

Dr hab. inż. Waldemar Rachowicz
Zakład Metod Obliczeniowych
Instytut Informatyki
Politechnika Krakowska

AUTOREFERAT

1 Działalność naukowa przed habilitacją.

W 1981 r. ukończyłem studia na Wydział Budownictwa Lądowego Politechniki Krakowskiej ze specjalnością teoria konstrukcji. Moją pracę magisterską pt.

„Numeryczne obliczanie współczynników intensywności naprężeń metodami całek brzegowych i R-funkcji w dwuwymiarowych zagadnieniach teorii szczelin”

napisałem pod kierunkiem prof. dr hab. inż. J. Orkisz w Instytucie Mechaniki Budowli PK. Efektem mojej pracy w części dotyczącej R-funkcji (tj. funkcji Rwachewa) był artykuł

- M. Wnuk, J. Orkisz and W. Rachowicz, "Evaluation of stress intensity factors by the R-functions method", *International Journal of Fracture*, **24**, (1984) 107-126.

Po magisterium nastąpiła półtoraroczna przerwa w moim życiorysie naukowym spowodowana służbą wojskową w 1982 roku. W roku 1983 rozpocząłem pracę jako asystent w Instytucie Mechaniki Budowli PK. Początkowo próbowałem kontynuować eksperymenty z metodą R-funkcji w połączeniu z różnicami skończonymi, jednakże bez dobrych efektów. W 1985 roku rozpocząłem współpracę z (wówczas) dr inż. Leszkiem Demkowiczem. Zajęliśmy się rozwijaniem algorytmów symulacji przepływów naddźwiękowych z małą lepkością. Dzięki tej współpracy zapoznałem się z adaptacyjną metodą elementów skończonych (MES), której prekursorem w Polsce był dr Demkowicz, który z kolei zdobył swe doświadczenie pracując z profesorem J.T. Odenem z *Texas Institute for Computational Mechanics (TICOM)* na Uniwersytecie Tekszańskim w Austin w USA. Efektem naszej pracy były jedno- i dwuwymiarowe algorytmy symulacji przepływów oparte na idei Stranga rozkładu operatora opisującego proces ewolucji w czasie na krok odpowiadający przepływowi nielepkiemu i krok dyfuzyjny uwzględniający lepkość. Nasze wyniki zostały przedstawione w artykułach

- L. Demkowicz and W. Rachowicz, "An adaptive characteristic Petrov-Galerkin finite element method for compressible, viscous gas dynamics", *Proceedings of 1-st National (Greek) Congress of Mechanics*, pp.639-663, Athens, June 25-27, 1986
- L. Demkowicz and W. Rachowicz, "On a characteristic finite element method for compressible gas dynamics", *Journal of Engineering Science*, **25**, No.10 (1987) 1259-1281.

W sierpniu 1986 wyjechałem na studia doktoranckie pod kierunkiem prof. Odena w *TICOM*. Tematyką, w której spróbowałem swych sił, stał się matematyczny *post-processing*. Przez

pojęcie to rozumiemy procedury, których celem jest otrzymanie z danej aproksymacji skończenie elementowej rozwiązania ulepszonych, dokładniejszych wartości tego rozwiązania i jego pochodnych. Istotnym moim osiągnięciem w dziedzinie *post-processingu* było wykazanie, że rzutowanie L^2 pochodnych rozwiązania skończenie elementowego (na ogół nieciągłych) na przestrzeń funkcji kształtu daje w wyniku przybliżenie pochodnych o dokładności rzędu $O(h^{p+1})$, podczas gdy bezpośrednie pochodne mają dokładność $O(h^p)$. Wynik ten obowiązuje dla siatek równomiernych z aproksymacją stopnia p dla błędów w normach L^2 i L^∞ . Analizę tę przedstawiono w artykule

- W. Rachowicz and J.T. Oden, "On conjugate approximations of gradients of FE solutions of elliptic boundary value problems", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 5 (1989) 143-156.

Od jesieni 1987 rozpocząłem wraz z dr Demkowiczem pracę nad możliwie ogólnym programem metody elementów skończonych z adaptacją typu *hp*, tj. pozwalającym na dynamiczne konstruowanie siatek o nierównomiernej dystrybucji rozmiarów elementów h i ich stopni aproksymacji p . Z zastosowaniem tak ogólnej metody wiązały się duże oczekiwania: zgodnie z teorią I. Babuški zastosowanie optymalnych siatek typu *hp* powinno prowadzić do zbieżności eksponencjalnej rozwiązań, $\|u - u_{hp}\|_{1,\Omega} \leq Ce^{-\alpha N^\beta}$, gdzie $\alpha > 0$, $\beta \simeq 1/4$ w 3D, w przeciwieństwie do zbieżności algebraicznej $\|u - u_{hp}\|_{1,\Omega} \leq CN^{-p/3}$ większości innych metod opartych na wielomianach stopnia p . Co więcej, metoda *hp* daje też zbieżność eksponencjalną dla rozwiązań osobliwych, kiedy to zbieżność algebraiczna bardzo zwalnia. Pierwszą wersję programu opracowaliśmy jeszcze w 1987 roku. Moim oryginalnym rozwiązaniem była idea aproksymacji z więzami będąca bardzo efektywną metodą łączenia ze sobą sąsiednich elementów, z których jeden jest dwukrotnie mniejszy, gdyż powstał z podziału elementu wyjściowego. Wkrótce, w 1988 r opracowaliśmy też trójwymiarową wersję metody.

Równoległe pracowałem nad zagadnieniami mającymi znaczenie dla przybliżenia metody *hp* do zastosowań praktycznych. Pierwszym takim problemem było zaadoptowanie istniejących metod szacowania błędu *a posteriori* do siatek adaptacyjnych typu *hp*. Przy wsparciu teoretycznym prof. Odena i dr Demkowicza zaprojektowałem i przetestowałem metodę residualną na podobszarach (Babuška, Rheinboldt), metodę residualną na osobnych elementach (Bank, Weiser, Oden, Demkowicz i inni), metodę stosującą *post-processing* oraz procedurę opartą na teorii dualności. Drugim zagadnieniem o znaczeniu praktycznym była strategia kształtowania optymalnych siatek *hp*: udzielenie odpowiedzi, kiedy należy element podzielić a kiedy podnieść jego stopień aproksymacji, aby uzyskać najkorzystniejszą siatkę. Studium tego problemu oparłem na wyidealizowanym zadaniu minimalizacji błędu interpolacji na siatce o danej liczbie stopni swobody. W przypadku jednowymiarowym można pokazać, że najlepsza jest modyfikacja siatki, przy której redukcja błędu na jeden dodany stopień swobody jest maksymalna. Stosując tę zasadę w zadaniach jednowymiarowych oraz ekstrapolując ją do dwu wymiarów otrzymałem w kilku testach zbieżność eksponencjalną. Powyższe rezultaty zostały przedstawione w mojej pracy doktorskiej:

"An *hp* Finite Element Method for One-Irregular Meshes, Error Estimation and Mesh Refinement Strategy",

obronionej w kwietniu 1989 a także w serii artykułów:

- L. Demkowicz, J.T. Oden, W. Rachowicz and O. Hardy, "Toward a universal h - p adaptive finite element strategy, Part 1. Constrained approximation and data structure", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **77** (1989) 79-112,
- J.T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz and T. Westermann, "Toward a universal h - p adaptive finite element strategy, Part 2. A *posteriori* error estimation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **77** (1989) 113-180,
- W. Rachowicz, J.T. Oden and L. Demkowicz, "Toward a universal h - p adaptive finite element strategy, Part 3. Design of h - p meshes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **77** (1989) 181-212.

Po ukończeniu doktoratu zatrudniłem się w ramach praktyki w firmie obliczeniowej Computational Mechanics współpracującej z prof. Odenem i zespołem z *TICOM*. Moim zadaniem było opracowanie techniki tworzenia siatek adaptacyjnych hp do rozwiązywania przepływów naddźwiękowych z dużą liczbą Reynoldsa (tj. z małą lepkością) opisywanych równaniami Naviera-Stokesa. Wiązało się to z nadzieją bardzo efektywnego modelowania cienkich warstw przyściennych tworzących się wzdłuż brzegów opływanych obiektów: rozwiązania zmieniają się tam bardzo gwałtownie w kierunku prostopadłym do brzegu, lecz nie mają (na ogół) osobliwości, przez co są idealnymi kandydatami do aproksymacji wielomianami wysokiego stopnia p . W rozwiązywaniu zadań przepływów zebrałem bardzo wiele doświadczeń. Idea zastosowania aproksymacji wysokiego stopnia, jakkolwiek teoretycznie bardzo atrakcyjna, niestety w praktyce na ogół się nie sprawdzała ze względu na notoryczną utratę stabilności algorytmu. Otrzymaliśmy wprawdzie zachęcające wyniki dla prostych zadań modelowych, jednak w przypadku zadań trudniejszych, zwłaszcza z interakcją fal uderzeniowych z warstwą przyścienną, konieczne było ograniczenie się wyłącznie do elementów liniowych i adaptacji typu h . Wyniki teoretyczne i uwieńczone powodzeniem doświadczenia obliczeniowe z zastosowaniem siatek hp w problemach przepływów przedstawiono w następujących pracach zespołu zaangażowanego w tę tematykę:

- L. Demkowicz, J.T. Oden, W. Rachowicz and O. Hardy, "An h - p Taylor-Galerkin finite element method for compressible Euler equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **88** (1991) 363-396,
- L. Demkowicz, J.T. Oden and W. Rachowicz, "A new finite element method for solving compressible Navier-Stokes equations based on an operator splitting method and h - p adaptivity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **84** (1990) 275-326,
- J.T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz and T. Westermann, "A *posteriori* error analysis in finite elements: the element residual method for symmetrizable problems with applications to compressible Euler and Navier-Stokes equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **82** (1990) 183-204,
- J.T. Oden, L. Demkowicz, T. Liszka and W. Rachowicz, " h - p Adaptive finite element methods for compressible and incompressible flows", *Computing Systems in Engineering*, **1**, Nos 2-4 (1990) 523-534.

Artykuły te przedstawiają analizę metody Taylora-Galerkina do rozwiązywania nielepkich przepływów naddźwiękowych, metodę rozbicia operatora (*operator splitting*) w zastosowaniu do przepływów lepkich, zagadnienie szacowania błędu, strategię adaptacji siatki oraz iteracyjne rozwiązywanie równań problemu.

Dalsza część mojej pracy skierowana była na rozwijanie algorytmów symulacji przepływów trójwymiarowych. Przenoszenie procedur dwuwymiarowych na przypadek trzech wymiarów jest dalekie od automatyzmu. Powstały trójwymiarowy algorytm adaptacyjny do symulacji przepływów został zastosowany do rozwiązania kilku zadań. Elementy algorytmu, zastosowane w nim rozwiązania oraz przykłady zastosowań zostały przedstawione w artykule

- J.T. Oden, W. Rachowicz and S.R. Kennon, "Numerical analysis of three-dimensional compressible Navier-Stokes equations using an *hp* finite element method," *AIAA Paper 91-0119*.

W końcu 1990 roku powróciłem do Polski. Kontynuowałem wraz z kolegami prace nad mechaniką płynów w ramach grantu KBN 1548/3/91 „Zastosowanie Metod Adaptacyjnych do Rozwiązywania Zagadnienia Interakcji Ciała Stałego i Płynu”. Moje podejście do problemu symulacji przepływów po uprzednich umiarkowanie udanych doświadczeniach uległo pewnej zmianie. Postanowiłem zastosować metodę SUPG (*Streamline Upwind/Petrov Galerkin*) do aproksymacji przepływu oraz elementy liniowe i adaptację typu h . Motywacją tych wyborów była chęć pozbycia się potencjalnych przyczyn niestabilności. W końcu ostatnią zmianą w technice symulacji było zastosowanie nieizotropowej adaptacji typu h , tj. adaptacji z kierunkowymi podziałami elementów na 2 elementy pochodne. Aproksymacja warstw przyściennych wymaga bardzo drobnej dyskretyzacji jedynie w poprzek warstwy, wzdłuż brzegu rozwiązania są względnie gładkie. Sugeruje to, iż adaptacyjny podział elementów w warstwie powinien być dokonywany w większości równoległe do brzegu, dając w wyniku bardzo wydłużone elementy i ogromne oszczędności, jeśli wziąć pod uwagę, że oczko dyskretyzacji w poprzek warstwy musi być bardzo małe.

Moje dalsze działania skierowane były na wcielenie w życie wspomnianych idei. Pierwszym krokiem w tym kierunku było wyposażenie programu adaptacyjnego w procedury podziałów kierunkowych i odpowiednią aproksymację z więzami. Następnie pojawiła się konieczność sformułowania zasad dokonywania podziałów kierunkowych. Było to inspiracją do opracowania oszacowania *a priori* błędu interpolacji w normie H^1 dla elementów o nieograniczonym wydłużeniu. Oszacowanie tego rodzaju umożliwia zdefiniowanie siatki optymalnej dla danego problemu poprzez minimalizację błędu interpolacji przy ustalonej liczbie elementów. Prowadzi to do kryterium optymalności wskazującego, które elementy i w jaki sposób należy podzielić. Powyższe rezultaty wraz z potwierdzającymi je testami numerycznymi zostały opisane w artykule

- W. Rachowicz, "An anisotropic h -type mesh-refinement strategy," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **109** (1993) 169-181.

Idąc adaptacji anizotropowej zastosowałem do rozwiązania znanego, sprawiającego duże trudności zadania testowego z przepływem naddźwiękowym, przepływu wokół naroża wklęsłego z liczbą Macha $M = 14$ i liczbą Reynoldsa $Re = 2 \cdot 10^5$, w którym zachodzi interakcja między

warstwą przyścienną a falą uderzeniową. Otrzymałem rozwiązanie, którego tarcie powierzchniowe i strumień ciepła wzdłuż brzegu dobrze zgadzały się z doświadczeniem.

Przy rozwiązywaniu wspomnianego zadania pojawiła się istotna trudność: znaczące spowolnienie zbieżności algorytmu iteracyjnego rozwiązywania równań, którym była procedura GMRES (*Generalized Minimum Residual*) z uwarunkowaniem wstępnym iteracją prostą Jacobiego. Jest to typowy efekt występowania w siatce elementów silnie wydłużonych, ich obecność pogarsza uwarunkowanie macierzy sztywności. W zadaniu maksymalne wydłużenie elementów sięgało 1000. Stało się widoczne, że praktyczne zastosowanie elementów wydłużonych wymaga odpowiedniego algorytmu uwarunkowania wstępnego, który neutralizowałby wspomniany efekt. W konstruowaniu takiego algorytmu oparłem się na idei zastosowania iteracji prostych w postaci blokowej wersji metod Jacobiego czy Gaussa–Seidela, w których uaktualnia się rozwiązanie nie w pojedynczych węzłach, lecz jednocześnie w blokach węzłów związanych z wyróżnionymi zachodzącymi na siebie podobszarami siatki. Wyniki teoretyczne wskazują, że dla problemów eliptycznych drugiego rzędu przy aproksymacji na siatkach quasi-równomiernych uwarunkowanie macierzy sztywności z uwarunkowaniem wstępnym typu blokowa metoda Jacobiego zależy wyłącznie od geometrii wspomnianych podobszarów, jest zaś niezależne od siatki. Intuicja podpowiadała, iż może to być prawdą także dla siatek z wydłużonymi elementami. Znalazło to potwierdzenie w testach numerycznych a także w analizie teoretycznej problemu. Wyniki te przedstawiłem w artykule

- W. Rachowicz, "An overlapping domain decomposition preconditioner for an anisotropic h -adaptive finite element method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **127** (1995) 269-292.

Prezentuje on też efektywną metodę konstruowania podobszarów dla siatek adaptacyjnych. Algorytm GMRES z opisanym wyżej uwarunkowaniem wstępnym okazał się skuteczny także do rozwiązywania niesymetrycznego układu równań wynikającego z dyskretyzacji zadań przepływów na siatkach adaptacyjnych z elementami wydłużonymi. Dzięki niemu oraz dzięki zastosowaniu nowej wersji metody SUPG dla zmiennych konserwatywnych mogłem otrzymać znacznie lepsze rozwiązanie zadania opływu naroża wklęsłego. Technikę rozwiązywania przepływów naddźwiękowych z małą lepkością przy użyciu adaptacji nieizotropowej wraz z przykładem potwierdzającym skuteczność metody opisałem w pracy

- W. Rachowicz, "An anisotropic h -adaptive finite element method for compressible Navier–Stokes equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **146** (1997) 231-252.

W ramach grantu KBN 7T07A 010 08 „Zastosowanie adaptacyjnej metody elementów skończonych do numerycznej symulacji przepływów pod- i okołodźwiękowych wokół elementów samolotu” zajmowałem się zastosowaniem adaptacyjnej metody elementów skończonych do rozwiązywania przepływów nieściśliwych. Warunek nieściśliwości istotnie ogranicza rodzaje aproksymacji przestrzennej, dla których możliwe jest zapewnienie stabilności rozwiązań. Ponieważ istotą adaptacji jest stosowanie złożonych, silnie nierównomiernych siatek, dla uniknięcia wspomnianej niedogodności zastosowałem wielokrokową metodę poprawek ciśnienia A. Chorina. W procedurze tej równania przepływu na pierwszym etapie kroku czasowego są całkowane bez ograniczenia nieściśliwości. Następnie otrzymane rozwiązanie jest rzutowane

na przestrzeń funkcji o zerowej dywergencji. Dzięki temu nie obserwujemy rozwiązań oscylacyjnych praktycznie niezależnie od stosowanej aproksymacji przestrzennej. Eksperymenty z symulacjami przepływów nieściśliwych z zastosowaniem adaptacji opartej na residualnym oszacowaniu błędu przedstawiłem w artykule

- W. Rachowicz, "An h -adaptive finite element method for Navier–Stokes equations", *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **35** (1997) 421-446.

Dzięki obserwowanemu w latach 90. wzrostowi mocy obliczeniowej dostępnej w środowisku akademickim technikę rozwiązywania przepływów naddźwiękowych z małą lepkością mogłem zastosować do rozwiązania jeszcze kilku innych zadań o większej skali trudności. Powodzenie w tej pracy sugerowało, że rozwinięta metodologia jest skuteczna i stanowi pewien całościowy wkład w dziedzinę numerycznej analizy przepływów. Ogół zagadnień związanych z zastosowaniem anizotropowej metody adaptacyjnej przedstawiłem w pracy habilitacyjnej pt.

- „Adaptacyjna Metoda Elementów Skończonych do Rozwiązywania Równań Naviera–Stokesa dla Przepływów Ściśliwych”, Prace IPPT, 7/1997, Warszawa 1997.

Praca przedstawiała fizyczną stronę zagadnienia przepływów naddźwiękowych z małą lepkością, opis algorytmu SUPG stosowanego do symulacji, informację o anizotropowej adaptacyjnej metodzie elementów skończonych, metodach szacowania błędu i strategiach adaptacji, a także opis i analizę iteracyjnych algorytmów rozwiązywania równań. Skuteczność działania tych procedur została zilustrowana przykładami rozwiązań przepływów z liczbą Reynoldsa z zakresu $2 \cdot 10^5 \div 2 \cdot 10^6$, w tym powodujących szczególne trudności przepływów z interakcją fali uderzeniowej i warstwy przyściennej.

W kolejnej z moich prac związanych z symulacją przepływów

- W. Rachowicz, "Analysis of a preconditioned GMRES solver for a nonsymmetric SUPG discretization of the compressible Navier–Stokes equations", *Computer and Mathematics with Applications*, **38** (1999) 73-96

zajmowałem się analizą zbieżności algorytmu iteracyjnego GMRES z uwarunkowaniem wstępnym typu iteracja blokowa Jacobiego dla niesymetrycznego sformułowania zadań przepływu.

2 Działalność naukowa po złożeniu habilitacji.

Po złożeniu pracy habilitacyjnej w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN (IPPT) w 1997 r. podjąłem współpracę z prof. Demkowiczem z Teksasńskiego Instytutu Matematyki Stosowanej i Obliczeniowej (*Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, TICAM* dawniej *TICOM*) nad nową dla siebie dziedziną numerycznej symulacji zjawisk elektromagnetyzmu opisywanych równaniami Maxwella z harmoniczną zmiennością w czasie. Jest to zagadnienie mające wiele zastosowań we współczesnej technice, jak np. w projektowaniu urządzeń mikroelektroniki, urządzeń mikrofalowych, anten, radarów i innych. Harmoniczność w czasie pozwala traktować zjawisko jako stacjonarne dla zespolonych amplitud występujących w nim prądów i pól elektromagnetycznych. Prócz opisu w zmiennych

zespolonych istotną różnicą w porównaniu do klasycznej mechaniki jest brak eliptyczności sformułowania wariacyjnego wykorzystywanego w metodzie elementów skończonych. Dodatkową trudnością jest też częsta konieczność rozwiązywania problemów w obszarach nieograniczonych. Celem mojej pracy było wprowadzenie w życie idei adaptacyjnej metody elementów skończonych (MES) typu *hp* do elektromagnetyzmu zaproponowanej przez L. Demkowicza i L. Vardapetyana. Najistotniejszym jej aspektem (w porównaniu z MES dla zadań eliptycznych) jest konieczność zastosowania odpowiednich wektorowych funkcji kształtu pozwalających na nieciągłość składowej normalnej do brzegu elementu pola elektrycznego. Pierwszym krokiem było opracowanie algorytmów MES do elektromagnetyzmu w dwu wymiarach jako modyfikacji istniejącego dwuwymiarowego programu z adaptacją *hp* dla zadań eliptycznych. Opisano to w artykule:

- W. Rachowicz and L. Demkowicz, "An *hp*-adaptive finite element method for electromagnetics. Part 1: Data structure and constrained approximation" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **187** (2000) 307-335.

W przypadku 3D konieczne było stworzenie najpierw programu adaptacyjnej MES typu *hp* dla zadań eliptycznych, gdyż istniejąca w tym czasie wersja z początku lat 90-tych ograniczała się do siatek strukturalnych. Nowa wersja programu, *3DhpAP*, została opracowana przez L. Demkowicza przy współpracy mojej i innych kolegów w zyskującym popularność nowym języku programowania fortran 90. W oparciu o ten program udało mi się opracować jego uogólnienie do rozwiązywania elektromagnetyzmu w 3D z adaptacją typu *hp*, z roboczą nazwą *3DhpAPEM*. Został on opisany w artykule:

- W. Rachowicz and L. Demkowicz, "An *hp*-adaptive finite element method for electromagnetics - part II: A 3D implementation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53** (2002) 147-180.

W tym czasie współpracowałem też z W. Cecotem (z PK) i L. Demkowiczem nad opracowaniem 2- i 3-wymiarowych elementów nieskończonych pozwalających na rozwiązywanie zadań w obszarach nieograniczonych. Idea tej metody polega na zamknięciu części przestrzeni zajmowanej przez dielektryki o zmiennych własnościach elektrycznych i przewodniki w kuli (lub w kole, w przypadku 2D). Następnie wprowadza się standardową dyskretyzację MES w ograniczonym obszarze kuli, zaś na zewnątrz niej pole elektromagnetyczne jest aproksymowane w rozciągających się do nieskończoności obszarach uogólnionych ściętych stożków (przylegających do ścian elementów na sferze) za pomocą funkcji zanikających z odległością zgodnie z fizycznym zanikaniem amplitudy rozchodzących się fal. Metoda elementów nieskończonych została opisana w artykułach:

- W. Cecot, L. Demkowicz, and W. Rachowicz, "A Two-dimensional infinite element for Maxwell equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **188** (2000) 625-643,
- W. Cecot, W. Rachowicz, and L. Demkowicz, "An *hp*-adaptive finite element method for electromagnetics. Part 3: A Three-dimensional infinite element for Maxwell equations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57** (2003) 899-921.

Konstrukcja przestrzeni skończenie elementowych dla pól wektorowych o pełnej ciągłości, o ciągłości składowej stycznej i o ciągłości składowej normalnej (określanych jako H^1 -, $H(\text{curl})$ - i $H(\text{div})$ -dostosowanych), z nierównomiernym stopniem aproksymacji, została przedstawiona w artykule:

- L. Demkowicz, P. Monk, L. Vardapetyan, and W. Rachowicz, "De Rham Diagram for hp Finite Element Spaces," *Mathematics and Computers with Applications*. **39**, 7-8, 29-38, 2000.

Jednocześnie zaproponowano definicje odpowiednich operatorów interpolacji z przestrzeni Sobolewa o wspomnianych rodzajach ciągłości do przestrzeni skończenie elementowych, które to operatory komutują z operacjami różniczkowania ∇ , $\nabla \times$, $\nabla \cdot$. Posiadanie opisanych cech przez funkcje kształtu wiąże się z ich dobrymi własnościami do aproksymacji rozwiązań MES.

Zagadnieniami propagacji i rozpraszania fal elektromagnetycznych zajmowałem się także w projekcie badawczym KBN: udało mi się zdobyć 3-letni grant (KBN 7 T11F 014 20) dla siebie i pięciorga współpracowników z PK pt. „Adaptacyjna metoda elementów skończonych typu hp do zagadnień elektromagnetyzmu.” W tym czasie nawiązałem też współpracę naukową ze Szwedzkim Instytutem Lotnictwa (FFA/FOI) w Sztokholmie, gdzie zamierzano rozwijać metody analizy numerycznej rozpraszania fal radarowych na samolocie. Efektem tej współpracy są artykuły w czasopismach naukowych:

- A. Zdunek, W. Rachowicz, N. Sehlstedt, "Toward hp -adaptive solution of 3D electromagnetic scattering from cavities," *Computers and Mathematics with Applications* 49 (2005) 23-38,
- A. Zdunek, W. Rachowicz, "A Goal-oriented hp -Adaptive Finite Element Approach to Radar Scattering Problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005) 657-674,
- W. Rachowicz, A. Zdunek, "An hp -adaptive finite element method for scattering problems in computational electromagnetics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62 (2005) 1226-1249,
- W. Rachowicz and A. Zdunek, "Automated multi-level substructuring (AMLS) for electromagnetics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **198** (2009) 1224-1234,
- A. Zdunek and W. Rachowicz, "Cavity radar cross section prediction," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **56** 1752-1762 2008,
- A. Zdunek and W. Rachowicz, "hp-Adaptive CEM in practical applications," in J.S. Hesthaven and E.M. Ronquist (eds.), *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering **76**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011,

(a także liczne wystąpienia na konferencjach oraz prace moich współpracowników w granicie). Artykuły te opisują wiele aspektów rozwiązywania rozpraszania fal elektromagnetycznych

takich jak znajdowanie pola dalekiego zasięgu – obliczanie tzw. przekroju na rozpraszanie radarowe (*RCS, Radar Cross-Section*), szacowanie błędu rozwiązania i adaptację siatek skończenie elementowych prowadzącą do szybkiej poprawy dokładności.

Duży wysiłek w latach 2005-2006 włożyłem w uogólnienie na zagadnienia elektromagnetyzmu metody *AMLS: Automated Multi-Level Substructuring*, której autorem jest J. Bennighof ze współpracownikami. Jest to technika rozwiązywania wielkich zagadnień własnych dla liniowej teorii sprężystości oraz zagadnienia odpowiedzi konstrukcji w dziedzinie częstotliwości (*frequency response*). Technika ta wzbudzała wiele kontrowersji i sporów w latach 90-tych, gdy ją tworzone. Obecnie o jej przydatności świadczą bardziej niż akademickie dyskusje jej użytkownicy: jest wykorzystywana przy projektowaniu przez zakłady produkujące samochody i jest opatentowana. Najistotniejsza trudność w uogólnieniu *AMLS* na elektromagnetyzm polega na zapewnieniu, aby wszystkie przybliżenia rozwiązania odpowiadające różnym poziomom podziału siatki na podstruktury były polami o zerowej dywergencji. Metoda została przedstawiona w wymienionym powyżej artykule z roku 2009 o *AMLS*.

Od roku 2001 rozpocząłem też współpracę z L. Demkowiczem z *ICES* nad efektywną i możliwą do zastosowania w praktyce strategią adaptacji typu *hp*, tj. algorytmem służącym do konstruowania optymalnych siatek elementowych o nierównomiernym rozkładzie stopni aproksymacji *p* i rozmiarów elementów *h*. Zgodnie z pomysłem L. Demkowicza algorytm ten został oparty na technice porównywania ze sobą rozwiązań na 2 siatkach: zgrubnej i rozdrobionej (przez podział elementów i podniesienie ich stopni o 1). Dwu- i trójwymiarowe wersje automatycznej adaptacji *hp* zostały przedstawione w artykułach:

- L. Demkowicz, W. Rachowicz, and Ph. Devloo, "A fully automatic *hp*-adaptivity," *Journal of Scientific Computing* 17 (2002) 127-155,
- W. Rachowicz, L. Demkowicz and D. Pardo, "Fully automatic *hp* adaptivity in three dimensions," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 195 (2006) 4816-4892.

Należy wspomnieć, że opracowanie wersji 3D zostało poprzedzone napisaniem kolejnej ulepszonej implementacji samej struktury danych i programów adaptacji siatki. Dodatkowo w dwu- i trójwymiarowych programach adaptacyjnych udało się umieścić jednocześnie wersję dla zagadnień eliptycznych jak i dla elektromagnetyzmu, z opisem za pomocą zmiennej rzeczywistej bądź zespolonej, rozwiązania mogą mieć wiele składowych wektorowych, może też być obecnych wiele rozwiązań na raz (odpowiadających wielu prawym stronom). Tak uniwersalne narzędzie pozwala na bardzo szeroki zakres zastosowań, np. elastostatykę, wiskoelastyczność, płyty, powłoki, fale sprężyste i akustyczne, fale elektromagnetyczne w wielu sytuacjach i inne.

Jednym z nurtów pracy nad praktycznymi zastosowaniami adaptacyjnej MES była moja współpraca z młodszym kolegą Rafałem Tews z Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy (obecnie Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy). Aktywność ta dotyczyła rozwiązywania cienkościennych konstrukcji stalowych za pomocą 3D elementów liniowej teorii sprężystości z zastosowaniem adaptacji *hp*, która automatycznie generuje siatki odpowiednio cienkich i wydłużonych elementów z nieizotropowym stopniem aproksymacji *p* – wysokim w płaszczyźnie powłoki zaś niskim po jej grubości. Metoda ta ma przewagę nad tradycyjnymi modelami pręta (litego lub cienkościennego), płyty, tarczy i powłoki polegającą na tym, że

rzeczywiste konstrukcje złożone z tych wszystkich elementów aproksymuje się za pomocą jednego modelu: trójwymiarowej MES typu *hp* do liniowej teorii sprężystości. Gwarantuje to zbieżność błędu do zera oraz daje możliwość oceny dokładności rozwiązań i ulepszania jej poprzez adaptację. Nasze wspólne eksperymenty dotyczące prętów cienkościennych oraz konstrukcji złożonych z prętów, płyt i powłok zostały opisane w artykułach:

- R. Tews, W. Rachowicz, "Numerical analysis of thin-walled frames with flexible joints," *Archives of Civil Engineering*, LI, 2, 2005, 343-369,
- R. Tews, W. Rachowicz, "Analysis of thin-walled frames with flexible joints by the goal oriented adaptive finite element method," *Archives of Civil Engineering*, LII, 3, 2006, 485-503,
- R. Tews and W. Rachowicz, "Application of an automatic *hp* adaptive Finite Element Method for thin-walled structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **198** (2009) 1967-1984 (2009)

oraz obronionej w 2009 r. dysertacji doktorskiej Rafała Tews pt.:

- „Zastosowanie adaptacyjnej metody elementów skończonych typu *hp* do obliczeń statycznych wybranych konstrukcji stalowych”.

Swoje doświadczenia z zastosowaniem metod adaptacyjnych miałem możliwość przedstawić w postaci mojego wkładu do monografii:

- L. Demkowicz, J. Kurtz, D. Pardo, M. Paszyński, W. Rachowicz, and A. Zdunek, "Computing with *hp*-ADAPTIVE FINITE ELEMENTS, VOL. 2, *Frontiers: Three Dimensional Elliptic and Maxwell Problems with Applications*," Chapman & Hall/CTC, Taylor and Francis, 2008

oraz w powstałej ostatnio książce:

- W. Rachowicz, "Metoda elementów skończonych i brzegowych. Podstawy kontroli błędów i adaptacji", Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej 2012.

W latach 2008-2011 zajmowałem się rozwiązywaniem problemów odwrotnych rozpraszania fal elektromagnetycznych. Zagadnienia tego typu formułowane są następująco: mając dane w wybranych punktach pomiarowych pole elektromagnetyczne rozproszone przez pewien obiekt, wynikające z oświetlenia go falami padającymi z zespołu anten, należy odtworzyć rozkład parametrów elektrycznych materiału obiektu: przenikalności elektrycznej i przewodności właściwej. Otrzymanie takiego rozkładu jest równoważne stworzeniu trójwymiarowego obrazu wewnętrznej struktury obiektu. W przypadku zastosowań medycznych metoda mogłaby posłużyć do wykrywania np. tkanki nowotworowej. Technika zastała opisana w artykule:

- W. Rachowicz and A. Zdunek, Application of the FEM with adaptivity for electromagnetic inverse medium scattering problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **200** (2011) 2337-2347

oraz w będącym po poprawkach wg 1-szych recenzji artykule: W. Rachowicz, "Solution of electromagnetic inverse medium scattering problems by the adaptive Finite Element Method and Perfectly Matched Layer", *Inverse Problems in Science and Engineering* 2011 (submitted). Rozwiązane zadania odwrotne miały do 2500 stopni swobody.

W ostatnim okresie zająłem się symulacjami komputerowymi w biomechanice tkanek miękkich zdobywając 3-letnie finansowanie dla projektu pt. „Numeryczna analiza angioplastyki ze stentem z zastosowaniem kontroli błędów i adaptacyjnej metody elementów skończonych”

Zawiera on w sobie wiele trudnych zagadnień mechaniki nieliniowej: duże przemieszczenia i odkształcenia ciał z materiału hipersprężystego niemal nieściśliwego, wzmocnionego włóknami, materiału sprężysto-plastycznego, zagadnienie kontaktu z dużym poślizgiem i tarciem. Projekt jest ukierunkowany na wspomaganie zabiegu medycznego: rozszerzania zwężonych chorobowo naczyń krwionośnych, tzw. balonikowania ze stentem. Moje wyniki w dziedzinie biomechaniki były dotąd prezentowane na konferencjach HOFEIM (Higher Order Finite Element and Isogeometric Methods), Kraków 2011 oraz ECCOMAS 2012, Wiedeń.

3 Podsumowanie

W mojej działalności naukowej można wyróżnić następujące główne części:

1. Rozwój adaptacyjnej metody elementów skończonych typu hp , 1987-2007.

Mój wkład obejmuje:

- współudział w opracowaniu pierwszych 2D i 3D programów MES z adaptacją hp ,
- kryterium optymalności siatek hp ,
- współpraca przy kolejnych wersjach programów MES hp w 2D i 3D do zadań eliptycznych,
- algorytm automatycznej adaptacji hp dla 3D zadań eliptycznych.

Aktualna wersja programu 3Dhp łączy w sobie część eliptyczną i elektromagnetyczną. Pozwala na nieizotropową adaptację typu h i p , zawiera algorytm automatycznej adaptacji typu hp dla zadań eliptycznych. Posiada opcję prowadzenia obliczeń równoległych. Może korzystać z profesjonalnych generatorów siatek. Program jest używany do obliczeń komercyjnych w dziedzinie elektromagnetyzmu i do symulacji użytecznych w poszukiwaniach geologicznych.

2. Opracowanie MES z elementami bardzo silnie wydłużonymi (np. z wydłużeniem rzędu 1000), 1989-1997, do aproksymacji cienkich warstw przyściennych w przepływach ściśliwych z małą lepkością (tj. dużą liczbą Reynoldsa). Oryginalne elementy tej techniki są następujące:

- oszacowanie *a priori* błędów interpolacji dla elementów o nieograniczonym wydłużeniu,
- kryterium optymalności siatek złożonych z elementów dowolnie wydłużonych,

- iteracyjny solver równań liniowych o dobrej zbieżności, niezależny na obecność elementów silnie wydłużonych,
- rozwiązanie opływów z liczbą Reynoldsa $2 \cdot 10^6$ oraz interakcji fal uderzeniowych i warstw przyściennych z liczbą Reynoldsa $2 \cdot 10^5$ (w epoce procesorów 100 MHz).

3. **Opracowanie techniki rozwiązywania zagadnień promieniowania i rozpraszania fal elektromagnetycznych w obszarach nieograniczonych, 1997-2007**, za pomocą odpowiedniej wersji MES (elementy Nedeleca) w połączeniu z tzw. elementami nieskończonymi (do dyskretyzacji w jednorodnej nieograniczonej części przestrzeni). W tej dziedzinie mój oryginalny wkład jest następujący:

- przystosowanie 2D i 3D programów z adaptacją *hp* do obliczeń w dziedzinie elektromagnetyzmu,
- współudział w opracowaniu elementów nieskończonych,
- technika symulacji rozpraszania na ograniczonym obiekcie 3D jak i na wnęce przewodzącej zagłębionej w półprzestrzeni,
- opracowanie dwu oszacowań błędu *a posteriori* dla 3D MES do elektromagnetyzmu: typu jawnego i niejawnego, w normie energetycznej,
- współudział w opracowaniu algorytmów obliczania tzw. pola dalekiego zasięgu (*far field*) dla zadań rozpraszania,
- oszacowanie dokładności pola dalekiego zasięgu,
- adaptacja siatki ukierunkowana na poprawę dokładności pola dalekiego zasięgu.

4. **Projekty naukowe nie ujęte w większe cykle:**

- metoda całek brzegowych w teorii sprężystości (1981), w akustyce (1992) i w elektromagnetyzmie (2009),
- przepływy lepkie nieściśliwe (1997),
- zastosowanie adaptacyjnej MES typu *hp* do konstrukcji złożonych z powłok, prętów litych i cienkościennych oraz brył (2001-2009) – **promotorstwo doktoratu**,
- propagacja sprzężonych fal akustycznych i sprężystych (2006,2009),
- zagadnienia odwrotne rozpraszania w elektromagnetyzmie (2008-2011),
- biomechanika tkanek miękkich (od 2011).

Formalne elementy mojej działalności naukowej oraz niektóre aspekty jej odbioru przez środowisko są następujące:

1. **Cytowania: 596** (bez autocytowań własnych i współautorów, wg Web of Science Citation Index (bez tylko własnych 789)).
2. **H-index 14** (wg Web of Science Citation Index – uwzględnia autocytowania; wartość ta redukuje się do **11**, jeśli usunie się cytowania własne i współautorów).

3. Monografie i artykuły naukowe:

Monografie: 3 (włączając habilitacyjną)
Artykuły z Listy Filadelfijskiej: 31
Inne artykuły o zasięgu ogólnym: 6
Raporty zagraniczne: 5
Artykuły w czasopiśmie lokalnych: 3
Materiały konferencyjne: 18

4. Praca redaktorska i recenzje:

- (a) Redaktor pomocniczy (Managing Editor) *Computers & Mathematics with Applications* (czasopismo z Listy Filadelfijskiej) od 01.2012,
- (b) W latach 1986-2012 ok. 75 recenzji artykułów dla:
 - *Computers & Mathematics with Applications*,
 - *Inverse Problems in Science and Engineering*,
 - *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,
 - *Numerical Methods for Partial Differential Equations*,
 - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,
 - *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*,
 - *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*,
 - *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*.

5. Granty:

- (a) UMO-2011/01/B/ST6/07306, kierownik, 2012-2014:
„Numeryczna analiza angioplastyki ze stentem z zastosowaniem kontroli błędów i adaptacyjnej metody elementów skończonych”,
- (b) N N519 405234, kierownik, 2008-2011:
„Rekonstrukcja obrazu w tomografii mikrofalowej z zastosowaniem metody komórek skończonych i adaptacji typu hp”,
- (c) T11 014 20, kierownik, 2001-2004:
„Adaptacyjna metoda elementów skończonych typu hp do rozwiązywania zagadnień elektromagnetyzmu”,
- (d) KBN 8 T11F 003 12, główny wykonawca, 1997-1999:
„Rozwiązywanie przepływów ściśliwych i nieściśliwych za pomocą współbieżnych obliczeń adaptacyjną metodą elementów skończonych”,
- (e) 7 T07A 010 08, główny wykonawca, 1995-1996:
„Zastosowanie adaptacyjnej metody elementów skończonych do numerycznej symulacji przepływów pod- i okołodźwiękowych wokół elementów samolotu”,
- (f) 1548/3/91, główny wykonawca, 1991-1994: „Zastosowanie Metod Adaptacyjnych do Rozwiązywania Zagadnienia Interakcji Ciała Stałego i Płynu”.

6. Nagrody:

1991 Nagroda zespołowa I stopnia Rektora PK za osiągnięcia naukowe,

2000 Nagroda indywidualna II stopnia Rektora PK za osiągnięcia naukowe,

2006 Brązowy krzyż zasługi,

2009 Nagroda indywidualna II stopnia Rektora PK za osiągnięcia naukowe.

7. Współpraca naukowa z zagranicznymi ośrodkami:

Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES), Uniwersytet Tekszański w Austin, Austin, USA, w latach 1993-2012 pobyty średnio co 2 lata.

Szwedzki Instytut Lotnictwa (FFA), Sztokholm, rokrocznie w latach 2000-2004.

Computational Mechanics Company, Austin, USA, 04.1989-11.1990 i 06-09.1991.

Texas Institute for Computational Mechanics (TICOM), Uniwersytet Tekszański w Austin, USA, 1986-1989 (studia doktoranckie).

8. Komitety naukowe i organizacyjne konferencji

(a) CMM-2011 (Computer Methods in Mechanics), maj 2011, Warszawa, minisymposium,

(b) ICCS-2011 (International Conference on Computational Science), Tsukuba, Japonia, czerwiec 2011, minisymposium,

(c) ICCS-2010 (International Conference on Computational Science), Amsterdam, Holandia, maj 2010, minisymposium,

(d) CMM-2009 (Computer Methods in Mechanics), maj 2009, Zielona Góra, minisymposium,

(e) 9th US National Congress of Computational Mechanics, July 23-28, 2007, San Francisco, USA, minisymposium,

(f) ECCM-2001 (1st European Conference on Computational Mechanics), Kraków czerwiec 2001, minisymposium.

4 Osiągnięcia w działalności dydaktycznej

1. Promotorstwo ukończonego doktoratu

Rafał Tews, „Zastosowanie adaptacyjnej metody elementów skończonych typu *hp* do obliczeń statycznych wybranych konstrukcji stalowych” Uniwersytet Przyrodniczo-Techniczny w Bydgoszczy, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, 2009

2. Promotorstwo 6 prac magisterskich

3. Prowadzone zajęcia.

Można wymienić 3 dziedziny tematyczne prowadzonych przeze mnie zajęć: 1. Mechanika. 2. Metody numeryczne. 3. Matematyka.

Dokładna lista jest następująca:

- (a) Mechanika budowli
- (b) Wytrzymałość materiałów
- (c) Podstawy informatyki
- (d) Analiza matematyczna I, II i III
- (e) Algebra z geometrią
- (f) Metody matematyczne mechaniki
- (g) Elementarne metody numeryczne
- (h) Metody obliczeniowe w nauce i technice
- (i) Mechanika techniczna
- (j) Adaptacyjne metody numeryczne

W ostatnim dziesięcioleciu w związku ze zmianami w organizacji i finansowaniu uczelni konieczne było prowadzenie zajęć w istotnie podwyższonym wymiarze 150-200% pensum typowo z 200-300 studentami. W tak masowym i obciążającym systemie nauczania sukcesem jest niedopuszczanie do istotnego obniżenia standardów, co według mnie udało mi się.

W ostatnich kilku latach moja dydaktyka zawężyła się do metod numerycznych dla studentów informatyki. Staram się pokazać zastosowania najbardziej rozpowszechnionej wśród inżynierów techniki rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, metody elementów skończonych, do różnych zagadnień fizycznych. Studenci mają okazję oglądać otrzymane samodzielnie rozwiązania z teorii sprężystości, mechaniki płynów, elektryczności, propagacji fal i innych dziedzin. Ich zainteresowanie staram się „kupić” jeśli nawet nie merytorycznym znaczeniem wyników, to ich spektakularną prezentacją graficzną.

Ponieważ numeryka jest raczej na uboczu zainteresowań informatyków, miałem okazję poprowadzić względnie niewielką liczbę 6 prac magisterskich z mojej dziedziny. Jeden z moich dyplomantów w dalszej swej karierze zdobył doktorat w dziedzinie mechaniki w USA i pracuje w firmie dystrybuującej słynny program metody elementów skończonych ABAQUS (Dessault Systemes Simula Corp., Providence RI, USA).

Udało mi się wypromować jednego doktoranta z uczelni innej niż moja macierzysta (Rafał Tews, UTP Bydgoszcz).

Pewnym nie poddającym się ilościowej ocenie wkładem w kształcenie kadry było prowadzenie przeze mnie względnie dużej liczby seminariów, średnio co 2-3 tygodnie.

26.10.2012