

25.VII.88.

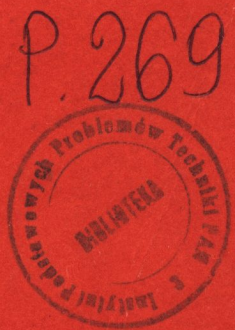
PRACE IPPT • IFTR REPORTS

10/1988

Wiktor Gambin

**PLASTYCZNOŚĆ
A OBRÓT SIECI
W KRYSTALACH**

Praca habilitac.
10/1988



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

5.52 — fizyczne i mechaniczne
własności metali
7.72 — plastyczność
7.75 — mechanika sieci krystalicznej

10/1988

Wiktor Gambin

**PLASTYCZNOŚĆ
A OBRÓT SIECI
W KRYSTAŁACH**

Praca habilitac.
10/1988

P.269



WARSZAWA 1988

ISSN 0208-5658

Rozprawa habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 stycznia 1988 r.



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 190 egz. Ark.wyd. 7.25 Ark.druk. 9.25
Oddano do drukarni w marcu 1988 r.
Nr zamówienia 140/88

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

Wiktor Gambin

Pracownia Matematycznej Teorii Plastyczności

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

PLASTYCZNOŚĆ A OBRÓT SIECI W KRYSZTAŁACH

Streszczenie

W pracy przedstawiono opis kryształów które deformują się plastycznie na skutek wewnętrznych poślizgów. Zdefiniowano i szczegółowo zbadano dwie klasy kryształów: o niezależnych systemach poślizgu i całkowicie sprzężonych systemach poślizgu. Wykazano, że budowa sieci krystalicznej i sposób sprzężenia systemów poślizgu całkowicie określają postać związków konstytutywnych wiążących plastyczną część gradientu prędkości ze stanem naprężenia. Poprzez wprowadzenie do opisu trzech dodatkowych równań konstytutywnych dla składowych spinu plastycznego otrzymano jawny opis obrotów sieci kryształu. Prawo Schmid'a zastąpiono jego gładką, kwadratową aproksymacją. Nowy warunek plastyczności szczegółowo zbadano, a następnie porównano z wyjściowym kryterium.

Zarówno prawo Schmid'a jak i jego kwadratową aproksymację uogólniono na warunki plastyczności, które uwzględniają sprzężoną anizotropię materiału. Sformułowano zamknięty układ równań teorii plastycznie płynących kryształów.

Przeprowadzono szczegółową analizę zachowania się dwuwymiarowych modeli rozciąganych monokryształów, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu obrotów sieci na proces plastycznego płynięcia. Otrzymane wyniki porównano ze znanymi z literatury.

Rozdział I

WSTĘP

1.1. Cel pracy

Dokładniejsze poznanie wewnętrznej budowy ciał stałych wymagało silny wpływ na wiele gałęzi mechaniki. Między innymi pozwoliło na uwzględnienie wyników badań mikroskopowych w kontynuacji

nym opisie odkształceń niesprężystych.

Już dawno zauważono, że początkowo izotropowe próbki metali stają się próbkami anizotropowymi, jeżeli poddamy je dużym odkształceniom plastycznym. Okazuje się, że w przypadku metali czystych i pozbawionych naprężeń wewnętrznych, jednym z podstawowych czynników powodujących powstawanie anizotropii są obroty sieci ziaren krystalicznych, z których zbudowana jest próbka. Początkowo przypadkowo zorientowane sieci ziaren, pod wpływem plastycznej deformacji, dążą do pewnych wyróżnionych położeń powodując anizotropię materiału.

Pierwszy, utworzony na gruncie fizyki ciała stałego, opis obrotów sieci ziaren wywołanych plastyczną deformacją polikryształu, został zaproponowany jeszcze w latach 30-tych przez G.I. TAYLORA [104], a następnie rozwinięty w latach 50-tych przez J.F.W. BISHOPA i R. HILLA [9-10]. W opisie tym, znanym jako teoria Taylora-Bishopa-Hilla, obliczenie pól naprężeń i odkształceń plastycznych w polikryształach realizowane jest poprzez analizę każdego z ziaren ośrodka. W wyniku analizy otrzymuje się również orientacje sieci poszczególnych kryształów.

Oczywiście, powyższa procedura jest bardzo czasochłonna i dlatego od dawna badano możliwość fenomenologicznego opisu zachowania się polikryształów. Zbudowanie takiego opisu było celem teorii poślizgów S.B. BATDORFA i B. BUDIANSKY'EGO [6-7] oraz powstałej pod jej wpływem teorii lokalnej deformacji A.A. MALMAJSTRA [70-71]. Obie teorie zajmowały się początkową fazą plastycznego płynięcia, w której o anizotropii próbki decydowało pojawienie się naprężeń wewnętrznych.

Próby fenomenologicznego opisu dużych deformacji plastycznych polikryształów, podejmowane w pracach J. MANDELA [73-74], a następnie Y.F. DAFALIASA [19], nie dały zadawalających wyników.

W tej sytuacji, uwaga wielu badaczy skoncentrowała się na ścisłym, kontynualnym opisie dużych deformacji plastycznych

pojedynczego ziarna metalu. W roku 1972 pojawiła się praca R.HILLA i J.R.RICE'A [49], w której sformułowano podstawy matematycznej teorii plastyczności kryształów. W następnych latach teoria ta była intensywnie rozwijana przez J.ASARO i J.R. RICE'A [4], D.PIERCE'A, R.J.ASARO i A.NEEDLEMANA [86], K.S.HAVNERA [46] oraz K.S.HAVNERA i A.H.SHALABY [47-48]. Większość obecnie prowadzonych prac w tej dziedzinie dotyczy opisu mechanizmów plastycznego wzmocnienia i lokalizacji odkształceń plastycznych w pojedynczym kryształ^{x/}.

Jednakże, pomimo że teoria plastyczności pojedynczego kryształu jest dyscypliną stosunkowo dobrze rozwiniętą, próby uogólnienia jej na zagadnienia polikryształów nie dały pozytywnych wyników. Poszukując przyczyn owych niepowodzeń nabrałem przekonania, że zarówno teoria plastyczności polikryształów, jak i pojedynczych kryształów powinny stanowić naturalne uogólnienie klasycznej teorii plastyczności ciał izotropowych. W tej ostatniej punktem wyjścia jest matematyczny model ciała odkształcalnego, dla którego postuluje się prawo konstytutywne wiążące stan naprężenia z prędkością plastycznej deformacji. Prawo to wraz z równaniami ruchu i gładkim warunkiem plastyczności tworzy zamknięty układ równań teorii. Natomiast, w dotychczasowym sformułowaniu matematycznej teorii plastyczności kryształów:

- 1° brak jest ścisłego modelu kryształu deformującego się przez poślizg,
- 2° nie korzysta się ze związków konstytutywnych, które wiążą stan naprężenia z prędkością plastycznej deformacji i ze spinem plastycznym^{xx/},

x/ Szczegółowe omówienie osiągnięć matematycznej teorii plastyczności można znaleźć w pracy R.J.ASARO [3].

xx/ Rolę związków konstytutywnych pełni prawo płynięcia, które wiąże przyrost tensora naprężenia z prędkościami poślizgów na poszczególnych systemach poślizgu [3].

3^o brak jest zamkniętego układu równań teorii^{xxx/}.

Z punktu widzenia praktycznych zastosowań, szczególnie dotkliwym jest brak zamkniętego układu równań teorii. Jest on spowodowany przyjęciem, jako warunku plastyczności kryształu, odcinkowo-liniowego prawa Schmid'a.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie prostego opisu plastycznego płynięcia kryształów pozbawionego wymienionych braków. Aby ten cel osiągnąć podjęto następujące kroki:

- 1^o szczegółowo zbadano ruch sieci krystalicznej i ruch cząstek materialnych kryształu, dzięki czemu można było wprowadzić ścisły model kryształu deformującego się przez poślizg;
- 2^o zrezygnowano z formalizmu teorii z parametrami wewnętrznymi, wprowadzając dodatkowe równania konstytutywne wiążące stan naprężenia ze spinem plastycznym kryształu;
- 3^o wykazano, że w miejsce odcinkowo-liniowego prawa Schmid'a można przyjąć gładki, kwadratowy warunek Misesa, co umożliwia sformułowanie zamkniętego układu równań teorii.

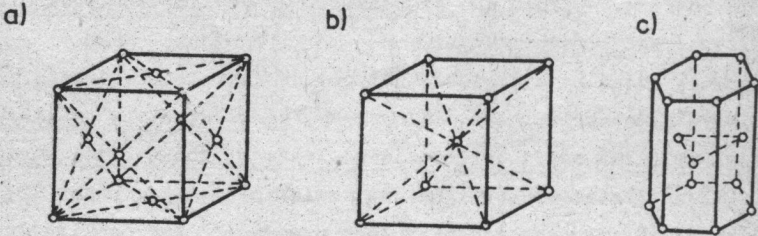
1.2. Przedmiot rozważań

Interesować nas będzie ziarno czystego metalu tworzące pojedynczy kryształ. Przypomnijmy, że analizując wzajemne nachylenia i odległości płaszczyzn, które tworzą zewnętrzną powierzchnię kryształu, można je związać z regularną siecią punktów w przestrzeni, nazywaną siecią krystaliczną. W ten sposób, na drodze rozważań wyłącznie geometrycznych, A. BRAVAIS w roku 1850 pokazał, że istnieje 14 typów sieci opisujących wewnętrzną strukturę kryształów.

Większość ważnych, z technologicznego punktu widzenia, metali tworzy sieci należące do jednego z trzech typów /rys.1/ sieci sześcienniej płasko centrowanej /typ f.c.c. - np. miedź,

xxx/ Procedura obliczeń sprowadzana jest zwykle do poszukiwania minimum lub maksimum pewnej funkcji, dla której równania ruchu, warunek plastyczności i prawo płynięcia stanowią układ ograniczeń [9-10].

aluminium/, sieci sześciiennej przestrzennie centrowanej /typ b.c.c. - np. żelazo α , wolfram/ oraz sieci heksagonalnej zwartej /typ c.p.h. - np. cynk, magnez/.



Rys.1. Typy sieci krystalicznej: a/ typ f.c.c.; b/ typ b.c.c.; c/ typ c.p.h.

Pod wpływem sił zewnętrznych ziarno metalu może ulec trwa-
 zej deformacji. Obserwując powierzchnię ziarna przy pomocy mi-
 kroskopu o zdolności rozdzielczej $x/10^{-3}$ mm, można zauważyć nie
 tylko zmianę wzajemnego położenia włókien materialnych, ale i
 pojawienie się, rozłożonych w sposób ciągły, charakterystycz-
 nych linii. Zjawisko to tłumaczymy tym, że trwałe odkształce-
 nia kryształu są wynikiem poślizgów materiału w określonych
 kierunkach, na płaszczyznach, których przecięcie z zewnętrzną
 powierzchnią ziarna utworzyło obserwowane linie. Rodzinę
 płaszczyzn poślizgu nazwiemy systemem poślizgu. Zbiór wszyst-
 kich występujących w kryształach systemów poślizgu tworzy układ
systemów poślizgu.

x/ Zdolność rozdzielcza mikroskopu będzie miarą dokładności
 prowadzonych obserwacji.

Obserwując proces ścinania na jednym z systemów poślizgu, stwierdzamy, że cząstki materialne leżące na włóknie nachylonym do wyróżnionej płaszczyzny poślizgu, "przepływają" przez pozostałe, "nieaktywne" płaszczyzny poślizgu nie zmieniając ich położenia.

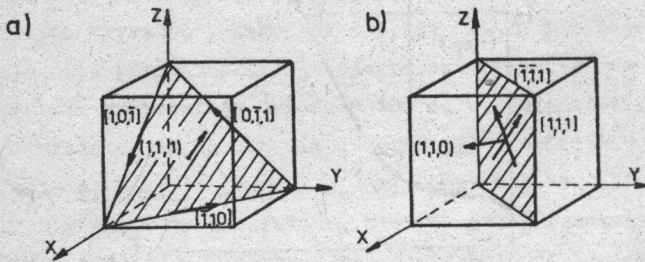
W przypadku jednoczesnego poślizgu na kilku systemach, cząstki materialne przenikają także przez płaszczyzny na których zachodzi poślizg. Oznacza to, że płaszczyzny poślizgu na ogół nie są płaszczyznami materialnymi.

Drugie, ważne spostrzeżenie dotyczy procesu jednoosiowego rozciągania monokryształu. Stwierdzamy, że płaszczyzny poślizgu mogą zmieniać swoją orientację względem kierunku rozciągania.

Układ systemów poślizgów jest związany z typem sieci krystalicznej. Plastyczne odkształcenie wywołane przez poślizg występuje przede wszystkim w dwóch typach sieci: f.c.c. oraz b.c.c.^{x/} Zakładając, że poślizgi różniące się tylko zwrotem kierunku ścinania należą do tego samego systemu, można wyróżnić 12 systemów poślizgu w kryształach typu f.c.c. oraz 12, a czasami 24 systemy poślizgu, w kryształach typu b.c.c.^{xx/} Rys.2 przedstawia tzw. bazowe płaszczyzny poślizgu i leżące na nich kierunki poślizgu, w obu typach kryształów. Pozostałe systemy poślizgu otrzymujemy przez obrót płaszczyzn bazowych o kąt 90° wokół osi x, y, z.

x/ W kryształach typu c.p.h. trwałe deformacje spowodowane przez bliźniakowanie są równie częste jak te, które są wywołane przez poślizg.

xx/ Mimo że najczęściej, płaszczyzny poślizgu są płaszczyznami najgęstszego upakowania atomów, to ich położenie zależy również od oddziaływań międzyatomowych.

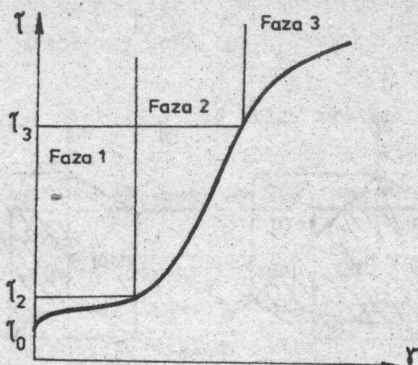


Rys.2. Bazowe płaszczyzny poślizgu i leżące na nich kierunki poślizgu dla kryształów: a/ typu f.c.c.; b/ typu b.c.c.

Na wyżej opisanych dwóch typach sieci będziemy koncentrowali uwagę. Tym nie mniej, większość rozważań będzie słuszna dla kryształów o dowolnej symetrii sieci. Natomiast przyjmujemy szereg innych ograniczeń. Mianowicie założymy, że:

- jedynym mechanizmem plastycznej deformacji jest uplastycznienie przez poślizg;
- odkształcenia plastyczne są na tyle duże aby można było zaniedbać odkształcenie sprężyste;
- nie uwzględnimy plastycznego wzmocnienia^{x/}/por. rys.3/;
- zakres temperatury i szybkości oddziaływań mechanicznych pozwala na zaniedbanie zjawisk: pełzania, wzrostu granicy plastyczności, kruchego pęknięcia i pojawiania się przemian fazowych.

x/ Wzmocnienie zależy od zadanego warunku plastyczności. Brak plastycznego wzmocnienia oznacza, że krytyczna wartość przyjętej miary wyciężenia materiału nie zmienia się w procesie plastycznej deformacji.



Rys.3. Typowa krzywa naprężenia - odkształcenie, dla kryształów metali czystych typu f.c.c.

τ - naprężenie ścinające na jednym z systemów poślizgu;

γ - odpowiadające mu odkształcenie postaciowe /wg monografii [51]/.

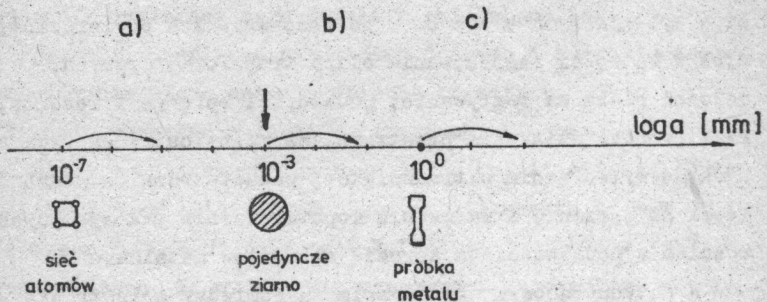
Proponowany w dalszej części pracy model, wzorowany na klasycznej teorii ciała sztywno - idealnie plastycznego jest modelem fenomenologicznym. Został sformułowany na podstawie wyników badań związanych z obserwacją włókien materiałnych i linii poślizgów na zewnętrznych powierzchniach ziaren monokryształów. Nie jest to jedyna droga prowadząca do opisu plastycznego zachowania się ziaren krystalicznych. Odmienne podejście polega na budowaniu modeli makroskopowych, które bazują na wynikach badań fizyki ciała stałego, a w szczególności na teorii defektów sieci. Przykłady tej drogi postępowania można znaleźć w pracach A. BLINOWSKIEGO [11-12].

1.3. Tło rozważań: poziom submikroskopowy i makroskopowy

Zadaniem naszym jest zbudowanie prostego, ale ujmującego istotę zjawiska, modelu plastycznego płynięcia kryształu.

Obserwacje potrzebne do jego sformułowania i późniejszej weryfikacji, powinny być prowadzone na poziomie mikroskopowym. Dokładność tych obserwacji przyjmujemy jako 10^{-3} mm. Jednakże, dla uzmysłowienia sobie miejsca modelowanego zagadnienia wśród zjawisk z nim związanych, będziemy zmieniać poziom obserwacji. Powiększając kryształ przekonamy się, że "linie poślizgu" są w rzeczywistości pasmami poślizgu szerokości rzędu 10^{-4} mm złożonymi z warstw grubości 10^{-5} mm/około 100 odległości międzyatomowych/, tworząc obraz bardzo niejednorodnej deformacji. Na poziomie submikroskopowym / 10^{-7} mm/ okaże się, że kryształ jest pełen wewnętrznych defektów, których przemieszczanie się pod wpływem oddziaływań zewnętrznych, prowadzi do wzajemnego przesuwania się wspomnianych warstw. Zjawiskami rejestrowanymi na tym poziomie zajmuje się teoria defektów sieci atomowej [14], [17].

Zwróćmy uwagę na różnice w charakterystycznych wymiarach obiektów ukazujących się na różnych poziomach obserwacji /rys.4/. Na ogół, prowadząc obserwacje mamy w polu widzenia obiekty o wymiarze co najwyżej o dwa rzędy wielkości większym od założonej dokładności.



Rys.4. Trzy poziomy prowadzonych obserwacji:
 a/ submikroskopowy, b/ mikroskopowy, c/ makroskopowy
 /a - charakterystyczny wymiar obiektu obserwacji/.

Na poziomie mikroskopowym możemy obserwować w całości ziarna o średnicy nie większej niż 10^{-1} mm. Aby stwierdzić jak zachowuje się otoczenie tych ziaren w badanym procesie, należy zmniejszyć dokładność prowadzonych obserwacji. Założymy, że kryształ tworzy jedno z wielu, takich samych ziaren, z których zbudowana jest próbka metalu. Na poziomie makroskopowym /1 mm/ fragment próbki stanowi jednorodny materiał, który przy jednakowym prawdopodobieństwie zorientowania sieci ziaren w danym kierunku, jest jednocześnie materiałem izotropowym.

Jak wiemy, w procesie plastycznej deformacji, sieci kryształów obracają się. W efekcie odkształcenia plastycznego makroskopowej próbki metalu mogą pojawić się uprzywilejowane orientacje sieci poszczególnych ziaren. Powiem wówczas, że w próbce polikrystalicznej pojawiła się tekstura. Początkowo izotropowy materiał stał się materiałem anizotropowym.

W przypadku metalu czystego, bez naprężeń wewnętrznych, pojawienie się tekstury jest bezpośrednią przyczyną powstania anizotropii próbki. Może ona nadawać szereg pożądanych lub niepożądanych cech gotowym wyrobom przemysłowym. W monografii [18] poświęconej wpływowi tekstury na właściwości materiału, zwrócono uwagę na następujące zjawiska: powstawanie "uszu" na obrzeżach wytłaczanych blach oraz pofałdowanie ich powierzchni; różnice w łatwości magnesowania blach transformatorowych, wytrzymałości blach na rozrywanie, podatności sprężyn i resorów, efektywności działania przetworników magnetostrykcyjnych używanych do wytwarzania ultradźwięków; ponadto różnice w wytrzymałości na pełzanie i zmęczenie łopatek turbin gazowych oraz różnice w podatności na korozję elementów metalowych.

W dotychczasowym opisie związku pomiędzy anizotropią próbki, a jej teksturą założyliśmy, że w materiale nie występują naprężenia wewnętrzne i że jest on idealnie czysty. W praktyce mamy do czynienia z materiałem, w którym oprócz naprężeń restrykcyjnych występują pasma metalu szczególnie wzbogacone we wtrą-

cenia niemetaliczne. Ponadto, widoczna jest wyraźna różnica kształtu i wielkości poszczególnych ziaren, a także istnienie silnych zanieczyszczeń na ich granicach.

Powyższe zjawiska mogą również, a czasami przede wszystkim, decydować o anizotropii próbki. Należy jednak podkreślić, że pojawienie się własności anizotropowych dotyczy wyrobów, które zostały poddane znacznym odkształceniom plastycznym. Okazuje się, że początkowo izotropowy materiał poddany umiarkowanemu dużym odkształceniom trwałym, praktycznie nie zmienia swoich własności [106].

1.4. Istniejące kierunki badań

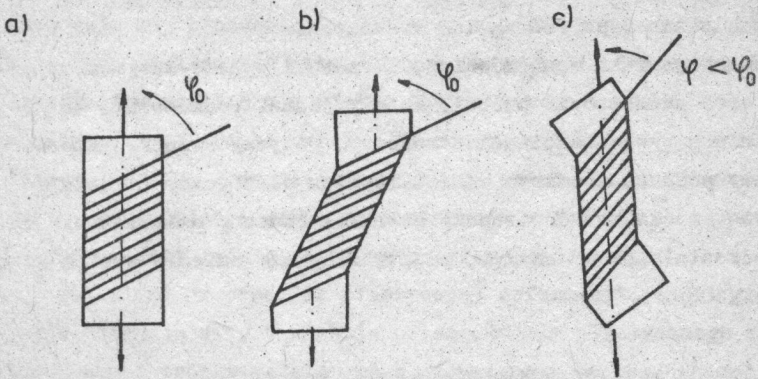
Interesować nas będą kierunki badań plastycznego płynięcia kryształów w zakresie opisanym w punkcie 1.2. Wśród nich można wyodrębnić teorie fizyczne^{x/}, wyjaśniające zjawisko poślizgu na gruncie teorii defektów sieci, oraz teorie matematyczne, opisujące je poprzez sformułowanie i analizę modeli fenomenologicznych.

Najważniejsze wyniki teorii fizycznych, uzyskane w latach 30-tych, to:

- zbudowanie dyslokacyjnego modelu zjawiska poślizgu,
- opis geometrii poślizgu z udziałem jednego i dwóch systemów,
- sformułowanie prawa uplastycznienia kryształu.

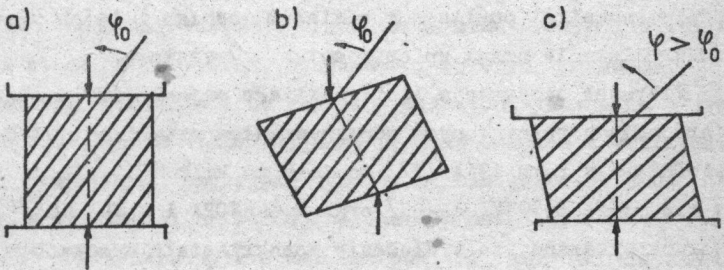
Pierwsze obserwacje linii poślizgu pojawiających się na powierzchniach rozciąganych monokryształów metali opisał E.N.da C.ANDREADE w roku 1914 [1]. Dopiero po kilkunastu latach ukazały się prace E.SCHMIDA [95] oraz R.KARNOPA i G.SACHSA [53], w których wykazano, że wydłużenie monokryształu wywołane pojedynczym poślizgiem, jest złożeniem plastycznego ścinania oraz sztywnego obrotu próbki [rys.5].

x/ Istniejący przegląd tego typu teorii podaje T.H.LIN [67].



Rys.5. Geometria poślizgu przy rozciąganiu: a/ stan początkowy, b/ fikcyjny stan prostego ścinania, c/ stan końcowy.

Geometria poślizgu przy ścisnaniu monokryształu jest podobna, chociaż nieco inna niż w procesie rozciągania /rys.6/.



Rys.6. Geometria poślizgu przy ścisnaniu: a/ stan początkowy, b/ fikcyjny stan prostego ścinania, c/ stan końcowy.

W cytowanych pracach wprowadzono proste wzory wiążące kąt nachylenia płaszczyzn poślizgu do kierunku rozciągania / ściskania z wielkością wydłużenia / skrócenia monokryształu. Analogiczne wzory otrzymał G.I.TAYLOR [102-103], dla jednoczesnego poślizgu na dwóch systemach.

W roku 1924, E.SCHMID sformułował kryterium uplastycznienia kryształu przez poślizg [94]. W literaturze, znane jest ono jako prawo Schmid'a, lub prawo krytycznych naprężeń ścinających. Zgodnie z nim, poślizg pojawia się na tym systemie, na którym naprężenie ścinające osiągnie pewną wartość krytyczną. Wartość ta jest uważana za wielkość stałą, dla materiału z którego zbudowany jest kryształ. Badane naprężenie ścinające jest definiowane jako rzut tensora naprężenia na płaszczyznę i kierunek wybranego systemu poślizgu. Będziemy je nazywać efektywnym naprężeniem ścinającym^{x/}.

Prawo Schmid'a daje kryterium uplastycznienia analogiczne do warunku Tresca, stosowanego w przypadku materiałów izotropowych. Jeżeli ustalimy orientację kryształu względem kierunków głównych tensora naprężenia, to prawo Schmid'a opisuje, w przestrzeni naprężeń głównych, powierzchnię nieskończonego graniastosłupa o osi równoległej do linii ciśnień. Tworzą ją pary płaszczyzn równo oddalone od osi ciśnień. Odległości tych płaszczyzn zależą od przyjętej orientacji kryształu. Mamy więc do czynienia z prawem odcinkowo-liniowym, zadany przez tyle ograniczeń nałożonych na stan naprężenia ile jest systemów poślizgu.

W roku 1928, R.v.MISES w słynnej pracy o potencjale plastycznym [75], zaproponował dla kryształów warunek uplastycznienia opisany jedną kwadratową funkcją naprężeń. Przy ustalonej orientacji kryształu, warunek ten generował gładką powierzchnię plastyczności. Ze względu na brak, w owym czasie, danych doświadczalnych potwierdzających słuszność tego kryterium, nie doczekało się ono powszechnej akceptacji.

x/ W literaturze anglosaskiej najczęściej używany jest termin "resolved shear stress".

Opis mechanizmów poślizgu i sformułowanie prawa uplastycznienia kryształu stworzyło podstawę do sformułowania fizycznej teorii plastyczności metali. Potrzebne jeszcze było przyjęcie kryterium wyboru aktywnych systemów poślizgu. Spośród wszystkich systemów, geometrycznie dopuszczalnych dla danego stanu odkształcenia, G.I.TAYLOR zaproponował wybór tych, na których suma bezwzględnych wartości prędkości poślizgów byłaby najmniejsza [104].

J.F.W.BISHOP i R.HILL wprowadzili równoważną powyższej, zasadę maksymalnej pracy plastycznej [10]. W ten sposób problem brzegowy, dla plastycznie odkształconego kryształu, sprowadzony został do zagadnienia programowania matematycznego.

Przejdziemy teraz do omówienia matematycznych teorii plastyczności kryształów. Pierwszą próbę opisu zachowania się kryształu w ramach teorii plastyczności ciał anizotropowych przedstawił J.MANDEL w roku 1965 [72]. Wprowadził on pojęcie reperu kierunków, którym opisywał anizotropię ośrodka. Wykazał, że kompletna analiza dużych deformacji plastycznych ciała anizotropowego będzie możliwa jeżeli będą sformułowane trzy dodatkowe równania konstytutywne opisujące spin plastyczny elementu materialnego. Równania te pośrednio określałyby obrót reperu kierunków, a w przypadku kryształu - obrót sieci. Wprowadzone przez J.Mandela pojęcia miały charakter ogólny, bez dokładnej interpretacji fizycznej [73]. Dalszy rozwój tego kierunku badań dotyczył prób opisu zachowania się polikryształów [74].

Inne podejście przedstawili R.HILL i J.R.RICE w pracy [49]. Bazując na termodynamicznej teorii materiałów z parametrami wewnętrznymi [89], stworzyli podstawy matematycznej teorii plastyczności kryształów. Jako parametry wewnętrzne teorii przyjęto prędkości poślizgów na poszczególnych systemach oraz wielkości opisujące wzmocnienie materiału. Odpowiednio dobrane prawa wzmocnienia zastąpiły dodatkowe równania konstytutywne w teorii Mandela. Szereg prac poświęcono sformułowaniu takich

praw. Należy tu wymienić przede wszystkim prace K.S.HAVNERA [46] oraz K.S.HAVNERA i A.H.SHALABY [47-48]. Zagadnieniem któremu poświęcono najwięcej uwagi było wyodrębnienie wpływu orientacji sieci z całokształtu zjawisk opisujących wzmocnienie.

Kończąc ten krótki przegląd teorii plastyczności kryształów należy pamiętać, że zagadnienia te silnie wiążą się, z jednej strony, z teorią defektów sieci /por. monografie A.H.COTTRELLA [17] i H.G.BUERENA [14] oraz prace E.KRÖNERA [62], D.ROGULI [90], A.SEEGERA [99] i C.TEDDOSIU [105]//, a z drugiej strony z plastycznością polikryształów /prace: A.A.MALMAYSTRA [70-71] i A.F.KREGERSA [59-60] w Związku Radzieckim, E.KRÖNERA [61] w R.F.N., M.BERVEILLERA i A.ZAOUI [8] we Francji, T.LEFFERSA [66] i N.HANSENA [45] w Danii, grupy pod kierunkiem U.F.KOCKSA [58], [16] w Kanadzie oraz J.POSPIECHA, W.TRUSZKOWSKIEGO, J.JURY i J.KRÓLA [87], K.WIERZBANOWSKIEGO i Z.JASIEŃSKIEGO [107] w Polsce/. Silny jest też związek plastyczności kryształów z fenomenologiczną teorią plastyczności materiałów anizotropowych /prace W.OLSZAKA i W.URBANOWSKIEGO [80-81], J.RYCHLEWSKIEGO [92], W.OLSZAKA i J.OSTROWSKIEJ [79], A.BALTOWA i A.SAWCZUKA [5], Z.MROZA [76] oraz T.KURTYKI i M.ŻYCZKOWSKIEGO [63]//.

Bogaty przegląd modeli stosowanych w tej dziedzinie można znaleźć w monografii M.ŻYCZKOWSKIEGO [109]. Należy też pamiętać o inspirującej roli jaką dla plastyczności kryształów odgrywają badania nad kształtem powierzchni plastyczności dla metali /prace P.PHILIPSA i H.MOONA [85], K.IKEGAMI [52] oraz W.SZCZEPIŃSKIEGO [100]//. Interesujący przegląd zastosowań tych badań, w procesach formowania wyrobów metalowych, przedstawił W.SZCZEPIŃSKI w monografii [101].

Jeżeli odkształcenia w próbce polikrystalicznej są bardzo duże, mogą pojawić się pęknięcia na granicach ziaren. Prowadzą one do powstania mikroszczelin i w efekcie do zniszczenia elementu. Szczegółową analizę i matematyczny opis tego typu zjawisk można znaleźć w pracach P.PERZYNY [83-84].

Zwróćmy uwagę na jeszcze jeden kierunek badań. Przypomnijmy, że powstawanie tekstury w metalach pod wpływem deformacji plastycznych dotyczy wyrobów które zostały poddane znacznym odkształceniom /powyżej 10%/ [106]. Do opisu zachowania się materiału izotropowego poddanego umiarkowanie dużym odkształceniom wystarczy teoria dużych odkształceń sprężysto-plastycznych ośrodków izotropowych, zaproponowana przez E.H.LEE [64]. Teoria ta ma obecnie solidne podstawy termodynamiczne /por. prace: B.RANIECKIEGO [88] oraz M.KLEIBERA i B.RANIECKIEGO [56]/. Próby rozszerzenia teorii E.H.Lee na dowolne materiały plastycznie anizotropowe nie dały zadawalających wyników. Polegały one głównie na poszukiwaniu pochodnej konstytutywnej, która definiowałaby obrót elementu materialnego [65]. Próbę taką przedstawiłem w pracy [22]. Wyniki jej zostały uwzględnione w pracach C.FRESSENGEASA i A.MOLINARIEGO [21] oraz B.IORETA [68]. Inne ujęcie zagadnienia bazujące na teorii materiałów standardowych uogólnionych [44], przedstawiłem w pracach [23] i [37].

Trudności związane z opisem dużych deformacji plastycznych dowolnych materiałów anizotropowych skłoniły mnie do studiów nad uplastycznieniem monokryształów.

Praca niniejsza stanowi podsumowanie i rozszerzenie moich dotychczasowych badań w tym zakresie [24-26].

1.5. System oznaczeń

- $\dot{\gamma}^{(r)}$ - prędkość poślizgu na r-tym systemie;
- $\underline{n}^{(r)}$ - wersor normalny do płaszczyzny poślizgu r-tego systemu;
- $\underline{m}^{(r)}$ - wersor kierunku poślizgu r-tego systemu;
- \underline{a}_α - reper kierunków sieci / $\alpha = 1, 2, 3$ /;
- $\hat{n}_\alpha^{(r)}$ - składowe wersora $\underline{n}^{(r)}$ względem kierunków sieci;
- $\hat{m}_\alpha^{(r)}$ - składowe wersora $\underline{m}^{(r)}$ względem kierunków sieci;
- \underline{e}_i - ortonormalna baza układu odniesienia / $i = 1, 2, 3$ /;

- $n_i^{(r)}$ - składowe wersora $\underline{n}^{(r)}$ względem bazy $\{e_i\}$;
 $m_i^{(r)}$ - składowe wersora $\underline{m}^{(r)}$ względem bazy $\{e_i\}$;
 \underline{R} - tensor obrotu reperu $\{\underline{a}_i\}$ względem bazy $\{e_i\}$;
 φ_m - kąty Eulera orientujące sieć / $m = 1, 2, 3$ / ;
 $\underline{\omega}^L$ - spin sieci ;
 $\underline{\omega}^R$ - spin sztywno obracającego się kryształu ;
 \underline{L}^P - plastyczna część gradientu prędkości ;
 \underline{d}^P - tensor prędkości plastycznej deformacji ;
 $\underline{\omega}^P$ - spin plastyczny ;
 \underline{L} - całkowity gradient prędkości ;
 \underline{d} - tensor prędkości całkowitej deformacji ;
 $\underline{\omega}$ - spin całkowity ;
 \underline{v} - pole prędkości cząstek materialnych kryształu ;
 $\underline{\epsilon}$ - tensor naprężeń Cauchy'ego ;
 \underline{s} - dewiator tensora $\underline{\epsilon}$;
 D^P - prędkość plastycznej dysypacji energii ;
 $\tau^{(r)}$ - efektywne naprężenie ścinające na r-tym systemie poślizgu ;
 $k_c^{(r)}$ - krytyczna wartość $\tau^{(r)}$;
 f_k - więzy naprężeniowe ;
 $f^{(r)}$ - więzy naprężeniowe stowarzyszone z r-tym systemem poślizgu ;
 f - warunek plastyczności ;
 \mathcal{F} - uogólniony potencjał Misesa ;
 \underline{A} - tensor plastycznej anizotropii kryształu w warunku Misesa ;
 \underline{H} - tensor plastycznej anizotropii kryształu w kwadratowej aproksymacji prawa Schmid'a ;
 \underline{S} - tensor modułów podatności sprężystej kryształu .

Rozdział II

KRYSTAŁY DEFORMUJĄCE SIĘ PRZEZ POŚLIZG

2.1. Reper kierunków sieci i układ systemów poślizgu

Celem niniejszych rozważań jest sformułowanie definicji kryształu deformującego się przez poślizg. Podamy ją na końcu rozdziału. Przedtem przypomnimy szereg pojęć pomocniczych, opiszemy ruch sieci i ruch cząstek materialnych kryształu. Zaczniemy od pojęcia sieci prostej.

Przesuwając wielokrotnie o pewien odcinek ustalony punkt przestrzeni, w trzech niezależnych kierunkach, otrzymamy sieć prostą. Każdy z otrzymanych punktów stanowi węzeł sieci prostej. Wyróżnione kierunki są kierunkami krystalograficznymi, a rozpięte na nich płaszczyzny - płaszczyznami krystalograficznymi. Przez złożenie sieci prostych otrzymujemy jeden z 14 typów sieci Bravais^{x/} wspomnianych w punkcie drugim poprzedniego rozdziału.

Rozważmy dowolną sieć Bravais. Jedną z sieci prostych, które ją tworzą, przyjmiemy jako bazową. W sieci bazowej wyróżniamy pewną płaszczyznę krystalograficzną oraz kierunek krystalograficzny na niej leżący. Wprowadzimy trójkę ortogonalnych wektorów $\{a_1, a_2, a_3\}$. Pierwszy z nich jest normalny do wybranej płaszczyzny, drugi - równoległy do ustalonego kierunku, a trzeci jest iloczynem wektorowym dwóch poprzednich.

Trójkę $\{a_\alpha\} / \alpha = 1, 2, 3/$ nazwiemy reperem kierunków sieci krystalicznej.

Oprócz płaszczyzn i kierunków sieci bazowej, wyróżniamy jeszcze inne płaszczyzny i kierunki krystalograficzne. Będą

x/ Dowolną sieć Bravais można otrzymać przez włożenie w siebie odpowiednio przesuniętych, dwóch, trzech lub czterech identycznych sieci prostych.

to wszystkie możliwe płaszczyzny i kierunki poślizgu.

Oznaczmy przez $\underline{n}^{(r)}$ wektor normalny do jednej z płaszczyzn poślizgu, a przez $\underline{m}^{(r)}$ - pewien, leżący na niej, kierunek poślizgu^{x/}. Parę $(\underline{m}^{(r)}, \underline{n}^{(r)})$ nazwiemy systemem poślizgu. Zbiór wszystkich możliwych systemów poślizgu stanowi układ systemów poślizgu badanego kryształu

$$/2.1/ \quad \mathcal{U} = \{ (\underline{m}^{(d)}, \underline{n}^{(d)}), \dots, (\underline{m}^{(M)}, \underline{n}^{(M)}) \}.$$

2.2. Ruch sieci krystalicznej

Rozważmy dowolną deformację badanego kryształu. Jeżeli jest to deformacja sprężysta, węzły sieci mogą być identyfikowane z leżącymi na nich cząstkami materialnymi kryształu. Jednakże, jeżeli w ziarnie pojawiają się poślizgi, to ruch węzłów różni się od ruchu cząstek. Dlatego musimy rozpatrywać oddzielnie ruch cząstek materialnych i ruch niematerialnej struktury kryształu jaką jest sieć krystaliczna.

Zaniedbując sprężyste odkształcenia w kryształach, przyjmemy, że jedynym możliwym ruchem sieci jest ruch ciała sztywnego. Oznacza to, że aktualny stan sieci jest opisany orientacją reperu $\{\underline{a}_i\}$ względem ustalonego, kartezjańskiego układu współrzędnych $\{\underline{e}_i\}$.

Jeżeli, dla $\alpha, i = 1, 2, 3$, $R_{\alpha i}(t)$ jest macierzą obrotu dowolnie zmienną w czasie, a więc taką, która w każdej chwili t spełnia warunek

$$/2.2/ \quad R_{\alpha i}(t) R_{\beta i}(t) = 1,$$

to ruch sieci opisują obroty reperu kierunków sieci

x/ Założenie to wyklucza powstawanie niepłaskich powierzchni poślizgu, typowych dla zginania i skręcania monokryształów.

$$/2.3/ \quad \underline{a}_\alpha(t) = R_{\alpha i}(t) \underline{e}_i.$$

Z macierzą $R_{\alpha ij}$ zwiążemy tensor obrotu

$$/2.4/ \quad \underline{R}(t) = R_{ij}(t) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j,$$

w którym

$$/2.5/ \quad R_{ij}(t) = \delta_{\alpha i} R_{\alpha j}(t).$$

Składowe $R_{ij}(t)$ tensora $\underline{R}(t)$ wyrażamy przez kąty Eulera $\varphi_k(t)$ / $k = 1, 2, 3$ /, opisujące nachylenie kierunków sieci do osi przyjętego układu współrzędnych. Odpowiednie wzory przytoczone są w Dodatku A.

Trójka wersorów $\{\underline{a}_\alpha(t)\}$ może być interpretowana jako baza pewnego obracającego się, ortogonalnego układu współrzędnych. Rozkładając przyrosty wersorów $\{\underline{a}_\alpha(t)\}$ w tej bazie otrzymamy

$$/2.6/ \quad \dot{\underline{a}}_\alpha(t) = \underline{R}(t) \underline{R}^T(t) \underline{a}_\alpha(t).$$

W dalszym ciągu, tensor

$$/2.7/ \quad \underline{\omega}^L(t) = \dot{\underline{R}}(t) \underline{R}^T(t)$$

będziemy nazywać spinem sieci.

Rozważmy dowolny system poślizgu $(\underline{m}^{(r)}, \underline{n}^{(r)})$ / $r = 1, 2, \dots, M$ /. Wektory $\underline{m}^{(r)}$ i $\underline{n}^{(r)}$ są sztywno zwiążane z reperem kierunków sieci przez współczynniki $\hat{m}_\alpha^{(r)}$ oraz $\hat{n}_\alpha^{(r)}$

$$/2.8/ \quad \underline{m}^{(r)}(t) = \hat{m}_\alpha^{(r)} \underline{a}_\alpha(t),$$

$$\underline{n}^{(r)}(t) = \hat{n}_\alpha^{(r)} \underline{a}_\alpha(t).$$

Współczynniki te są składowymi obracających się wektorów $\underline{m}^{(r)}$ i $\underline{n}^{(r)}$ w ruchomej bazie $\{\underline{a}_\alpha(t)\}$ i nie zmieniają się w czasie. Mogą więc być traktowane jako stałe mikrostrukturalne opisujące wewnętrzną budowę kryształu.

W ustalonej bazie $\{\underline{e}_i\}$, mamy

$$\begin{aligned} \underline{m}^{(r)}(t) &= \hat{m}_\alpha^{(r)} R_{\alpha i}(t) \underline{e}_i, \\ \underline{n}^{(r)}(t) &= \hat{n}_\alpha^{(r)} R_{\alpha i}(t) \underline{e}_i. \end{aligned}$$

/2.9/

Z powyższych wzorów wynika, że $\underline{m}^{(r)}$ oraz $\underline{n}^{(r)}$ są funkcjami trzech kątów Eulera opisujących orientację sieci. Widzimy, że ruch systemów poślizgu jest taki sam jak ruch reperu kierunków sieci i dla zadanego spinu sieci $\underline{\omega}^L(t)$ może być opisany układem równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \dot{\underline{m}}^{(r)}(t) &= \underline{\omega}^L(t) \underline{m}^{(r)}(t), \\ \dot{\underline{n}}^{(r)}(t) &= \underline{\omega}^L(t) \underline{n}^{(r)}(t), \end{aligned}$$

/2.10/

z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} \underline{m}^{(r)}(t_0) &= \underline{m}_0^{(r)}, \\ \underline{n}^{(r)}(t_0) &= \underline{n}_0^{(r)}. \end{aligned}$$

/2.11/

2.3. Ruch cząstek materialnych

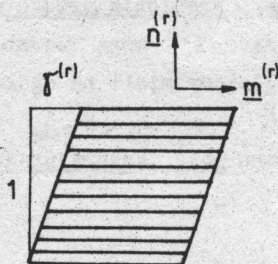
2.3.1. Podstawowe zależności

Do tej pory zajmowaliśmy się opisem ruchu niematerialnej struktury kryształu. Przejdziemy do opisu ruchu jego cząstek materialnych. W przypadku plastycznego płynięcia, wywołanego poślizgiem na jednym systemie, ruch taki jest złożeniem pros-

tego ścinania i sztywnego obrotu kryształu /rys.5, punkt 1.4/. Przyjmujemy, że jest to słuszne również w przypadku poślizgu na kilku systemach.

a/ Poślizgi

Rozważmy poślizg materiału na płaszczyznach prostopadłych do wektora $\underline{n}^{(r)}$, w kierunku $\underline{m}^{(r)}$, zachodzący z prędkością $\dot{\gamma}^{(r)}$ /rys.7/.



Rys.7. Proste ścinanie na r-tym systemie poślizgu.

Niech $d\underline{x}$ będzie infinitesimalnym wektorem stycznym do pewnego włókna materialnego. Przyrost wektora prędkości cząstek na długości tego włókna $d\underline{v}^{(r)}$ jest rzutem tensora $\dot{\gamma}^{(r)} \underline{m}^{(r)} \otimes \underline{n}^{(r)}$ na wektor $d\underline{x}$

$$/2.12/ \quad d\underline{v}^{(r)} = \dot{\gamma}^{(r)} \underline{m}^{(r)} \otimes \underline{n}^{(r)} \cdot d\underline{x} .$$

Wyobraźmy sobie teraz jednoczesny poślizg na kilku systemach. Ich położenie względem wybranego układu współrzędnych jest ustalone. Można przyjąć /por. np. [98]/, że wypadkowy wektor $d\underline{v}^p$ jest sumą wektorów $d\underline{v}^{(r)}$, dla $r = 1, 2, \dots, M$. Zatem w przypadku kryształu, w którym może pojawić się M systemów poślizgu, mamy

$$/2.13/ \quad d\mathbf{v}^{(r)} = \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^{(r)} \underline{m}^{(r)} \otimes \underline{n}^{(r)} \cdot d\mathbf{x}.$$

Dla systemów na których poślizg nie występuje, odpowiednie wartości $\dot{\gamma}^{(r)}$ w /2.13/ znikają.

Tensor

$$/2.14/ \quad \underline{\underline{L}}^P \equiv \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^{(r)} \underline{m}^{(r)} \otimes \underline{n}^{(r)},$$

nazwiemy częścią plastyczną gradientu prędkości.

Ponieważ prędkości poślizgów $\dot{\gamma}^{(r)}$ mogą tworzyć niejednorodne pola skalarne $\dot{\gamma}^{(r)}(\mathbf{x}, t)$, będziemy mieli na ogół do czynienia z polem tensorowym $\underline{\underline{L}}^P(\mathbf{x}, t)$.

Wzór /2.14/ określa zarówno pole tensora prędkości plastycznej deformacji

$$/2.15/ \quad \underline{\underline{d}}^P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^{(r)} (\underline{m}^{(r)} \otimes \underline{n}^{(r)} + \underline{n}^{(r)} \otimes \underline{m}^{(r)}),$$

jak i pole spinu plastycznego

$$/2.16/ \quad \underline{\underline{\omega}}^P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^{(r)} (\underline{m}^{(r)} \otimes \underline{n}^{(r)} - \underline{n}^{(r)} \otimes \underline{m}^{(r)}).$$

Kryształy deformujące się przez poślizg są ciałami plastycznie nieściśliwymi. Istotnie, ponieważ dla $r = 1, 2, \dots, M$

$$/2.17/ \quad \underline{m}^{(r)} \cdot \underline{n}^{(r)} = 0,$$

to

$$/2.18/ \quad \text{tr } \underline{\underline{d}}^P(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Należy zwrócić uwagę, że spin $\underline{\omega}^l(t)$ był obiektem globalnym, przypisanym całej sieci kryształu, natomiast spin plastyczny $\underline{\omega}^p(x,t)$ przypisany włóknom materialnym kryształu, ma charakter lokalny.

b/ Sztywny obrót kryształu

Z ruchem włókien materialnych kryształu zwiążemy jeszcze jedną wielkość zadaną globalnie. Będzie nią spin $\underline{\omega}^R(t)$ opisujący chwilową prędkość obrotu kryształu poruszającego się ruchem ciała sztywnego.

Jeżeli $\underline{v}^R(x,t)$ jest polem prędkości cząstek obracającego się kryształu, to przyrost prędkości $d\underline{v}^R$, na długości włókna $d\underline{x}$, można obliczyć ze wzoru

$$/2.19/ \quad d\underline{v}^R = \underline{\omega}^R \cdot d\underline{x}.$$

c/ Ruch wypadkowy

Złożenie pól prędkości wywołanych poślizgami i sztywnym obrotem kryształu prowadzi do wzoru na całkowity przyrost prędkości

$$/2.20/ \quad d\underline{v} = d\underline{v}^P + d\underline{v}^R.$$

Podstawiając /2.13/ i /2.19/ do /2.20/ otrzymamy wyrażenie na pole całkowitego gradientu prędkości

$$/2.21/ \quad \underline{L}(x,t) = \underline{L}^P(x,t) + \underline{\omega}^R(t).$$

Niejednorodność tego pola wywołana jest wyłącznie niejednorodnością pola części plastycznej gradientu prędkości i stanowi przedmiot zainteresowania wielu prac poświęconych lokalizacji odkształceń plastycznych w kryształach [4], [86].

2.3.2. Związki kinematycznej zgodności

Z zadanym polem $\underline{L}(x,t)$ można związać pole prędkości $\underline{v}(x,t)$ poprzez wzór

$$/2.22/ \quad \underline{L}(x,t) = \text{grad } \psi(x,t),$$

jeżeli pole $\underline{L}(x,t)$ spełnia związki kinematycznej zgodności. Wynikają one z oczywistego warunku

$$/2.23/ \quad v_{i,jk} = v_{i,kj}$$

i mają postać

$$/2.24/ \quad L_{ij,k} \epsilon_{jkl} = 0,$$

gdzie przez ϵ_{jkl} oznaczono symbol permutacyjny. Podstawiając /2.12/ i /2.21/ do /2.24/, otrzymamy 9 równań różniczkowych dla pól prędkości poślizgów $\dot{\gamma}^{(r)}(x,t)$

$$/2.25/ \quad \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}_{,k}^{(r)} m_i^{(r)} n_j \epsilon_{ijkl} = 0.$$

Podkreślmy, że spełnienie równań /2.25/ przez pola $\dot{\gamma}^{(r)}(x,t)$ / $r = 1, 2, \dots, M$ /, jest warunkiem koniecznym i wystarczającym aby mogły one opisywać deformację plastyczną wywołaną poślizgami kryształu.

2.3.3. Rodzina chwilowo nierozciągliwych płaszczyzn

W przypadku jednorodnego pola odkształceń plastycznych związki /2.25/ spełnione są tożsamościowo. Gdy deformacja jest niejednorodna, związki powyższe nakładają silne ograniczenia na jej postać.

Dla zilustrowania otrzymanych zależności rozpatrzmy płaskie płyniecie wyidealizowanego kryształu z dwiema rodzinami ortogonalnych płaszczyzn poślizgu /rys.8/. Płygnięcie to wywołane jest jednoczesnym poślizgiem na dwu systemach. Niech proste ścinanie w kierunku osi x_1 zachodzi z prędkością $\dot{\gamma}^{(1)}$, natomiast w kierunku osi x_2 niech ma prędkość $\dot{\gamma}^{(2)}$. Płaszczyzna rysunku jest prostopadła do osi x_3 . W badanym przypadku, z 9 równań /2.25/, 5 jest spełnionych tożsamościowo. Pozostałe mają postać

/2.26/

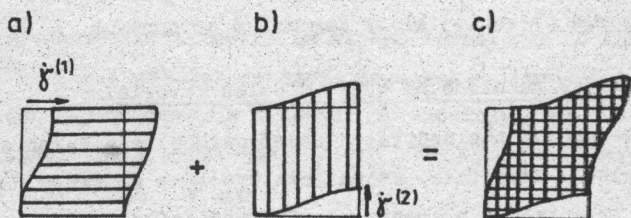
$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{,1}^{(1)} &= 0 ; & \dot{\gamma}_{,2}^{(2)} &= 0, \\ \dot{\gamma}_{,3}^{(1)} &= 0 ; & \dot{\gamma}_{,3}^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że

/2.27/

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^{(1)} &= \dot{\gamma}^{(1)}(x_2, t), \\ \dot{\gamma}^{(2)} &= \dot{\gamma}^{(2)}(x_1, t). \end{aligned}$$

Pole prędkości jednoczesnego poślizgu na obu systemach przedstawione jest na rys.8c. Sytuacja będzie nieco bardziej skomplikowana jeżeli płaszczyzny poślizgu nie będą ortogonalne.



Rys.8. Dopuszczalne pola prędkości poślizgów, dla przypadku ortogonalnych płaszczyzn poślizgu.

Wróćmy jednak do przypadku ortogonalnych płaszczyzn poślizgu. Wzory /2.27/ sugerują, że płaszczyzny materialne pokrywające się w pewnej chwili czasu z płaszczyznami poślizgu są chwilowo nierozciągliwe.

Istotnie, dla dowolnego włókna materialnego stycznego do wektora \underline{a} i leżącego chwilowo na płaszczyźnie poślizgu o wersorze normalnym \underline{n} , a więc takiego, że

$$/2.28/ \quad \underline{a} \cdot \underline{n} = 0,$$

składowa normalna tensora \underline{d}^p , dla kierunku \underline{a} znika

$$/2.29/ \quad \underline{a} \cdot \underline{d}^p \cdot \underline{a} = 0.$$

Związek /2.29/ oznacza, że rozpatrywane włókno nie ulega wydłużeniu.

Zauważmy, że dla ciał izotropowych powierzchnie poślizgu są zawsze ortogonalne. Zatem, każda powierzchnia poślizgu jest powierzchnią chwilowo nierozciągliwą.

Zagadnienie plastycznego płynięcia ciał izotropowych z rodziną chwilowo nierozciągliwych płaszczyzn badałem w pracach [27-31] oraz [42]. Wyniki badań pozwoliły na interesującą klasyfikację znanych rozwiązań teorii ciała sztywno-idealnie plastycznego, uogólnienie twierdzeń Hencky'ego na stany trójwymiarowe oraz rozwiązanie szerokiej klasy zagadnień brzegowych.

2.3.4. Więzy nałożone na obrót włókien materialnych

Interesować nas będzie ta część całkowitego spinu elementu materialnego kryształu, która jest wywołana sztywnym obrotem całego kryształu w procesie plastycznej deformacji. Jest nią spin $\underline{\omega}^s(t)$. Przypominamy, że spin całkowity zdefiniowany jest wzorem

/2.30/

$$\omega(x,t) = 1/2 [\text{grad } v(x,t) - \text{grad }^T v(x,t)]$$

gdzie $v(x,t)$ jest polem prędkości. Zgodnie z /2.21/, $\omega(x,t)$ jest sumą spinu plastycznego $\underline{\omega}^p(x,t)$ i spinu $\underline{\omega}^r(t)$ ^{x/}.

Zatem, jeżeli znamy pole prędkości $v(x,t)$ i pole $\underline{\omega}^p(x,t)$ to możemy otrzymać $\underline{\omega}^r(t)$. Pole $\underline{\omega}^p(x,t)$ znajdujemy z odpowiednich równań konstytutywnych, natomiast pole $v(x,t)$ powinno spełniać warunki zadane na powierzchni kryształu. Niezbędna jest więc informacja o kształcie ziarna.

Jednakże, jeżeli ograniczymy się do badania jednorodnych stanów deformacji kryształu, to ani pole $v(x,t)$ ani kształt ziarna, nie będą potrzebne do wyznaczenia spinu $\underline{\omega}^r(t)$.

W takich przypadkach zamiast kinematycznych warunków brzegowych należy przyjąć pewne więzy narzucone na całkowity spin $\omega(x,t)$, które jednocześnie określą $\underline{\omega}^r(t)$.

Wyjaśnimy to na przykładzie jednoosiowego rozciągania monokryształu /rys.5/.

Przyjmijemy następujący warunek.

W.1. Włókna materialne równoległe do kierunku rozciągania przed deformacją, pozostają do niego równoległe w całym procesie deformacji.

Powyższy warunek można przedstawić w postaci analitycznej.

W tym celu rozważmy infinitezymalne włókno równoległe do kierunku \underline{N} . Różnicę prędkości cząstek, leżących na końcach tego włókna, oznaczmy przez $d\underline{v}$. Wektor $d\underline{v}$ rozłożymy na dwa kierunki: równoległy i prostopadły do \underline{N} . Otrzymamy wektory: $N_i d\underline{v}_j N_j$ oraz $d\underline{v}_i - N_i d\underline{v}_j N_j$.

Jeżeli rozpatrywane włókno nie obraca się w procesie rozciągania to

x/ Zwróćmy uwagę, że niejednorodność pola spinu całkowitego może być spowodowana wyłącznie niejednorodnością pola spinu plastycznego.

$$/2.31/ \quad dv_i - N_i dv_j N_j = 0.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$/2.32/ \quad dv_i = L_{ij} N_j = (d_{ij} + \omega_{ij}) N_j,$$

otrzymamy

$$/2.33/ \quad N_i dv_j N_j = (N_i d_{ik} N_k + N_i \omega_{ik} N_k) N_j,$$

gdzie

$$/2.34/ \quad N_i \omega_{ik} N_k \equiv 0.$$

Podstawiając /2.32-2.34/ do /2.31/ dostaniemy 3 równania wyrażające 3 składowe spinu całkowitego ω_j przez składowe prędkości plastycznej deformacji $d_{ij}^p = d_{ij}$, a mianowicie

$$/2.35/ \quad [\omega_{ij} + (\delta_{ik} - N_i N_k) d_{kj}] N_j = 0.$$

Niestety, tylko dwa spośród trzech otrzymanych równań są niezależne. Istotnie, z uwagi na tożsamość /2.34/, równania /2.35/ nie dają żadnej informacji o składowej normalnej spinu $\underline{\omega}(t)$ względem kierunku \underline{N} .

Aby można było określić jednoznacznie spin $\underline{\omega}(t)$ należy przyjąć dodatkowy warunek.

W.2. Kierunek \underline{N} nie jest osią obrotu kryształu.

Jeżeli wprowadzimy wektor prędkości obrotu

$$/2.36/ \quad \omega_i = \epsilon_{ijk} \omega_j k$$

to, zgodnie z dodatkowo przyjętym warunkiem, rzut wektora \underline{W} na kierunek \underline{N} powinien znikać. Otrzymujemy więc, trzecie brakujące równanie

$$/2.37/ \quad N_i \epsilon_{ijk} \omega_{jk} = 0.$$

Związki /2.35/ i /2.37/ wyrażają 3 składowe całkowitego spinu $\underline{\omega}(t)$ przez składowe danego pola $\underline{d}^p(t) = \underline{d}(t)$ i umożliwiają wyznaczenie z równań /2.30/, spinu $\underline{\omega}^p(t)$. Postępując podobnie można sformułować odpowiednie warunki dla przypadku jednoosiowego ściskania monokryształu.

2.4. Sprzężenie ruchu sieci z ruchem materiału

W punktach 2.2 oraz 2.3 opisaliśmy kolejno: ruch reperu kierunków sieci krystalicznej razem z przypisanym jej układem systemów poślizgu oraz ruch cząstek materialnych kryształu. W procesie plastycznego płynięcia oba ruchy są ze sobą ściśle związane. Podczas plastycznej deformacji opisanej polem prędkości $\underline{v}^p(\underline{x}, t)$ sieć kryształu nie obraca się. Natomiast podczas obrotu kryształu jako ciała sztywnego, układ systemów poślizgu obraca się z całym kryształem. Zatem, możemy przyjąć że

$$/2.38/ \quad \underline{\omega}^l(t) = \underline{\omega}^r(t).$$

Podsumujemy dotychczasowe rozważania wprowadzając następującą definicję.

DEFINICJA 1: Kryształem deformującym się przez poślizg nazwiemy parę $(\mathcal{B}, \mathcal{U})$, taką że:

- 1/ \mathcal{B} jest ośrodkiem ciągłym /ciałem odkształcalnym, kontinuum materialnym/ będącym zbiorem cząstek materialnych, rozumianym jako trójwymia-

rowa rozmaitość różniczkowa, dyfeomorficzna z podzbiorem przestrzeni euklidesowej \mathcal{E}^3 ; otoczenia cząstek materialnych nazywane są elementami materialnymi;

2/ \mathcal{U} jest zbiorem par:

$$(\underline{m}^{(r)}, \underline{n}^{(r)}), \dots, (\underline{m}^{(M)}, \underline{n}^{(M)})$$

utworzonych z wersorów $\underline{m}^{(r)}$ i $\underline{n}^{(r)}$ spełniających warunki

$$\underline{m}^{(r)} \cdot \underline{n}^{(r)} = 0,$$

dla $r = 1, 2, \dots, M$, przy czym pary $(\underline{m}^{(r)}, \underline{n}^{(r)})$ nazywane są systemami poślizgu, a zbiór - układem systemów poślizgu;

3/ wszystkie wersory, tworzące układ systemów poślizgu \mathcal{U} , mogą doznawać jednoczesnego obrotu opisanego spinem $\underline{\omega}^L(t)$;

4/ dowolny element materialny ciała \mathcal{B} doznaje ruchu, który jest złożeniem

a. ruchu o gradiencie prędkości

$$\underline{\dot{\gamma}}^P(\underline{x}, t) = \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^{(r)}(\underline{x}, t) \underline{m}^{(r)}(t) \otimes \underline{n}^{(r)}(t)$$

w którym wielkości $\dot{\gamma}^{(r)}(\underline{x}, t) / r = 1, 2, \dots, M$, nazywane są prędkościami poślizgów;

b. obrotu opisanego spinem $\underline{\omega}^R(t)$, takim samym dla każdego elementu materialnego;

5/ ruch układu systemów poślizgu \mathcal{U} , związany jest z ruchem elementu materialnego ciała \mathcal{B} zależnością

$$\underline{\omega}^L(t) = \underline{\omega}^R(t)$$

słuszną zawsze, dla każdej deformacji ciała \mathcal{B} .

Rozdział III

KRYSTAŁY SZTYWNO-IDEALNIE PLASTYCZNE

3.1. Uwagi ogólne

Zarówno ciało \mathcal{B} jak i układ systemów poślizgu \mathcal{U} oddziałują z pewnymi polami dynamicznymi /naprężenia, naprężenia momentowe, itp./. Założymy, że otoczenie wywiera wpływ na ciało poprzez siły masowe i kontaktowe. Natomiast, dwie części ciała oddziałują ze sobą tylko poprzez siły kontaktowe. Oznacza to, że istnieje pole wektorów naprężenia $\underline{t}(\underline{x}, t)$, na brzegu ciała i pole tensorów naprężenia Cauchy'ego $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$, wewnątrz ciała. Oba pola związane są naprężeniowymi warunkami brzegowymi.

/3.1/

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{q},$$

gdzie \underline{q} jest wersorem normalnym do brzegu ciała.

Interesować nas będzie wpływ oddziaływań zewnętrznych na zachowanie się kryształu. Zgodnie z dotychczasowymi rozważaniami, jeżeli znamy ruch elementu materialnego ciała \mathcal{B} to obrót układu \mathcal{U} możemy wyznaczyć na podstawie zależności /2.38/. Natomiast, związek pomiędzy ruchem elementu materialnego ciała \mathcal{B} a polem naprężenia $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ opisują:

- 1° klasyczne zasady zachowania,
- 2° kryterium uplastycznienia,
- 3° związki konstytutywne.

W dalszym ciągu, uwzględniając dysypację energii wywołaną poślizgami kryształu, pominiemy wszelkie efekty termiczne.

3.2. Klasyczne zasady zachowania

Rozpatrzmy kolejno, lokalne zasady zachowania wielkości fizycznych przypisanych elementowi materialnemu ciała \mathcal{B} .

Niech $\xi(\underline{x}, t)$ będzie skalarnym polem gęstości kryształu, a $\underline{f}(\underline{x}, t)$ - zewnętrznym polem wektorowym sił masowych. Symbolem (\cdot) oznaczać będziemy pochodną materialną, przez $\text{tr}(\cdot)$ - ślad, a przez $(\cdot)^T$ - transpozycję tensora drugiego rzędu.

Rozważmy prawo zachowania masy /równanie ciągłości/

$$/3.2/ \quad \dot{\xi} + \xi \text{div } \underline{v} = 0.$$

Ponieważ ciało \mathcal{B} jest ciałem nieściśliwym /wzór /2.18// i od początku jednorodnym, równanie /3.2/, spełnione jest tożsamościowo. Prawo zachowania pędu /równania ruchu Cauchy'ego/

$$/3.3/ \quad \text{div } \underline{\sigma} + \xi \underline{f} = \xi \underline{\dot{v}}$$

i prawo zachowania momentu pędu,

$$/3.4/ \quad \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$$

zachowują swoją ogólną postać.

Oznaczmy przez $e(\underline{x}, t)$ gęstość energii wewnętrznej ciała \mathcal{B} . Biorąc pod uwagę, że w badanym przypadku pola prędkości deformacji całkowitej i plastycznej są takie same, prawo zachowania energii jest następujące:

$$/3.5/ \quad \xi \dot{e} = \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{d}^P).$$

Ponieważ podczas plastycznej deformacji ciała \mathcal{B} następuje zmiana entropii, to dla każdego procesu powinna być sprawdzona nierówność Clausiusa-Duhema

$$/3.6/ \quad \dot{\eta} \geq 0,$$

gdzie $\eta(\underline{x}, t)$ jest polem gęstości entropii.

Należy jednak zdefiniować wielkość η . W tym celu przyjmiemy następujące entropijne równanie stanu:

$$/3.7/ \quad \xi T \dot{\eta} = \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{d}^p),$$

gdzie T jest temperaturą absolutną.

Wielkość

$$/3.8/ \quad D^p \equiv \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{d}^p) \geq 0,$$

nazwiemy prędkością plastycznej dyspacji energii. W rozpatrywanym przypadku nierówność /3.8/ jest równoznaczna nierówności Clausiusa-Duhema.

Wielkość D^p można związać z poślizgami kryształu. Dla ustalonego systemu poślizgu $(\underline{m}^{(r)}, \underline{n}^{(r)})$ wprowadzimy skalar

$$/3.9/ \quad \tau^{(r)} \equiv \underline{m}^{(r)} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}^{(r)}.$$

Nazywany jest on efektywnym naprężeniem ścinającym na r -tym systemie poślizgu. Wielkość $\tau^{(r)}$ przedstawia naprężenie ścinające na płaszczyźnie $\underline{n}^{(r)}$, w kierunku $\underline{m}^{(r)}$. Jeżeli do /3.9/, podstawimy wzór /2.15/

/3.10/

$$d^p = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^{(r)} (\underline{m}^{(r)} \otimes \underline{n}^{(r)} + \underline{n}^{(r)} \otimes \underline{m}^{(r)}),$$

to nierówność Clausiusa-Duhema przyjmie postać

/3.11/

$$\sum_{r=1}^M \tau^{(r)} \cdot \dot{\gamma}^{(r)} \geq 0.$$

3.3. Kryterium uplastycznienia

3.3.1. Ogólna postać warunku plastyczności

W kryształach, które mogą ulegać uplastycznieniu, na stan naprężenia i orientację sieci nałożone są więzy jednostronne, zadane układem nierówności

/3.12/

$$f_k(\sigma_{ij}, \varphi_m) \leq 0; \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Układ ten, łącznie z równaniem

/3.13/

$$\prod_{k=1}^N f_k(\sigma_{ij}, \varphi_m) = 0,$$

gdzie $\prod_{k=1}^N f_k$ jest iloczynem $f_1 \cdot f_2 \cdots f_N$, nazywać będziemy warunkiem plastyczności.

Wielkości $f_k(\sigma_{ij}, \varphi_m)$ będziemy traktować jako trójparametrowe /z parametrami φ_m / funkcje składowych tensora naprężenia σ_{ij} . Jeżeli kryształ nie jest uplastyczniony, każda z funkcji f_k przyjmuje wartości ujemne. Pojawienie się poślizgów w kryształach oznacza, że jedna lub kilka funkcji f_k przyjmuje wartości zerowe.

Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy, że pojedynczy poślizg powoduje zerowanie się tylko jednej funkcji f_k . Oznacza to, że liczba więzów N nie przekracza liczby systemów poślizgu w kryształach M , tzn.

/3.14/

$$N \leq M.$$

W ogólnym przypadku, N może zmieniać się od 1 do M . W następnych punktach pracy rozpatrzmy szczegółowo dwa przypadki: gdy $N=M$ oraz gdy $N < M$. W pierwszy przypadku każdemu systemowi poślizgu przyporządkowana jest jedna funkcja f_k , w drugim - uplastycznienie jest wywołane poślizgiem na wszystkich systemach jednocześnie.

Przejdziemy do opisu własności funkcji f_k . Funkcje te nie zależą od kulistych stanów naprężenia, ponieważ zgodnie z wzorem /3.13/, stany te nie powodują zmiany dysypacji energii. Naturalnym też, wydaje się przyjęcie ograniczenia

/3.15/

$$f_k(-\sigma_{ij}, \varphi_m) = f_k(\sigma_{ij}, \varphi_m); \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Biorąc pod uwagę powyższe własności funkcji f_k stwierdzamy, że każde z równań: $f_k = 0$ / $k = 1, 2, \dots, N$ /, opisuje w przestrzeni naprężeń powierzchnię walcową, o tworzących równoległych do linii ciśnień. Linia ciśnień jest osią symetrii tych powierzchni.

Układ nierówności /3.12/, opisuje podzbiór przestrzeni naprężeń ograniczony powierzchnią, na ogół nie gładką, nazywaną powierzchnią plastyczności. W ogólnym przypadku, wyróżniony podzbiór nie musi być obszarem wypukłym.

3.3.2. Układ niezależnych systemów poślizgu

Rozważmy sytuację, gdy zerowanie się jednej z funkcji f_k powoduje poślizg tylko na jednym systemie. Oznacza to, że liczba tych funkcji N , pokrywa się z liczbą systemów poślizgu M

$$/3.16/ \quad N = M.$$

Dla każdego ustalonego $r = 1, 2, \dots, M$, można teraz zrealizować proces plastycznej deformacji, w którym prędkość dysypacji opisana będzie wzorem

$$/3.17/ \quad D_{(r)}^p = \tau^{(r)} \cdot \dot{\gamma}^{(r)}$$

Funkcje f_k oznaczać będziemy w tym przypadku przez $f^{(r)}$, pamiętając że indeks r przebiega wartości: $1, 2, \dots, M$.

Mamy teraz do czynienia z sytuacją podobną do opisywanej prawem Schmid'a: poślizg na jednym systemie nie zależy od wartości efektywnych naprężeń ścinających na pozostałych systemach.

Mówimy wówczas o niezależnych systemach poślizgu. Oczywiście może mieć miejsce jednoczesny poślizg na kilku niezależnych systemach poślizgu. W takich przypadkach, dla uzyskania odpowiedzi na pytanie o to czy mamy do czynienia z układem niezależnych systemów poślizgu, pomocne będzie przyjęcie następującej definicji.

DEFINICJA 2: Układ systemów poślizgów nazwiemy układem niezależnych systemów poślizgu, jeżeli każdemu z nich można podporządkować nieujemną prędkość dysypacji energii

$$D_{(r)}^p = \tau^{(r)} \cdot \dot{\gamma}^{(r)} \geq 0 \quad ; \quad r = 1, 2, \dots, M.$$

3.3.3. Układ całkowicie sprzężonych systemów poślizgu

Gdy zerowanie się jednej funkcji f_k pociąga za sobą poślizg na kilku systemach, mamy do czynienia ze wzajemnym ich oddziaływaniem. Mówimy wówczas o sprzężonych systemach poślizgu. Jeżeli uplastycznienie kryształu jest związane z jednoczesnym poślizgiem na wszystkich systemach, dla których $\tau^{(r)}$ nie jest równe zero, to

/3.18/

$$N = 1,$$

a warunek plastyczności opisany jest jedną funkcją f .

Rozważmy mechanizm takiego, jednoczesnego poślizgu. Jeżeli znany jest stan naprężenia w kryształach, to znana jest wartość efektywnego naprężenia ścinającego $\tau^{(r)}$, dla każdego systemu poślizgu. Natomiast związek pomiędzy prędkością poślizgu $\dot{\gamma}^{(r)}$, a prędkościami poślizgów na wszystkich pozostałych systemach, może być zadany w sposób dowolny, ale uwzględniający symetrię sieci. Ustalając taki związek narzucamy pewne ograniczenia na charakter plastycznego płynięcia kryształu. W dalszym ciągu przyjmujemy następującą definicję.

DEFINICJA 3: Układ systemów poślizgu nazwiemy układem całkowicie

sprzężonych systemów poślizgu jeżeli, dla każdego $\tau^{(r)}/r = 1, 2, \dots, M$, różnego od zera

$$\frac{\dot{\gamma}^{(r)}}{\tau^{(r)}} = \dots = \frac{\dot{\gamma}^{(M)}}{\tau^{(M)}}.$$

Z układem sprzężonych systemów poślizgu mamy do czynienia w przypadku warunku plastyczności zaproponowanym przez R.v. Misesa [75]. Warunek ten zakłada, że kryształ ulega uplastycznieniu, gdy funkcja

/3.19/

$$F = \frac{1}{2} (k_{11} \sigma_{11}^2 + k_{22} \sigma_{22}^2 + \dots + k_{66} \sigma_{66}^2) + k_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + \dots + k_{45} \sigma_{44} \sigma_{55} + \dots + k_{56} \sigma_{55} \sigma_{66}$$

osiągnie pewną krytyczną wartość.

Współczynniki k_{11}, \dots, k_{66} powinny być tak dobrane, aby funkcja F zależała od ciśnienia hydrostatycznego i nie zmieniała się przy obrotach kryształu należących do jego grupy symetrii.

W rozdziale V pokażemy, że przy pewnym, ważnym z praktycznego punktu widzenia, doborze współczynników k_{11}, \dots, k_{66} będziemy mieli do czynienia z układem całkowicie sprzężonych systemów poślizgu.

3.3.4. Kryształy typu Schmid'a i typu Mises'a

Wprowadzone pojęcia umożliwiają przyjęcie następujących definicji.

DEFINICJA 4: Kryształem sztywno-idealnie plastycznym, z warunkiem plastyczności zadany funkcjami $f_k / k = 1, 2, \dots, N$, nazwiemy kryształ deformujący się przez poślizg, którego dowolny element materialny

1° pozostaje sztywny jeżeli, dla każdego $k = 1, 2, \dots, N$

$$f_k(\sigma_{ij}, \varphi_m) < 0,$$

lub

$$(\Delta) \quad f_k(\sigma_{ij}, \varphi_m) = 0 \quad \text{oraz} \quad \dot{f}_k(\sigma_{ij}, \varphi_m) < 0;$$

2° ulega deformacji, jeżeli dla pewnego k

$$(\Delta\Delta) \quad f_k(\sigma_{ij}, \varphi_m) = 0 \quad \text{oraz} \quad \dot{f}_k(\sigma_{ij}, \varphi_m) = 0.$$

Warunki (Δ) nazywać będziemy warunkami obciążenia kryształu. Systemy poślizgu na których spełnione są warunki ($\Delta\Delta$) nazywać będziemy aktywnymi systemami poślizgu.

DEFINICJA 5: Kryształem typu Schmid nazwiemy kryształ sztyw-
no-idealnie plastyczny, z warunkiem plastyczności
zadany funkcjami $f^{(r)}/r = 1, 2, \dots, M$,
którego układ systemów poślizgu jest układem nie-
zależnych systemów poślizgu.

DEFINICJA 6: Kryształem typu Misesa nazwiemy kryształ sztyw-
no-idealnie plastyczny, z warunkiem plastyczności
zadany funkcją f , którego układ systemów poślizgu jest układem całkowicie sprzężonych syste-
mów poślizgu.

Tak więc, niezależność systemów poślizgu, lub sposób w jaki ze sobą oddziałują, określa typ kryształu. W dalszej części pracy pokażemy, że dla danego typu kryształu mamy ustaloną postać prawa płynięcia. Natomiast funkcje $f^{(r)}/r = 1, 2, \dots, M$ lub f , które opisują warunek plastyczności, mogą być przyjęte w sposób dowolny, jeżeli tylko nie zależą od ciśnienia hydrostatycznego i spełniają warunek /3.15/.

3.3. Związki konstytutywne

3.3.1. Uogólnione prawo płynięcia dla kryształów typu Schmid

Rozważmy kryształ typu Schmid, z warunkiem plastyczności zadany funkcjami $f^{(r)}/r = 1, 2, \dots, M$. Aktualna orientacja sieci kryształu opisana jest trzema kątami Eulera φ_m .

Założmy, że na pewnych systemach poślizgu $(m^{(r)}, n^{(r)})$, na których występują efektywne naprężenia ścinające $\tau^{(r)}$, pojawiły się poślizgi propagujące się z prędkościami $\dot{\gamma}^{(r)}$.

Niech $\underline{\underline{S}}(x, t)$ będzie stanem naprężenia w rozważanym kryształe, a $\underline{\underline{L}}^p(x, t)$ odpowiednim polem plastycznej części gradientu prędkości. Interesować nas będzie zależność pola $\underline{\underline{L}}^p(x, t)$ od pola $\underline{\underline{S}}(x, t)$. Zwróćmy uwagę, że $\tau^{(r)}$ zdefiniowane wzorem /3.9/ można przedsta-

wić w postaci

$$/3.20/ \quad \tau^{(r)} = \delta_{ij} m_i n_j,$$

gdzie

$$/3.21/ \quad \delta_{ij} \equiv \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}.$$

Ponadto, przypomnijmy że

$$/3.22/ \quad L_{ij}^p = \sum_{\kappa=1}^M \gamma^{(\kappa)} m_i^{(\kappa)} n_j^{(\kappa)}.$$

Ponieważ dla kryształów Schmid'a, każdemu systemowi poślizgu można przyporządkować nieujemną prędkość dyspacji

$$/3.23/ \quad \tau^{(r)} \cdot \dot{\gamma}^{(r)} \geq 0; \quad r = 1, 2, \dots, M,$$

to wielkości

$$/3.24/ \quad \lambda^{(r)} \equiv \begin{cases} \dot{\gamma}^{(r)} / \tau^{(r)}, & \text{dla } \dot{f}^{(r)} = \dot{f}^{(r)} = 0, \\ 0, & \text{dla } \dot{f}^{(r)} < 0, \text{ lub} \\ & \dot{f}^{(r)} = 0 \text{ oraz } \dot{f}^{(r)} < 0, \end{cases}$$

również są nieujemne dla każdego $r = 1, 2, \dots, M$.

Możemy napisać, że

/3.25/

$$\dot{\gamma}^{(r)} = \lambda^{(r)} \tau^{(r)} ; \quad r = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie

/3.26/

$$\lambda^{(r)}(x, t) \geq 0.$$

Pomnożmy obustronnie równania /3.25/ przez diady $\underline{m}^{(r)} \otimes \underline{n}^{(r)}$
 $r = 1, 2, \dots, M$, a następnie zsumujmy je stronami.
 Otrzymamy równanie

/3.27/

$$\sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^{(r)} m_i^{(r)} n_j^{(r)} = \sum_{r=1}^M \lambda^{(r)} \tau^{(r)} m_i^{(r)} n_j^{(r)},$$

które po uwzględnieniu zależności /3.20/ i /3.22/ przyjmie
 postać związku

/3.28/

$$L_{ij}^p(x, t) = \sum \lambda^{(r)}(x, t) H_{ijkl}^{(r)}(t) \Delta_{kl}(x, t),$$

w którym

/3.29/

$$H_{ijkl}^{(r)}(t) \equiv m_i^{(r)}(t) n_j^{(r)}(t) m_k^{(r)}(t) n_l^{(r)}(t),$$

są składowymi tensorów czwartego rzędu $H_{ijkl}^{(r)}$, dla $r = 1, 2, \dots, M$.
 Związek /3.28/ nazywać będziemy ogólnionym prawem płynięcia
dla kryształów typu Schmid.

Składowe tensorów $H_{ij}^{(r)}$ mają następujące własności

/3.30/

$$H_{ijkl}^{(r)} = H_{klij}^{(r)},$$

$$H_{ijkk}^{(r)} = H_{iikk}^{(r)} = 0$$

i zależą od aktualnej orientacji sieci kryształu opisanej kątami φ_m . Zgodnie z definicją /3.29/, macierze $H_{ijkl}^{(r)}$ nie są symetryczne względem pierwszej, jak też względem drugiej, pary indeksów.

W związku /3.28/, mogą być jednak zastąpione przez macierze otrzymane z $H_{ijkl}^{(r)}$ przez symetryzację względem drugiej pary indeksów.

Należy zwrócić uwagę, że w klasycznej teorii plastyczności materiałów izotropowych prawo płynięcia mogło być dobierane do uprzednio przyjętego kryterium uplastycznienia. Tu, postać uogólnionego prawa płynięcia jest jednoznacznie opisana układem systemów poślizgu i nie może być przyjmowana dowolnie.

Zbadamy szczegółowo wnioski płynące ze wzoru /3.28/.

a/ Spin plastyczny kryształu typu Schmid.

Wyodrębnienie z pola $\underline{L}^p(x,t)$ części symetrycznej $d^p(x,t)$ i antysymetrycznej $\underline{\omega}^p(x,t)$ pozwala na sformułowanie następującego wniosku.

WNIOSEK 1: Dla dowolnego kryształu sztywno-idealnie plastycznego z układem niezależnych systemów poślizgu prawdziwe są dwie grupy równań konstytutywnych:

1° dla prędkości plastycznej deformacji

$$(*) \quad d_{ij}^p(x,t) = \sum_{n=1}^N \lambda^{(n)}(x,t) H_{(ij)kl}^{(r)}(t) \delta_{kl}(x,t)$$

2° dla spinu plastycznego

(*) (*)

$$\omega_{ij}^p(\underline{x}, t) = \sum_{r=1}^M \lambda^{(r)}(\underline{x}, t) H_{<ij>kl}^{(r)}(t) \delta_{kl}(\underline{x}, t),$$

w których

$$H_{(ij)kl}^{(r)} = \frac{1}{2} (H_{ijkl}^{(r)} + H_{jikl}^{(r)}),$$

$$H_{<ij>kl}^{(r)} = \frac{1}{2} (H_{ijkl}^{(r)} - H_{jikl}^{(r)}),$$

oraz

$$\lambda^{(r)}(\underline{x}, t) \geq 0, \text{ dla } r = 1, 2, \dots, M.$$

W tym miejscu należy wyjaśnić potrzebę wprowadzenia trzech dodatkowych równań konstytutywnych wiążących spin plastyczny $\underline{\omega}^p$ ze stanem naprężenia.

Jak wiadomo w materiałach poddanych dużym odkształceniom plastycznym, a następnie odciążonych, powstają samozrównoważone pola naprężeń resztkowych. Większość teorii dużych deformacji plastycznych zakłada, że dla każdej cząstki zdeformowanego ośrodka istnieje jej otoczenie, które po myślowym wycięciu z ciała i odciążeniu, znajdzie się w stanie beznaprężeniowym [64]. Założenie to nazywane jest hipotezą o istnieniu lokalnej konfiguracji odciążonej. Konfiguracja taka, zdefiniowana jest z dokładnością do sztywnego obrotu względem ciała, z którego została myślowo wycięta [54].

Wykazano [50], że dla ciał izotropowych można: albo postulować niezmienniczość równań konstytutywnych względem obrotów, albo też - z góry zadać obrót konfiguracji odciążonej, w dowolny sposób.

Inaczej wygląda sytuacja w przypadku ciał anizotropowych, a do takich należą badane kryształy. Teraz, prędkość obrotu włókien materialnych konfiguracji odciążonej względem głównych osi anizotropii materiału powinna być opisana trzema dodatko-

wymi równaniami konstytutywnymi [73]. W przypadku kryształu mamy do czynienia z obrotami jego włókien materialnych względem reperu kierunków sieci krystalicznej. Obroty te mogą być wywołane tylko plastyczną deformacją. Potrzebne są więc trzy dodatkowe równania wiążące spin plastyczny ze stanem naprężenia. Podsumowując, widzimy że równania (*) opisują klasyczne prawo płynięcia używane w teorii plastyczności kryształów sformułowanej przez R.Hilla i J.R.Rice'a [49]. Natomiast związki (***) stanowią trzy dodatkowe równania niezbędne przy formułowaniu teorii dużych deformacji plastycznych ośrodków anizotropowych.

b/ "Potencjały plastyczne" dla kryształów typu Schmid

Rozważmy kryształ typu Schmid.

Niech $k_c^{(r)}(\varphi_m) / r = 1, 2, \dots, M$, będą pewnymi, przyjmującymi wartości dodatnie, funkcjami kątów Eulera φ_m .

Założymy, że mamy do czynienia z pojedynczym poślizgiem na r-tym systemie. W kryształe pojawi się część plastyczna gradientu prędkości

/3.31/

$$L_{ij}^{(r)} = \lambda^{(r)} H_{ijkl}^{(r)} s_{kl}$$

Wówczas funkcja dziwięciu składowych tensora naprężenia:

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \dots, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ oraz trzech kątów Eulera: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

/3.32/

$$F^{(r)}(\sigma_{ij}, \varphi_m) = s_{ij} H_{ijkl}^{(r)}(\varphi_m) s_{kl} - [k_c^{(r)}(\varphi_m)]^2$$

pełni rolę potencjału dla wielkości $[\lambda^{(r)}]^{-1} L_{ij}^{(r)}$.

Zatem, dla dowolnego procesu deformacji kryształu typu Schmid'a, uogólnione prawo płynięcia można zapisać w postaci

$$/3.33/ \quad L_{ij}^P = \sum_{r=1}^M \lambda^{(r)} \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \delta_{ij}}$$

WNIOSEK 2: Dla dowolnego kryształu sztywno-idealnie plastycznego z układem niezależnych systemów poślizgu istnieje układ funkcji $F^{(r)}$ / $r = 1, 2, \dots, M$ /, zadanych wzorem /3.32/, takich że równania konstytutywne (*)-(**), dadzą się przedstawić w postaci

$$d_{ij}^P = 1/2 \sum_{r=1}^M \lambda^{(r)} \left(\frac{\partial F^{(r)}}{\partial \delta_{ij}} + \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \delta_{ji}} \right),$$

oraz

$$\omega_{ij}^P = 1/2 \sum_{r=1}^M \lambda^{(r)} \left(\frac{\partial F^{(r)}}{\partial \delta_{ij}} - \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \delta_{ji}} \right),$$

gdzie

$$\lambda^{(r)} \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, M.$$

c/ Warunek plastyczności dla kryształów typu Schmid'a, sformułowany z prawem płynięcia

Geometria układu systemów poślizgu, w sposób kategoriyczny przesądza o postaci prawa płynięcia dla kryształów typu Schmid'a

$$/3.34/ \quad d_{ij}^P = \sum_{r=1}^M \lambda^{(r)} H_{(ij)kl}^{(r)} \delta_{kl}$$

Oznacza to, że tensor d^p traktowany jako wektor w sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń, na ogół nie jest ortogonalny do powierzchni plastyczności^{x/}, opisanej funkcjami $f^{(\alpha)}$ / $\alpha = 1, 2, \dots, M$.

Interesować nas będzie warunek plastyczności, dla którego spełniony jest postulat ortogonalności. Pokażemy, że jest to warunek opisany więzami

$$/3.35/ \quad f^{(\alpha)}(\sigma_{ij}, \varphi_m) \leq 0,$$

gdzie, dla $\alpha = 1, 2, \dots, M$,

$$/3.36/ \quad f^{(\alpha)}(\sigma_{ij}, \varphi_m) \equiv F^{(\alpha)}\left(\frac{\sigma_{ij} + \sigma_{ji}}{2}, \varphi_m\right),$$

a funkcje $F^{(\alpha)}$ zadane są wzorem /3.32/.

Zgodnie z Wnioskiem 2, prawo płynięcia /3.34/, przyjmuje postać

$$/3.37/ \quad d_{ij}^p = \sum_{\alpha=1}^M \lambda^{(\alpha)} \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Rozważmy stan naprężenia w uplastycznionym kryształ, w otoczeniu którego powierzchnia plastyczności jest powierzchnią gładką. Oznacza to, że tylko jedna z funkcji $f^{(\alpha)}$ przyjmuje wartość zerową.

Założmy, że interesujący nas fragment powierzchni plastyczności opisany jest następująco

x/ Mamy na myśli te punkty powierzchni plastyczności w otoczeniu których jest ona powierzchnią gładką.

/3.38/

$$f^{(s)} = 0, \\ f^{(s)} < 0, \quad \text{dla } s = 2, 3, \dots, M.$$

Wówczas, zgodnie ze wzorem /3.24/

/3.39/

$$\lambda^{(s)} > 0, \\ \lambda^{(s)} = 0, \quad \text{dla } s = 2, 3, \dots, M.$$

Zatem, w badanym punkcie powierzchni plastyczności, wektor

/3.40/

$$d_{ij}^p = \lambda^{(s)} \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}}$$

jest do niej prostopadły.

Widzimy, że dla warunku /3.35-3.36/ spełniona jest zasada ortogonalności. Ponadto, zauważmy że jeżeli d_{ij}^p jest ortogonalny do pewnej powierzchni plastyczności, to zgodnie ze wzorem /3.34/, musi być ona utworzona przez warunek /3.35-3.36/.

WNIOSEK 3: Tensor \underline{d}^p , traktowany jako wektor w sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń, jest ortogonalny do powierzchni plastyczności dla kryształu typu Schmid, wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona opisana przez warunek plastyczności stowarzyszony z prawem płynięcia.

3.3.2. Uogólnione prawo płynięcia dla kryształów typu Misesa

Zajmiemy się kryształem sztywno-idealnie plastycznym typu Misesa. W kryształach tym mamy do czynienia z więzami zadanymi nierównością

/3.41/

$$f(\sigma_{ij}, \varphi_m) \leq 0$$

oraz warunkami opisującymi mechanizm jednoczesnego poślizgu

$$/3.42/ \quad \frac{\dot{\gamma}^{(n)}}{\tau^{(n)}} = \dots = \frac{\dot{\gamma}^{(M)}}{\tau^{(M)}}.$$

Wprowadzimy wielkość

$$/3.43/ \quad \frac{\lambda}{M} \equiv \begin{cases} \frac{\dot{\gamma}^{(n)}}{\tau^{(n)}} = \dots = \frac{\dot{\gamma}^{(M)}}{\tau^{(M)}}, & \text{dla } \dot{f} = \dot{f} = 0, \\ 0, & \text{dla } \dot{f} < 0, \text{ lub} \\ & \dot{f} = 0 \text{ oraz } \dot{f} < 0. \end{cases}$$

Ponieważ nierówność Clausiusa-Duhema /3.11/, w badanym przypadku przyjmie postać

$$/3.44/ \quad \frac{\lambda}{M} \sum_{\alpha=1}^M [\tau^{(\alpha)}]^2 \geq 0,$$

to wielkość λ jest nieujemną funkcją położenia i czasu. Możemy więc napisać, że

$$/3.45/ \quad \dot{\gamma}^{(\alpha)} = \frac{\lambda}{M} \tau^{(\alpha)} \quad ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie

$$/3.46/ \quad \lambda(x, t) \geq 0.$$

Mnożąc obustronnie równania /3.45/ przez diady $\underline{m}^{(\alpha)} \otimes \underline{n}^{(\alpha)}$ / $\alpha = 1, 2, \dots, M$ /, a następnie sumując je stronami, otrzymamy równanie

$$/3.47/ \quad \sum_{\alpha=1}^M \gamma^{(\alpha)} m_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} = \frac{\lambda}{M} \sum_{\alpha=1}^M \tau^{(\alpha)} m_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)},$$

które po uwzględnieniu zależności

$$/3.48/ \quad \tau^{(\alpha)} = \delta_{ij} m_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)}$$

oraz

$$/3.49/ \quad L_{ij}^p = \sum_{\alpha=1}^M \gamma^{(\alpha)} m_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)},$$

przyjmuje postać związku

/3.50/

$$L_{ij}^p(x, t) = \lambda(x, t) H_{ijkl}(t) \delta_{kl}(x, t)$$

W równaniu tym, wielkości

$$/3.51/ \quad H_{ijkl}(t) \equiv \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^M m_i^{(\alpha)}(t) n_j^{(\alpha)}(t) m_k^{(\alpha)}(t) n_l^{(\alpha)}(t)$$

są składowymi tensora czwartego rzędu \underline{H} .

Związek /3.50/ nazywać będziemy ogólnionym prawem płynięcia dla kryształów typu Misesa.

Składowe tensora \underline{H} mają te same własności co składowe tensorów $\underline{H}^{(\alpha)}$ /por./3.30//.

/3.52/

$$H_{ijkl} = H_{klij},$$

$$H_{ijkk} = H_{iikk} = 0.$$

Postać uogólnionego prawa płynięcia, w tym przypadku, jest jednoznacznie opisana układem systemów poślizgu i warunkiem /3.42/ określającym mechanizm jednoczesnego poślizgu.

Zbadamy szczegółowo wnioski wynikające ze wzoru /3.50/.

a/ Spin plastyczny kryształu typu Misesa

Rozkładając pole $L^p(x,t)$ na część symetryczną $d^p(x,t)$ i antysymetryczną $\omega^p(x,t)$ otrzymujemy następujący wniosek.

WNIOSEK 4: Dla kryształów sztywno-idealnie plastycznych typu

Misesa słuszne są dwa układy równań konstytutywnych:

1° dla prędkości plastycznej deformacji

$$(*) \quad d_{ij}^p(x,t) = \lambda(x,t) H_{(ij)kl}(t) S_{kl}(x,t)$$

2° dla spinu plastycznego

$$(**) \quad \omega_{ij}^p(x,t) = \lambda(x,t) H_{[ij]kl}(t) S_{kl}(x,t)$$

w których

$$H_{(ij)kl} \equiv \frac{1}{2} (H_{ijkl} + H_{jikl}),$$

$$H_{[ij]kl} \equiv \frac{1}{2} (H_{ijkl} - H_{jikl}),$$

oraz

$$\lambda(x,t) \geq 0.$$

b/ Uogólniony potencjał Misesa

Funkcję dziwięciu składowych tensora naprężenia: $\sigma_{11}, \sigma_{12},$

$\epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{13}, \epsilon_{31}$ oraz trzech kątów Eulera: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$,

/3.53/

$$\mathcal{F}(\epsilon_{ij}, \varphi_m) = \delta_{ij} H_{ijkl}(\varphi_m) \delta_{kl} - k^2(\varphi_m),$$

gdzie H_{ijkl} dane są wzorem /3.51/, a $k(\varphi_m)$ jest pewną funkcją o wartościach dodatnich, nazywać będziemy uogólnionym potencjałem Misesa.

WNIOSEK 5: Dla dowolnego kryształu sztywno-idealnie plastycznego typu Misesa, istnieje funkcja \mathcal{F} zadania wzorem /3.53/, taka że równania konstytutywne (X)-(XX) dadzą się przedstawić w postaci

$$d_{ij}^p = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ji}} \right)$$

oraz

$$\omega_{ij}^p = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ij}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ji}} \right),$$

gdzie

$$\lambda \geq 0.$$

c/ Warunek plastyczności dla kryształów typu Misesa, stowarzyszony z prawem płynięcia

Dysponując potencjałem $\mathcal{F}(\epsilon_{ij}, \varphi_m)$ możemy wprowadzić warunek plastyczności, który spełnia postulat ortogonalności. Ponieważ, prawo płynięcia dla kryształów typu Misesa ma postać

/3.54/

$$d_{ij}^p = \lambda H_{ijkl} \delta_{kl},$$

to poszukiwane kryterium uplastycznienia będzie następujące:

$$/3.55/ \quad f(\sigma_{ij}, \varphi_m) \equiv F\left(\frac{\sigma_{ij} + \sigma_{ji}}{2}, \varphi_m\right) = 0,$$

gdzie F zadane jest wzorem /3.53/. Istotnie, wówczas

$$/3.56/ \quad d_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Otrzymujemy też następujący, oczywisty wniosek,

WNIOSEK 6: Tensor d^p , traktowany jako wektor w sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń, jest ortogonalny do powierzchni plastyczności dla kryształu typu Misesa, wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona opisana przez warunek plastyczności stowarzyszony z prawem płynięcia.

3.3.3. Efekt "geometrycznego wzmocnienia/osłabienia" kryształów

Rozważmy proces rozciągania sztywno-idealnie plastycznego kryształu, dowolnego typu, z jednym systemem poślizgu /rys.5/. Stan naprężenia, zadany parametrem σ i kierunkiem rozciągania \underline{N} można opisać tensorem o składowych

$$/3.57/ \quad \sigma_{ij} = \sigma N_i N_j.$$

Nachylenie płaszczyzny poślizgu do kierunku \underline{N} określa jeden kąt φ .

Warunek plastyczności

$$/3.58/ \quad f(\sigma, \varphi) = 0,$$

zależy w sposób istotny zarówno od $\dot{\epsilon}$, jak i od $\dot{\varphi}$. Oznacza to, że

$$/3.59/ \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{\epsilon}} \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \neq 0.$$

Ponieważ

$$/3.60/ \quad \dot{f}(\dot{\epsilon}, \dot{\varphi}) = \frac{\partial f}{\partial \dot{\epsilon}} \dot{\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} = 0,$$

to

$$/3.61/ \quad \dot{\epsilon} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\epsilon}} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} \geq 0,$$

jeżeli tylko

$$/3.62/ \quad \dot{\varphi} \neq 0$$

Każda z dwóch nierówności /3.61/, opisuje pojawienie się "wzmocnienia" lub "osłabienia" rozciąganego, idealnie plastycznego monokryształu. Zjawisko to, wywołane obrotem płaszczyzny poślizgu, jest dobrze znane [98].

Bardzo ważny jest wpływ tego zjawiska na zachowanie się konglomeratu ziaren sztywno-idealnie plastycznych, a w szczególności na lokalizację odkształceń plastycznych w polikryształach [2].

Rozdział IV

KRYSZTAŁY OPISANE PRAWEM SCHMIDA

4.1. Prawo Schmid

Rozważmy kryształ sztywno-idealnie plastyczny typu Schmid. Dla takiego kryształu warunek plastyczności stowarzyszony z prawem płynięcia generowany jest przez układ nierówności

$$/4.1/ \quad f^{(\alpha)}(\sigma_{ij}, \varphi_m) \equiv \mathcal{F} \left(\frac{\sigma_{ij} + \sigma_{ji}}{2}, \varphi_m \right) \leq 0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie

$$/4.2/ \quad \mathcal{F}^{(\alpha)} = s_{ij} H_{ijkl}^{(\alpha)}(\varphi_m) \Delta \epsilon_{kl} - [k_c^{(\alpha)}(\varphi_m)]^2$$

a $k_c^{(\alpha)}(\varphi_m)$ są pewnymi funkcjami przyjmującymi wartości dodatnie. Ograniczmy się do sytuacji, gdy

$$/4.3/ \quad k_c^{(\alpha)}(\varphi_m) = k_c^{(\alpha)} = \text{const} \quad ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

Teraz układ więzów /4.1/ można przedstawić w postaci

$$/4.4/ \quad s_{ij} \mathcal{H}_{ijkl}^{(\alpha)} \Delta \epsilon_{kl} \leq [k_c^{(\alpha)}]^2; \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie

$$/4.5/ \quad \mathcal{H}_{ijkl}^{(\alpha)} \equiv (H_{ijkl}^{(\alpha)} + H_{jike}^{(\alpha)} + H_{ijek}^{(\alpha)} + H_{jilk}^{(\alpha)}).$$

Każda z wielkości $H_{ijkl}^{(r)}$ spełnia warunki x/

$$\begin{aligned} /4.6/ \quad H_{ijkl}^{(r)} &= H_{klij}^{(r)} = H_{jikl}^{(r)}, \\ H_{ijkl} \delta_{kl} &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$/4.7/ \quad H_{ijkl}^{(r)} = m_i^{(r)} n_j^{(r)} m_k^{(r)} n_l^{(r)}$$

oraz

$$/4.8/ \quad s_{ij} m_i^{(r)} n_j^{(r)} = \tau^{(r)},$$

to lewe strony nierówności /4.4/, można przedstawić w postaci

$$/4.9/ \quad s_{ij} H_{ijkl}^{(r)} \delta_{kl} = [\tau^{(r)}]^2.$$

Zatem układ nierówności /4.4/ jest równoważny następującemu:

$$/4.10/ \quad |\tau^{(r)}| \leq k_c^{(r)}; \quad r = 1, 2, \dots, M.$$

Układ ten jest znany jako prawo Schmida. Prawo to było postu-
lowane w roku 1924 w oparciu o badania mikroskopowe. Na jego
podstawie weryfikowano budowane później modele oddziaływań na
poziomie submikroskopowym /por. pracę M. PEACHA i J.S. KOEHLERA
[82]/.

x/ Identyczne warunki spełniają tensory plastycznej anizotropii
rozważane w pracach [80-81]

Wielkości $k_c^{(\sigma)}$ nazywane są krytycznymi naprężeniami Schmi-
da. Systemy poślizgu, na których $\tau^{(\sigma)}$ przyjmuje wartość $k_c^{(\sigma)}$ nazy-
wane są aktywnymi systemami poślizgu.

Generowany przez układ więzów /4.10/ warunek plastyczności
jest warunkiem odcinkowo-liniowym w przestrzeni naprężeń.
W przestrzeni tej każda z nierówności /4.10/ opisuje zbiór
ograniczony przez parę hiperpłaszczyzn równoległych i równo-
oddalonych od osi ciśnienia. Część wspólna tych zbiorów tworzy
nieskończenie długi graniastosłup o osi równoległej do osi ciś-
nienia.

Stan naprężenia, który leży tylko na jednej ścianie graniasto-
słupa, wywołuje plastyczne płynięcie na jednym systemie pośliz-
gu. Znajdując się na krawędzi graniastosłupa /narożu plastycz-
nym/ mamy do czynienia z poślizgiem na dwóch lub większej
liczbie systemów.

Przyjęcie dla pewnego elementu materialnego kryształu
więzów /4.10/ oznacza, że:

1^o jeżeli dla każdego $\sigma = 1, 2, \dots, M$

$$/4.11/ \quad |\tau^{(\sigma)}| < k_c^{(\sigma)},$$

to element materialny pozostaje ciałem sztywnym;

2^o jeżeli dla niektórych σ

$$/4.12/ \quad |\tau^{(\sigma)}| < k_c^{(\sigma)},$$

a dla pozostałych

$$/4.13/ \quad |\tau^{(\sigma)}| = k_c^{(\sigma)} \quad \text{oraz} \quad \frac{\dot{\tau}^{(\sigma)}}{|\tau^{(\sigma)}|} < 0,$$

to element ulega odciążeniu;

3° jeżeli dla conajmniej jednego τ

$$/4.14/ \quad |\tau^{(\tau)}| = k_c^{(\tau)} \quad \text{oraz} \quad \dot{|\tau^{(\tau)}|} = 0,$$

to element ulega uplastycznieniu.

Ponadto są słuszne dwa układy równań konstytutywnych

$$/4.15/ \quad d_{ij}^p = \sum_{\tau=1}^M \lambda^{(\tau)} H_{\langle ij \rangle k l} \Delta_{kl}$$

oraz

$$/4.16/ \quad \omega_{ij}^p = \sum_{\tau=1}^M \lambda^{(\tau)} H_{\langle ij \rangle k l} \Delta_{kl}.$$

Widzimy, że dla stanów naprężenia, które znajdują się tylko na jednej ścianie powierzchni plastyczności, kierunek d_{ij}^p i prędkość poślizgu $\dot{\gamma}^{(\tau)}$ na jedynym aktywnym systemie są określone jednoznacznie. Dla stanów naprężenia, które znajdują się w narożu plastycznym, kierunek d_{ij}^p oraz prędkości $\dot{\gamma}^{(\tau)}$ na aktywnych systemach poślizgu nie są określone jednoznacznie. Wybór właściwych wymaga przyjęcia dodatkowego kryterium. Do obliczeń przyjmowane jest jedno z dwóch kryteriów^{x/}:

1° G.I.Taylor'a zasada najmniejszej prędkości poślizgu [104],

2° J.P.W.Bishop'a i R.Hilla zasada największej pracy [9].

W następnym punkcie pracy ograniczymy się do kryształów z jednym systemem poślizgu. Dla takich kryształów można zbudować zamknięty układ równań bez dodatkowych założeń. Układ ten będzie równoważny otrzymanemu z teorii R.Hilla i J.Rice'a, dla

x/ Sformułowane w punkcie 5.4.3. /przypadek b./.

przypadku kryształów sztywno-idealnie plastycznych. Pokażemy, że rozwiązanie zagadnienia jednoosiowego rozciągania kryształu, daje wyniki identyczne z wynikami otrzymanymi na podstawie prostych geometrycznych rozważań [98].

4.2. Teoria pojedynczego poślizgu

4.2.1. Podstawowy układ równań

Rozważmy kryształ sztywno-idealnie plastyczny z jednym systemem poślizgu. Kryształ podlega oddziaływaniom zewnętrznym, opisanym przez naprężeniowe i kinematyczne warunki początkowo-brzegowe. Ponadto, może nań oddziaływać pole sił masowych $f(x,t)$.

Własności kryształu opisują: gęstość ρ , krytyczne naprężenie Schmid'a k oraz stałe mikrostrukturalne \hat{m}_α i \hat{n}_α , na podstawie których można obliczyć składowe wersorów m i n

$$\begin{aligned} /4.17/ \quad m_i(t) &= R_{\alpha i}(t) \hat{m}_\alpha, \\ n_i(t) &= R_{\alpha i}(t) \hat{n}_\alpha. \end{aligned}$$

Macierz obrotu reperu kierunków sieci $R_{\alpha i}(t)$ określona jest przez podanie trzech kątów Eulera /Dodatek A/.

W procesie plastycznego płynięcia stan kryształu opisany jest przez: trzy składowe pola prędkości $v_i(x,t)$, trzy kąty Eulera $\varphi_m(t)$ oraz sześć składowych pola naprężenia $\sigma_{ij}(x,t)$.

Sformułujemy zamknięty układ równań, z którego można będzie wyznaczyć powyższe wielkości. Zaczniemy od równań wiążących wielkości kinematyczne ze stanem naprężenia.

W rozdziale II przyjęliśmy, że

$$/4.18/ \quad L_{ij}(x,t) = L_{ij}^p(x,t) + \omega_{ij}^p(t).$$

Trzy pola występujące w powyższym związku to:

- pole całkowitego gradientu prędkości

$$/4.19/ \quad L_{ij}(\underline{x}, t) = \mathcal{V}_{i,j}(\underline{x}, t),$$

- pole części plastycznej gradientu prędkości

$$/4.20/ \quad L_{ij}^p(\underline{x}, t) = \lambda(\underline{x}, t) H_{ijkl}(t) \delta_{kl}(\underline{x}, t),$$

w którym

$$/4.21/ \quad H_{ijkl}(t) = m_i(t) n_j(t) m_k(t) n_l(t),$$

A_{ij} są składowymi dewiatora naprężenia, a $\lambda(\underline{x}, t)$ - nieujemną funkcją położenia i czasu;

- jednorodne pole spinu wywołanego sztywnym obrotem kryształu jest utożsamione z polem spinu reperu kierunków sieci

$$/4.22/ \quad \omega_{ij}^R(t) = \omega_{ij}^L(t),$$

przy czym to ostatnie zdefiniowane jest wzorem

$$/4.23/ \quad \omega_{ij}^L(t) = \dot{R}_{ik}(t) R_{jk}(t).$$

Podstawiając /4.19-4.23/ do /4.18/ otrzymujemy układ 9 równań wiążących pochodne pola prędkości z polem dewiatora naprężenia

$$/4.24/ \quad \mathcal{V}_{i,j} = \lambda H_{ijkl}(\varphi_m) \delta_{kl} + \dot{R}_{ik}(\varphi_m) R_{jk}(\varphi_m).$$

Kolejnym równaniem będzie warunek plastyczności stowarzyszony z prawem płynięcia

$$/4.25/ \quad s_{ij} H_{ijkl}(\varphi_m) s_{kl} - k_c^2 = 0,$$

w którym

$$/4.26/ \quad H_{ijkl} = \frac{1}{4} (H_{ijkl} + H_{jikl} + H_{ijlk} + H_{jilk}).$$

Dla ustalonej orientacji sieci kryształu względem kierunków głównych tensora naprężenia, warunek /4.25/ opisuje w przestrzeni naprężeń parę równoległych hiperpłaszczyzn. Są one jednakowo oddalone od hiperpłaszczyzny rozpiętej na osi ciśnienia i prostej na której leżą stany jednoosiowego rozciągania w kierunku równoległym, bądź prostopadłym do płaszczyzny poślizgu. Stany naprężenia leżące na wyróżnionej hiperpłaszczyźnie nie mogą spowodować uplastycznienia kryształu. Dołączając do /4.24/ i /4.25/ równania ruchu otrzymujemy układ 13 równań

$$\sigma_{ij,i} + \rho f_j = \rho \dot{v}_j,$$

/4.27/

$$v_{i,j} = \lambda H_{ijkl}(\varphi_m) s_{kl} + R_{ik}(\varphi_m) R_{jk}(\varphi_m),$$

$$s_{ij} H_{ijkl}(\varphi_m) s_{kl} - k_c^2 = 0,$$

na 13 nieznanach wielkości: v_i , φ_m , σ_{ij} oraz λ .

Układ ten możemy rozwiązać jeżeli znamy odpowiednie warunki początkowo-brzegowe narzucone na pole prędkości, stan naprężenia i orientację kryształu. Warunki te dla $v_i(x,t)$ i $\sigma_{ij}(x,t)$ zadajemy w sposób standardowy, natomiast dla kątów $\varphi_m(t)$ wystarczy zadać warunki początkowe

/4.28/

$$\varphi_m(t_0) = \varphi_m^0 ; \quad m = 1, 2, 3.$$

Warunek plastyczności /4.25/ można zastąpić jego różniczkową postacią.

/4.29/

$$s_{ij} \mathcal{H}_{ijkl}(\varphi_m) s_{ij} + \frac{1}{2} s_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}_{ijkl}(\varphi_m)}{\partial \varphi_n} \dot{\varphi}_n s_{kl} = 0.$$

Równanie /4.29/ nazywane jest równaniem zgodności warunku plastyczności z prawem płynięcia.

4.2.2. Przypadek pól jednorodnych

Ze względu na ewentualne zastosowanie otrzymanych wyników do analizy zachowania się polikryształów, szczególnie ważny jest opis zmian orientacji sieci wywołanych jednorodną deformacją kryształu, w którym panuje jednorodny stan naprężenia. Jeżeli ograniczymy się do procesów quasistatycznych, to pole prędkości można wyeliminować z rozważań.

Zauważmy, że teraz zarówno równania ruchu /3.3/, jak i związki kinematycznej zgodności /2.24/, spełnione są tożsamościowo. Ponadto z uwagi na nieściśliwość kryształu deformującego się przez poślizg, tensor prędkości deformacji opisany jest przez 5 niezależnych składowych d_{ij} .

Żałómy, że w procesie jednorodnej deformacji kryształu zadana jest prędkość rozciągania, ściskania lub ścinania. Oznacza to, że znane są pewne składowe d_{ij} .

Zagadnienie analizy kryształu, w którym panuje jednorodny stan naprężenia i prędkości deformacji, można sformułować następująco.

Danych jest $n/n = 4, 2, \dots, 5$ składowych $d_{ij}(t)$ oraz

($5-n$) składowych $\Delta_{ij}(t)$, poszukujemy pozostałych składowych $d_{ij}(t)$, $s_{ij}(t)$ oraz wielkości $\varphi_m(t)$.

Ze względu na możliwość "geometrycznego osłabienia" kryształu, wszystkich składowych $\Delta_{ij}(t)$ zadawać nie można.

Wykluczamy też sytuację, w której jeden z kierunków głównych tensora $\underline{\Delta}(t)$ jest prostopadły bądź równoległy do płaszczyzny ścinania. Sytuacja ta uniemożliwia jakąkolwiek deformację kryształu.

W przypadku pól niejednorodnych, równania /4.27/ były uzupełniane warunkami początkowo-brzegowymi narzuconymi na pole naprężenia i pole prędkości. Teraz, zamiast warunków nakładanych na pole prędkości, pojawiają się więzy narzucone na całkowitą prędkość obrotu włókien materialnych kryształu /por. p.2.3.6./.

Po tych uwagach widzimy, że układ równań /4.27/ redukuje się do następującego układu 9 równań:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \lambda H_{\langle ij \rangle kl}(\varphi_m) s_{kl}, \\ \omega_{ij} &= \lambda H_{\langle ij \rangle kl}(\varphi_m) s_{kl} + R_{ik}(\varphi_m) R_{jk}(\varphi_m), \\ s_{ij} \mathcal{H}_{ijkl}(\varphi_m) s_{kl} - k_c^2 &= 0, \end{aligned}$$

który łącznie z 3 równaniami więzów na całkowity spin kryształu, stanowi komplet równań dla 12 niewiadomych /np. dla: s_{ij} , ω_{ij} , φ_m , λ , jeżeli zadane są wszystkie składowe d_{ij} /. Dodatkowo 3 równania więzów, dla przypadku rozciągania kryształu, mają postać^{x/}:

$$/4.31/ \quad [\omega_{ij} + (\delta_{ik} - N_i N_k) d_{ij}] N_j = 0,$$

x/ Przypominamy, że tylko 2, spośród napisanych formalnie 3 równań /4.31/, to równania niezależne.

/4.32/

$$N_i \epsilon_{ijk} \omega_{jk} = 0$$

gdzie N_i są składowymi wektora równoległego do kierunku rozciągania.

4.2.3. Analiza rozciąganego monokryształu

Sieci kryształów kadmu, cynku, magnezu reprezentują typ sieci heksagonalnej zwartej /rys.1/. W rozciąganych monokryształach tych metali poślizg następuje na płaszczyźnie, na której leży sześciokątna podstawa komórki sieciowej. Jedną z trzech przekątnych sześciokąta określa kierunek poślizgu. Oznacza to, że na ogół kierunki m, n i kierunek N nie leżą w jednej płaszczyźnie [98].

W dalszym ciągu rozpatrzmy sytuację wyidealizowaną, przedstawioną na rys.9. Znajdujący się w płaskim stanie odkształcenia monokryształ, o długości początkowej

/4.33/

$$l(t_0) = l_0$$

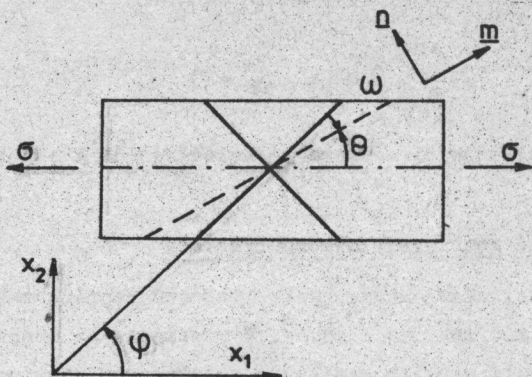
jest rozciągany w kierunku N równoległym do osi x_1 .

Kąt $\varphi(t)$ opisuje nachylenie pierwszego z kierunków reperu sieci $\{a_i\}$ do osi x_1 , a kąt $\Theta(t)$ - nachylenie płaszczyzny poślizgu do tej osi. Oba kąty zmieniają się w procesie deformacji, natomiast ich różnica

/4.34/

$$\omega = \varphi(t) - \Theta(t)$$

jest wielkością stałą dla badanego monokryształu.



Rys.9. Rozciąganie wyidealizowanego monokryształu z jednym systemem poślizgu.

Zakładamy, że w procesie rozciągania znana jest aktualna długość monokryształu $l(t)$. Zatem znana jest składowa

$$/4.35/ \quad d_{11} = \frac{\dot{l}}{l} = \dot{\epsilon}(t)$$

tensora prędkości deformacji.

Ponadto przyjmiemy, że

$$/4.36/ \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0,$$

natomiast

$$/4.37/ \quad \sigma_{11} = \sigma(t)$$

jest nieznanym naprężeniem rozciągającym. Oprócz $\sigma(t)$ poszukiwać będziemy $d_{22}(t)$, $d_{21}(t)$ oraz kąta $\Theta(t)$.

Wielkości te obliczymy korzystając z równań /4.30-4.32/, a otrzymane wyniki porównamy ze znanymi z literatury [98].

a/ Wyniki obliczeń

Wszystkie wielkości, niezbędne do sformułowania układu równań /4.30-4.32/, podane są w Dodatku B. Sam układ przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 d &= -d_{22} = \frac{1}{4} \lambda \bar{\sigma} \sin^2 2\theta, \\
 /4.38/ \quad d_{12} &= -\frac{1}{8} \lambda \bar{\sigma} \sin 4\theta, \\
 \omega_{12} &= -\frac{1}{4} \lambda \bar{\sigma} \sin 2\theta - \dot{\theta}, \\
 \bar{\sigma} \sin \theta \cos \theta - k_c &= 0, \\
 \omega_{12} - d_{12} &= 0.
 \end{aligned}$$

Rozwiązując go otrzymamy

$$\begin{aligned}
 d_{22} &= -d, \\
 /4.39/ \quad d_{12} &= -d \operatorname{ctg} 2\theta, \\
 \bar{\sigma} &= \frac{k_c}{\sin \theta \cos \theta}, \\
 \lambda &= \frac{4d}{\bar{\sigma} \sin^2 2\theta}
 \end{aligned}$$

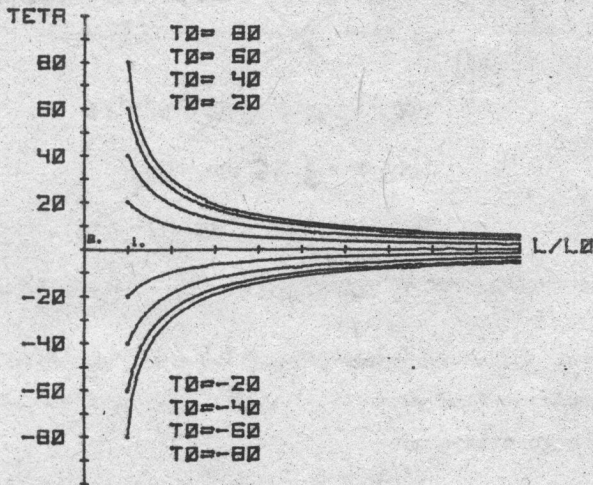
oraz

$$/4.40/ \quad \dot{\theta} = -d \operatorname{tg} \theta.$$

Ostatnie równanie przy warunku początkowym

$$/4.50/ \quad \theta(t_0) = \theta_0$$

w pełni opisuje obrót płaszczyzny rozciąganego monokryształu. Wykresy zależności $\theta - \lambda_0$ dla różnych początkowych wartości kąta θ_0 pokazano na rys. 10.



Rys. 10. Zależność kąta θ od wydłużenia λ_0 dla różnych wartości początkowych θ_0 .

Równanie zgodności /4.29/ ma teraz postać

$$/4.51/ \quad \dot{\epsilon} \sin 2\theta + 2\theta \dot{\epsilon} \cos 2\theta = 0.$$

Korzystając z /4.51/ można pokazać, że

$$/4.52/ \quad \lambda = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^2} \frac{1}{\sin^2 \theta \cos 2\theta}.$$

Oznacza to, że λ przyjmuje wartości dodatnie, jeżeli

$$/4.53/ \quad \dot{\epsilon} < 0, \quad \text{dla} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

oraz

/4.54/

$$\dot{\epsilon} > 0, \quad \text{dla} \quad \frac{\pi}{4} < \Theta < \frac{\pi}{2}.$$

Mamy więc do czynienia z dobrze znanym efektem "geometrycznego wzmocnienia/osłabienia".

Zwróćmy też uwagę, że dla kąta Θ równego 45° prędkość odkształceń postaciowych zmienia znak /wzór /4.39//. Zatem, jeżeli $\Theta_0 > 45^\circ$, to mamy do czynienia ze zjawiskiem zmiany kierunku ścinania włókien materialnych w procesie rozciągania monokryształu.

b/ Porównanie ze znanymi wynikami

Już w latach dwudziestych wyprowadzono, na podstawie prostych geometrycznych rozważań, związek pomiędzy początkową i aktualną długością rozciąganego monokryształu, a początkowym i aktualnym położeniem płaszczyzny poślizgu [98]:

/4.55/

$$\frac{l}{l_0} = \frac{\sin \Theta_0}{\sin \Theta}.$$

Pokażemy, że ten sam wynik można uzyskać z otrzymanego uprzednio wzoru

/4.56/

$$\dot{\Theta} = -d \operatorname{tg} \Theta.$$

Istotnie, ponieważ

/4.57/

$$d = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt},$$

to wzór /4.56/ można napisać w postaci

$$/4.58/ \quad \operatorname{ctg} \theta d\theta = -\frac{1}{l} dl.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$/4.59/ \quad |\sin \theta| \cdot l = |\sin \theta_0| \cdot l_0.$$

Ponieważ kąty θ i θ_0 muszą być tego samego znaku, to wzór /4.59/ jest równoważny znanemu z literatury związkowi /4.55/.

Pokazaliśmy uprzednio, że naprężenie rozciągające σ jako funkcja prędkości rozciągania monokryształu $\dot{\epsilon}_0$, może rosnąć lub maleć, zależnie od orientacji płaszczyzny poślizgu względem kierunku rozciągania /wzory /4.53-4.54//.

Okazuje się, że sprowadzając powyższą funkcję do zależności pomiędzy naprężeniem nominalnym P/A_0 , odniesionym do początkowej wartości pola przekroju poprzecznego monokryształu A_0 , a jego względnym wydłużeniem

$$/4.60/ \quad \epsilon = \frac{l-l_0}{l_0}.$$

Otrzymamy efekt "geometrycznego osłabienia", niezależnie od orientacji płaszczyzny poślizgu. Istotnie, podstawiając /4.39/ do otrzymanego poprzednio wzoru

$$/4.61/ \quad \sigma = \frac{k_c}{\sin \theta \cos \theta}$$

i biorąc pod uwagę, że aktualna wartość pola przekroju poprzecznego A związana jest z A_0 warunkiem nieściśliwości

/4.62/

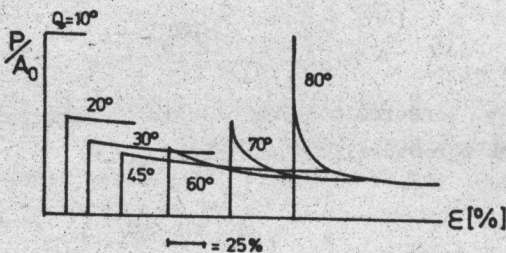
$$A_0 l_0 = A l,$$

otrzymamy zależność

/4.63/

$$\frac{P}{A_0} = \frac{k_c}{\sin \theta_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{(1+\epsilon)^2}}},$$

znaną z literatury [98].



Rys.11. Teoretyczne krzywe naprężenie - odkształcenie [wg [98]].

4.3. Uogólnienie prawa Schmid'a

Klasyczne prawo Schmid'a, jako stowarzyszone z prawem płynięcia

/4.64/

$$d_j = \sum_{k=1}^N \lambda^{(k)} H_{(ij)kl} \Delta_{kl}$$

spełnia "zasadę ortogonalności" sformułowaną we Wniosku 3.

Zauważono, że dla niektórych kryształów powyższa zasada przesłata być słuszna [2], [91].

Możliwość opisu takich kryształów tkwi w innym wyborze funkcji $f^{(m)}(\sigma_{ij}, \varphi_m)$ definiujących warunek plastyczności.

Wprowadzony model kryształu sztywno-idealnie plastycznego można traktować jako idealizację kryształu o własnościach sprężystych i plastycznych, którego odkształcenia sprężyste są zaniedbywalnie małe w porównaniu z plastycznymi. W tak rozumianym modelu, anizotropowe kryterium uplastycznienia powinno zależeć nie tylko od wzajemnej orientacji systemów poślizgu, ale i od anizotropii własności sprężystych.

Założmy, że badany kryształ znajduje się w stanie sprężystym. Pod wpływem naprężenia σ_{ij} powstaje w nim odkształcenie

$$/4.65/ \quad \epsilon_{ij}^e = S_{ijkl} \sigma_{kl},$$

związane z σ_{ij} tensorem modułów podatności sprężystej S_{ijkl} . Podobnie jak wprowadziliśmy wielkości

$$/4.66/ \quad \tau^{(r)} = m_r n_j^{(r)} \Delta_{ij} ; \quad r = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie Δ_{ij} jest dewiatorem σ_{ij} , możemy wprowadzić odkształcenia postaciowe na r -tym systemie poślizgu

$$/4.67/ \quad \gamma_e^{(r)} = m_r n_j^{(r)} \epsilon_{ij}^e ; \quad r = 1, 2, \dots, M,$$

wywołane naprężeniem σ_{ij} .

Odkształcenie $\gamma_e^{(r)}$ w materiale sprężysto anizotropowym, może być wywołane zarówno przez dewiator Δ_{ij} , jak i przez część kulistą tensora σ_{ij} . W dalszym ciągu interesować nas będzie tylko ta część odkształcenia $\gamma_e^{(r)}$ która powstaje pod wpływem Δ_{ij} , a mianowicie

/4.68/

$$\gamma_{ed}^{(\nu)} = m_i n_j^{(\nu)} S_{ijk} S_k.$$

Przyjmijmy następujący warunek plastyczności

/4.69/

$$f(\sigma_{ij}, \varphi_m) = \prod_{\nu=1}^M f^{(\nu)}(\sigma_{ij}, \varphi_m) = 0,$$

w którym

/4.70/

$$f^{(\nu)}(\sigma_{ij}, \varphi_m) = \tau^{(\nu)} \gamma_{ed}^{(\nu)} - h_c^{(\nu)} \leq 0;$$

$$\nu = 1, 2, \dots, M,$$

a $h_c^{(\nu)}$ jest krytyczną wartością wyrażenia $\tau^{(\nu)} \gamma_{ed}^{(\nu)}$ otrzymaną w próbie ścinania na r -tym systemie poślizgu. W ten sposób największa z liczb $\tau^{(\nu)} \gamma_{ed}^{(\nu)}$, dla $\nu = 1, 2, \dots, M$, stanowi miarę wyciężenia kryształu. Podstawiając /4.66/ i /4.68/ do /4.70/ dostaniemy

/4.71/

$$f^{(\nu)}(\sigma_{ij}, \varphi_m) = \sigma_{ij} \mathcal{H}_{ijpq}^{(\nu)} S_{pqr} S_r - h_c^{(\nu)} \leq 0,$$

gdzie

/4.72/

$$\mathcal{H}_{ijpq}^{(\nu)} = \frac{1}{4} (H_{ijpq}^{(\nu)} + H_{jipq}^{(\nu)} + H_{ijqp}^{(\nu)} + H_{jiqp}^{(\nu)}),$$

$$H_{ijpq}^{(\nu)} = m_i n_j^{(\nu)} m_p^{(\nu)} n_q^{(\nu)},$$

dla $\nu = 1, 2, \dots, M$.

Wprowadzone kryterium uplastycznienia nie jest stowarzyszone z prawem płynięcia /4.64/. Dlatego też, w ogólnym przypadku, nachylenie d_{ij}^p do powierzchni plastyczności będzie zależało od włas-

ności sprężystych materiału.

Kwadratowa aproksymacja wprowadzonego warunku plastyczności będzie szczegółowo zbadana w punkcie 5.3. następnego rozdziału.

Należy jeszcze wyjaśnić dlaczego w przyjętym kryterium uplastycznienia pominięliśmy pracę dewiatora Δ_{ij} na odkształceniach postaciowych wywołanych przez kulistą część tensora naprężenia. Otóż każda miara wyężenia materiału powinna zawsze przyjmować wartości dodatnie. Pokażemy, że tak jest w przypadku wyrażenia $\tau^{(r)} \delta_{ed}^{(r)}$. Istotnie, ponieważ dla dowolnego Δ_{ij}

$$/4.73/ \quad \Delta_{ij} S_{ijkl} \delta_{kl} \geq 0,$$

to dla

$$/4.74/ \quad \Delta_{ij} = \tau^{(r)} (m_i^{(r)} n_j^{(r)} + m_j^{(r)} n_i^{(r)}),$$

mamy

$$/4.75/ \quad \tau^{(r)} \delta_{ed}^{(r)} \geq 0.$$

Natomiast wyrażenia $\tau^{(r)} \delta_e^{(r)}$ mogą przyjmować wartości ujemne ponieważ praca Δ_{ij} na odkształceniach wywołanych ciśnieniem hydrostatycznym σ może być dodatnia lub ujemna w zależności od znaku σ . Na fakt ten zwrócił uwagę J. RYCHLEWSKI w pracy [92]. To, że odkształcenia postaciowe wywołane kulistym stanem naprężenia mogą być znaczne wykazały badania J.P. BOEHLERA i A. SAWCZUKA [13] na skałach osadowych, które ulegały uplastycznieniu pod wpływem odpowiednio dużego ciśnienia hydrostatycznego.

Sytuacja jest zupełnie inna w przypadku kryształów deformujących się przez poślizg. Plastyczna nieściśliwość takich kryształów powoduje, że ciśnienie hydrostatyczne nie może w nich wywołać dyspacji energii /por. wzór /3.8//.

Rozdział V

KRYSTAŁY OPISANE WARUNKIEM MISESA

5.1. Warunek Misesa

W punkcie 3.2.3. podaliśmy przykład kryształów sztywno-idealnie plastycznych z układem sprzężonych systemów poślizgu. Były to kryształy dla których spełniony jest warunek plastyczności zaproponowany przez R.v.Misesa [75]. Zgodnie z tym warunkiem, kryształ ulega plastycznej deformacji gdy następująca kwadratowa funkcja naprężeń:

$$F = \frac{1}{2} (k_{11} \epsilon_{11}^2 + k_{22} \epsilon_{22}^2 + \dots + k_{66} \epsilon_{13}^2) + k_{12} \epsilon_{11} \epsilon_{22} + \dots + k_{14} \epsilon_{11} \epsilon_{12} + \dots + k_{56} \epsilon_{23} \epsilon_{13},$$

osiągnie pewną krytyczną wartość. Współczynniki k_{ij} / $i, j = 1, 2, \dots, 6$ / powinny być tak dobrane, aby

a/ funkcja F nie zależała od części kulistej tensora naprężenia;

b/ funkcja F nie ulegała zmianie po zastąpieniu układu współrzędnych innym, ale tak samo zorientowanym względem kierunków sieci kryształu.

Po uwzględnieniu powyższych ograniczeń część współczynników zniknie, a pozostałe można będzie wyznaczyć z doświadczeń.

W. OLSZAK, W. U. URBANOWSKI [81] rozszerzyli rozważania pracy [75] na plastyczność dowolnych materiałów anizotropowych. Pokazali oni, że warunek plastyczności R.v.Misesa można przedstawić w postaci

$$S_{ij} A_{ijkl} S_{kl} - k^2 = 0,$$

gdzie k jest wielkością stałą, a A_{ijkl} są składowymi pewnego tensora czwartego rzędu \underline{A} .

Tensor \mathcal{A} nazwano tensorem plastycznej anizotropii. Jest on reprezentowany przez 15 niezależnych składowych, ponieważ zachodzą następujące związki:

/5.3/

$$A_{ijke} = A_{klij} = A_{jikl},$$

$$A_{ijke} S_{ke} = 0.$$

W pracy [92], J. RYCHLEWSKI uogólnił warunek /5.2/ dopuszczając jego zależność od kulistej części tensora naprężenia i nadał mu interpretację energetyczną.

Szczegółowej analizie tej interpretacji była poświęcona praca W. OLSZAKA i J. OSTROWSKIEJ [79].

5.2. Kwadratowy warunek plastyczności aproksymujący prawo Schmid

5.2.1. Kwadratowy warunek plastyczności stowarzyszony z prawem płynięcia

Porównajmy ogólną postać warunku Misesa /5.2/ z warunkiem plastyczności stowarzyszonym z prawem płynięcia /punkt 3.3.2., przypadek c./. Przy założeniu, że

/5.4/

$$k(\varphi_m) = k = \text{const},$$

ten ostatni opisany jest równaniem

/5.5/

$$s_{ij} \mathcal{H}_{ijke} s_{ke} - k^2 = 0,$$

gdzie

/5.6/

$$\mathcal{H}_{ijke} = \frac{1}{4} (H_{ijke} + H_{jike} + H_{ijek} + H_{jiek}),$$

/5.7/

$$H_{ijkl} \equiv \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M m_i^{(r)} n_j^{(r)} m_k^{(r)} n_l^{(r)}.$$

Widzimy, że tensor d_{ij}^P traktowany jako wektor w sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń, będzie ortogonalny do powierzchni plastyczności wtedy i tylko wtedy, gdy

/5.8/

$$A_{ijkl} \equiv H_{ijkl}$$

W tym przypadku pojawia się nie tylko sprzężenie systemów poślizgu, ale mamy też do czynienia z układem całkowicie sprzężonych systemów poślizgu, to znaczy takich, że

/5.9/

$$\frac{\dot{\gamma}^{(n)}}{\tau^{(n)}} = \dots = \frac{\dot{\gamma}^{(m)}}{\tau^{(m)}}.$$

Samo prawo płynięcia można napisać w postaci

/5.10/

$$d_{ij}^P = \lambda H_{ijkl} S_{kl} ; \lambda \geq 0.$$

W dalszym ciągu proponujemy pewną procedurę, która umożliwi zastąpienie odcinkowo-liniowego prawa Schmid'a warunkiem kwadratowym. Pokażemy, że warunek /5.5/, stowarzyszony z prawem płynięcia /5.10/, przy odpowiednim doborze stałej k , stanowi dobre przybliżenie prawa Schmid'a.

Dla jasności przedstawimy najpierw tok postępowania na przykładzie ciał izotropowych. Mianowicie, wprowadzimy warunek Hubera-Misesa jako kwadratową aproksymację warunku Tresca.

5.2.2. Warunek Hubera-Misesa jako aproksymacja warunku Tresci

Założmy, że mamy do czynienia z warunkiem Tresci utworzonym przez więzy

$$/5.11/ \quad |\tau_{\max}| \leq k_T$$

i chcemy przybliżyć go pewnym kryterium kwadratowym. Wielkość k_T we wzorze /5.11/ jest krytycznym naprężeniem ścinającym obliczonym ze wzoru

$$/5.12/ \quad k_T = \frac{\sigma_0}{2},$$

a σ_0 jest naprężeniem uplastyczniającym otrzymanym w próbie jednoosiowego rozciągania.

Zapiszmy zależność /5.11/ w postaci układu nierówności

$$/5.13/ \quad \begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &\leq \sigma_0, \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &\leq \sigma_0, \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &\leq \sigma_0, \end{aligned}$$

gdzie σ_1, σ_2 oraz σ_3 są naprężeniami głównymi.

Z kolei można /5.13/ przedstawić równoważnie

$$/5.14/ \quad \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 &\leq \sigma_0^2, \\ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 &\leq \sigma_0^2, \\ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 &\leq \sigma_0^2. \end{aligned}$$

Sumując powyższe nierówności stronami, dzieląc przez 3 i mnożąc prawą stronę wyniku przez pewien dodatni współczynnik m_σ otrzymamy następujące ich "uśrednienie":

$$/5.15/ \quad \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq m_\sigma \cdot \sigma_0^2.$$

Zauważmy, że w próbie jednoosiowego rozciągania, gdy

$$\begin{aligned} /5.16/ \quad \sigma_1 &= \sigma_0, \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 0, \end{aligned}$$

nierówność /5.15/ staje się równością, jeżeli

$$/5.17/ \quad m_6 = \frac{2}{3}.$$

Okazuje się, że po podstawieniu otrzymanej wartości m_6 do nierówności /5.15/ otrzymamy warunek Hubera-Misesa

$$/5.18/ \quad \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \sigma_0^2,$$

z tym samym co przy warunku Tresci rozciągającym naprężeniem uplastyczniającym σ_0 , ale nowym krytycznym naprężeniem ścinającym

$$/5.19/ \quad k_H = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}.$$

Powyższą procedurę można powtórzyć przy założeniu, że krytyczne naprężenie ścinające wzięte jest z doświadczenia i jest takie samo w modelu Tresci i w jego kwadratowej aproksymacji.

Mamy wówczas

$$/5.20/ \quad |\tau_{\max}| \leq k_0,$$

lub

$$\begin{aligned} /5.21/ \quad |\sigma_1 - \sigma_2| &\leq \sigma_T, \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &\leq \sigma_T, \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &\leq \sigma_T, \end{aligned}$$

gdzie σ_T jest rozciągającym naprężeniem uplastyczniającym obliczonym ze wzoru

$$/5.22/ \quad \sigma_T = 2k_0.$$

Po "uśrednieniu" otrzymamy

$$/5.23/ \quad \frac{1}{12} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq m_c k_0^2,$$

gdzie m_c jest pewnym nowym, dodatnim współczynnikiem.

W próbie czystego ścinania, gdy

$$/5.24/ \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= -\sigma_3 = k_0, \\ \sigma_2 &= 0, \end{aligned}$$

nierówność /5.23/ staje się równością, jeżeli

$$/5.25/ \quad m_c = \frac{1}{2}.$$

Ponownie otrzymujemy warunek Hubera-Misesa

$$/5.26/ \quad \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k_0^2,$$

z tym samym co przy warunku Tresci krytycznym naprężeniem ścinającym k_0 , ale nowym rozciągającym naprężeniem uplastyczniającym

$$/5.27/ \quad \sigma_H = k_0 \sqrt{3}.$$

5.2.3. Aproksymacja prawa Schmid

Aproksymację prawa Schmid wprowadzimy podobnie jak aproksymację warunku Tresci.

Dla ustalenia uwagi ograniczymy się do sytuacji, która ma miejsce w przypadku kryształów o symetrii sześcienniej, gdy

$$/5.28/ \quad k_c^{(n)} = \dots = k_c^{(M)} = k = \text{const.}$$

Prawo Schmid opisane jest teraz układem nierówności

$$/5.29/ \quad s_{ij} \tau_{ij}^{(r)} s_{kl} \leq k_c^2 ; r = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie k_c jest krytycznym naprężeniem ścinającym wziętym z próby czystego ścinania na dowolnym systemie poślizgu.

Zgodnie z opisaną procedurą "uśredniania", układ /5.29/ zastąpimy jedną nierównością

$$/5.30/ \quad s_{ij} \tau_{ij} s_{kl} \leq m_r k_c^2,$$

gdzie

$$/5.31/ \quad \tau_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M \tau_{ij}^{(r)}$$

a m_r jest pewnym dodatnim współczynnikiem, który dobieramy tak, aby nierówność /5.30/ możliwie najlepiej aproksymowała układ nierówności /5.29/. W tym celu przyjmujemy, że nierówność /5.30/ przechodzi w równość, jeżeli w próbie czystego ścinania na r -tym systemie poślizgu efektywne naprężenie ścinające $\tau^{(r)}$ osiągnie wartość krytyczną k_c . Zatem do wzoru /5.29/ należy

podstawić

$$/5.32/ \quad \Delta s_j = k_c (m_i^{(r)} n_j^{(r)} + m_j^{(r)} n_i^{(r)})$$

i obliczyć odpowiednią wartość m_r .

Przeprowadzając podobną próbę dla innego systemu poślizgu, na ogół otrzymamy inną wartość m_r . Oznaczmy wartość m_r stowarzyszoną z r-tym systemem przez $\mu^{(r)}$. Korzystając ze wzorów /5.30-5.32/ otrzymamy

$$/5.33/ \quad \mu^{(r)} = 4 \mathcal{H}_{ijke} \mathcal{H}_{ijke}.$$

Przyjmijemy ostatecznie, że m_r w /5.30/ jest średnią wartością wszystkich współczynników $\mu^{(r)}$. Zatem

$$/5.34/ \quad m_r = 4 \mathcal{H}_{ijke} \mathcal{H}_{ijke}.$$

Wielkość ta jest niezmiennikiem tensora \mathcal{H} i może być przyjęta jako kwadrat normy tego tensora. Normę \mathcal{H} oznaczać będziemy przez $\|\mathcal{H}\|$ x/.

W ten sposób wprowadziliśmy nowy, kwadratowy warunek plastyczności, który można zapisać w następującej postaci

/5.35/

$$\frac{1}{\mu} \|\mathcal{H}\|^2 - s \cdot \mathcal{H} \cdot s - k_c^2 = 0$$

Składowe tensora plastycznej anizotropii \mathcal{H} opisane wzorem

/5.31/, zależą poprzez wersory $m_i^{(r)}, n_i^{(r)}$ / $r = 1, 2, \dots, M$ / od orientacji

x/ Dla prawa Hooke'a normę taką badał J. RYCHLEWSKI [93] nadając jej interpretację średniego kwadratowego modułu sztywności.

sieci.

Ponadto, składowe te związane są zależnościami

$$/5.36/ \quad \mathcal{H}_{ijkl} = \mathcal{H}_{klij} = \mathcal{H}_{jikl},$$

$$/5.37/ \quad \mathcal{H}_{ijk} \delta_{kl} = 0.$$

Otrzymanemu kryterium uplastycznienia można przyporządkować uogólniony potencjał Misesa /punkt 3.3.6/

$$/5.38/ \quad \mathcal{F}(\sigma_{ij}, \varphi_m) = s_{ij} H_{ijkl} (\varphi_m) s_{kl} - k^2,$$

w którym

$$/5.39/ \quad k \equiv \|\mathcal{H}\|^{1/2} \cdot k_c.$$

Potencjał ten umożliwia wprowadzenie uogólnionego prawa płynięcia w postaci dwóch związków konstytutywnych:

$$/5.40/ \quad d_{ij}^p = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ji}} \right),$$

$$/5.41/ \quad \omega_{ij}^p = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ji}} \right),$$

gdzie

$$/5.42/ \quad \lambda \geq 0.$$

Przedstawiony powyżej tok postępowania można łatwo rozszerzyć na przypadek kryształów o dowolnej symetrii sieci, dla

których stałe $k_c^{(r)}$ na różnych systemach poślizgu nie muszą być jednakowe. Należy wówczas, we wzorze /5.35/ podstawić

$$/5.43/ \quad k_c^2 \equiv \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M [k_c^{(r)}]^2$$

W tym przypadku zakładamy, że nierówność /5.30/ przechodzi w równość, jeżeli w próbie czystego ścinania na r -tym systemie poślizgu efektywne naprężenie ścinające $\tau^{(r)}$ osiągnie wartość krytyczną k_c określoną wzorem /5.43/. W ten sposób obliczymy wartości $\mu^{(r)}$ dla każdego systemu poślizgu. Wartość współczynnika m_r przyjmujemy jako średnią wartości $\mu^{(r)}$.

5.2.4. Porównanie prawa Schmid'a z jego aproksymacją dla kryształów o symetrii sześcienniej

Rozważmy kryształ o symetrii sześcienniej wraz przypisanym mu reperem kierunków sieci $\{a_\alpha\}$ i układem stałych $\hat{m}_\alpha^{(r)}$ oraz $\hat{n}_\alpha^{(r)}$ / $\alpha = 1, 2, \dots, M$ /. Reper $\{a_\alpha\}$ będziemy traktowali jako układ odniesienia. W układzie tym, zadamy więzy narzucone przez prawo Schmid'a

$$/5.44/ \quad |\tau^{(r)}| \leq k_c ; \quad r = 1, 2, \dots, M$$

oraz jego kwadratową aproksymację

$$/5.45/ \quad \sum_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} \Delta_{\gamma\delta} \leq k_c^2$$

Układ nierówności /5.44/ można przedstawić w postaci

$$/5.46/ \quad 2F^{(r)} = [\tau^{(r)}]^2 \leq k_c^2 ; \quad r = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tau^{(r)} = & \sigma_{11} \hat{m}_1^{(r)} \hat{n}_1^{(r)} + \sigma_{22} \hat{m}_2^{(r)} \hat{n}_2^{(r)} + \sigma_{33} \hat{m}_3^{(r)} \hat{n}_3^{(r)} + \\ /5.47/ & + \sigma_{12} (\hat{m}_1^{(r)} \hat{n}_2^{(r)} + \hat{m}_2^{(r)} \hat{n}_1^{(r)}) + \sigma_{23} (\hat{m}_2^{(r)} \hat{n}_3^{(r)} + \\ & + \hat{m}_3^{(r)} \hat{n}_2^{(r)}) + \sigma_{13} (\hat{m}_1^{(r)} \hat{n}_3^{(r)} + \hat{m}_3^{(r)} \hat{n}_1^{(r)}) \end{aligned}$$

Zatem, dla $r=1,2,\dots,M$ mamy

$$\begin{aligned} /5.48/ \quad F^{(r)} = & \frac{1}{2} (k_{11}^{(r)} \sigma_{11}^2 + k_{22}^{(r)} \sigma_{22}^2 + \dots + k_{66}^{(r)} \sigma_{13}^2) + \\ & + k_{12}^{(r)} \sigma_{11} \sigma_{22} + \dots + k_{14}^{(r)} \sigma_{11} \sigma_{12} + k_{56}^{(r)} \sigma_{23} \sigma_{13}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} /5.49/ \quad k_{11}^{(r)} &= (\hat{m}_1^{(r)} \hat{n}_1^{(r)})^2, \\ \overline{k_{66}^{(r)}} &= (\hat{m}_1^{(r)} \hat{n}_3^{(r)} + \hat{m}_3^{(r)} \hat{n}_1^{(r)})^2, \\ k_{12}^{(r)} &= \hat{m}_1^{(r)} \hat{n}_1^{(r)} \hat{m}_2^{(r)} \hat{n}_2^{(r)}, \\ \overline{k_{14}^{(r)}} &= \hat{m}_1^{(r)} \hat{n}_1^{(r)} (\hat{m}_1^{(r)} \hat{n}_2^{(r)} + \hat{m}_2^{(r)} \hat{n}_1^{(r)}), \\ \overline{k_{56}^{(r)}} &= (\hat{m}_2^{(r)} \hat{n}_3^{(r)} + \hat{m}_3^{(r)} \hat{n}_2^{(r)}) (\hat{m}_1^{(r)} \hat{n}_3^{(r)} + \hat{m}_3^{(r)} \hat{n}_1^{(r)}) \end{aligned}$$

Procedura "uśredniania" układu nierówności /5.44/ prowadzi do relacji

$$/5.50/ \quad 2F \leq m_r k_c^2,$$

w której

$$\begin{aligned} /5.51/ \quad F = & \frac{1}{2} (k_{11} \sigma_{11}^2 + k_{22} \sigma_{22}^2 + \dots + k_{66} \sigma_{13}^2) + \\ & + k_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + \dots + k_{14} \sigma_{11} \sigma_{12} + \dots + k_{56} \sigma_{23} \sigma_{13}, \end{aligned}$$

W wyrażeniu /5.51/, 15 współczynników przy składowych $\sigma_{\alpha\beta}$ obliczamy ze wzorów

$$/5.52/ \quad k_{pq} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M k_{pq}^{(r)} \quad ; \quad p, q = 1, 2, \dots, 6.$$

Wyrażenie /5.51/ opisuje kwadratową funkcję naprężeń F /por. /5.1./, zaproponowaną przez R.v.Misesa jako funkcję definiującą warunek uplastycznienia kryształów.

W pracy [75] pokazał on, że dla kryształów o symetrii sześcienniej, każda kwadratowa funkcja składowych $\sigma_{\alpha\beta}$, odniesionych do reperu $\{\underline{a}_\alpha\}$, redukuje się do postaci

$$\begin{aligned} /5.53/ \quad F = & -\frac{1}{2} k_{12} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \\ & + \frac{1}{2} k_{44} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2). \end{aligned}$$

Jeżeli F osiągnie wartość krytyczną

$$/5.54/ \quad F = F_0,$$

to spełniony będzie następujący warunek plastyczności

$$\begin{aligned} /5.55/ \quad & [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \\ & + \alpha (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) = 2\eta^2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} /5.56/ \quad \alpha = & -\frac{k_{44}}{k_{12}}, \\ \eta^2 = & -\frac{F_0}{k_{12}}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że warunek /5.55/ przechodzi w warunek Hubera-Misesa, jeżeli

$$\begin{aligned} /5.57/ \quad \alpha = & 6, \\ \eta = & \sigma_0. \end{aligned}$$

W przypadku kryształów o symetrii sześcienniej, R.v.Mises sugerował, aby wielkości α i η wyznaczyć z doświadczeń. W niniejszej pracy proponujemy taki ich wybór, aby nierówność

/5.45/ była możliwie najlepszym przybliżeniem więzów narzuconych przez prawo Schmid'a /5.44/. Stałe α i η wyrażone są poprzez k_{42} , k_{44} oraz F_0 . Wielkości k_{42} i k_{44} obliczymy bezpośrednio ze wzorów /5.49/ i /5.52/, natomiast F_0 otrzymujemy z relacji /5.50/

$$/5.58/ \quad 2F_0 = m_{\tau} k_c^2.$$

Współczynnik m_{τ} w powyższym wzorze, wyznaczamy ze wzoru /5.34/, który w badanym przypadku można zredukować do związku

$$/5.59/ \quad m_{\tau} = 42 k_{42}^2 + 3 k_{44}^2.$$

a/ Kryształy typu f.c.c. i typu b.c.c.

Rozważmy przypadek kryształów typu f.c.c. W kryształach tych możemy wyróżnić 12 systemów poślizgu, generowanych przez płaszczyznę bazową (111) i leżące na niej kierunki [110], [0,1,1] oraz [1,0,1] /rys.2a/. Przypominamy, że poślizgi zachodzące w określonym kierunku, lecz przeciwne co do zwrotu, utożsamiamy ze sobą.

Dla rozważanych kryształów znajdziemy wartości: k_{42} , k_{44} , m_{τ} , α oraz η .

Zacznijemy od określenia wielkości $\hat{n}_{\alpha}^{(\tau)}$ / $\tau = 1, 2, \dots, 12$ /.

Otrzymujemy je obracając trzykrotnie wektor (111) wokół osi a_3 o kąt 90° . Zatem

$$/5.60/ \quad \hat{n}_{\alpha}^{(\tau)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \begin{array}{c} 12 \sin \frac{2n+1}{4} \pi \cdot \sin \frac{4m-3}{2} \pi \\ 12 \sin \frac{2n-1}{4} \pi \cdot \sin \frac{4m-3}{2} \pi \\ 1 \end{array} \right\},$$

gdzie

$$/5.61/ \quad r = 3(n-1) + m; \quad n = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3.$$

Przystąpimy do określenia wielkości $\hat{n}_\alpha^{(n)}$ / $\alpha = 1, 2, \dots, 12$ /.

Zauważmy, że na płaszczyźnie o wektorze normalnym (111) mamy 3 kierunki poślizgu

$$/5.62/ \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{2}{3}(m+1)\pi \\ \sin \frac{2}{3}m\pi \\ \sin \frac{2}{3}(m-1)\pi \end{array} \right\}; \quad m = 1, 2, 3.$$

Obracając trzykrotnie wersory /5.62/ wokół osi a_3 , o kąt 90° , otrzymamy

$$/5.63/ \quad \hat{n}_\alpha^{(n)} = \frac{\sqrt{6}}{3} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \sin \frac{2}{3}(m+1)\pi - \sin \frac{n-1}{2}\pi \sin \frac{2}{3}m\pi \\ \sin \frac{n-1}{2}\pi \cdot \sin \frac{2}{3}(m+1)\pi + \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{2}{3}m\pi \\ \sin \frac{2}{3}(m-1)\pi \end{array} \right\},$$

gdzie

$$/5.64/ \quad r = 3(n-1) + m; \quad n = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3.$$

Po podstawieniu otrzymanych wielkości $\hat{n}_\alpha^{(n)}$ i $\hat{n}_\alpha^{(n)}$ do wzorów /5.49/, a następnie skorzystaniu ze wzoru /5.52/, otrzymamy

/5.65/

$$k_{12} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}, \quad k_{44} = \frac{2}{3\sqrt{6}}.$$

Powyższy wynik podstawiamy do wzorów /5.59/ oraz /5.56/.
Otrzymujemy

/5.66/

$$m_c = \frac{14}{9},$$

oraz

/5.67/

$$\alpha = 2, \\ \eta^2 = \frac{7\sqrt{6}}{3} k_c^2.$$

Okazuje się, że te same wartości k_{12} , k_{44} a zatem i m_c , α oraz η otrzymamy dla kryształów typu b.c.c., w których występuje również 12 systemów poślizgu generowanych przez płaszczyznę bazową $(1\bar{1}0)$ i leżące na niej kierunki $[111]$ oraz $[\bar{1}\bar{1}1]$ /rys.2b/.

b/ Porównanie

Dotychczasową analizę postaci funkcji $F^{(r)}$ i F prowadziliśmy przy założeniu, że składowe tensora naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$ odniesione są do reperu kierunków sieci $\{a_i\}$. Pozostaje ona słuszna w przestrzeni naprężeń głównych, jeżeli kierunki główne tensora naprężenia pokrywają się z kierunkami sieci kryształu.

Przy dowolnej orientacji tensora naprężenia względem reperu $\{a_i\}$ rozważania należy odnieść do ustalonego, kartezjańskiego układu współrzędnych $\{e_i\}$. Wówczas stałe $\hat{m}_\alpha^{(r)}$ oraz $\hat{n}_\alpha^{(r)}$ we wzorach /5.49/ na współczynniki $k_{pq}^{(r)}$, należy zastąpić składowymi $m_i^{(r)}$, $n_i^{(r)}$ wersorów $\underline{m}^{(r)}$ oraz $\underline{n}^{(r)}$. Składowe te obliczamy ze wzorów

/5.68/

$$m_i^{(n)} = R_{\alpha i} \hat{m}_i^{(n)},$$

$$n_i^{(n)} = R_{\alpha i} \hat{n}_i^{(n)},$$

gdzie $R_{\alpha i}$ jest macierzą obrotów sieci. Jeżeli funkcję F będziemy rozpatrywać w układzie $\{e_i\}$, to redukcja 15 współczynników k_{pq} do dwóch: k_{12} oraz k_{44} nie jest możliwa. Dwa niezależne parametry występujące w funkcji F będą w skomplikowany sposób wyrażać się przez wszystkie współczynniki k_{pq} .

W dalszym ciągu, pozostając w przestrzeni naprężeń głównych porównamy powierzchnię plastyczności generowaną przez układ nierówności

/5.69/

$$F^{(n)} \leq \frac{1}{2} k_c^2 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, 12,$$

z powierzchnią utworzoną przez nierówność

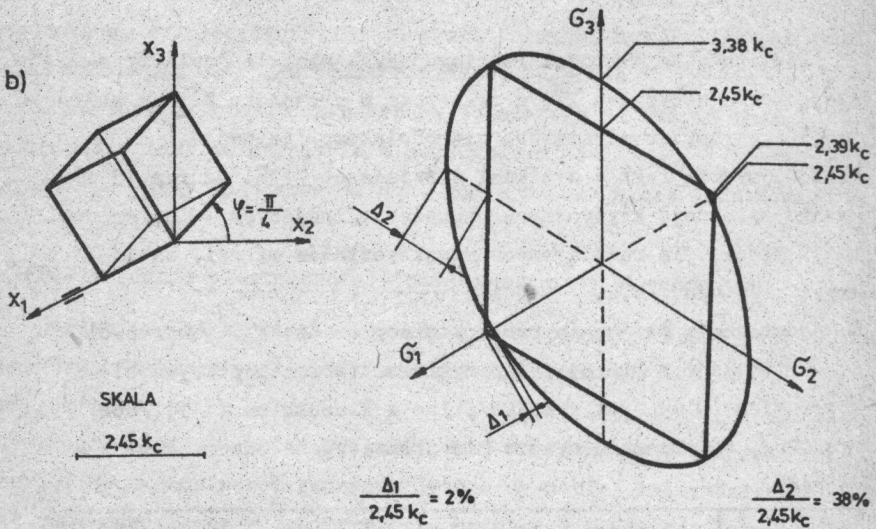
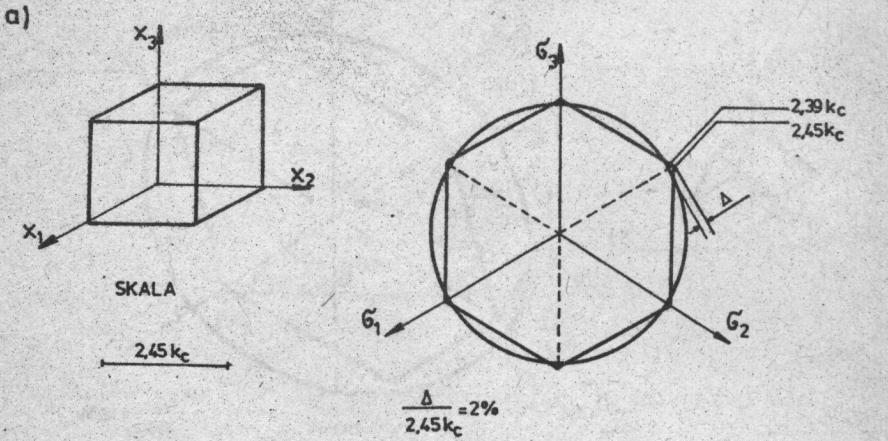
/5.70/

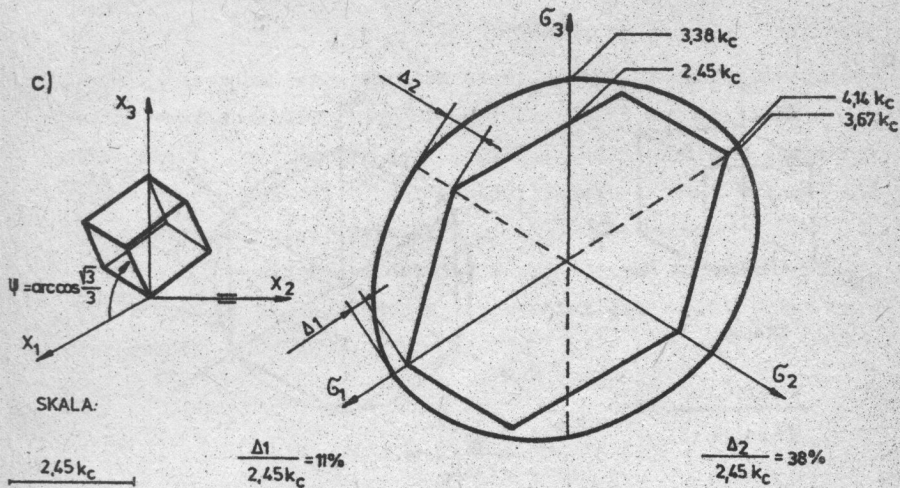
$$F \leq \frac{7}{9} k_c^2,$$

dla różnych orientacji kryształu. Przytoczymy tylko zasadnicze wyniki analizy przeprowadzonej w pracy [24].

Rys.12 przedstawia porównanie obu warunków plastyczności, dla trzech orientacji sieci względem przyjętego układu współrzędnych $\{x_1, x_2, x_3\}$.

- 1° krawędzie sześciennej komórki pokrywają się z osiami x_1, x_2 oraz x_3 /rys.12a/,
- 2° sześcian z pozycji 1° obrócony został wokół osi x_1 o kąt 45° /rys.12b/,
- 3° sześcian z pozycji 2° obrócony został wokół osi x_2 o kąt $54^\circ 44' 08''$ /główna przekątna sześcianu pokryła się z osią x_3 /rys.12c/.





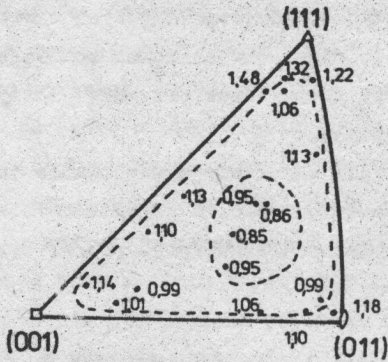
Rys.12. Porównanie warunku plastyczności Schmid'a z jego kwadratową aproksymacją, dla różnych orientacji kryształu o symetrii sześcienniej.

Zauważmy, że wartości rozciągających naprężeń uplastyczniających w przypadku 2° , a zwłaszcza w przypadku 3° , są większe dla warunku kwadratowego niż odcinkowo-liniowego.

Porównajmy ten fakt z wynikami doświadczeń [20]. Na rys.13 pokazano zależność krytycznych naprężeń ścinających τ_c od orientacji sieci, dla rozciąganych monokryształów miedzi. Są to kryształy typu f.c.c.

Na podstawowym trójkącie rzutu stereograficznego^{x/}, wartości dla orientacji w której jeden z kierunków sieci pokrywa się z kierunkiem (011) /por.rys.12b/, lub z kierunkiem (111) /por.rys.12c/, są znacznie wyższe niż przewidywane przez prawo Schmid'a.

x/ Metoda przedstawiania orientacji sieci przy pomocy rzutu stereograficznego opisana jest np. w monografii [51].



Rys.13. Zależność τ_{cr} dla kryształów miedzi, od orientacji sieci. Wartości w $MNm^{-2}/\sqrt{g[20]}/$.

Rys.13 pokazuje, że wyniki prób jednoosiowego rozciągania monokryształów miedzi są bliższe proponowanemu kryterium niż prawu Schmid'a. Wydaje się, że spowodowane jest to tym, że kryterium kwadratowe, w przeciwieństwie do prawa Schmid'a, uwzględnia oddziaływanie pomiędzy systemami poślizgu. Sugeruje to prawie stałą wartość τ_{cr} w otoczeniu środka pokazanego na rys.13 trójkąta, gdzie mamy do czynienia z pojedynczym poślizgiem i znaczny wzrost τ_{cr} przy jego krawędziach, gdzie włączają się dodatkowe systemy poślizgu.

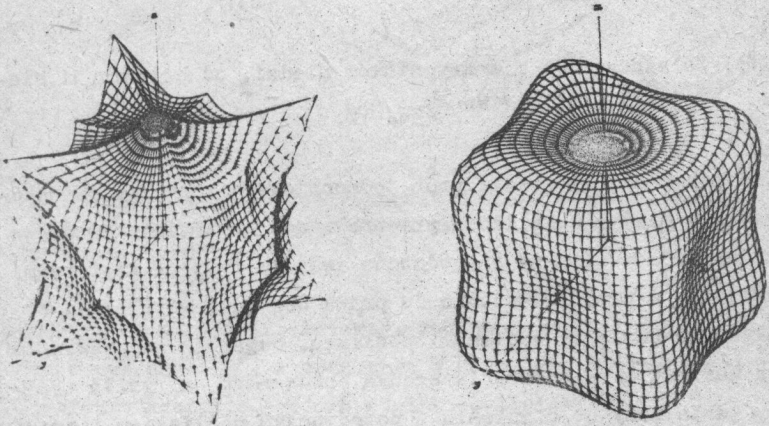
c/ "Powierzchnie plastyczności" rozciąganych monokryształów

Bardzo poglądową ilustracją kryterium uplastycznienia jest "powierzchnia plastyczności" rozciąganego monokryształu. Budujemy ją następująco [98].

Niech kierunki sieci krystalicznej pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych. Wyobraźmy sobie, że monokryształ jest rozciągany w dowolnym, ale ustalonym kierunku. Rozważmy pęk prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Na prostej, równoległej do kierunku rozciągania, odkładamy po obu stronach początku układu współrzędnych wartość naprężenia uplastyczniającego. Zmieniając kierunek rozciągania otrzymamy zbiór punktów, który tworzy "powierzchnię plastyczności" rozciąganego monokryształu.

Wzory /5.48-5.52/ umożliwiają zbudowanie takich powierzchni dla kryształów typu f.c.c. i kryształów b.c.c. z opisanymi uprzednio systemami poślizgu /por. [98]/. Wyniki pokazano na rys.14.



Rys.14. "Powierzchnie plastyczności" rozciąganych monokryształów o symetrii sześcienniej; a/ wg prawa Schmid'a, b/ wg proponowanego warunku kwadratowego
/Rysunki wykreślone przez ploter kalkulatora H-P 9830 A/.

Zwróćmy uwagę na zaokrąglenie wszystkich naroży i krawędzi "powierzchni plastyczności" w warunku kwadratowym.

d/ Dyskusja

Powstaje pytanie: dlaczego pomimo niewątpliwych korzyści wynikających z przyjęcia warunku kwadratowego nie był on do tej pory stosowany? Odcinkowo-liniowe prawo Schmid'a jest ściśle

związane z mechanizmem powstawania plastycznych odkształceń w kryształach. Mechanizm ten sprowadza się do poślizgu na wyróżnionych płaszczyznach krystalograficznych. Aby podać prawo Schmid'a dla konkretnego materiału wystarczy przeprowadzić próbę ścinania i wyznaczyć jedną stałą materiałową k_c . Stałość k_c została wykazana w licznych badaniach przeprowadzonych na monokryształach kadmu, cynku i magnezu [98]. W tych heksagonalnych kryształach poślizg następuje z reguły na jednej płaszczyźnie. Wątpliwości powstają przy badaniu kryształów sześciennych, w których mogą pojawić się jednoczesne poślizgi na kilku systemach. Tym niemniej, w szerokim zakresie zmian orientacji kryształu, można było uznać k_c za stałe.

Kwadratowy warunek plastyczności został wprowadzony przez R.v.Misesa w sposób całkowicie formalny. Dla kryształów o symetrii sześcienniej liczbę stałych materiałowych ograniczono do dwóch [75]. Sposób ich wyznaczania nie został jednak podany. Sprawę przesądziła krytyka E.SCHMIDA i W.BOASA [96-91], oparta na porównaniu lokalnych własności "powierzchni plastyczności" rozciąganego monokryształu, dla obu kryteriów uplastycznienia. W przypadku prawa Schmid'a kształt takiej powierzchni był znany /por. [98]/ - dla warunku Misesa, dana była tylko postać dwuparametrowej rodziny takich powierzchni. Przedstawiona w niniejszej pracy procedura "uśrednienia" umożliwiła ustalenie kształtu drugiej z porównywanych powierzchni. Rzut oka na rys.14 wystarcza do przekonania się, że różnice ich własności lokalnych /np. położenie minimów, wartości maksimów/ rzeczywiście są znaczne, ale zupełnie nieistotne, jeżeli chodzi o globalny kształt powierzchni.

5.3. Wpływ anizotropii sprężystej

5.3.1. Aproksymacja uogólnionego prawa Schmid'a

Potraktujemy badany model kryształu sztywno-idealnie plastycznego jako idealizację kryształu o własnościach sprężysto-plastycznych.

Zarówno prawo Schmid'a jak i jego kwadratowa aproksymacja wpływu anizotropii sprężystej nie uwzględniają. W obu przypadkach "powierzchnie plastyczności" rozciąganych monokryształów, dla tak różnych materiałów jak miedź, nikiel, aluminium czy wolfram, będą się różniły między sobą tylko skalą podobieństwa.

Możliwość zróżnicowania kształtu tych powierzchni, w zależności od własności sprężystych metalu, w przypadku prawa Schmid'a została pokazana w punkcie 4.3.

W przypadku warunku kwadratowego odwołamy się do ogólnej postaci prawa Misesa:

/5.71/

$$s_{ij} A_{ijkl} s_{kl} - k^2 = 0,$$

w której składowe tensora plastycznej anizotropii A spełniają określone warunki /wzory /5.3//. Okazuje się, że przy szczególnym wyborze składowych A_{ijkl} , kryterium 5.71/ można traktować jako kwadratową aproksymację wprowadzonego w rozdziale IV uogólnienia prawa Schmid'a

/5.72/

$$s_{ij} H_{ijpq}^{(\alpha)} S_{pqkl} s_{kl} - h_c^{(\alpha)} \leq 0;$$

dla $\alpha = 1, 2, \dots, M$,

gdzie $H_{ijpq}^{(\alpha)}$ dane są wzorami /4.72/, S_{pqkl} są modułami podatności sprężystej kryształu, a $h_c^{(\alpha)}$ jest krytyczną wartością wyrażenia $\tau \cdot \delta_{ed}^{(\alpha)}$, otrzymaną w próbie ścinania na α -tym systemie poślizgu /wzory /4.65-4.68//.

Zastosowanie procedury "uśredniania" do układu nierówności

/5.72/ prowadzi do relacji

/5.73/

$$s_{ij} \mathcal{H}_{ijpq} S_{pqkl} s_{kl} - h \leq 0,$$

gdzie

/5.74/

$$\mathcal{H}_{ijpq} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M \mathcal{H}_{ijpq}^{(r)},$$

a h jest dobrane w ten sposób, aby nierówność /5.73/ była możliwie najlepszą aproksymacją układu nierówności /5.72/. W celu określenia h przyjmujemy, że w próbie ścinania na r -tym systemie poślizgu kryształ ulega uplastycznieniu, gdy $\tau^{(r)}$ osiągnie wartość $k_c \bar{\epsilon}^1$.

Oznaczmy przez $h^{(r)}$ wartość h otrzymaną z takiej próby. Dostaniemy

/5.75/

$$h^{(r)} = k_c (m_i^{(r)} n_j^{(r)} + m_j^{(r)} n_i^{(r)}) \mathcal{H}_{ijpq} S_{pqkl} (m_k^{(r)} n_l^{(r)} + m_l^{(r)} n_k^{(r)}) k_c.$$

Biorąc średnią wartość $h^{(r)}$, dla $r = 1, 2, \dots, M$, otrzymamy

/5.76/

$$h = 4 \mathcal{H}_{ijpq} S_{pqkl} \mathcal{H}_{kl ij} k_c^2$$

Zauważmy, że wyrażenie

/5.77/

$$m_r = 4 \mathcal{H}_{ijpq} S_{pqkl} \mathcal{H}_{kl ij}$$

x/ W przypadku dowolnej symetrii sieci kryształu, wielkość k_c zadana jest wzorem /5.43/.

nie ulega zmianie przy przejściu do nowego układu odniesienia. Aby to pokazać oznaczymy przez m'_τ wartość m_τ w nowym układzie współrzędnych $\{\underline{e}'_i\}$.

Ponieważ

/5.78/

$$\mathcal{H}'_{ijkl} = R_{im} R_{jn} R_{kr} R_{ls} \mathcal{H}_{mnrst},$$

oraz

/5.79/

$$S'_{pqkl} = R_{pm} R_{qn} R_{kr} R_{ls} S_{mnrst},$$

gdzie R_{ij} jest macierzą obrotu układu $\{\underline{e}'_i\}$ względem układu $\{\underline{e}_i\}$, to wzór /5.77/ prowadzi do równości

/5.80/

$$m'_\tau = m_\tau.$$

Zatem, warunek plastyczności generowany przez nierówność /5.73/ można zapisać w następującej, inwariantnej postaci:

/5.81/

$$\frac{1}{m_\tau} \underline{s} \cdot \underline{\mathcal{H}} \cdot \underline{s} - k_c^2 = 0.$$

5.3.2. Kryształy o symetrii sześcienniej

Zbadamy postać warunku plastyczności /5.81/ w przypadku kryształów o symetrii sześcienniej. Ponieważ własności sprężyste kryształu mają tę samą symetrię co jego własności plastyczne, możemy powtórzyć tok postępowania z punktu 5.2.4. /wzory /5.44-5.56//.

Podobnie jak poprzednio otrzymamy

/5.82/

$$\begin{aligned} & [(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2] + \\ & + 2(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{13}^2) = 2\gamma^2, \end{aligned}$$

gdzie

/5.83/

$$\alpha = - \frac{k_{44}}{k_{12}},$$

$$\eta^2 = - \frac{F_0}{k_{12}}.$$

Jednakże wielkości k_{12} i k_{44} będą teraz opisane wzorami

/5.84/

$$k_{12} = \sum_{n=1}^M \hat{m}_1^{(n)} \hat{n}_1^{(n)} \hat{m}_p^{(n)} \hat{n}_q^{(n)} S_{pq,22}$$

oraz

/5.85/

$$k_{44} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M (\hat{m}_1^{(n)} \hat{n}_2^{(n)} + \hat{m}_2^{(n)} \hat{n}_1^{(n)}) \hat{m}_p^{(n)} \hat{n}_q^{(n)} S_{pq,12}$$

Zbadajmy "powierzchnie plastyczności" rozciąganych monokryształów o różnych własnościach sprężystych. Powierzchnie te otrzymamy ustalając wartość parametrów α oraz η .

Parametr η , przy ustalonym α , opisuje skalę podobieństwa każdej z nich. Natomiast powierzchnie opisane przez różne parametry α różnią się między sobą kształtem. Dla materiałów sprężyste i plastycznie izotropowych otrzymujemy sferę, dla kryształów sprężyste izotropowych - powierzchnię pokazaną na rys.14b. Tak więc wpływ anizotropii sprężystej na kształt "powierzchni plastyczności" uzewnętrznia się w zmianie parametru α .

Znając moduły podatności sprężystej dla kryształów miedzi, niklu, aluminium i wolframu [77], obliczono wartości parametru α :

| | S_{1111} | S_{1122} | S_{1212} | α |
|-----------|------------|------------|------------|----------|
| miedź | 1,49 | 1,33 | -0,630 | 0,627 |
| nikiel | 0,799 | 0,844 | -0,312 | 0,760 |
| aluminium | 1,59 | 3,52 | -0,580 | 1,62 |
| wolfram | 0,257 | 0,660 | -0,00730 | 2,00 |

Kryształy każdego z badanych materiałów, z wyjątkiem wolframu, tworzą sieć typu f.c.c. Wolfram krystalizuje w sieci typu b.c.c., a jego osobowością jest izotropia własności sprężystych. Dla tego metalu

$$/5.86/ \quad \alpha = 2,$$

a odpowiednia "powierzchnia plastyczności" jest identyczna z pokazaną na rys.14b. Przypominamy, że dla materiałów sprężysto i plastycznie izotropowych

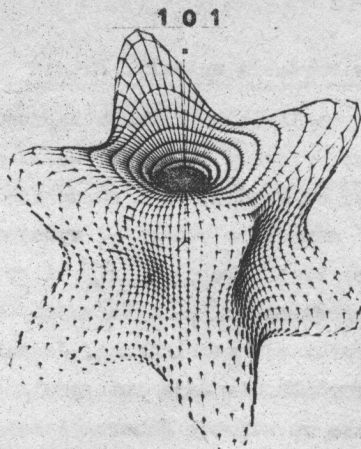
$$/5.87/ \quad \alpha = 6,$$

a odpowiednia "powierzchnia plastyczności" staje się sferą. Dla materiałów o silnej anizotropii sprężystej współczynnik α jest dużo mniejszy od dwóch.

Tak jest w przypadku miedzi, dla której

$$/5.88/ \quad \alpha = 0,627$$

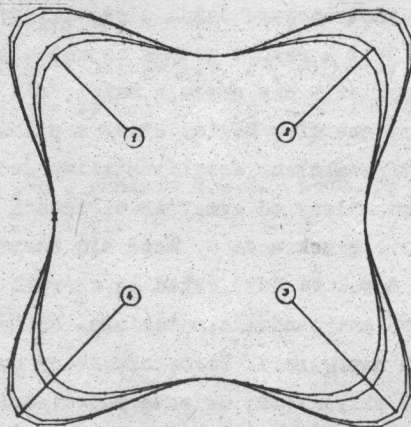
Odpowiednia "powierzchnia plastyczności" pokazana jest na rys.15.



Rys.15. "Powierzchnia plastyczności" rozciąganego monokryształu miedzi.

Jeżeli na prostych wychodzących z początku układu współrzędnych będziemy, zamiast naprężenia granicznego σ_y , odkładać wartości σ_y/η to otrzymamy zredukowane "powierzchnie plastyczności".

Porównanie przekrojów poprzecznych takich powierzchni, dla badanych materiałów pokazano na rys.16.



Rys.16. Przekroje poprzeczne zredukowanych "powierzchni plastyczności": 1/ wolframu, 2/ aluminium, 3/ niklu, 4/ miedzi.

5.3.3. Energetyczne kryteria uplastycznienia

Warunek uplastycznienia kryształów zaproponowany przez R.v.Misesa został wprowadzony w sposób formalny. W proponowanych w niniejszej pracy kwadratowych warunkach uplastycznienia, parametry funkcji F oznaczone przez k_{pq} , wyrażone są przez stałe mikrostrukturalne kryształu $\hat{m}_\alpha^{(w)}, \hat{n}_\alpha^{(w)}$ i ewentualnie przez moduły podatności sprężystej S_{ijkl} . Parametry te zyskały dzięki temu pewną interpretację mechaniczną. Jednakże, wprowadzone miary wyężenia kryształu nie mają interpretacji energetycznej podobnej do tej, jaką ma warunek Hubera-Misesa w klasycznej teorii plastyczności. Sformułowanie energetycznych warunków plastyczności dla dowolnego materiału anizotropowego umożliwia metoda stanów bezpiecznych zaproponowana przez J. RYCHLEWSKIEGO [92]. Ze względu na stosunkowo złożony aparat matematyczny potrzebny do skonstruowania metody ograniczymy się tylko do jej omówienia. Istota rzeczy polega na pewnym, szczególnym rozkładzie energii sprężystej materiału anizotropowego, analogicznym do rozkładu na energię odkształceń postaciowych i objętościowych w materiale izotropowym. Każda z wydzielonych porcji energii związana jest z pewnym stanem naprężenia. Wywołuje on odkształcenie, na którym nie pracują naprężenia związane z pozostałymi porcjami energii. Mówimy wtedy o stanach naprężenia energetycznie ortogonalnych. Jeżeli ustalimy jeden z nich, to liczba pozostałych zależy od symetrii własności sprężystych materiału, lecz nie przekracza 6. Może się zdarzyć, że niektóre z nich, dając dowolnie duży wkład do energii sprężystej, nie mogą spowodować uplastycznienia materiału. Mówimy wtedy o bezpiecznych stanach naprężenia. Pozostałe stany nazwiemy niebezpiecznymi. Jeżeli przyjmiemy, że suma odpowiednio ważonych energii sprężystych pochodzących od niebezpiecznych stanów naprężenia nie może przekroczyć pewnej wartości krytycznej, to otrzymamy najbardziej ogólne, energetyczne kryterium uplastycznienia.

nienia materiału anizotropowego.

5.4. Teoria wielokrotnych poślizgów

5.4.1. Podstawowy układ równań

Rozważmy kryształ sztywno-idealnie plastyczny z warunkiem plastyczności^{x/}

/5.89/

$$\Delta_{ij} H_{ijkl} S_{kl} - k^2 = 0.$$

Każde odkształcenie takiego kryształu spowodowane jest jednocześnie poślizgiem na wszystkich systemach, na których $\tau^{(n)}$ jest różne od zera. Prędkości poślizgów na każdym z nich spełniają związek

/5.90/

$$\frac{\dot{\gamma}^{(n)}}{\tau^{(n)}} = \dots = \frac{\dot{\gamma}^{(M)}}{\tau^{(M)}}.$$

Własności kryształu opisują: gęstość ρ , krytyczne naprężenie Schmid'a k_c oraz stałe mikrostrukturalne $\hat{m}_\alpha^{(n)}$ i $\hat{n}_\alpha^{(n)}$ definiujące układ systemów poślizgu.

Stan kryształu opisany jest przez: trzy składowe pola prędkości $v_i(x,t)$, trzy kąty Eulera $\varphi_m(t)$ oraz sześć składowych pól naprężenia $\sigma_{ij}(x,t)$.

Analogicznie jak w punkcie 4.2.1., budujemy układ równań wiążący powyższe wielkości

/5.91/

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,i} + \rho f_j &= \rho \dot{v}_j, \\ v_{i,j} &= \lambda H_{ijkl}(\varphi_m) S_{kl} + R_{ik}(\varphi_m) R_{jk}(\varphi_m), \\ \Delta_{ij} H_{ijkl} S_{kl} - k^2 &= 0, \end{aligned}$$

x/ Rozważania tego punktu bez trudu można przenieść na przypadek kryształu opisanego warunkiem plastyczności /5.81/, w którym uwzględniony jest wpływ anizotropii sprężystej.

w którym

$$/5.92/ \quad H_{ijkl} = \frac{1}{H} \sum_{\alpha=1}^M m_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} m_k^{(\alpha)} n_l^{(\alpha)},$$

$$/5.93/ \quad \mathcal{H}_{ijkl} = \frac{1}{4} (H_{ijkl} + H_{jikl} + H_{ijlk} + H_{jilk}),$$

$$/5.94/ \quad k^2 = 4 \mathcal{H}_{ijkl} \mathcal{H}_{ijlk} k_c^2.$$

W podanym układzie równań, R_{ij} jest macierzą obrotu reperu kierunków sieci wyrażoną przez trzy kąty Eulera /Dodatek A/. Układ 13 równań /5.91/, pozwala na wyznaczenie 13 nieznanych funkcji: $v_i, \varphi_m, \delta_{ij}$ oraz λ . Warunki początkowo-brzegowe dla $v_i(x, t)$ oraz $\delta_{ij}(x, t)$ zadajemy tak jak w klasycznej teorii plastyczności, natomiast dla kątów $\varphi_m(t)$ ustalamy warunki początkowe

$$/5.95/ \quad \varphi_m(t_0) = \varphi_m^0; \quad m = 1, 2, 3.$$

5.4.2. Przypadek pól jednorodnych

Szczególnie ważna jest zmiana orientacji sieci wywołana jednorodną deformacją kryształu, w którym jednocześnie panuje jednorodny stan naprężenia. Sytuacja taka była rozważana w przypadku kryształów z jednym systemem poślizgu /punkt 4.2.2./.

Przypominamy wyniki tych rozważań:

- równania ruchu i związki kinematycznej zgodności spełnione są tożsamościowo;
- wielkości opisujące stan kryształu to: 5 składowych $d_{ij}(t)$, 5 składowych $\Delta_{ij}(t)$ oraz 3 kąty Eulera $\varphi_m(t)$;
- w procesie plastycznej deformacji można zadać: n / $n = 1, 2, \dots, 5$ / składowych $d_{ij}(t)$ oraz $(5-n)$ składowych $\Delta_{ij}(t)$, a poszukiwać pozostałych składowych $d_{ij}(t)$, $\Delta_{ij}(t)$ oraz wielkości $\varphi_m(t)$;

- warunki początkowo-brzegowe nakładane na pole naprężenia i pole prędkości w przypadku pól niejednorodnych należy zastąpić trzema równaniami więzów narzuconych na całkowity spin kryształu.

Uwzględniając powyższe uwagi, otrzymujemy następujący układ równań opisujących proces jednorodnej deformacji rozciąganego w kierunku \underline{N} monokryształu /por./4.30-4.32//.

$$d_{ij} = \lambda H_{(ij)kl}(\varphi_m) S_{kl},$$

/5.96/

$$\omega_{ij} = \lambda H_{\langle ij \rangle kl}(\varphi_m) S_{kl} + \dot{R}_{ik}(\varphi_m) R_{jk}(\varphi_m),$$

$$s_{ij} \mathcal{H}_{ijke}(\varphi_m) S_{kl} - k^2 = 0,$$

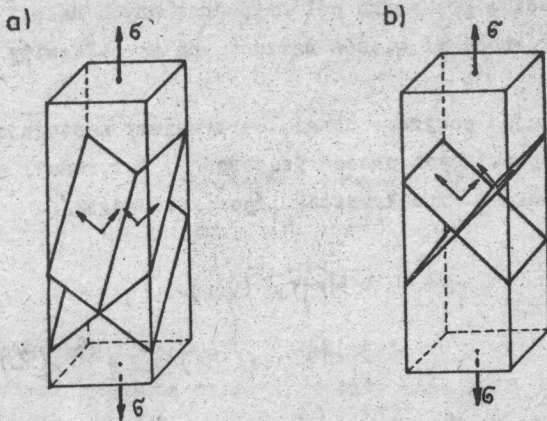
$$[\omega_{ij} + (\delta_{ik} - N_i N_k) d_{kj}] N_j = 0,$$

$$N_i \epsilon_{ijk} \omega_{jk} = 0.$$

Układ 12 niezależnych równań /5.96/ umożliwia znalezienie 12 nieznanych wielkości. /np.: $s_{ij}, \omega_{ij}, \varphi_m, \lambda$, jeżeli zadane są wszystkie składowe d_{ij} /.

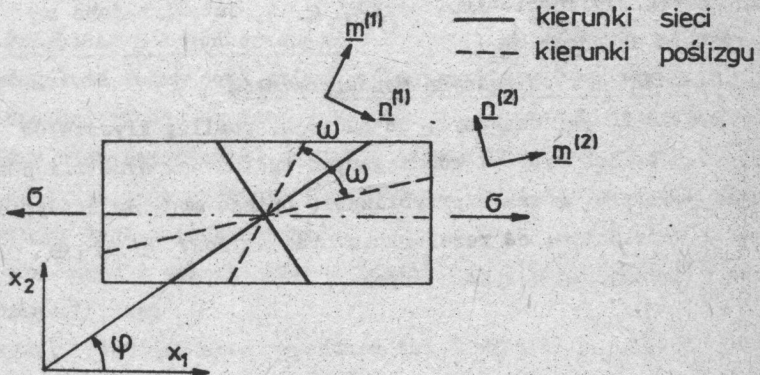
5.4.3. Analiza rozciąganych monokryształów

R.J.ASARO [2] zauważył, że podwójny poślizg kryształów typu f.c.c. lub b.c.c., rozciąganych wzdłuż osi symetrii płaszczyzn poślizgu, można w przybliżeniu opisać modelem dwuwymiarowym. W modelu tym, oś rozciągania oraz wersory $\underline{m}^{(1)}, \underline{n}^{(1)}, \underline{m}^{(2)}, \underline{n}^{(2)}$ leżą w jednej płaszczyźnie /rys.17/.



Rys.17. Schematyczne przedstawienie geometrii podwójnego poślizgu: a/ kryształu rzeczywistego, b/ wyidealizowanego, dwuwymiarowego modelu R.J.ASARO.

Zatem interesujące nas kryształy można badać w sytuacji pokazanej na rys.18.



Rys.18. Rozciąganie wyidealizowanego monokryształu z dwoma systemami poślizgu.

Znajdujący się w płaskim stanie odkształcenia monokryształ,
o długości początkowej

$$/5.97/ \quad l(t_0) = l_0,$$

jest rozciągany w kierunku N , równoległym do osi x_1 .

Kąt $\varphi(t)$ opisuje nachylenie pierwszego z kierunków reperu sieci do osi x_1 . Obie płaszczyzny poślizgu nachylone są symetrycznie do kierunków sieci. Nachylenie to opisuje kąt ω ustalony dla danego kryształu. Zauważmy, że kryształ może ulec deformacji przy dowolnej orientacji sieci, jeżeli tylko płaszczyzny poślizgu nie są ortogonalne. W tym ostatnim przypadku rozciąganie współosiowe z jednym z kierunków poślizgu nie może spowodować uplastycznienia.

Nachylenie płaszczyzn poślizgu do osi x_1 opisują wzory

$$/5.98/ \quad \begin{aligned} \Theta^{(1)} &= \varphi + \omega, \\ \Theta^{(2)} &= \varphi - \omega. \end{aligned}$$

Zakładamy, że w procesie rozciągania znana jest aktualna długość monokryształu $l(t)$. Zatem, znana jest składowa

$$/5.99/ \quad d_{11} = \frac{\dot{l}}{l} = d(t)$$

tensora prędkości deformacji.

Ponadto, przyjmujemy że

$$/5.100/ \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0,$$

natomiast

/5.101/

$$\sigma_{11} \equiv \sigma(t)$$

jest nieznanym naprężeniem rozciągającym.

Oprócz $\sigma(t)$ poszukiwać będziemy $d_{22}(t), d_{12}(t)$ oraz kąta $\varphi(t)$. Wielkości te obliczymy korzystając z równań /5.96/.

a/ Wzory ogólne

Wszystkie wielkości, niezbędne do sformułowania układu równań /5.96/ podane są w Dodatku C. Sam układ przyjmuje postać

$$d = -d_{22} = \frac{1}{4} \lambda \sigma (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega),$$

$$d_{12} = -\frac{1}{4} \lambda \sigma \sin 4\varphi \cos 4\omega,$$

/5.102/

$$\omega_{12} = -\frac{1}{4} \lambda \sigma \sin 2\varphi \cos 2\omega - \dot{\varphi},$$

$$\sigma^2 (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega) - 4k_c (1 + \cos^2 4\omega) = 0,$$

$$\omega_{12} = d_{12}.$$

Rozwiązując go otrzymamy

$$d_{22} = -d$$

/5.103/

$$d_{12} = -d \frac{\sin 4\varphi \cos 4\omega}{1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega},$$

$$\sigma = 2k_c \sqrt{\frac{1 + \cos^2 4\omega}{1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega}}, \quad */$$

$$\lambda = \frac{4d}{\sigma(1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega)},$$

x/ Zauważmy, że z wyjątkiem sytuacji gdy $\varphi = \omega = (2n+1)\frac{\pi}{4}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, σ jest dobrze określone.

oraz

/5.104/

$$\dot{\varphi} = d \frac{\sin 4\varphi \cos 4\omega - \sin 2\varphi \cos 2\omega}{1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega}$$

Równanie /5.104/, dla ustalonej wartości ω i warunku początkowego

/5.105/

$$\varphi(t_0) = \varphi_0$$

opisuje obrót rozciąganego monokryształu.

Związki pomiędzy składowymi d_{ij} oraz ω_{ij}^P a prędkościami poślizgów $\dot{\gamma}^{(1)}$ oraz $\dot{\gamma}^{(2)}$ są następujące:

/5.106/

$$d_{11} = \frac{1}{2} [\dot{\gamma}^{(1)} \sin 2(\varphi + \omega) + \dot{\gamma}^{(2)} \sin 2(\varphi - \omega)],$$

$$d_{12} = \frac{1}{2} [\dot{\gamma}^{(2)} \cos 2(\varphi - \omega) - \dot{\gamma}^{(1)} \cos 2(\varphi + \omega)],$$

$$\omega_{12}^P = \frac{1}{2} (\dot{\gamma}^{(1)} - \dot{\gamma}^{(2)}).$$

Równanie zgodności warunku plastyczności z prawem płynięcia ma postać

/5.107/

$$\bar{\sigma} (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega) + \dot{\varphi} \bar{\sigma} \sin 4\varphi \cos 4\omega = 0.$$

Korzystając z niego można pokazać następującą zależność:

/5.108/

$$\lambda = 2 \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \frac{1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega}{\sin 4\varphi \cos 4\omega (\sin 2\varphi \cos 2\omega - \sin 4\varphi \cos 4\omega)}$$

W celu przedyskutowania otrzymanych wyników rozpatrzmy kryształy o różnych wzajemnych położeniach dwóch płaszczyzn poślizgu. Położenie to opisuje kąt ω o którym wystarczy założyć, że należy do przedziału

$$/5.109/ \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Niektóre z wartości ω prowadzą do dwuwymiarowych modeli kryształów o interesujących własnościach.

Omówimy je kolejno.

b/ Przypadek ortogonalnych płaszczyzn poślizgu

Przypadek ten zachodzi, gdy

$$/5.110/ \quad \omega = \frac{\pi}{4}.$$

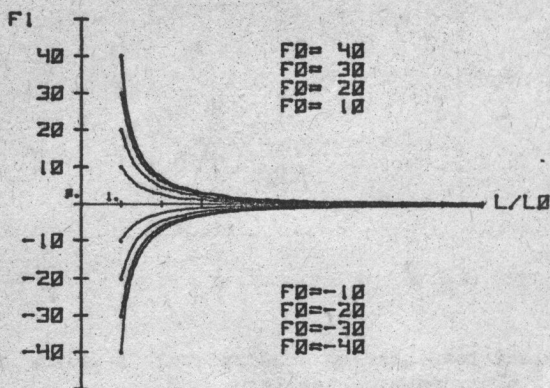
Podstawiając /5.110/ do wzorów /5.103-5.104/, otrzymamy

$$/5.111/ \quad \begin{aligned} d_{22} &= -d, \\ d_{12} &= d \operatorname{tg} 2\varphi, \\ \sigma &= 2k_c \sqrt{\frac{2}{1 + \cos 4\varphi}}, \\ \lambda &= \frac{4d}{\sigma(1 + \cos 4\varphi)} \end{aligned}$$

oraz

$$/5.112/ \quad \dot{\varphi} = -d \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Wykres zmiany kąta φ w procesie rozciągania, dla różnych wartości początkowych φ_0 , pokazany jest na rys.19.



Rys.19. Zależności kąta ψ od wydłużenia l/l_0 , dla monokryształu o ortogonalnych płaszczyznach poślizgu, przy różnych wartościach początkowych ψ_0 .

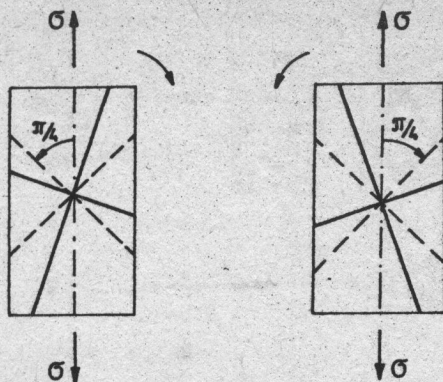
Analiza wzoru /5.112/ prowadzi do wniosku, że

$$/5.113/ \quad \dot{\psi} > 0, \quad \text{dla} \quad (2n-1)\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{n\pi}{2},$$

$$\dot{\psi} < 0, \quad \text{dla} \quad \frac{n\pi}{2} < \psi < (2n+1)\frac{\pi}{4},$$

gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Oznacza to, że w procesie plastycznego płynięcia obie płaszczyzny poślizgu "starają się" ustawić symetrycznie względem kierunku rozciągania /rys.20/.



Rys.20. Obroty sieci rozciąganego monokryształu z dwiema ortogonalnymi płaszczyznami poślizgu.

W położeniach tych, opisanych wartościami

$$/5.114/ \quad \varphi = \frac{n\pi}{2} ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

mamy

$$/5.115/ \quad \dot{\epsilon} = \dot{\varphi} = 0.$$

Ponieważ wzór /5.108/ przyjmuje teraz postać

$$/5.116/ \quad \lambda = - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \frac{1}{\sin^2 2\varphi},$$

to dla każdej wartości kąta φ różnej od opisanych wzorem /5.114/ zachodzi

$$/5.117/ \quad \dot{\epsilon} < 0.$$

Mamy więc do czynienia z efektem "geometrycznego osłabienia" idealnie plastycznego kryształu.

Na koniec zauważmy, że dla dowolnej orientacji sieci, w rozciągającym monokryształe o dwóch ortogonalnych systemach poślizgu, bezwzględne wartości $\tau^{(r)}$ na każdym z nich są takie same. Istotnie podstawiając /5.98/ oraz /5.110/ do wzoru

/5.118/

$$\tau^{(r)} = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta^{(r)}; \quad r = 1, 2,$$

otrzymamy

/5.119/

$$\tau^{(1)} = \frac{1}{2} \sigma \cos 2\varphi,$$

$$\tau^{(2)} = -\frac{1}{2} \sigma \cos 2\varphi.$$

Oznacza to, że $|\tau^{(r)}|$ osiąga wartość krytyczną k na obu systemach poślizgu jednocześnie. Zatem, w rozważanym przypadku, warunek uplastycznienia jest zgodny z prawem Schmid'a, jak i jego kwadratową aproksymacją. Natomiast oba porównywane modele kryształów są istotnie różne.

Powierzchnię plastyczności, generowaną przez prawo Schmid'a, tworzą dwie, identyczne pary hiperpłaszczyzn równoległych do osi ciśnienia i do prostej, na której leżą stany rozciągania nie powodujące uplastycznienia kryształu.

Pokrywanie się dwóch powierzchni plastyczności powoduje, że każdy ich punkt zachowuje się tak, jak gdyby znajdował się w narozu plastycznym. Dla danego stanu naprężenia różne prędkości poślizgu $\dot{\gamma}^{(1)}$ i $\dot{\gamma}^{(2)}$ mogą prowadzić do tej samej deformacji d_{ij}^p .

Natomiast w proponowanym modelu uśrednioną powierzchnię plastyczności tworzy jedna para hiperpłaszczyzn. Warunek całkowitego sprzężenia systemów poślizgu /Definicja 3/, narzuca równość $\dot{\gamma}^{(1)}$ i $\dot{\gamma}^{(2)}$. Dla danego stanu naprężenia prędkości poślizgów na poszczególnych systemach są dobrze określone.

Interesujące byłoby porównanie otrzymanych wyników z użytymi na podstawie teorii R.Hilla i J.R.Rice'a [49]. W teorii tej prędkość plastycznej deformacji d_{ij}^p i spin plastyczny ω_{ij}^p wyrażone są przez prędkości poślizgów $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ na poszczególnych systemach. Oczywiście, dla kryształu sztywno-idealnie plastycznego

$$/5.120/ \quad d_{ij}^p = d_{ij}.$$

W naszym przypadku, korzystając z /5.106/ otrzymujemy

$$/5.121/ \quad \begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{2} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} + \dot{\gamma}^{(\beta)}) \cos 2\varphi, \\ d_{12} &= \frac{1}{2} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} - \dot{\gamma}^{(\beta)}) \sin 2\varphi, \\ \omega_{12}^p &= \frac{1}{2} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} - \dot{\gamma}^{(\beta)}). \end{aligned}$$

Na ogół istnieje wiele kombinacji prędkości poślizgów $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$, które prowadzą do tej samej prędkości deformacji d_{ij}^p . Wybór właściwej bazuje na jednym z dwóch kryteriów [9]:

- 1° spośród wszystkich kombinacji $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$, które prowadzą do tej samej prędkości deformacji d_{ij}^p należy wybrać tę, dla której suma wartości bezwzględnych: $\sum_{\alpha=1}^M |\dot{\gamma}^{(\alpha)}|$ jest najmniejsza;
- 2° spośród wszystkich możliwych stanów naprężenia σ_{ij} , które prowadzą do tej samej prędkości deformacji d_{ij}^p i dla których spełniony jest warunek plastyczności, należy wybrać ten, dla którego prędkość dysypacji $\sigma_{ij} d_{ij}^p$ jest największa.

Niestety, żadne z powyższych kryteriów, w rozpatrywanym przypadku, nie pozwala na jednoznaczny wybór wielkości $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ i $\dot{\gamma}^{(\beta)}$. Dla dowolnych nieujemnych $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$, których suma jest ustalona, oba kryteria są spełnione.

Fakt ten uniemożliwia znalezienie wartości ω_{12}^p , a zatem i kąta obrotu sieci φ .

Tak więc, teoria R.Hilla i J.R.Rice'a nie opisuje obrotów sieci rozciąganego monokryształu, o dwóch ortogonalnych systemach poślizgu. Natomiast, otrzymane na jej podstawie pole prędkości deformacji i pole naprężenia są identyczne z tymi, które opisują wzory /5.111/.

c/ Przypadek kryształów plastycznie izotropowych

Bardzo interesująca jest sytuacja, gdy

$$/5.122/ \quad \omega = \frac{\pi}{8}, \quad \text{lub} \quad \omega = \frac{3}{8}\pi.$$

Wówczas, dla dowolnej orientacji sieci kryształu, składowe tensora plastycznej anizotropii \mathcal{H} są takie same i wynoszą /por. Dodatek C/

$$\mathcal{H}_{1111} = \mathcal{H}_{2222} = -\mathcal{H}_{1122} = \mathcal{H}_{1212} = \frac{1}{8},$$

/5.123/

$$\mathcal{H}_{1112} = \mathcal{H}_{2212} = 0.$$

Tensor \mathcal{H} jest więc tensorem izotropowym.

Generowany przez \mathcal{H} izotropowy warunek plastyczności ma postać

$$/5.124/ \quad (\Delta_{11} - \Delta_{22})^2 + 4\Delta_{12}^2 - 8k^2 = 0,$$

analogiczną do warunku Hubera-Misesa w płaskim stanie odkształcenia. Prędkość deformacji i stan naprężenia również nie zależą od orientacji sieci kryształu

/5.125/

$$d_{22} = -d,$$

$$d_{12} = 0,$$

$$\sigma = 2k_c,$$

$$\lambda = 4 \frac{d}{\sigma}.$$

Zatem w doświadczeniu makroskopowym kryształ zachowuje się tak, jak materiał izotropowy. Natomiast ruch sieci zależy od jej początkowej orientacji, ponieważ

$$/5.126/ \quad \dot{\varphi} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} d \sin 2\varphi.$$

W powyższym wzorze znak górny odnosi się do wartości ω równej $\frac{\pi}{8}$, dolny - do wartości $\frac{3}{8}\pi$.

Analiza wzoru /5.124/ dla $\omega = \frac{\pi}{8}$ prowadzi do wniosku, że

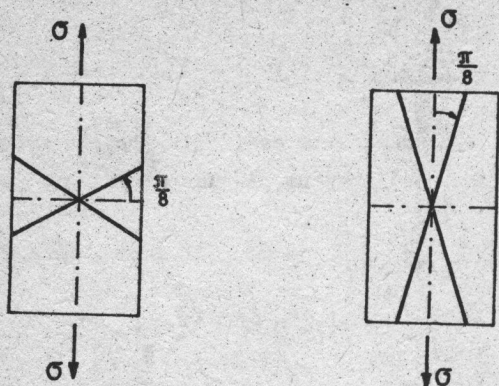
$$/5.127/ \quad \dot{\varphi} > 0, \quad \text{dla} \quad (2n-1)\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{n\pi}{2},$$

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \text{dla} \quad \varphi = \frac{n\pi}{2},$$

$$\dot{\varphi} < 0, \quad \text{dla} \quad \frac{n\pi}{2} < \varphi < (2n+1)\frac{\pi}{4},$$

gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Oznacza to, że jedna z osi symetrii płaszczyzn poślizgu dąży do pokrycia się z kierunkiem rozciągania monokryształu /rys.21/.



Rys.21. Graniczne położenie płaszczyzn poślizgu dla $\omega = \frac{\pi}{8}$.

W przypadku, gdy $\omega = \frac{3}{8}\pi$ znaki $\dot{\varphi}$ w relacjach /5.127/ zmieniają się na przeciwne.

Zauważmy, że dla dowolnej orientacji kryształu

$$\text{/5.128/} \quad \dot{\epsilon} = 0.$$

a równanie zgodności /5.107/ spełnione jest tożsamościowo. Oznacza to, że kryształ nie wykazuje efektu "geometrycznego wzmocnienia/osłabienia".

Porównamy otrzymane wyniki z wynikami jakie daje teoria R.Hilla i J.R.Rice'a. Ograniczymy się do przypadku $\omega = \frac{\pi}{8}$. Zgodnie z prawem Schmid'a, poślizg pojawi się na tej płaszczyźnie poślizgu, na której

$$\text{/5.129/} \quad \tau^{(n)} = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta^{(n)} = k_c.$$

Będzie to ta płaszczyzna poślizgu, która leży bliżej jednej z płaszczyzn granicznych pokazanych na rys.21. Gdy obie płaszczyzny poślizgu przyjmują położenie graniczne, a więc gdy

/5.130/

$$\varphi = n \frac{\pi}{2} ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

to mamy do czynienia z jednoczesnym poślizgiem na obu systemach. W przypadku pojedynczego poślizgu na pierwszym systemie, mamy

$$d_{22} = d,$$

$$d_{12} = d \operatorname{ctg} \left(2\varphi + \frac{\pi}{4} \right),$$

/5.131/

$$\sigma = 2k \frac{1}{\sin \left(2\varphi + \frac{\pi}{4} \right)},$$

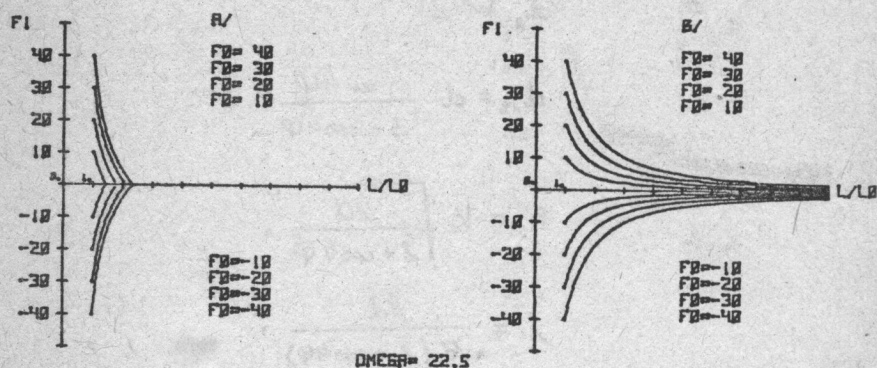
$$\lambda = 4 \frac{d}{\sigma} \frac{1}{\sin^2 \left(2\varphi + \frac{\pi}{4} \right)},$$

oraz

/5.132/

$$\dot{\varphi} = -d \operatorname{tg} \left(2\varphi + \frac{\pi}{4} \right).$$

Dla jednoczesnego poślizgu na obu systemach, otrzymujemy rozwiązanie identyczne z opisanym wzorami /5.125-5.126/. Widzimy, że teoria R.Hilla i J.R.Rice'a prowadzi do nieciągłej zmiany naprężenia σ , prędkości odkształcenia postaciowego d_{12} i kąta φ , przy przejściu od pojedynczego do podwójnego poślizgu. Dobrą ilustracją tego faktu jest rysunek 22. Porównano na nim zależności kąta φ od wydłużenia monokryształu l/l_0 , dla różnych wartości początkowych φ_0 .



Rys.22. Zależność kąta φ od wydłużenia l/l_0 , dla monokryształu o własnościach plastycznie izotropowych, przy różnych początkowych wartościach φ_0 : a/ wg teorii R.Hilla i J.R.Rice'a, b/ wg proponowanego modelu.

d/ "Płaskie modele kryształów f.c.c. i b.c.c."

W pracy [2], R.J.ASARO stwierdził, że modelując zachowanie się rozciąganych wzdłuż osi symetrii płaszczyzn poślizgu rzeczywistych kryształów, można przyjąć

/5.133/

$$\omega = \frac{\pi}{6},$$

- dla kryształów typu f.c.c.,

/5.134/

$$\omega = \frac{\pi}{3},$$

- dla kryształów typu b.c.c.

Dla obu przypadków otrzymujemy

$$d_{22} = -d$$

$$d_{12} = d \frac{\sin 4\varphi}{2 + \cos 4\varphi},$$

/5.135/

$$\sigma = k_c \sqrt{\frac{10}{2 + \cos 4\varphi}},$$

$$\lambda = \frac{8d}{\sigma (2 + \cos 4\varphi)},$$

oraz

/5.136/

$$\dot{\varphi} = -d \frac{\sin 4\varphi \mp \sin 2\varphi}{2 + \cos 4\varphi}.$$

Górny znak w /5.136/ odnosi się do wartości ω równej $\frac{\pi}{6}$,
dolny - do $\omega = \frac{\pi}{3}$.

Zgodnie z teorią R.Hilla i J.R.Rice'a mielibyśmy dwa rozwiązania:

1° pokrywające się z opisanym wzorami /5.135-5.136/, gdy

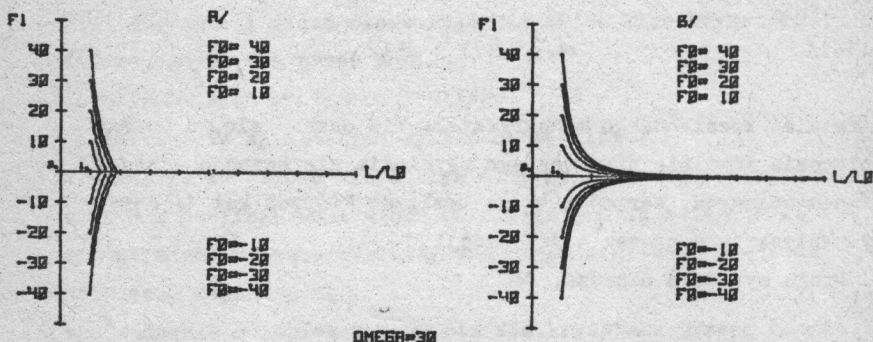
/5.137/

$$\varphi = \frac{n\pi}{2}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

mamy wtedy do czynienia z jednoczesnym poślizgiem na obu systemach;

2° opisanym wzorami /5.131-5.132/, w których wartość $\frac{\pi}{4}$ należy zastąpić wartością $\frac{\pi}{6}$, dla "płaskiego modelu f.c.c.", lub wartością $\frac{\pi}{3}$ dla "płaskiego modelu b.c.c.", gdy φ przyjmuje wartości różne od podanych w /5.137/; mamy wtedy do czynienia z poślizgiem tylko na pierwszym systemie.

Podobnie jak poprzednio widzimy, że teoria R.Hilla i J.R. Rice'a prowadzi do nieciągłości rozwiązań przy przejściu od pojedynczego do podwójnego poślizgu. Rys.23 przedstawia zależność kąta φ od wydłużenia l/l_0 , dla "płaskiego monokryształu f.c.c.", przy różnych początkowych wartościach φ_0 .



Rys.23. Zależność kąta φ od wydłużenia l/l_0 , dla "płaskiego monokryształu f.c.c.", przy różnych początkowych wartościach φ_0 : a/ wg teorii R.Hilla i J.R.Rice'a, b/ wg proponowanego modelu.

e/ Szczególne orientacje sieci

Powróćmy do ogólnych wzorów /5.103-5.104/. Widzimy, że w procesie rozciągania monokryształu o dowolnym nachyleniu płaszczyzn poślizgu, ale takim, że

$$/5.138/ \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{4}, \text{ lub } \frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2},$$

może zdarzyć się, że kąt φ osiągnie 1° jedną z wartości:

$$/5.139/ \quad \varphi' = \frac{n\pi}{2}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

lub

2° jedną z wartości:

$$/5.140/ \quad \varphi'' = (4n \pm 1) \frac{\pi}{4}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

W pierwszej sytuacji

$$/5.141/ \quad d_{12} = \dot{\sigma} = \dot{\varphi} = 0.$$

Zatem sieć rozciąganego monokryształu nie obraca się, a on sam w procesie idealnie plastycznego płynięcia nie doznaje odkształceń postaciowych. Wartości φ' są tymi, do których kąt φ dąży asymptotycznie w procesie deformacji.

Druga sytuacja oznacza, że

$$/5.142/ \quad d_{12} = \dot{\sigma} = 0,$$

ale

$$/5.143/ \quad \dot{\varphi} \neq 0.$$

Oznacza to, że stan idealnie plastycznego płynięcia i brak odkształceń postaciowych monokryształu jest stanem chwilowym.

Po przekroczeniu przez kąt φ wartości φ'' następuje zmiana kierunku ścinania rozciąganego materiału.

Rozdział VI

ZAKOŃCZENIE

6.1. Podsumowanie

W moim przekonaniu praca zawiera następujące nowe elementy:

- sformułowanie ścisłego modelu kryształu deformującego się przez poślizg;
- zdefiniowanie i szczegółowe zbadanie dwóch klas kryształów deformujących się przez poślizg:
 - a/ o niezależnych systemach poślizgu,
 - b/ o całkowicie sprzężonych systemach poślizgu;
- wykazanie, że budowa sieci krystalicznej i sposób sprzężenia systemów poślizgu całkowicie określają postać związków konstytutywnych wiążących plastyczną część gradientu prędkości ze stanem naprężenia;
- wprowadzenie do opisu zachowania się kryształu trzech dodatkowych równań konstytutywnych dla składowych spinu plastycznego, w wyniku czego otrzymuje się jawny opis obrotów sieci kryształu;
- wprowadzenie gładkiej, kwadratowej aproksymacji prawa Schmid'a, szczegółowe jej zbadanie, a następnie porównanie z wyjściowym kryterium;
- uogólnienie prawa Schmid'a i jego kwadratowej aproksymacji na kryterium uplastycznienia, które uwzględnia sprężystą anizotropię materiału;
- sformułowanie zamkniętego układu równań teorii plastycznego płynięcia kryształów;
- szczegółową analizę zachowania się dwuwymiarowych modeli rozciąganych monokryształów, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu obrotów sieci na proces plastycznego płynięcia.

6.2. Dalsze kierunki badań

Otrzymane w niniejszej pracy wyniki sugerują potrzebę prowadzenia dalszych intensywnych badań w następujących kierun-

kach:

- a/ w ramach teorii plastyczności pojedynczych kryształów, nad
uwzględnieniem:
- deformacji sprężystej [3],
 - wpływu naprężeń wewnętrznych na kształt powierzchni plas-
tyczności i proces płynięcia [6-7],
 - zjawisk wywołanych lepkością materiału [3],
- b/ w ramach opisu plastycznego płynięcia polikryształów, nad
- ścisłym opisem funkcji rozkładu orientacji, dla sieci zia-
ren ośrodka polikrystalicznego [15],
 - sformułowaniem kryterium wyężenia polikryształu [23], [37],
- c/ w ramach zastosowań i analizy numerycznej, nad
- wpływem orientacji sieci ziaren na proces lokalizacji od-
kształceń plastycznych w wyrobach metalowych [91],
 - wpływem orientacji sieci ziaren na proces pęknięcia zmęcze-
niowego metali [57], [78], [38-40],
 - sformułowaniem przyrostowym otrzymanych równań, zalgoryt-
mizowaniem procedur obliczeń i włączeniem do pakietu progra-
mów metody elementów skończonych [54-55], [108], [32-36],
[41], [43].

LITERATURA

1. E.N.da C.ANDREADE, Slip bands with Hg, Pb, Sn. *Phil.Mag.*27, 1914, 869.
2. R.J.ASARO, Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals, *Acta Metall.* 27, 1979, 445-453.
3. R.J.ASARO, Crystal plasticity, *J.Appl.Mech.* 50, 1983, 921-934.
4. R.J.ASARO, J.R.RICE, Strain localization in ductile crystals, *J.Mech.Phys.Solids* 25, 1977, 309-338.
5. A.BALTOW, A.SAWCZUK, A rule of anisotropic hardening, *Acta Mech.* 1, 2, 81-92, 1965.
6. S.B.BATDORF, B.BUDIANSKY, A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, NACA, Tech.Notes 1871, April 1949.
7. S.B.BATDORF, B.BUDIANSKY, Polyaxial stress-strain relations of strain hardening metals, *J.Appl.Mech.* 21, 1954, 323-326.
8. M.BERVEILLER, A.ZAOU, Modelling of the plastic behaviour of inhomogeneous media, *J.Eng.Mat.Tech.* 106, 1984, 295.
9. J.F.W.BISHOP, R.HILL, A theory of plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses, *Phil. Mag.*, 1951, 414-427.
10. J.F.W.BISHOP, R.HILL, A theoretical derivation of plastic properties of a polycrystalline face-centred metal, *Phil. Mag.* 42, 1951, 1298-1307.
11. A.BLINOWSKI, On a model of macroscopic flow rule for BCC-lattice metals in thermal-activation region, *J.Tech.Phys.* 21, 3, 1980, 367-374.
12. A.BLINOWSKI, On some micromechanism of memory of metals in the case of nonstationary processes of deformation in thermal activation range, *Arch.Mech.* 34, 1, 1982, 39-48.
13. J.P.BOEHLER, A.SAWCZUK, Équilibre limite des sols anisotropes, *J.de Mécanique* 9, 1970, 5-33.

14. H.G.BUEREN, Imperfections in Crystals, North-Holland, Amsterdam, 1960.
15. M.J.BUNGE, Matematische Methoden der Texturanalyse, Akademie Verlag, Berlin, 1969.
16. G.R.CANOVA, V.F.KOCKS, J.J.JONAS, Theory of torsion texture development, Acta Metall. 32, 1984, 211.
17. A.H.COTTRELL, Dislocations and Plastic Flow of Crystals, Clarendon Press, Oxford, 1953.
18. P.COULOMB, Les textures dans les métaux de réseau cubique, Dunod, Paris 1972.
19. Y.F.DAFALIAS, Corotational rates for kinematic hardening at large deformations, J.Appl.Mech. 50, 1983, 561-565.
20. J.DIEHL, Zugverformung von Kupfer-Einkristallen, Z.Metallk. 47, 1956, 331-343.
21. C.FRESSENGEAS, A.MOLINARI, Modèles d'écroûissage cinématique en grande deformation, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, II372, 1983.
22. W.GAMBIN, On the Prandtl-Reuss equations for a large plastic strain, Arch.Mech. 36, 1984, 293-296.
23. W.GAMBIN, Równania ewolucji opisujące obroty sieci krystalicznej w polikryształach, Prace IPPT, 36/1986.
24. W.GAMBIN, The Schmid law and its quadratic approximation form f.c.c. crystals, /w przygotowaniu/.
25. W.GAMBIN, A model of rigid-ideally plastic crystal, J.Tech. Physics /w druku/.
26. W.GAMBIN, A simplified model of rigid-ideally plastic crystal, J.Tech.Physics /w druku/.
27. W.GAMBIN, On isochoric motions with a family of instantaneously inextensible planes, Arch.Mech. 24, 1972, 251-267.
28. W.GAMBIN, On pure shear of incompressible continuous media, Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.SciTechn. 20, 1972, 183-188.

29. W.GAMBIN, Pewna klasa rozwiązań zagadnienia trójwymiarowego dla materiału sztywno-idealnie plastycznego z rodziną chwilowo nierozciągliwych płaszczyzn. Rozpr.Inż. 20, 1972, 233-240.
30. W.GAMBIN, Stany graniczne skręcanych elementów z liniowo zmiennym ciśnieniem bocznym, Rozpr.Inż., 21, 1973, 37-54.
31. W.GAMBIN, Przestrzenne przepływy idealnie plastyczne z rodziną chwilowo nierozciągliwych płaszczyzn, Rozprawa doktorska, IPPT, Warszawa, 1972.
32. W.GAMBIN, Aproksymacyjna metoda elementów skończonych, Prace IPPT 26/1975.
33. W.GAMBIN, On the finite element approximating method, Bul. Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Techn. 23, 1975, 509-513.
34. W.GAMBIN, A method of large finite elements, Comp.Meth.Appl. Mech.Engng. 11, 1977, 351-365.
35. W.GAMBIN, Technika dużych przyrostów w analizie sprężysto-plastycznej. Rozpr.Inż. 31, 1983, 63-76.
36. W.GAMBIN, Macierz sztywności elementu z osobliwym gradientem funkcji kształtu, Prace IPPT 64/1979.
37. W.GAMBIN, Crystals and polycrystals as standard generalized materials, VI Sympozjum Polsko-Francuskie, Grenoble, sierpień 1987.
38. W.GAMBIN, An overall model of fatigue crack growth, Res Mechanics 19, 1986, 247-284.
39. W.GAMBIN, Modelowanie procesu zmęczeniowego wzrostu szczeliny, cz.I.: Model strukturalny elementu pękającego, Rozpr. Inż. 35, 1, 1987, 3-25.
40. W.GAMBIN, Modelowanie procesu zmęczeniowego wzrostu szczeliny, cz.II: Propagacja szczeliny przy stałej amplitudzie naprężeń, Rozpr.Inż. 35, 1, 1987, 27-40.
41. W.GAMBIN, P.LIPIŃSKI, G.PLUVINAGE, A singular element for a new experimental method of fracture toughness determination, Engng Fracture Mech. 18, 3, 1983, 567-575.

42. W.GAMBIN, J.RYCHLEWSKI, Spatial plastic flows with a family of instantaneously inextensible planes, Arch.Mech. 23, 1971, 765-787.
43. W.GAMBIN, Y.YAMADA, Crack tip singularity analysis by global-local model of large finite elements, Bul.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Techn. 27, 1979, 147-154.
44. B.HALPHEN, NGUYEN QUOC SON, Sur les materiaux standarde généralise, Journal de Mecanique 14, 1975, 39-63.
45. N.HANSEN, Polycrystalline strengthening, Met.Trans. 16A, 1985, 2167-2190.
46. K.S.HAVNER, On the mechanics of crystalline solids, J.Mech. Solids 21, 1973, 383-394.
47. K.S.HAVNER, A.H.SHALABY, A simple mathematical theory of finite distortional latent hardening in single crystals, Proc. Roy.Soc. 358, ser.A, 1977, 47-70.
48. K.S.HAVNER, A.H.SHALABY, Further investigation of new hardening law in crystal plasticity, J.Appl.Mech. 45, 1978, 500-507.
49. R.HILL, J.R.RICE, Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain, J.Mech.Phys.Solids 20, 1972, 401-413.
50. K.A.HOLSAPPLE, Elastic-plastic theory and invariance requirements, Acta Mech. 17, 1973, 277.
51. R.W.K.HONEYCOMBE, The Plastic Deformation of Metals, E.Arnold Ltd 1984.
52. K.IKEGAMI, Experimental plasticity on the anisotropy of metals, Colloques internationales du CNRS, 1977, 295.
53. K.KARNOP, G.SACHS, Crystallographic glide strain, Z.Physic 41, 1927, 116.
54. M.KLEIBER, Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych; teoria i numeryczna analiza konstrukcji /praca habilitacyjna/, Prace IPPT 13/1978.
55. M.KLEIBER, Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum, PWN, Warszawa, 1985.

56. M.KLEIBER, B.RANIECKI, Elastic-plastic materials at finite strain in: Plasticity Today, ed.A.Sawczuk, Elsevier Ltd, 1983.
57. S.KOCANDA, Zmęczeniowe pękanie metali, WNT, Warszawa 1985.
58. U.F.KOCKS, G.R.CANOVA, J.J.JONAS, Yield vectors in f.c.c. crystals, Acta metall. 31, 8, 1983, 1243-1252.
59. A.F.KREGERS, Uprugij potencjał w teorijach lokalności deformacji, Mechanika polimerow, 1968, 406-412.
60. A.F.KREGERS, Issledowanije powierchnostiej nagruženija w teorii lokalności deformacji, Mechanika polimerow, 1971, 594-598.
61. E.KRÖNER, Zur plastischen Verformung der Vielkristalls, Acta Met. 9, 1961, 155.
62. E.KRÖNER, Dislocation field theory, in Theory of Crystal Defects, Academia, Prague, 1966.
63. T.KUTRYKA, M.ŻYCZKOWSKI, A geometric description of distortional plastic hardening of deviatoric materials, Arch. Mech. 37, 1985, 231-241.
64. E.H.LEE, Elastic-plastic deformations at finite strains, J.Appl.Mech. 36, 1969, 1-6.
65. E.H.LEE, R.L.MALLET, T.B.WERTHEIMER, Stress analysis for kinematic hardening at finite - deformation plasticity, J.Appl.Mech. 50, 1983, 554-560.
66. T.LEFFERS, A kinematical model for the plastic deformation of face centres cubic polycrystals, Riso Report No 302, 1975, 114.
67. T.H.LIN, Physical theory of plasticity, Adv.Appl.Mech. 11, 1971, 256-300.
68. B.LORET, On the effects of plastic rotations in the finite deformation of anisotropic materials, Mechanics of Materials 2, 1983, 287-304.
69. G.J.LUBARSKI, Teoria grup i jej zastosowania w fizyce, PWN, Warszawa 1961.
70. A.A.MALMAYSTER, Osnowy teorii lokalności deformacji /obzor 1/ Mechanika polimerow, 1965, 12-27.

71. A.A.MALMAISTER, Osnowy teorii lokalności deformacji /obзор 2/, Mechanika polimerow, 1969, 22-29.
72. J.MANDEL, Généralization de la théorie de plasticité de W.T. Koiter, Int.J.Solids Structures 1, 1965, 273-295.
73. J.MANDEL, Plasticité Classique et Viscoplasticite, Udine 1971.
74. J.MANDEL, Définition d'un repere privilegie pour l'étude des transformations anélastiques du polycrystal, J.de Mecanique theorique et appliquée 1, 1982, 7-23.
75. R.v.MISES, Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, ZAMM 8, 1928, 161-185.
76. Z.MRÓZ, A description of workhardening of metals with application to variable loading, in Foundation of Plasticity, ed.A.Sawczuk, Nordhoff, 1972.
77. J.F.NEY, Własności fizyczne kryształów w ujęciu macierzowym i tensorowym, PWN, Warszawa 1962.
78. R.NOWAK, Wpływ tekstury krystalograficznej na proces pęknięcia metali, rozprawa doktorska, AGH, Kraków 1983.
79. W.OLSZAK, J.OSTROWSKA, The plastic potential in the theory of anisotropic elastic-plastic solids, Engng Fract.Mech. 21, 4, 1985, 625-632.
80. W.OLSZAK, W.URBANOWSKI, The tensor of moduli of plasticity, Bull.Acad.Polon.Sci, Cl.4, 1, 1957, 39-45.
81. W.OLSZAK, W.URBANOWSKI, The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies, Arch.Mech.Stos. 8, 1956, 671-694.
82. M.PEACH, J.S.KOEHLER, The forces exerted on dislocations and stress fields produced by them, Phys.Rev. 80, 1950, 436.
83. P.PERZYNA, On constitutive modelling of dissipative solids for plastic flow, instability and fracture, in Plasticity Today, Int.Symp., Udine, June 27-30, 1983, Elsevier 1984.

84. P.PERZYNA, Dependence of fracture phenomena upon the evolution of constitutive structure of solids, Arch.Mech. 37, 1985, 481-501.
85. A.PHILLIPS, H.MOON, An experimental investigation concerning yield surfaces and loading surfaces, Acta Mech. 27, 1977, 91.
86. D.PIERCE, R.J.ASARO, A.NEEDLEMAN, An analysis of nonuniform and localized deformation in ductile single crystals, Acta metall. 30, 1982, 1087-1119.
87. J.POSPIECH, W. PRUSZKOWSKI, J.JURA, J.KRÓL, Proc. of the Forth Int.Conf. on Texture and Properties of Materials, Cambridge 1975.
88. B.RANIECKI, Thermodynamic Aspects of Cyclic and Monotonic Plasticity, Lecture Notes, CISM, Udine 1983.
89. J.R.RICE, Inelastic constitution relations for solids: an internal-variable theory and its application to metal plasticity, J.Mech.Phys.Solids. 19, 1971, 433-435.
90. D.ROGULA, Dynamika defektów w ośrodkach dyskretnych, w Teorii Defektów w Ośrodkach Stałych, pod red. W.W.Kostrowa, I.A.Kunina, D.Roguli, Ossolineum 1973.
91. J.W.RUDNICKI, J.R.RICE, Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, J.Mech. Phys.Solids. 23, 1975, 371-394.
92. J.RYCHLEWSKI, Rozłożenijs uprugojs energii i kriterijs predielnosti, Uspiechi miechaniki 7, 1984, 51-80.
93. J.RYCHLEWSKI, On thermoelastic constants, Arch.Mech. 36, 1, 1984, 77-95.
94. E.SCHMID, Proc.Int.Congr.Appl.Mech., Delft, p.342, 1924.
95. E.SCHMID, Crystallographic glide strain, Z.Physik 40, 1926, 54.
96. E.SCHMID, W.BOAS, Bemerkungen zur Kristalplastizitat, Z.f. Phys. 56, 1929, 516-523.
97. E.SCHMID, W.BOAS, Zur Fliesbedingung von Kristallen, Z.f. Phys. 56, 1929, 828-830.
98. E.SCHMID, W.BOAS, Plasticity of Crystals, F.A.Hughes, London 1950.

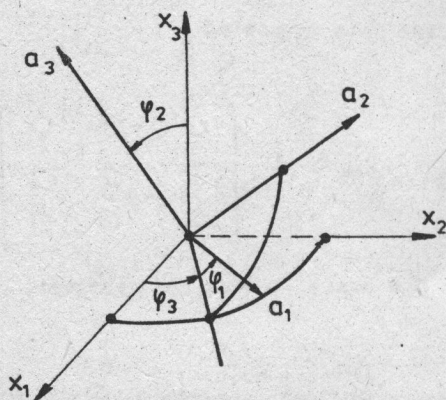
99. A. SEEGER, The mechanism of glide and work-hardening in face-centered-cubic and hexagonal closed packed metals, Int. Conf. Dislocations and Mechanical properties of Crystals, Lake Placid 1956.
100. W. SZCZEPIŃSKI, On the effect of plastic deformation on the yield condition, AMS 2, 1963, 15.
101. W. SZCZEPIŃSKI, Introduction to the Mechanics of Plastic Forming of Metals, PWN, Warszawa 1979.
102. G. I. TAYLOR, Simple and double glide in compression, Proc. Roy. Soc. 116, 1927, 16.
103. G. I. TAYLOR, Simple and double glide in compression, Proc. Roy. Soc. 116, 1927, 39.
104. G. I. TAYLOR, Plastic strain in metals, J. Inst. Metals 62, 1938, 307-374.
105. C. TEODOSIU, Opis sprężysto-lepkosprężystych własności pojedynczych kryształów, w Termoplastyczności pod red. P. Perzyny, Ossolineum, 1975.
106. G. WASSERMAN, J. GREWEN, Texturen metallischer Werkstoffe, Springer - Verlag, 1962.
107. K. WIERZBANOWSKI, Z. JASIEŃSKI, Simulation numérique de la deformation d'un crystallite individuel au cours de laminage, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech. 25, 1977, 7.
108. O. C. ZIENKIEWICZ, Metoda elementów skończonych, Arkady Warszawa, 1972.
109. M. ŻYCZKOWSKI, Combined Loading in the Theory of Plasticity, PWN, 1981.

DODATEK A: Kąty Eulera

Reper kierunków sieci o osiach $\{a_1, a_2, a_3\}$ można otrzymać w wyniku obrotu układu współrzędnych $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Zgodnie z rys.24, obrót ten jest złożeniem /69/:

- a/ obrotu wokół osi x_3 o kąt φ_1 , $\{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 = x_3\}$;
 b/ obrotu wokół osi \bar{x}_1 o kąt φ_2 , $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\} \rightarrow \{\bar{x}_1 = \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$;
 c/ obrotu wokół osi \bar{x}_3 o kąt φ_3 , $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\} \rightarrow \{a_1, a_2, a_3 = \bar{x}_3\}$.



Rys.24. Trzy kąty Eulera /wg[69]/.

Powyższa procedura prowadzi do następującej macierzy obrotu

$$/A.1/ \quad R_{di} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3, \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3, & \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \\ -\sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3, & -\sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2, & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

DODATEK B: Monokryształ z jednym systemem poślizgu
Obrót sieci opisuje macierz /rys.9/

$$\text{/B.1/} \quad R_{\alpha i} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a odpowiadający jej spin ma postać

$$\text{/B.2/} \quad \omega_{\alpha\beta}^L = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Składowe \underline{m} oraz \underline{n} w bazie $\{\underline{a}_\alpha\}$ są następujące:

$$\text{/B.3/} \quad \hat{m}_\alpha = \begin{Bmatrix} \cos \omega \\ -\sin \omega \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \hat{n}_\alpha = \begin{Bmatrix} \sin \omega \\ \cos \omega \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Natomiast w bazie $\{\underline{e}_i\}$ mamy

$$\text{/B.4/} \quad m_i = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad n_i = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Nieznikające składowe H_{ijkl} związane są z kątem θ związkami

$$H_{1111} = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta = H_{2222},$$

$$H_{1122} = -\frac{1}{4} \sin^2 2\theta = H_{2211},$$

$$H_{1112} = -\frac{1}{8} (\sin 4\theta + 2 \sin 2\theta) = H_{1211},$$

$$H_{1121} = -\frac{1}{8} (\sin 4\theta - 2 \sin 2\theta) = H_{2111},$$

$$H_{2212} = \frac{1}{8} (\sin 4\theta + 2 \sin 2\theta) = H_{1222},$$

$$H_{2221} = \frac{1}{8} (\sin 4\theta - 2 \sin 2\theta) = H_{2122},$$

$$H_{1122} = \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3),$$

$$H_{1221} = \frac{1}{8} (\cos 4\theta - 1) = H_{2112},$$

$$H_{2121} = \frac{1}{8} (\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3).$$

/B.5/

Podział na część symetryczną i antysymetryczną tensora H_{ijkl} względem dwóch pierwszych indeksów, prowadzi do wzorów

$$H_{(12)11} = -\frac{1}{8} \sin 4\theta,$$

$$H_{(12)22} = \frac{1}{8} \sin 4\theta,$$

$$H_{(12)12} = \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 2 \cos 2\theta + 1),$$

$$H_{(12)21} = \frac{1}{8} (\cos 4\theta - 2 \cos 2\theta + 1),$$

/B.6/

oraz

/B.7/

$$H_{\langle 12 \rangle 11} = -\frac{1}{4} \sin 2\theta,$$

$$H_{\langle 12 \rangle 22} = \frac{1}{4} \sin 2\theta,$$

$$H_{\langle 12 \rangle 12} = \frac{1}{4} (\cos 2\theta + 1),$$

$$H_{\langle 12 \rangle 21} = \frac{1}{4} (\cos 2\theta - 1).$$

Tensor \mathcal{H}_{ijkl} ma składowe

$$\mathcal{H}_{1111} = \mathcal{H}_{2222} = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta,$$

$$\mathcal{H}_{1122} = -\frac{1}{4} \sin^2 2\theta,$$

$$\mathcal{H}_{1112} = -\frac{1}{8} \sin 4\theta,$$

$$\mathcal{H}_{2212} = \frac{1}{8} \sin 4\theta,$$

$$\mathcal{H}_{1212} = \frac{1}{4} \cos^2 2\theta.$$

/B.8/

Na podstawie powyższych wzorów otrzymujemy dla płaskiego stanu odkształcenia:

- potencjał plastyczny

/B.9/

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \frac{1}{8} [& (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \sin^2 2\theta - (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sigma_{12} (\sin 4\theta + \\ & + 2 \sin 2\theta) - (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sigma_{21} (\sin 4\theta - 2 \sin 2\theta) + \\ & + 4 (\sigma_{12} \cos^2 \theta - \sigma_{21} \sin^2 \theta)^2] - \frac{1}{2} k_e^2, \end{aligned}$$

- warunek plastyczności

/B.10/

$$f = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \sin^2 2\theta - 2(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sigma_{12} \sin 4\theta + 4\sigma_{12}^2 \cos^2 2\theta - 4k_c^2 = 0,$$

- prawo płynięcia

/B.11/

$$d_{11}^p = -d_{22}^p = \frac{1}{8} \lambda [2(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin^2 2\theta + \sigma_{12} \sin 4\theta],$$

$$d_{12}^p = -\frac{1}{8} \lambda [(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 4\theta + 2\sigma_{12} \cos^2 2\theta],$$

- dodatkowe równanie konstytutywne

/B.12/

$$\omega_{12}^p = -\frac{1}{4} \lambda (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 4\theta,$$

- warunek zgodności

/B.13/

$$[(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin^2 2\theta - \sigma_{12} \sin 4\theta](\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}) +$$

$$- [(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 4\theta - 4\sigma_{12} \cos^2 2\theta] \dot{\sigma}_{12} +$$

$$+ [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \sin 4\theta - 4(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 4\theta +$$

$$- 4\sigma_{12}^2 \sin 4\theta] \cdot \dot{\theta} = 0.$$

DODATEK C: Monokryształ z dwoma systemami poślizgu

Macierz obrotu sieci i odpowiadający jej spin opisane są wzorami /B.1-B.2/

Składowe $\underline{m}^{(r)}$ oraz $\underline{n}^{(r)}$ / $r=1,2$ / w bazie $\{\underline{a}_\alpha\}$ są następujące /rys.18/:

$$/C.1/ \quad \hat{m}_\alpha^{(r)} = \begin{Bmatrix} \cos \omega \\ (-1)^{r+1} \sin \omega \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \hat{n}_\alpha^{(r)} = \begin{Bmatrix} \sin \omega \\ (-1)^r \cos \omega \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Natomiast w bazie $\{\underline{e}_i\}$ mamy

$$/C.2/ \quad m_i = \begin{Bmatrix} \cos \theta^{(r)} \\ \sin \theta^{(r)} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad n_i = (-1)^r \begin{Bmatrix} -\sin \theta^{(r)} \\ \cos \theta^{(r)} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Nieznikające składowe $H_{ijkl}^{(r)}$ związane są z kątami $\theta^{(r)}$ związkami

$$/C.3/ \quad \begin{aligned} H_{1111}^{(r)} &= H_{2222}^{(r)} = -H_{1122}^{(r)} = -H_{2211}^{(r)} = \\ &= -H_{1221}^{(r)} = -H_{2112}^{(r)} = \cos^2 \theta^{(r)} \sin^2 \theta^{(r)}, \\ H_{1112}^{(r)} &= H_{1211}^{(r)} = -H_{2212}^{(r)} = -H_{1222}^{(r)} = -\cos^3 \theta^{(r)} \sin \theta^{(r)}, \\ H_{1121}^{(r)} &= H_{2111}^{(r)} = -H_{2221}^{(r)} = -H_{2122}^{(r)} = \cos \theta^{(r)} \sin^3 \theta^{(r)}, \\ H_{1212}^{(r)} &= \cos^4 \theta^{(r)}, \\ H_{2121}^{(r)} &= \sin^4 \theta^{(r)}. \end{aligned}$$

Podział na części symetryczne i antysymetryczne tensorów $H_{ijkl}^{(v)}$ prowadzi do wzorów

$$\begin{aligned} H_{(12)11}^{(v)} &= -H_{(12)22}^{(v)} = -\frac{1}{8} \sin 4\theta^{(v)}, \\ /C.4/ \quad H_{(12)12}^{(v)} &= \frac{1}{8} (\cos 4\theta^{(v)} + 2 \cos 2\theta^{(v)} + 1), \\ H_{(12)21}^{(v)} &= \frac{1}{8} (\cos 4\theta^{(v)} - 2 \cos 2\theta^{(v)} + 1), \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} H_{\langle 12 \rangle 11}^{(v)} &= -H_{\langle 12 \rangle 22}^{(v)} = -\frac{1}{4} \sin 2\theta^{(v)}, \\ /C.5/ \quad H_{\langle 12 \rangle 12}^{(v)} &= \frac{1}{4} (\cos 2\theta^{(v)} + 1), \\ H_{\langle 12 \rangle 21}^{(v)} &= \frac{1}{4} (\sin 2\theta^{(v)} - 1) \end{aligned}$$

Tensorzy $\mathcal{H}_{ijkl}^{(v)}$ mają składowe

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1111}^{(v)} &= \mathcal{H}_{2222}^{(v)} = -\mathcal{H}_{1122}^{(v)} = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta^{(v)}, \\ /C.6/ \quad \mathcal{H}_{1112}^{(v)} &= -\mathcal{H}_{2212}^{(v)} = -\frac{1}{8} \sin 4\theta^{(v)}, \\ \mathcal{H}_{1212}^{(v)} &= \frac{1}{4} \cos^2 2\theta^{(v)}. \end{aligned}$$

Dla uśrednionego tensora H_{ijkl} obliczamy kolejno

$$H_{1111} = H_{2222} = -H_{1122} = -H_{2211} = -H_{1221} =$$

$$= -H_{2112} = \frac{1}{8} (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega),$$

$$H_{1112} = H_{1211} = -H_{2212} = -H_{1222} =$$

$$= -\frac{1}{8} (\sin 4\varphi \cos 4\omega + 2 \sin 2\varphi \cos 2\omega),$$

$$H_{1121} = H_{2111} = -H_{2221} = -H_{2122} =$$

$$= -\frac{1}{8} (\sin 4\varphi \cos 4\omega - 2 \sin 2\varphi \cos 2\omega),$$

$$H_{1212} = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi \cos 4\omega + 4 \cos 2\varphi \cos 2\omega + 3),$$

$$H_{2121} = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi \cos 4\omega - 4 \cos 2\varphi \cos 2\omega + 3),$$

/0.8/

$$H_{(12)11} = -H_{(12)22} = -\frac{1}{8} \sin 4\varphi \cos 4\omega,$$

$$H_{(12)12} = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi \cos 4\omega + 2 \cos 2\varphi \cos 2\omega + 1),$$

$$H_{(12)21} = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi \cos 4\omega - 2 \cos 2\varphi \cos 2\omega + 1),$$

/0.9/

$$H_{\langle 12 \rangle 11} = -H_{\langle 12 \rangle 22} = -\frac{1}{4} \sin 2\varphi \cos 2\omega,$$

$$H_{\langle 12 \rangle 12} = \frac{1}{4} (\cos 2\varphi \cos 2\omega + 1),$$

$$H_{\langle 12 \rangle 21} = \frac{1}{4} (\cos 2\varphi \cos 2\omega - 1).$$

/C.10/

$$\mathcal{H}_{1111} = \mathcal{H}_{2222} = -\mathcal{H}_{1122} = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega),$$

$$\mathcal{H}_{1112} = -\mathcal{H}_{2212} = -\frac{1}{8} \sin 4\varphi \cos 4\omega,$$

$$\mathcal{H}_{1212} = \frac{1}{8}(1 + \cos 4\varphi \cos 4\omega).$$

Norma tensora \mathcal{H}_{ijkl} zależy od kąta ω następująco:

/C.11/

$$\|\mathcal{H}\|^2 = 4\mathcal{H}_{ijkl}\mathcal{H}_{ijke} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 4\omega).$$

Na podstawie powyższych wzorów otrzymujemy dla płaskiego stanu odkształcenia

- potencjał plastyczny

/C.12/

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{8} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega) + \\ & - 2(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sigma_{12} (\sin 4\varphi \cos 4\omega + 2\sin 2\varphi \cos 2\omega) + \\ & - 2(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sigma_{21} (\sin 4\varphi \cos 4\omega - 2\sin 2\varphi \cos 2\omega) + \\ & + (\sigma_{12} + \sigma_{21})^2 (\cos 4\varphi \cos 4\omega - 1) + \\ & + 4(\sigma_{12}^2 - \sigma_{21}^2) (\cos 4\varphi \cos 4\omega + 1) + \\ & + 4(\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2) \quad 8k^2] = 0. \end{aligned}$$

- warunek plastyczności

/C.13/

$$f = (s_{11} - s_{22})^2 (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega) + \\ - 4(s_{11} - s_{22}) s_{12} \sin 4\varphi \cos 4\omega + \\ + 4 s_{12}^2 \cos 4\varphi \cos 4\omega - 8 k^2 = 0,$$

Dla jednoosiowego rozciągania znajdujemy kolejno

- prawo płynięcia

/C.14/

$$d_{11}^p = -d_{22}^p = \frac{1}{4} \lambda \sigma (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega), \\ d_{12}^p = -\frac{1}{4} \lambda \sin 4\varphi \cos 4\omega,$$

- dodatkowe równanie konstytutywne

/C.15/

$$\omega_{12}^p = -\frac{1}{4} \lambda \sigma \sin 2\varphi \cos 2\omega,$$

- warunek zgodności

/C.16/

$$\frac{1}{2} \dot{\sigma} (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega) + \dot{\varphi} \sigma \sin 4\varphi \cos 4\omega = 0.$$

S P I S T R E S C I

| | Strona |
|--|--------|
| Rozdział I. Wstęp | 3 |
| 1.1. Cel pracy | 3 |
| 1.2. Przedmiot rozważań | 6 |
| 1.3. Tło rozważań: poziom submikroskopowy i makroskopowy | 10 |
| 1.4. Istniejące kierunki badań | 13 |
| 1.5. System oznaczeń | 18 |
| Rozdział II. Kryształy deformujące się przez poślizg | 19 |
| 2.1. Reper kierunków sieci i układ systemów poślizgu | 19 |
| 2.2. Ruch sieci krystalicznej | 20 |
| 2.3. Ruch cząstek materialnych | 22 |
| 2.3.1. Podstawowe zależności | 22 |
| 2.3.2. Związki kinematycznej zgodności | 26 |
| 2.3.3. Rodzina chwilowo nierozciągłych płaszczyzn | 26 |
| 2.3.4. Więzy nałożone na obrót włókien materialnych | 28 |
| 2.4. Sprzężenie ruchu sieci z ruchem materiału | 31 |
| Rozdział III. Kryształy sztywno-idealnie plastyczne | 33 |
| 3.1. Uwagi ogólne | 33 |
| 3.2. Klasyczne zasady zachowania | 34 |
| 3.3. Kryterium uplastycznienia | 36 |
| 3.3.1. Ogólna postać warunku plastyczności | 36 |
| 3.3.2. Układ niezależnych systemów poślizgu | 38 |

| | |
|---|----|
| 3.3.3. Układ całkowicie sprzężonych systemów poślizgu | 39 |
| 3.3.4. Kryształy typu Schmid'a i typu Mises'a | 40 |
| 3.4. Związki konstytutywne | 41 |
| 3.4.1. Uogólnione prawo płynięcia dla kryształów typu Schmid'a | 41 |
| 3.4.2. Uogólnione prawo płynięcia dla kryształów typu Mises'a | 49 |
| 3.4.3. Efekt "geometrycznego wzmocnienia/osłabienia" kryształów | 54 |
| Rozdział IV. Kryształy opisane prawem Schmid'a . | 56 |
| 4.1. Prawo Schmid'a | 56 |
| 4.2. Teoria pojedynczego poślizgu | 60 |
| 4.2.1. Podstawowy układ równań | 60 |
| 4.2.2. Przypadek pól jednorodnych | 63 |
| 4.2.3. Analiza rozciąganego monokryształu | 65 |
| 4.3. Uogólnienie prawa Schmid'a | 71 |
| Rozdział V. Kryształy opisane warunkiem Mises'a | 75 |
| 5.1. Warunek Mises'a | 75 |
| 5.2. Kwadratowy warunek plastyczności aproksymujący prawo Schmid'a | 76 |
| 5.2.1. Kwadratowy warunek plastyczności stowarzyszony z prawem płynięcia | 76 |
| 5.2.2. Warunek Hubera-Mises'a jako aproksymacja warunku Tresca | 78 |
| 5.2.3. Aproksymacja prawa Schmid'a | 81 |
| 5.2.4. Porównanie prawa Schmid'a z jego aproksymacją dla kryształów o symetrii sześcienniej | 84 |

| | Strona |
|---|--------|
| 5.3. Wpływ anizotropii sprężystej | 95 |
| 5.3.1. Aproksymacja uogólnionego prawa Schmida | 95 |
| 5.3.2. Kryształy o symetrii sześciennej ... | 98 |
| 5.3.3. Energetyczne kryteria uplastycznienia | 102 |
| 5.4. Teoria wielokrotnych poślizgów | 103 |
| 5.4.1. Podstawowy układ równań | 103 |
| 5.4.2. Przypadek pól jednorodnych | 104 |
| 5.4.3. Analiza rozciąganych monokryształów . | 105 |
| Rozdział VI. Zakończenie | 123 |
| 6.1. Podsumowanie | 123 |
| 6.2. Dalsze kierunki badań | 123 |
| Literaura | 125 |
| Dodatek A: Kąty Eulera | 133 |
| Dodatek B: Monokryształ z jednym systemem poślizgu | 134 |
| Dodatek C: Monokryształ z dwoma systemami poślizgu | 138 |

