

**METODA ZWIĘKSZAJĄCA DOKŁADNOŚĆ DYSKRETNEJ
TRANSFORMATY HILBERTA PRZY WYZNACZANIU AMPLITUDY
I CZĘSTOTLIWOŚCI SYGNAŁÓW WIBROAKUSTYCZNYCH**

Transformata Hilberta odgrywa ważną rolę w analizie sygnałów, ponieważ umożliwia wyznaczanie amplitudy i częstotliwości sygnałów wibroakustycznych. Dla czasu ciągłego transformata Hilberta H funkcji rzeczywistej $x(t)$ zdefiniowana jest następująco [3]

$$H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (1)$$

gdzie całkę należy traktować jako jej wartość główną w sensie Cauchy'ego z uwagi na osobliwość dla $t = \tau$. W praktyce sygnały przekształcane za pomocą transformaty Hilberta mają skończoną długość i są próbkowane, zatem odpowiednikiem sygnału ciągłego $x(t)$ jest sygnał dyskretny $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, N$ określony w przedziale $[0, T]$, $T = NT_s$, gdzie T_s to okres próbkowania. W dziedzinie czasu dyskretnego transformata H zostaje zastąpiona przez dyskretną transformatę Hilberta H_d , która dla sygnałów nieperiodycznych ma postać [2]

$$H_d\{x[n]\} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sum_{m=\text{nieparz}} \frac{x[m]}{m-n}, & n \text{ parzyste,} \\ \frac{2}{\pi} \sum_{m=\text{parz}} \frac{x[m]}{m-n}, & n \text{ nieparzyste.} \end{cases} \quad (2)$$

Dla danego sygnału dyskretnego $x[n]$ i jego transformaty Hilberta $H_d\{x[n]\}$ można wyznaczyć tzw. sygnał analityczny $z[n]$ zdefiniowany w następujący sposób

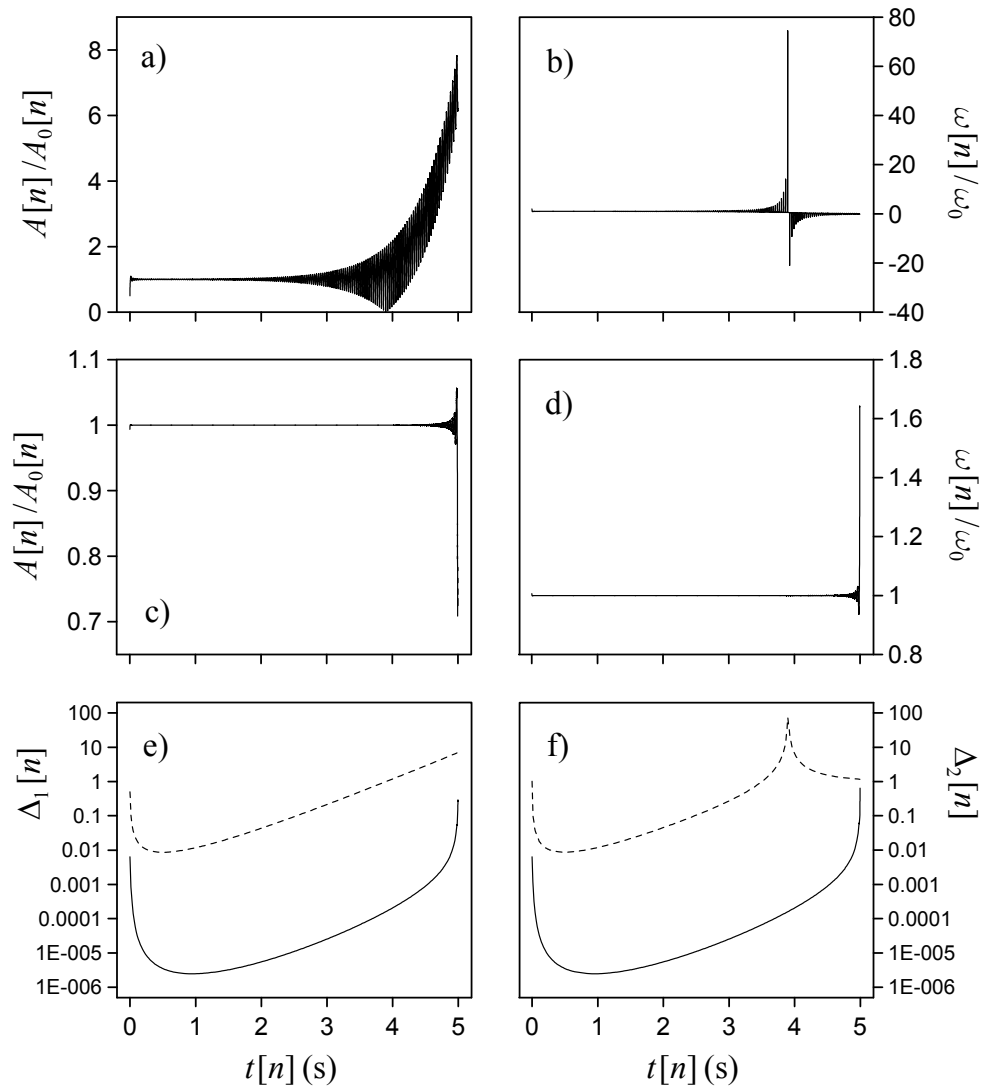
$$z[n] = x[n] + jH_d\{x[n]\} = A[n] \exp\{j\phi[n]\}, \quad (3)$$

$$A[n] = \sqrt{x^2[n] + H_d^2\{x[n]\}}, \quad (4)$$

$$\phi[n] = \tan^{-1} \left(\frac{H_d\{x[n]\}}{x[n]} \right), \quad (5)$$

gdzie $A[n]$ i $\phi[n]$ to chwilowa amplituda i faza sygnału dyskretnego $x[n]$. W dziedzinie czasu dyskretnego, chwilowa częstotliwość sygnału $\omega[n]$ jest pochodną fazy $\phi[n]$ względem n , zatem oznaczając tą pochodną za pomocą znaku prim uzyskamy

$$\omega[n] = \phi'[n] = \frac{x[n]H'_d\{x[n]\} - x'[n]H_d\{x[n]\}}{A^2[n]}. \quad (6)$$



Rys. 1. Wyniki obliczeń amplitudy $A[n]$ i częstotliwości $\omega[n]$ dla współczynnika tłumienia $\eta = 0.01$: (a,c) stosunek $A[n]/A_0[n]$ i (b,d) stosunek $\omega[n]/\omega_0$ dla sygnałów $s[n]$ i $s_e[n]$, (e,f) błędy względne $\Delta_1[n]$ i $\Delta_2[n]$ dla sygnału $s[n]$ (linie przerywane) i sygnału $s_e[n]$ (linie ciągłe).

Metodologia wykorzystująca dyskretną transformatę Hilberta jest użyteczna do analizy różnych typów sygnałów, w szczególności do tych, które mają postać sygnałów zmodulowanych tzn. dających się przedstawić za pomocą iloczynu dwóch sygnałów $x_1[n]$ i $x_2[n]$. Prosty sposób na wyznaczenie transformaty Hilberta dla takiego iloczynu znalazł Bedrosian [1]. Dotyczy on jednak tylko takich sygnałów, których widma nie zachodzą na siebie. Jeżeli bowiem pasmo sygnału $x_1[n]$ jest niższe niż pasmo sygnału $x_2[n]$ to słuszny jest związek

$$H_d\{x_1[n]x_2[n]\} = x_1[n]H_d\{x_2[n]\}, \quad (7)$$

zatem aby wyznaczyć transformatę Hilberta z iloczynu sygnałów o rozłącznych widmach wystarczy obliczyć transformatę sygnału charakteryzującego się wyższym pasmem. W literaturze przedmiotu tak sformułowana zasada nosi nazwę twierdzenia Bedrosiana.

Niepożądane drgania o podłożu rezonansowym pojawiają się w strukturach i obiektach mechanicznych jako efekt działania sił wymuszających o charakterze impulsowym lub oscylacyjnym. Drgania swobodne, a więc tłumione oscylacje rezonansowe występują wtedy, gdy wymuszenie ma charakter impulsowy. Dla najprostszego mechanicznego układu rezonansowego złożonego z masy, sprężyny i tłumika zmiany wychylenia odpowiadające drganiom swobodnym opisuje zależność [4]

$$x(t) = \exp(-\eta\Omega_0 t) \left[\frac{x'(0) + \eta\Omega_0 x(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x(0) \cos(\omega_0 t) \right], \quad (8)$$

gdzie η to współczynnik tłumienia, Ω_0 to częstotliwość rezonansowa, $\omega_0 = \Omega_0(1 - \eta^2)^{1/2}$ oraz $x(0)$ i $x'(0)$ to warunki początkowe. Dokładność dyskretnej transformaty Hilberta przy wyznaczaniu amplitudy i częstotliwości drgań tłumionych została przeanalizowana dla przypadku, gdy wychylenie początkowe $x(0)$ jest równe zero. Oznacza to, że testowy sygnał dyskretny będzie miał postać

$$s[n] = A_0[n] \sin(\omega_0 t[n]), \quad (9)$$

gdzie $A_0[n] = \exp(-\eta\Omega_0 t[n])$ to amplituda sygnału, $t[n] = nT_s$, $n = 0, 1, \dots, N$ to czas dyskretny. Błędy przy wyznaczaniu transformaty Hilberta sygnału $s[n]$ wynikają z dwóch powodów. Pierwszą przyczyną jest skończona długość i dyskretny charakter sygnału. Drugim źródłem błędów jest to, że dla sygnału $s[n]$ nie jest spełniona równość Bedrosiana (7), ponieważ funkcja wykładnicza ma nieograniczone widmo. Z formuły (4) wynika zaś, że równość $A[n] = A_0[n]$ zachodzi tylko w przypadku, gdy $H_d\{s[n]\} = \pm A_0[n] \cos(\omega_0 t[n])$, czyli gdy spełnione jest równanie (7). Metoda zastosowana do kompensacji błędów przy obliczaniu amplitudy $A_0[n]$ i częstotliwości ω_0 polega na zastąpieniu sygnału $s[n]$ przez sygnał $s_e[n]$ rozszerzony na ujemną oś czasu

$$s_e[n] = \exp(-\eta\Omega_0 |t[n]|) \sin(\omega_0 t[n]), \quad (10)$$

gdzie $t[n] = (n - N)T_s$, $n = 0, 1, \dots, 2N$ oraz $|\cdot|$ to wartość bezwzględna. Testy numeryczne przeprowadzono dla oscylacji o częstotliwości Ω_0 równej 200 rad/s, okresu próbkowania $T_s = 2.5 \times 10^{-4}$ s i współczynnika tłumienia η o wartościach 5×10^{-4} i 0.01, odpowiednio

dla małego i dużego tłumienia oscylacji. Danymi uzyskiwanymi z obliczeń były wielkości $A[n]$ i $\omega[n]$ będące oszacowaniami amplitudy $A_0[n]$ i częstotliwości ω_0 . Jak wynika z rys. 1, dla drgań silnie tłumionych klasyczna metodologia wykorzystująca transformatę Hilberta całkowicie zawodzi, ponieważ oscylacje generowane przez metodę są na tyle duże, że powodują znaczną deformację amplitudy oraz fikcyjne skoki częstotliwości (rys. 1a,b). Błędy te zostają bardzo skutecznie zredukowane po zastosowaniu zaproponowanej modyfikacji sygnału dyskretnego $s[n]$ (rys. 1c,d, 1e,f).

LITERATURA

- [1] BEDROSIAN E., *A product theorem for Hilbert transform*, Proceedings of the IEEE, 51, 5, 1963, 868–869.
- [2] KAK S., *The discrete Hilbert transform*, Proceedings of the IEEE, 58, 4, 1970, 585–586.
- [3] HAHN S., *The Hilbert transforms in signal processing*, Artech House, Boston, 1996.
- [4] THOMSON W., *Theory of vibration with applications*, 4th Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1993.