

XIII KONFERENCJA
Naukowo - Szkoleniowa
MECHANIKI PĘKANIA
Opole, 5-7.IX.2011

Krzysztof MRÓZ, Zenon MRÓZ, Krzysztof DOLIŃSKI
IPPT PAN, Warszawa, ul. Pawińskiego 5b, kmroz@ippt.giv.pl

KRYTERIUM ENERGETYCZNE WZROSTU SZCZELINY WZDŁUŻ KRZYWOLINIOWEJ TRAJEKTORII

Streszczenie:

W pracy rozważono możliwość odchylenia się szczeliny dla przypadku gdy $K_I > 0, K_{II} = 0$ w dwuosowym stanie obciążenia. Do analizy wykorzystano dwa kryteria liniowej sprężystej mechaniki pękania (LSMP) uwzględniając efekt naprężenia T : klasyczne kryterium maksymalnych naprężeń obwodowych (MNO) oraz energetyczne kryterium MK [7,8,9]. Przedstawiono porównanie obu kryteriów w odniesieniu do niestabilnego kierunku propagacji szczeliny, definiowanego w pracy jako odchylenie się ścieżki propagacji od płaszczyzny początkowej lokalizacji szczeliny. Przedstawiono również porównanie przypadków granicznych z wykorzystaniem modeli wzrostu początkowej szczeliny.

I. POLE NAPRĘŻENIA PRZED WIERZCHOŁKIEM SZCZELINY

Klasyczne kryteria liniowej sprężystej mechaniki pękania oparte są na wyrażeniach opisujących pole naprężenia przed wierzchołkiem szczeliny z uwzględnieniem pierwszego osobliwego członu rozwinięcia szeregu Williamsa. Jednak takie ograniczenie może doprowadzić do uzyskania niepoprawnych rezultatów. Jeśli przypomnimy historię rozwoju mechaniki pękania, to pierwszą pracą, która traktowała o koncentracji naprężenia była praca Inglisa z roku 1913 [1]. Dotyczyła ona koncentracji naprężenia wokół otworu eliptycznego. Następnie Griffith w roku 1921 i 1924, [2], [3] użył tego rozwiązania jako rozwiązania bazowego dla rozwoju swojej koncepcji energetycznego wzrostu szczeliny. Następnym milowym krokiem w rozwoju mechaniki pękania były prace Irwina w latach 1957-1960, [6], [4], [5]. Dostrzegł on uniwersalność wyrażen opisujących asymptotyczne rozkłady pól naprężenia i odkształcenia w okolicy wierzchołka szczeliny

przedstawionych w analizie równań Williamsa [37]. Opierał się również na równaniach Westergaarda określających osobliwe pole naprężenia. Jednak pierwszą osobą, która dostrzegła istniejącą nieścisłość w tych wyrażeniach był Sih w roku 1966, [7]. Zwrócił on uwagę na pomijanie kolejnego członu asymptotycznego przedstawienia pola naprężenia w postaci szeregu. Człon ten w literaturze anglojęzycznej występuje jako "T-stress", czyli naprężenie T . Później Eftis i Liebowitz w 1972, [8] wykazali, że stałego członu rozwiązania brakuje z powodu przeoczenia dokonanego przez MacGregora w roku 1935, [9], z której to pracy korzystał Westergaard, a później Irwin. Pominięcie tego członu niezależnego od odległości od wierzchołka szczeliny może być źródłem błędów, a w przypadku dwu-osioowego obciążenia, "rozwiązanie osobliwe" jest wyraźnie niewystarczające. Fakt ten był pokazany m.in. w cyklu prac Eftisa et al. [10], [11], [12], gdzie wykazano konieczność uwzględnienia dwóch członów: pierwszego osobliwego i drugiego, stałego. Wyrażenia opisujące pole naprężenia dla geometrii z Rys. 1 można wyrazić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} B_1 - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} B_2 + T \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} A_1 + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} A_2 \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} C_1 + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} C_2\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie

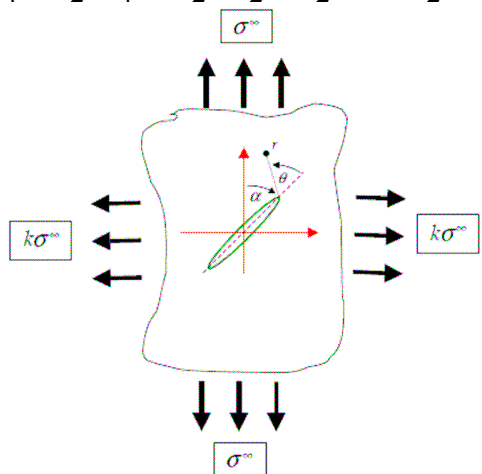
$$\begin{aligned}A_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), & A_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ B_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), & B_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right), \\ C_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, & C_2 &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ T &= \sigma(1-k) \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

W szczególnym przypadku, gdy szczelina rozciągana jest w sposób I, por. Rys. 1, mamy $\alpha = \pi/2$ i $T = -\sigma(1-k)$. We współrzędnych biegunowych (r, θ) pole naprężenia określone jest następująco

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &\cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \bar{A}_1 + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \bar{A}_2 + T \cos^2 \theta, \\ \sigma_{\theta\theta} &\cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \bar{B}_1 + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \bar{B}_2 + T \sin^2 \theta, \\ \sigma_{r\theta} &\cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \bar{C}_1 + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \bar{C}_2 - T \cos \theta \sin \theta.\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= \frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ \bar{A}_2 &= -\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} = \frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2}, \\ \bar{B}_1 &= \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} = \cos^3 \frac{\theta}{2}, \\ \bar{B}_2 &= -\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} = -\frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \\ \bar{C}_1 &= \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \\ \bar{C}_2 &= \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} = \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$



Rys. 1. Dwu-osiowe obciążenie szczeliny.

II. STAN NAPRĘŻENIA WPLYWAJĄCY NA KRZYWOLINIOWY WZROST SZCELINY.

W literaturze istnieje szereg kryteriów określających warunki i kierunek propagacji szczeliny zarówno dla obciążenia monotonicznego, jak i

cyklicznego. Jednak istnieje stosunkowo niewielka liczba prac analizujących wpływ dalszych członów rozwinięcia Williamsa (np. [29, 30]), szczególnie dla przypadku dominującego pierwszego sposobu obciążenia, gdzie na naprężenie rozwierające szczelinę (σ_{yy}) nie ma wpływu naprężenie T (Równanie 1). Wówczas próbuje się uwzględnić w obliczeniach dalsze człony w wyrażeniach na pole naprężenia, jak na przykład w pracy Chao et al. [22]. Jednak jednym z pierwszych, który wziął pod uwagę wpływ składowej T był Cotterell w pracach [14], [15], [16]. Zauważył on, że chociaż w przypadku szczeliny będącej pod wpływem obciążenia prostopadłego do powierzchni szczeliny kąt propagacji dla materiału jednorodnego jest zgodny z orientacją szczeliny ($\theta_{pr} = 0$), to w przypadku rzeczywistego materiału może nastąpić pewne małe odchylenie kierunku propagacji ($\theta_{pr} = d\theta$) z powodu obecności przed wierzchołkiem szczeliny pewnej niejednorodności materiału. Następnie podzielił on zachowanie szczeliny w tej fazie na dwie klasy: I – gdy szczelina powróci z powrotem do swojego oryginalnego kierunku wzrostu, oraz II – gdy kierunek ten nie zostanie osiągnięty. Co ciekawe, zachowanie to zostało związane z wielkością stałego członu T . Tak więc, gdy $T > 0$, ścieżka szczeliny będzie odchyłać się od jej idealnego usytuowania, natomiast gdy $T < 0$ to zaburzenie struktury materiału ma charakter lokalny i kierunek lokalizacji ścieżki wzrostu szczeliny powróci do swojej idealnej orientacji. A więc, dla I sposobu obciążenia, wzrost szczeliny jest stabilny dla $T < 0$ i niestabilny dla $T > 0$. Larsson i Carlsson [17], pokazali, że człon ten ma również znaczny wpływ przy wyznaczaniu kształtu i wielkości strefy plastycznej, która rozwija się przed wierzchołkiem szczeliny. Cotterell zauważył również, że odchylenie propagacji szczeliny nie następuje natychmiast po osiągnięciu wartości $T > 0$. Podobne wyniki zostały uzyskane w pracach [18-20]. W wyniku tego Goree et al. [20-21] zaproponował i eksperymentalnie zweryfikował, iż omawiane odchylenie podczas propagacji szczeliny zachodzi, gdy wartość T osiągnie wartość krytyczną T_C . Wartość ta jest zależna od rodzaju materiału, i tak dla PMMA wynosi ona 3.4 MPa ($K_{IC}=1.16 \text{ MPa m}^{0.5}$), natomiast dla materiału znacznie bardziej ciągliwego Al 2024 jest to 88 MPa ($K_{IC}=30 \text{ MPa m}^{0.5}$). Co ciekawe w obu przypadkach zachodzi relacja $T_C/ K_{IC}=2,93 \text{ m}^{-0.5}$. Autorzy postulują używanie dwóch krytycznych wartości, a mianowicie współczynnika intensywności naprężeń (WIN) i naprężenia T jako parametrów charakteryzujących zachowanie się szczeliny. Pierwszy opisuje warunek kiedy szczelina zaczyna się propagować, natomiast drugi opisuje dalsze zachowanie się szczeliny. Należy zaznaczyć, iż naprężenie T ma nie tylko wpływ na bardzo szczególne zachowanie się szczeliny (jak przedstawiono powyżej), ale ma duży wpływ na kierunek [18, 27, 28] oraz na prędkość wzrostu szczeliny w mieszanych warunkach obciążenia i w zasadzie powinno być zawsze uwzględniane w

obliczeniach. Jeden z pierwszych eksperymentów weryfikujących kryteria kruchego pęknięcia był przedstawiony w pracy Williamsa i Ewinga [27], w której autorzy powiązali największy rozrzut uzyskanych wyników z dodatnią wartością naprężenia T . Później w pracy Ueda et al. [31] potwierdzono podobny efekt wpływu naprężenia oddziaływującego równoległe do powierzchni szczeliny na kierunek propagacji i wytrzymałość na pęknięcie. Stosunkowo niedawno Smith et al. [32] wykazał również, że gdy $T < 0$ to umowna odporność na pęknięcie K_C (ang.: apparent fracture toughness) jest stała, natomiast dla $T > 0$ wartość K_C maleje. Wartość naprężenia T ma również wpływ na odporność na pęknięcie i kierunku propagacji dla przypadku ścinania, tzn. II sposobu obciążenia [33].

II.1. Kryterium maksymalnego naprężenia obwodowego (MNO).

W niniejszej pracy skupimy się głównie na analizie wpływu naprężenia T na wzrost szczeliny w I sposobie obciążenia. W literaturze dominują prace opisujące takie zachowanie szczeliny z wykorzystaniem najbardziej popularnego kryterium jakim jest kryterium maksymalnego naprężenia obwodowego (MNO) [13]. Jednak wprowadzenie stałego członu T wymaga również określenia odległości poza strefą uszkodzenia przed wierzchołkiem szczeliny, gdzie pole naprężenia będzie określone wzorami (2). Naprężenie obwodowe w odległości $r = r_c$ wyrażmy następująco

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_c}} \left(K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right) + T \sin^2 \theta = \sigma_c \quad (3)$$

Zaś kierunek wzrostu $\theta = \theta_{pr}$ określony jest maksymalnym naprężeniem obwodowym, dla $r = r_c$, mamy zatem

$$\left. \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_{pr}} = K_I \sin \theta_{pr} + K_{II} (3 \cos \theta_{pr} - 1) - \frac{16}{3} T \sqrt{2\pi r_c} \sin \frac{\theta_{pr}}{2} \cos \theta_{pr} = 0. \quad (4)$$

Równanie (3) jest warunkiem wzrostu pęknięcia, zaś równanie (4) oraz nierówność $\partial^2 \sigma_{\theta\theta} / \partial \theta^2 < 0$ określa kierunek wzrostu.

Dla I sposobu obciążenia, przy kącie wzrostu pęknięcia $\theta_{pr} = 0$ z (3) mamy

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r_c}} = \sigma_c, \quad \text{lub} \quad r_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (5)$$

To znaczy, że jedynie pole osobliwe określa wartość $K_I = K_{IC}$ lub r_c przy zadanych wartościach K_{IC} i σ_c . Wykorzystując (5), warunek wzrostu i kierunek pęknięcia wyrazimy w postaci

$$\frac{K_I}{K_{IC}} \cos^3 \frac{\theta_{pr}}{2} - \frac{3}{2} \frac{K_{II}}{K_{IC}} \sin \theta_{pr} \cos \frac{\theta_{pr}}{2} = 1 - \frac{T}{\sigma_C} \sin^2 \theta_{pr} \quad (6)$$

$$\frac{K_I}{K_{IC}} \sin \theta_{pr} + \frac{K_{II}}{K_{IC}} (3 \cos \theta_{pr} - 1) - \frac{16}{3} \frac{T}{\sigma_C} \sin \frac{\theta_{pr}}{2} \cos \theta_{pr} = 0 \quad (7)$$

Rozpatrzmy obecnie przypadek I sposobu obciążenia szczeliny. Przyjmując $K_{II} = 0$, z równań (6) i (7) otrzymamy

$$\frac{K_I}{K_{IC}} \cos^3 \frac{\theta_{pr}}{2} + \frac{T}{\sigma_C} \sin^2 \theta_{pr} = 1 \quad (8)$$

$$\frac{K_I}{K_{IC}} \sin \theta_{pr} \left(\cos \frac{\theta_{pr}}{2} - \frac{8}{3} \frac{T}{\sigma_C} \frac{K_{IC}}{K_I} \cos \theta_{pr} \right) = 0 \quad (9)$$

Oznaczmy

$$B\alpha = \frac{T}{\sigma_C} \frac{K_{IC}}{K_I}, \quad (10)$$

gdzie $B\alpha$ jest bezwymiarowym parametrem, który można określić przez wprowadzone przez Leevera oraz Radona [36] dwa parametry, B i α . Pierwszy określający dwuosiowość stanu naprężenia, drugi zaś charakterystyczny wymiar r_c przed wierzchołkiem pęknięcia

$$B = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I} \quad \text{i} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2r_c}{a}} \quad (11)$$

Z równania (9) wynika, że kierunek propagacji spełnia warunek

$$\sin \theta_{pr} = 0, \quad \text{lub} \quad \cos \frac{\theta_{pr}}{2} - \frac{8}{3} B\alpha \cos \theta_{pr} = 0 \quad (12)$$

Co prowadzi do dwóch wartości kąta propagacji, θ_{pr} , a mianowicie

$$\theta_{pr} = 0 \quad \text{dla} \quad B\alpha < 3/8 \quad (13)$$

$$\theta_{pr} = \pm 2 \cos^{-1} \left[\frac{3}{32B\alpha} + \sqrt{\left(\frac{3}{32B\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2}} \right] \quad \text{dla} \quad B\alpha > 3/8$$

Oznaczając wartość WIN K_I w stanie krytycznym przez K_C , z równań (8) otrzymamy

$$\frac{K_C}{K_{IC}} = \left(1 - \frac{T}{\sigma_C} \sin^2 \theta_{pr} \right) / \cos^3 \frac{\theta_{pr}}{2} \quad (14)$$

Zaś kąt θ_{pr} można wyrazić w postaci

$$\theta_{pr} = 0 \quad \text{lub} \quad \theta_{pr} = \pm \cos^{-1} \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1024\pi r_c \left(\frac{T_c}{K_c}\right)^2}{9}}}{\frac{512\pi}{9} r_c \left(\frac{T_c}{K_c}\right)^2} \right] \quad (15)$$

Z równań (8) i (9) możemy wyrugować K_c/K_{IC} i określić kąt propagacji bezpośrednio w zależności od T/σ_c

$$\frac{K_c}{K_{IC}} = \left(1 - \frac{T}{\sigma_c} \sin^2 \theta_{pr}\right) / \cos^3 \frac{\theta_{pr}}{2}, \quad \frac{K_c}{K_{IC}} = \frac{8}{3} \frac{T}{\sigma_c} \cos \theta_{pr} / \cos \frac{\theta_{pr}}{2} \quad (16)$$

oraz

$$\theta_{pr} = 0 \quad \text{dla} \quad T/\sigma_c < 3/8 \quad (17)$$

$$\theta_{pr}^{1,2,3,4} = \pm 2 \cos^{-1} \left[\sqrt{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \frac{\sigma_c}{T}}} \right] \quad \text{dla} \quad T/\sigma_c > 3/8$$

Rozwiązaniem rzeczywistym jest

$$\theta_{pr}^{1,2} = \pm 2 \cos^{-1} \left[\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \frac{\sigma_c}{T}}} \right]. \quad (18)$$

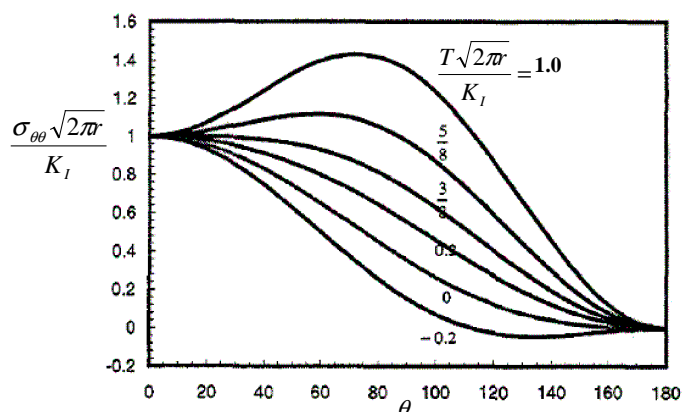
Wówczas równanie (14) można zapisać w następującej formie

$$\frac{K_c}{K_{IC}} = \frac{4 - 8 \frac{T}{\sigma_c} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \frac{\sigma_c}{T}}\right)}{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \frac{\sigma_c}{T}}\right)^2} \quad \text{dla} \quad T/\sigma_c > 3/8 \quad (19)$$

oraz

$$\frac{K_c}{K_{IC}} = 1 \quad \text{dla} \quad T/\sigma_c < 3/8 \quad (20)$$

Rysunek 2 przedstawia wykres zmiany naprężenia obwodowego w zależności od kąta θ określonymi wzorami (13) lub (17).



Rys. 2. Wykres zależności naprężenia obwodowego $\sigma_{\theta\theta}$ od stosunku $T\sqrt{2\pi r} / K_I$ i wartości kąta θ dla $r_C = \text{const}$.

Badaniem zjawiska odchylenia się ścieżki propagacji od płaszczyzny początkowej lokalizacji pęknięcia dla I sposobu obciążenia z wykorzystaniem kryterium MNO zajmowali się m.in. Chao et al. [22] oraz Smith et al. [33,34,35]. Chao et al. [22] określił eksperymentalnie, badając wzrost pęknięcia w PMMA wymiar krytyczny $r_C = 2.32$ mm oraz wartości naprężenia T i WIN, dla którego wzrost pęknięcia odchyła się od orientacji początkowej.

II.2. Kryterium wzrostu pęknięcia określone kryterium MK.

Obecnie przedstawimy zastosowanie kryterium MK wzrostu pęknięcia omówione w pracach [7,8,9]. W kryterium tym wyróżniamy udział jednostkowej energii postaciowej (S_D) i objętościowej (S_H) w procesie pęknięcia, zgodnie z rozkładem

$$S = S_D + S_H \quad (21)$$

gdzie

$$S_H = \frac{(1+\nu^*)^2(1-2\nu)}{6E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2, \quad (22)$$

$$S_D = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[(\nu^{*2} - \nu^* + 1)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - 3(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2) \right]$$

zaś $\nu^* = 0$ dla płaskiego stanu naprężenia oraz $\nu^* = \nu$ dla płaskiego stanu odkształcenia. Wartość energii postaciowej określa zasięg strefy plastycznej, gdzie zachodzi deformacja określona poślizgami na płaszczyznach krystalograficznych, zaś wartość energii objętościowej określa zasięg strefy uszkodzenia, gdzie zachodzi proces dekohezji. Na bazie tego założenia przyjęto w kryterium MK, że strefa uszkodzenia jest określona warunkiem

$S_H \geq S_H^C$, a kierunek propagacji szczeliny określony jest najmniejszą wartością energii postaciowej S_D wzdłuż konturu $S_H(r, \theta) = S_H^C = \text{const.}$ Mamy zatem

$$\frac{\partial S_D(r(\theta), \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{dla } S_H(r, \theta) = S_H^C = \text{const.} \quad (23)$$

lub

$$\frac{S_H}{S_D} \Big|_{\max} \rightarrow \theta_{pr} \text{ at } S_H = S_H^C = \text{const.} \rightarrow S_D(r(S_H^C, \theta)) \Big|_{\min} \rightarrow \theta_{pr}. \quad (24)$$

Krytyczną wartość energii objętościowej określającą obszar uszkodzenia wyrazimy (22) dla $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_t$, gdzie σ_t jest graniczną wartością naprężenia rozciągającego. Mamy zatem

$$S_H^C = \frac{(1-2\nu)(1+\nu^*)^2}{6E} \sigma_t^2. \quad (25)$$

Wartości σ_t i σ_C (dla kryterium MNO) mogą się różnić bowiem określają różne stany przed wierzchołkiem szczeliny. W szczególnym przypadku, w dalszej części pracy dla porównanie obu kryteriów przyjęto $\sigma_t = \sigma_C$. Wówczas zasięg strefy uszkodzenia przed wierzchołkiem szczeliny jest wyrażony w postaci:

$$r(S_H^C, \theta, \alpha) = r_H \Big|_{S_H = \text{const}} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{K_I \cos \frac{\theta}{2} - K_{II} \sin \frac{\theta}{2}}{\sigma_t - T(\alpha)} \right]^2 \quad (26)$$

Kryterium wzrostu szczeliny możemy określić następująco. Dla jednoosiowego stanu rozciągania przy szczelinie prostopadłej do kierunku naprężenia, $\alpha = \pi/2$, $\sigma_y^\infty = \sigma^\infty$ mamy $\sigma_x^\infty = 0$, a zatem $T(\pi/2) = -\sigma^\infty$ przy $k=0$. Odległość krytyczną określającą wytrzymałość materiału wyniesie zatem

$$r_{CI} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t - T\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right)^2 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t + \sigma^\infty} \right)^2. \quad (27)$$

Wzrost szczeliny nastąpi gdy promień strefy uszkodzenia r_H będzie większy lub równy od odległości krytycznej r_{CI} . Otrzymujemy zatem warunek wzrostu pęknięcia dla $\alpha = \pi/2$ i dwuosiowego stanu obciążenia w następującej postaci oznaczając wartość WIN K_I w stanie krytycznym przez K_C

$$\frac{K_C}{K_{IC}} = \frac{\sigma_t + \sigma^\infty(1-k)}{\sigma_t + \sigma^\infty} \bigg/ \cos \frac{\theta_{pr}}{2}. \quad (28)$$

Określmy obecnie kierunek propagacji dla I sposobu obciążenia szczeliny. Stan naprężenia w odległości

$$r_H = \frac{2}{\pi} \left[\frac{K_{IC} \cos \frac{\theta}{2}}{\sigma_t - T(\alpha)} \right]^2 \quad (29)$$

wynosi

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_C}{K_{IC}} \frac{\sigma_t - T}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + T_1, \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_C}{K_{IC}} \frac{\sigma_t - T}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_C}{K_{IC}} \frac{\sigma_t - T}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Możemy teraz wprowadzić relację gęstości energii odkształcenia S_D określoną na konturze stałej energii objętościowej S_H w następującej postaci

$$S_D(r_V) \Big|_{K_2=0} = \frac{(1+\nu)}{12K_{IC}^2 E} \left[4(\nu^{*2} - \nu^* + 1) \left(K_C(\sigma_t - T) + K_{IC}T \right)^2 + 3K_C(\sigma_t - T) \cos[\theta/2]^2 \left(K_C(T - \sigma_t) + K_{IC}(4T \cos[\theta] - 6T) \right) \right]. \quad (31)$$

Zgodnie z założeniami kryterium MK, kąt propagacji szczeliny określony jest warunkiem minimum $S_D(r_V)$, tak więc pochodna względem kąta θ energii postaciowej określonej równaniem (31) ma postać

$$\frac{\partial S_D}{\partial \theta} \Big|_{K_2=0} = \frac{K_C(1+\nu)(\sigma_t - T) \sin[\theta]}{8EK_{IC}^2} \quad (32)$$

$$\left[K_C(\sigma_t - T) + 2K_{IC}T - 8K_{IC}T \cos[\theta] \right] = 0.$$

Równanie (32) posiada pięć rozwiązań określających kierunek wzrostu pęknięcia w następującej postaci:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_{2,3} = \pm\pi, \quad \theta_{4,5} = \pm \text{Cos}^{-1} \left[\frac{2K_{IC} - K_C(1 - \sigma_t/T)}{8K_{IC}} \right]. \quad (33)$$

Wartości $\theta_{2,3}$ nie odpowiadają warunkom fizycznym naszego problemu.

Natomiast druga pochodna równania (32) względem kąta θ wynosi

$$\left. \frac{\partial^2 S_D}{\partial \theta^2} \right|_{K_2=0} = \frac{K_C(1+\nu)(\sigma_t - T)}{8EK_{IC}^2} \left[(K_C(\sigma_t - T) + 2K_{IC}T)\cos[\theta] - \right. \\ \left. + 8K_{IC}T \cos[2\theta] \right]. \quad (34)$$

Aby funkcja posiadała minimum dla orientacji określonych przez (33) i spełniających warunek dodatniej pochodnej (34), muszą zachodzić następujące warunki

$$\frac{K_C}{K_{IC}} > \frac{6}{\sigma_t/T - 1} \quad \text{dla } \theta = 0 \quad (35)$$

$$\frac{K_C}{K_{IC}} < \frac{6}{\sigma_t/T - 1} \quad \text{dla } \theta = \pm \text{Cos}^{-1} \left[\frac{2K_{IC} - K_C(1 - \sigma_t/T)}{8K_{IC}} \right] \quad (36)$$

Z równań (35-36) wynika, że za rodzaj propagacji szczeliny odpowiada w tak sformułowanym kryterium relacja T/σ_t oraz K_C/K_{IC} .

II.3. Zmodyfikowane kryterium energetyczne wzrostu szczeliny (MG).

Jako kryterium alternatywne warunku propagacji rozpatrzmy bilans energetyczny wraz z członem energii uwalnianej w skutek rozwoju obszaru uszkodzenia określonego promieniem r_H . Pomijając dla uproszczenia sformułowania wartość energii dyssypowanej przed wierzchołkiem szczeliny w postaci procesów plastycznych.

Taką więc wartość energii uwalnianej dodatkowo w strefie uszkodzenia dla I sposobu obciążenia oprócz energii uwolnionej przez istnienie samej szczeliny można wyrazić jako

$$U_H^D = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{r_H} \frac{(1-2\nu)(1+\nu^*)^2}{6E} \left(\frac{2K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + T \right)^2 r dr d\theta = \\ = \frac{(1-2\nu)(1+\nu^*)^2}{6E} K_I^4 \left(\frac{4T}{\pi(\sigma_t - T)^3} + \frac{3(2\sigma_t^2 - 4\sigma_t T + 3T^2)}{2\pi(\sigma_t - T)^4} \right). \quad (37)$$

Jak można zauważyć na energię dodatkowo uwalnianą w zdefiniowanym obszarze ma istotny wpływ naprężenie T , zaś jego wpływ uzależniony jest od wartości granicznej naprężenia σ_t . Rozważmy więc kryterium energetyczne Griffitha propagacji szczeliny (Rys. 1) w płaskim stanie naprężenia umieszczonej w nieskończonej tarczy, jednoosiowo rozciąganej, a więc:

$$\begin{aligned}
 U_t = & \int_A \frac{\sigma_\infty^2}{2E} dA \pm \left(\frac{\sigma_\infty^2 \pi a^2}{E} + \right. \\
 & \left. + 2 \frac{(1-2\nu)\sigma_\infty^4 \pi^2 a^2}{6E} \left(\frac{4T}{\pi(\sigma_t - T)^3} + \frac{3(2\sigma_t^2 - 4\sigma_t T + 3T^2)}{2\pi(\sigma_t - T)^4} \right) \right) + \quad (38) \\
 & + \int_\delta F dy + 4a\gamma_e
 \end{aligned}$$

gdzie pierwszy człon wyrażenia opisuje początkową energię sprężystą bez szczeliny, drugi energię uwolnioną przez wprowadzenie szczeliny, trzeci energię uwalnianą w postaci obszaru uszkodzenia przed wierzchołkiem szczeliny, czwarty energię obciążenia zewnętrznego, a ostatni energię powierzchniową szczeliny, gdzie γ_e jest stałą materiałową. Wówczas, rozważając przyrostowy stan równowagi przy założeniu stałego przemieszczenia na brzegu tarczy, możemy napisać

$$\frac{\partial U_t}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left[- \left(\frac{\sigma_\infty^2 \pi a^2}{E} + \frac{(1-2\nu)\sigma_\infty^4 \pi^2 a^2}{3E} \cdot \left(\frac{4T}{\pi(\sigma_t - T)^3} + \frac{3(2\sigma_t^2 - 4\sigma_t T + 3T^2)}{2\pi(\sigma_t - T)^4} \right) \right) + 4a\gamma_e \right] = 0. \quad (39)$$

Z warunku (39) otrzymujemy kryterium wzrostu szczeliny

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\sigma_\infty^2 \pi a}{E} + \frac{2(1-2\nu)\sigma_\infty^4 \pi^2 a}{3E} \cdot \left(\frac{4T}{\pi(\sigma_t - T)^3} + \frac{3(2\sigma_t^2 - 4\sigma_t T + 3T^2)}{2\pi(\sigma_t - T)^4} \right) = \\
 & \frac{2K_I^2}{E} + \frac{2(1-2\nu)K_I^4}{3Ea} \cdot \left(\frac{4T}{\pi(\sigma_t - T)^3} + \frac{3(2\sigma_t^2 - 4\sigma_t T + 3T^2)}{2\pi(\sigma_t - T)^4} \right) = 4\gamma_e. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Możemy teraz sformułować ogólny warunek na propagację szczeliny w następującej postaci, oznaczając wartość K_I w stanie krytycznym przez K_C

$$K_C \sqrt{1 + K_C^2 \frac{(1+\nu^*)^2 (1-2\nu)}{(1-\nu^{*2}) 3a} \cdot \left(\frac{4T}{\pi(\sigma_t - T)^3} + \frac{3(2\sigma_t^2 - 4\sigma_t T + 3T^2)}{2\pi(\sigma_t - T)^4} \right)} = \sqrt{\frac{2\gamma_e E}{1-\nu^{*2}}} = K_{IC}. \quad (41)$$

W przypadku nie uwzględniania uwalniania energii przed wierzchołkami szczeliny wyrażenie (41) sprowadza się do klasycznej postaci kryterium Griffitha, $K_C = K_{IC}$. Równanie (41) można również zapisać jako

$$K_C^4 \frac{(1+\nu^*)^2 (1-2\nu)}{(1-\nu^{*2}) 3a} \cdot \left(\frac{4T}{\pi(\sigma_t - T)^3} + \frac{3(2\sigma_t^2 - 4\sigma_t T + 3T^2)}{2\pi(\sigma_t - T)^4} \right) + \quad (42)$$

$$+ K_C^2 - K_{IC}^2 = K_C^4 \phi + K_C^2 - K_{IC}^2 = 0$$

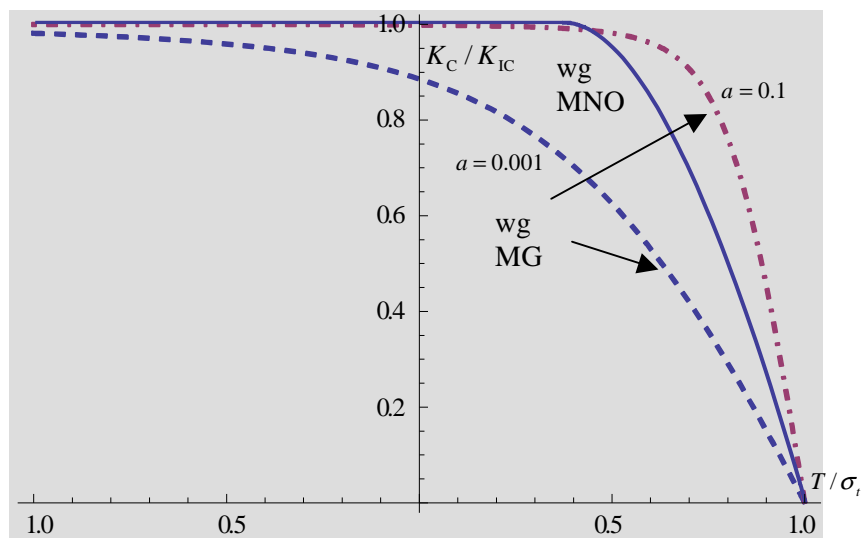
Warunek (42) wyrażamy w postaci równania

$$K_C^{1,4} = \mp \sqrt{\frac{-1 \mp \sqrt{1 + 4\phi K_{IC}^2}}{2\phi}} \quad (43)$$

przy czym tylko jeden pierwiastek jest rozwiązaniem fizycznym i ma wartość dodatnią:

$$K_C = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\phi K_{IC}^2}}{2\phi}} \quad (44)$$

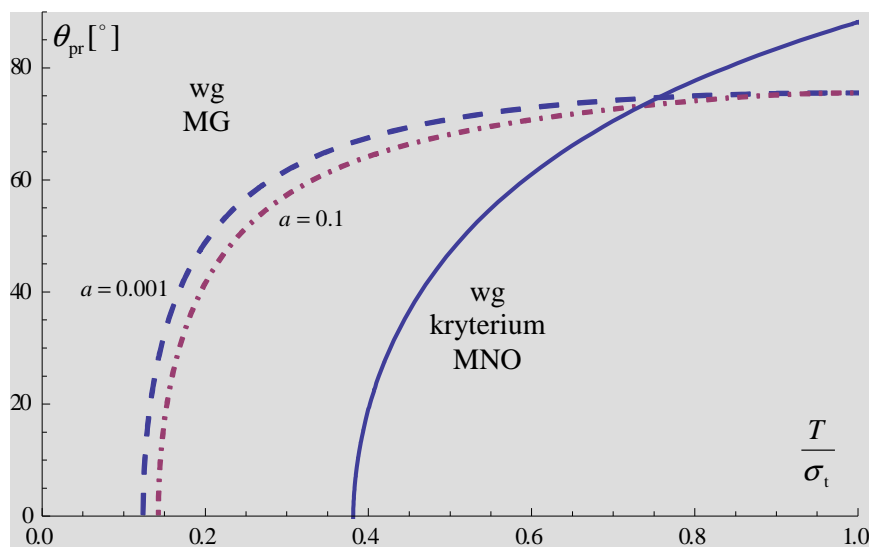
Powyzsza relacja opisujaca wartość krytyczną WIN jest uzależniona od długości szczeliny a , naprężenia T , naprężenia granicznego σ_t oraz normowego, krytycznego WIN, K_{IC} . Rysunek 3 przedstawia zależność K_C / K_{IC} od naprężenia T oraz różnych długości szczeliny, przy założeniu $K_{IC} = 1[\text{MPa}\sqrt{\text{m}}]$. Warto tu zauważyć, że na wartość WIN, przy którym następuje wzrost szczeliny, ma duży wpływ długość samej szczeliny. Szczeliny krótsze, zgodnie z równaniem (44) wykazują mniejszą wartość WIN, a dłuższe większą. Związane jest to z większym proporcjonalnie wpływem uwalniania energii przed wierzchołkiem krótszych szczelin w stosunku do siły napędowej wynikającej ze stanu obciążenia i wyrażanej tylko poprzez WIN. Na rysunku przedstawiono również wyniki dla kryterium MNO przyjmując $\sigma_t = \sigma_C$.



Rys. 3. Zależność K_C / K_{IC} od T / σ_t wg kryterium MNO (linia ciągła) oraz różnych długości szczeliny w przypadku kryterium MG (linia przerywana).

Natomiast Rysunek 4 przedstawia wykres zależności kąta niestabilnego wzrostu szczeliny od relacji T / σ_t dla kryterium MNO oraz wykorzystaniem relacji (36) i (44). Maksymalny kąt odchylenia się szczeliny wynikający z relacji (36) wynosi 75.5° , ponieważ

$$\lim_{T \rightarrow \sigma_c} \text{Cos}^{-1} \left[\frac{K_C(\sigma_t - T) + 2K_{IC}T}{8K_{IC}T} \right] \cong 75.5^\circ. \quad (45)$$



Rys. 4. Wykres zależności kąta propagacji θ_{pr} w zależności od wartości relacji T/σ_t dla kryterium MNO linia ciągła oraz wg kryterium MG z wykorzystaniem wyrażenia (36) i (44) linia przerywana.

Można zauważyć, że granica pomiędzy stabilnym, a nie stabilnym zachowaniem kryteriami kierunku propagacji różni się znacznie dla rozpatrywanych w pracy kryteriów. Jednak jest to spowodowane różną definicją naprężeń krytycznych, które dla potrzeb porównania kryteriów zostały uznane za równe, $\sigma_t = \sigma_c$.

IV. PODSUMOWANIE

W pracy rozważono możliwość odchylenia się szczeliny dla przypadku $K_{II} = 0$ w dwuosowym stanie obciążenia. Do analizy wykorzystano dwa kryteria liniowej sprężystej mechaniki pęknięcia wzbogacone naprężeniem T : klasyczne kryterium maksymalnych naprężeń obwodowych (MNO) oraz energetyczne kryterium MK [7,8,9]. Przedstawiono porównanie przypadków granicznych wzrostu początkowej szczeliny. W przypadku kryterium MNO promień krytyczny nie jest zależny od wartości naprężenia T . Natomiast w przypadku kryterium MK określenie miejsca próbkowania jest jednoznacznie zależne od tej wartości. W pracy rozszerzono również klasyczną teorię Griffitha o energię uwolnioną w skutek rozwoju uszkodzeń przed wierzchołkiem szczeliny. Na jej podstawie sformułowano warunek propagacji (MG), na który ma wpływ długość szczeliny oraz dwuosowy stan naprężenia. Bazując na zdefiniowanym obszarze uszkodzenia materiału

przed wierzchołkiem szczeliny w prosty sposób wprowadzono do rozwiązania sprężystego wpływ strefy uszkodzenia.

LITERATURA

- [1] INGLIS C.E.: Stresses in plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans. Inst. Nav. Archit.* 60, 1913, pp.219-230.
- [2] GRIFFITH A.A.: The phenomena of rapture and flow in solids, *Phil. Trans. Roy. Soc., London* 1921, A221, pp.163-198.
- [3] GRIFFITH A.A.: The theory of rapture, *Proc. First Congress of Applied Mechanics, Delft* 1924, pp.55-63.
- [4] IRWIN G.R.: Fracture, *Encyclopedia of Physics, Band VI, Vol.VI*, Berlin, 1958.
- [5] IRWIN G.R.: Fracture mechanics, NY, 1960.
- [6] IRWIN G.R.: Plastic zone near a crack and fracture toughness, *Proceeding of 7th Sagamore Conf. IV*, 1961, pp.61-78.
- [7] SIH G.C.: On the Westergaard method of crack analysis, *Int. J. Fracture Mech.* 2, 1966, pp. 628.
- [8] EFTIS J., LIEBOWITZ H.: On the modified Westergaard equations for certain plane crack problem, *Int. J. Fracture Mech.* 8, 1972, pp.383-392.
- [9] MacGREGOR C.W.: The potential function method for the solution of two dimensional stress problems, *Trans. Am. Math. Soc.* .8, 1935, pp.177-186.
- [10] EFTIS J., SUBRAMONIAN N., LIEBOWITZ H.: Crack border stress and displacement equations revisited, *Engineering Fracture Mechanics* 10, 1977, pp.189-210.
- [11] EFTIS J., SUBRAMONIAN N.: The inclined crack under biaxial load, *Engineering Fracture Mechanics* 10, 1978, pp.43-67.
- [12] LIEBOWITZ H., LEE J.D., EFTIS J.: Biaxial load effects in fracture mechanics, *Engng Fracture Mech.* 10, 1978, pp.315-335.
- [13] ERDOGAN F., SIH G.C.: On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *Journal of Basic Engineering Trans. ASME* 85, 1963, pp.519-527.
- [14] COTTERELL B.: Notes on the path and stability of cracks, *Int. Journal of Fracture Mech.* 2, 1966, pp.526-533.
- [15] COTTERELL B.: On fracture path stability in the compact tension test, *Int. Journal of Fracture Mech.* 6, 1970, pp.189-192.
- [16] COTTERELL B., RICE J.R.: Slightly curved or kinked cracks, *Int. Journal of Fracture Mech.* 16, 1980, pp.155-169.
- [17] LARSSON S.G., CARLSSON A.J.: Influence of non-singular stress term and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in

- elastic-plastic material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 21, 1973, pp.263–278.
- [18] FINNIE I., SAITH A.: A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks. *International Journal of Fracture* 9, 1973, pp. 484-486.
- [19] SUMI Y., NEMAT-NASSER S., KEER L. M.: On crack path stability in a finite body. *Engineering Fracture Mechanics* 22, 1985, pp.759-771.
- [20] RICHARDSON D. E., GOREE J. G.: Experimental verification of a new two parameter fracture model. *Fracture Mechanics: Twenty-Third Symposium. ASTM STP 1189*, 1993, pp. 738-750.
- [21] SELVARATHINAM A.S., GOREE A.S.: T-stress based fracture model for cracks in isotropic materials, *Engineering Fracture Mechanics* 60, 1998, pp.543-561.
- [22] CHAO YJ, LIU S., BROVIK B.J.: Brittle fracture: Variation of fracture toughness with constraint and crack curving under Mode I conditions, *Experimental Mechanics* 41, 2001, pp.323-241.
- [23] MRÓZ K.P.: Rozprawa Doktorska: Propagacja szczeliny zmęczeniowej w bimateryale. Model matematyczny i rozwiązanie numeryczne, Warszawa 2008, IPPT PAN.
- [24] MRÓZ K.P., MRÓZ Z.: On crack path evolution rules, *Engineering Fracture Mechanics* 77 ,2010, pp.1781–1807.
- [25] MRÓZ K.P., DOLIŃSKI K.: The crack growth prediction in homogeneous materials and bimaterial systems, *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 90, 2010, pp.721–744.
- [26] RITCHIE R.O., KNOTT J.F., Rice J.R.: On the relationship between critical stress and fracture toughness in mild steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 21, 1973, 395–410.
- [27] WILLIAMS J.G., EWING P.D.: Fracture under complex stress – the angled crack problem. *International Journal of Fracture* 8, 1972, pp.441–446.
- [28] UEDA Y., IKEDA K., YAO T., AOKI M.: Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads. *Engineering Fracture Mechanics* 18, 1983, pp.1131–1158.
- [29] PAPADOPOULOS G.A., PONIRIDIS P.I.: Crack initiation under biaxial loading with higher-order approximation, *Engng Fracture Mech* 32, 1989, pp.351-360.
- [30] THEOCARIS P.S.: A higher–order approximation for the T-criterion of fracture in biaxial fields, *Engineering Fracture Mechanics* 19, 1984, pp.975–991.
- [31] UEDA Y., IKEDA K., YAO T., AOKI M.: Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads. *Eng. Fract. Mech.* 18, 1983, pp.1131–1158.

- [32] AYATOLLAHI M.R., PAVIER M.J., SMITH D.J.: Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading. *Int. J. Fract.* 91, 1998 , pp.283–298.
- [33] AYATOLLAHI M.R., PAVIER M.J., SMITH D.J.: Mode I cracks subjected to large T-stresses. *Int. J. Fract.* 117, 2002, pp.159–174.
- [34] SMITH D.J., AYATOLLAHI M.R., PAVIER M.J.: The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed mode loading. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 24, 2001
- [35] SMITH D.J., AYATOLLAHI M.R., PAVIER M.J.; On the consequence of T-stress in elastic brittle fracture, *Proc. R. Soc. A* 462, 2006, pp.2415–2437
- [36] LEEVERS P. S., RADON J.C.: Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometrie, *Int. J. Fract.* 19, 1982, pp.311–325.
- [37] WILLIAMS M.L.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension, *J. Appl. Mech.* 19, 1952, pp.526-528.

CRACK CURVING UNDER MODE I CONDITIONS – ENERGY APPROACH.

Abstract: In the presentation the analysis of crack curving under mode I loading conditions will be discussed. A simplified approach is used, namely the *MK*-criterion [7,8,9] based on the linear elastic fracture mechanics (LEFM). In the criterion the crack growth is assumed to follow the direction of minimum distortion energy density at a distance corresponding to specified value of dilatation energy. It is also shown that the crack curving or instability of the crack path direction can be associated with the critical value of T / σ_t , where

σ_t is associated with the limit tensile stress and relation of K_I / K_{IC} .

The crack growth condition is postulated in the extended form of Griffith theory to account for the damage dissipation ahead of the crack tip.

The results presented in this paper have been obtained within the project KomCerMet (Contract No. POIG.01.03.01-00-013/08 with the Polish Ministry of Science and Higher Education) in the framework of the Operational Programme Innovative Economy 2007–2013.