

Andrzej ŚWIERCZ<sup>1</sup>  
Przemysław KOŁAKOWSKI<sup>2</sup>  
Jan HOLNICKI – SZULC<sup>3</sup>

## MONITOROWANIE POSTĘPUJĄCEGO ROZWOJU STREF PLASTYCZNYCH W KONSTRUKCJACH SZKIELETOWYCH

### 1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach obserwuje się zwiększone zainteresowanie tematyką monitorowania stanu technicznego konstrukcji (ang. *Structural Health Monitoring, SHM*), którego głównym celem jest zwiększenie bezpieczeństwa ludzi oraz minimalizacja kosztów eksploatacyjnych. Monitorowanie jest stosowane w przemyśle lotniczym (monitorowanie obciążeń eksploatacyjnych, uszkodzeń zmęczeniowych, pęknięć), inżynierii lądowej (mosty, wiadukty, budynki, tunele), urządzeniach wirujących (turbiny w elektrowniach). Przedstawiane w literaturze problemy dotyczą głównie wykrywania pęknięć, utraty sztywności wywołanej działaniem czynników środowiskowych (np. korozji) i eksploatacyjnych (zmęczenie materiału). Nowoczesne konstrukcje mostów, budynków coraz częściej wyposażane są w czujniki pomiarowe (rejestrujące drgania, odkształcenia, temperatury prędkości wiatru, itp.) na etapie ich realizacji. Zarejestrowane dane informują zarządcę obiektu o bieżącej odpowiedzi lub działającym na nią obciążeniu, bez wykorzystania strategii prowadzącej do identyfikacji jej stanu technicznego (centrum sportowo-wystawiennicze Halifax Metro Centre – Kanada, most Ting Kau – Hong Kong).

Ważnym problemem w konstrukcjach inżynierskich są deformacje plastyczne, które mogą prowadzić do jej zniszczenia wskutek nadmiernego obciążenia (np. opadami śniegu, cykliczne topnienie i pojawianie się nowych warstw). Tragiczna w skutkach okazała się katastrofa hali wystawienniczej w Katowicach w 2006 r., która została spowodowana m.in. przekroczeniem dopuszczalnych obciążeń konstrukcji dachowej i uległa uplastycznieniu (przekształceniu w mechanizm kinematyczny).

Wykorzystana w niniejszej pracy Metoda Dystorsji Wirtualnych (ang. *Virtual Distortion Method, VDM*) jest uniwersalnym narzędziem reanalizy konstrukcji (por. [1]). Metoda ta była już stosowana do identyfikacji utraty sztywności w konstrukcjach szkieletowych w zadaniach statyki [2], dynamiki [3] oraz w dziedzinie częstości [4]. Jednakże monitorowa-

---

<sup>1</sup> Dr inż. Andrzej Świercz – Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

<sup>2</sup> Dr inż. Przemysław Kołakowski – Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Adaptronica sp. z o.o.

<sup>3</sup> Prof. dr hab. inż. Jan Holnicki–Szulc – Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

nie rozwoju stref plastycznych w konstrukcjach jest nowym zagadnieniem. W pracy będziemy zakładać powolne narastanie obciążeń, traktując je jako obciążenie statyczne.

## 2. METODA DYSTORSJI WIRTUALNYCH

### 2.1 Koncepcja metody dystorsji wirtualnych

W niniejszej pracy przez *dystorsję wirtualną*  $\varepsilon_\alpha^0$  rozumiemy wstępną deformację pręta konstrukcji szkieletowej. Dystorsja wirtualna jest tu analogonem imperfekcji geometrycznej lub równomiernego ogrzania pręta. Wprowadzenie dystorsji w konstrukcji statycznie niewyznaczalnej powoduje powstanie w niej rezydualnego pola odkształceń  $\varepsilon_\alpha^R$  oraz towarzyszącego mu samozrównoważonego pola naprężeń  $\sigma_\alpha^R$ .

$$\sigma_\alpha^R = E_\alpha(D_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})\varepsilon_\beta^0 \quad \varepsilon_\alpha^R = D_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta^0. \quad (1)$$

W powyższych wzorach oraz w dalszej części tekstu zastosowano sumacyjną konwencję Einsteina, przy czym sumowanie względem podkreślonych indeksów nie występuje. W równaniach (1) macierz  $D_{\alpha\beta}$  jest macierzą wpływu i stanowi podstawę obliczeń numerycznych w metodzie dystorsji wirtualnych. Kolumny macierzy  $D_{\alpha\beta}$  zawierają odkształcenia elementów konstrukcji wywołane wprowadzeniem jednostkowej dystorsji wirtualnej  $\varepsilon_\beta^0$  w elemencie  $\beta$ . W konsekwencji macierz wpływu  $D_{\alpha\beta}$  jest niesymetryczną macierzą kwadratową o wymiarze  $n \times n$ , gdzie  $n$  jest liczbą elementów konstrukcji. Opisaną powyższymi związkami konstrukcję nazywamy tzw. *konstrukcją sprzężoną*, w której pola odkształceń i naprężeń są zależne od wprowadzonych dystorsji wirtualnych.

*Konstrukcję modelowaną dystorsjami* otrzymuje się w wyniku superpozycji stanu konstrukcji sprzężonej i *konstrukcji pierwotnej*, poddanej obciążeniu zewnętrznemu  $P$ . Obciążenie zewnętrzne wywołujące pola odkształceń  $\varepsilon_\alpha^L$  i naprężeń  $\sigma_\alpha^L$  są niezależne od wprowadzonego pola dystorsji wirtualnych w konstrukcji sprzężonej. W związku z powyższym pole odkształceń i naprężeń konstrukcji modelowanej można przedstawić następująco:

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^L + \sigma_\alpha^R = \sigma_\alpha^L + E_\alpha(D_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})\varepsilon_\beta^0 \quad \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^L + \varepsilon_\alpha^R = \varepsilon_\alpha^L + D_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta^0 \quad (2)$$

Wprowadzając zmiany pewnych parametrów elementów konstrukcji pierwotnej otrzymamy *konstrukcję zmodyfikowaną*. Obciążenie zewnętrzne  $P$  wywołuje różni odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej i pierwotnej. Okazuje się, że można dla konstrukcji pierwotnej wyznaczyć takie pole dystorsji  $\varepsilon_\alpha^0$ , aby pola odkształceń i uogólnionych naprężeń w konstrukcji pierwotnej z nałożonymi dystorsjami i konstrukcji zmodyfikowanej były tożsame. W konsekwencji konstrukcję zmodyfikowaną można zastąpić konstrukcją modelowaną dystorsjami. Innymi słowy, zamiast wprowadzać realne zmiany można je modelować poprzez wielkości wirtualne.

### 2.2 Modelowanie modyfikacji modułu Younga i przekrojów poprzecznych elementów

Uogólnione naprężenia konstrukcji zmodyfikowanej i modelowanej dystorsjami można zapisać odpowiednio w następującej postaci:

$$\bar{N}_\alpha = E_\alpha^* A_\alpha^* \varepsilon_\alpha \quad N_\alpha = E_\alpha A_\alpha (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\alpha^0), \quad (3)$$

gdzie  $N_\alpha$  i  $\bar{N}_\alpha$  jest siłą w pręcie  $\alpha$  w konstrukcji modelowanej dystorsjami i w konstrukcji zmodyfikowanej. Modyfikacja odnosi się tu do zmiany modułu Younga (do wartości  $E_\alpha^*$ ) oraz przekroju poprzecznego (do wartości  $A_\alpha^*$ ) elementu. Zgodnie z postulowaną równością uogólnionych pól naprężeń, siły te w obu przypadkach muszą być takie same. Przyrównując zatem oba wyrażenia wyznaczamy wzór na współczynnik modyfikacji sztywności podłużnej elementu wyrażoną przez dystorsje wirtualne:

$$\mu_\alpha = \frac{k_\alpha^*}{k_\alpha} = \frac{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\alpha^0}{\varepsilon_\alpha}, \quad (4)$$

gdzie  $\mu_\alpha$  jest wektorem współczynników modyfikacji sztywności,  $k_\alpha = E_\alpha A_\alpha$  oraz  $k_\alpha^* = E_\alpha^* A_\alpha^*$  stanowią sztywność osiową odpowiednio początkową i zmodyfikowaną elementu  $\alpha$ . Związek (4) jest nieliniowy ze względu na zależność (2b). Łatwo zauważyć, że współczynnik modyfikacji sztywności  $\mu_\alpha$  można przedstawić w alternatywnych postaciach:

$$\mu_\alpha = \frac{E_\alpha^*}{E_\alpha} \quad \mu_\alpha = \frac{A_\alpha^*}{A_\alpha}. \quad (5)$$

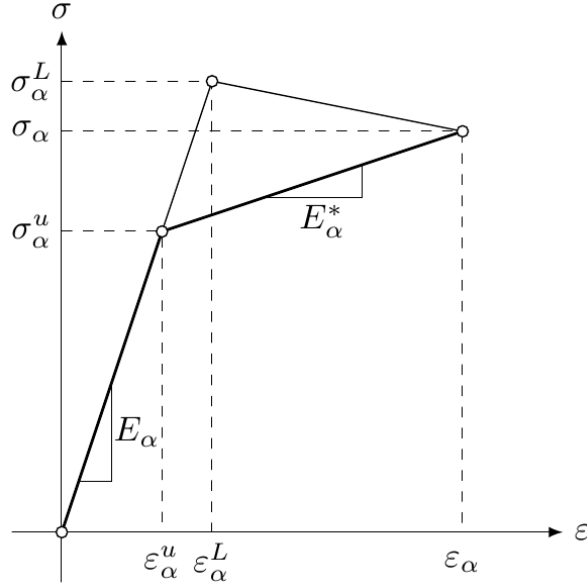
Korzystając z wyrażenia (2a) i (3) można wyznaczyć pole dystorsji wirtualnych  $\varepsilon_\alpha^0$ , jakie należy nałożyć na konstrukcję pierwotną, aby uzyskać tożsame pola odkształceń i naprężeń konstrukcji modelowanej i zmodyfikowanej ze zmianami określonymi przez wektor  $\mu_\alpha$ :

$$[\delta_{\alpha\beta} - (1_\alpha - \mu_\alpha)D_{\alpha\beta}]\varepsilon_\beta^0 = (1 - \mu_\alpha)\varepsilon_\alpha^L \quad (6)$$

gdzie  $1_\alpha$  oznacza wektor o jednostkowych współrzędnych. Powyżej opisane modelowanie modyfikacji parametrów konstrukcji dotyczy jednorodnych zmian w elemencie. Należy zwrócić uwagę, że pole dystorsji wirtualnych jest zależne nie tylko od wprowadzonych modyfikacji konstrukcji  $\mu_\alpha$ , lecz także od działającego obciążenia zewnętrznego  $\varepsilon_\alpha^L$ . Dla ustalonego wektora modyfikacji sztywności  $\mu_\alpha$ , zmiana obciążenia powoduje wygenerowanie innego pola dystorsji wirtualnych.

### 2.3 Modelowanie odkształceń plastycznych

Pod pojęciem konstrukcji zmodyfikowanej będziemy tu rozumieć konstrukcję, w której elementy zostają uplastycznione pod wpływem działania obciążenia zewnętrznego  $P$ . Dystorsje wirtualne  $\varepsilon_\alpha^0$  są wówczas interpretowane jako rzeczywiste odkształcenia plastyczne elementów konstrukcji. Do dalszych rozważań przyjmijmy model materiału sprężysto – plastyczny ze wzmocnieniem zilustrowany na rys. 1.



Rys 1. Warunek plastyczności konstrukcji zmodyfikowanej.

Macierz wpływu jest obliczana jak poprzednio, jako liniowe odpowiedzi konstrukcji (wyrażone w odkształceniach elementów) wywołane nakładaniem w kolejnych elementach konstrukcji jednostkowych dystorsji wirtualnych  $\varepsilon_\alpha^0$ . Na rys.1 punkt  $(\varepsilon_\alpha^L, \sigma_\alpha^L)$  stanowi obliczoną, liniową odpowiedź konstrukcji będącej pod obciążeniem zewnętrznym  $P$ , z pominięciem uplastycznienia materiału w punkcie  $(\varepsilon_\alpha^u, \sigma_\alpha^u)$ . Wielkości  $\sigma_\alpha^u$  i  $\varepsilon_\alpha^u$  oznaczają odpowiednio naprężenia i odkształcenia uplastyczniające, natomiast  $E_\alpha^*$  jest modułem stycznym.

Warunek plastyczności elementu konstrukcji zmodyfikowanej można wyrazić w następującej postaci:

$$\sigma_\alpha - \sigma_\alpha^u = E_\alpha^* (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\alpha^u), \quad (7)$$

gdzie  $\sigma_\alpha$  oraz  $\varepsilon_\alpha$  są wyrażone związkami (2).

Warunek równości pól odkształceń i naprężeń w konstrukcji modelowanej i zmodyfikowanej jest analogiczny jak w poprzednim podrozdziale i prowadzi do układu równań:

$$[\delta_{\alpha\beta} - (1 - \gamma_\alpha) D_{\alpha\beta}] \varepsilon_\beta^0 = (1 - \gamma_\alpha) (\varepsilon_\alpha^L - \varepsilon_\alpha^u), \quad (8)$$

w którym wprowadzono bezwymiarowy współczynnik  $\gamma_\alpha$ :

$$\gamma_\alpha = \begin{cases} \frac{E_\alpha^*}{E_\alpha}, & |\sigma_\alpha^L| > |\sigma_\alpha^u| \\ 0, & |\sigma_\alpha^L| < |\sigma_\alpha^u| \end{cases} \quad (9)$$

Związek (8) pozwala na wyznaczenie odkształceń plastycznych (utożsamianych w tym przypadku z dystorsjami  $\varepsilon_\alpha^0$ ), natomiast całkowite pole odkształceń i pole naprężeń są określone ze związków (2).

### 3. PROBLEM ODWROTNY

Lokalna modyfikacja sztywności bądź uplastycznienie jednego lub więcej elementów konstrukcji powoduje globalne zmiany odpowiedzi tej konstrukcji. Rejestracja tych zmian za pomocą czujników stanowi podstawę do rozwiązania zadania odwrotnego polegającego na określeniu wprowadzonych modyfikacji lub uplastycznień elementów dzięki znajomości modelu konstrukcji.

Celem tego rozdziału jest przedstawienie algorytmu, opartego na gradientowej optymalizacji, realizującego identyfikację parametrów sztywności oraz odkształceń plastycznych konstrukcji. Funkcję celu, w przypadku identyfikacji modyfikacji sztywności, przyjmijmy w postaci:

$$F = \sum_{\alpha=1}^n (\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha}^M)^2, \quad (10)$$

gdzie  $\varepsilon_{\alpha}$  jest wektorem odkształceń konstrukcji modelowanej dystorsjami, a  $\varepsilon_{\alpha}^M$  jest wektorem odkształceń konstrukcji zmodyfikowanej. Wektor ten, w przypadku rzeczywistej, monitorowanej konstrukcji, stanowi pomierzoną odpowiedź wyrażoną w odkształceniach. Poszukiwany wektor modyfikacji sztywności może być obliczony w kolejnych iteracjach np. metodą największego spadku, zgodnie ze wzorem:

$$\mu_{\alpha}^{(i)} = \mu_{\alpha}^{(i-1)} - \Delta F^{(i-1)} \frac{\nabla_{\alpha} F^{(i-1)}}{(\nabla_{\beta} F^{(i-1)})(\nabla_{\beta} F^{(i-1)})}. \quad (11)$$

We wzorze (11) oznaczenia (i-1) i (i) wskazują odpowiednio na wartości w poprzedniej i bieżącej iteracji. Stała  $\Delta$  jest długością kroku i najczęściej przyjmuje się ją z przedziału (0.1—0.3),  $\nabla_{\alpha} F^{(i-1)}$  jest gradientem funkcji celu z poprzedniej iteracji, a w mianowniku występuje iloczyn skalarny tego gradientu. Ze względu na złożoną zależność funkcji celu od wektora modyfikacji sztywności, gradient funkcji celu jest obliczany zgodnie z regułą łańcuchową:

$$\nabla_{\alpha} F = \frac{\partial F}{\partial \mu_{\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\beta}^0} \frac{\partial \varepsilon_{\beta}^0}{\partial \mu_{\alpha}} = 2(\varepsilon_{\delta} - \varepsilon_{\delta}^M) D_{\delta\beta} \frac{\partial \varepsilon_{\beta}^0}{\partial \mu_{\alpha}}. \quad (12)$$

Do obliczenia gradientu funkcji celu należy jeszcze obliczyć gradient pola dystorsji wirtualnych względem wektora modyfikacji sztywności. Można to wykonać, odpowiednio różniczkując równanie (6):

$$[\delta_{\alpha\beta} - (1 - \mu_{\alpha}) D_{\alpha\beta}] \frac{\partial \varepsilon_{\beta}^0}{\partial \mu_{\alpha}} = -\delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha}. \quad (13)$$

Warto zauważyć, że lewa strona w wyrażeniu (13) jest tożsama z lewą stroną w wyrażeniu (6), natomiast prawą stronę stanowi macierz kwadratowa posiadająca na głównej diagonalu zaktualizowane odkształcenia (z przeciwnym znakiem) obliczone zgodnie ze wzorem (2b). W przypadku identyfikacji stref plastycznych przyjmijmy, że konstrukcja jest wykonana z materiału sprężysto - idealnie plastycznego. To założenie narzuca ograniczenia związane z nieprzekraczaniem naprężeń uplastyczniających  $\sigma_{\alpha}^u$ . Można to uwzględnić w funkcji celu, zdefiniowanej jak poprzednio we wzorze (10), uzupełnionej o odpowiednią funkcję kary:

$$F = \sum_{\alpha=1}^n (\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha}^M)^2 + \sum_{\alpha=1}^n (c(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\alpha}^u))^2 \Big|_{|\sigma_{\alpha}| > |\sigma_{\alpha}^u|}, \quad (14)$$

gdzie  $c$  jest pewną stałą skalującą funkcję kary. Funkcja kary jest obliczana dla tych elementów, w których obliczone naprężenia (w konstrukcji modelowanej) obliczone wg (2a) przekraczają naprężenia uplastyczniające. Zmienną projektową jest tu wektor dystorsji wirtualnych, a zatem kolejne przybliżenia tego wektora mogą być wyznaczone ze wzoru:

$$\varepsilon_{\alpha}^{0(i)} = \varepsilon_{\alpha}^{0(i-1)} - \Delta F^{(i-1)} \frac{\nabla_{\alpha} F^{(i-1)}}{(\nabla_{\beta} F^{(i-1)})(\nabla_{\beta} F^{(i-1)})}, \quad (15)$$

przy czym gradient funkcji celu (14) jest wyrażony w postaci:

$$\nabla_{\alpha} F = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\alpha}^0} = 2(\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\beta}^M) D_{\beta\alpha} + 2c(\sigma_{\beta} - \sigma_{\beta}^u) \frac{\partial \sigma_{\beta}}{\partial \varepsilon_{\alpha}^0} \Big|_{|\sigma_{\beta}| > |\sigma_{\beta}^u|}. \quad (16)$$

Do zależności (16) konieczne jest określenie gradientu naprężeń, który można obliczyć różniczkując związek (2a) względem wektora dystorsji wirtualnych:

$$\frac{\partial \sigma_{\beta}}{\partial \varepsilon_{\alpha}^0} = E_{\beta} \left( D_{\beta\alpha} - \delta_{\beta\alpha} \right). \quad (17)$$

Gradient funkcji kary ma niezerowe te współrzędne, które odpowiadają uplastycznionym elementom.

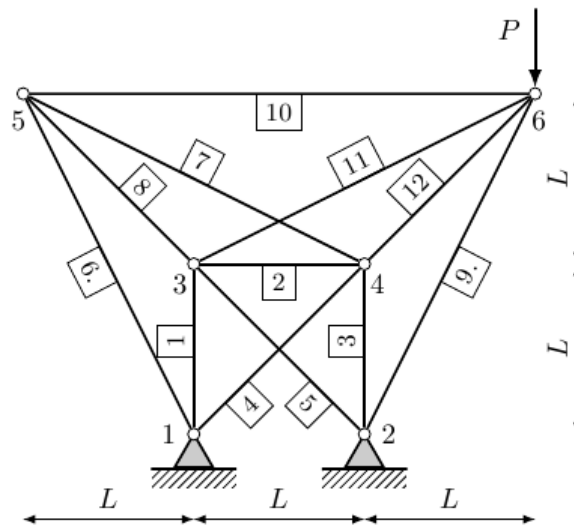
W tab. 1 zestawiono algorytmy identyfikacji modyfikacji sztywności i odkształceń plastycznych, które opisano powyżej. Algorytm podzielono na 3 główne etapy realizacji: wstępne dane i założenia, obliczenia wstępne oraz obliczenia powtarzalne (iteracyjne).

**Tabela 1.** Algorytmy identyfikacji modyfikacji sztywności i odkształceń plastycznych.

| Etap algorytmu           | Identyfikacja modyfikacji sztywności  | Identyfikacja odkształceń plastycznych  |
|--------------------------|---|---|
| Wstępne dane i założenia | <ul style="list-style-type: none"> <li>odkształcenia konstrukcji zmodyfikowanej <math>\varepsilon_{\alpha}^M</math></li> <li>konstrukcja pierwotna wraz z obciążeniem zewnętrznym</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>przyjęcie modelu materiału</li> <li>początkowe odkształcenia plastyczne <math>\varepsilon_{\alpha}^{0(0)}</math> (zwykle zerowe)</li> </ul>  |
|                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>początkowy wektor <math>\mu_{\alpha}^{(0)}</math> (zwykle o jednostkowych współrzędnych, wtedy zerowe pole <math>\varepsilon_{\alpha}^{0(0)}</math>)</li> </ul>  |   |
| Obliczenia wstępne       | <ul style="list-style-type: none"> <li>obliczenie macierzy wpływu <math>D_{\alpha\beta}</math></li> <li>obliczenie odkształceń <math>\varepsilon_{\alpha}^L</math> oraz <math>\varepsilon_{\alpha}^{(0)}</math> wg (2b)</li> </ul>  |   |
| Obliczenia powtarzalne   | <ul style="list-style-type: none"> <li>funkcja celu wg (10)</li> <li>gradient funkcji celu wg (12), w tym gradient dystorsji <math>\frac{\partial \varepsilon_{\beta}^0}{\partial \mu_{\alpha}}</math></li> <li>aktualizacja wektora <math>\mu_{\alpha}^{(i)}</math> wg (11)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>funkcja celu wg (14)</li> <li>gradient funkcji celu wg (16), w tym gradient naprężeń <math>\frac{\partial \sigma_{\beta}}{\partial \varepsilon_{\alpha}^0}</math></li> <li>aktualizacja odkształceń plastycznych <math>\varepsilon_{\alpha}^{0(i)}</math> wg (15)</li> </ul> |
|                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>warunek zakończenia obliczeń <math>\frac{F^{(i)}}{F^{(1)}} &lt; 10^{-5}</math> lub ustalona liczba iteracji</li> </ul>   |   |

#### 4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Rozpatrzmy 12-elementową, stalową konstrukcję kratową podpartą jak na rys. 2. Zastosowano przekroje rurowe o średnicach zewnętrznych 10 cm (elementy nr 3, 7, 8, 11, 12) i 30 cm (pozostałe elementy). W obu przypadkach grubość ścianki wynosi 1cm. Podstawowa rozpiętość modułu długości wynosi  $L=10$  m, a obciążenie  $P=1725$  kN, moduł Younga przyjęto  $E_\alpha = 210$  GPa we wszystkich elementach. Na przykładzie tej kratownicy w następnych podrozdziałach przedstawiono identyfikację modyfikacji sztywności oraz identyfikację odkształceń plastycznych wg algorytmu przedstawionego w rozdziale 3.



Rys. 2. Testowana konstrukcja kratowa.

##### 4.1 Identyfikacja modyfikacji sztywności.

Odkształcenia elementów konstrukcji początkowej  $\varepsilon_\alpha^I$  (por. rys. 2) zostały obliczone numerycznie, przy założeniu liniowego związku konstytutywnego, i stanowią one odpowiedź referencyjne. W związku z tym, w procesie iteracyjnym początkowy (startowy) wektor modyfikacji sztywności  $\mu_\alpha^{(0)}$  ma jednostkowe współrzędne. Oznacza to zerowe pole dystorsji wirtualnych (por. wzór (6)). Z drugiej strony, odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej  $\varepsilon_\alpha^M$  zostały również wygenerowane numerycznie dla wszystkich elementów konstrukcji, przy czym uprzednio wprowadzono zmiany wartości modułu Younga w pewnych elementach. Modyfikacje te zestawiono w tab. 2.

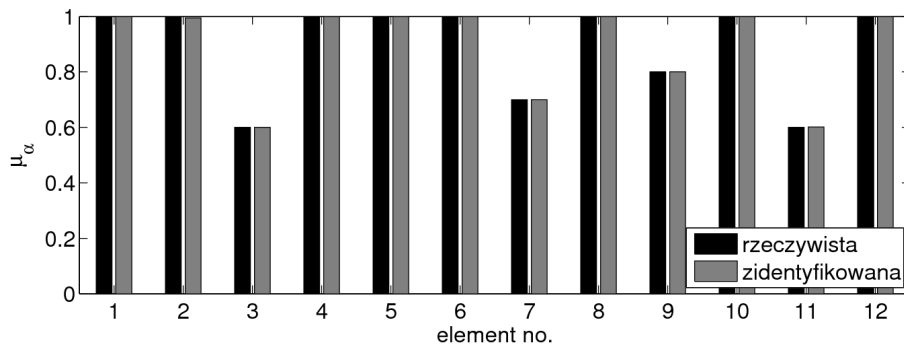
Tabela 2. Wprowadzone modyfikacje konstrukcji.

| Nr elementu $\alpha$   | 3   | 7   | 9   | 11  |
|--|-----|-----|-----|-----|
| Współczynnik modyfikacji<br>$\mu_\alpha = \frac{E_\alpha^*}{E_\alpha}$ | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.6 |
| Redukcja modułu Younga   | 40% | 30% | 20% | 40% |

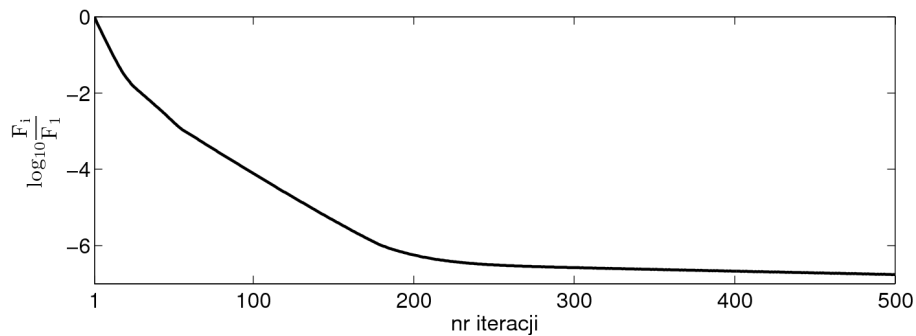
Celem zadania odwrotnego jest identyfikacja parametrów zawartych w tab. 2 (oraz brak modyfikacji w pozostałych elementach) korzystając z odkształceń konstrukcji pierwotnej korygowanych polem dystorsji wirtualnych oraz odkształceń konstrukcji zmodyfikowanej, symulujących wartości zmierzone. Proces optymalizacji jest realizowany wg algorytmu przedstawionego w rozdziale 3, z zachowaniem ograniczeń współrzędnych wektora w każdej iteracji dopuszczalnych z przedziału . Rezultat identyfikacji pokazano na rys. 3 wraz z rzeczywistymi modyfikacjami. Liczbę iteracji przyjęto równą 500, a spadek funkcji w zależności od bieżącej iteracji pokazano na rys. 4. Spadek funkcji celu zdefiniowano następująco:

$$\mu_\alpha = \frac{F_i - F_1}{F_1} \quad (18)$$

gdzie  $F_i$  i  $F_1$  są wartościami funkcji celu odpowiednio w bieżącej i pierwszej iteracji. Jak widać na rys. 4, w ostatniej iteracji funkcja celu w odniesieniu do jej początkowej wartości spadła prawie 7 rzędów wielkości.



Rys. 3. Rzeczywiste i zidentyfikowane modyfikacje sztywności w elementach.



Rys. 4. Spadek funkcji celu w iteracyjnym procesie identyfikacji współczynnika modyfikacji sztywności.



#### 4.2 Identyfikacja odkształceń plastycznych.

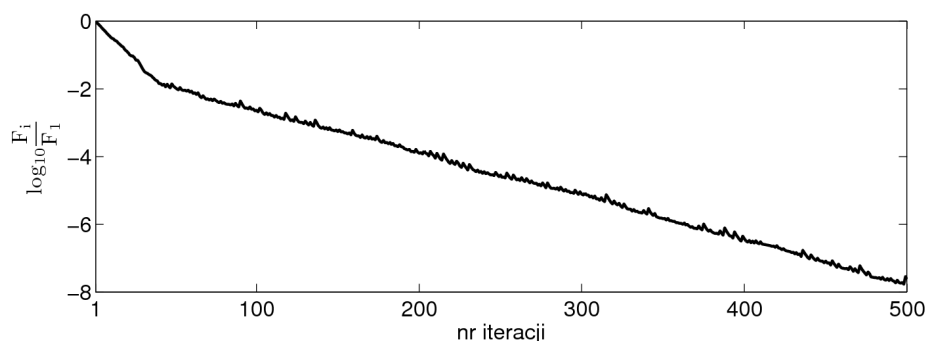
Następny przykład dotyczy identyfikacji odkształceń plastycznych, w którym przyjęto, że wszystkie elementy kratownicy wykonano z materiału sprężysto – idealnie plastycznego ( $E_{\alpha}^* = 0_{\alpha}$ ), przy czym granica plastyczności na rozciąganie i ściskanie wynosi  $\sigma_{\alpha}^u = 210$  MPa. Zaaplikowane obciążenie  $P$  powoduje uplastycznienie czterech elementów konstrukcji: 3, 7, 9, 11 (por rys. 2). Obliczenia tej konstrukcji wykonano metodą Newton-Raphsona, a otrzymany wektor odkształceń  $\varepsilon_{\alpha}^M$  i naprężeń  $\sigma_{\alpha}^M$  (konstrukcja zmodyfikowana) przedstawiono w tab. 3 w kolumnie oznaczonej odpowiednio (3) i (4). Warto w tym miejscu podkreślić, że zarówno odkształcenia referencyjne  $\varepsilon_{\alpha}^L$  (konstrukcja pierwotna) jak i macierz wpływu  $D_{\alpha\beta}$  obliczono przy zachowaniu liniowego prawa konstytutywnego. Z tabeli 3 (kolumna (2)) wynika, że w konstrukcji pierwotnej zostały przekroczone naprężenia  $\sigma_{\alpha}^L$  w 2 elementach: 3 i 9. Celem optymalizacji jest wyznaczenie takiego pola dystorsji wirtualnych  $\varepsilon_{\alpha}^0$ , aby odkształcenia konstrukcji zmodyfikowanej i modelowanej były tożsame z zachowaniem ograniczeń naprężeniowych.

**Tabela 3.** Zestawienie wybranych wyników obliczeń konstrukcji pierwotnej, zmodyfikowanej i modelowanej.

| $\alpha$ | Konstrukcja pierwotna                |                              | Konstrukcja zmodyfikowana (Newton – Raphson) |                              | Konstrukcja modelowana (VDM)         |                                    |                            |
|----------|--------------------------------------|------------------------------|--|------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|----------------------------|
|          | $\varepsilon_{\alpha}^L$<br>[x0.001] | $\sigma_{\alpha}^L$<br>[MPa] | $\varepsilon_{\alpha}^M$<br>[x0.001]         | $\sigma_{\alpha}^M$<br>[MPa] | $\varepsilon_{\alpha}^0$<br>[x0.001] | $\varepsilon_{\alpha}$<br>[x0.001] | $\sigma_{\alpha}$<br>[MPa] |
|          | (1)                                  | (2)                          | (3)  | (4)                          | (5)                                  | (6)                                | (7)                        |
| 1        | 0.4138                               | 86.91                        | 0.5155                                       | 108.26                       | 0                                    | 0.5155                             | 108.25                     |
| 2        | 0.0500                               | 10.49                        | 0.1060                                       | 22.27                        | 0                                    | 0.1060                             | 22.27                      |
| 3        | -1.0698                              | -224.65                      | -2.2354                                      | -210.00                      | -1.2353                              | -2.2354                            | -210.00                    |
| 4        | 0.3103                               | 6.515                        | 0.0394                                       | 8.28                         | 0                                    | 0.0394                             | 8.28                       |
| 5        | -0.6132                              | -128.78                      | -0.8464                                      | -177.73                      | 0                                    | -0.8464                            | -177.73                    |
| 6        | 0.3001                               | 63.02                        | 0.4005                                       | 84.11                        | 0                                    | 0.4005                             | 84.11                      |
| 7        | -0.9174                              | -192.65                      | -1.4648                                      | -210.00                      | -0.4646                              | -1.4648                            | -210.00                    |
| 8        | 0.8739                               | 183.52                       | 0.9835                                       | 206.53                       | 0                                    | 0.9835                             | 206.51                     |
| 9        | -1.1601                              | -243.62                      | -2.7082                                      | -210.00                      | -1.7080                              | -2.7082                            | -210.00                    |
| 10       | 0.2615                               | 54.92                        | 0.3179                                       | 66.76                        | 0                                    | 0.3179                             | 66.76                      |
| 11       | -0.6429                              | -135.01                      | -1.1845                                      | -210.00                      | -0.1836                              | -1.1845                            | -210.00                    |
| 12       | 0.0670                               | 14.07                        | -0.6548                                      | -137.50                      | 0                                    | -0.6548                            | -137.47                    |

Funkcję celu zdefiniowano wg wzoru (14), przy czym przyjęto stałą  $c = 210 \left[ \frac{1}{\text{GPa}} \right]$  oraz liczbę iteracji równą 500. Spadek funkcji celu (wg wzoru (18)) w kolejnych iteracjach pokazano na rys. 5. W odróżnieniu od rys. 4, widoczne są tu niewielkie, lokalne zaburzenia funkcji celu w kolejnych iteracjach spowodowane ingerencją funkcji kary. W kolumnach

(5), (6) i (7) tabeli 3 przedstawiono optymalne pole dystorsji wirtualnych oraz odkształcenia i naprężenia konstrukcji modelowanej (równe analogicznym wielkościom dla konstrukcji zmodyfikowanej).



Rys. 5. Spadek funkcji celu w iteracyjnym procesie identyfikacji odkształceń plastycznych.

Konstrukcja przedstawiona na rys. 2 jest 4-krotnie statycznie niewyznaczalna, a to oznacza, że przy zwiększaniu wartości obciążenia  $P$  kolejny uplastyczniony element jest równoznaczny ze zniszczeniem konstrukcji (przekształceniem jej w mechanizm kinematyczny).

## 5. DYSKUSJA

Celem systemu monitorowania stanu technicznego konstrukcji jest wykrycie uszkodzeń w tej konstrukcji przy zastosowaniu określonej strategii. Niezależnie od przyjętej strategii, na system monitorowania konstrukcji składają się:

- monitorowana konstrukcja – obiekty inżynierskie (mosty i wiadukty, budowle, samoloty, statki powietrzne, elementy urządzeń wirujących, struktury kompozytowe);
- czujniki – do pomiaru odkształceń, przemieszczeń przyspieszeń, naprężeń, ciśnienia, temperatury, prędkości wiatru, itp. (światłowody, tensometry, akcelerometry, czujniki piezoelektryczne). Z uwagi na statyczny charakter obciążenia, do identyfikacji stref plastycznych odpowiednie są czujniki światłowodowe (por. [5]) lub tensometryczne;
- systemy akwizycji danych – określenie wymuszenia, częstości dokonywania pomiarów, rozdzielczości mierzonych sygnałów, stosowanych filtrów;
- transfer i zapis danych w centrum komputerowym, w którym dokonywana jest obróbka sygnałów, interpretacja danych i końcowa ocena stanu technicznego. Wyróżnia się kilka poziomów identyfikacji uszkodzeń:
  - stwierdzenie obecności defektu,
  - lokalizacja defektu,
  - intensywności defektu,
  - ocena żywotności konstrukcji.

Przedstawiony w poprzednich rozdziałach algorytm identyfikacji stref plastycznych (przy założeniu wolno narastającego obciążenia) jest jednym z elementów rzeczywistego systemu monitorującego służącego do ostrzegania przed stanami przedawaryjnymi.

## 6. WNIOSKI

W niniejszej pracy zaproponowano metodologię automatycznego wykrywania odkształceń plastycznych w konstrukcjach szkieletowych poddanych wolno narastającemu obciążeniu. Algorytm ten, obok przetworników pomiarowych oraz akwizycji i transmisji danych, stanowi część systemu monitorującego rozwój stref plastycznych w elementach konstrukcji. Pod tym względem system ten jest nowatorski w inżynierii bezpieczeństwa, wspomagający decyzje zarządców obiektów w sytuacjach zagrożenia (o ewakuacji ludzi lub zamknięciu tych obiektów).

Przeprowadzono testy numeryczne na przykładzie kratownicy, które wykazały poprawność i efektywność zaprezentowanego algorytmu zarówno w odniesieniu do identyfikacji utraty sztywności jak i do powstawania stref plastycznych w konstrukcjach.

Dalszym etapem badań jest weryfikacja doświadczalna przy użyciu zarejestrowanych danych za pomocą czujników i aparatury pomiarowej.

### Podziękowania

Badania realizowane w ramach programu TEAM Fundacji na rzecz Nauki Polskiej współfinansowany ze środków EFRR PO IG 2007-2013 oraz projektu MONIT „Monitorowanie Stanu Technicznego Konstrukcji i Ocena jej Żywotności”, POIG.0101.02-00-013/08-00, finansowanego z Funduszy Strukturalnych UE.

### Literatura

- [1] Holnicki-Szulc J.(ed.): *Smart Technologies for Safety Engineering*, Wiley, 2008.
- [2] Kołakowski P.: *Damage Identification by the Static Virtual Distortion Method*, Engineering Transactions, vol. 52, no. 4, 2004.
- [3] Kołakowski P, Zieliński T.G, Holnicki-Szulc J.: *Damage identification by Dynamic Virtual Distortion Method*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol. 15, no. 6, pp. 479-494, 2004.
- [4] Świercz A., Kołakowski P., Holnicki-Szulc J., (2008) *Damage identification in skeletal structures using the virtual distortion method in frequency domain*, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 22, no. 8, pp. 1826-1839, 2009.
- [5] Glisic B, Inaudi D: *Fibre Optic Methods for Structural Health Monitoring*, Wiley, 2008.

### MONITORING OF PROGRESSIVE COLLAPSE OF SKELETAL STRUCTURES

*The authors propose an idea of monitoring of the state of skeletal structures of high importance (e.g. roof structures over large-area buildings) with the aim of identification of slowly-developing plastic zones. This is formulated as an inverse problem within the framework of the Virtual Distortion Method, which was used previously to identify stiffness/mass modifications in skeletal structures. Permanent plastic strains developed in a truss element can be modeled by an initial strain (virtual distortion) introduced to the structure. As the formation of subsequent plastic zones in the structure is assumed to be slow, the design variable (plastic strain) is time-independent, which makes the inverse analysis efficient. This article presents algorithms for identification of the stiffness modifications as well as plastic strains for truss structures. The identification is defined as gradient-based optimization and performed for both cases (numerical examples).*