

Szalony konstruktor, czyli jak zbudować coś, czego nie ma

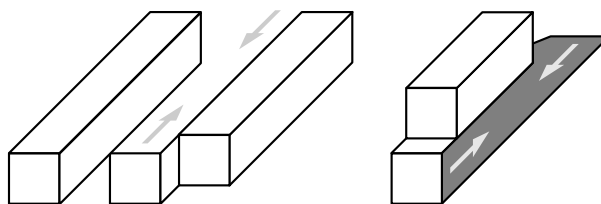
... wykrył trzy rodzaje smoków ...
Wszystkie one, jako się rzekło, nie istnieją,
ale każdy rodzaj w zupełnie inny sposób.

(Stanisław Lem: *Cyberiada*, 1965)

Ze względu na paradoksalny charakter, który przyciąga uwagę i budzi ciekawość widza, *figury niemożliwe* zdefiniowane w poprzednim odcinku¹ bywają używane w sztuce i grafice użytkowej. Powstaje zatem pytanie, czy można opracować systematyczne metody ich tworzenia i wyposażania ich w pożądane przez nas cechy? Okazuje się, że tak – odkryto już wiele ogólnych zasad budowy figur niemożliwych oraz bardziej konkretnych recept konstrukcyjnych.

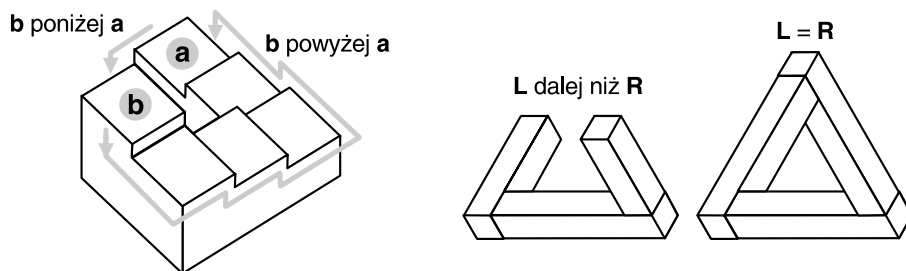
Istotą budowy figur niemożliwych jest występowanie sprzeczności interpretacyjnych w ich interpretacjach przestrzennych. Szczegółowa analiza różnych figur doprowadziła do określenia trzech podstawowych typów takich sprzeczności.² Są to:

Sprzeczność figura-tło. Jest to najsilniejszy z trzech typów sprzeczności. Narusza ona najbardziej podstawowe rozróżnienie między obiektem pierwszoplanowym a dalszym planem, na którego tle jest on przedstawiony. W figurze, w której występuje taka sprzeczność, pewien fragment rysunku jest interpretowany jako część figury (obiekту) i jednocześnie jako część tła, na którym się ona znajduje – granica między tymi odmiennymi obszarami gdzie niezauważalnie znika. Dla figur z tym typem sprzeczności najtrudniej jest znaleźć przekonującą możliwą interpretację przestrzenną. Dwa przykłady podano poniżej.



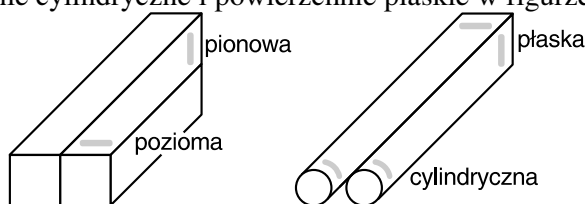
Obszary o sprzecznej interpretacji zaznaczono strzałkami. W dolnej części każdego rysunku są one najwyraźniej częściami obiektu (górną poziomą powierzchnią środkowej beleczki na lewym rysunku; prawym zacienionym bokiem dolnej beleczki na prawym rysunku), zaś w górnej części rysunku te same obszary należą najwyraźniej do tła (na prawym rysunku jest to cień rzucany przez górną beleczkę na tło).

Sprzeczność położenia w przestrzeni. W tym przypadku dwa fragmenty rysunku są interpretowane jako obiekty położone w przestrzeni jednocześnie na dwa różne sposoby – np. jeden jest *wyżej*, a jednocześnie *niżej* niż drugi, lub jednocześnie *bliżej* i *dalej* od drugiego (lub tak samo daleko jak drugi), lub *na prawo* i *na lewo* od niego, itp., zależnie od tego, jaka część rysunku przyjmowana jest jako źródło informacji o wzajemnym położeniu tych fragmentów. Dwa przykłady podano na poniższych rysunkach.

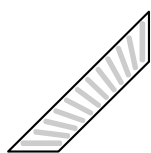


Rysunek z lewej strony przedstawia tzw. niemożliwe schody, spotykane w wielu różnych wariantach.³ Patrząc na sąsiadujące ze sobą stopnie oznaczone (a) i (b) widzimy wyraźnie, że stopień (b) leży *poniżej* stopnia (a). Jednak śledząc szarą linię prowadzącą od stopnia (b) do stopnia (a) naokoło schodów widzimy, że posuwamy się od (b) do (a) ciągle po stopniach w dół, zatem stopień (b) musi jednak leżeć *powyżej* stopnia (a), w sprzeczności z poprzednią oceną ich położenia. Rysunek z prawej strony pokazuje sprzeczność w trójkącie niemożliwym. Odcinając górny narożnik trójkąta widzimy wyraźnie, na podstawie struktury przestrzennej pozostałych (dolnych) narożników, że lewa beleczka (L) trójkąta odchodzi od nas w głąb, a prawa beleczka (R) przybliży się górnym końcem w naszą stronę. Co za tym idzie, górny koniec beleczki (L) jest *dalej* w przestrzeni, niż górny koniec beleczki (R). Przywracając z powrotem górny narożnik trójkąta łączymy końce (L) i (R) ze sobą, tak więc końce te są teraz *w tej samej odległości* od nas, w sprzeczności z poprzednią interpretacją. To samo rozumowanie można, z identycznym skutkiem, wykonać dla pozostałych dwu narożników trójkąta.

Sprzeczność formy powierzchni. W tym przypadku sprzeczność dotyczy oceny formy jakiejś powierzchni obiektu. Można tu wyróżnić dwa podtypy, zależnie od tego, jaki aspekt formy generuje sprzeczność: sprzeczne mogą być *orientacje* powierzchni w przestrzeni (np. powierzchnia jednocześnie pozioma widziana z góry, jak i pionowa widziana z prawej na środkowym fragmencie tzw. „dwubelki Ernsta”⁴ poniżej po lewej), bądź też *kształty* powierzchni (powierzchnie cylindryczne i powierzchnie płaskie w figurze poniżej po prawej).



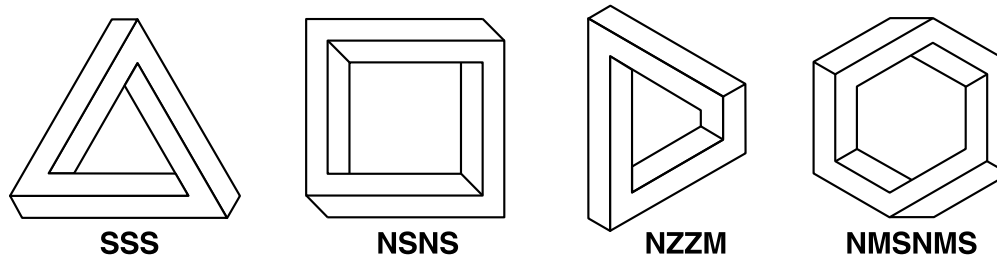
W danej figurze może wystąpić, i często występuje, kilka sprzeczności tych samych lub różnych typów, czasami w tym samym fragmencie figury. Zauważmy, że w pierwszym przykładzie sprzeczności figura-tło na wskazanym fragmencie figury występuje również sprzeczność położenia w przestrzeni – fragment znajduje się jednocześnie wyżej (jako górna powierzchnia środkowej beleczki) jak i niżej (jako fragment powierzchni, na której leżą beleczki). W drugim przykładzie (z cieniem) zacieniona powierzchnia przejawia także sprzeczność orientacji – będąc jednocześnie pionowym bokiem beleczki i poziomym fragmentem zacienionego tła. Ta sama figura może mieć również różne interpretacje niemożliwe, w których mogą występować



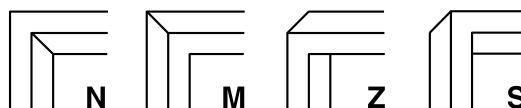
różne sprzeczności. Przykładowo, środkowy obszar dwubelki Ernsta można interpretować jako płaszczyznę, jak opisano powyżej, i wtedy sprzeczność interpretacyjna dla tego obszaru będzie dotyczyć orientacji powierzchni (pionowa – pozioma). Można jednak interpretować ten obszar jako powierzchnię zwichrowaną, jak na rysunku obok, a wtedy sprzeczność będzie dotyczyła kształtu tej powierzchni (krzywa – płaska).

Posługując się powyższą wiedzą o możliwych sprzecznościach możemy próbować konstruować figury, w których wystąpią pożądane przez nas typy sprzeczności. Przyglądając się różnym przykładom figur niemożliwych zauważymy ponadto, że powtarzają się w nich często pewne charakterystyczne struktury czy schematy budowy. Dwa z nich omówimy bardziej szczegółowo.

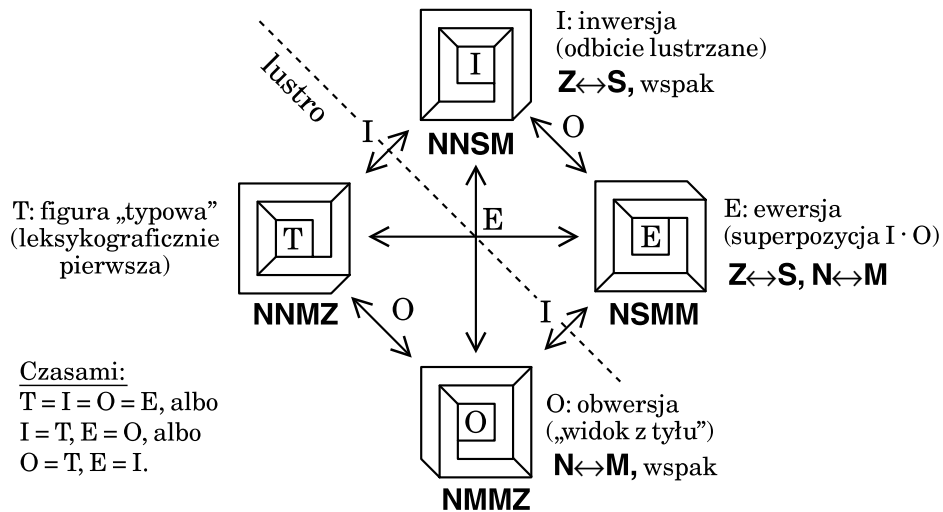
Niemożliwe wielokąty. Należą do nich dobrze nam już znany trójkąt niemożliwy oraz niemożliwy czworokąt pokazany w poprzednim odcinku.⁵ Obie te figury wraz z dwiema innymi tego typu pokazuje rysunek poniżej. Tajemnicze kody pod rysunkami objaśnimy za chwilę.



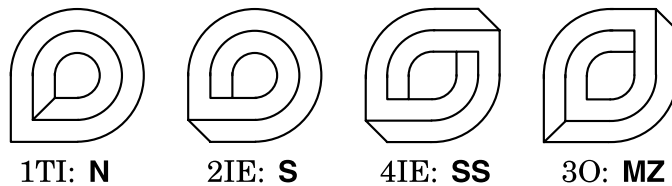
Jak łatwo zauważyć, wielokąty te są zbudowane z czterech różnych rodzajów narożników, oznaczanych odpowiednimi literami:



W rezultacie, każdy taki wielokąt można opisać jako sekwencję kodów jego kolejnych narożników. W zależności od tego, od którego narożnika zaczniemy opis i w którym kierunku będziemy obchodzić wielokąt, uzyskamy różne kody. Można jednak łatwo ujednoznaczyć taki kod, ustalając standardowy kierunek wypisywania narożników (np. w kierunku ruchu wskazówek zegara) i regułę wyboru jednej z możliwych cyklicznych sekwencji kodów (wybiera się kod pierwszy leksykograficznie, choć przyjęty porządek kodów narożników nie jest alfabetyczny – z historycznych przyczyn ustalono go na **N < M < Z < S**). Przy takiej umowie, każdemu wielokątowi odpowiada dokładnie jeden kod – taki, jak na rysunku powyżej. Kolejny krok systematyzacji wielokątów wynika z obserwacji, że niektóre wielokąty można otrzymać z innych przez proste geometryczne transformacje, mianowicie tzw. *inwersję* I (odbicie zwierciadlane), *obwersję* O (widok z tyłu) i *ewersję* E (która jest złożeniem inwersji i obwersji). Zbiór wielokątów podzielił się wtedy na rozłączne grupy (od jednego do czterech wielokątów w grupie): w każdej z nich wielokąty są związane opisanymi transformacjami, natomiast wielokątów z różnych grup nie można przekształcić jeden w drugi żadną z tych transformacji.⁶ Objaśnia to rysunek poniżej pokazujący na przykładzie czteroelementowej grupy czworokątów opisane przekształcenia, ich oznaczenia i reguły transformacji kodów.

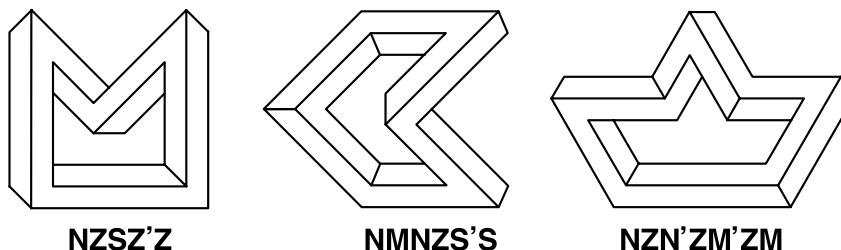


W oparciu o ten system kodowania można dość łatwo zaprogramować komputer, by generował nam kody wszystkich wielokątów i układał je w ładne tabelki.⁷ Wkładając nieco więcej wysiłku możemy dodatkowo spowodować, że komputer narysuje nam odpowiednie wielokąty. Przy okazji okazuje się, że da się sensownie rysować wielokąty posiadające tylko jeden lub dwa narożniki.. Po dwa przykładowe „jednokąty” i „dwukąty” pokazuje rysunek, wraz z ich kodami (podającymi również ich miejsce w odpowiedniej tabeli).

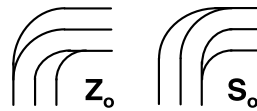


Można również próbować policzyć wszystkie takie wielokąty – mamy 4 jednokąty, 10 dwukątów, 24 trójkąty, 70 czworokątów, itd. Dokładna formuła dla dowolnej liczby narożników nie jest znana, znaleziono tylko jej dosyć dobre przybliżenie.⁸ Większość wielokątów okazuje się niemożliwa – tylko niewielki procent, malejący ze wzrostem liczby narożników, to figury, dla których obserwatorzy znajdują łatwe interpretacje możliwe.

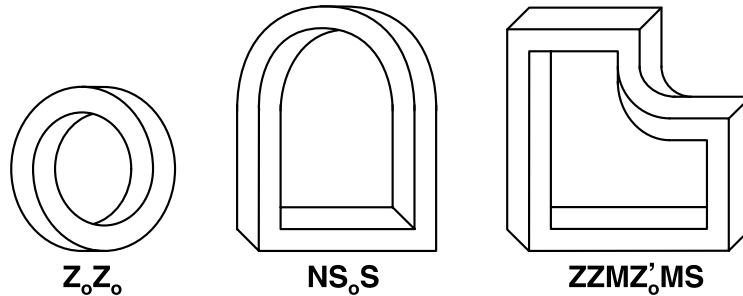
Klasę wielokątów można łatwo dalej rozszerzać, np. dodając narożniki wklęsłe (zaznaczone w kodzie apostrofem):



Kolejnym krokiem może być dodanie narożników zaokrąglonych, których można wyróżnić dwa rodzaje:

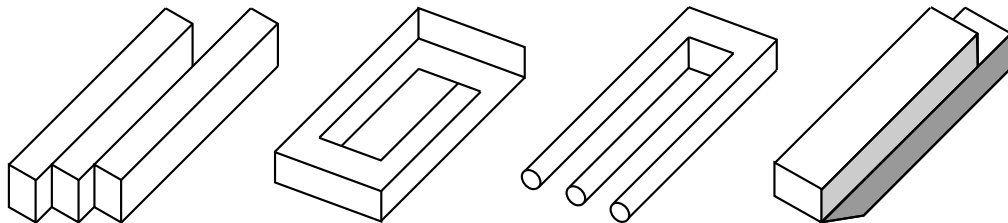


Z ich użyciem możemy tworzyć np. figury poniżej, w tym niemożliwy pierścień pokazany w poprzednim odcinku.

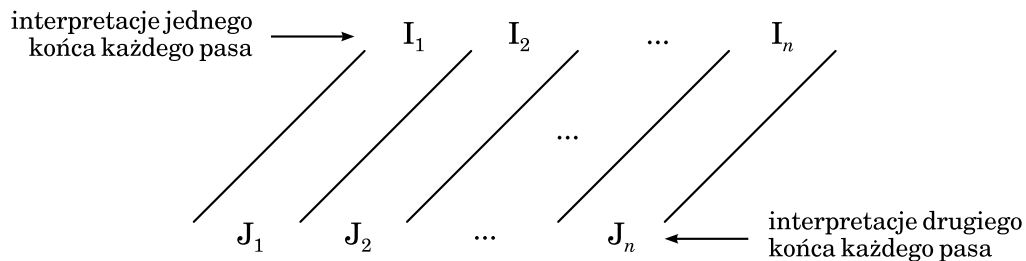


Dalsze możliwości rozszerzeń pozostawiamy inwencji czytelnika.

Figury pasowe. Konstrukcja tych figur z kolei opiera się na zasadzie, którą można by nazwać „metodą centaury” – czyli na zestawianiu „bez szwów” figur z dwu nie pasujących do siebie przestrzennie części, mających jednak identyczne, pasujące wzajemnie do siebie, fragmenty.⁹ Kilka przykładów pokazano na rysunku poniżej.



Jak widać, należą tu znane z poprzedniego odcinka „diabelskie widły.” Także niektóre niemożliwe wielokąty dają się zinterpretować w ramach tej klasy. Zasadę konstrukcji figur pasowych łatwo zrozumieć zasłaniając, np. kartką papieru, najpierw górną, a potem na zmianę dolną połowę rysunku powyżej. Bardziej formalnie można tę zasadę opisać jak następuje.



Zacznijmy od pewnej liczby (powiedzmy n) równoległych pasów jak na rysunku. Przez dorysowanie różnych elementów do górnej i dolnej części rysunku możemy nadać każdemu z pasów pewną interpretację przestrzenną. Jeżeli wtedy dla któregoś z pasów (np. pasa o numerze i) interpretacja jego górnego końca (I_i) będzie sprzeczna z interpretacją dolnego końca (J_i , np. I_i = pionowa płaszczyzna, J_i = pozioma płaszczyzna), otrzymamy interpretację zawierającą sprzeczność, co uczyni naszą figurę figurą niemożliwą. Jeśli oznaczymy odpowiednio inter-

pretacje przestrzenne końców pasów, jakie mogą wystąpić w takich rysunkach, możemy opisać każdą figurę tego typu jako dwie sekwencje kodów dla kolejnych pasów. Przykładowo, oznaczając **Ha** – *płaszczyzna pozioma widziana z góry*, **Vr** – *płaszczyzna pionowa widziana z prawej* możemy zakodować pierwszą z figur na rysunku jako:

Ha Vr Ha Vr

Ha Ha Ha Vr

Jak widać, figura zawiera pojedynczą sprzeczność (typu „orientacja płaszczyzny”) na drugim pasie figury. Rozszerzając repertuar dostępnych interpretacji pasów i oznaczając je odpowiednimi kodami, analogiczne opisy można podać dla pozostałych figur na rysunku. Wylizywanie i rysowanie figur pasowych przez komputer na podstawie kodów byłoby trudniejsze niż w przypadku wielokątów, gdyż wymagałoby opracowania odpowiedniego zestawu graficznych elementów umożliwiających narzucanie kolejnym pasom pożądanym interpretacji, w dodatku takich, by można je było przekonująco zestawiać ze sobą przy przechodzeniu do sąsiednich pasów. Łatwo zauważyć, patrząc na przykłady na rysunku, że nie każde elementy dają się tak ze sobą zestawiać, a opracowanie zbioru odpowiednich reguł zestawiania nie jest sprawą banalną.

Istnieje szereg innych schematów konstrukcyjnych figur niemożliwych, których można użyć do ich systematycznej generacji. Jedną z nich jest np. klasa niemożliwych schodów.¹⁰

Zenon Kulpa

¹ Zenon Kulpa: Figury niemożliwe, czyli ogólna teoria smoków. *Tytuł roboczy*, 2005.03 (007).

² Zenon Kulpa: Are impossible figures possible? *Signal Processing*, vol. **5** (1983) pp. 201-220. Zenon Kulpa: Putting order in the impossible. *Perception*, vol. **16** (1987) pp. 201-214. Skróconą wersję polskojęzyczną drugiego z tych artykułów zob.: Zenon Kulpa : Figury niemożliwe – Impossible figures. W: Dorota Folga-Januszewska, red.: *Artists on Space – Artyści o przestrzeni*. Muzeum Narodowe w Warszawie, Warszawa 1987, str. 41-63.

³ Pierwszy wariant takich schodów opublikowano w: L.S. Penrose, Roger Penrose: Impossible objects: a special type of visual illusion. *British Journal of Psychology*, vol. **49** (1958) pp. 31-33. W artykule znajduje się także zdjęcie gipsowego modelu takich schodów. Znana grafika Maurycego Eschera pt. „Wchodzenie i schodzenie” została nim zainspirowana. Wariant schodów użyty w tekście tego odcinka to tzw. *schody minimalne* (o najmniejszej możliwej liczbie jednakowych stopni), opublikowane po raz pierwszy w pracy: Zenon Kulpa: Are impossible..., op. cit.. W artykule tym wyprowadzono także ogólną formułę pozwalającą konstruować rozmaite schody tego rodzaju o różnej liczbie stopni i różnych proporcjach kształtu stopni.

⁴ Patrz Bruno Ernst: *Avonturen met Onmogelijke Figuren*. Aramith Uitgevers, Amsterdam 1985 (wyd. ang.: *Adventures with Impossible Figures*. Tarquin Publications, Norfolk 1986).

⁵ Zenon Kulpa: Figury niemożliwe..., op. cit.

⁶ Analizę niemożliwych czworokątów rozpoczął Thaddeus M. Cowan: The theory of braids and the analysis of impossible figures. *Journal of Mathematical Psychology*, vol. **11** (1974) pp. 190-212; oraz Thaddeus M. Cowan: Organizing properties of impossible figures. *Perception*, vol. **6** (1977) pp. 42-56. Była ona potem kontynuowana przez autora w: Zenon Kulpa: Putting order in the impossible, op. cit.

⁷ Odpowiednie programy zostały napisane przez autora, a niektóre wyniki opublikowane m.in. w Zenon Kulpa: Putting order in the impossible, op. cit. Wyniki te stały się także podstawą serii rysunków autora z roku 1984.

⁸ Zenon Kulpa: Putting order in the impossible, op. cit.

⁹ Tę klasę figur zdefiniowano i opisano po raz pierwszy w: Zenon Kulpa: Putting order in the impossible, op. cit.

¹⁰ Zob. np. formułę wyprowadzoną w: Zenon Kulpa: Are impossible..., op. cit.