POLITECHNIKA WARSZAWSKA • WARSAW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
WYDZIAŁ INŻYNIERII LĄDOWEJ • FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
OŚRODEK METOD KOMPUTEROWYCH • COMPUTER METHODS CENTER

ISSN 0867–5007

METODY KOMPUTEROWE w INŻYNIERII LĄDOWEJ

MKIL
Nr 2
Tom 3

COMPUTER METHODS IN CIVIL ENGINEERING

CMCE
No 2
Vol. 3

1993

WARSZAWA 1993 WARSAW

Metody Komputerowe
w Inżynierii Lądowej
Tom 3, Nr 2, 1993, s.89–108

analiza i synteza konstrukcji,
mechanika materiałów i konstrukcji,
komunikat naukowy

Computer Methods
in Civil Engineering
Vol. 3, No 2, 1993, p.89–108

analysis and synthesis of structures,
mechanics of materials and structures,
scientific report

BIBLIOTEKA IZOPARAMETRYCZNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH SYSTEMU FEAS

SYSTEM FEAS ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENT LIBRARY

Zbigniew Kacprzyk, Eligiusz Postek

Politechnika Warszawska
Wydział Inżynierii Lądowej
Ośrodek Metod Komputerowych
Al. Armii Ludowej 16
00-637 Warszawa

Warsaw University of Technology
Faculty of Civil Engineering
Computer Method Center
Al. Armii Ludowej 16
00-637 Warszawa, Poland

Streszczenie

W artykule przedstawiona została biblioteka izoparametrycznych elementów skończonych opartych o paraboliczne funkcje kształtu. W bibliotece zawarte zostały elementy tarczowe o liczbie węzłów od 4 do 8, bryłowe o liczbie węzłow 8 do 20, 4 i 8 węzłowe elementy płyty Mindlina, 3 węzłowy element powłoki osiowo-symetrycznej oraz 8 węzłowy element typu Ahmada. Przedstawiona biblioteka implementowana jest w systemie analizy konstrukcji inżynierskich FEAS i znajdzie się ona w nowej wersji systemu. Konstrukcje mogą być modelowane przy użyciu elementów znajdujących się w tzw. bibliotece „inżynierskiej" składającej się z elementów, których macierze sztywności obliczone zostały analitycznie oraz w bibliotece „parabolicznej". W tym wypadku jednak za poprawność modelu odpowiada całkowicie użytkownik.

Nowa biblioteka systemu wykorzystywana będzie zarówno w obliczeniach inżynierskich jak i w procesie nauczania mechaniki na Wydziale Inżynierii Lądowej.

Summary

This paper deals with a library of isoparametric finite elements which are based on parabolic shape functions. The library is being implemented in the structural analysis system FEAS and contains the following finite elements: 4-8 node plane stress – plane strain, 8-20 node cube, 4-8 node Mindlin plate, 3 node axisymmetric shell and 8-nodes Ahmad-type shell. In contrast to the existing „engineering" library, that consists of elements with stiffness matrices derived analytically, all the isoparametric elements are integrated numerically. Structures may be modeled with elements taken from both the „engineering" and the „parabolic" libraries. However, in this case, it is the users responsibility to model the structures correctly.

The new library will be employed to carry out structural computations and to support the teaching of structural mechanics in the Civil Engineering Department.

1. Wstęp

Wytwarzanie profesjonalnego systemu metody elementów skończonych jest przedsięwzięciem długim i kosztownym. Systemy MES, średniej wielkości, tworzone są zwykle przez zespoły kilkunastoosobowe w ciągu kilku lat. Wytworzony system musi, w czasie eksploatacji, podlegać ciągłym modyfikacjom. Zmieniają się wymagania użytkowników, doskonali się sprzęt, lepsze systemy operacyjne wymuszają zmiany w istniejącym oprogramowaniu. Projekt wytworzenia systemu powinien przewidywać ciągłe zmiany i modyfikacje w systemie. Zmiany w źródle programu często nanoszą programiści utrzymujący system a nie autorzy modułów. Pojawia się zatem silny postulat czytelności kodu źródłowego i przejrzystej struktury. Przede wszystkim należy dokonać podziału systemu na samodzielne związki modułów nazywane bibliotekami.

W systemie FEAS [1] zaprojektowano kilka bibliotek elementów skończonych. Każda z bibliotek ma jeden moduł wejścia/wyjścia obsługujący wszystkie funkcje biblioteki (np. macierz sztywności elementu w dowolnym układzie współrzędnych, macierz geometryczną, macierz bezwładności, redukcja obciążenia elementowego do węzłów, obliczanie naprężeń wewnętrznych elementu itp.).

Używanie systemów metody elementów skończonych zmieniło sposób modelowania konstrukcji przyjmowany przez projektanta. Jeszcze kilkanaście lat temu modelem konstrukcji była kratownica, rama płaska, płyta. Niezależnie analizowano konstrukcje powierzchniowe i prętowe. Przyjmowano szereg uproszczeń, dążąc do modelu możliwie mało skomplikowanego w sensie obliczeniowym. Obecnie projektanci coraz częściej dążą do złożonego modelu prętowo – powierzchniowego [2]. Częstym modelem jest ruszt i płyta, tarczownica i rama przestrzenna. Analiza tego rodzaju konstrukcji jest złożona numerycznie. Niewiele jest dostępnych systemów umożliwiających analizę tego rodzaju konstrukcji.

Organizacja elementów skończonych w biblioteki ma dwa znaczenia. Otóż elementy skończone, należące do jednej biblioteki, można ze sobą łączyć tworząc skomplikowane modele obliczeniowe. Następnym powodem jest łatwość przygotowania i kontroli danych dla zadania posługującego się jedną wybraną biblioteką.

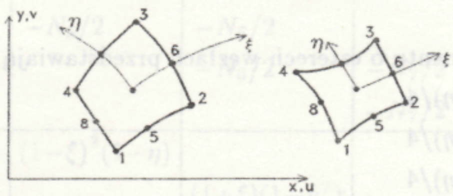
W systemie FEAS zrealizowano najpierw bibliotekę elementów skończonych, przyjmując konsekwentnie analityczny sposób otrzymywania macierzy sztywności [3], bezwładności itp. Następnie przystąpiono do realizacji biblioteki elementów skończonych, przyjmując konsekwentnie paraboliczne funkcje kształtu i numeryczny sposób otrzymywania macierzy sztywności, bezwładności itp. Biblioteka zawiera elementy skończone dla wszystkich typów konstrukcji (od pręta po bryłę). W niniejszej pracy zamieścimy opis większości elementów tej biblioteki. Pominęliśmy opis elementów rozkładu temperatury.

Nie zamieścimy też opisu elementów prętowych. Wytworzenie tych elementów nastręcza najwięcej trudności. Wyniki otrzymywane w zadaniach, gdzie zastosowano te elementy są, stosunkowo wolno zbieżne. Z uwagi na złożoność tego problemu, będzie on bliżej omówiony w innej publikacji.

2. Płaski stan naprężenia i odkształcenia, elementy czworokątne

Opisana zostanie grupa czworokątnych, zakrzywionych elementów izoparametrycznych o liczbie węzłów od 4 do 8 [5,6,7]. Pole przemieszczeń wewnątrz elementów oraz ich geometria opisane są tymi samymi parabolicznymi funkcjami na brzegach zakrzywionych oraz liniowymi na brzegach prostych. W każdym węźle elementu występują dwie składowe przemieszczeń. Stan naprężenia określony jest trzema składowymi wektora naprężeń występującymi w płaszczyźnie elementu. Dla płaskiego stanu odkształcenia składowa normalna do płaszczyzny elementu może być wyznaczona na podstawie obliczonych naprężeń normalnych działających w płaszczyźnie elementu.

Kształt elementów, układ węzłów oraz układy współrzędnych pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Czworokątne elementy o brzegach zakrzywionych (PSN, PSO).

W skład wektora przemieszczeń węzłowych $\mathbf{q}^e$ wchodzą przemieszczenia węzłów, których liczba może zmieniać się od 4 do 8. Wektor przemieszczeń każdego węzła i składa się z dwóch przemieszczeń u i v równoległych do odpowiednich osi X i Y globalnego, kartezjańskiego układu współrzędnych. W skład wektora współrzędnych kartezjańskich $\mathbf{c}$ wchodzą, dla każdego węzła i, po dwie współrzędne x, y. Zatem kształt elementu oraz pole przemieszczeń w jego obszarze można określić następująco:

$$\mathrm{col}\{x,y\} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{c}^e, \qquad \mathrm{col}\{u,v\} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{q}^e \tag{2.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^e &= \mathrm{col}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n,\} \\ \mathbf{c}^e &= \mathrm{col}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots \mathbf{c}_n,\} \qquad n = 4, 8 \end{aligned} \tag{2.2}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= \mathrm{col}\{u_i, v_i\} \\ \mathbf{c}_i &= \mathrm{col}\{x_i, y_i\} \qquad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

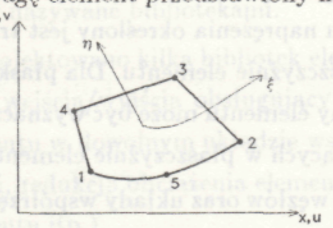
lub też

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i x_i, \qquad u = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i$$
$$y = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{n} N_i v_i . \tag{2.4}$$

Liczba współrzędnych oraz składowych przemieszczeń węzłowych zależy od liczby węzłów w elemencie, która może zmieniać się od 4 do 8. Macierz funkcji kształtu jest postaci

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & ,\dots, & N_i & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & ,\dots, & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, n \\ n = 4, 8 \, . \end{matrix} \tag{2.5}$$

Przedstawimy sposób otrzymywania funkcji kształtu dla elementów o liczbie węzłów większej niż 4. Weźmy pod uwagę element przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Element o pięciu węzłach (PSN, PSO) o trzech bokach liniowych i jednym parabolicznym.

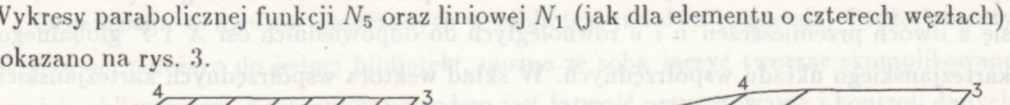
Funkcje kształtu dla elementu o czterech węzłach przedstawiają się następująco

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ N_2 &= (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ N_3 &= (1+\xi)(1+\eta)/4 \\ N_4 &= (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Paraboliczna funkcja kształtu dla węzła 5

$$N_5 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \tag{2.7}$$

Wykresy parabolicznej funkcji N_5 oraz liniowej N_1 (jak dla elementu o czterech węzłach) pokazano na rys. 3.



Rys. 3. Wykresy funkcji N_5 (parabolicznej) i N_1 (liniowej).

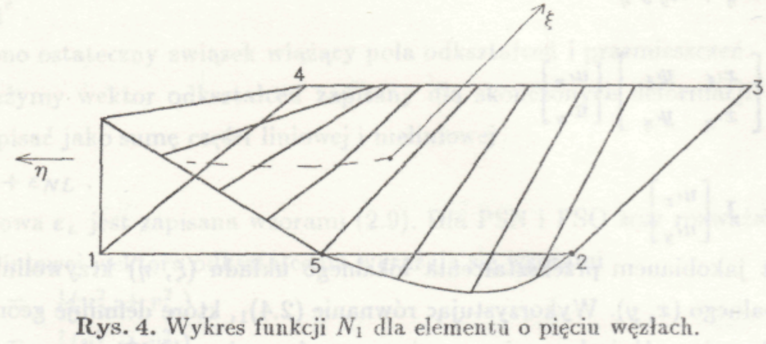
W celu uzyskania funkcji N_1 dla elementu o 5 węzłach, której wartości wynosiłyby zero w punktach 5, 2, 3, 4 oraz w punkcie 1, można dokonać superpozycji funkcji przedstawionych na rys. 3. Wówczas funkcja N_1 będzie wyrażona wzorem

$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4 - \frac{N_5}{2} \tag{2.8}$$

Podobnie można postąpić z funkcją związaną z węzłem 2.

$$N_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4 - \frac{N_5}{2} \tag{2.9}$$

Wykres funkcji N_1 dla elementu z jednym węzłem pośrednim (piątym) przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Wykres funkcji N_1 dla elementu o pięciu węzłach.

Postępując w analogiczny sposób można uzyskać zespół funkcji kształtu dla elementów z węzłami pośrednimi 6, 7, 8. Funkcje kształtu dla takich elementów zestawiono w tablicy 1.

N_i	węzły 1-4	+ węzeł 5	+ węzeł 6	+ węzeł 7	+ węzeł 8
N_1	$(1-\xi)(1-\eta)/4$	$-N_5/2$			$-N_8/2$
N_2	$(1+\xi)(1-\eta)/4$	$-N_5/2$	$-N_6/2$		
N_3	$(1+\xi)(1+\eta)/4$		$-N_6/2$	$-N_7/2$	
N_4	$(1-\xi)(1+\eta)/4$			$-N_7/2$	$-N_8/2$
N_5		$(1-\xi)^2(1-\eta)$			
N_6			$(1+\xi)(1-\eta^2)$		
N_7				$(1-\xi^2)(1+\eta)$	
N_8					$(1-\xi)(1-\eta^2)$

Tablica 1. Funkcje kształtu dla elementów o liczbie węzłów od 4 do 8.

Związek między odkształceniami i przemieszczeniami zapiszemy następująco

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,x} + v_{,y} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

oraz w równoważnej postaci macierzowej

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Konieczne jest uzyskanie zależności między pochodnymi przemieszczeń a wektorem przemieszczeń **q**. W tym celu obliczone zostaną ich pochodne w lokalnym, krzywoliniowym układzie współrzędnych. Obliczenie to zostało przeprowadzone dla przemieszczeń u bowiem dla przemieszczeń v związki te mają postać analogiczną. Zatem,

$$\begin{aligned} u_{,\xi} &= u_{,x}\, x_{,\xi} + u_{,y}\, y_{,\xi} \\ u_{,\eta} &= u_{,x}\, x_{,\eta} + u_{,y}\, y_{,\eta} \end{aligned} \tag{2.12}$$

lub

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

gdzie $\mathbf{J}$ jest jakobianem przekształcenia lokalnego układu $(\xi,\ \eta)$ krzywoliniowego do układu globalnego $(x,\ y)$. Wykorzystując równanie $(2.4)_1$, które definiuje geometrię elementu i dokonując różniczkowania przepisanego równaniem (2.12) otrzymamy współczynniki jakobianu $\mathbf{J}$. Tak więc, np. współczynnik J_{11} ma postać

$$J_{11} = x_{,\xi} = N_{1,\xi}\, x_1 + N_{2,\xi}\, x_2 + \ldots, + N_{i,\xi}\, x_n \quad n = 4, 8\,. \tag{2.15}$$

Związek odwrotny dla przemieszczeń u przedstawia się następująco

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

gdzie $\mathbf{J}^{-1}$ oznaczone zostanie przez Γ. Zatem związki między pochodnymi przemieszczeń po współrzędnych kartezjańskich i krzywoliniowych wyrażają się wzorem

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & & \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & & \\ & & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ & & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Różniczkując równanie $(2.4)_2$ definiujące pole przemieszczeń wewnątrz elementu po współrzędnych krzywoliniowych otrzymamy zależność między tymi pochodnymi a wektorem przemieszczeń węzłowych $\mathbf{q}^e$

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & ,\ldots, & N_{i,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & ,\ldots, & N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & ,\ldots, & 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & ,\ldots, & 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix} \mathbf{q}^e \quad \begin{matrix} i = 1, n \\ n = 4, 8\,. \end{matrix} \tag{2.18}$$

Podstawiając kolejno (2.15) do (2.14) i wykorzystując zależności opisujące pole odkształceń w obszarze elementu otrzymujemy

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & ,\ldots, & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & ,\ldots, & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,x} & N_{1,y} & N_{2,x} & N_{2,y} & ,\ldots, & N_{n,x} & N_{n,y} \end{bmatrix} \mathbf{q}^e \quad \begin{matrix} i = 1, n \\ n = 4, 8 \end{matrix} \tag{2.19}$$

gdzie np.

$$\begin{aligned} N_{1'x} &= \Gamma_{11} N_{1'\xi} + N_{1'\eta} \Gamma_{12} , \\ N_{1'y} &= \Gamma_{12} N_{1'\xi} + N_{1'\eta} \Gamma_{22} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Równanie (2.19) zapiszemy krótko

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{q}^e . \tag{2.21}$$

Stanowi ono ostateczny związek wiążący pola odkształceń i przemieszczeń.

Rozważymy wektor odkształceń zapisany dla skończonych deformacji. Wektor ten można zapisać jako sumę części liniowej i nieliniowej

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL} . \tag{2.22}$$

Część liniowa ε_L jest zapisana wzorami (2.9). Dla PSN i PSO trzy rozważane składowe części nieliniowej wektora odkształcenia wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{NL} &= \tfrac{1}{2}(u_{'x}^2 + v_{'x}^2) , \\ \varepsilon_y^{NL} &= \tfrac{1}{2}(u_{'y}^2 + v_{'y}^2) , \\ \gamma_{xy}^{NL} &= u_{'y} u_{'x} + v_{'y} v_{'x} . \end{aligned} \tag{2.23}$$

Wzory (2.23) zapiszemy w postaci macierzowej

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \delta , \tag{2.24}$$

gdzie

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u_{'x} & 0 & v_{'x} & 0 \\ 0 & u_{'y} & 0 & v_{'y} \\ u_{'y} & u_{'x} & v_{'y} & v_{'x} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

oraz

$$\delta = \mathrm{col}\,\{u_{'x},\ u_{'y},\ v_{'x},\ v_{'y}\} . \tag{2.26}$$

Wektor pochodnych przemieszczeń δ przedstawimy w postaci umożliwiającej znalezienie związku między nimi, a przemieszczeniami węzłowymi.

$$\delta = \mathbf{G} \mathbf{q}^e . \tag{2.27}$$

Macierz $\mathbf{G}$ otrzymano drogą połączenia związków (2.18) i (2.19). Macierz ta jest niezbędna do uzyskania macierzy geometrycznej.

Część energii związanej z naprężeniami wstępnymi jest określona wzorem

$$\int_V \varepsilon^T \sigma_0 \,\mathrm{d}V , \tag{2.28}$$

gdzie wektor ε jest określony wzorem (2.22). Wykonując całkowanie otrzymujemy człony typu

$$u_{'x}\sigma_{x0} + v_{'y}\sigma_{y0} \ldots \tag{2.29}$$

Prowadzi to do otrzymania wyrażenia na siły węzłowe spowodowane naprężeniami wstępnymi oraz interesującej nas części energii, którą nazwiemy U_σ. Tak więc,

$$U_\sigma = \int_V [\tfrac{1}{2}(u_{'x}^2 + v_{'x}^2)\sigma_{x0} + \ldots + (u_{'x} u_{'y} + v_{'x} v'_{y})\tau_{xz0}]\mathrm{d}V . \tag{2.30}$$

Biorąc pod uwagę związek (2.26) równanie to może zostać zapisane następująco

$$U_\sigma = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \delta dV \,, \tag{2.31}$$

gdzie

$$s = \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & \tau_{xy0} \\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} \end{bmatrix} . \tag{2.32}$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę związek (2.27), to równanie (2.31) przyjmie postać

$$U_\sigma = \int_V (\mathbf{Gq})^T \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} (\mathbf{Gq}) dV \,. \tag{2.33}$$

W ten sposób otrzymaliśmy macierz geometryczną elementu w postaci

$$\mathbf{k}_\sigma = \int_{V^e} \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \mathbf{G} dV \tag{2.34}$$

Sformułowanie powyższe jest ograniczone do małych odkształceń i małych obrotów. Dobrze nadaje się do badania stateczności początkowej konstrukcji.

Stan naprężenia określony jest czterema składowymi,

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\} \,, \tag{2.35}$$

z których trzy tj. σ_x, σ_y, τ_{xy} określimy ze związku

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_{xo} \\ \varepsilon_{yo} \\ \gamma_{xyo} \end{bmatrix} \right) \tag{2.36}$$

gdzie macierz **D** opisuje własności materiałowe. W systemie można analizować materiały izotropowe, warstwowe i anizotropowe.

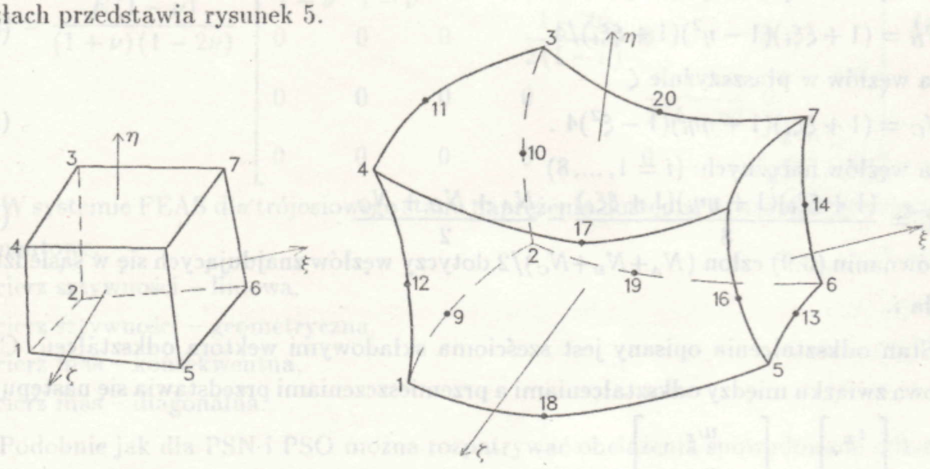
Biorąc pod uwagę przedstawione opisy kształtu, stanów przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w elemencie implementowane zostały następujące macierze elementowe:
macierz sztywności – liniowa,
macierz sztywności – geometryczna,
macierz sprężystego podłoża,
macierz mas – konsekwentna,
macierz mas – diagonalna.

Możliwe jest rozpatrywanie obciążeń wywołanych odkształceniami i naprężeniami początkowymi, ciężarem własnym elementu i przyrostem temperatury. Można również rozważać obciążenia normalne i styczne działające na brzegu elementu.

3. Trójosiowy stan naprężenia, elementy ośmiościenne

W systemie FEAS dostępne są elementy bryłowe o liczbie węzłów od 8 do 20 [5,6,8]. Sposób otrzymywania macierzy sztywności dla elementów tego typu jest analogiczny do opisanego powyżej po dokonaniu uogólnienia na trzy zmienne. Pole przemieszczeń i kształt opisane są tymi samymi serendipowskimi funkcjami kształtu – drugiego stopnia na brzegach i powierzchniach zakrzywionych oraz liniowymi na prostych. W każdym węźle występują trzy składowe przemieszczeń. Stan naprężenia określa sześć składowych wektora naprężenia.

Układy współrzędnych lokalny i globalny oraz numerację węzłów elementów o 8 i 20 węzłach przedstawia rysunek 5.



Rys. 5. Elementy bryłowe o 8 i 20 węzłach.

Geometrię i pole przemieszczeń określają związki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{N}\,\mathbf{c}^e \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{q}^e, \tag{3.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^e &= \operatorname{col}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n,\} \\ \mathbf{c}^e &= \operatorname{col}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n,\} \qquad n = 8 \text{ lub } 20 \end{aligned} \tag{3.2}$$

lub

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} N_i x_i, & u &= \sum_{i=1}^{n} N_i u_i\,, \\ y &= \sum_{i=1}^{n} N_i y_i, & v &= \sum_{i=1}^{n} N_i v_i\,, \\ z &= \sum_{i=1}^{n} N_i z_i, & w &= \sum_{i=1}^{n} N_i w_i\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

gdzie n może zmieniać się od 8 do 20 zależnie od liczby węzłów. Jakobian przekształcenia przyjmuje następującą postać

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

oraz np.

$$J_{11} = x_{,\xi} = N_{1,\xi}\, x_1 + N_{2,\xi}\, x_2 + \ldots, + N_{i,\xi},\ x_n \quad i = 1, n; \quad n = 8, 20\,. \tag{3.5}$$

Podamy wzory na funkcje kształtu dla elementów 8–20 węzłowych. Mają one następującą postać:

– dla węzłów w płaszczyźnie ξ

$$N_A = (1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1+\xi\xi_i)\ . \tag{3.6}$$

– dla węzłów w płaszczyźnie η

$$N_B = (1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)/4\ . \tag{3.7}$$

– dla węzłów w płaszczyźnie ζ

$$N_C = (1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1-\xi^2)4\ . \tag{3.8}$$

– dla węzłów narożnych: $(i = 1, ..., 8)$

$$N_i = \frac{(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\xi\xi_i)}{8} - \frac{N_A+N_B+N_C}{2}\ . \tag{3.9}$$

W równaniu (3.9) człon $(N_A+N_B+N_C)/2$ dotyczy węzłów znajdujących się w sąsiedztwie węzła i.

Stan odkształcenia opisany jest sześcioma składowymi wektora odkształceń. Część liniowa związku między odkształceniami a przemieszczeniami przedstawia się następująco

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,x} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,y} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ u_{,z} + w_{,x} \end{bmatrix}\ . \tag{3.10}$$

Typowe składowe wzorów nieliniowych na odkształcenia dla odkształceń normalnych i stycznych mają postać

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}\left(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2\right) \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + \left(u_{,x}\, u_{,y} + v_{,x}\, v'y + w_{,x}\, w_{,y}\right)\ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Zdefiniujemy macierz $\mathbf{G}$ wiążącą wektor pochodnych przemieszczeń po współrzędnych kartezjańskich z wektorem przemieszczeń węzłowych jak następuje

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{G}\mathbf{q}\ , \tag{3.12}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\delta} = \{u_{,x},\, u_{,y},\, u_{,z},\, v_{,x},\, v_{,y},\, v_{,z},\, w_{,x},\, w_{,y},\, w_{,z}\}\ . \tag{3.13}$$

Współczynniki macierzy $\mathbf{G}$ otrzymamy dokonując różniczkowania macierzy funkcji kształtu $\mathbf{N}$. Postępując jak w punkcie poprzednim otrzymamy macierz sztywności geometrycznej

$$\mathbf{k}_\sigma = \int_{V_e} \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} \mathbf{s} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s} \end{bmatrix} \mathbf{G} dV\ . \tag{3.14}$$

Składowe stanu naprężenia związane są z wektorem odkształceń macierzą sprężystości **D**, która dla materiału izotropowego przyjmuje postać

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

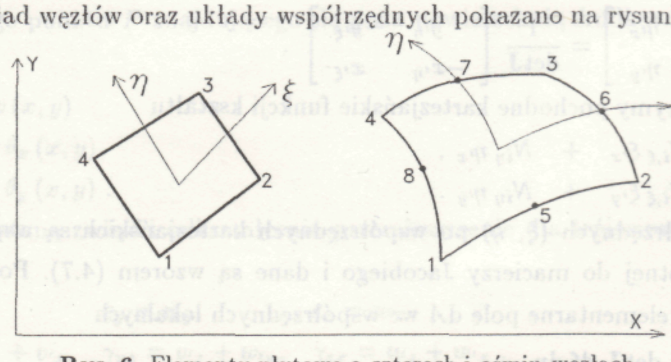
W systemie FEAS dla trójosiowego stanu naprężenia dostępne są następujące macierze elementowe:

macierz sztywności – liniowa,
macierz sztywności – geometryczna,
macierz mas – konsekwentna,
macierz mas – diagonalna.

Podobnie jak dla PSN i PSO można rozpatrywać obciążenia spowodowane odkształceniami i naprężeniami początkowymi, ciężarem własnym elementu i przyrostem temperatury.

4. Płyta Mindlina, elementy czworokątne

W systemie FEAS implementowane zostały cztero- i ośmiowęzłowe elementy izoparametryczne modelujące zachowanie płyt o średniej grubości Mindlina [6,9,10]. W każdym węźle elementu występują trzy składowe przemieszczeń. Stan odkształcenia opisują trzy składowe związane ze zginaniem oraz dwie ze ścinaniem. Stan naprężenia określony jest dwiema składowymi naprężeń normalnych oraz trzema stycznych. Siły wewnętrzne są określone poprzez dwa momenty zginające, jeden skręcający oraz dwie siły poprzeczne. Elementy, układ węzłów oraz układy współrzędnych pokazano na rysunku 6.



Rys. 6. Elementy płytowe o czterech i ośmiu węzłach.

Współrzędne kartezjańskie wewnątrz elementu są zdefiniowane następująco

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{N}\,\mathbf{c}^e \,, \tag{4.1}$$

gdzie

$$\mathbf{c}^e = \mathrm{col}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\} \qquad n = 4 \quad \text{lub } 8 \tag{4.2}$$

oraz

$$\mathbf{c}_i = \mathrm{col}\{x_i, y_i\} \qquad i = 1, n \tag{4.3}$$

lub też

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} N_i x_i, \\ & \qquad\qquad i = 1, n; \ n = 4 \text{ lub } 8 \\ y &= \sum_{i=1}^{n} N_i y_i, \end{aligned} \tag{4.4}$$

Liczba współrzędnych zależy od liczby węzłów w elemencie, w tym przypadku 4 lub 8.

Macierz funkcji kształtu ma postać

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0, & \cdots, & N_n & 0 \\ 0 & N_1, & \cdots, & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad i = 1, n; \quad n = 4 \text{ lub } 8\,. \tag{4.5}$$

Funkcje kształtu występujące we wzorze (4.5) są funkcjami Serendipa. Dla elementu o czterech węzłach są to funkcje liniowe, a dla elementu o ośmiu węzłach są one funkcjami drugiego stopnia. W celu obliczenia pochodnych kartezjańskich funkcji kształtu konieczne jest obliczenie jakobianu przekształcenia współrzędnych kartezjańskich układu globalnego do współrzędnych układu lokalnego. Jakobian przekształcenia ma postać

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} N_{i,\xi} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} N_{i,\xi} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} N_{i,\eta} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} \quad n = 4 \text{ lub } 8\,. \tag{4.6}$$

Współczynniki macierzy odwrotnej do danej wzorem (4.6) są pochodnymi współrzędnych lokalnych w układzie kartezjańskim i mają następującą postać

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

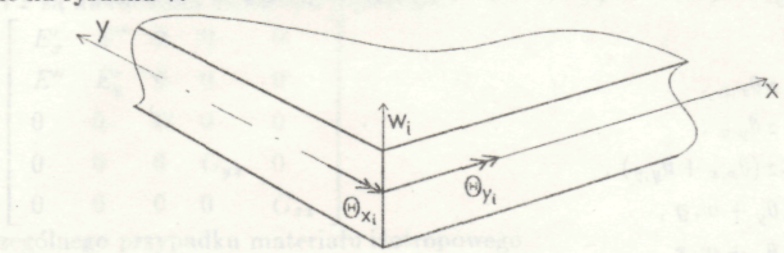
Następnie obliczymy pochodne kartezjańskie funkcji kształtu

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= N_{i,\xi}\,\xi_{,x} + N_{i\eta}\,\eta_{,x}\,, \\ N_{i,y} &= N_{i,\xi}\,\xi_{,y} + N_{i\eta}\,\eta_{,y}\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Pochodne współrzędnych $(\xi,\ \eta)$ po współrzędnych kartezjańskich są współczynnikami macierzy odwrotnej do macierzy Jacobiego i dane są wzorem (4.7). Podany zostanie jeszcze wzór na elementarne pole $\mathrm{d}A$ we współrzędnych lokalnych

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \det\mathbf{J}\ \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{4.9}$$

Stan przemieszczenia w płycie określają jednoznacznie przemieszczenia normalne do powierzchni środkowej płyty w oraz dwa kąty obrotu przekroju wokół osi x i y i przedstawione na rysunku 7.

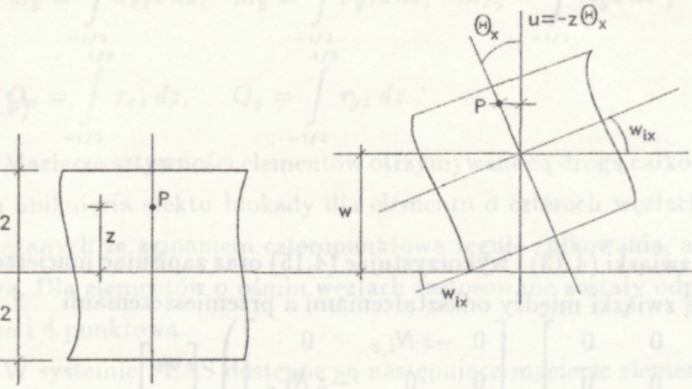


Rys. 7. Kąty obrotu w punkcie leżącym na płaszczyźnie środkowej płyty.

W skład wektora przemieszczeń dla każdego węzła wejdą trzy ich składowe

$$\mathbf{q}_e^i = \mathrm{col}\,\{w_i,\, \theta_{xi},\, \theta_{yi}\}\ . \tag{4.10}$$

Określone zostanie położenie po odkształceniu dowolnego punktu P odległego o z od powierzchni środkowej płyty (rys. 8).



Rys. 8. Przemieszczenie punktu P leżącego poza płaszczyzną środkową płyty.

Biorąc pod uwagę rysunek 8 można określić przemieszczenia pionowe w i składową poziomą u. Rysunek dla przemieszczenia v jest analogiczny. Zatem wzory na przemieszczenia dowolnego punktu P znajdującego się poza powierzchnią środkową są następującej postaci

$$\begin{aligned} w &= w(x,y) \\ u &= z\,\theta_x\,(x,y) \\ v &= z\,\theta_y\,(x,y)\ . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Wypisane zostaną związki odkształcenie–przemieszczenie dla trójosiowego stanu naprężenia

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = u_{,x}\,, \qquad \varepsilon_y = v_{,y}\,, \qquad \varepsilon_z = w_{,z} \\ &\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}\,, \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y}\,, \quad \gamma_{zx} = u_{,z} + w_{,x}\ . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Zgodnie z założeniami teorii płyt pominiemy odkształcenia ε_z, natomiast rozważając w szczególności teorię płyt o średniej grubości Mindlina uwzględnione zostaną odkształcenia γ_{xz} i γ_{yz}. Łącząc związki (4.11) i (4.12) przy uwzględnieniu powyższych założeń otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= z\,\theta_{x,x} \,, \\
\varepsilon_y &= z\,\theta_{y,y} \,, \\
\gamma_{xy} &= z\,(\theta_{x,x} + \theta_{y,y}) \,, \\
\gamma_{yz} &= \theta_y + w,y \,, \\
\gamma_{zx} &= \theta_x + w,x \,.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Przyjęta zostanie następująca, zmodyfikowana notacja dla kątów obrotu

$$
\begin{aligned}
\theta_x &= -\psi_x \\
\theta_y &= -\psi_y \,.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Tak więc pole przemieszczeń wewnątrz elementu jest określone następującymi wzorami

$$
\begin{aligned}
w &= \sum_{i=1}^{n} N_i\, w_i \\
\theta_x &= -\sum_{i=1}^{n} N_i\, \psi_{xi} \\
\theta_y &= -\sum_{i=1}^{n} N_i\, \psi_{yi} \,.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Zatem biorąc pod uwagę związki (4.13) i wykorzystując (4.15) oraz zapisując macierzowo otrzymujemy następujące związki między odkształceniami a przemieszczeniami

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}
= \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & 0 & N_i \\ N_{i,x} & -N_i & 0 \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 0 & -z\,N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -z\,N_{i,y} \\ 0 & -z\,N_{i,y} & -z\,N_{i,x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)
\begin{bmatrix} w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \end{bmatrix} .
\tag{4.16}
$$

Pochodne kartezjańskie funkcji kształtu wyrażają się wzorami (4.8). Zatem związek między odkształceniami i przemieszczeniami przyjmie postać

$$
\varepsilon = \mathbf{B}\, \mathbf{q}^e \,.
\tag{4.17}
$$

Stan naprężenia określa 5 składowych wektora naprężenia

$$
\sigma = \{\sigma_x,\, \sigma_y,\, \tau_{xy},\, \tau_{yz},\, \tau_{zx}\} \,.
\tag{4.18}
$$

Związek między wektorami naprężeń i odkształceń ma postać

$$
\sigma = \mathbf{E}\,(\varepsilon - \varepsilon_o) + \sigma_o
\tag{4.19}
$$

gdzie ε_o i σ_o są odpowiednio wektorami odkształceń i naprężeń wstępnych, a **E** jest macierzą sprężystości, która to zostanie podana dla materiału ortotropowego przy założeniu, że x, y i z są kierunkami ortotropii materiału

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E'_x & E'' & 0 & 0 & 0 \\ E'' & E'_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Dla szczególnego przypadku materiału izotropowego

$$E'_x = E'_y = \frac{E''}{\nu} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{4.21}$$

W przypadku jeśli osie x i y nie są osiami ortotropii materiału należy dokonać odpowiedniej transformacji macierzy **E** i wektorów naprężeń i odkształceń.

Siły wewnętrzne dane są wzorami

$$\begin{gathered} M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} z \, dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yz} z \, dz, \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz, \\ Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \, dz, \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \, dz. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Macierze sztywności elementów otrzymywane są drogą całkowania numerycznego. Celem uniknięcia efektu blokady dla elementu o czterech węzłach stosuje się dla członów związanych ze zginaniem *czteropunktową* regułę całkowania, a dla ścinania *jednopunktową*. Dla elementów o ośmiu węzłach zastosowane zostały odpowiednio reguły 9 punktowa i 4 punktowa.

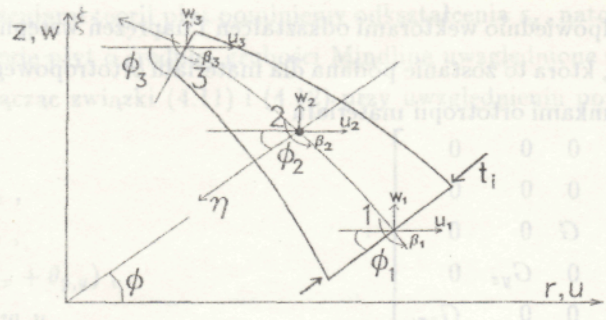
W systemie FEAS dostępne są następujące macierze elementowe:

macierz sztywności – liniowa,
macierz mas – konsekwentna,
macierz mas – diagonalna.

Możliwe jest rozważanie obciążeń wywołanych odkształceniami i naprężeniami początkowymi, ciężarem własnym oraz przyrostem temperatury.

5. Powłoka osiowo–symetryczna, element o trzech węzłach

Opisany zostanie element umożliwiający obliczanie konstrukcji powłokowych osiowo symetrycznych [5,6]. Jest to element zdegenerowany, izoparametryczny o trzech węzłach. W każdym węźle elementu występują dwie translacyjne składowe przemieszczeń i jedna obrotowa. Grubość elementu może zmieniać się według funkcji parabolicznych. Stan naprężenia określają jego trzy składowe. Element ten został przedstawiony na rysunku 9.



Rys. 9. Trójwęzłowe elementy powłoki osiowo symetrycznej.

W skład wektora przemieszczeń węzłowych $\mathbf{q}^e$ wchodzą przemieszczenia i obroty trzech węzłów. Wektor przemieszczeń każdego węzła i składa się z dwóch przemieszczeń i jednego kąta obrotu. W skład wektora współrzędnych globalnych $\mathbf{c}^e$ wchodzą, dla każdego węzła (i), po dwie współrzędne r i z. Zatem kształt elementu można określić następująco

$$\begin{bmatrix} r \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} N_i \begin{bmatrix} r_i \\ z_i \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{3} N_i\, \eta \left(\frac{t_i}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos\phi_i \\ \sin\phi_i \end{bmatrix} \quad i = 1,2,3\,, \tag{5.1}$$

gdzie N_i są następującymi parabolicznymi funkcjami kształtu

$$N_i = -(1-\xi)\xi/2; \quad N_2 = (1-\xi^2)\,; \quad N_3 = (1+\xi)\xi/2\,. \tag{5.2}$$

Przemieszczenia (u, w) dowolnego punktu wewnątrz elementu zostaną określone według wzorów

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} N_i \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{3} N_i\, \eta \left(\frac{t_i}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos\phi_i \\ -\sin\phi_i \end{bmatrix} \beta_i \tag{5.3}$$

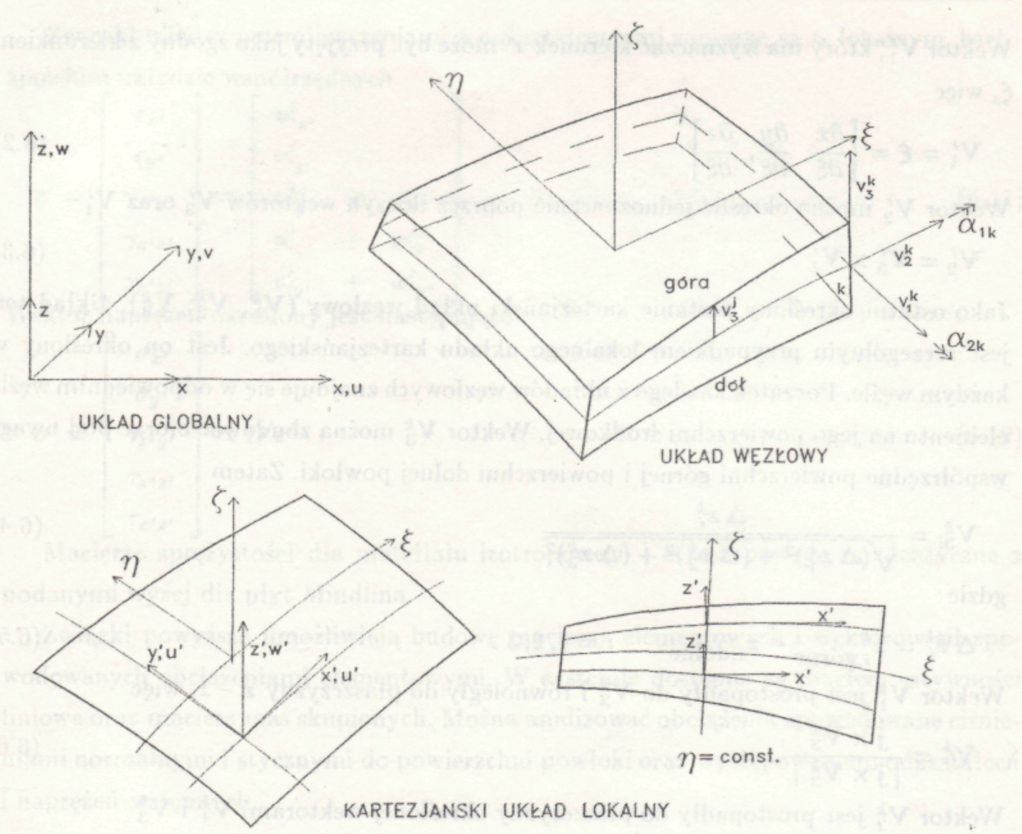
Macierze elementowe otrzymywane są drogą całkowania numerycznego. Użyta została trzypunktowa reguła całkowania wzdłuż śladu powierzchni środkowej elementu oraz dwa punkty dla całkowania po grubości elementu.

Dostępne są macierz sztywności liniowa oraz macierze mas konsekwentna i mas skupionych. Można rozważać obciążenia ciśnieniem normalnym i stycznym oraz obciążenia spowodowane odkształceniami i naprężeniami wstępnymi.

6. Powłoka dowolnego kształtu, elementy o 8 węzłach

W systemie FEAS została dokonana implementacja elementu powłokowego izoparametrycznego o 8 węzłach [5,6,8,9,11]. W węzłach elementu występuje po pięć niewiadomych przemieszczeń. Są to trzy składowe translacyjne i dwa kąty obrotu. Stan odkształcenia opisuje pięć składowych wektora odkształcenia.

Celem jednoznacznego zdefiniowania geometrii i pola przemieszczeń wewnątrz elementu przyjęte zostały cztery układy współrzędnych wg rysunku 10.



Rys. 10. Układy współrzędnych zdefiniowane w elemencie powłokowym.

Pierwszym układem jest globalny układ kartezjański (x_i), który używany jest do definiowania współrzędnych węzłów i ich przemieszczeń. Drugim układem współrzędnych jest lokalny układ współrzędnych bezwymiarowych (ξ, η, ζ). Układ ten definiuje powierzchnię środkową elementu (poprzez współrzędne ξ, η), oraz jego powierzchnie zewnętrzne (współrzędna ζ). Oś ζ jest w przybliżeniu normalna do powierzchni środkowej elementu. Lokalny układ kartezjański (x_i') służy do określania naprężeń i odkształceń w dowolnym punkcie wewnątrz elementu. W dowolnym punkcie elementu oś z' jest normalna do powierzchni określonej w układzie krzywoliniowym ζ = const. Wektor $\mathbf{V}_3'$ jest obliczany jako iloczyn wektorowy wektorów stycznych do kierunków osi ξ, η. Zatem wektor ten zostanie określony następująco

$$\mathbf{V}_3' = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} . \tag{6.1}$$

Wektor $\mathbf{V}'_1$, który ma wyznaczać kierunek x' może być przyjęty jako zgodny z kierunkiem ξ, więc

$$\mathbf{V}'_1 = \xi = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}\right]^{\mathrm{T}} . \tag{6.2}$$

Wektor $\mathbf{V}'_2$ można określić jednoznacznie poprzez iloczyn wektorów $\mathbf{V}'_3$ oraz $\mathbf{V}'_1$

$$\mathbf{V}'_2 = \mathbf{V}'_3 \times \mathbf{V}'_1 . \tag{6.3}$$

Jako ostatni określony zostanie kartezjański układ węzłowy ($\mathbf{V}^k_1$, $\mathbf{V}^k_2$, $\mathbf{V}^k_3$). Układ ten jest szczególnym przypadkiem lokalnego układu kartezjańskiego. Jest on określony w każdym węźle. Początek każdego z układów węzłowych znajduje się w odpowiednim węźle elementu na jego powierzchni środkowej. Wektor $\mathbf{V}^k_3$ można zbudować biorąc pod uwagę współrzędne powierzchni górnej i powierzchni dolnej powłoki. Zatem

$$\mathbf{V}^k_{3i} = \frac{\Delta\, x^k_i}{\sqrt{(\Delta\, x^k_1)^2 + (\Delta\, x^k_2)^2 + (\Delta\, x^k_3)^2}} \tag{6.4}$$

gdzie

$$\Delta\, x^k_i = x^k_{i,\text{górne}} - x_{i,\text{dolne}} \qquad i = 1, 2, 3 . \tag{6.5}$$

Wektor $\mathbf{V}^k_1$ jest prostopadły do $\mathbf{V}^k_3$ i równoległy do płaszczyzny $x - z$, więc

$$\mathbf{V}^k_1 = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{V}^k_3}{|\, \mathbf{j} \times \mathbf{V}^k_3 \,|} . \tag{6.6}$$

Wektor $\mathbf{V}^k_2$ jest prostopadły do płaszczyzny określonej wektorami $\mathbf{V}^k_1$ i $\mathbf{V}^k_3$

$$\mathbf{V}^k_2 = \frac{\mathbf{V}^k_3 \times \mathbf{V}^k_1}{|\, \mathbf{V}^k_3 \times \mathbf{V}^k_1 \,|} . \tag{6.7}$$

Wektory $\mathbf{V}^k_1$ i $\mathbf{V}^k_2$ definiują obroty α^k_2 i α^k_1. Geometrię elementu określają jednoznacznie jego grubość oraz współrzędne węzłów, co zostanie kolejno zapisane

$$x^k_i = x^k_i + \frac{\zeta}{2}\, h\, V^k_{3i} \qquad i = 1, 2, 3 , \tag{6.8}$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} N^k(\xi, \eta)\, x^k_i = \sum_{k=1}^{n} N^k(\xi, \eta)\, x^k_i + \frac{\zeta}{2}\, N^k(\xi, \eta)\, h^k V^k_{3i} , \tag{6.9}$$

gdzie h^k grubością elementu w węźle.

Pole przemieszczeń wewnątrz elementu określają wzory

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{k=1}^{n} N^k(\xi, \eta)\, u^k_i = \\ &= \sum_{k=1}^{n} N^k(\xi, \eta)\, u^k_{oi} + \tfrac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^{n} N^k(\xi, \eta)\, h^k \; (V^k_{1i}\, \alpha^k_1 - V^k_{2i}\, \alpha^k_2) \;, \end{aligned} \tag{6.10}$$

gdzie u^k_i są przemieszczeniami k-tego punktu w globalnych współrzędnych kartezjańskich a α^k_1 i α^k_2 są obrotami wokół V^k_2 i V^k_1.

Związki między przemieszczeniami a odkształceniami zapisane są w lokalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_{x'} \\ \nu'_{y'} \\ u'_{y'} + \nu'_{x'} \\ u'_{z'} + w'_{x'} \\ \nu'_{y'} + w'_{y'} \end{bmatrix}. \tag{6.11}$$

Wektor naprężeń określony jest następująco

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'z'} \end{bmatrix} = \mathrm{D}'\varepsilon'. \tag{6.12}$$

Macierze sprężystości dla materiału izotropowego i ortrotopowego są identyczne z podanymi wyżej dla płyt Mindlina.

Związki powyższe umożliwiają budowę macierzy elementowych i wektorów sił spowodowanych obciążeniami elementowymi. W systemie dostępne są macierz sztywności liniowa oraz macierz mas skupionych. Można analizować obciążenia spowodowane ciśnieniami normalnymi i stycznymi do powierzchni powłoki oraz występowaniem odkształceń i naprężeń wstępnych.

7. Zakończenie

Bibliotekę elementów skończonych opartą o paraboliczne funkcje kształtu opracowano z dwóch powodów. Po pierwsze elementy znajdujące się w tej bibliotece dają rozwiązanie szybciej zbieżne (z wyjątkiem prętów), a po drugie izoparametryczne elementy skończone idealnie nadają się do analizy fizycznie i geometrycznie nieliniowej. Stosowanie elementów z tej biblioteki wymaga jednak pewnej wiedzy i doświadczenia. Zalecana jest ona zatem do stosowania przez doświadczonych użytkowników systemów MES.

Porównanie kodów źródłowych obu bibliotek daje niezwykle istotny wniosek: biblioteka, w której zastosowano numeryczne procedury otrzymywania związków jest znacznie krótsza i bardziej przejrzysta. Izoparametryczne ujęcie metody elementów skończonych jest numerycznie efektywne [3].

Literatura

[1] Z.Kacprzyk; *FEAS – system analizy konstrukcji metodą elementów skończonych*; Metody Komputerowe w Inżynierii Lądowej, tom 1, nr 1–2, s. 51–65, 1991

[2] A.Gomuliński, Z.Kacprzyk: *System analizy konstrukcji FEAS w praktyce inżynierskiej i kształceniu*; Inżynieria i Budownictwo, nr 12/92, s. 435–459

[3] Z.Kacprzyk, M.Maj, T.Sokół: *Przegląd elementów skończonych systemu FEAS 1.0*; Metody Komputerowe w Inżynierii Lądowej, tom 2, nr 1–2, s. 65–80, 1992

[4] Z.Kacprzyk, J.Orysiak: *Generacja siatki trójkątnej w obszarze dwuwymiarowym*; Metody Komputerowe w Inżynierii Lądowej, tom 2, nr 1–2, s. 81–96, 1992

[5] O.C.Zienkiewicz: *Metoda Elementów Skończonych*, Arkady, 1972

[6] R.D.Cook, D.S.Malkus, M.E.Plesha: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*; John Wiley & Sons, 1989.

[7] M.Kleiber, P.Breitkopf: *Finite Elements in Structural Mechanics*; PWN – Ellis Horwood, 1993 (w druku).

[8] K.J.Bathe: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*; Prentice – Hall, 1982.

[9] E.Hinton, D.R.J.Owen: *Finite Element Software for Plates and Shells*; Pineridge Press, 1984.

[10] E.Hinton, D.R.J.Owen: *Finite Element in Plasticity. Theory and Practice*, Pineridge Press, 1980.

[11] H.C.Huang: *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells*; Springer – Verlag, 1989.