

## **MODELOWANIE TERMO-SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH DEFORMACJI TERMICZNEGO SIŁOWNIKA DWUMOSTKOWEGO**

**Jacek Widłaszewski**

*Zakład Wytrzymałości Materiałów*  
*Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN*  
ul. Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa, Polska  
e-mail: jwidl@ippt.gov.pl

### **Abstract**

Constrained thermal deformation of the material is applied in thermal forming processes. Touch-less precise positioning is performed in industry using the laser beam as a heat source. Experimental and theoretical investigation of laser-induced deformations of the two-bridge actuators made of a low-carbon steel and 18/8 type stainless steel is presented. The described model is based on the one-dimensional heat conduction model. Thermo-elastic-plastic deformations of the structure under consideration are calculated using thermal deformation and stress analysis, as well as conditions of material yield. Deformations are calculated in dependence on thermal processing, geometry and material parameters. Modelling methods of thermoplastic behaviour of metals are presented as tools to achieve possibly accurate description of plastic deformation.

### **Streszczenie**

W procesach kształtowania termicznego wykorzystuje się wewnętrzne ograniczenia swobody deformacji termicznej. Przy użyciu wiązki laserowej jako źródła ciepła, w praktyce przemysłowej realizowane są procesy precyzyjnego bezdotykowego pozycjonowania. W pracy przedstawione są badania eksperymentalne nad laserowym indukowaniem deformacji modeli dwumostkowego siłownika termicznego wykonanych ze stali niskowęglowej oraz stali nierdzewnej typu 18/8. Omówiony model analityczno-numeryczny opiera się na jednowymiarowym modelu przewodzenia ciepła. Analiza deformacji i naprężenia termicznego oraz warunków uplastycznienia materiału pozwala wyznaczać termo-sprężysto-plastyczne deformacje analizowanej konstrukcji w zależności od parametrów oddziaływania termicznego, parametrów geometrycznych i własności materiału. Przedstawione zostały sposoby modelowania termoplastycznych własności metali i ich stopów w celu możliwie dokładnego określania warunków powstawania deformacji plastycznych.

**Słowa kluczowe:** kształtowanie termiczne, kształtowanie laserowe, siłownik termiczny dwumostkowy, modelowanie analityczne.

## 1. Wstęp

Jeśli odkształcenie ciała izotropowego pod wpływem zmiany temperatury zachodzi w sposób swobodny, pole temperatury jest liniową funkcją współrzędnych przestrzennych, a przemieszczenia opisaną są funkcjami ciągłymi, wówczas w ciele nie pojawiają się naprężenia termiczne [Boley, Weiner 1960, str. 244, 273]. Jednak, gdy rozszerzanie się lub skurcz termiczny napotykają przeszkody w postaci ograniczeń lub pole temperatury jest nieliniową funkcją współrzędnych, to powstające naprężenia mogą spowodować uplastycznienie materiału i trwałą deformację ciała. Jako *zewnętrzne ograniczenia* swobody odkształceń termicznych Jakowluk (1993, str. 211) określa więzy zewnętrzne, w których pod wpływem odkształcenia termicznego pojawiają się siły reakcji przeciwstawiające się deformacji termicznej ciała, natomiast ograniczenia swobody deformacji materiału wynikające z nieliniowości rozkładu temperatury lub niejednorodności strukturalnej nazywa *ograniczeniami wewnętrznymi* [Jakowluk 1993, str. 213]. Oba typy ograniczeń swobody odkształceń termicznych są źródłem naprężeń powodujących zmęczenie termiczne i są wykorzystywane do celowego wywoływania naprężeń w badaniach nad tym zjawiskiem.

Deformacje trwałe, które powstają w warunkach ograniczenia swobody odkształceń termicznych są celowo wykorzystywane również w procesach kształtowania termicznego. Bez udziału sił zewnętrznych, tylko poprzez lokalne oddziaływanie cieplne, uzyskuje się zamierzoną zmianę kształtu przedmiotu obrabianego. Przegląd mechanizmów, metod i zastosowań kształtowania termicznego jest przedstawiony w pracy [Widłaszewski 2003].

Jednym z zastosowań kształtowania termicznego jest bezdotykowe, precyzyjne pozycjonowanie elementów konstrukcyjnych w miniaturowych podzespołach elektromechanicznych [Steiger 1984], [Kitada, Asahi 2002], [Matsushita 2003] i optoelektronicznych [Müller, Huber 2000], [Hoving 2001]. Na przeciwnym biegunie pod względem skali obiektów i wywoływanej deformacji znajduje się termiczne kształtowanie blach poszycia statków [Jang, Seo i in. 1997], [Yu, Anderson i in. 2001]. Zarówno w przypadku deformacji w skali mikro, jak i w skali makro, podstawowym efektem wykorzystywanym do zmiany kształtu jest efekt spęczania termicznego, to jest deformacji plastycznej występującej w warunkach ograniczenia swobody deformacji termicznej. Badania eksperymentalne deformacji termo-sprężysto-plastycznych i doskonalenie modeli teoretycznych mają na celu zwiększenie dokładności procesów kształtowania termicznego realizowanych w praktyce przemysłowej, a także poprawę efektywności metod ich modelowania i projektowania.

Zagadnienia deformacji termo-sprężysto-plastycznych są złożonymi zagadnieniami nieliniowymi ze względu na zależność parametrów materiałowych od temperatury oraz nieliniowość warunków brzegowych. Mimo ciągłego wzrostu mocy obliczeniowej dostępnych komputerów, koszt i czas wymagany do uzyskania roz-

wiązania o dostatecznej dokładności nadal stanowią istotne czynniki w prowadzeniu analizy i praktycznym wykorzystaniu symulacji numerycznych procesów kształtowania termicznego. Stąd, poszukiwane są sposoby uproszczonego wyznaczania deformacji indukowanej termicznie przy użyciu metody elementów skończonych [Clausen 2000], [Yu, Anderson i in. 2001], [Jang, Moon i in. 2000], [Jang, Seo i in. 2001].

Uproszczenie analizy można uzyskać zakładając, iż znana jest granica obszaru uplastycznienia materiału [Boley, Weiner 1960, str. 530]. W literaturze przedmiotu powszechnie przyjmuje się, że granicę obszaru uplastycznienia wyznacza maksymalny zasięg izotermy temperatury zwanej *temperaturą krytyczną*, *temperaturą utraty własności sprężystych* lub *temperaturą uplastycznienia*. Koncepcję temperatury krytycznej zastosował Mura (1957) w analizie naprężeń własnych pozostających w walcu pod wpływem działania zmiennego pola temperatury. Przyjął on, że materiał zachowuje się sprężystość poniżej temperatury krytycznej, a powyżej niej jest doskonale plastyczny z zerową wartością naprężenia uplastycznienia [Boley, Weiner 1960, str. 561].

W innym przykładzie Boley i Weiner (1960, str. 553) przedstawili analizę zmian objętościowych odpowiadających przemianom fazowym materiału. Zmianę objętości właściwej materiału zamodelowano w postaci skokowego ekwiwalentnego odkształcenia termicznego. Fakt pojawienia się przemiany fazowej związane z osiągnięciem odpowiedniej temperatury, nazywanej temperaturą krytyczną. Rozwiązanie analityczne zagadnienia sprężysto-plastycznego w postaci zamkniętej uzyskano dzięki możliwości określania położenia granicy obszaru uplastycznionego.

Koncepcja temperatury krytycznej jest z powodzeniem wykorzystywana w obliczeniach deformacji i naprężeń własnych towarzyszących różnym operacjom realizowanym w podwyższonej temperaturze: procesom spawania, przy wyznaczaniu dystorsji i naprężeń spawalniczych [Watanabe, Satoh 1961, str. 379], [Myśliwiec 1972, str. 175], w procesach obróbki cieplnej, a od stosunkowo niedawna – w zagadnieniach kształtowania termicznego [Vollertsen, Rödle 1994], [Mucha, Hoffman i in. 1997].

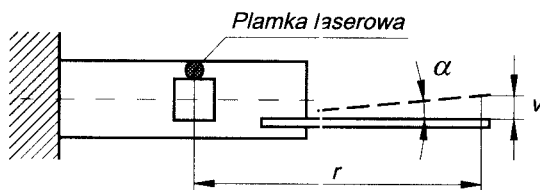
Niniejsza praca prezentuje opis analityczny termicznie indukowanych deformacji miniaturowej konstrukcji ramowej. Rozpatrywana konstrukcja jest modelem tak zwanego termicznego siłownika dwumostkowego (ang. two-bridge actuator) służącego do laserowego pozycjonowania z dokładnością rzędu mikronów przy montażu elementów optoelektronicznych. Analiza wykorzystuje koncepcję temperatury krytycznej, a rozpatrywane zagadnienie pozwala na osadzenie tego pojęcia w szerszym kontekście i pogłębienie zrozumienia procesów kształtowania termicznego.

Metoda rozwiązania szczegółowo została przedstawiona w pracy [Widłaszewski 2004]. W niniejszej pracy natomiast więcej uwagi poświęcono pojęciu tem-

peratury krytycznej. W tym celu pokrótce przedstawione są zjawiska i procesy związane z plastycznym zachowaniem metali i ich stopów w podwyższonej temperaturze, a także skrótowo omówione są współczesne sposoby modelowania wpływu temperatury i innych czynników na naprężenie uplastyczniające. Dają one podstawę do racjonalnego przewidywania warunków, przy których nastąpi uplastycznienie materiału, a zatem do lepszego wyznaczania granicy obszaru uplastycznienia i zwiększenia dokładności modelowania deformacji trwałych indukowanych termicznie.

## 2. Badania eksperymentalne

Przedmiotem badań były próbki wykonane ze stali zwykłej niskowęglowej oraz z nierdzewnej austenitycznej stali chromowo-niklowej 1H18N9T należącej do stali typu 18/8 zawierających około 18% Cr i około 9% Ni. Kształt próbek, miejsce nagrzewania wiązką lasera Nd:YAG oraz sposób mierzenia deformacji kątovej przedstawia rys. 1.



Rysunek 1. Pomiar deformacji kątovej próbki nagrzewanej wiązką laserową.

Próbki ze stali niskowęglowej o grubości 0,815 mm były wykrawane z blachy i wyżarzane w piecu w temperaturze 400°C przez 0,5 godz., a próbki ze stali nierdzewnej o grubości 0,505 mm były wycinane laserowo, a następnie wyżarzane w piecu w temperaturze 500°C przez 0,5 godz. dla zmniejszenia naprężeń własnych i uzyskania powłoki tlenkowej zapewniającej stabilne warunki absorpcji promieniowania laserowego podczas eksperymentów. Deformacja kątovej była obliczana na podstawie bezdotykowych pomiarów przemieszczenia liniowego  $\nu$  wykonywanych z użyciem laserowego mikrometru skanującego. Mikrometr laserowy mierzył zmianę pozycji dodatkowego elementu o dobrej jakości powierzchni i niewielkiej masie, który był przymocowany do próbki. Kąt  $\alpha$  używany jako miara deformacji próbki był obliczany z wyrażenia  $\alpha = \arctg(\nu/r)$ , na podstawie promienia  $r$  i przemieszczenia liniowego  $\nu$ .

## 3. Model teoretyczny

W analizie zachowania siłowników termicznych przeznaczonych do mikropozycjonowania dotychczas wykorzystywane były głównie badania eksperymental-

ne oraz symulacje metodą elementów skończonych [Hoving 2000], [Huber, Müller i in. 2001], [Müller, Huber i in. 1999], [Olowinsky, Bosse 2003]. Ostatnio został przedstawiony model analityczny [Otto 2005], w którym wykorzystano uproszczoną analizę termiczną.

Rozwiązania analityczne na ogół wymagają wprowadzenia znacznych uproszczeń przy modelowaniu zagadnień rzeczywistych. Są jednak one wysoko cenione ze względu na możliwość wniknięcia w naturę zjawisk i procesów, możliwość zrozumienia roli poszczególnych parametrów oraz łatwość przeprowadzenia optymalizacji dla osiągnięcia pożądaných efektów praktycznych.

Już w przypadku termosprężystych zagadnień brzegowo-początkowych konieczne jest wprowadzanie znacznych założeń upraszczających, a znalezienie odpowiedniego rozwiązania często wymaga wiele pomysłowości [Boley, Weiner 1960, str. 270]. Metody analityczne takie, jak metoda rozdzielania zmiennych (metoda funkcji charakterystycznych), transformacja Laplace'a, czy metoda odwzorowań konforemnych mogą być stosowane do liniowych zagadnień brzegowo-początkowych. Dla uzyskiwania rozwiązań zagadnień nieliniowych konieczne jest stosowanie metod numerycznych. Wyniki metody elementów skończonych i innych metod numerycznych dotyczą szczegółowych zadań. Określenie wpływu poszczególnych wielkości występujących w zagadnieniu (parametrów materiałowych lub parametrów oddziaływania na materiał) wymaga uzyskania rozwiązań szeregu zadań, a następnie aproksymacji lub ekstrapolacji wyników numerycznych. Zastosowanie metody numerycznej do rozwiązania zagadnienia wymiany ciepła pociąga za sobą konieczność użycia również metody numerycznej do analizy naprężeń i odkształceń termicznych.

Do sposobów uzyskiwania wartościowych rozwiązań przybliżonych należy zastosowanie metod wytrzymałości materiałów, nazywanych również metodami inżynierskimi lub elementarnymi. Boley i Weiner (1960) nazywają teorię wytrzymałości materiałów „sercem praktycznej analizy naprężeń termicznych lub innych” (str. 270). Mając solidne podstawy teoretyczne, dzięki uproszczeniom dostosowanym do opisu i analizy typowych elementów konstrukcyjnych, takich jak pręty, belki, ramy, tarcze i płyty, metody tej teorii pozwalają modelować, wyjaśniać i przewidywać zachowanie poszczególnych elementów oraz złożonych konstrukcji z dokładnością dostateczną dla praktycznych zastosowań.

Złożoność zagadnień termo-sprężysto-plastycznych z nieustalonym przepływem ciepła wymaga przyjmowania założeń maksymalnie upraszczających, jeżeli celem jest uzyskanie rozwiązań analitycznych lub analityczno-numerycznych. Stąd wynika potrzeba stosowania metod wytrzymałości materiałów w analizie rozprężonego zagadnienia termo-mechanicznego.

Efektywność metod wytrzymałości materiałów wynika z wykorzystania założeń upraszczających związanych z kształtem geometrycznym analizowanego obiektu, przybliżania stanu naprężenia i odkształcenia przez łatwiejszy w anali-

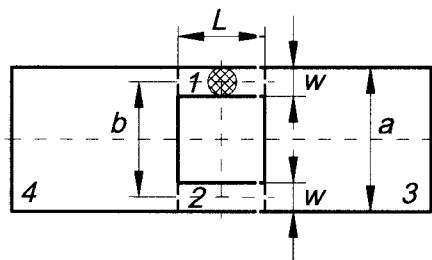
zie, płaski stan naprężenia lub płaski stan odkształcenia, wykorzystanie zasady de Saint-Venanta oraz hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego-Eulera.

### 3.1. Założenia wstępne

Ze względu na stosunkowo niską prędkość zmian temperatury i prędkość odkształcenia można pominąć efekty bezwładnościowe oraz wpływ odkształcenia materiału na jego temperaturę i dzięki temu rozważane zagadnienie termomechaniczne traktować jako problem niesprężony i quasistatyczny. Dzięki tym założeniom analizę termo-sprężysto-plastycznych deformacji można podzielić na określenie zależnego od czasu rozkładu temperatury i wyznaczenie następnie deformacji na podstawie odkształcenia termicznego i analizy sił wewnętrznych.

Rozważana konstrukcja jest traktowana jako miniaturowa konstrukcja ramowa składająca się z czterech segmentów (rys. 2):

- 1 i 2 – belki ulegające deformacji wzdłużnej i giętnej; segment 1 jest ogrzewany w części środkowej wiązką laserową,
- 3 i 4 – tarcze, to jest elementy dużo bardziej sztywne przy deformacji w swojej płaszczyźnie niż belki 1 i 2, i dlatego traktowane jako bryły sztywne.

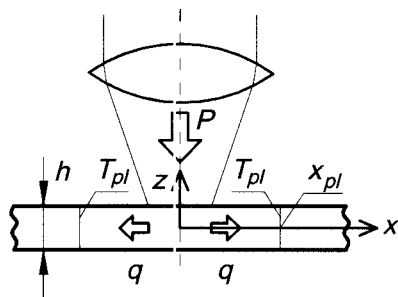


Rysunek 2. Podział konstrukcji na segmenty funkcjonalne.

### 3.2. Pole temperatury

Zgrubne oszacowanie mocy ciepła przekazywanego drogą przewodnictwa wskazuje, iż w rozpatrywanym zakresie parametrów obróbki dyssypacja ciepła drogą konwekcji i promieniowania ma niewielki udział w całkowitej wymianie ciepła [Widłaszewski 2004]. Korzystając z tej obserwacji przyjmuje się jednowymiarowy model przepływu ciepła wzdłuż ogrzewanego segmentu 1 konstrukcji, w kierunku każdego z końców (rys. 3). Wykorzystuje się przy tym zasadę Saint-Venanta zastosowaną do wymiany ciepła drogą przewodnictwa [Boley, Weiner 1960, str. 183].

Przyrost temperatury  $\Delta T(x, t)$  ponad wartość początkową w jednowymiarowym zagadnieniu przewodzenia ciepła przy działaniu strumienia ciepła o stałej gęstości  $q$  przez czas  $t_h$  opisują zależności [Carslaw, Jaeger 1946]:



Rysunek 3. Schemat przepływu ciepła w segmencie 1.

1) podczas działania źródła ciepła ( $t \leq t_h$ , faza nagrzewania)

$$\Delta T(x, t) = \frac{2q}{\lambda} \sqrt{\kappa t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right); \quad (1)$$

2) po zakończeniu działania źródła ciepła ( $t > t_h$ )

$$\Delta T(x, t) = \frac{2q}{\lambda} \left[ \sqrt{\kappa t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - \sqrt{\kappa(t-t_h)} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-t_h)}}\right) \right], \quad (2)$$

gdzie  $q$  jest strumieniem ciepła obliczonym w rozważanym zagadnieniu jako

$$q = \frac{AP}{2S} \quad (3)$$

$A$  – współczynnik absorpcji promieniowania;  $P$  – moc wiązki laserowej;  $\kappa = \lambda/\rho c$  – współczynnik wyrównywania temperatury;  $\lambda$  – współczynnik przewodzenia ciepła;  $\rho$  – gęstość materiału;  $c$  – ciepło właściwe materiału;  $S$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego segmentu ogrzewanego wiązką laserową;  $S = wh$ ;  $w$  – szerokość segmentu;  $h$  – grubość materiału;  $t$  – czas. Funkcja  $\operatorname{ierfc}(u)$  jest całką uzupełniającą funkcji błędów Gaussa  $\operatorname{erfc}(u)$ .

Maksymalny przyrost temperatury w fazie nagrzewania występuje w przekroju środkowym ( $x = 0$ ) i jest opisany zależnością

$$\Delta T_{\max} = \frac{AP}{\rho c S} \sqrt{\frac{t}{\pi \kappa}}. \quad (4)$$

Przyrost  $\Delta L_1^T$  długości segmentu 1 z powodu zmiany temperatury i rozszerzalności termicznej jest opisany następującą zależnością

$$\Delta L_1^T = 2 \int_0^{L/2} \alpha_T \Delta T(x, t) dx, \quad (5)$$

gdzie  $L$  jest długością segmentu 1;  $\alpha_T$  jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności termicznej.

Przyjmując stałą wartość współczynnika rozszerzalności termicznej  $\alpha_T$ , niezależną od temperatury, oraz wykorzystując wzór (2), przyrost  $\Delta L_1^T$  długości segmentu w fazie nagrzewania ( $t \leq t_h$ ) wyraża równanie

$$\Delta L_1^T = \frac{4\alpha_T q \sqrt{\kappa t}}{\lambda} \int_0^{L/2} \text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) dx. \quad (6)$$

Po wykonaniu całkowania i wykorzystaniu zależności (3) otrzymujemy

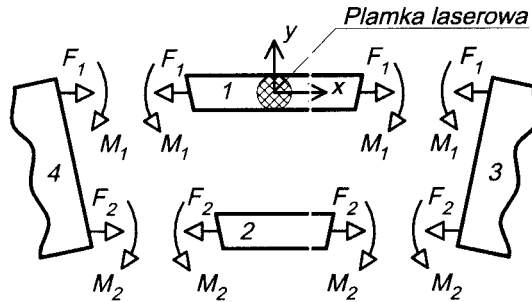
$$\Delta L_1^T = \frac{A P \alpha_T t}{\rho c S} \left[ \text{erf}\left(\frac{L}{4\sqrt{\kappa t}}\right) + \frac{L}{2\sqrt{\kappa t}} \text{ierfc}\left(\frac{L}{4\sqrt{\kappa t}}\right) \right]. \quad (7)$$

Przyrost długości segmentu 1 z powodu lokalnej zmiany temperatury jest źródłem naprężeń termicznych w rozpatrywanej konstrukcji.

### 3.3. Analiza sił wewnętrznych

Stosuje się założenie Bernoulliego–Eulera mówiące, że przekroje belki, które przed obciążeniem są płaskie i prostopadłe do jej osi, pozostają takimi po obciążeniu, a także, iż wpływ odkształcenia poprzecznego belki może być pominięty.

Schemat sił i momentów sił działających na poszczególne segmenty konstrukcji jest przedstawiony na rys. 4.



Rysunek 4. Przyjęty układ sił wewnętrznych.

Z warunków równowagi otrzymujemy następujące związki

$$F_2 = -F_1, \quad (8)$$

$$M_2 = F_2 b - M_1, \quad (9)$$

gdzie  $b = a - w$  jest odległością pomiędzy wzdłużnymi osiami segmentów 1 i 2 (rys. 2).



Zmiany długości segmentów 1 i 2 z powodu działania sił wzdłużnych wynoszą odpowiednio

$$\Delta L_1^F = \frac{F_1 L}{k_F}; \quad \Delta L_2^F = \frac{F_2 L}{k_F}, \quad (10)$$

gdzie  $k_F = ES$  jest sztywnością wzdłużną segmentów 1 i 2;  $E$  jest modułem Younga.

Zakładając, że temperatura segmentu 2 nie ulega znaczącej zmianie podczas ogrzewania segmentu 1, chwilowe długości segmentów odpowiednio 1 i 2, określają wyrażenia:

$$L_1 = L + \Delta L_1^T + \Delta L_1^F; \quad L_2 = L + \Delta L_2^F. \quad (11)$$

Korzystając z teorii czystego zginania otrzymujemy zależności na kąt deformacji  $\alpha$  segmentów 1 i 2

$$\alpha = -\frac{M_1 L}{k_M} = -\frac{M_2 L}{k_M}, \quad (12)$$

gdzie  $k_M = EJ_z$  jest sztywnością giętą segmentów 1 i 2;  $J_z = hw^3/12$  jest momentem bezwładności prostokątnych przekrojów poprzecznych segmentów 1 i 2 względem osi centralnych, równoległych do osi  $z$ .

Z równań (12) otrzymujemy

$$M_1 = M_2. \quad (13)$$

Dla małych deformacji konstrukcji można wykorzystać następujące przybliżenie

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = -\frac{L_1 - L_2}{b}. \quad (14)$$

Z równań od (8) do (11), (13) i (14) otrzymujemy zależności na siłę  $F_1$  i moment  $M_1$  działający na segment 1

$$M_1 = \frac{tk_M k_F}{L(b^2 k_F + 4k_M)} \Delta L_1^T, \quad (15)$$

$$F_1 = -\frac{2k_M k_F}{L(t^2 k_F + 4k_M)} \Delta L_1^T. \quad (16)$$

Korzystając ze związku (12) w równaniu (15) otrzymujemy wzór na kąt deformacji  $\alpha$  w zależności od termicznego przyrostu długości segmentu 1

$$\alpha = -\frac{b k_F}{b^2 k_F + 4k_M} \Delta L_1^T. \quad (17)$$

Jeśli pominiemy sztywność giętą ( $k_M = 0$ ), to powyższy wzór przyjmie prostą postać odnoszącą się do konstrukcji z przegubami

$$\alpha = -\frac{1}{b} \Delta L_1^T. \quad (18)$$

Wykorzystując wzór (7) w równaniu (17) otrzymujemy zależność na termo-sprężystą deformację kątową  $\alpha_{el}(t)$  konstrukcji w fazie nagrzewania

$$\alpha_{el}(t) = -\frac{3AP\alpha_T bt}{\rho ch w(3b^2 + w^2)} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{L}{4\sqrt{\kappa t}}\right) + \frac{L}{2\sqrt{\kappa t}} \operatorname{ierfc}\left(\frac{L}{4\sqrt{\kappa t}}\right) \right]. \quad (19)$$

### 3.4. Naprężenia termiczne

Rozszerzanie się ogrzewanego materiału segmentu 1 jest ograniczone przez otaczającą chłodniejszą część konstrukcji, to jest segmenty 2, 3 i 4. Stopień tego ograniczenia może być wyrażony poprzez współczynnik sztywności podparcia (ang. constraint ratio)  $R$ , stosowany w badaniach nad zmęczeniem termicznym i definiowany dla przypadku jednoosiowego jako [Taira, Ohtani 1986]

$$R = -\frac{\varepsilon^F}{\varepsilon^T}, \quad (20)$$

gdzie  $\varepsilon^F = \sigma/E$  jest odkształceniem wynikającym z działania sił wewnętrznych;  $\sigma$  jest naprężeniem normalnym;  $\varepsilon^T = \alpha_T \Delta T$  jest odkształceniem termicznym. Współczynnik sztywności podparcia  $R$  ma wartość równą 0 dla swobodnej rozszerzalności termicznej ( $\sigma = 0$ ), natomiast jego wartość wynosi 1 w przypadku pełnego utwierdzenia ( $\varepsilon^T = -\varepsilon^F$ ).

Odształcenie  $\varepsilon_1^F$  segmentu 1 od siły osiowej  $F_1$  w stanie sprężystym można obliczyć ze wzoru:

$$\varepsilon_1^F = \frac{F_1}{E \cdot S}. \quad (21)$$

Temperatura w ogrzewanym lokalnie segmencie 1 zmienia się wzdłuż jego osi według rozkładu określonego wzorem (2). Jeśli jednak wyznaczymy średnie odkształcenie termiczne segmentu 1 jako

$$\varepsilon_1^T = \frac{\Delta L_1^T}{L} \quad (22)$$

to można wprowadzić pojęcie współczynnika sztywności podparcia całego segmentu 1,  $R_1 = -\varepsilon_1^F/\varepsilon_1^T$ , który przy wykorzystaniu wzoru (16) daje się wyrazić jako funkcja geometrycznych parametrów konstrukcji

$$R_1 = \frac{w^2}{2(3b^2 + w^2)}. \quad (23)$$

Współczynnik  $R_1$  charakteryzuje sztywność podparcia fragmentu rozpatrywanej konstrukcji, podczas gdy współczynnik  $R$  z definicji jest miarą lokalną ograniczenia swobody deformacji termicznej materiału.

Naprężenie  $\sigma_1^F = F_1/S$  wynikające z istnienia siły  $F_1$  w segmencie 1 można wyrazić korzystając z (7), (16) i (23) jako

$$\sigma_1^F = -R_1 \frac{APE\alpha_T t}{\rho c L S} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L}{4\sqrt{\kappa t}} \right) + \frac{L}{2\sqrt{\kappa t}} \operatorname{ierfc} \left( \frac{L}{4\sqrt{\kappa t}} \right) \right] \quad (24)$$

lub korzystając z (4)

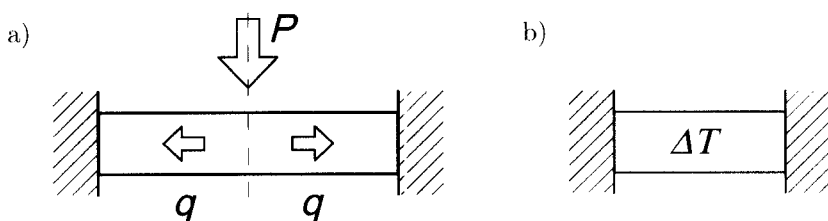
$$\sigma_1^F = -R_1 E\alpha_T \Delta T_{\max} \frac{\sqrt{\pi \kappa t}}{L} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L}{4\sqrt{\kappa t}} \right) + \frac{L}{2\sqrt{\kappa t}} \operatorname{ierfc} \left( \frac{L}{4\sqrt{\kappa t}} \right) \right]. \quad (25)$$

Naprężenie indukowane lokalnym nagrzewaniem pręta utwierdzonego doskonale sztywnie (rys. 5a) można wyprowadzić stosując (7) jako

$$\sigma_a = -E\alpha_T \Delta T_{\max} \frac{\sqrt{\pi \kappa t}}{L} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L}{4\sqrt{\kappa t}} \right) + \frac{L}{2\sqrt{\kappa t}} \operatorname{ierfc} \left( \frac{L}{4\sqrt{\kappa t}} \right) \right]. \quad (26)$$

Dla takiego pręta, lecz nagrzewanego równomiernie (rys. 5b), naprężenie termiczne opisuje zależność

$$\sigma_b = -E\alpha_T \Delta T. \quad (27)$$



Rysunek 5. Pręt sztywno zamocowany i ogrzewany: a) lokalnie, b) równomiernie.

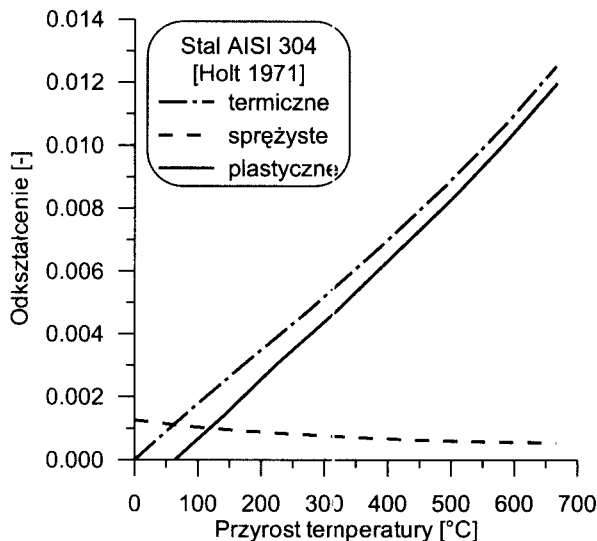
Stąd naprężenie  $\sigma_1^F$  od siły  $F_1$  można wyrazić jako:

$$\sigma_1^F = R_1 \sigma_a. \quad (28)$$

Równania (24)–(28) pokazują rolę zamocowania i sposobu nagrzewania w powstawaniu naprężeń termicznych.

Wraz ze wzrostem temperatury w lokalnie ogrzewanym segmencie 1, narasta w nim siła ściskająca, a jednocześnie maleje zdolność do przenoszenia obciążenia, której miarą jest naprężenie uplastycznienia. Po osiągnięciu przez naprężenie poziomu naprężenia uplastycznienia następuje plastyczne płynięcie materiału. W przypadku jednoosiowego pełnego ograniczenia swobody deformacji termicznej ( $R = 1$ ) stali AISI 304, a więc stali typu 18/8, przebieg narastania

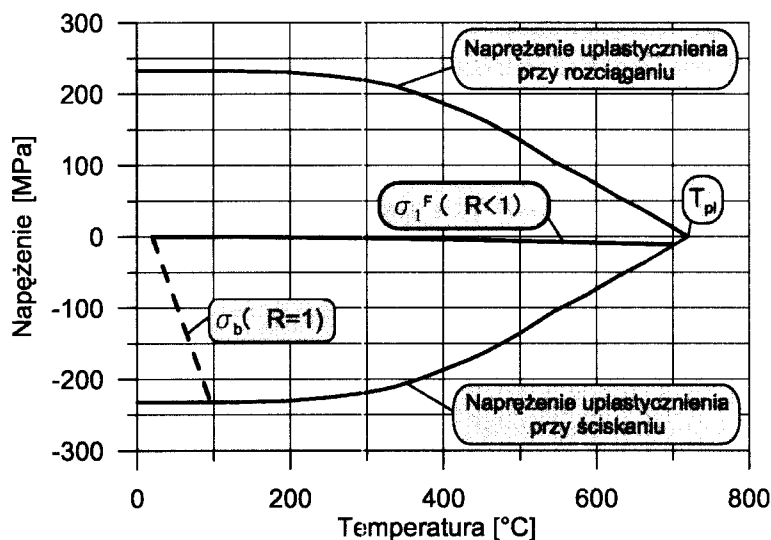
odkształcenia plastycznego wraz ze wzrostem temperatury przedstawia rys. 6, zamieszczony w jednej z pierwszych publikacji na temat kształtowania termicznego [Holt 1971]. Zaznaczone na rysunku odkształcenie sprężyste wynika z przebiegu zależności naprężenia uplastycznienia od temperatury, przy czym pominięto konwencję, według której naprężenie i odkształcenie ściskające ma wartość ujemną. Przy pełnym utwierdzeniu ( $R = 1$ ) odkształcenie plastyczne stali AISI 304 pojawia się już przy wzroście temperatury o około  $60^{\circ}\text{C}$ .



Rysunek 6. Odkształcenia stali nierdzewnej AISI 304 ogrzewanej przy pełnym utwierdzeniu jednoosiowym.

W przypadku mniejszej sztywności podparcia ( $R < 1$ ) dla uzyskania deformacji plastycznej potrzebny jest większy przyrost temperatury. Przebieg zmian naprężenia  $\sigma_1^F$  (25) w funkcji temperatury w przekroju środkowym ( $x = 0$ ) dla badanych próbek ze stali niskowęglowej oraz dla pręta sztywno utwierdzonego ( $R = 1$ , równanie (27)) jest przedstawiony na rys. 7. Zaznaczono również uproszczoną zależność naprężenia uplastycznienia stali niskowęglowej od temperatury, a także wartość temperatury krytycznej rozumianej jako temperatura, przy której naprężenie uplastycznienia materiału ma pomijalną wartość.

W literaturze można znaleźć różne definicje i określenia opisujące pojęcie temperatury krytycznej. Watanabe i Satoh (1961) pisali o temperaturze, w której „materiał nie stawia oporu wobec deformacji”. W artykule Jang, Seo i Ko (1997) jest mowa o „pomijalnej wytrzymałości materiału” w temperaturze krytycznej. Z kolei w pracy Andersona (1999) temperatura krytyczna jest określana jako temperatura, przy której „wytrzymałość materiału jest znacząco zmniejszona”, a „naprężenie uplastycznienia i moduł sprężystości podłużnej przyjmują



Rysunek 7. Naprężenie termiczne w próbkach o parametrach  $h = 0,815$  mm,  $L = 10$  mm,  $b = 8$  mm,  $w = 2$  mm, wykonanych ze stali niskowęglowej.

„pomijalne wartości”. Podobnie Andersen (1998) w dysertacji zwraca uwagę na znikanie naprężenia uplastycznienia, nazywając tę temperaturę „mechanicznym punktem topnienia” (ang. „mechanical melting point”).

O pojawieniu się deformacji plastycznej decydują dwa czynniki: przebieg zmian naprężenia termicznego przy ogrzewaniu konstrukcji oraz temperaturowa zależność naprężenia uplastycznienia danego materiału. Czynnikiem pierwszym jest w analizowanym zagadnieniu określony zależnością (24) lub (25) na naprężenie termiczne. Czynnikiem drugim jest tematem kolejnego rozdziału pracy.

### 3.5. Naprężenie uplastyczniające

Podstawowym mechanizmem powstawania odkształceń trwałych metali i stopów jest przemieszczanie się dyslokacji. Zmiana naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_{pl}$  przy zmianie temperatury wynika z wpływu zjawisk aktywowanych cieplnie na opory ruchu dyslokacji. Wartość naprężenia uplastyczniającego wynika z przebiegu procesów występujących w skali atomowej: poślizg i wspinanie dyslokacji, dyfuzja pojedynczych atomów, przemieszczanie się ziaren względem siebie, bliźniakowanie i innych. Wyrażna granica pomiędzy zachowaniem sprężystym a plastycznym ciał stałych polikrystalicznych występuje tylko w temperaturze zera bezwzględnego [Frost, Ashby 1982, str. 1].

Na wartość naprężenia uplastyczniającego mają wpływ między innymi: gęstość dyslokacji, rozdrobnienie ziaren, procesy starzenia odkształceniowego, umocnienia wydzieleniowego, zdrowienia, czy rekrytalizacji. Przebieg tych pro-

cesów zależy od aktualnej temperatury, stanu odkształcenia i historii odkształcenia. Płynięcie plastyczne, szczególnie w podwyższonej temperaturze, może być uważane za proces aktywowany termicznie [Dieter 1988, str. 310]. Za osłabienie podczas obróbki plastycznej na gorąco odpowiedzialne są dwa mechanizmy [Dieter 1988, str. 529]: (1) zdrowienie dynamiczne w przypadku aluminium i żelaza alfa, (2) rekrytalizacja dynamiczna w przypadku metali z niską energią błędu ułożenia (miedź, nikiel, austenityczna stal nierdzewna).

Temperaturą homologiczną (lub odpowiednią)  $\theta_h$  nazywa się iloraz temperatury aktualnej  $T$  i temperatury topnienia materiału  $T_{top}$ , wyrażonych w skali bezwzględnej ( $\theta_h = T/T_{top}$ ). Powyżej temperatury homologicznej 0,3 dla czystych metali oraz 0,4 dla stopów i materiałów ceramicznych zaznacza się wpływ prędkości odkształcenia na naprężenie uplastycznienia [Frost, Ashby 1982, str. 11].

Złożoność budowy i zjawisk występujących w materiałach polikrystalicznych sprawiają, że ich zachowanie nie może być w ogólności przewidywane z wysoką dokładnością jako funkcja temperatury, odkształcenia, jego prędkości i stanu naprężenia [Dieter 1988, str. 185]. W praktyce korzysta się z zależności bardzo uproszczonych, o ograniczonym zakresie stosowalności [Erbel, Kuczyński i in. 1986, str. 56].

Początkowo próbowano traktować odkształcenie, prędkość odkształcenia i temperaturę podobnie jak zmienne stanu w opisie gazu doskonałego (ciśnienie, objętość i temperatura). Jednak proces deformacji plastycznej nie jest procesem odwracalnym i w ogólnym przypadku nie można traktować naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_{pl}$  jako funkcji odkształcenia  $\varepsilon$ , prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}$  oraz temperatury  $T$ . Naprężenie plastycznego płynięcia zależy głównie od struktury dyslokacyjnej, która wynika z historii zmian odkształcenia, prędkości odkształcenia i temperatury materiału [Dieter 1988, str. 306]. W przypadkach szczególnych, gdy dwa z tych trzech parametrów mają wartości stałe, można określić funkcję naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_{pl}$  w zależności od trzeciego parametru [Erbel, Kuczyński i in. 1986, str. 57].

Równania konstytutywne opisują związki pomiędzy naprężeniem a odkształceniem przy użyciu wielkości prędkości odkształcenia oraz temperatury. Są one formułowane w celu analitycznego i numerycznego modelowania i analizy procesów obróbki plastycznej na gorąco, takich jak walcowanie na gorąco, wyciskanie i kucie. Parametry tych równań zazwyczaj są określane w badaniach termomechanicznych, na przykład w próbie ściskania lub skręcania w podwyższonej temperaturze [Kugler, Knap i in. 2004].

Dla ustalonych wartości odkształcenia i prędkości odkształcenia zależność naprężenia uplastycznienia od temperatury można w ogólnym przypadku przedstawić w postaci [Dieter 1988, str. 303]

$$\sigma_{pl} = C e^{Q/RT}, \quad (29)$$

gdzie  $C$  – stała;  $Q$  – energia aktywacji procesu płynięcia plastycznego,  $R = 8,314$  [J/(mol K)] – uniwersalna stała gazowa. W układzie współrzędnych  $\ln \sigma_{pl}$ ,  $1/T$  wykres zależności (29) jest linią prostą o nachyleniu  $Q/R$ .

Zależność naprężenia  $\sigma_f$  plastycznego płynięcia w stanie ustalonym od prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  i temperatury  $T$  podczas obróbki plastycznej na gorąco często jest opisywana wzorem empirycznym zaproponowanym przez Sellarsa i Tegarta [Sellars, Tegart 1966], [Sellars, Tegart 1972], [Jonas, Sellars, Tegart 1969], [Jonas 1969] [Dieter 1988, str. 307]

$$Z = \dot{\epsilon} \exp\left(\frac{Q}{RT}\right) = A [\sinh(\alpha \sigma_f)]^n, \quad (30)$$

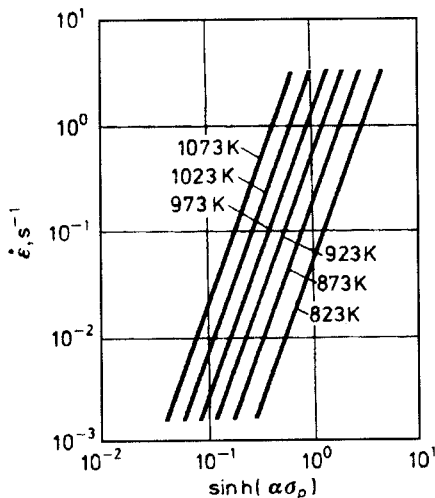
gdzie  $Z$  – parametr *Zennera-Hollomona* [Zenner, Hollomon 1944], czyli parametr intensywności prędkości odkształcenia z uwzględnieniem temperatury (tzw. *szybowana prędkość odkształcenia* [Staub, Adamczyk i in. 1994, str. 129]);  $Q$  – energia aktywacji procesu odkształcenia plastycznego na gorąco;  $n$  – parametr czułości na prędkość odkształcenia z uwzględnieniem temperatury;  $A, \alpha$  – inne stałe materiałowe wyznaczane doświadczalnie.

Dla stałej temperatury i w podwójnie logarytmicznym układzie współrzędnych

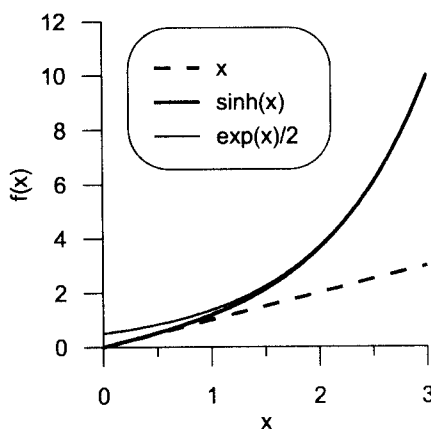
$$x = \log [\sinh(\alpha \sigma_f)], \quad y_1 = \log (\dot{\epsilon}) \quad (31)$$

zależność (30) ma postać linii prostej (rys. 8) o równaniu

$$y_1 = nx + \log A - \frac{Q}{RT \ln 10}. \quad (32)$$



Rysunek 8. Zależność naprężenia plastycznego płynięcia ( $\sigma_p \equiv \sigma_f$ ) od prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  i temperatury  $T$  dla brązu aluminiowego o zawartości 12% Al [Gronostajski, Ziemia 1985].



Rysunek 9. Przybliżenia funkcji  $\sinh(x)$ .

Natomiast wykorzystując parametr Zenera–Hollomona, w podwójnie logarytmicznym układzie współrzędnych

$$x = \log [\sinh(\alpha \sigma_f)], \quad y_2 = \log \left[ \frac{1}{A} \exp\left(\frac{Q}{RT}\right) \dot{\epsilon} \right] \quad (33)$$

zależność (30) ma postać linii prostej o równaniu  $y_2 = nx$ .

Wykorzystując przybliżenia (rys. 9)

- $\sinh x \approx x$  dla  $x < 1$  (błąd maksymalny 15% przy  $x = 1$ ),
- $\sinh x \approx e^x/2$  dla  $x > 1,2$  (błąd maksymalny 10% przy  $x = 1,2$ ),

zależność (30) można dla małych wartości naprężenia ( $\alpha \sigma_f < 1$ ) aproksymować funkcją [Dieter 1988, str. 307]

$$\dot{\epsilon} = A_1 \sigma_f^n e^{-Q/RT}, \quad (34)$$

gdzie  $A_1 = A\alpha^n$ . Stąd

$$\sigma_f = \left( \frac{\dot{\epsilon}}{A_1} \right)^{1/n} e^{Q/nRT}. \quad (35)$$

W przypadku dużych naprężeń ( $\alpha \sigma_f > 1,2$ ) można stosować przybliżenie

$$\dot{\epsilon} = A_2 e^{\beta \sigma_f} e^{-Q/RT}, \quad (36)$$

gdzie  $\beta = \alpha n$ ,  $A_2 = A/2^n$ . Stąd

$$\sigma_f = \frac{Q}{\beta RT} + \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}}{A_2} \right)^{\beta}. \quad (37)$$

Z równania (30) wynika następująca zależność na naprężenie plastycznego płynięcia

$$\sigma_f = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arsinh} \left[ \left( \frac{\dot{\epsilon}}{A} e^{Q/RT} \right)^{1/n} \right]. \quad (38)$$

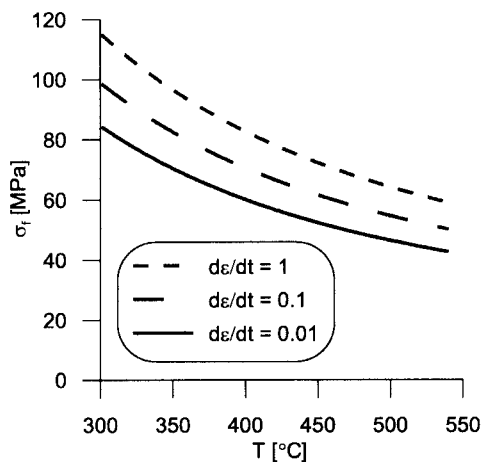
Wartość energii aktywacji odkształcenia plastycznego  $Q$  dla wybranych materiałów jest przedstawiona w tabeli 1.

Przykład wyznaczania parametrów materiałowych występujących w zależności zaproponowanej przez Sellarsa i Tegarta zawiera praca Kuglera, Knapa i in. (2004). Na podstawie prób ściskania stopu aluminium 6082 z prędkością odkształcenia 0,01, 0,1 i 1 [1/s] w temperaturze 300÷540°C, z maksymalnym odkształceniem 0,4, wyznaczyli oni następujące wartości parametrów występujących w równaniach (30) i (38):  $Q = 158,4$  kJ/mol,  $n = 14$ ,  $A = 2,85 \cdot 10^{18}$  [1/s],  $\alpha = 0,0043$  [1/MPa]. Przykłady zamodelowania zależności naprężenie plastycznego płynięcia w stanie ustalonym  $\sigma_f$  od temperatury i prędkości odkształcenia są przedstawione na rys. 10 [Kugler, Knap i in. 2004].

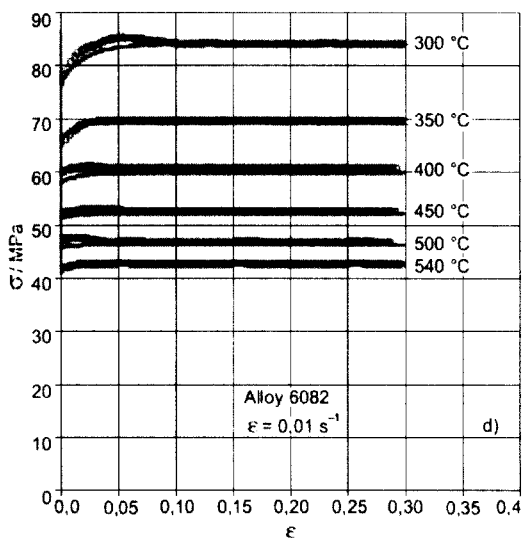


Tabela 1. Energia aktywacji odkształcenia plastycznego wybranych materiałów w podwyższonej temperaturze [Staub, Adamczyk i in. 1994, str. 129].

Materiał	$Q$ [kJ/mol]
Al	126 ÷ 180 155 ÷ 184
Ni	297
Cu	299
Fe- $\alpha$	248 ÷ 278
Stal 0,05% C	281 ÷ 322
Stal 0,25% C	299 ÷ 343
Stal chromowo-niklowa 18-8	414 ÷ 306



Rysunek 10. Zależność naprężenia plastycznego płynięcia w stanie ustalonym  $\sigma_f$  od temperatury i prędkości odkształcania stopu aluminium 6082 [Kugler, Knap i in. 2004].



Rysunek 11. Krzywe umocnienia stopu aluminium 6082 [Kugler, Knap i in. 2004].

Jak pokazuje przykład przedstawiony na rys. 11, przy prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon} = 0,01$  wartość naprężenia plastycznego płynięcia w stanie ustalonym  $\sigma_f$ , szczególnie w zakresie wyższych temperatur, jest niewiele większa od wartości naprężenia  $\sigma$  w chwili pojawienia się pierwszych zmierzonych odkształceń plastycznych. Widoczny na tym przykładzie redukujący wpływ zdrowienia dynamicznego na odkształceniowe umocnienie materiału pozwala w przypadku dostatecznie małej prędkości odkształcenia i w dostatecznie wysokiej temperaturze przyjmować wynikającą z równania (38) wartość naprężenia przy ustalonym

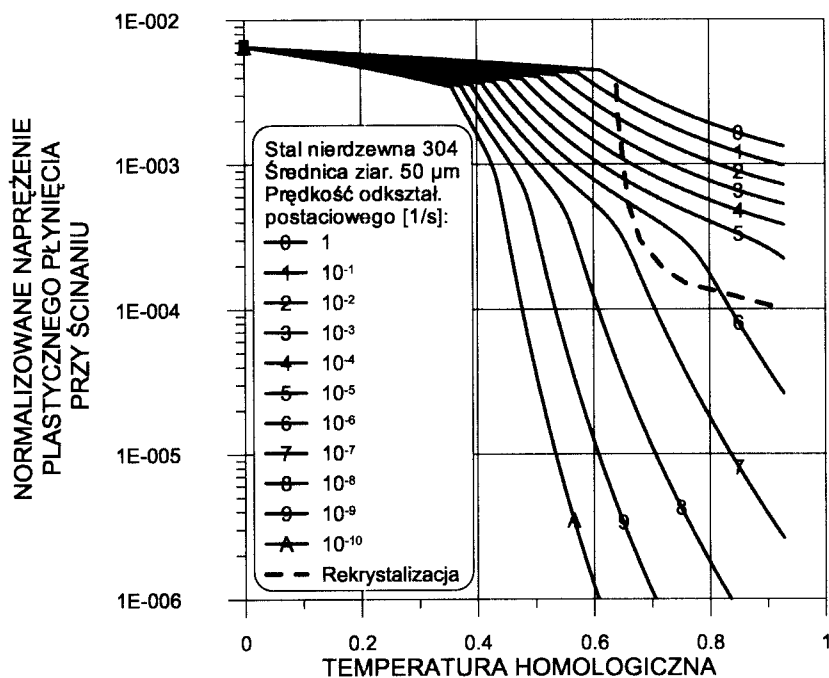
plynięciu  $\sigma_f$  jako naprężenie uplastycznienia  $\sigma_{pl}$  w analizie procesów kształtowania termicznego. Takie podejście jest uzasadnione w przypadku materiałów, w których jedynym mechanizmem osłabienia w podwyższonej temperaturze jest zdrowienie dynamiczne.

### 3.6. Mapy mechanizmów deformacji plastycznej

Na podstawie obszernego materiału eksperymentalnego dla różnych materiałów krystalicznych Frost i Ashby (1982) sporządzili mapy mechanizmów deformacji plastycznej w układzie współrzędnych: temperatura homologiczna  $\theta_h$  – normalizowane ścinające naprężenie plastycznego plynięcia  $\tau/G$ , gdzie  $G$  jest modułem sprężystości poprzecznej (moduł Kirchhoffa). Zastosowali oparte na modelach teoretycznych i empirycznych równania na prędkość odkształcenia przy działaniu różnych mechanizmów deformacji [Frost, Ashby 1982, str. 1]:

1. Poślizg idealny (sztywny) w kryształach bez defektów struktury lub z defektami unieruchomionymi. Mechanizm ten nie występuje w rzeczywistych materiałach polikrystalicznych, natomiast został przez autorów uwzględniony prawdopodobnie dla ułatwienia obliczeń w przyjętej przez nich metodzie numerycznej.
2. Poślizg dyslokacji ograniczony przez:
  - a) opór sieci krystalicznej (naprężenie Peierlsa),
  - b) przeszkody nieciągłe [Wyrzykowski, Pleszakow i in. 1999, str. 368] utworzone przez inne dyslokacje, atomy domieszek, cząsteczki dyspersyjne, granice ziaren i inne,
  - c) interakcje z fononami i elektronami.
3. Bliźniakowanie.
4. Opisywane prawem wykładniczym pełzanie przez poślizg lub poślizg ze wspinaniem dyslokacji:
  - a) ograniczone przez poślizg,
  - b) ograniczone przez wspinanie dyslokacji kontrolowane dyfuzją objętościową – *wysokotemperaturowe pełzanie dyslokacyjne* [Wyrzykowski, Pleszakow i in. 1999, str. 346 i 370],
  - c) ograniczone przez wspinanie kontrolowane dyfuzją rurkową (wzdłuż dyslokacji, przez ich rdzenie) [Wyrzykowski, Pleszakow i in. 1999, str. 346],
  - d) w warunkach przejściowych pomiędzy poślizgiem i poślizgiem ze wspinaniem dyslokacji (zmodyfikowany model Sellarsa i Tegarta),
  - e) pełzanie Harpera–Dorna.
5. Pełzanie dyfuzyjne:
  - a) ograniczone dyfuzją objętościową przy wyższej temperaturze (pełzanie Nabarro–Heringa),
  - b) ograniczone dyfuzją po granicach ziaren przy niższej temperaturze (pełzanie Coblego).

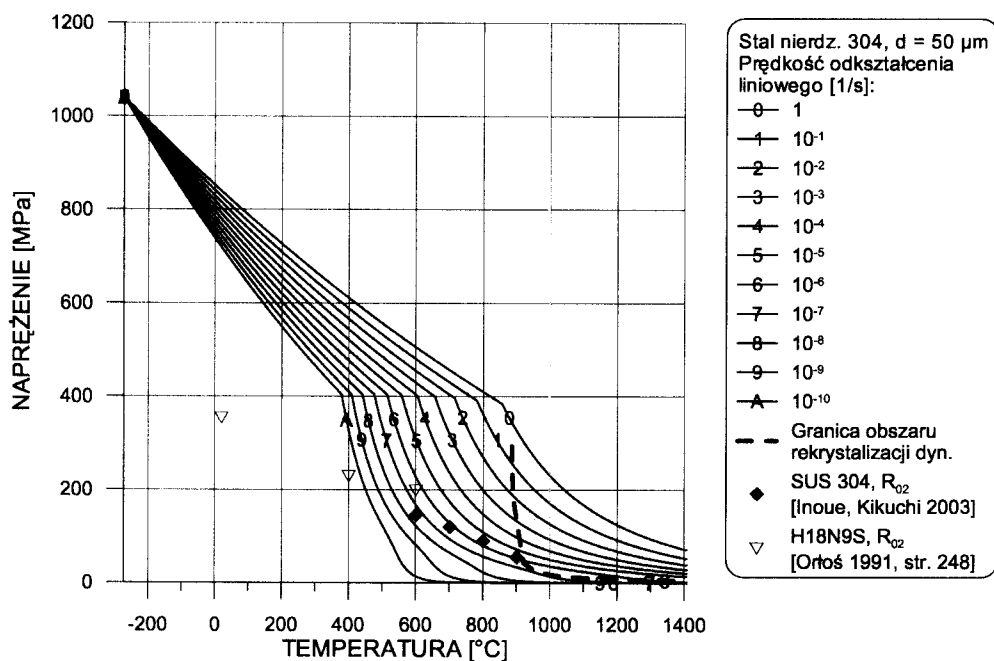
Zależność normalizowanego ścinającego naprężenia plastycznego płynięcia  $\tau/G$  od temperatury homologicznej  $\theta_h$  przy różnych wartościach prędkości odkształcenia postaciowego  $\dot{\gamma}$  stali nierdzewnej 304 według metodyki i danych podanych przez Frosta i Ashby (1982) przedstawia rys. 12. W zakresie niskich temperatur naprężenie plastycznego płynięcia jest wyznaczone przy założeniu ustalonej struktury materiału (gęstości dyslokacji, wielkości ziaren i innych) i jego umocnienia. W zakresie wysokich temperatur modelowane jest naprężenie ustalonego płynięcia plastycznego. Zaznaczono granicę obszaru, w którym występuje rekrytalizacja dynamiczna, znacząco wpływająca na zachowanie materiału w obszarze wysokiej temperatury i naprężenia, ale nieuwzględniana w obliczeniach z powodu braku zadawalającego modelu. Wartości temperatury homologicznej zostały podane przy odniesieniu do temperatury topnienia żelaza  $T_{top} = 1810 \text{ [K]} = 1537 \text{ [}^\circ\text{C]}$ .



Rysunek 12. Zależność normalizowanego ścinającego naprężenia plastycznego płynięcia od temperatury i prędkości odkształcenia postaciowego stali nierdzewnej 304 według [Frost, Ashby 1982].

W oparciu o zależności, dane materiałowe i algorytm stosowany przez Frosta i Ashby (1982) wykonane zostały analogiczne obliczenia dla naprężenia uplastycznienia przy rozciąganiu lub ściskaniu dla różnych wartości prędkości odkształcenia liniowego. Wyniki w funkcji temperatury wyrażonej w stopniach Celsjusza pokazuje wykres na rys. 13, gdzie zastosowano liniową skalę osi dla

naprężenia nieunormowanego. Na wykres naniesione są również dane eksperymentalne dla stali typu 18/8 zaczerpnięte z innych źródeł.

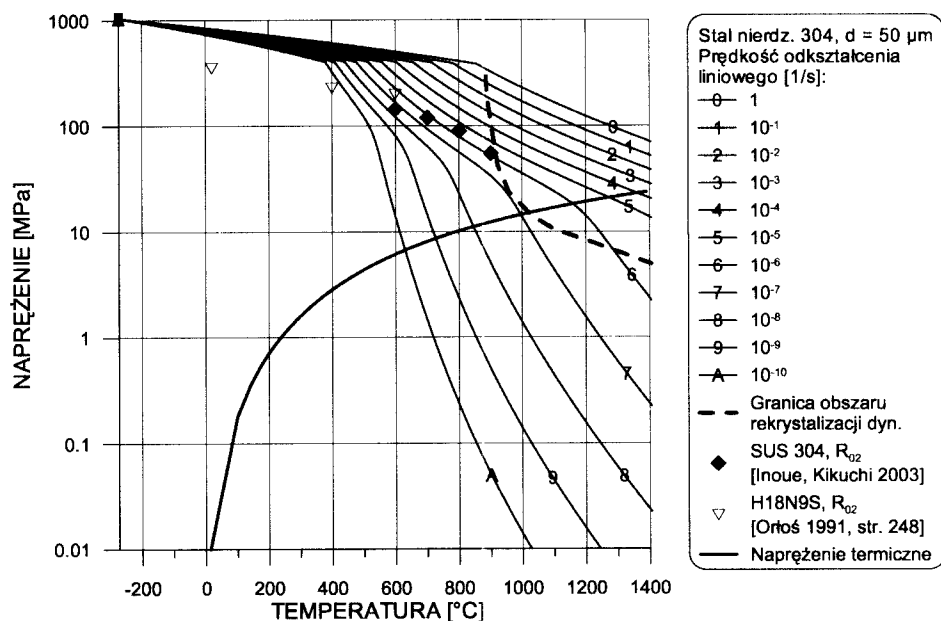


Rysunek 13. Zależność naprężenia plastycznego płynięcia oraz granicy plastyczności  $R_{02}$  (przy odkształceniu trwałym 0.2%) od temperatury i prędkości odkształcenia stali nierdzewnej 304.

W zakresie plastyczności niskotemperaturowej, uwarunkowanej poślizgiem dyslokacji, opis zaproponowany przez Frosta i Ashby znacznie odbiega od zachowania obserwowanego w badaniach doświadczalnych. Natomiast w zakresie obowiązywania prawa wykładniczego dokładność wyników modelowych jest dużo lepsza. Wskazuje to na możliwość wykorzystania metodyki pokazanej przez Frosta i Ashby do modelowania zachowania plastycznego materiałów w podwyższonej temperaturze, pod warunkiem przygotowania i zastosowania odpowiednich danych eksperymentalnych.

Przykład przebiegu naprężenia termicznego w próbce ze stali typu 18/8 na tle wykresu opracowanego według metodyki Frosta i Ashby przedstawia rys. 14.

Naprężenie plastycznego płynięcia według metodyki przyjętej przez Frosta i Ashby (1982) jest obliczane numerycznie, jako wartość spełniająca równanie na prędkość odkształcenia. Prędkość ta wynika z działania różnych mechanizmów deformacji. Na podstawie zależności i danych stosowanych Frosta i Ashby (1982) można wyznaczyć udział każdego mechanizmu w deformacji plastycznej jako iloraz prędkości odkształcenia wynikającej z danego mechanizmu do całko-

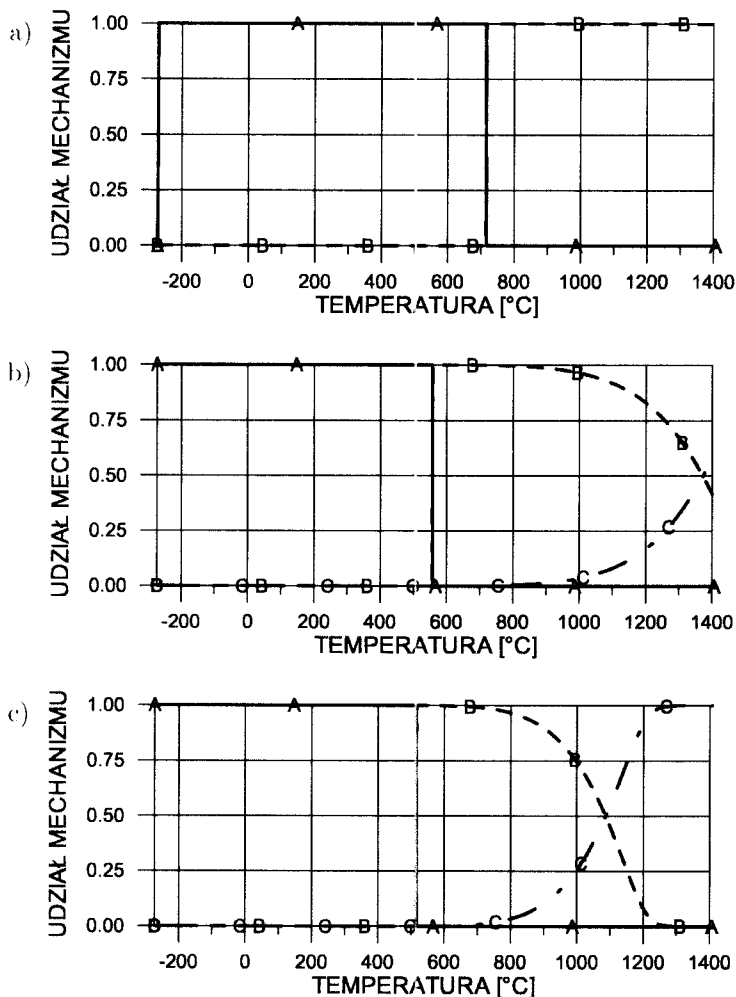


Rysunek 14. Zmiany naprężenia termicznego (25) w próbce o parametrach  $L = 6 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$ ,  $w = 2 \text{ mm}$ ,  $h = 0,505 \text{ mm}$ , wykonanej ze stali 1H18N9T i nagrzewanej wiązką laserową o mocy 19,8 W.

witej prędkości odkształcenia plastycznego. W ten sposób wyznaczono zakresy działania i udziały aktywnych mechanizmów dla stali nierdzewnej 304 przedstawione na rys. 15 a–c przy wybranych wartościach prędkości odkształcenia.

Wykresy pokazują, że przy prędkości odkształcenia  $10^{-2} [1/s]$  rozpatrywana stal do temperatury około  $720 [^{\circ}\text{C}]$  ulega deformacji plastycznej poprzez (A) poślizg dyslokacji hamowanych przez przeszkody nieciągłe, a powyżej tej temperatury naprężenie plastycznego płynięcia wynika z (B) opisywanego prawem wykładniczym pełzania w warunkach przejściowych pomiędzy poślizgiem i poślizgiem ze wspinaniem dyslokacji (zmodyfikowany model Sellarsa i Tegarta). Przy mniejszych prędkościach odkształcenia i dla wysokich temperatur pojawia się (C) pełzanie dyfuzyjne. Dla prędkości odkształcenia  $10^{-5} [1/s]$  w pobliżu temperatury topnienia stali 304 udziały mechanizmów (B) i (C) są w przybliżeniu równe. Dla prędkości odkształcenia jeszcze o rząd mniejszej, to jest  $10^{-6} [1/s]$ , powyżej temperatury  $1300 [^{\circ}\text{C}]$  deformacja plastyczna przebiega praktycznie całkowicie poprzez pełzanie dyfuzyjne.

Na przykładzie wybranej stali została powyżej pokazana procedura określania zależności naprężenia plastycznego płynięcia od temperatury i prędkości odkształcenia w sposób fenomenologiczny. z wykorzystaniem modeli teoretycznych. Procedurę tą można zastosować do innych materiałów w celu uzyskania wia-



Rysunek 15. Zależność naprężenia plastycznego płynięcia stali nierdzewnej 304 od temperatury przy prędkości odkształcenia [1/s]: a)  $10^{-2}$ , b)  $10^{-5}$ , c)  $10^{-6}$ ; A – poziom dyslokacji ograniczony przez przeszkody nieciągłe, B – pełzanie według zmodyfikowanego modelu Sellarsa i Tegarta,

C – łączny udział pełzania dyfuzyjnego Nabarro-Heringa i pełzania Cobla.

rygodnych temperaturowych charakterystyk naprężenia uplastyczniającego potrzebnych do analizy deformacji termicznych. Przy wykonywaniu map mechanizmów deformacji Frost i Ashby (1982) mieli na celu uzyskanie dokładności  $\pm 10\%$  dla naprężenia plastycznego płynięcia (w określonym stanie umocnienia) lub dokładności określonej czynnikiem 2 dla prędkości odkształcenia postaciowego  $\dot{\gamma}$  [Frost, Ashby 1982, str. 6]. Charakterystyki uzyskane według przedstawionej metodyki obejmują szeroki zakres mechanizmów deformacji, włącznie z pełzaniem dyfuzyjnym w zakresie wysokich temperatur, co daje możliwość zwiększenia do-

kładności wyników analiz naprężeń i deformacji termicznych w zakresie wysokich temperatur.

W świetle przedstawionej dyskusji termoplastycznego zachowania metali i ich stopów widać, iż koncepcja temperatury krytycznej jako temperatury, przy której naprężenie uplastycznienia jest pomijalnie małe, jest znacznym uproszczeniem, które jednak pozwala w sposób uproszczony przewidywać warunki pojawienia się deformacji plastycznych i ich wielkość. W bardziej wnikliwych analizach należy posługiwać się pojęciem krytycznego stanu materiału, uwzględniającym oprócz temperatury przynajmniej jeszcze stan naprężenia oraz prędkość deformacji. Znajomość tych czynników jest potrzebna do przewidywania zachowania materiału i projektowania procesów kształtowania termicznego, podobnie jak to ma miejsce w przypadku tradycyjnych procesów obróbki plastycznej na gorąco.

### 3.7. Deformacja plastyczna

W chwili osiągnięcia przez materiał stanu uplastycznienia następuje relaksacja naprężenia termicznego. Odształcenie sprężyste związane z tym naprężeniem zamienia się w odształcenie plastyczne

$$\varepsilon_{pl} = \frac{\sigma_1^F}{E}. \quad (39)$$

Zmiana długości segmentu 1 z powodu deformacji plastycznej wynosi

$$\Delta L_1^{pl} = 2\varepsilon_{pl} x_{pl}, \quad (40)$$

gdzie  $x_{pl}$  jest maksymalnym zasięgiem temperatury krytycznej  $T_{pl}$  (rys. 3). Wielkość  $x_{pl}$  jest przyjmowana w sposób przybliżony jako zasięg temperatury krytycznej w chwili końca fazy nagrzewania. Wartość  $x_{pl}$  spełnia następujące równanie wynikające z rozkładu temperatury (1)

$$T_{pl} = \frac{2q}{\lambda} \sqrt{\kappa t_h} \operatorname{ierfc} \left( \frac{x_{pl}}{2\sqrt{\kappa t_h}} \right) + T_0. \quad (41)$$

Do numerycznego obliczenia wartości  $x_{pl}$  przy użyciu równania (41) zastosowano algorytm bisekcji.

Zauważmy, że jeśli wstawimy dowolną zmianę długości segmentu 1 w miejsce  $\Delta L_1^T$  w równaniu (17) lub (18), to możemy obliczyć kąt deformacji konstrukcji wywołany dowolną inną przyczyną niż rozszerzalność termiczna. Przyczyną szczególnie interesującą jest zmiana długości z powodu deformacji plastycznej. Stąd, deformacja kątowa  $\alpha_{pl}$  [rd] konstrukcji wywołana odształceniem plastycznym może być wyrażona jako

$$\alpha_{pl} = -\frac{b k_F}{b^2 k_F + 4k_M} \Delta L_1^{pl}. \quad (42)$$

Korzystając z równań (7), (39) i (40), otrzymujemy następujący wzór na kąt deformacji plastycznej

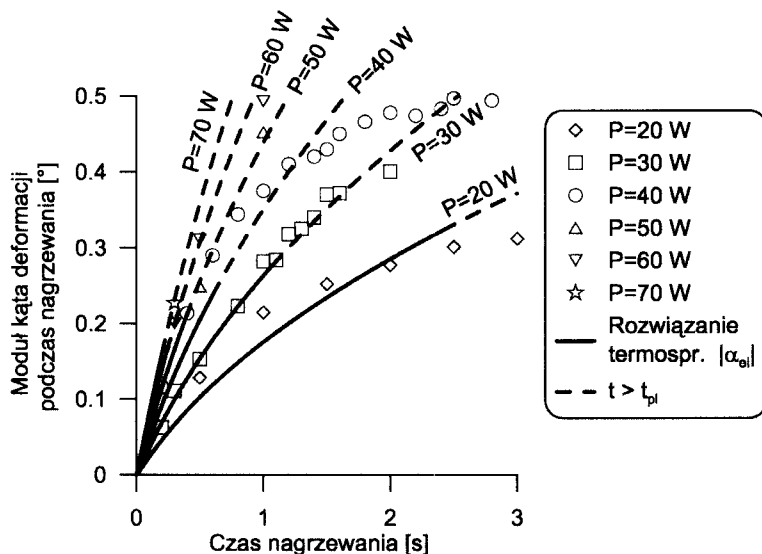
$$\alpha_{pl} = \frac{3AP\alpha_T w b x_{pl} t_h}{L h \rho c (3b^2 + w^2)} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{L}{4\sqrt{\kappa t_h}}\right) + \frac{L}{2\sqrt{\kappa t_h}} \operatorname{ierfc}\left(\frac{L}{4\sqrt{\kappa t_h}}\right) \right]. \quad (43)$$

Progowe parametry obróbki, moc wiązki  $P_{pl}$  i czas nagrzewania  $t_{pl}$  dla termicznego wywoływania deformacji plastycznej rozpatrywanej konstrukcji spełniają warunek  $T(0, t) = T_0 + \Delta T(0, t) = T_{pl}$ . Z równania (41) przy  $x_{pl} = 0$  i wykorzystaniu równania (3) otrzymujemy następujące wzory na progową moc wiązki  $P_{pl}$  i czas nagrzewania  $t_{pl}$

$$P_{pl} = \frac{\sqrt{\pi} \lambda h w (T_{pl} - T_0)}{A \sqrt{\kappa t_h}}; \quad t_{pl} = \frac{\pi}{\kappa} \left( \frac{\lambda h w (T_{pl} - T_0)}{AP} \right)^2. \quad (44)$$

#### 4. Wyniki

Porównanie wyników eksperymentalnych i obliczeń według przedstawionego modelu teoretycznego pokazują rys. 16–19. Dla stali niskowęglowej przyjęto następujące dane materiałowe:  $A = 0,88$ ,  $\alpha_T = 14,6 \cdot 10^{-6}$  [1/K],  $\lambda = 38$  [W/(m K)],  $c = 625$  [J/(kg K)],  $\rho = 7680$  [kg/m<sup>3</sup>],  $T_{pl} = 720$  [°C]. W przypadku stali nierdzewnej typu 18/8 dane użyte w obliczeniach miały wartości:  $A = 0,85$ ,  $\alpha_T = 18,7 \cdot 10^{-6}$  [1/K],  $\lambda = 22$  [W/(m K)],  $c = 529$  [J/(kg K)],  $\rho = 7650$  [kg/m<sup>3</sup>],

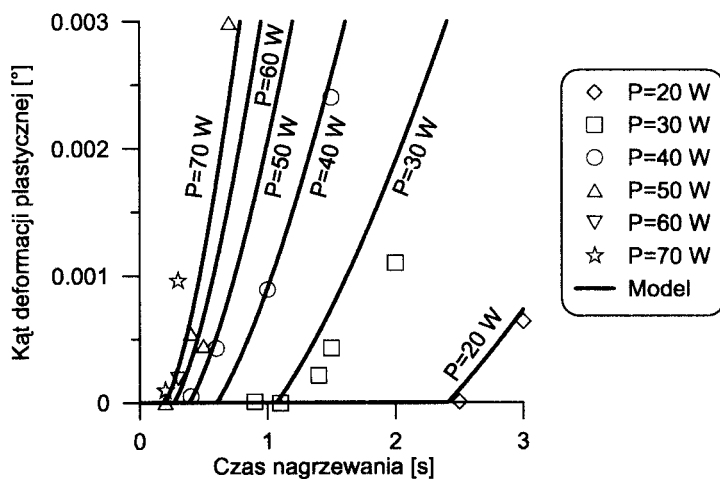


Rysunek 16. Eksperymentalne i analityczne wyniki dla deformacji w fazie nagrzewania próbek o parametrach  $h = 0,815$  mm,  $L = 10$  mm,  $b = 8$  mm,  $w = 2$  mm wykonanych ze stali niskowęglowej.

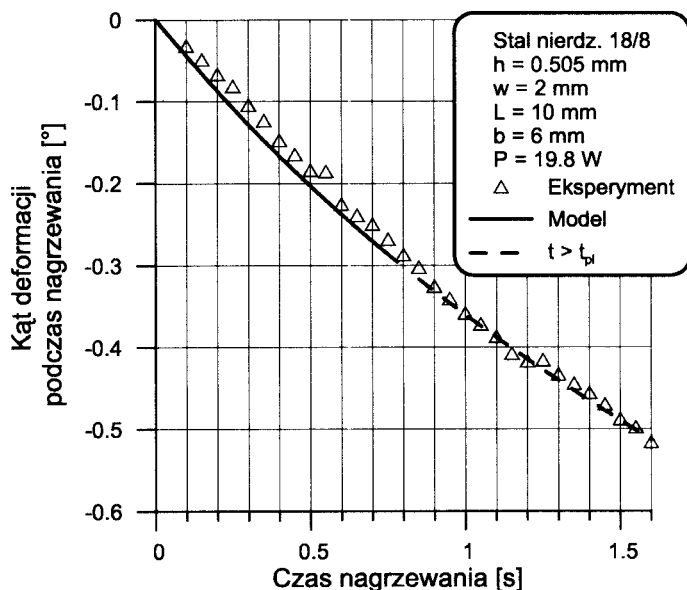


$T_{pl} = 900$  [°C] (komentarz znajduje się w Dodatku). Parametry materiałowe zostały przyjęte na podstawie założonej średniej temperatury cyklu termicznego w zakresie  $600 \div 700$  °C.

Liniami przerywanymi na wykresach deformacji w fazie nagrzewania zaznaczono przebiegi rozwiązań w zakresie występowania już deformacji plastycznych.

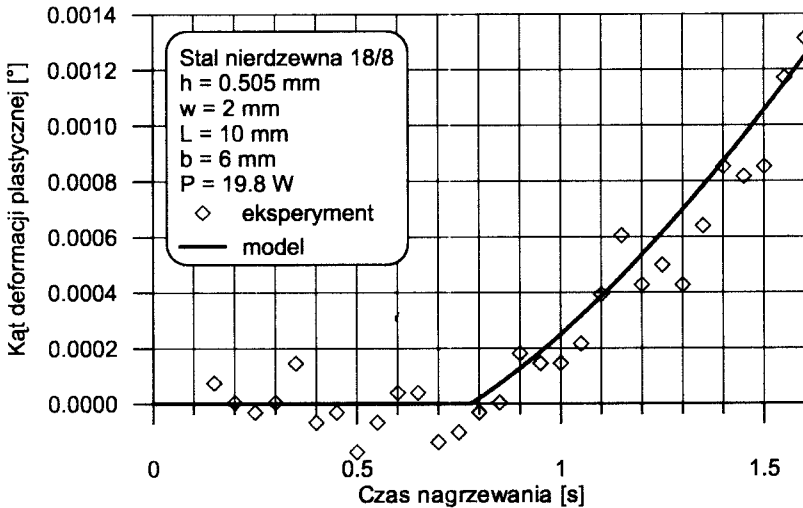


Rysunek 17. Eksperymentalne i analityczne wyniki dla deformacji plastycznej próbek o parametrach  $h = 0,815$  mm,  $L = 10$  mm,  $b = 8$  mm,  $w = 2$  mm wykonanych ze stali niskowęglowej.



Rysunek 18. Eksperymentalne i analityczne wyniki dla deformacji w fazie nagrzewania próbek wykonanych ze stali nierdzewnej typu 18/8.

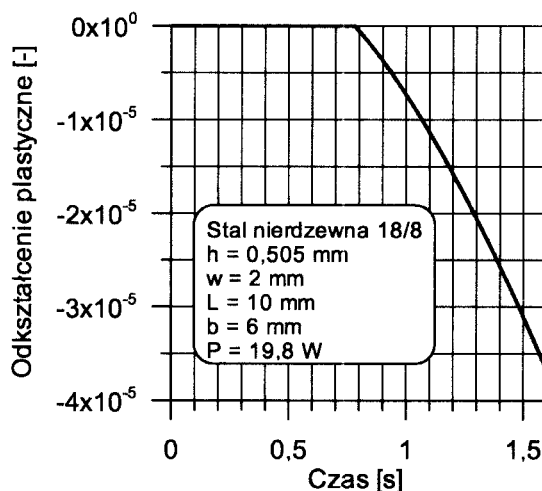
Mimo licznych uproszczeń wprowadzonych w modelu teoretycznym, wyniki obliczeń nie odbiegają znacznie od wyników eksperymentów. Na widoczne rozbieżności częściowy wpływ miała stosunkowo mała dokładność zadawania czasu nagrzewania oraz fluktuacje mocy wiązki laserowej w badaniach doświadczalnych. Rozrzut wyników pomiarów deformacji, szczególnie widoczny na rys. 19, związany jest ze względnie niską precyzją pomiarów bardzo małych deformacji.



Rysunek 19. Eksperymentalne i teoretyczne wyniki dla deformacji plastycznej próbek wykonanych ze stali nierdzewnej typu 18/8.

Na podstawie zmiany długości segmentu 1 z powodu deformacji plastycznej (40) można wyznaczyć średnie odkształcenie plastyczne, jego przebieg czasowy (rys. 20) oraz średnią prędkość odkształcenia.

W analizowanym przypadku próbki ze stali typu 18/8 średnia prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}_{pl} \approx \Delta\epsilon_{pl}/\Delta t$  (gdzie  $\Delta\epsilon_{pl}$  – zmiana odkształcenia plastycznego;  $\Delta t$  – czas zmiany odkształcenia) wynosiła około  $4 \cdot 10^{-5}$  [1/s]. Dla stali typu 18/8 dobrą zgodność wyników doświadczalnych i teoretycznych otrzymano przy przyjęciu wartości temperatury, przy której nastąpiło uplastycznienie materiału równej  $900^\circ\text{C}$ . Według wykresu termoplastycznego zachowania stali 304 o średnicy ziarna  $50 \mu\text{m}$  (rys. 14), z przebiegu naprężenia termicznego w danym przypadku wynika, iż w temperaturze  $900^\circ\text{C}$  uplastycznienie następuje przy prędkości odkształcenia równej około  $5 \cdot 10^{-7}$  [1/s]. Biorąc pod uwagę dokładność wykresów przedstawionych przez Frosta i Ashby (1982), uproszczenia przedstawionego modelu oraz możliwe różnice własności materiałów zastosowanych w badaniach, niezgodność przewidywań pojawienia się stanu krytycznego (uplastycznienia) materiału nie wydaje się znaczną.



Rysunek 20. Przebieg zmiany średniego odkształcenia plastycznego w ogrzewanym segmencie próbki ze stali typu 18/8.

## 5. Wnioski

Mimo zastosowania prostego, jednowymiarowego modelu przewodzenia ciepła przedstawiony analityczno-numeryczny model pozwala opisywać termo-sprężysto-plastyczne zachowanie analizowanej konstrukcji z zadawalającą dokładnością. Otwiera to możliwość efektywnego projektowania i optymalizowania dwumostkowych siłowników termicznych i innych podobnych konstrukcji.

Znajomość przebiegu naprężeń termicznych w konstrukcji pozwala wykorzystywać zaawansowane modele matematyczne termoplastycznego zachowania materiałów do przewidywania wystąpienia uplastycznienia pod wpływem zmiany temperatury. Warunkiem jest oparcie modelu na odpowiednich danych eksperymentalnych.

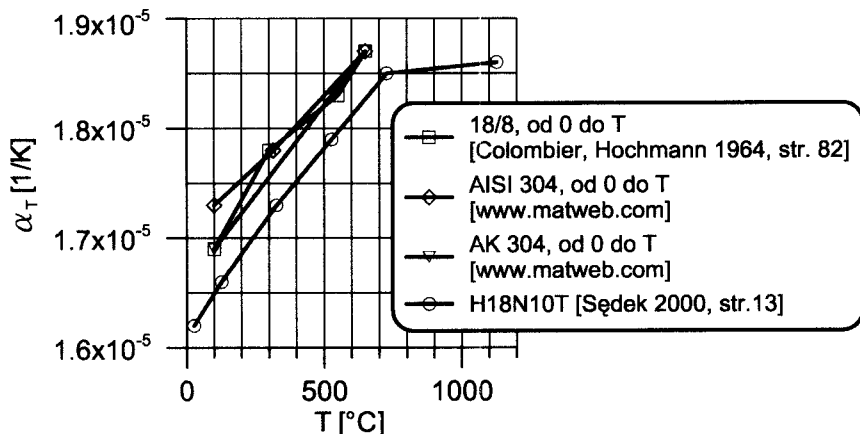
## Podziękowanie

Przedstawiona praca została częściowo wykonana w ramach działalności Centrum Doskonałości Laserowej Obróbki i Zaawansowanych Badań Materiałów, finansowanego przez Unię Europejską.

## Dodatek

### Dane materiałowe stali nierdzewnych typu 18/8

Temperaturową zależność współczynnika rozszerzalności termicznej  $\alpha_T$  stali typu 18/8 przedstawia rys. 21. Średnia wartość  $\alpha_T$  przy zmianie temperatury od 0 do 650°C wynosi  $18,7 \cdot 10^{-6}$  [1/K].

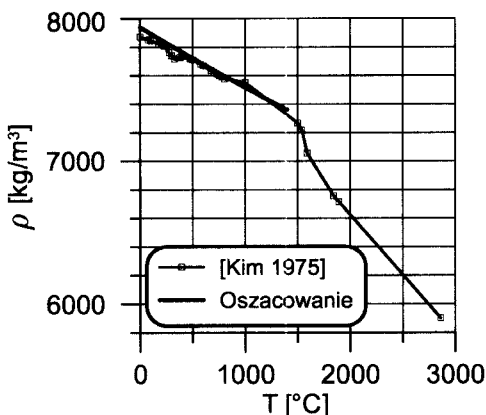


Rysunek 21. Zależność współczynnika rozszerzalności termicznej  $\alpha_T$  od temperatury  $T$  dla stali typu 18/8.

Gęstość  $\rho(T_0)$  stali typu 18/8 w temperaturze pokojowej  $T_0$  można przyjąć równą  $7,93 \pm 0,02 \text{ g/cm}^3$  [Colombier, Hochmann 1964, str. 81]. Oszacowanie gęstości w podwyższonej temperaturze  $\rho(T)$  można przeprowadzić korzystając z zależności

$$\rho(T) = \frac{\rho(T_0)}{1 + 3\alpha_T(T - T_0)}.$$

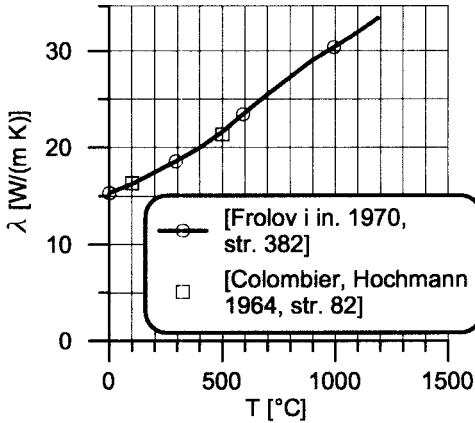
Rysunek 22 pokazuje zależność gęstości stali nierdzewnej od temperatury na podstawie powyższego oszacowania, przyjmując stałą wartość współczynnika rozszerzalności termicznej  $\alpha_T$  równą  $18,7 \cdot 10^{-6} \text{ [1/K]}$ , oraz według danych literaturowych. Zakres temperatury przedstawiony na rys. 22 obejmuje fazę ciekłą, gdyż temperatura topnienia stali chromowo-niklowych zawierających 18% Cr, 8% Ni, bez dodatków krzemu lub molibdenu, w zależności od zawartości węgla



Rysunek 22. Zależność gęstości  $\rho$  od temperatury  $T$  dla stali typu 18/8.

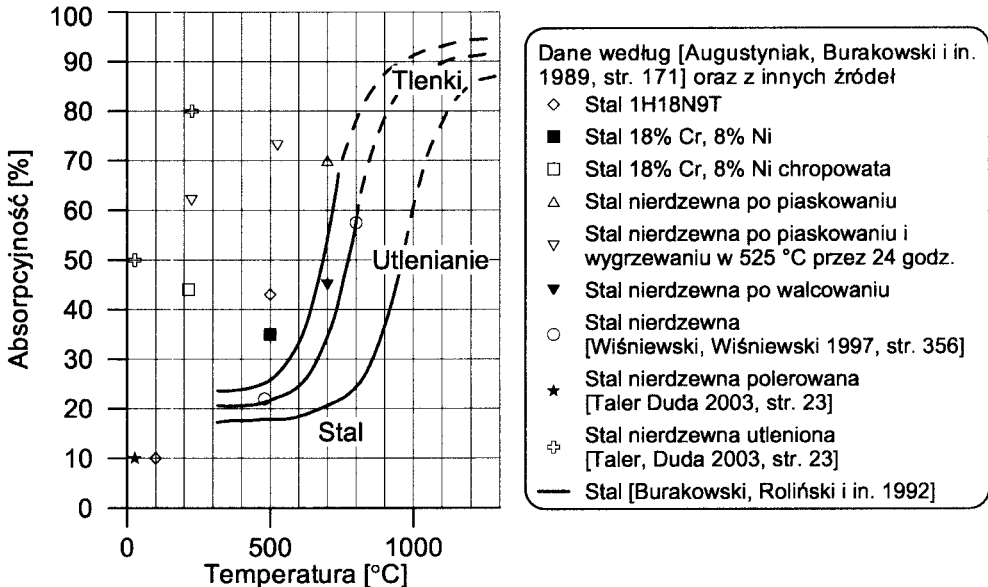
wynosi  $1400 \div 1430^\circ\text{C}$  [Colombier, Hochmann 1964, str. 81]. Wykres przedstawiony na rys. 22 pokazuje zasadność przyjęcia wartości  $\alpha_T = 18,7 \cdot 10^{-6} [1/\text{K}]$  dla procesów o temperaturze średniej około  $700^\circ\text{C}$ .

Na rys. 23 przedstawiono zależność współczynnika przewodzenia ciepła stali chromowo-niklowych 18/8 od temperatury.



Rysunek 23. Zależność współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  stali chromowo-niklowych 18/8 od temperatury  $T$ .

Jak pokazuje rys. 24 wartość współczynnika absorpcji promieniowania przez stale zmienia się w szerokim zakresie i istotnie zależy od temperatury materiału i stanu powierzchni.



Rysunek 24. Zależność współczynnika absorpcji promieniowania stali typu 18/8 i innych nierdzewnych od temperatury.

## Literatura

- [Andersen 1998] Andersen M. R., Fatigue Crack Initiation and Growth in Ship Structures, Ph.D. Thesis. Technical University of Denmark, 1998.
- [Anderson 1999] Anderson, R. J., Experiments and simulation of line heating of plates. Master of Sciences Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1999.
- [Augustyniak, Burakowski i in. 1989] Augustyniak W., Burakowski T., Giziński J., Termometria przemysłowa w obróbce cieplnej stali, Poradnik. Instytut Mechaniki Precyzyjnej, Warszawa 1989.
- [Boley, Weiner 1960] Boley B. A., Weiner J. H., Theory of thermal stresses, John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- [Burakowski, Roliński i in. 1992] Burakowski T., Roliński E., Wierzchoń T., Inżynieria powierzchni metali, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1992.
- [Carslaw, Jaeger 1946] Carslaw H. S., Jaeger J. C., Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press 1946.
- [Clausen 2000] Clausen H. B., Plate forming by line heating, Ph.D. thesis, Technical University of Denmark, 2000.
- [Colombier, Hochmann 1964] Colombier L., Hochmann J., Stale odporne na korozję i stale żarowytrzymałe, Wydawnictwo Śląsk, Katowice 1964.
- [Dieter 1988] Dieter G. E., Mechanical Metallurgy, McGraw-Hill Book Company, 1988.
- [Erbel, Kuczyński i in. 1986] Erbel S., Kuczyński K., Marciniak Z., Obróbka plastyczna, PWN, Warszawa 1986.
- [Frewin, Scott 1999] Frewin M. R., Scott D. A., Finite element model of pulsed laser welding, Welding Research Supplement, January 1999, 15–22.
- [Frolov, Vinokurov i in. 1970] Frolov W. W., Vinokurov V. A., Volczenko W. N., Parachin W. A., Arutionowa I. A., Teoretyczne podstawy spawania (po rosyjsku), Wydawnictwo Szkoła Wyższa, Moskwa 1970.
- [Frost, Ashby 1982] Frost H., Ashby M. F., Deformation-Mechanism Maps. The Plasticity and Creep of Metals and Ceramics, Pergamon Press 1982.
- [Gronostajski, Ziemia 1985] Gronostajski J., Ziemia H., Archiwum Hutnictwa, t. 30, 1985, str. 145.
- [Holt 1971] Holt R. E., Primary Concepts for Flame Bending, Welding Journal, June 1971, 416–424.
- [Hoving 2000] Hoving W., Verhoeven E. C. M., High-precision micro-assembly using laser-adjustment, Laser in der Elektronikproduktion & Feinwerktechnik – LEF 2000, Geiger M., Otto A. (eds.), Meisenbach Bamberg, 2000, 165–174.
- [Hoving 2001] Hoving W., Accurate manipulation using laser technology, Proceedings of the LANE 2001 (Laser Assisted Net Shape Engineering 3, International Conference), eds.: M. Geiger, A. Otto, Meisenbach-Verlag Bamberg 2001, 113–124.
- [Huber, Müller i in. 2001] Huber A., Müller B., Meyer-Pittroff F., Laserstrahljustieren als Innovation für die Montage von Mikrosystemen, Vollertsen F., Kleiner M. (eds.), Idee – Vision Innovation, Meisenbach, Bamberg, 2001, 275–286.
- [Inoue, Kikuchi 2003] Inoue Y., Kikuchi M., Present and Future Trends of Stainless Steel for Automotive Exhaust System, NIPPON STEEL TECHNICAL REPORT, No. 88, July 2003.
- [Jakowluk 1993] Jakowluk A., Procesy pełzania i zmęczenia w materiałach, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993.

- [Jang, Moon i in. 2000] Jang C. D., Moon S. C., Ko D. E., Acquisition of Line Heating Information for Automatic Plate Forming, SSC/SNAME/ASNE Symposium 2000.
- [Jang, Seo i in. 1997] Jang C. D., Seo S. I., Ko D. E., A Study on the Prediction of Deformations of Plates Due to Line Heating Using a Simplified Thermal Elastoplastic Analysis, Journal of Ship Production, Vol. 13, No. 1, 1997, 22-27.
- [Jang, Seo i in. 2001] Jang C. D., Seo S. I., Yang Y. H., Development of a New Finite-Element Analysis of Deformation of Plate Due to Line Heating, Journal of Ship Production, Vol. 17, No. 1, 2001, 1-7.
- [Jonas 1969] Jonas J. J., Trans. Q. ASM, 62 (1969) 300-303.
- [Jonas, Sellars, Tegart 1969] Jonas J. J., Sellars C. M., Tegart W. J. McG., Metall. Rev., 130 (1969) 1-24.
- [Kim 1975] Kim C. S., Thermophysical properties of stainless steels, Technical Report ANL-75-55, Argonne National Laboratory, Argonne, Ill., 1975, 1-24 (według [Frewin, Scott 1999]).
- [Kitada, Asahi 2002] Kitada K., Asahi N., Miniature Relay Adjustment Using Laser-Forming Method, Matsushita Electric Works (MEW) Technical Report No. 78, August 2002.
- [Kugler, Knap i in. 2004] Kugler G., Knap M., Palkowski H., Turk R., Estimation of activation energy for calculating the hot workability properties of metals, Metalurgija 43 (2004) 4, 267-272.
- [Matsushita 2003] Matsushita N., Laser micro-bending for precise microfabrication of magnetic disk-drive components, 4-th International Symposium on Laser Precision Microfabrication (LPM 2003), WLT - German Scientific Laser Society, Proceedings of SPIE, Vol. 5063, 2003, 24-29.
- [Mucha, Hoffman i in. 1997] Mucha Z., Hoffman J., Kalita W., Mucha S., Laser Forming of Thick Free Plates, Proceedings of the 30-th International CIRP Seminar on Manufacturing Systems - LANE'97 (Laser Assisted Net shape Engineering 2), M. Geiger, F. Voltertsen (eds.), Meisenbach-Verlag, Bamberg 1997, 383-392.
- [Müller 2001] Müller B., Laser adjustment - Models for the design of actuators, Geiger M., Otto A. (eds.), Laser Assisted Net Shape Engineering 3, Proc. of the LANE 2001, August 28.-31., 2001, Erlangen, Germany, Meisenbach-Verlag, Bamberg 2001, 519-526.
- [Müller, Huber 2000] Müller B., Huber A., Entwurf komplexer Aktorsysteme für das Laserstrahljustieren, Laser in der Elektronikproduktion & Feinwerktechnik - LEF 2000, Editors: M. Geiger, A. Otto. ISBN: 3-87525-123-7, Publisher: Meisenbach Bamberg, 2000.
- [Müller, Huber i in. 1999] Müller B., Huber A., Geiger M., Sub-Micron Accuracy of Assembled Systems by Laser Adjustment, Proc. of 6-th Int. Conf. Tech. Plasticity (ICTP), 1999, 1037-1042.
- [Mura 1957] Mura T., Residual Stresses Due to Thermal Treatments, Research Reports of the Faculty of Engineering, Meji University, 1957-2, No. 10 (według [Boley, Weiner 1960, str. 561]).
- [Myśliwiec 1972] Myśliwiec M., Ciepłno-mechaniczne podstawy spawalnictwa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1972.
- [Olowinsky, Bosse 2003] Olowinsky A. M., Bosse L., Laser beam micro forming as a new adjustment technology using dedicated actuator structures. Smart Sensors, Actuators, and MEMS. Chiao J.-C., Varadan V. K., Cane C. (eds.), Proceedings of the SPIE, Volume 5116, 2003, 285-294.
- [Orłoś 1991] Orłoś Z., Naprężenia cieplne, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.

- [Otto 2005] Otto A., Fundamentals of laser beam adjusting in micro systems, Thermal Forming. Proceedings of the IWOTE'05: 1-st International Workshop on Thermal Forming, Bremer Institute für angewandte Strahltechnik, Vollertsen F., Seefeld T. (eds.), BIAS Verlag, Bremen 2005, 83-92.
- [Sellars, Tegart 1966] Sellars C. M., Tegart W. J. McG., Mem. Sci. Rev. Metall., 63 (1966) 731-746 (również: Tegart W. J. McG., Ductility. Chap. 5, American Society for Metals, Metals Park, Ohio 1968).
- [Sellars, Tegart 1972] Sellars C. M., Tegart W. J. McG., Int. Metall. Rev., 17 (1972), 1-24.
- [Staub, Adamczyk i in. 1994] Staub F., Adamczyk J., Cieślak Ł., Gubała J., Maciejny A., Metaloznawstwo, Wydawnictwo Śląsk, Katowice, 1994.
- [Steiger 1984] Steiger E., Führungsloses Justieren der Mittelkontaktfedern des Kleinrelais D2 in einem Pulslasersystem, Siemens Components, 22 (1984), 3, 135-137.
- [Taira, Ohtani 1986] Taira S., Ohtani R., Teoria wysokotemperaturowej wytrzymałości materiałów. Wydawnictwo Metalurgia, Moskwa 1986.
- [Taler, Duda, 2003] Taler J., Duda P., Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003.
- [Vollertsen, Rödle 1994] Vollertsen F., Rödle M., Model for Temperature Gradient Mechanism of Laser Bending, Proceedings of the 26th International CIRP Seminar on Manufacturing Systems - LANE'94 (Laser Assisted Net Shape Engineering), Editors: M. Geiger, F. Vollertsen, Meisenbach-Verlag, Bamberg (1994), 371-378.
- [Watanabe, Satoh 1961] Watanabe M., Satoh K., Effect of Welding Conditions on the Shrinkage Distortion in Welded Structures, The Welding Journal, Welding Research Supplement, 40 (1961) 8, 377-384.
- [Widłaszewski 2003] Widłaszewski J., Przegląd metod kształtowania termicznego, Materiały Seminarium „Rozwój zniszczenia materiałów i laserowe modyfikowanie materiałów”, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Centrum Doskonałości LAPROMAT, 2003, 257-285.
- [Widłaszewski 2004] Widłaszewski J., Modelowanie mikropozycjonowania laserowego, Materiały Seminarium „Monitorowanie uszkodzeń i laserowe obróbki materiałów”, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Centrum Doskonałości LAPROMAT, 2004, 111-129.
- [Wiśniewski, Wiśniewski 1997] Wiśniewski S., Wiśniewski T. S., Wymiana ciepła, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
- [Wyrzykowski, Pleszakow i in. 1999] Wyrzykowski J. W., Pleszakow E., Sieniawski J., Odkształcanie i pękanie metali, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.
- [Yu, Anderson i in. 2001] Yu G., Anderson R. J., Maekawa T., Patrikalakis N. M., Efficient Simulation of Shell Forming by Line Heating, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, No. 10, 2349-2370, October 2001.
- [Zenner, Hollomon 1944] Zenner C., Hollomon J. H., J. Appl. Phys., 15 (1944), 22-32.