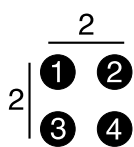


Figury niemożliwe, czyli ogólna teoria smoków

Jak wiadomo, smoków nie ma. Prymitywna ta konstatacja wystarczy może umysłowi prostackiemu, ale nie nauce...

(Stanisław Lem: *Cyberiada*, 1965)

Reprezentacje diagramowe, w odróżnieniu od reprezentacji opisowych (jak język), charakteryzują się tzw. *naśladowczością*,¹ to znaczy wzajemnie jednoznacznością między strukturą przedstawionych obiektów a strukturą ich reprezentacji. W wielu przypadkach jednak ta naśladowczość nie może być całkowita, co bywa przyczyną występowania błędów w reprezentacjach. Mogą one być kilku rodzajów, na przykład niedokładne przedstawienie obiektu, niemożność reprezentowania pożądanego obiektu, lub przedstawienie obiektu nieistniejącego. Pełna naśladowczość zapewniłaby tak zwaną *samoniesprzeczność* reprezentacji, czyli niemożliwość przedstawienia sprzecznych danych o obiekcie. Ponieważ reprezentacje opisowe nie mają cechy naśladowczości, nie są także samoniesprzeczne² – a więc nic nie przeszkodzi nam skłamać za pomocą języka („Ten czarny kot jest biały.”) lub matematycznej formuły ($2 \times 2 = 5$). Obu tych przykładowych kłamstw nie da się w zasadzie wypowiedzieć diagramowo – czarny kot na rysunku nie chce być biały, a kwadrat 2 na 2 kropki składa się

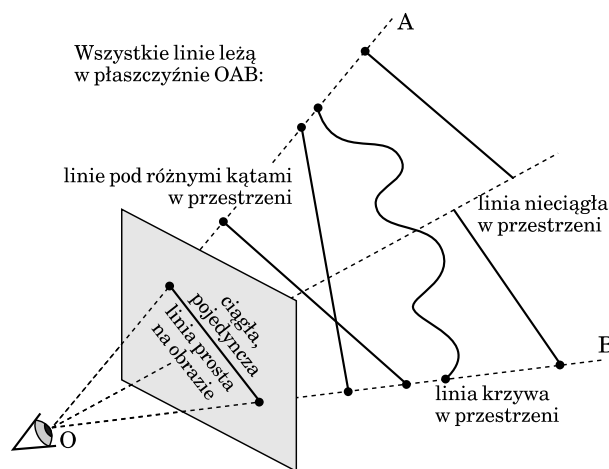


zawsze z 4 kropek. Brak własności samoniesprzeczności można by uznać za wadę reprezentacji opisowych, lecz brak ten jest jednocześnie ich siłą, gdyż pozwala przedstawiać za ich pomocą sytuacje hipotetyczne i rozumowania typu „co by było gdyby...” Przykładem ścisłego stosowania takiego rozumowania jest technika „dowodu nie wprost” w matematyce. Polega ona na przyjęciu, że teza dowodzonego twierdzenia jest nieprawdziwa i pokazaniu następnie, że z takiego założenia wynika ewidentny fałsz. Bez możliwości reprezentacji informacji fałszywych technika taka nie byłaby możliwa.

W wielu przypadkach niemożność reprezentacji fałszu bywa jednak przydatna, utrudnia bowiem popełnienie błędu. Pod tym względem diagramy, chociaż są reprezentacjami naśladowczymi, nie są jednak całkiem idealne. Nieprecyzyjność diagramów, jej możliwe skutki (niewłaściwa reprezentacja obiektów lub powstawanie struktur niemożliwych) i sposoby obrony przed nimi przedstawiono w poprzednim odcinku.³ Tutaj zajmiemy się bardziej zasadniczymi ograniczeniami naśladowczości diagramów, prowadzącymi do powstania spektakularnego zjawiska tzw. „figur niemożliwych.”

Podstawowym środkiem służącym do przedstawiania reprezentacji diagramowych jest płaska, dwuwymiarowa powierzchnia (papieru, ekranu) o standardowej geometrii euklidesowej. Należy to istotne ograniczenia na możliwe struktury obiektów, które da się przedstawić na diagramie bez zniekształceń. W szczególności dotyczy to struktur o więcej niż dwu wymiarach, jak np. obiektów trójwymiarowych w rysunku inżynierskim lub architektonicznym, albo wielowymiarowych zbiorów danych w grafice prezentacyjnej czy wizualizacji danych naukowych. Płaska reprezentacja takich obiektów nie może być zwykle dokonana bez istotnej utraty naśladowczości reprezentacji. Rozważmy powszechnie stosowaną reprezentację obiektów trójwymiarowych na płaszczyźnie za pomocą metody rzutowania perspektywicznego. Taka reprezentacja jest istotnie niejednoznaczna. W procesie interpretacji powstałego rysunku jednoznaczne odtworzenie struktury obiektu nie jest możliwe, na skutek utraty przy rzutowaniu

części informacji o jego przestrzennej strukturze. Jak pokazano na rysunku, kształty bardzo odmienne w przestrzeni mogą mieć identyczne płaskie rzuty.



W procesie interpretacji musimy zatem po części zgadywać, jak mógł wyglądać pierwotny obiekt i nie mamy gwarancji, że zawsze zgadniemy poprawnie. Ponieważ jednak w życiu napotykamy na ograniczony zestaw typów struktur obiektów, nasz zmysł wzroku wykształca w procesie swego rozwoju zestaw reguł interpretacyjnych dających poprawne wyniki w większości spotykanych sytuacji. Reguły te stanowią razem specyficzny wariant reguły „dopasowania do modelu” wprowadzonej w jednym z poprzednich odcinków.⁴ Tutaj zadanie jest bardziej złożone, więc i reguła jest odpowiednio rozbudowana – stanowi cały system reguł percepcyjnych. Po pierwsze, interpretacja przestrzenna rysunku jest budowana po kawałku – poczynając od interpretacji prostych, a charakterystycznych jego fragmentów (jak np. narożniki) dochodzimy do zestawiania ich razem w spójną przestrzenną całość. W tym procesie są stosowane pewne zasady interpretacyjne, które, jak wskazuje doświadczenie, zwykle dają poprawne rezultaty. Oto najbardziej podstawowe z nich:

(Zasada prostoty) Interpretacja przestrzenna rysunku powinna być jak najprostsza, wręcz prostsza niż ten rysunek.

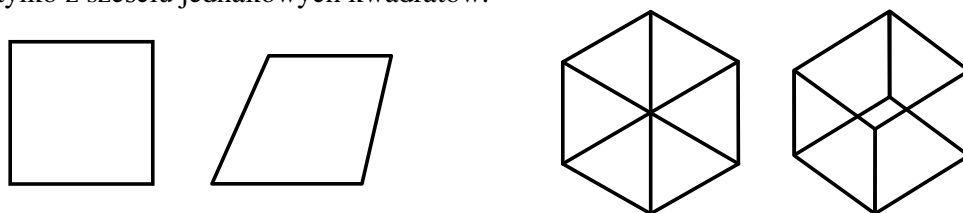
Ta ogólna zasada jest trochę niedookreślona – należałoby jeszcze ustalić sposób pomiaru prostoty rysunku i jego interpretacji.⁵ Interesujące, że nasz układ postrzegania wzrokowego stosuje tę zasadę powszechnie, nie tylko przy interpretacji przestrzennej. Szczególny wariant tej zasady dla przypadku interpretacji przestrzennej wyróżnia się zwykle jako oddzielną zasadę:

(Zasada minimalnej zmiany) Geometryczne własności i relacje (np. prostoliniowość, równoległość, przecinanie się) obecne na rysunku powinny być zachowane w interpretacji, lub co najwyżej minimalnie zmienione zgodnie z zasadami rzutowania (np. linie zbieżne na rysunku mogą być zinterpretowane jako równoległe w przestrzeni – zauważmy, że takie „urównoleglenie” linii rysunku czyni interpretację prostszą niż rysunek, zgodnie z ogólną zasadą prostoty).

(Zasada pozycji ogólnej) Zakłada się, że obiekt jest przedstawiony na rysunku jako widziany z takiego punktu widzenia, że niewielka zmiana tego punktu widzenia nie narusza na tyle istotnie struktury rysunku lub istotnych własności jego elementów, by wymusić odmienną interpretację przestrzenną rysunku.

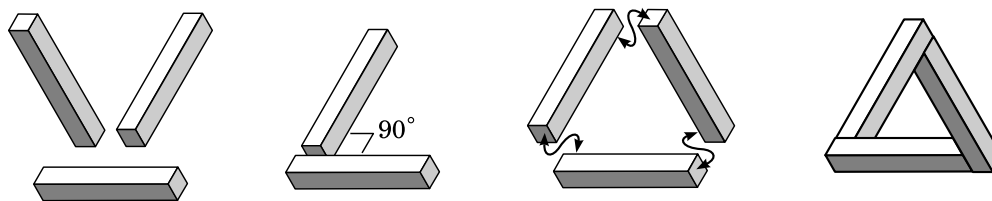
Proszę porównać tę zasadę z podobną zasadą rysowania diagramów w celu uczynienia ich odporniejszymi na błędy nieprecyzyjności.⁶

Zasady te są w gruncie rzeczy oparte na naszym doświadczeniu postrzegania obiektów trójwymiarowych w rzeczywistym świecie. Ogólna zasada prostoty opiera się na obserwacji, że obiekty przestrzenne mają zazwyczaj prostszą strukturę, niż ich płaskie rzuty, w których występują niekiedy znaczne zniekształcenia perspektywiczne. Ilustrują to dwa proste przykłady. W pierwszym z nich rysunek kwadratu odbieramy jako płaski – jest to figura na tyle prosta, że próba interpretacji przestrzennej nie powoduje jej dalszego uproszczenia. Natomiast skośny czworokąt widzimy raczej przestrzennie – jako kwadrat (lub prostokąt) pochylony w przestrzeni. W drugim przykładzie⁷ strukturalnie prosty rysunek sześciokąta foremego z przekątnymi widzimy raczej płasko, choć jest to całkiem poprawny rzut sześcianu z drutu. Natomiast złożony rysunek obok widzimy wyraźnie jako obiekt przestrzenny – sześcian z drutu. Taka interpretacja przestrzenna tego rysunku jest prostsza niż rysunek, składa się bowiem tylko z sześciu jednakowych kwadratów.



Pozostałe dwie zasady wynikają z tego, że świat zewnętrzny widzimy dwójgim oczu umieszczonych w pewnej odległości od siebie, które możemy dodatkowo przemieszczać przy pomocy ruchów głowy lub całego ciała. W rezultacie jest mało prawdopodobne zobaczenie obiektu tylko z tego jednego, szczególnego punktu widzenia, który ukrywa jego rzeczywistą strukturę na skutek specjalnego ustawienia jego części (*pozycja ogólna*) lub istotnego zniekształcenia ich własności geometrycznych (*minimalna zmiana*).

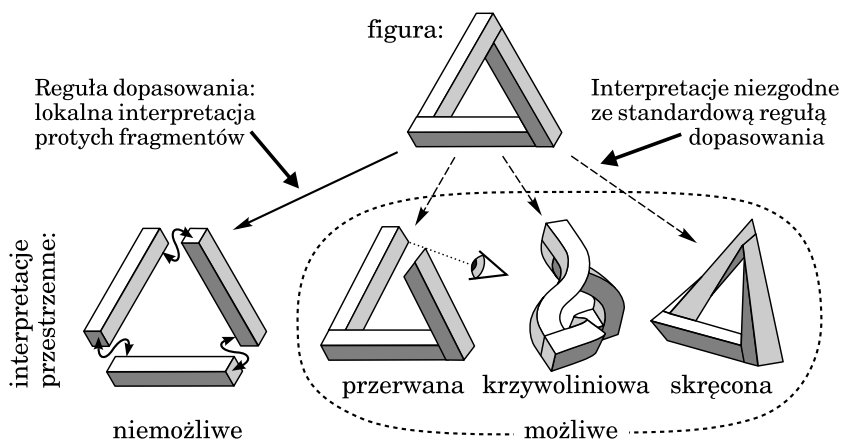
Działanie tych zasad przy przestrzennej interpretacji płaskich rysunków może jednak prowadzić do błędów, w tym do pojawiania się niemożliwych konfiguracji (w tym kontekście zwanych „figurami niemożliwymi”). Jest to sytuacja podobna do tej, jaka była omawiana w poprzednim odcinku,⁸ gdzie konieczność stosowania reguły dopasowania do modelu (jako skutek nieprecyzyjności diagramów) powodowała czasem powstawanie niemożliwych konfiguracji innego rodzaju.



Przyjrzyjmy się pierwszemu rysunkowi – trzy obiekty na nim mają oczywistą przestrzenną interpretację jako proste beleczki o kwadratowym przekroju, różnie położone w przestrzeni. Zestawienie dwóch z nich końcami pod kątem 90 stopni na kolejnym rysunku również nie budzi wątpliwości – lokalna interpretacja przestrzenna powstałego narożnika zgadza się z interpretacjami tworzących go beleczek. Gdy jednak dokonamy w analogiczny sposób połączenia wszystkich trzech beleczek, w sposób pokazany na kolejnym rysunku, uzyskamy ewidentnie niemożliwy do realnego zbudowania trójkąt, w którym suma kątów wynosi 270 zamiast 180 stopni. Tak powstały *niemożliwy trójkąt* jest jedną z bardziej znanych figur niemoż-

liwych.⁹ Występuje on często w grafice użytkowej i był przedmiotem badań z dziedziny psychologii widzenia. Badania te doprowadziły m.in. do znalezienia możliwych do realizacji interpretacji przestrzennych tej figury i sporządzenia odpowiednich modeli, eksponowanych także jako artystyczne rzeźby.¹⁰

Interpretacje te przedstawiono na kolejnym rysunku:¹¹



Wynalezienie modelu z przerwą przypisywane jest znanemu angielskiemu psychologowi widzenia Ryszardowi Gregory'emu.¹² Modele krzywoliniowe różnych figur niemożliwych (w tym niemożliwego trójkąta jak na rysunku) realizował m.in. belgijski artysta Mathieu Hamakers.¹³ Ostatni model jest autorstwa rosyjskiego artysty i konstruktora Wiaczesława Kolejczuka.¹⁴

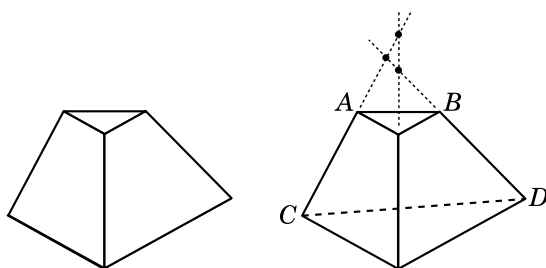
Jak można się przekonać, każda z tych możliwych interpretacji narusza zasady interpretacji przestrzennej omówione powyżej, nic więc dziwnego, że wymyślenie którejkolwiek z nich wymaga sporego wysiłku. Nawet gdy już taką interpretację znajdziemy lub poznamy, to patrząc na rysunek trójkąta nadal widzimy przede wszystkim konfigurację niemożliwą. Wszystkie trzy modele naruszają w oczywisty sposób ogólną zasadę prostoty (są bardziej złożone, niż rysunek) i zasadę pozycji ogólnej (dają rzut identyczny z rysunkiem tylko z jednego szczególnego kierunku). Ponadto, analiza rysunku narzuca obserwatorowi szereg istotnych jego cech, które zgodnie z zasadą minimalnej zmiany powinny zostać zachowane w interpretacji, a w tych modelach zachowane nie są. Model z przerwą narusza *zamkniętość* trójkąta, model krzywoliniowy narusza *prostoliniowość* beleczek, a zarówno model krzywoliniowy, jak i skręcony naruszają ich *prostopadłość*. Model skręcony dodatkowo narusza *prostopadłość* beleczek względem siebie.

Rozważania te pozwalają na podanie ściślejszej definicji figury niemożliwej:

Figura niemożliwa to płaski rysunek sprawiający wrażenie trójwymiarowości, którego interpretacja przestrzenna przyjęta przez obserwatora jest niemożliwa do realizacji, gdyż zawiera wyraźnie widoczne sprzeczności.

Trzy wyróżnione frazy w tej definicji są szczególnie ważne dla zrozumienia istoty tych figur – omówimy je tutaj pokrótce. Po pierwsze, figura musi wyglądać na rysunek jakiegoś obiektu przestrzennego, w przeciwnym razie nazwanie jej niemożliwą nie ma sensu, gdyż jako płaski rysunek jest ona jak najbardziej możliwa, skoro została narysowana. W konsekwencji, po drugie: tym, co oceniamy pod kątem możliwości realizacji, nie jest sam rysunek, lecz nasza

interpretacja przestrzenna tego rysunku. Takich interpretacji – naszych, czy też znalezionych przez kogoś innego – może być wiele, jedne mogą być niemożliwe, inne możliwe, jak pokazano na przykładzie interpretacji trójkąta niemożliwego powyżej. Z tego względu figury niemożliwe są przykładem wizualnego *złudzenia interpretacji przestrzennej*. Po trzecie, bardzo istotną cechą tych figur jest to, że sprzeczności interpretacyjne, czyniące ich interpretację niemożliwą, są wyraźnie widoczne dla obserwatora. Istnieją bowiem figury, których interpretacje czynione przez większość obserwatorów są zazwyczaj niemożliwe, jednak obserwatorzy ci nie dostrzegają tej niemożliwości, uznając je za całkiem poprawne. Jest wiele przykładów takich figur (zwanymi *figurami prawdopodobnymi*); najbardziej znana jest *niemożliwa piramida* poniżej.



Rysunek po lewej interpretowany jest jako płaskościenna ścięta piramida o trójkątnej podstawie (jak zaznaczono przerywaną linią na drugim rysunku). Taki obiekt trójwymiarowy nie jest jednak możliwy, gdyż jak wynika z reguł geometrii, jego trzy skośne krawędzie, jako przecięcia trzech płaszczyzn, musiałyby się przecinać w jednym punkcie, czego wyraźnie nie czynią, jak pokazuje rysunek. Możliwa piramida musiałaby mieć tylną, niewidoczną ścianę zwichrowaną zamiast płaskiej, lub też ściana ta musiałaby się składać z co najmniej dwu mniejszych ścian zestawionych pod kątem do siebie, tak, by wierzchołki *A*, *B*, *C* i *D* nie leżały na jednej płaszczyźnie.¹⁵

Takie figury są analogiczne do niemożliwych konfiguracji prowadzących czasem do błędów w rozumowaniach diagramowych, omówionych w poprzednim odcinku.¹⁶

W pewnym sensie odwrotny efekt prezentują tzw. *figury nieprawdopodobne*, dla których przestrzenne interpretacje ludzkich obserwatorów są obiektywnie możliwe, lecz są przez nich oceniane jako niemożliwe do realizacji. O jednoznaczne przykłady jest tu trudniej, a ich dokładna i poprawna analiza nastęrcza pewnych trudności, nie będziemy więc ich tutaj omawiać.¹⁷

Na zakończenie, kilka innych przykładów figur niemożliwych.

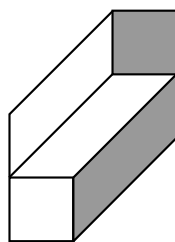
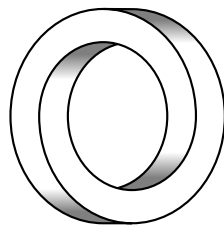
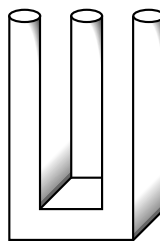


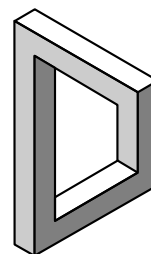
Figura Thiéry'ego



Niemożliwy pierścień



Diabelskie widły



Niemożliwy prostokąt

Figura Thiéry'ego była badana przez niego jeszcze w XIX w.,¹⁸ jako tzw. *figura niejednoznaczna* – oprócz interpretacji niemożliwej ma ona także dwie, wzajemnie wykluczające się, lecz równie przekonujące interpretacje, związane ze złudzeniem „wklęsłe-wypukłe” (zwanym także *złudzeniem kraterów księżycowych*). Jest ona także popularna w grafice, zarówno użytkowej, jak i artystycznej (np. prace Wiktora Vasarely'ego¹⁹). O autorstwie pozostałych figur niewiele wiadomo. Niemożliwy prostokąt można łatwo uzyskać „obcinając” jeden narożnik niemożliwego trójkąta. Warto dodać, że istnieje wiele innych niemożliwych trójkątów i prostokątów, oprócz tych pokazanych powyżej. Sposoby ich konstruowania pokażemy w kolejnym odcinku.

Zenon Kulpa

¹ O naśladowczości reprezentacji patrz: Zenon Kulpa: Co to są diagramy: czy to sposób na pomieszenie języków? *Tytuł roboczy*, 2004.12 (004).

² Zenon Kulpa: Self-consistency, imprecision, and impossible cases in diagrammatic representations. *Machine GRAPHICS & VISION*, vol. 12 (2003) pp. 147-160.

³ Zenon Kulpa: Błędy diagramowe, czyli jak nie dać się zwieść pozorom. *Tytuł roboczy*, 2005.02 (006).

⁴ Zenon Kulpa: Błędy diagramowe..., op. cit.

⁵ Różne propozycje miar prostoty rysunków obiektów przestrzennych badano np. w: Julian Hochberg, Virginia Brooks: The psychophysics of form: reversible-perspective drawings of spatial objects. *The American Journal of Psychology*, vol. 73 (1960), pp. 227-354. Słabością tej pracy było jednak to, że oceniano w niej tylko złożoność samych rysunków, nie biorąc pod uwagę złożoności ich przestrzennych interpretacji.

⁶ Zenon Kulpa: Błędy diagramowe..., op. cit.

⁷ Przykład wybrany z wielu podobnych przykładów analizowanych w: Julian Hochberg, Virginia Brooks: The psychophysics of form..., op. cit.

⁸ Zenon Kulpa: Błędy diagramowe..., op. cit.

⁹ Trójkąt ten opublikowano po raz pierwszy w: L.S. Penrose, Roger Penrose: Impossible objects: a special type of visual illusion. *British Journal of Psychology*, vol. 49 (1), 1958, pp. 31-33. Stąd jest on także znany pod nazwą „trójkąt Penrose'a.” Prawdopodobnie jednak zasadę jego konstrukcji pierwszy wymyślił szwedzki rzeźbiarz, rysownik i historyk sztuki Oscar Reutersvärd w 1934 r., jak podano np. w: Bruno Ernst: *Avonturen met Onmogelijke Figuren*. Aramith Uitgevers, Amsterdam 1985 (wyd. ang.: *Adventures with Impossible Figures*. Tarquin Publications, Norfolk 1986). Poczta szwedzka w 1982 r. poświęciła figurze Reutersvärda znaczek pocztowy (zob. reprodukcja obok; jest to jeden z trzech znaczków serii pokazującej różne figury niemożliwe autorstwa Reutersvärda). Proszę też zwrócić uwagę na nazwisko rytownika serii w prawym dolnym rogu.

¹⁰ Zob. np. Bruno Ernst: *Het begoochelde oog: Onmogelijke and meerzinnige figuren*. Meulenhoff/Lanshoff, Amsterdam 1986 (wyd. angielskie: *The Eye Beguiled: Optical Illusions*. Benedikt Taschen Verlag, Kolonia 1986, 1992).

¹¹ Zenon Kulpa: Self-consistency..., op. cit.

¹² Richard Gregory: *The Intelligent Eye*. Weidenfeld & Nicolson, London 1970.

¹³ Zob. Bruno Ernst: *Het begoochelde oog...*, op. cit.

¹⁴ Wiaczesław Kolejczuk: „Newozmożnyje figury?” *Technicheskaja Estetika*, nr 9 (1974), str. 14-15.

¹⁵ Zenon Kulpa: Are impossible figures possible? *Signal Processing*, vol. 5 (1983) pp. 201-220.

¹⁶ Zenon Kulpa: Błędy diagramowe..., op. cit.

¹⁷ Patrz jednak: Zenon Kulpa: Are impossible..., op. cit. oraz: Zenon Kulpa: Putting order in the impossible. *Perception*, vol. 16 (1987) pp. 201-214.

¹⁸ A. Thiéry: Über geometrisch-optische Täuschungen. *Philosophische Studien*, vol. 11 (1895) pp. 307-370.

¹⁹ Wiktor [Victor] Vasarely (1908-1997), znany francuski grafik i malarz abstrakcjonista, urodzony na Węgrzech.

