

## ZMĘCZENIOWA PROPAGACJA SZCZELINY W BIMATERIALE – – MODEL MATEMATYCZNY I ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE

Krzysztof DOLIŃSKI, Krzysztof P. MRÓZ

Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, ul. Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa

[kdolin@ippt.gov.pl](mailto:kdolin@ippt.gov.pl), [kmroz@ippt.gov.pl](mailto:kmroz@ippt.gov.pl)

**Streszczenie:** Praca dotyczy płaskiego zagadnienia wzrostu szczeliny zmęczeniowej w bimateryale powstałym na skutek idealnego zespolenia dwóch materiałów sprężystych. Proponowana metoda umożliwia określenie wzrostu takiej szczeliny, dowolnie usytuowanej w bimateryale. Oparta jest ona na istniejących modelach matematycznych rozwijanych w ramach mechaniki pęknięcia i dających podstawy do wyznaczenia współczynników intensywności naprężeń dla szczelin w bimateryale. Metoda ta pozwala ocenić, dla każdego kolejnego cyklu obciążenia, kierunek propagacji i przyrost długości szczeliny, a w konsekwencji jej drogę i długość będące wynikiem procesu zmęczeniowego. Do tego celu wykorzystany jest dyslokacyjny model szczeliny, który prowadzi do układu osobliwych równań całkowych. Do rozwiązania tego układu równań zaproponowano efektywny algorytm numeryczny.

### 1. WPROWADZENIE

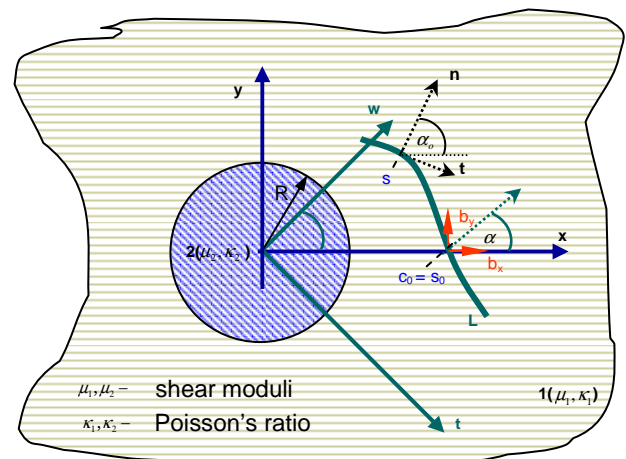
Materiały kompozytowe znajdują obecnie coraz szersze zastosowanie w konstrukcjach inżynierskich. Wykorzystywane są one do produkcji elementów samolotów, pojazdów kosmicznych, samochodów, podzespołów elektronicznych, gdzie często narażone są na obciążenia cykliczne. W trakcie procesów produkcji trudno jest jednak wyeliminować powstawanie defektów (np. w interfejsie lub jego sąsiedztwie), które rozwijając się pod wpływem zmiennych w czasie obciążeń eksploatacyjnych tworzą pęknięcia prowadzące do zmęczeniowego zniszczenia konstrukcji. Umiejętność oszacowania czasu do zniszczenia zmęczeniowego elementu konstrukcji jest konieczna dla zagwarantowania odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa, a właściwy dobór materiałów i technologii wytwarzania pozwala podwyższyć niezawodność całej konstrukcji.

Jednym z przykładów kompozytu jest bimateryał. Możliwość opisu wzrostu szczeliny zmęczeniowej w bimateryale, a w szczególności w otoczeniu połączenia dwóch materiałów (interfejsu) jest kluczowa dla modelowania tego zjawiska w bardziej złożonych materiałach kompozytowych. W pracy rozważony będzie problem wzrostu szczeliny pod wpływem obciążeń cyklicznych umieszczonej w bimateryale, czyli w elemencie złożonym z dwóch idealnie połączonych materiałów sprężystych o różnych stałych materiałowych i nieskończenie dużych rozmiarach. Rozważany będzie przypadek płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia. Proponowane w pracy podejście pozwala na rozwiązanie problemu propagacji szczeliny zmęczeniowej dla innych konfiguracji interfejsu oraz struktury kompozytu. W pracy przedstawiono jedynie wyniki symulacji komputerowej wzrostu szczeliny zmęczeniowej dla materiałów jednorodnych i bimateryału.

### 2. METODA

#### 2.1. Wprowadzenie

Proponowana metoda zostanie przedstawiona na prostym przykładzie okrągłego wtrącenia (Rys.1)



Rys. 1. Okrągłe wtrącenie w nieskończenie dużej matrycy

Zgodnie z założeniami metody, zadanie wymaga rozwiązania kilku problemów. Problem pierwszy (A) to problem okrągłego sprężystego wtrącenia (inkluzji) zatopionego w matrycę bez szczeliny, której pole naprężeń jest uzależnione od warunków zewnętrznych. Problem drugi (B1) to problem pola naprężeń zależnego tylko od istnienia szczeliny w matrycy. W tym przypadku pole naprężeń wynika z przyłożenia na powierzchni szczeliny naprężenia, o przeciwnym znaku, wynikającego z rozwiązania problemu (A). Jednocześnie rozważyć należy problem (B2), w którym szczelina reprezentowana jest przez ciągły rozkład dyslokacji krawędziowych. Wykorzystując rozwiązanie dla pojedynczej dyslokacji

można, zgodnie z pracą Erdogana i innych (1974) oraz kilkoma modyfikacjami rozważanymi dla bardziej skomplikowanych przypadków, sformułować wykorzystywaną tu metodą w postaci ogólnej.

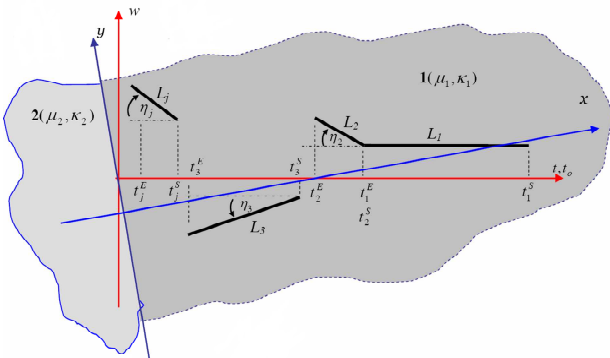
Przyjmuje się, że matryca zawiera „cięcie” wzdłuż gładkiego łuku  $L$  przechodzącego przez punkt  $(c_0, 0)$  (Rys.1). Następnie przyjmujemy składowe  $\sigma_n$ ,  $\sigma_t$  dla  $s \in L$  jako, odpowiednio, prostopadłe i styczne, naprężenia na  $L$  w materiale bez cięcia, zależne jedynie od obciążenia zewnętrznego (rozwiązanie problemu (A)). Następnie rozważamy punkt  $(c_0, 0)$  odpowiadający punktowi  $s=s_0$  na  $L$ , gdzie  $s$  jest długością mierzoną wzdłuż linii  $L$ . Można teraz otrzymać prostopadłe i styczne naprężenie na  $L$ , zależne od składowych,  $b_x, b_y$ , wektora Burgera określającego dyslokację, w postaci zależnej od składowych wektora Burgera,  $b_n, b_w$ , w nowym układzie współrzędnych. Jeżeli  $n$  i  $t$  są, odpowiednio, normalną i styczną współrzędną na  $L$  i  $\alpha = \alpha(s)$  jest kątem pomiędzy osią  $x$  i normalną w punkcie  $s$ , to wówczas dla  $x, y \in L$  naprężenie w punkcie  $s$  od pojedynczej dyslokacji umieszczonej w punkcie  $s_0$ , o wektorze Burgera określonym przez składowe  $\sigma_n^b(s, s_0)$ ,  $\sigma_t^b(s, s_0)$  można wyrazić jako:

$$\begin{aligned}\sigma_n^b(s, s_0) &= h_{n1}(s, s_0)b_t + h_{n2}(s, s_0)b_w, \\ \sigma_t^b(s, s_0) &= h_{t1}(s, s_0)b_t + h_{t2}(s, s_0)b_w,\end{aligned}\quad (1)$$

Naprężenie w punkcie  $s$  wynikające z istnienia dyslokacji wzdłuż linii  $L$  można wyrazić w następującej postaci całkowej

$$\begin{aligned}-\sigma_n(s) &= \int_L [\sigma_n^b(s, s_0)] ds_0 = \\ &= \int_L [h_{n1}(s, s_0)b_t(s_0) + h_{n2}(s, s_0)b_w(s_0)] ds_0, \\ -\sigma_t(s) &= \int_L [\sigma_t^b(s, s_0)] ds_0 = \\ &= \int_L [h_{t1}(s, s_0)b_t(s_0) + h_{t2}(s, s_0)b_w(s_0)] ds_0.\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie  $\sigma_n(s)$ ,  $\sigma_t(s)$  oznaczają, odpowiednio, normalne i styczne naprężenie na  $L$ , w materiale bez szczeliny (rozwiązanie problemu A),  $h_m(s, s_0)$  i  $h_n(s, s_0)$  są funkcjami Greena.



Rys. 2. System  $N$  prostoliniowych szczelin

Przyjmijmy, że szczelina jest prostoliniowa o długości  $L$  oraz  $(t, w)$  jest układem współrzędnych jak na Rys. 2. W takim przypadku naprężenia  $\sigma_n(s)$ ,  $\sigma_t(s)$  dla  $N$  prostoliniowych szczelin można wyrazić w następujący sposób:

$$\begin{aligned}-\sigma_n(t_j) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{n1}(t_j, t_{oi})b_{ti}(t_{oi}) + h_{n2}(t_j, t_{oi})b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi} \\ -\sigma_t(t_j) &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} [h_{t1}(t_j, t_{oi})b_{ti}(t_{oi}) + h_{t2}(t_j, t_{oi})b_{wi}(t_{oi})] dt_{oi}.\end{aligned}\quad (3)$$

Następnie, wprowadzając notację

$$\begin{aligned}-\sigma_n(t_j) &= -\sigma_{ww}(t_j, c) = p_n(t_j), \\ -\sigma_t(t_j) &= -\sigma_{wt}(t_j, c) = p_t(t_j), \\ b_{ni}(t_{oi}) &= -f_{ni}(t_{oi}), \quad b_{ti}(t_{oi}) = -f_{ti}(t_{oi}).\end{aligned}$$

wyrażenie (3) można sformułować w następującej postaci

$$\begin{aligned}p_n(t_j) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} \frac{2\mu_m}{\pi(\kappa_m + 1)} \left[ [f_{ti}(t_{oi}) \frac{2\sin\eta_i}{t_{oi} - t_j} + f_{ni}(t_{oi}) \frac{2\cos\eta_i}{t_{oi} - t_j} + \right. \\ &+ f_{ti}(t_{oi})k_{ti}^{nj}(t_j, t_{oi}) + f_{ni}(t_{oi})k_{ni}^{nj}(t_j, t_{oi})] \delta_{ij} \\ &+ (1 - \delta_{ij}) [f_{ti}(t_{oi})K_{ti}^{nj}(t_j, t_{oi}) + f_{ni}(t_{oi})K_{ni}^{nj}(t_j, t_{oi})] \left. \right] \frac{dt_{oi}}{\cos\eta_i},\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}p_t(t_j) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} \frac{2\mu_m}{\pi(\kappa_m + 1)} \left[ [f_{ti}(t_{oi}) \frac{2\cos\eta_i}{t_{oi} - t_j} - f_{ni}(t_{oi}) \frac{2\sin\eta_i}{t_{oi} - t_j} + \right. \\ &+ f_{ti}(t_{oi})k_{ti}^{tj}(t_j, t_{oi}) + f_{ni}(t_{oi})k_{ni}^{tj}(t_j, t_{oi})] \delta_{ij} \\ &+ (1 - \delta_{ij}) [f_{ti}(t_{oi})K_{ti}^{tj}(t_j, t_{oi}) + f_{ni}(t_{oi})K_{ni}^{tj}(t_j, t_{oi})] \left. \right] \frac{dt_{oi}}{\cos\eta_i}.\end{aligned}\quad (5)$$

gdzie:  $k_{ii}^{nj}$ ,  $k_{ni}^{nj}$ ,  $k_{ii}^{tj}$ ,  $k_{ni}^{tj}$  są nieosobliwymi składnikami odpowiednio przetransformowanych funkcji Greena dla punktów na tej samej szczelinie, tj. dla  $i = j$ . Natomiast  $K_{ii}^{nj}$ ,  $K_{ni}^{nj}$ ,  $K_{ii}^{tj}$ ,  $K_{ni}^{tj}$  są to nieosobliwe składowe, ponieważ określają wpływ dyslokacji na linii  $L_i$  na naprężenie w punkcie o współrzędnej  $t = t_j$  na linii  $L_j$ , czyli dla  $j \neq i$ . Zauważmy, że osobliwości występują tylko dla  $i = j$ , i są one typu Cauchy'ego. Wartość indeksu  $m$ ,  $m = 1, 2$ , zależy od tego, gdzie znajduje się aktualnie rozpatrywana dyslokacja. I tak dla dyslokacji w materiale 1 indeks  $m = 1$ , dla dyslokacji w materiale 2 indeks  $m = 2$ . Należy zwrócić uwagę, że ze względu na warunek zachowania ciągłości odkształceń na połączeniu dwóch materiałów naprężenia  $\sigma_{y,1}$  i  $\sigma_{y,2}$  spełniają następującą relację:

$\sigma_{y,1}/E_1 = \sigma_{y,2}/E_2$  – dla płaskiego stanu naprężenia,  
 $(1 - \nu_1^2)(\sigma_{y,1}/E_1) = (1 - \nu_2^2)(\sigma_{y,2}/E_2)$  – dla płaskiego stanu odkształcenia. Funkcje gęstości dyslokacji  $f_{ti}(t_{oi})$  i  $f_{ni}(t_{oi})$  występujące w równaniach całkowych (4) i (5) muszą dodatkowo spełniać warunek (Erdogan i inni, 1974):

$$\sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} \frac{f_{ti}(t_{oi})}{\cos\eta_i} dt_{oi} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \int_{t_i^E}^{t_i^S} \frac{f_{ni}(t_{oi})}{\cos\eta_i} dt_{oi} = 0.\quad (6)$$

Sformułowane powyżej osobliwe równania całkowe typu Cauchy'ego rozwiązywane są numerycznie za pomocą

metody Gaussa-Chebysheva opisanej w pracy (Erdogana i Gupty (1972). Zgodnie z tą techniką, oddziela się część osobliwą równań, zawierającą składową  $(t_o-t)^{-1}$ , a przedziały całkowania normalizuje się, wprowadzając funkcję,  $F_{ki}(\xi_i)$  zdefiniowaną jako:  
 $b_{ki}(\xi_i) = F_{ki}(\xi_i) (1-\xi_i)^{-\varepsilon} (1+\xi_i)^{-\omega}$ ,  $k = t, n$ , gdzie:  $\varepsilon, \omega$  określają stopnie osobliwości, które w przypadku pojedynczej szczeliny w materiale jednorodnym są równe  $\frac{1}{2}$ . W narożniku, w miejscu połączenia dwóch odcinków szczeliny, stopień osobliwości jest w rzeczywistości mniejszy niż  $\frac{1}{2}$ . W pracy przyjmujemy w tym punkcie stopień osobliwości równy  $\frac{1}{2}$ . Wprowadza to pewien błąd w rozwiązaniu, który, jak wykazano, nie ma istotnego znaczenia w rozważanym problemie wzrostu szczeliny zmęczeniowej. Założenie to w sposób zasadniczy upraszcza problem. Jego przyjęcie wymaga jednak wprowadzenia dodatkowego warunku, np.  $F_{ki}(-1) = 0$ , patrz (Lo, 1978; Sih, 1974).

Współczynniki intensywności naprężeń definiuje się jako

$$\begin{aligned}
 k_I(t_j^S) &= \lim_{t \rightarrow t_j^S} \sqrt{\frac{2(t-t_j^S)}{\cos \eta_j}} p_n(t_j), \\
 k_{II}(t_j^S) &= \lim_{t \rightarrow t_j^S} \sqrt{\frac{2(t-t_j^S)}{\cos \eta_j}} p_t(t_j), \\
 k_I(t_j^E) &= \lim_{t \rightarrow t_j^E} \sqrt{\frac{2(t_j^E-t)}{\cos \eta_j}} p_n(t_j), \\
 k_{II}(t_j^E) &= \lim_{t \rightarrow t_j^E} \sqrt{\frac{2(t_j^E-t)}{\cos \eta_j}} p_t(t_j),
 \end{aligned} \tag{7}$$

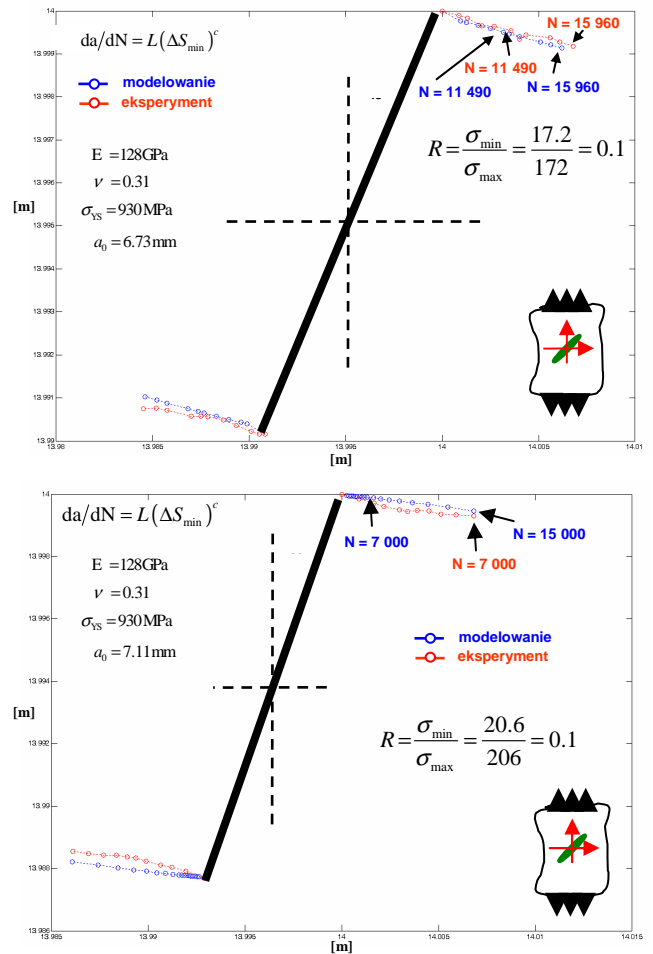
Następnie, wykorzystując transformację zaproponowaną w pracy Muskhelishvili (1966) oraz definicje (7) współczynniki intensywności naprężeń można wyrazić w końcowej formie w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 k_I(t_j^S) &= -\frac{1}{\sqrt{L_j/2}} [\sin(\eta_j) F_{t_j}(t_j^S) + \cos(\eta_j) F_{n_j}(t_j^S)], \\
 k_{II}(t_j^S) &= -\frac{1}{\sqrt{L_j/2}} [\cos(\eta_j) F_{t_j}(t_j^S) - \sin(\eta_j) F_{n_j}(t_j^S)], \\
 k_I(t_j^E) &= \frac{1}{\sqrt{L_j/2}} [\sin(\eta_j) F_{t_j}(t_j^E) + \cos(\eta_j) F_{n_j}(t_j^E)], \\
 k_{II}(t_j^E) &= \frac{1}{\sqrt{L_j/2}} [\cos(\eta_j) F_{t_j}(t_j^E) - \sin(\eta_j) F_{n_j}(t_j^E)].
 \end{aligned} \tag{8}$$

### 2.3. Rezultaty

W pracy przedstawiono porównanie drogi wzrostu szczeliny zmęczeniowej (Rys.3) uzyskanej przy zastosowaniu opisywanej metody z wynikami eksperymentu z pracy Pustejovsky'ego (1979). Eksperyment dotyczył dwóch konfiguracji szczelin, jak pokazano na Rys. 3, w próbkach wykonanych ze stopu tytanu Ti-6Al-4V. Jak widać na zamieszczonych rysunkach wyniki eksperymentu i symulacji numerycznej dotyczące kierunku wzrostu szczeliny są bardzo podobne. W symulacji numerycznej użyto współczynnika gęstości energii odkształcenia,  $S$ , jako

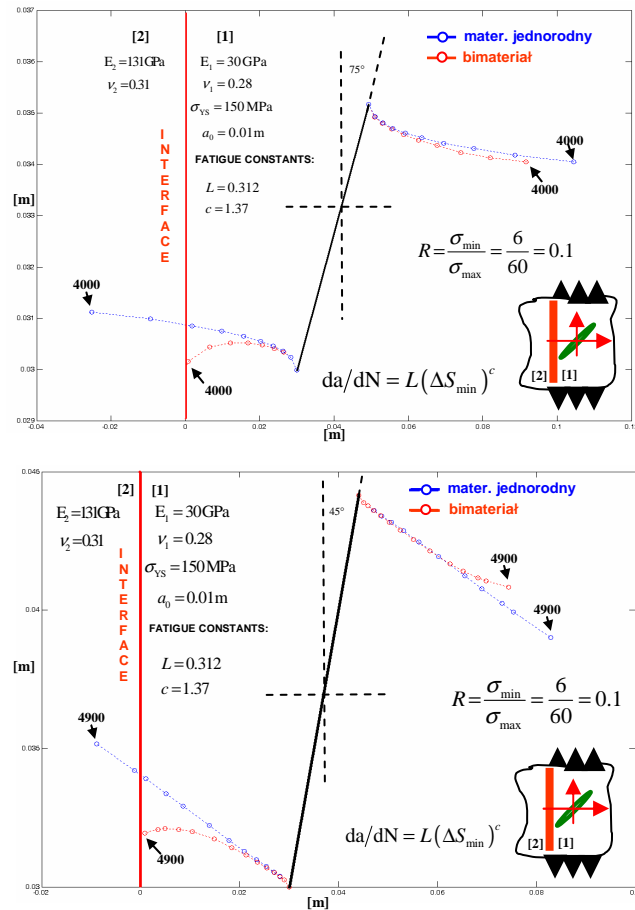
parametru określającego zarówno kierunek wzrostu, (Sih, 1974), jak i wielkość kontrolującą wzrost szczeliny (Sih i Barthelemy, 1980).



Rys. 3. Porównanie wyników eksperymentu z wynikami symulacji numerycznej

Widać stąd, że zasadnym jest stosowanie tej wielkości dla określania kierunku wzrostu szczeliny zmęczeniowej, a co za tym idzie, proponowana metoda pozwala efektywnie wyznaczyć poprawne wartości współczynników intensywności naprężeń dla skomplikowanej konfiguracji szczeliny. Jednakże zastosowanie współczynnika gęstości energii odkształcenia dla określania prędkości wzrostu szczeliny nie dało zadowalających wyników. Konieczne są tutaj dalsze badania dla polepszenia zgodności pomiędzy wynikami eksperymentów a wynikami otrzymywanymi na podstawie modeli teoretycznych. Należy dodać, iż autorzy przeanalizowali większość proponowanych w literaturze propozycji obliczania prędkości wzrostu szczeliny zmęczeniowych. Jednakże żadna z analizowanych propozycji nie dała zadowalającej zgodności z wynikami eksperymentów, gdy dla różnych kątów nachylenia szczeliny początkowej do kierunku naprężenia zewnętrznego przyjmowano niezmiennie stałe materiałowe właściwe dla danego prawa wzrostu.

W przypadku symulacji wzrostu szczeliny zmęczeniowej w bimateriale, wyniki przedstawiono dla dwóch przypadków pochylenia szczeliny i porównano je z wynikami wzrostu w analogicznym warunkach, ale bez obecności drugiego materiału. Sytuację tę przedstawia Rys. 4.



Rys. 4. Wzrost szczeliny w biamteriale, rezultaty modelowania

## 2.4. Podsumowanie

Proponowana metoda oparta jest na koncepcji szczeliny modelowanej jako ciągły rozkład dyslokacji, których wpływ na pole naprężeń opisywany jest za pomocą odpowiednich funkcji Greena. Wynikający stąd układ osobliwych równań całkowych typu Cauchy'ego rozwiązywany jest numerycznie za pomocą metody Gaussa-Chebysheva przedstawionej w pracy Erdogana i Gupty (1972). Uzyskane wyniki wykazują zgodność z eksperymentem kierunku wzrostu szczeliny zmęczeniowej w złożonym polu naprężeń. Dalsze badania konieczne są dla poprawy przewidywania prędkości wzrostu szczeliny.

## LITERATURA

1. **Erdogan F., Gupta G.D., Ratwani M.** (1974), Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack, *Journal of Applied Mechanics*, December, 1007-1013.
2. **Dundurs J., Mura T.** (1964), Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 12, 177-189.
3. **Erdogan F., Gupta G.D.** (1972), On the numerical solution of singular integral equations, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 29, 525-534.
4. **Pustejovsky, M.A.** (1979), Fatigue Crack Propagation in Titanium Under General in-Plane Loading, *Engng Fracture Mech.*, Vo.11, 9-15.
5. **Lo, K.K.** (1978), Analysis of branched cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, 797-802.

6. **Selvarathinam A.S., Goree, A.S.** (1998), T-stress based fracture model for cracks in isotropic materials, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 60, No. 5-6, 543-561.
7. **Muskhelishvili, N.I.** (1966) Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Moskwa.
8. **Sih, G.C.** (1974), Strain-energy density factor applied to mixed-mode crack problems, *International Journal of Fracture*, Vol.10, 305-321.
9. **Sih, G.C., Barthelemy, B.M.** (1980), Mixed mode fatigue crack growth predictions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.13, 439-451.

## FATIGUE CRACKS GROWTH IN THE BIMATERIAL - THE MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL SOLUTION

**Abstract:** Recently, considerable efforts have been devoted towards developing fracture mechanics theories for bimetals, mainly due to the need for better understanding of interfacial fractures resulting from the increasing use of adhesive and diffusive bonding or explosion-clad materials, design of microelectronic packaging and coatings intended for enhancing thermal, environmental or tribological resistance. However, the modelling of the time- or cycle-dependent failure of such bimetals, particularly those involving the ceramic and metal layers, remains still in very preliminary phase providing no reliable prediction of the actual fatigue crack trajectory and fatigue lifetimes. Although in some papers, the experimental or numerical results are accompanied by the theoretical description of the interface crack features it does not result in developing of any effective models to predict the path and magnitude of the crack propagating in bimaterial due to the cyclic loading. It is inevitably to take into account very considerable achievements of fracture mechanics to base the fatigue models on strong theoretical foundations and to attain a significant progress in modelling of fatigue phenomena in bimetals. The fracture mechanics concerned many complex types of cracks, including branched or forked cracks, but also other geometries have also been considered. However, some of the fracture mechanics methods are very complicated and in result of what difficult to adopting in the propagation of crack. The enough large difficulty appears in case of analysis these cracks in neighbourhood of interface, also, that is the place of connection two different materials. The paper presented method makes possible easy formation of the cracks in the bimaterial and obtainment of stress intensity factors on the tips. The problem is formulated by a system of singular integral equations by using the related Green's function (dislocation or concentrated force solution) in conjunction with the technique of superposition. In the paper the approach proposed by Erdogan et al. (1974) based on the Dunder's solution for a single dislocation in presence of a circular inclusion (Dundurs and Mura, 1964) is adopted to fatigue crack growth modelling in bimaterial taking into account the mixed-mode conditions and two stress intensity factors,  $K_I$  and  $K_{II}$ . An effective algorithm to solve the integral equations which result from accounting for the effect of dislocations distributed along a broken line is being developed. It will allow us to calculate both the stress intensity factors,  $K_I$  and  $K_{II}$ , and consequently, to use the criteria to determine the direction and increment of the branched crack due to a cycle or series of cycles of the remote loading acting on the bimaterial specimen. The integral equations with the Cauchy-type singularities is solved with the help of the numerical technique (Gauss-Chebyshev method) described by Erdogan and Gupta in (1972).