej adaptacji konstrukcji. W strukturach aktywnie sterowanych, wiedzą niezwykle pożądaną jest znajomość miejsca impaktu, zakresu oczekiwanej siły działającej na konstrukcję oraz wartości opóźnień jakich można się spodziewać. Wiedza ta jest niezbędną z punktu widzenia optymalnego kontrolowania elementów aktywnych.

Optymalne dostrojenie konstrukcji może być realizowane przez ustawienie w elementach aktywnych konstrukcji progów naprężeń po przekroczeniu których element zaczyna ustępować w ściśle kontrolowany sposób<sup>9)</sup>.

Identyfikacja w czasie rzeczywistym może być realizowana na przykład: przez zastosowanie w konstrukcji odpowiednio rozmieszczonych akcelerometrów, gdzie po przekroczeniu z góry zadanej wartości progowej opóźnienia, następuje uruchomienie procesu "uzbrajania" konstrukcji<sup>10)</sup>. Zastosowanie tylko jednego czujnika przyspieszenia, zwłaszcza w konstrukcjach poruszających się, może powodować błędne rozpoznanie momentu impaktu. Z tego powodu stosuje się dodatkowe systemy zabezpieczeń np. więcej czujników przyspieszeń, czujniki bezwładnościowe lub jak na przykład w pojazdach samochodowych, dodatkowe czujniki zgniotu, zabezpieczające przed przypadkowym wystrzeleniem poduszki powietrznej. Która to traktowana jest jako semi-aktywnie sterowany dysypator energii uderzenia.

Innym przypadkiem detekcji obciążenia w czasie rzeczywistym jest przewidywanie uderzenia. Realizowane jest ono najczęściej za pomocą szeregu czujników oraz/lub rada-

---

<sup>9)</sup>W pracy sterowanie aktywnych elementów realizowane jest przez kontrolowanie granic plastyczności  $\sigma^*$ , dopuszczalnego skoku  $\beta^u$  oraz parametru wzmocnienia  $\gamma$  elementu aktywnego.

<sup>10)</sup>Pod pojęciem "uzbrajanie" konstrukcji rozumiane jest odpowiednie dobranie parametrów kontrolujących elementy aktywne w zależności od zarejestrowanego proggu opóźnień.

rów skanujących otoczenie konstrukcji w poszukiwaniu zagrożenia. Tego typu identyfikacja może być pierwszym zgrubnym etapem wykrywania impaktu, ponieważ w znacznym stopniu zawęża poszukiwanie miejsca oddziaływania sił. Podobne rozwiązania już funkcjonują w samochodach wyższej klasy i noszą nazwę *asystent kierowcy*. Potrafią one nie tylko wykrywać niebezpieczeństwo, lecz również mu zapobiegać, uruchamiać awaryjnie światła, hamulce oraz korygować tor jazdy.

Odmienny rodzaj identyfikacji zaproponowano w pracy [52], gdzie rozpoznaniu w czasie rzeczywistym podlega masa uderzająca. Metoda jest cały czas w fazie rozwoju, lecz pierwsze wyniki pozwalają mieć nadzieję, iż otrzymane narzędzie sprawdzi się jako czujnik uderzenia.

W pracy jednak nie będzie poruszany temat identyfikacji uderzenia w czasie rzeczywistym. Autor w następnych rozdziałach przedstawi bazując na zaprezentowanych metodach wirtualnych metodę identyfikacji off-line.

#### 4.1. Identyfikacja historii obciążenia na podstawie lokalnych pomiarów

W rozdziale tym zaprezentowana zostanie metoda identyfikacji obciążenia udarowego w konstrukcjach. Prezentowana metoda bazuje na przedstawionej w poprzednim rozdziale Impulsowej Metodzie Sił Wirtualnych (IMFW).

Identyfikacja przeprowadzona przy zastosowaniu IMFW jest procesem, który można wykonać po zaistnieniu uderzenia. Niemożliwość zastosowania metody do identyfikacji w czasie rzeczywistym spowodowane jest wysokimi kosztami numerycznymi. Odtwarzanie działających na konstrukcję sił, przeprowadza się na podstawie analizy zarejestrowanych w trakcie zdarzenia lokalnych pomiarów. Wielkości mierzone, które można wykorzystać w procesie identyfikacji IMFW to: odkształcenia, przemieszczenia, prędkości lub przyspieszenia konstrukcji. Jednak z praktycznego punktu widzenia, najprościej jest zarejestrować odkształcenia lub przyspieszenia.

Zakładając, iż konstrukcja wyposażona jest w system odpowiednio rozmieszczonych sensorów, które mają możliwość rejestracji w trakcie obciążenia udarowego historii zmian zachodzących w układzie, funkcję celu  $f$  dla zadania identyfikacji obciążenia można sformułować jako średnio-kwadratową odległość pomiędzy wielkościami mierzonymi i modelowanymi Metodą Sił Wirtualnych. Dla tak zdefiniowanej funkcji celu proces identyfikacji sprowadza się do minimalizacji zdefiniowanej funkcji (zadanie odwrotne). Wykorzystując możliwość wyznaczenia analitycznie wrażliwości, zdefiniowany powyżej problem może być rozwiązany, efektywną numerycznie gradientową optymalizacją.

Zaproponowane podejście zostanie przedstawione dla dwóch przypadków, a mianowicie dla konstrukcji elastycznej, włącznie z przykładami numerycznymi, oraz dla konstrukcji sprężysto plastycznej.

##### 4.1.1. Identyfikacja obciążenia dla konstrukcji sprężystej

Korzystając z Impulsowej Metody Sił Wirtualnych rozwój odkształceń w czasie można wyrazić za pomocą następującej zależności:

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha n}^P(t + 1 - \tau) p_n^0(\tau) \quad (4.1)$$

Gdzie macierz  $B_{\alpha n}^P(t-\tau)$  jest podobnie jak przy metodzie modelowania masy, dynamiczną macierzą wpływu opisującą ewolucję odkształceń w elemencie  $\alpha$  w chwili czasowej  $t$  w wyniku jednostkowego impulsu siły wirtualnej, wygenerowanego w węźle  $n$  w chwili czasowej  $\tau$ .

W odróżnieniu od metody modelowania masy gdzie przyłożone siły wirtualne były powiązane z elementem, w którym modelowana jest masa, w metodzie identyfikacji obciążenia są one przyłożone tylko w stopniach swobody konstrukcji, w których istnieje możliwość wystąpienia siły.  $p_n^0(\tau)$  oznacza siłę wirtualną, opisującą intensywność obciążenia w węźle  $n$ . Indeks  $\alpha$  należy do zbioru elementów konstrukcji w których dokonywane są pomiary odkształceń, natomiast indeks  $n$  do zbioru węzłów, w których może być przyłożona siła.

Przyjęcie założenia, że ustrój obciążony jest w sposób nieznaną powoduje, że parametry  $p_n^0(t)$  opisujące scenariusz rozwoju intensywności obciążenia stają się niewiadomymi zadania identyfikacji. Aby umożliwić wyznaczanie tych niewiadomych, do konstrukcji wprowadzono sensory rejestrujące historię rozwoju deformacji wybranych elementów. Po wprowadzeniu do analizy niewiadomych intensywności obciążeń w lokalizacjach  $n$  oraz w chwilach czasowych  $\tau < t$ , budowana jest funkcja celu  $f$  opisującą średnio-kwadratową odległość pomiędzy deformacjami mierzonymi  $\varepsilon_\alpha^M(t)$ , a modelowanymi  $\varepsilon_\alpha(t)$  (w lokalizacjach  $\alpha$  oraz w chwilach czasowych  $t$ ). Zadanie identyfikacji obciążenia sprowadza się wtedy do procesu minimalizacji funkcji  $f$ .

$$f = \sum_t \sum_\alpha (\varepsilon_\alpha^M(t) - \varepsilon_\alpha(t))^2. \quad (4.2)$$

Niezbędny w procesie optymalizacji gradient funkcji celu, ze względu na intensywność obciążenia, przybiera postać wyrażoną zależnością:

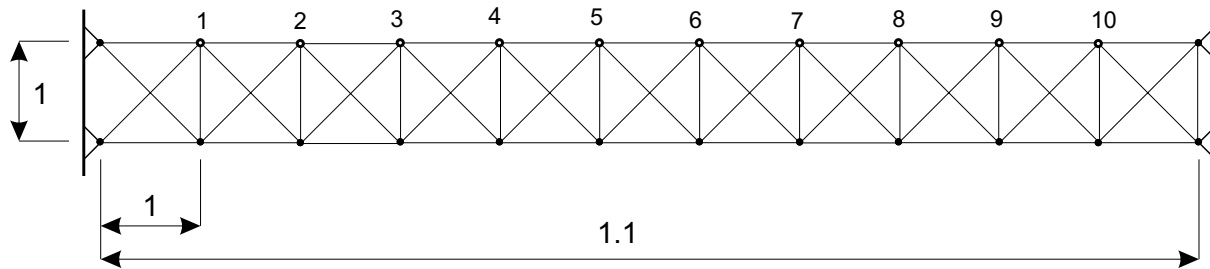
$$\frac{\partial f}{\partial p_k^0(\tau)} = -2 \sum_t \sum_\alpha (\varepsilon_\alpha^M(t) - \varepsilon_\alpha(t)) B_{\alpha k}(t+1-\tau), \quad (4.3)$$

gdzie indeks  $k$  należy do zbioru węzłów, w których istnieje możliwość wykrycia obciążenia. Mając policzone wszystkie składniki gradientu, można przystąpić do procesu uaktualniania intensywności obciążenia  $p_n^0(t)$ . W pracy do tego celu zastosowana została najprostsza metoda optymalizacji, metoda najmniejszego spadku ze skalowaniem kroku. Skalowanie zależne jest od gradientu funkcji celu  $\nabla f$ , wartości funkcji celu  $f$ , oraz stałego parametru  $\delta$ .

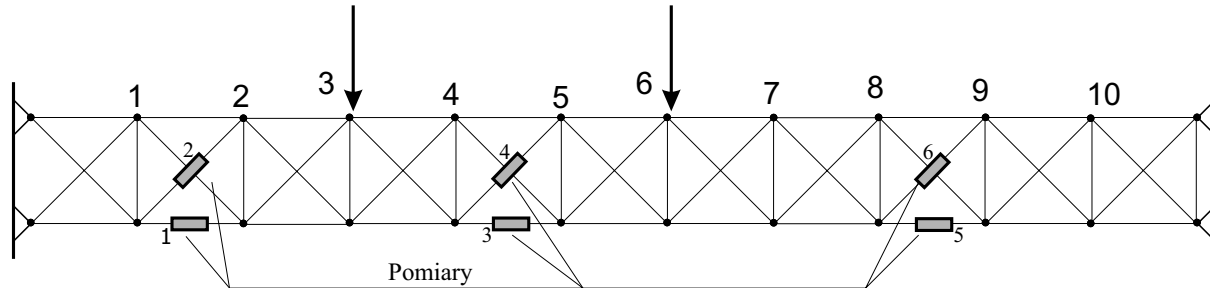
$$p_k(t) = p_k(t) + f\delta \frac{\nabla f_k(t)}{\sqrt{\nabla f_k(t)\nabla f_k(t)}} \quad (4.4)$$

#### 4.1.2. Przykłady numeryczne

Jako przykład metody identyfikacji obciążenia w konstrukcji wybrany został model belki kratowej Rys. 4.1 podpartej w obu końcach. Konstrukcja składa się z 55, dwu-wymiarowych elementów kratowych. Obciążenie może być zadane dowolnym przebiegiem siły przyłożonej pionowo w górnym pasie w węzłach  $n$  ponumerowanych kolejno od 1 do 10. Lokalne pomiary odkształceń, dokonywane mogą być w dowolnych elementach konstrukcji  $\alpha$ . Parametry charakteryzujące geometrię konstrukcji pokazane są na Rys. 4.1. Struktura wykonana jest ze stali, dla której moduł Younga wynosi  $E = 2.1 \times 10^{11} [Pa]$ , gęstość



RYS. 4.1. Przykład testowy dla identyfikacji obciążenia.



RYS. 4.2. Przykład testowy, obciążenie 2 siłami.

$\rho = 7800[\text{kg}/\text{m}^3]$ . Przekroje  $A = 1 \times 10^{-4}[\text{m}]$ , są takie same dla wszystkich elementów.

#### Przykład 4.1

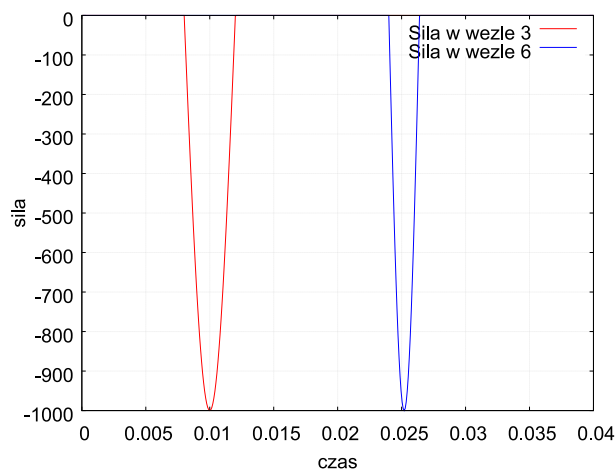
W przykładzie numerycznym uderzenie zostało zamodelowane, przykładając do konstrukcji dwie pionowe siły w węzłach 3 i 6. Przebieg tych sił pokazano na rysunku Rys. 4.3. Siły działają w różnym przedziale czasu. Obie posiadają taką samą amplitudę równą  $1 \times 10^3[\text{N}]$ . Różną się przedziałem czasu w którym działają; pierwsza z nich działa na 50, druga na 30 krokach czasowych. Pomiar odkształceń<sup>11)</sup> dokonywany jest w 6 elementach ponumerowanych od 1 do 6 Rys. 4.2. Elementy *mierzące* pogrupowane są w 3 sekcjach konstrukcji po dwa sensory w każdej. Siły oraz elementy mierzące nie są rozmieszczone symetrycznie w konstrukcji.

W procesie identyfikacji założona została możliwość wystąpienia siły w każdym z dziesięciu węzłów pasa górnego konstrukcji. Celem zadania jest poprawne zidentyfikowanie modelowanych (referencyjnych) sił Rys. 4.3, minimalizujących zdefiniowaną funkcję celu (4.2).

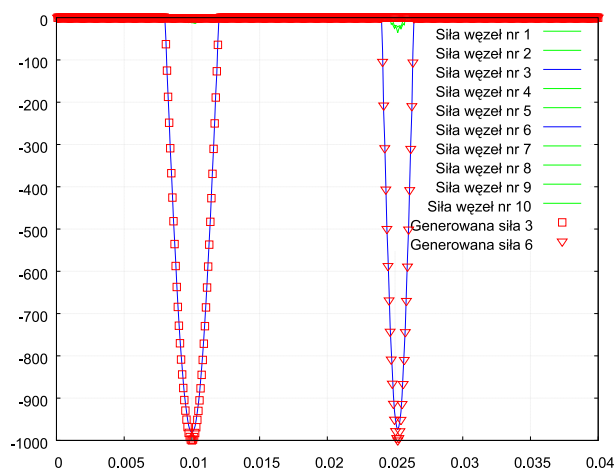
Zidentyfikowany przebieg historii siły  $p^0(t)$  dla ostatniej pętli optymalizacji przedstawia Rys. 4.4, gdzie niebieskimi liniami oznaczono zidentyfikowane historie siły, natomiast symbolami naniesionymi na te wykresy oznaczono modelowaną siłę. Osiągnięta zbieżność wyników jest zadowalająca.

Rozwój odkształceń przedstawiono kolejno na trzech wykresach, grupując wykresy dla odkształceń krzyżulca i elementu pasa dolnego dla każdej sekcji na osobnych wykresach Rys. 4.5, 4.6, 4.7. Podobnie jak dla wykresów siły, ciągłymi liniami oznaczono osiągnięte dla ostatniej pętli optymalizacji odkształcenia, natomiast symbole reprezentują odkształ-

<sup>11)</sup>W przykładzie numerycznym pod pojęciem pomiar odkształcenia rozumie się zarejestrowanie odkształceń w trakcie analizy konstrukcji obciążonej siłami referencyjnymi.

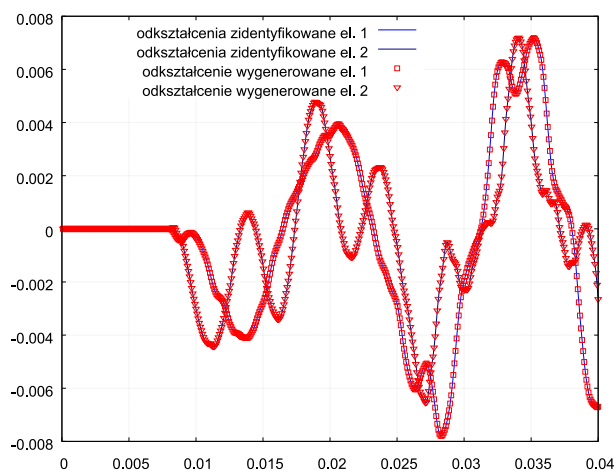


RYS. 4.3. Przebieg historii siły modelującej uderzenie.

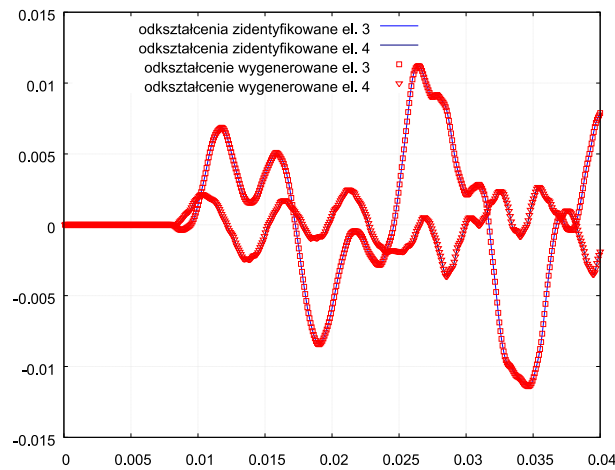


RYS. 4.4. Porównanie siły generowanej i modelowanej.

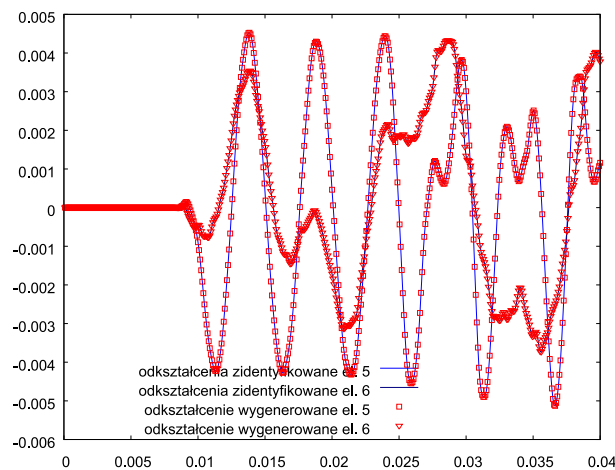
cenia referencyjne. Zgodność osiągniętych wyników jest bardzo dobra.



RYS. 4.5. Porównanie odkształceń generowanych i modelowanych dla elementów pierwszej sekcji element 1 i 2



RYS. 4.6. Porównanie odkształceń generowanych i modelowanych dla elementów drugiej sekcji element 3 i 4

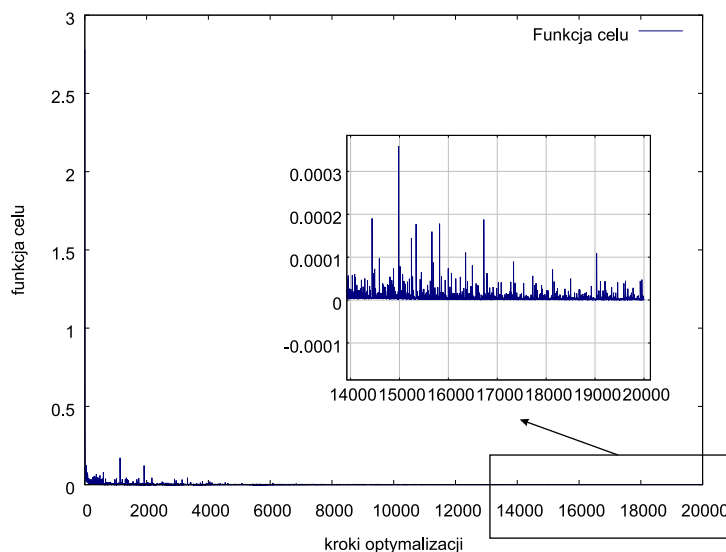


RYS. 4.7. Porównanie odkształceń generowanych i modelowanych dla elementów trzeciej sekcji element 5 i 6

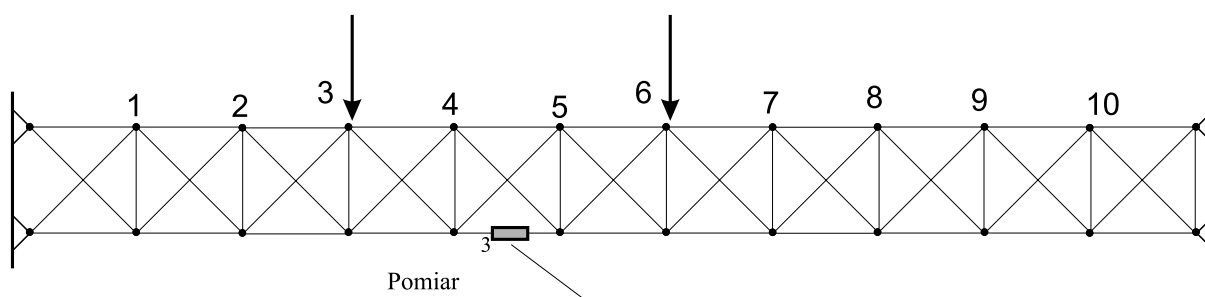
Przebieg funkcji celu w trakcie procesu optymalizacji jest pokazany na rysunku Fig. 4.8. Należy zwrócić uwagę na znaczną liczbę kroków optymalizacji 20000 jaką trzeba wykonać w celu osiągnięcia zadowalających rezultatów czyli zgodności odkształceń mierzonych z odkształceniami wyznaczonymi metodą IMFV. Należy jednak również zwrócić uwagę na to, iż na początku procesu optymalizacji wartość funkcji celu wynosiła 2.78 natomiast na końcu procesu wynosiła  $8.3 \times 10^{-5}$  czyli zmniejszyła się ona prawie sześć rzędów. Przy czym najbardziej znaczący spadek wystąpił na pierwszych 300 krokach, po których wyraźnie można zaobserwować dominujące wartości sił w węzłach, oraz okresy ich działania.

### Przykład 4.2

Dla przedstawienia wpływu założeń heurystycznych, upraszczających problem, policzono jeszcze raz zadanie zdefiniowane powyżej Rys. 4.2. Tym razem jednak została ograniczona liczba pomiarów do jednego. Pomiaru odkształceń dokonano w elemencie trzecim Rys. 4.9.



Rys. 4.8. Przebieg funkcji celu w trakcie optymalizacji



Rys. 4.9. Przykład numeryczny, 2 siły 1 pomiar odkształceń.

Przykład podzielony został na 2 etapy:

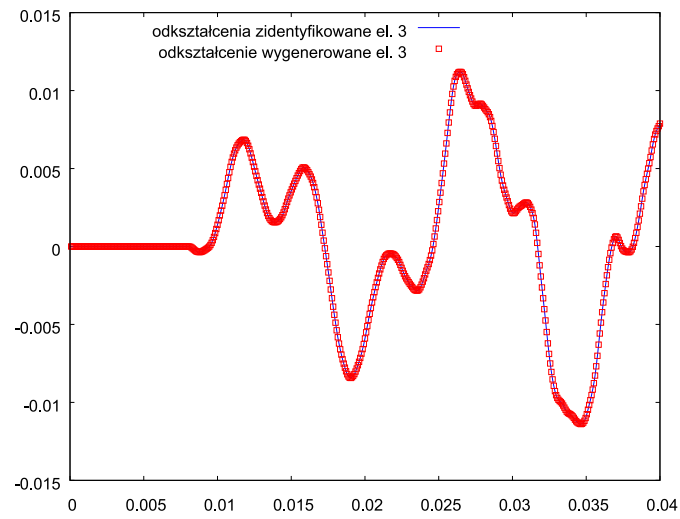
1. Rozwiązanie zadania z zastosowaniem metody najmniejszego spadku.
2. Rozwiązanie zadania z zastosowaniem algorytmu heurystycznego.

Rozpatrując pierwszy przypadek zadania, dla którego uaktualnianie intensywności obciążenia odbywa się według zależności (4.4), można zauważyć iż rozwiązanie zadania jest niejednoznaczne. Porównując odkształcenia referencyjne i zidentyfikowane Rys. 4.10 widać bardzo dobrą zgodność otrzymanych wyników.

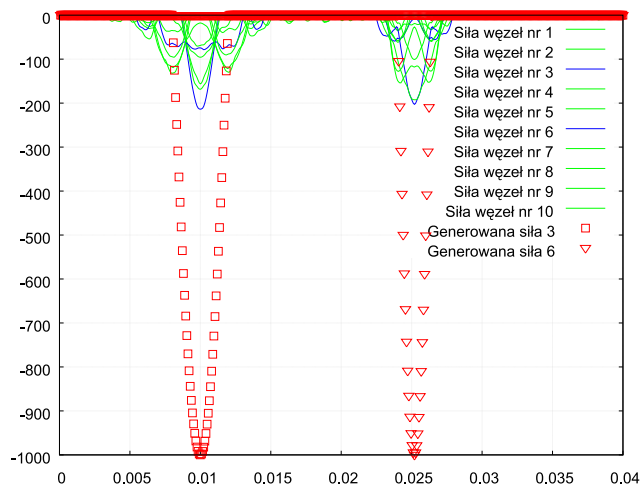
Natomiast porównanie historii siły z intensywnością obciążenia Rys. 4.11 nie daje zadowalających rezultatów. W każdym z 10 węzłów zostaje zidentyfikowana siła różna od referencyjnej przyłożonej tylko w 2 z nich. Świadczy to o wieloznaczności rozwiązania przy zastosowaniu tylko jednego elementu pomiarowego.

Rozwój funkcji celu Rys. 4.12 zmienia się w zakresie od 1.26 do wartości  $7.56 \times 10^{-8}$  po 5000 krokach optymalizacji.

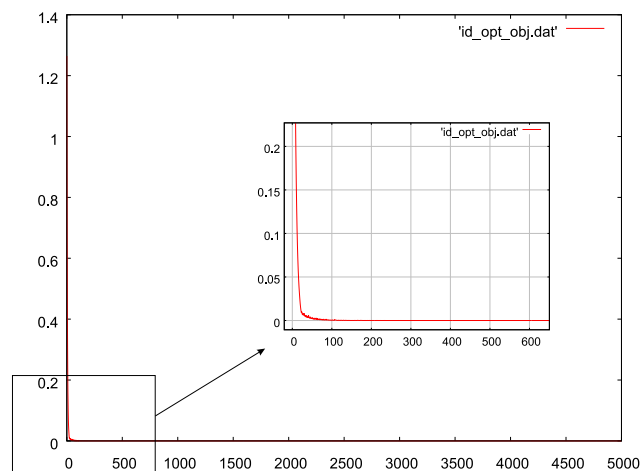
Należy zwrócić uwagę na przebieg zidentyfikowanej historii siły Fig. 4.11, gdzie symbolami zaznaczone są referencyjne przebiegi siły, natomiast linią przebiegi intensywności obciążenia w węzle trzecim i szóstym. Są to węzły w których zostały przyłożone siły referencyjne. Można również zauważyć, iż wielkości sił w tych węzłach są największe.



Rys. 4.10. Porównanie odkształceń generowanych i modelowanych dla elementu 3



Rys. 4.11. Porównanie intensywności obciążenia generowanej i osiągniętej

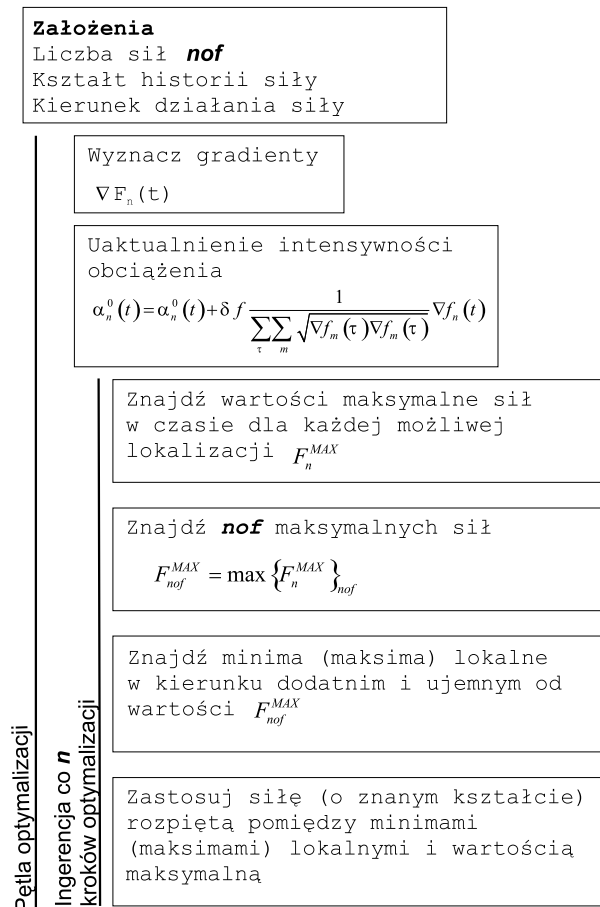


Rys. 4.12. Ewolucja funkcji celu przy 1 elemencie mierzącym



Wiedzę tą można wykorzystać, ingerując w pętlę optymalizacji tworząc algorytm heurystyczny, wykorzystujący specyfikę zadania, jak również przyjmując następujące założenia:

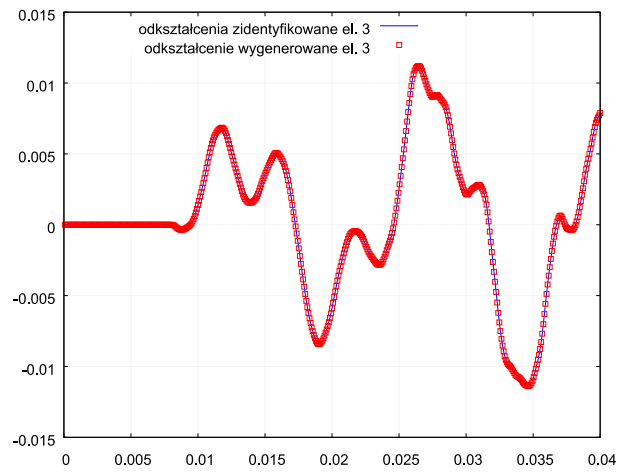
- Znana jest liczba sił zewnętrznych działających na konstrukcję.
- Znane są kierunki działania sił zewnętrznych.
- Znany jest przebieg historii obciążenia.
- Siły nie działają w tym samym przedziale czasu.
- Siły mają tę samą amplitudę.



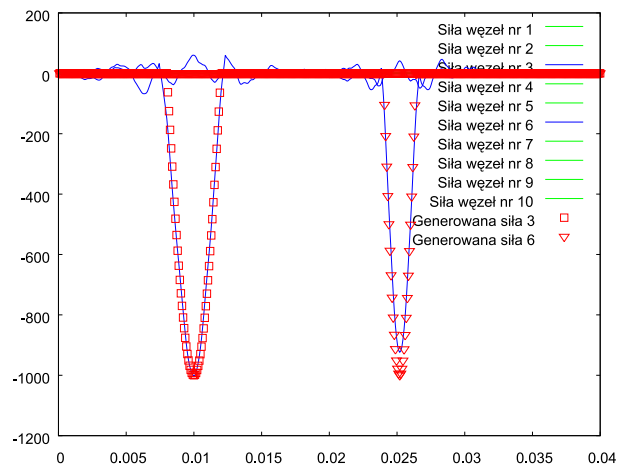
RYS. 4.13. Algorytm heurystyczny

W drugim przypadku zadania Rys. 4.9 zastosowany został algorytm optymalizacji przedstawiony w Tab. 4.13. Wyniki osiągnięte w trakcie procesu optymalizacji dla tego algorytmu heurystycznego są znacznie lepsze, pomimo iż funkcja celu zbiega tylko do wartości  $3.812 \times 10^{-6}$ , która jest o dwa rzędy wielkości większa w porównaniu z optymalizacją wykonaną dla zadania bez heurystyki. Mimo to jest wystarczająco mała, aby zbieżność wyników intensywności obciążenia była wystarczająco dobra.

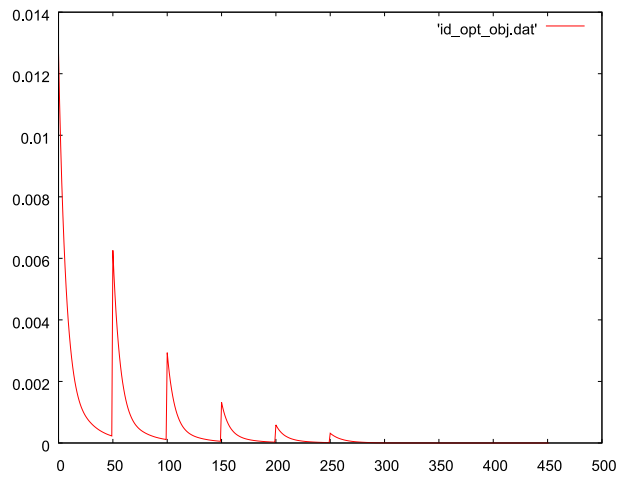
Na wykresie przebiegu procesu optymalizacji Rys. 4.16 według algorytmu Tab. 4.13, wyraźnie widać ingerencję w proces optymalizacji (piki co 50 kroków). Natomiast zadowalające rezultaty osiągnięto już 500 krokach optymalizacji.



RYS. 4.14. Porównanie odkształceń generowanych i modelowanych dla elementu 3



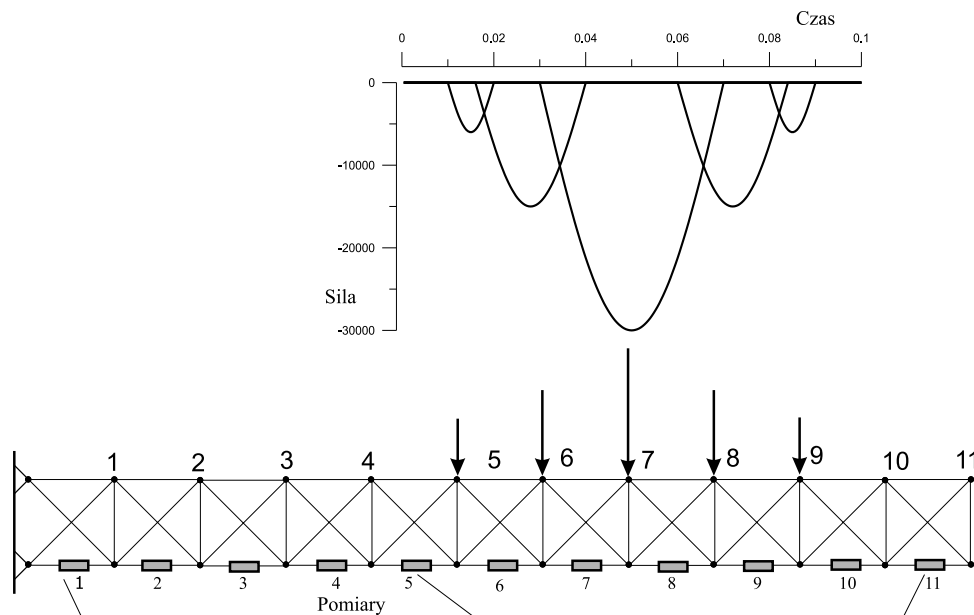
RYS. 4.15. Porównanie intensywności obciążenia generowanej i osiągniętej



RYS. 4.16. Ewolucja funkcji celu

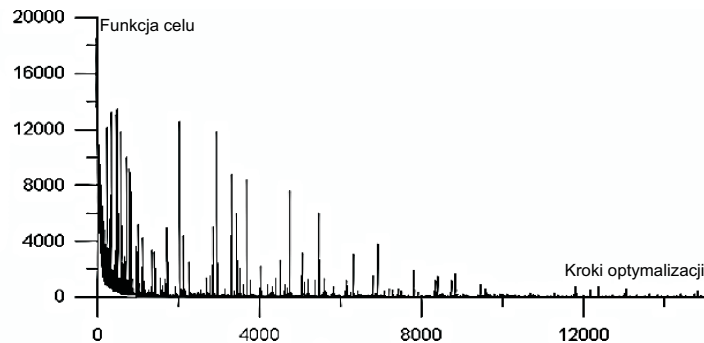
### Przykład 4.3

Przedstawiona metoda jest w stanie zidentyfikować również sekwencje zachodzących na siebie uderzeń. Niestety obywa się to kosztem dodatkowych elementów pomiarowych. W przykładzie Rys. 4.17 zaprezentowany został wspornik kratowy (por. Rys. 4.2, Rys. 4.2). Siły modelujące impakt przyłożone są w 5 węzłach o numerach od 5 do 9. Siły mają różne amplitudy oraz częstotliwości, przedstawione na Rys. 4.17. Dla zidentyfikowania historii obciążenia w zadaniu użyto metody najmniejszego spadku.



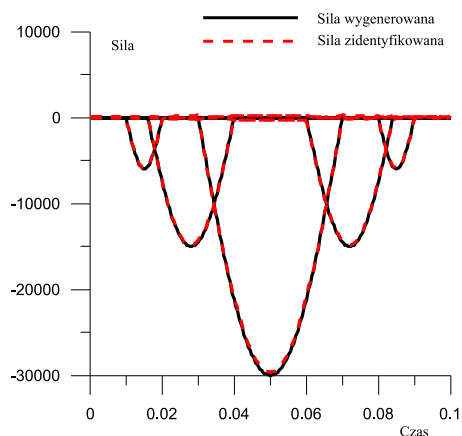
Rys. 4.17. Przykład testowy, 5 sił 11 pomiarów odkształceń.

Historia optymalizacji przedstawiona została na Fig.4.18. Występujące w trakcie procesu optymalizacji skoki wartości funkcji celu (piki na wykresie), można przypisać złemu doborowi kroku w algorytmie optymalizacji. Liczba kroków optymalizacji wynosząca 16000 jest bardzo duża i przy zastosowaniu 11 elementów mierzących powoduje znaczne obciążenie numeryczne metody. Rozmiar zadania związany jest z liczbą kroków czasowych, elementów mierzących oraz liczbą potencjalnych lokalizacji sił. Dla przedstawionego zadania liczba kroków czasowych wynosi 500 co daje nam 5500 zmiennych.

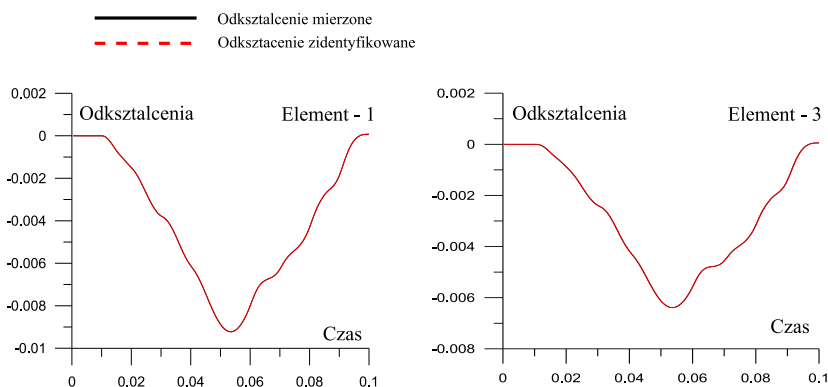


RYS. 4.18. Ewolucja funkcji celu

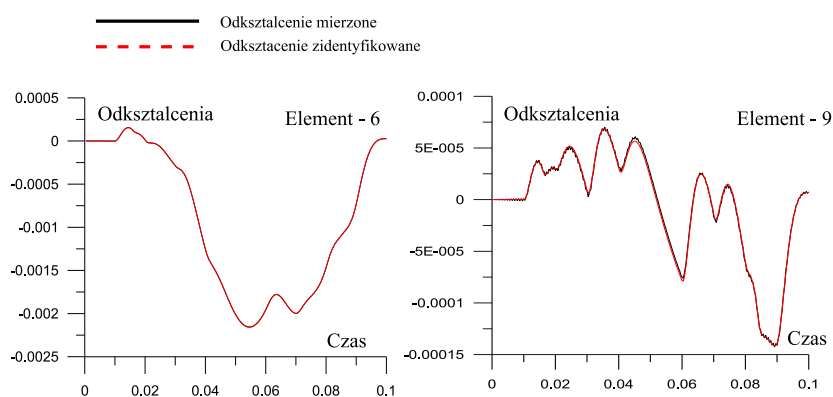
Osiągnięte wyniki zarówno zidentyfikowana historia sił Rys. 4.19, jak również ewolucja odkształceń w elementach Rys. 4.20, Rys. 4.21 są zadowalające.



RYS. 4.19. Porównanie sił referencyjnych i zidentyfikowanych.



RYS. 4.20. Porównanie odkształceń mierzonych i modelowanych dla elementów 1 i 3.



RYS. 4.21. Porównanie odkształceń mierzonych i modelowanych dla elementów 6 i 9.

### 4.1.3. Identyfikacja obciążenia dla konstrukcji sprężysto - plastycznej

Aby uwzględnić w zadaniu identyfikacji obciążenia nieliniowość fizyczną, równanie opisujące rozwój odkształceń (4.1) w czasie musi zostać rozszerzone o dodatkowy człon, odpowiedzialny za zachowanie sprężysto-plastyczne. Superponując obydwie stany można zapisać

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha n}^p(t+1-\tau)p_n^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha \zeta}^{\varepsilon}(t+1-\tau)\beta_{\zeta}^0(\tau). \quad (4.5)$$

Natomiast równanie opisujące rozwój naprężeń przyjmuje formę,

$$\sigma_{\alpha}(t) = E_{\alpha} \left[ \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha n}^p(t+1-\tau)p_n^0(\tau) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha \zeta}^{\varepsilon}(t+1-\tau)\beta_{\zeta}^0(\tau) - \beta_{\alpha}^0(t) \right]. \quad (4.6)$$

gdzie analogicznie do zadania sprężystego  $B_{\alpha n}^p(t-\tau)$  oznacza dynamiczną macierz wpływu generowaną przez jednostkową siłę a  $p_n^0(\tau)$  oznacza siłę wirtualną, opisującą intensywność obciążenia w węźle  $n$ . Macierz  $B^{\varepsilon}(t-\tau)$  oznacza dynamiczną macierz wpływu generowaną przez jednostkową dystorsję (ta sama macierz zdefiniowana została dla modelowania nieliniowości fizycznej) a  $\beta_{\zeta}^0(\tau)$  jest dystorsją plastyczną. Indeks  $\alpha$  należy do zbioru elementów konstrukcji w których mierzone są odkształcenia, indeks  $n$  przebiega po zbiorze węzłów w których jest przyłożona siła. Natomiast indeks  $\zeta$  należy do zbioru elementów uplastycznionych.

Sprężysto-plastyczne związki fizyczne opisane zostały odcinkami liniowym modelem konstytutywnym ze wzmocnieniem Rys. 2.20 wyrażającym się zależnością (2.112). W celu wyznaczenia równania, z którego można wyznaczyć przyrost dystorsji plastycznej  $\Delta\beta^0(t)$  w funkcji intensywności obciążenia  $p^0(t)$ , należy zależność opisującą naprężenia (4.6), wyrazić w takiej formie, aby poszukiwane wielkości były dane jawnie (por. (2.151)).

$$\sigma_{\alpha}(t) = E_{\alpha}(\varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t) + B_{\alpha \zeta}^{\varepsilon}(1)\Delta\beta_{\zeta}^0(t) - \Delta\beta_{\alpha}^0(t) - \beta_{\alpha}^0(t-1)). \quad (4.7)$$

Po podstawieniu zależności opisujących odkształcenia (4.5) i naprężenia (4.7) do związku konstytutywnego (2.112) i uporządkowaniu dostajemy następujący układ równań:

$$[E_{\alpha}(1 + \gamma_{\alpha})\delta_{\alpha \zeta} - E_{\alpha}B_{\alpha \zeta}^{\varepsilon}(1)]\Delta\beta_{\zeta}^0(t) = E_{\alpha}(\varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t) - \beta_{\alpha}^0(t-1)) - \text{sign}(\sigma_{\alpha}^{TR})(\sigma_{\alpha}^* + \gamma_{\alpha}E_{\alpha}\alpha_{\alpha}), \quad (4.8)$$

gdzie  $\sigma_{\alpha}^{TR}$  jest dane zależnością (por.(2.153)).

$$E_{\alpha}(\varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t) - \beta_{\alpha}^0(t-1)) = \sigma_{\alpha}^{TR}. \quad (4.9)$$

Wektor  $\varepsilon^{\neq t}(t)$  opisuje rozwój przemieszczeń, w których nie uwzględniono wpływu przyrostu dystorsji plastycznej  $\Delta\beta^0(t)$  w kroku  $t$ .

$$\varepsilon_{\alpha}^{\neq t}(t) = \sum_{\tau \leq t} \sum_{\hat{\tau} < \tau} B_{\alpha \zeta}^{\varepsilon}(t+1-\hat{\tau})\Delta\beta_{\zeta}^0(\hat{\tau}) + \sum_{\tau \leq t} B_{\alpha j}^p(t+1-\tau)p_j^{0A}(\tau). \quad (4.10)$$

Proces identyfikacji z uwzględnieniem strefy plastycznej jest możliwy i można do niego zastosować również optymalizację gradientową dla zdefiniowanej funkcji celu. Jednak, że względu na bardzo duże koszty numeryczne, związane z analizą wrażliwości, nie został

w pracy przedstawiony. Identyfikacja obciążenia dla zakresu sprężysto plastycznego będzie przez autora rozwijana.

Proces identyfikacji powinien przebiegać według następującego schematu. Po każdym uaktualnieniu rozkładu intensywności obciążenia należy dokonać dynamicznej analizy sprężysto-plastycznej (patrz poprzedni rozdział), wyznaczając uaktualniony rozwój strefy plastycznej, a następnie dokonać analizy wrażliwości i kolejnej korekty rozkładu obciążenia (opisanych dla konstrukcji sprężystej). Prowadzony w ten sposób proces iteracyjny doprowadzi nas do zminimalizowania funkcji celu, wyznaczając jednocześnie poszukiwane rozkłady intensywności obciążeń oraz stowarzyszone z nimi strefy uplastycznień.

## 4.2. Konkluzje i potencjalne aplikacje

Zaprezentowana metoda, po wykorzystaniu efektywnych algorytmów optymalizacji, pozwala na dokładne i dużo szybsze identyfikowanie historii obciążenia. W pracach [27], [26] przedstawiono rekonstrukcje sił również dla elementów belkowych. Proces optymalizacji, wykorzystujący specyfikę zadania opracowany przez Ł.Jankowskiego, skraca kilku krotnie proces identyfikacji sił.

Specyfika metody, pozwala na jej wykorzystanie również dla bardziej złożonych elementów skończonych typu belki, płyty i inne. Musi być jednak spełniony warunek, aby konstrukcja nie wchodziła do strefy plastycznej. Jeżeli to nastąpi niezbędne staje się wykorzystanie Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych, która do tej pory została opracowana tylko dla elementów kratowych i ramowych.

Uwzględnianie plastyczności w procesie identyfikacji obciążenia jest bardzo kosztowne numerycznie. Proces ten w znacznym stopniu można przyspieszyć, mając możliwość zarejestrowania wygenerowanych stref plastycznych oraz sekwencji ich generowania. Mając te dane istnieje możliwość znacznego zmniejszenia rozmiaru zadania, co będzie skutkowało zwiększeniem efektywności metody.

Możliwe zastosowania metody identyfikacji obciążenia:

- Monitorowanie konstrukcji obciążonych dynamicznie. Okresowa analiza zarejestrowanych danych pozwoli na szacowanie i przewidywanie potencjalnych awarii na podstawie obciążeń jakie działały na strukturę.
- Narzędzie do podważania historii wypadków. Możliwe jest wykorzystanie istniejących już w pojazdach czujników, lub wyposażenie ich w dodatkowe czujniki odkształcenia. Na podstawie zebranych pomiarów w trakcie wypadku, będzie możliwe odtworzenie zdarzenia. Zaproponowane urządzenie będzie rozszerzeniem już istniejących *czarnych skrzynek*.
- Pozyskiwanie danych z konstrukcji mechanicznych. Bardzo często, na przykład w kopalniach, nie wiadomo jakie siły działają na konstrukcję podczas zawałów, co utrudnia optymalne projektowanie zabezpieczeń. Mimo, iż wiedza ta jest bardzo pożądana, do tej pory nie ma wiarygodnych wyników pomiarów. Przedstawiona metoda daje szansę powodzenia takiego wyposażenia obudowy chodnikowej, aby monitorować siły działającej na nią w trakcie tąpnięć i zawałów, do których dochodzi w kopalniach.

## Rozdział 5

# Podsumowanie

---

### 5.1. Wnioski ogólne

- W pracy przedstawiono metodykę szybkiej, efektywnej numerycznie, dynamicznej reanalizy konstrukcji bazującej na Metodzie Dystorsji Wirtualnych. Opracowana metoda traktuje problem jako zadanie sprzężone, umożliwiając modelowanie zmiany sztywności, masy oraz nieliniowości fizycznej. Pozwala ona też na szybką i precyzyjną analizę wrażliwości. Opracowane zostały algorytmy wdrożone w postaci efektywnych procedur numerycznych.
- Zademonstrowano skuteczność nowo-stworzonych narzędzi numerycznych w rozwiązywaniu następujących problemów inżynierskich stanowiących oryginalne wyzwania badawcze:
  - optymalne przeprojektowywanie *ustrojów adaptacyjnych* AIA w celu zwiększenia ich możliwości absorpcji udarów pochodzących od obciążeń losowych.
  - identyfikacja “off-line” scenariusza obciążeń dynamicznych ustroju na podstawie zarejestrowanych lokalnych odpowiedzi dynamicznych.

### 5.2. Osiągnięte cele szczegółowe

- Uogólniono Metodę Dystorsji Wirtualnych o możliwość zastosowania jej odmiany *Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych* IMDW do modelowania nieliniowości fizycznych.
- Opracowano nową odmianę metody, *Impulsową Metodę Sił Wirtualnych* IMFW, z zastosowaniem jej do modelowania zmiany sztywności (podobnie jak IMDW), modelowania zmiany masy, oraz w identyfikacji historii działającej siły. W implementacji metody jako efektywniejszy został przyjęty opis, w którym sztywność i nieliniowość modelowane są przez IMDW, natomiast dla modelowania zmiany masy zastosowano IMFW.
- Opracowano algorytmy numeryczne dynamicznej analizy struktur kratowych, uwzględniające modelowanie sztywności, masy oraz nieliniowości fizycznych, jak również umożliwiające efektywne modelowanie sprzężone.
- Opracowano algorytmy analitycznego wyznaczania wrażliwości ze względu na zmia-

nę sztywności, masy oraz granicy plastyczności.

- Opracowano kod numeryczny dla pakietu oprogramowania AIA-rem, z wykorzystaniem opracowanych algorytmów numerycznych, prezentujący różne rodzaje przemodelowania parametrów konstrukcji. Opracowany pakiet został dołączony do pracy. Program napisany zostały z wykorzystaniem języka programowania fortran95.
- Przeprowadzono weryfikację numeryczną kodu z komercyjnym oprogramowaniem ANSYS, przedstawiającą poprawność nowo-opracowanej metody.
- Zaprezentowano przykład numeryczny optymalnej redystrybucji materiału konstrukcyjnego w celu uzyskania ustroju najsztywniejszego, demonstrując efektywność opracowanych kodów numerycznych.
- Przedstawiono przykład wieży z dołączonym adaptacyjnym zderzakiem, dla którego wyznaczono optymalną strategię sterowania programami plastycznymi modelującymi zachowanie elementów aktywnych.
- Przedstawiono metodologie optymalnego projektowania konstrukcji adaptacyjnych AIA wraz z przykładem numerycznym demonstrującym efektywność koncepcji oraz narzędzi numerycznych.
- Wykazana wysoką skuteczność podejścia AIA w absorbcji obciążeń uderowych.
- Zaprezentowano przykłady numeryczne identyfikacji obciążeń dynamicznych konstrukcji. Wykazano możliwość identyfikacji kilku obciążeń dynamicznych działających równocześnie na konstrukcję. Przedstawiono również możliwość wykorzystania algorytmów heurystycznych oraz ich efektywność.

### 5.3. Planowane kroki na przyszłość

- uogólnienie *metod wirtualnych* na przypadek konstrukcji ramowych trójwymiarowych,
- uogólnienie związku konstytutywnego modelującego zachowanie *elementów adaptacyjnych*, oraz opracowanie strategii sterowania elementów konstrukcji w funkcji czasu  $\sigma^*(t)$ ,
- weryfikacja eksperymentalna zaprezentowanej metody IMFW identyfikacji obciążeń dynamicznych,
- wykorzystanie zaprezentowanych *metod wirtualnych* w rzeczywistych aplikacjach.



# Dodatek A

---

Do pracy dołączony został pakiet oprogramowania, pozwalający na zaprezentowanie różnych przykładów modelowania parametrów konstrukcyjnych oraz nieliniowości fizycznych.

Do wczytywania danych dla programu AIA-rem, został stworzony język komend, składający się ze słowa kluczowego oraz odpowiednich parametrów<sup>12)</sup>. Każde słowo kluczowe poprzedzone jest gwiazdką "\*"np. \*ic 3 . Wszystkie inne dodatkowe elementy traktowane są jako komentarz i są pomijane.

Dostępne komendy, opcje komend oraz przykłady:

\*START Początek programu,

\*start,2D,3,krata 2 elementowa

słowo kluczowe \*start, rozmiar zadania 2D<sup>13)</sup>, liczba węzłów 3, nazwa zadania krata 2 elementowa.

\*MAT Dane materiałów zadeklarowanych w zadaniu,

\*mat,2

Słowo kluczowe \*mat, liczba materiałów 2 (poniżej tyle linii z danymi ile zadeklarowanych materiałów).

1 2.1e11,0.3,7800,1

2 2.1e11,0.3,7800,1

Numer materiału, moduł Young'a  $E$ , liczba Poisson'a  $\eta$ , gęstość  $\rho$ , nieliniowość fizyczna (0-materiał sprężysty,1-materiał plastyczny).

\*PLMAT Właściwości plastyczne materiałów,

\*plmat,2

Słowo kluczowe \*PLMAT, liczba materiałów 2.

1, 1E+08, 0.01 , 1

2, 1E+06, 0.03 , 1

Numer materiału, granica plastyczności  $\sigma^*$ , parametr wzmocnienia  $\gamma$ , typ wzmocnienia 1 (Dostępny jest tylko jeden typ wzmocnienia, wzmocnienie izotropowe).

\*CRS Pole powierzchni bocznej elementu,

---

<sup>12)</sup>Język komend stworzony został przy współpracy z Piotrem Pawłowskim, członkiem Zakładu Technologii Inteligentnych.

<sup>13)</sup>Program jest sprawdzony i zweryfikowany dla zadań dwu-wymiarowych. Jest również gotowa część kodu dla zadań 3D, która będzie dalej rozwijana przez autora.

**\*crs,2**  
 Słowo kluczowe **\*CRS**, liczba zdefiniowanych powierzchni bocznych,  
 1 1.0e-4  
 2 1.0e-5  
 Numer pola przekroju, wartość pola przekroju.

**\*NODE** Definicja węzłów konstrukcji,  
**\*node,3**  
 Słowo kluczowe, liczba węzłów w konstrukcji,  
 1 -1.0 0.0  
 2 1.0 0.0  
 3 0.0 -1.0  
 Numer węzła, współrzędne węzła x, y.

**\*ELEM** Definicja elementów konstrukcji,  
**\*elem,2**  
 Słowo kluczowe, liczba elementów w konstrukcji,  
 1 1 3 1 1 1  
 2 2 3 2 2 2  
 Numer elementu, numery węzłów dla danego elementu, parametry plastyczności zdefiniowane poleceniem **\*PLMAT**, numer materiału zdefiniowany poleceniem **\*MAT**, numer przekroju zdefiniowany poleceniem **\*CRS**.

**\*BC** Warunki brzegowe zadania,  
**\*bc,4**  
 Słowo kluczowe, liczba warunków brzegowych dla zadania,  
 1 1 0.0  
 1 2 0.0  
 2 1 0.0  
 2 2 0.0  
 Numer węzła, kierunek zdefiniowanego przemieszczenia (1 kierunek pionowy, 2 kierunek poziomy), wartość warunku brzegowego.

**\*CMASS** definicja dodatkowych elementów masowych przyłożonych w węzłach,  
**\*cmass,2**  
 Słowo kluczowe **\*CMASS**, liczba mas skupionych przyłożonych w węzłach konstrukcji,  
 3 100  
 2 50  
 Numer węzła, wartość przyłożonej masy.

**\*ANTYPE** Typ analizy,  
**\*antype,alin**  
 Słowo kluczowe, akronim rodzaju analizy. W programie dostępne są następujące rodzaje analizy:  
**alin** Analiza liniowa konstrukcji z oryginalnym rozmieszczeniem elementów.  
**stif** Analiza liniowa konstrukcji z zadaniem parametrem modyfikacji sztywności elementów  $\mu^E$ . Parametr modyfikacji zadany komendą **\*MI\_VDM**<sup>14)</sup>.  
**emas** Analiza liniowa konstrukcji z zadaniem parametrem modyfikacji masy elemen-

---

<sup>14)</sup>Modyfikacja modułów Younga elementów.

- tów  $\mu^M$ . Parametr modyfikacji zadany komendą `*MI_VDM`<sup>15)</sup>.
- area** Analiza liniowa konstrukcji z zadaniem parametrem modyfikacji przekrojów poprzecznych  $A$  elementów  $\mu^A$ . Modyfikacja przekrojów zadana komendą `*MI_VDM`.
- plas** Analiza sprężysto-plastyczna dla konstrukcji z oryginalnym rozmieszczeniem pól przekrojów. Przy tej analizie niezbędne jest ustawienie parametru  $\mu$  równego jeden.
- all** Analiza sprzężona, modelowanie zmiany pola przekroju elementów oraz nieliniowości fizycznej. Modyfikacja przekrojów zadana komendą `*MI_VDM`.
- \*MI\_VDM** Definicja parametru modyfikacji pola przekroju elementów  $\mu = \frac{\hat{A}}{A}$ ,
- `*mi_vdm, some, 2`
- Słowo kluczowe `*mi_vdm`, parametr `some` oznacza różne parametry modyfikacji dla elementów. Natomiast parametr `all` oznacza, iż wszystkie elementy mają identyczny parametr modyfikacji i wystarczy podać tylko jeden. Ostatnia liczba definiuje liczbę elementów z modyfikacją przekroju<sup>16)</sup>,
- 1 0.5  
2 1.5
- Numer elementu, parametr modyfikacji pola przekroju danego elementu. Przy analizie `emas`, `stif` definiowany parametr odpowiada odpowiednio za modelowanie masy lub sztywności elementów konstrukcji.
- \*MSTYPE** Definiuje typ macierzy mas,
- `*mstype, kons`
- Słowo kluczowe `*Mstype`, typ macierzy mas: `kons` macierz konsystentna, `diag` macierz diagonalna.
- \*IC** Warunki początkowe zadania.
- przemieszczenia początkowe, wprowadzanie danych poprzedzone literą: `u`
  - prędkości początkowe, wprowadzanie danych poprzedzone literą: `v`
- `*ic 3`
- Słowo kluczowe `*ic`, liczba zdefiniowanych warunków początkowych.
- `u, 6, 2, -15`  
`v, 7, 1, -5`
- Powyższe polecenie oznacza przyłożenie przemieszczenia początkowego w węźle 6 w 2 stopniu swobody o wartości -15. Prędkości początkowej w 7 węźle w 1 stopniu swobody równej -5.
- \*DAMPF** Uwzględnienie w analizie macierzy tłumienia.
- `*dampf, 1.43e-5 10`
- Słowo kluczowe `*dampf`, parametry definiujące Rayley'owską macierz tłumienia.
- \*STOP** Określenie wartości dopuszczalnego odkształcenia po przekroczeniu której nastąpi przerwanie analizy.
- `*stop, 0.3`
- Słowo kluczowe `*stop`, wartość dopuszczalnego odkształcenia.
- \*ANIM** Wykonanie animacji po zakończeniu analizy, na podstawie zarejestrowanych wyników. Opcje komendy `on` wykonaj animację lub `off` nie wykonuj animacji. Animacja

---

<sup>15)</sup>Modyfikacja gęstości elementów.

<sup>16)</sup>W tej wersji programu liczba parametrów musi odpowiadać liczbie elementów konstrukcji.

wykonana jest jako animowany gif. Niezbędne dla wykonania animacji jest umieszczenie w katalogu roboczym programów Gifsicle.exe i gnuplot.exe w wersji 3.7. Oba programy są darmowe i znajdują się na płycie CD.

**\*anim,on**

**\*STEP** Definicja liczby kroków czasowych,

**\*step, 500**

Słowo kluczowe **\*step**, liczba kroków czasowych analizy.

**\*TIME** Definicja czasu analizy,

**\*time,0.01**

Słowo kluczowe **\*time**, liczba kroków analizy.

**\*END** Koniec pliku z danymi definiującymi zadanie.

## Dodatek B

---

W załączniku przedstawiono przykład pliku wsadowego do programu AIA-rem oraz do programu ANSYS.

### Zadanie 1

Kratowy wspornik pięć elementowy, przedstawiony w przykładzie do rozdziału 2.9.1.

```
*start,2D,4,wspornik_5_elementow
```

```
*mat,5
```

```
1 2.1e11,0.3,7800,1
```

```
2 2.1e11,0.3,7800,1
```

```
3 2.1e11,0.3,7800,1
```

```
4 2.1e11,0.3,7800,1
```

```
5 2.1e11,0.3,7800,1
```

```
*plmat,5
```

```
1, 5.0E+5, 0.01 , 1
```

```
2, 5.0E+5, 0.01 , 1
```

```
3, 5.0E+5, 0.01 , 1
```

```
4, 5.0E+5, 0.01 , 1
```

```
5, 5.0E+5, 0.01 , 1
```

```
*crs,5
```

```
1 1.0e-5
```

```
2 1.0e-5
```

```
3 1.0e-5
```

```
4 1.0e-5
```

```
5 1.0e-5
```

```
*node,4
```

```
1 0.0 0.0
```

```
2 1.0 0.0
```

```
3 0.0 1.0
```

```
4 1.0 1.0
```

```
*elem,5
```

```
1 1 2 1 1 1
```

```
2 2 4 2 2 2
```

```

3 3 4 3 3 3
4 1 4 4 4 4
5 2 3 5 5 5
*bc,4
1 1 0.0
1 2 0.0
3 1 0.0
3 2 0.0
*cmass,1
2 2
*stop,0.3
! ****/ typ analizy /*****
*antype,aall
*mi_vdm,some,5
1 0.8
2 1.1
3 0.6
4 0.2
5 0.7
*anim,off
*step, 500
*time, 0.04
*mstype,kons
*ic,1
v,2,2,-5
*end

```

Wyniki zadania zostaną zapisane w plikach \*.dat, w formacie ASCII. Obecna wersja programu zapisuje wyniki dla wszystkich elementów i stopni swobody w plikach:

vu.dat, vu1.dat, vu2.dat przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia dla wszystkich stopni swobody.

veps.dat, veps\_pl.rat odkształcenia całkowite  $\varepsilon$  oraz odkształcenia plastyczne  $\beta^0$  dla wszystkich elementów

vE\_kin.dat, vE\_pl.dat, vE\_str.dat, vE\_StrPl.dat, vE\_balance.dat energia kinetyczna, plastyczna, sprężysta, sprężysta+plastyczna (dla porównania z ANSYSem) dla wszystkich elementów. Ostatni plik zbiera sumy wszystkich składników energii.

Plik wsadowy dla programu ANSYS napisany został z wykorzystaniem języka komend ADPL (Ansys Design Parameter Language). ADPL jest skryptowym językiem wspomagającym budowanie modeli w wykorzystaniu parametrów. Umożliwia również używanie pętli, funkcji warunkowych, skalarów, wektorów jak również operację na macierzach.

```

/COM/*****Wspornik 5-elementowy*****///
/config,nres,2000
/CONFIG,NBUF,25
GAMA = 0.01
density = 7800

```

```
E = 2.1e11
area1 = 1e-5
SIGPMAX = 5.0e5
! definicja macierzy dla przechowywania progów plastycznych oraz pola przekroju
*DIM,SIGP,,5,1
*dim,Aarea,,5,1
*do,i,1,5
SIGP(i,1)=SIGPMAX
aarea(i,1)=area1
*enddo
!* zadane modyfikacje przekroju
aarea(1)=aarea(1)*0.8
aarea(2)=aarea(2)*1.1
aarea(3)=aarea(3)*0.6
aarea(4)=aarea(4)*0.2
aarea(5)=aarea(5)*0.7
!*****/PREP7-preprocesor budowa modelu/*****/
/PREP7
*do,i,1,5
ET,i, LINK1
*enddo
et,6,mass21,,2
KEYOPT,6,1,0
KEYOPT,6,2,0
KEYOPT,6,3,4
!* definicja masy elementu
R,6,5
*do,i,1,5
R,i, Aarea(i,1)
*enddo
*do,i,1,5
MP,EX,i, E
MP,DENS,i,density
*enddo
!***/ Definicja nieliniowości fizycznej BILINEAR ISOTROPIC HARDERING/**
*do,i,1,5
TB,BISO,i,
TBDATA,1,SIGP(i,1),E*GAMA
*enddo
!***Definicja węzłów/**
N,1, 0.0, 0.0, 0.00 ,0
N,2, 1.0, 0.0, 0.00 ,0
N,3, 0.0, 1.0, 0.00 ,0
N,4, 1.0, 1.0, 0.00 ,0
!***Definicja elementów/**
TYPE,1
MAT,1
```

```
real,1
E, 1, 2
TYPE,2
MAT,2
REAL,2
E, 2, 4
TYPE,3
MAT,3
REAL,3
E, 3, 4
TYPE,4
MAT,4
REAL,4
E, 1, 4
TYPE,5
MAT,5
REAL,5
E, 2, 3
!* Dodanie masy węzłowej
TYPE,6
REAL,6
E,2
/PNUM,NODE,ELEM
!* warunki brzegowe
D,1 ,ALL
D,3 ,ALL
EPLLOT
FINISH
!*** SOLVER ***
/SOLU
ANTYPE,trans
TRNOPT,FULL
NLGEOM,off
kbc,1
AUTOTS,off
time,0.04
NSUBST,500
TINTP,,0.25,0.5 ! parametry newmarka
ic,2,uy,-5
CNVTOL,U
outpr,all,all
outres,all,all
lswrite
!** dane wyjściowe oraz zapis do plików
/POST26
LINES, 1000
NUMVAR,55
```



```
NSOL,2 , 2,U,x,UX2
NSOL,3 , 2,U,y,Uy2
NSOL,4 , 4,U,X,UX4
NSOL,5 , 4,U,y,Uy4
DERIV,6,2,1,,vx2
DERIV,7,3,1,,vy2
DERIV,8,4,1,,vx4
DERIV,9,5,1,,vy4
! odkształcenia plastyczne
ESOL,10, 1,1,LEPPL,1,eppla1
ESOL,11, 2,2,LEPPL,1,eppla2
ESOL,12, 3,4,LEPPL,1,eppla3
ESOL,13, 4,4,LEPPL,1,eppla4
ESOL,14, 5,2,LEPPL,1,eppla5
! NAPRĘŻENIA
ESOL,15, 1,1,LS,1,Sig1
ESOL,16, 2,2,LS,1,Sig2
ESOL,17, 3,4,LS,1,Sig3
ESOL,18, 4,4,LS,1,Sig4
ESOL,19, 5,2,LS,1,Sig5
! ENERGIA KINETYCZNA
ESOL,20, 1,1,KENE,1,KENE1
ESOL,21, 2,2,KENE,1,KENE2
ESOL,22, 3,4,KENE,1,KENE3
ESOL,23, 4,4,KENE,1,KENE4
ESOL,24, 5,2,KENE,1,KENE5
! Z MASY
ESOL,51,6,2,KENE,1,KeneMass
! ENERGIA PLASTYCZNA + SPRĘŻYSTA
ESOL,25, 1,1,SENE,1,SENE1
ESOL,26, 2,2,SENE,1,SENE2
ESOL,27, 3,4,SENE,1,SENE3
ESOL,28, 4,4,SENE,1,SENE4
ESOL,29, 5,2,SENE,1,SENE5
! epsilon sprężyste
ESOL,30, 1,1,LEPEL,1,epela1
ESOL,31, 2,2,LEPEL,1,epela2
ESOL,32, 3,4,LEPEL,1,epela3
ESOL,33, 4,4,LEPEL,1,epela4
ESOL,34, 5,2,LEPEL,1,epela5
! obicz eps całkowite
add, 35, 10, 30,, Epsc1
add, 36, 11, 31,, Epsc2
add, 37, 12, 32,, Epsc3
add, 38, 13, 33,, Epsc3
add, 39, 14, 34,, Epsc3
! bilans energii
```

```
add, 40, 20, 25,, bilens1
add, 41, 21, 26,, bilans2
add, 42, 22, 27,, bilans3
add, 43, 23, 28,, bilans3
add, 44, 24, 29,, bilans3
add, 45, 40, 41,42, 123
add, 46, 43, 44, 45, bilens
add, 47, 20, 21,22, k123
add, 48, 47, 23,24, kinall
add, 49, 25, 26,27, s123
add, 50, 49, 28,29, strnall
!***** /OUTPUT, ADISP, DAT
PRVAR,2,3,4,5
/OUTPUT, AQ1,DAT
PRVAR,6,7,8,9
/OUTPUT, AEPSpl,DAT
PRVAR,10,11,12,13,14
/OUTPUT, ASIG,DAT
PRVAR,15,16,17,18,19
/OUTPUT, AEPS,DAT
PRVAR,35,36,37,38,39
/OUTPUT, KENE,DAT
PRVAR,20,21,22,23,24,48
/OUTPUT, SENE,DAT
PRVAR, 25,26,27,28,29,50
/OUTPUT, bilan,DAT
PRVAR, 46
/OUTPUT
```

# Bibliografia

---

- [1] K. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.
- [2] M.P. Bendsoe and J.E. Taylor. An interpretation for min-max structural design problems including a methods for relaxating constrain. *Int . J. Solids and Structures* vol.20, No.4, page 301–314, 1984.
- [3] C. Boller, G.R. Tomlinson, W.J. Staszewski, and C. Biemans. Impact damage detection in composite structures-recent advances. In Balageas D.L., editor, *Structural Health Monitoring*, Proc. 1<sup>st</sup> European Workshop on Structural Health Monitoring, page 754–762. DEStech Publications, Inc., 7-9 2002 2002.
- [4] F.K. Chang and R.E. Seydel. Implementation of a real-time impact identification technique for stiffened composite panels. Proc. 2nd International Workshop on Structural Health Monitoring, Sept. 8-10 Stanford C.A.USA 1999.
- [5] P.T. Coverly and W.J. Staszewski. Impact damage location in composite structures using genetic algorithms. In *Structural Health Monitoring*, Proc. 1<sup>st</sup> European Workshop on Structural Health Monitoring. Ecole Normale Superieure, July 10-12 2002.
- [6] A.R. Diaz and C.A Soto. Lattice models for crash resistant design and optimization. Proc. of 3<sup>rd</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May 17-21 Buffalo, New York, USA 1999.
- [7] F.E. Eastep, N.S. Khot, and V.B. Venkayya. Structural modification of flexible structures to improve controllability. AIAA Paper, page 84–196, August 1984.
- [8] M.A. El-Bkaily, J.Y. Bakkar, H.F. Mahmood, and D.G. Wheatley. On the front end design of automotive vehicle crashworthiness. Crashworthiness and occupant protection in transport systems, AMD-Vol.169, New York ASME, page 331–318, 1993.
- [9] L. Gaul and S. Hurlebaus. Identification of the impact location on a plate using wavelets. In *Mechanical Systems and Signal Processing vol.12*, pages 783–795, 2001.
- [10] L. Gaul and S. Hurlebaus. Determination of the impact force on a plate by piezoceramic film sensors. In *Archive of Applied Mechanics*, pages 691–701, 69, 1999.
- [11] J.F. Green and W.E. Howell. A technique for design active control systems for areonautical telescope mirrors. NASA TN D-7090, January 1973.

- [12] J.M. Guedes, M.M. Nevers, and H. Rodrigues. Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. *Structural Optimization* 10, page 71–78, 1995.
- [13] M. Guzek and Z. Lozia. Rekonstrukcja trajektorii ruchu pojazdu na podstawie zapisów "czarnych skrzynek" - badania symulacyjne. In *2005, Zeszyty naukowe instytutu pojazdów 2(57)/2005*.
- [14] W.T Hollowell. Adaptive time domain, constrained system identification of nonlinear structures. *Proc. Symp. On Vehicle Crashworthiness Including Impact Biomechanics*, 1986.
- [15] J. Holnicki-Szulc. Virtual distortion method. In *Lecture Notes in Engineering 65*. Springer, Berlin, 1991.
- [16] J. Holnicki-Szulc and J. T. Gierlinski. *Structural Analysis, Design And Control By The Virtual Distortion Method*. John Wiley & Sons, 1995.
- [17] J. Holnicki-Szulc and J.T. Gierliński. Structural modification simulated by initial distortion. In *International Journal for Numerical Methods in Engineering 28(3)*, pages 645–666, 1989.
- [18] J. Holnicki-Szulc and L. Knap. Optimal design of adaptive structures for the best crashworthiness. *Proc. of 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, May 17-21 Buffalo, New York, USA 1999.
- [19] J. Holnicki-Szulc, P. Pawlowski, and M. Wiklo. High-performance impact absorbing materials - the concept, design tools and applications. *Smart Materials and Structures*, No. 12:pp. 461–467, 2003.
- [20] N. Hu and H. Fukunaga. Health monitoring of composite structures base on impact force identification. In Wieslaw J. Staszewski C. Boller, editor, *Structural Health Monitoring*, Proc. of the 2<sup>nd</sup> European Workshop, page 415–422. DEStech Publications, Inc., 7-9 July 2004.
- [21] C.L. Ignatovich and A.R. Diaz. Lattices, tuning and space mapping in approximations of structures under impact loads.
- [22] C.L. Ignatovich, A.R. Diaz, and C.A Soto. On improving the accuracy of lattice models in crashworthiness analysis. *Proc. of DETC00 ASME Design Engineering Technical Conference*, September 10-13 Baltimore, Maryland 2000.
- [23] D. J. Inmann. *Engineering Vibration*. Prentice-Hall, Inc., 2001.
- [24] H. Inoue, J.J. Harrigan, and S.R. Reid. Review of inverse analysis for indirect measurements of impact force. In *2001, Appl. Mech. Rev.* vol 54, no 6, November.
- [25] L. Jankowski. Programming, numerics and optimisation, smart-tech expert course, educational materials. 2006.
- [26] L. Jankowski, M. Wiklo, G.Suwala, and J. Holnicki-Szulc. Rekonstrukcja obciążenia udarowego obudowy górniczej. In *Innowacyjne i bezpieczne system mechanizacyjne do eksploatacji surowców mineralnych t.II*, Zakopane, 14-16 listopada 2006.

- 
- [27] L. Jankowski, M. Wiklo, and J. Holnicki-Szulc. Robust post-accident reconstruction of loading forces. In *ECCOMAS Smart Structures and Materials*, Gdansk, Poland, July 9-11 2007.
- [28] L. Jankowski, M. Wiklo, and J. Holnicki-Szulc. Robust post-accident reconstruction of loading forces. *Key Engineering Materials*, Vol. 347:659–664, 2007.
- [29] G. Kacprzyk and Z. Rakowski. *Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1993.
- [30] M.M. Kamal. Analysis and simulation of vehicle-to-barrier impact. SAE Tran. 79, SAE Paper No. 700414, page 1453–1467, 1970.
- [31] M.M. Kamal and J.A. Wolf Jr. Modern automotive structural analysis new york van nostrand reinhold co. Crashworthiness and occupant protection in transport systems AMD-Vol.169, 1982.
- [32] N. Kikuchi and M.P. Bendsoe. Generating optimal topologies in structural design using homogenization method. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engin.*, 71, page 197–224, 1988.
- [33] N. Kikuchi, K. Yuge, and N. Iwai. Toplogy optimization algorithm for plates and shells subjected to plastic deformations. Proc. ASME Design Engineering Technical Conference, 1998.
- [34] M. Kleiber. *Metoda elementów sończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. PWN, 1985.
- [35] L. Knap. *Aktywne rozpraszanie energii zderzeń w ustrojach adaptacyjnych*. PhD thesis, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, 6 2000.
- [36] P. Kołakowski. *Analiza wrażliwości i optymalne projektowanie konstrukcji kratowych Metodą Dystorsji Wirtualnych*. PhD thesis, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, 1 1998.
- [37] P. Kołakowski, M. Wikło, and J. Holnicki-Szulc. The virtual distortion method a versatile reanalysis tool for structures and systems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007.
- [38] M.T. Kowalick. *Fatal exit the automotvie Black box debate*. John Wiley & Sons, 2004.
- [39] Z. Marzec and J. Holnicki-Szulc. Adaptive barriers with maximal impact energy absorption. Proc. of 3<sup>rd</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May 17-21 Buffalo, New York, USA 1999.
- [40] A.R. Mijar, J.S. Arora, and C.H. Kim. Simplified models for automotive crash simulation and design optimization. Proc. of 3rdWorld Congres of Structural and Multidisciplinary Optimization, May 17-21 Buffalo, New York USA 1999.
- [41] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 1999.
- [42] W. Nowacki. *Teoria sprężystości*. PWN, 1970.

- [43] D.R.J. Owen and E. Hinton. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Pres Limited, 1980.
- [44] P. Pawlowski and J. Holnicki-Szulc. Adaptive structures under extreme loads - impact detection, self-adaptation, self-repairing. In *3rd European Conference on Structural Control, 3ECSC*, Vienna, Austria, 12-15 July 2004.
- [45] M. Paz and Leigh W. *Structural Dynamics Theory and Computaion*. Springer, 2004.
- [46] C. B. W. Pedersen. *On Topology Design Of Frame Structures For Crashworthiness*. PhD thesis, Technical University of Denmark, 4 2002.
- [47] C.B.W. Pedersen. Topology optimization for crashworthiness of frame structures. ICrash Society of Automotive Engineering, Feb. Australia 2002.
- [48] C.B.W. Pedersen. Topology optimization of 2d-framed structures with path dependent response. International Jurnal for Numerical Methods in Engineering, 2002.
- [49] E. Ramm, K. Maute, and S. Schwartz. Adaptive topology optimization for elastoplastic structures. *Structural Optimization* 15, page 81–91, 1998.
- [50] S. S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Pearson Prentice Hall, 2004.
- [51] R.A. Scot, R.R. Mayer, and N. Kikuchi. Application of topology optimization techniques to structural crashworthiness. *Int . J. Num. Meth. Engrg.* vol.39, page 1383–1403, 1996.
- [52] K. Sekuła, G. Mikulowski, and J. Holnicki. Real time dynamic mass identification. In *Structural Health Monitoring - Third European Workshop*, Grenada, Spain, 5-6 July 2006.
- [53] J.C. Simo and T.J.R. Huges. *Computational Inelsticity*. Springer-Verlag, 1998.
- [54] J.O. Song and C.M. Ni. Computer-aided design analysis methods for vehicle structural crashworthiness. *Proc. Symp. on Vehicle Crashworthiness Including Impact Biomechanics AMD-Vol.79*, New York ASME, page 125–139, 1986.
- [55] C.A Soto. Application of structural topology optimization in the automotive industry: Past, presen and future. *Proc. of 5<sup>th</sup> World Congress of Computational Mechanics*, July 7-12 Vienna, Austria 2002.
- [56] J. Stadnicki. *Teoria i praktyka rozwiązywania zadań z optymalizacji z przykładami zastosowań technicznych*. WNT, 2006.
- [57] R. Steinhauser and G. Kreisselmeier. Systematic control design by optimizing a vector performance index. IFAC, *Symp. Computer Aided Design of Control Systems*, page 29–31, 1979 Zurich, Switzeland.
- [58] K. Tekamae, Y. Ujita, Y. Suzuki, H. Yamakawa, and Tsutsui Z. Structural optimization for improvement of train crashworthinesin conceptual and preliminary design. In *1999, Proc. of 3rd World Congres of Structural and Multidisciplinary Optimization*, May 17-21 Buffalo, New York, USA.

- 
- [59] R. Tennyson. Shm system for detecting foreign object impact damage on spacecraft. In Wieslaw J. Staszewski C. Boller, editor, *Structural Health Monitoring*, Proc. of the 2<sup>nd</sup> European Workshop, page 983–990. DEStech Publications, Inc., 7-9 July 2004.
- [60] V. Tvergaard. On the optimum shape of a fillet. In Sawczuk A. and Mroz Z., editors, *Optimization in Structural Design*, page 1975, 1975.
- [61] J.T. Wang, J.A. Bennet, and R.V. Lust. Optimal design strategies in crashworthiness and occupant protection. Crashworthiness and occupant protection in transport systems AMD-Vol.126 New York ASME, page 51–66, 1991.
- [62] M. Wikło and J. Holnicki-Szulc. Optimal design of adaptive structures part i. remodelling for impact reception. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, po recenzjach, 2007.
- [63] M. Wikło and J. Holnicki-Szulc. Optimal design of adaptive structures part ii. adaptation to impact loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, po recenzjach, 2007.
- [64] T. G. Zieliński. *Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych z zastosowaniem do modelowania i identyfikacji defektów w konstrukcjach*. PhD thesis, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, 3 2004.