

25.V.87

PRACE IPPT • IFTR REPORTS

Józef Lewandowski

FALE ULTRADŹWIĘKOWE  
W OSRODKACH NIEJEDNORODNYCH

16/1987

P.269a



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ISBN 0508-2692

Wydawnictwo Naukowe PWN

Praca wpłynęła do redakcji dnia 24 marca 1987 r.

**Józef Lewandowski**

**FALE ULTRADŹWIĘKOWE  
W OSRODKACH NIEJEDNORODNYCH**

16/1987  
Wydawnictwo Naukowe PWN

P-269a



Instytut Problemów Techniki PAN  
ul. Rakowiecka 17, 01-224 Warszawa  
Nr zamawiania: 208/87

WARSZAWA 1987



ISSN 0208-5658

Rozprawa habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 marca 1987 r.

Instytut Podstawowych Problemów Techniki  
Instytut Ultrawysokich Ciśnisków  
W Ośrodku Niekorodnych

181987 Praca wykonana w ramach  
tematu CPBP 02.03.I.1.1



Na prawach rękopisu

-----  
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 190 egz. Ark.wyd. 4,77 Ark.druk. 6,75

Oddano do drukarni w marcu 1987 r.

Nr zamówienia 206/87.  
-----

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

Józef Lewandowski  
Zakład Akustyki Fizycznej  
IPPT PAN Warszawa

## FALE ULTRADŹWIĘKOWE W OŚRODKACH NIEJEDNORODNYCH

### Streszczenie

Praca dotyczy wybranych zagadnień związanych z propagacją fal ultradźwiękowych w ośrodkach niejednorodnych. Łącząc te zagadnienia odpowiednio w grupy, można w pracy wyróżnić trzy działy.

W pierwszej części pracy rozważa się propagację fal ultradźwiękowych w stochastycznych ośrodkach niejednorodnych wieloskładnikowych, przy czym każdy ze składników jest materiałem liniowo lepkosprężystym lub sprężystym. Zakładając, że średnie pole przemieszczeń (fala efektywna) ma postać tłumionej fali płaskiej, rozwiązano formalnie równanie na fluktuację lokalną pola przemieszczeń za pomocą zaproponowanej procedury iteracyjnej i wykazano zbieżność tej procedury przy określonych warunkach. Wyprowadzono równania i wzory określające tensor efektywnych dynamicznych modułów lepkosprężystości lub sztywności ośrodka oraz prędkość propagacji i współczynnik tłumienia efektywnej płaskiej i liniowo spolaryzowanej fali ultradźwiękowej.

W dalszej części pracy bada się doświadczalnie i teoretycznie zjawisko propagacji płaskich i liniowo spolaryzowanych fal ultradźwiękowych w stochastycznym ośrodku porowatym, którego matryca jest liniowo sprężystym ciałem stałym. Znalaziono wzór wyrażający prędkość propagacji efektywnej fali podłużnej w izotropowym cieple porowatym jako funkcję prędkości propagacji fali podłużnej w izotropowej matrycy oraz porowatości. Przeanalizowano wpływ pustek na efektywną prędkość propagacji rozpatrując problem w przybliżeniu kulistych i elipsoidalnych pustek (porów). Potwierdzono stosowalność przybliżenia kulistych pustek w obszarze małych porowatości i długich fal, porównując wyniki obliczeń numerycznych z eksperymentem. Przeanalizowano również wpływ pustek na gęstość energii pola rozpatrywanych fal oraz określono w

przybliżeniu długich fal zależność pomiędzy porowatością, średnim dynamicznym czynnikiem kształtu i odpowiednimi dynamicznymi efektywnymi modułami ciała porowatego.

W pracy ponadto sformułowano i rozwiązano trzy warianty zagadnienia odwrotnego do rozpraszania fal ultradźwiękowych na niejednorodnościach ośrodka, traktując to zagadnienie jako zadanie

- a) znalezienia funkcji korelacji niejednorodności struktury ośrodka na podstawie obserwacji zjawiska rozpraszania podłużnej fali ultradźwiękowej, przechodzącej przez ten ośrodek;
- b) znalezienia takiego opisu statystycznego struktury liniowo lepkosprężystego ośrodka niejednorodnego i pola przemieszczeń, który zapewniłby uzyskanie, po wykonaniu operacji uśredniania, średniego pola w postaci płaskiej, liniowo spolaryzowanej fali o znanych makroskopowych parametrach propagacji;
- c) uzyskanie informacji ilościowych dotyczących tekstury polikrystalicznego ciała stałego o symetrii ortorombowej z pomiarów prędkości propagacji płaskich i liniowo spolaryzowanych fal płaskich w tym ośrodku.

Ostatnie dwa zadania rozwiązano metodą teorii informacji, wykorzystując Jaynesa zasadę maksymalnej entropii.



## W s t ę p

Rosnące zapotrzebowanie współczesnej gospodarki na wciąż nowe materiały o z góry określonych własnościach, stawia stale zwiększające się zadania przed tymi dyscyplinami nauki, które zajmują się lub pozostają w ścisłym związku z badaniami struktury i własności materiałów. Wśród metod badania materiałów szczególnie ważne miejsce zajmują metody nieniszczące, zwłaszcza stosunkowo proste, tanie i łatwe w zastosowaniach metody posługujące się ultradźwiękami. Wszystkie te względy powodują, że metody ultradźwiękowe badania własności fizycznych materiałów stale się rozwijają, znajdują coraz szersze zastosowanie i zwiększa się ich dokładność. W pracach [1 - 7] zajmowano się niektórymi zagadnieniami związanymi z ultradźwiękowymi metodami badania budowy i własności fizycznych ośrodków (materiałów) niejednorodnych; rozważania zawarte w tych publikacjach są przedmiotem tej pracy.

Wśród materiałów szeroko stosowanych we współczesnej gospodarce ważne miejsce zajmują materiały, które od dawna były traktowane jako materiały niejednorodne, np. stopy metali, ceramika, betony, kompozyty, spieki metali itp. Z drugiej strony rozwój fizyki ciała stałego, jej teorii i metod badań doświadczalnych doprowadził do przekonania, że proste modele szerokiej klasy materiałów, traktujące tradycyjnie te materiały w zakresie małych obciążeń jako jednorodne i liniowo sprężyste ciała stałe, są zbyt dużym uproszczeniem i nie mogą stanowić punktu wyjścia do interpretacji obserwowanej odpowiedzi materiału na obciążenia, zwłaszcza dynamiczne, w warunkach, kiedy narzędzia badań eksperymentalnych zaskakują nas tempem swego rozwoju i zwiększającą się dokładnością pomiaru. Pomijając wspomniane uprzednio materiały, które od dawna były traktowane jako wieloskładnikowe mieszaniny ziaren o złożonej geometrii, obecnie materiały, które tradycyjnie uważano za jednorodne, trzeba często w rozważaniach teoretycznych traktować jako ośrodki, których lokalne własności fizyczne są funkcjami losowymi wektora położenia. Przedmiotem badań przedstawionych w pracach [1 - 7] są wybrane materiały należące do obu grup, przy czym w przedsta-

wionej w tych pracach analizie dopuszcza się nieciągłe realizacje wspomnianych funkcji losowych punktu. Zwiększająca się dokładność pomiarów i konieczność coraz dokładniejszego przewidywania zachowania się materiału w określonych warunkach, wymaga uwzględniania w coraz szerszym zakresie efektów niesprężystych, które w pracach [1] i [6] są reprezentowane przez liniową lepko-sprężystość.

W pracach [1 - 7] rozważa się wybrane aspekty zachowania się zdefiniowanego w powyższy sposób materiału niejednorodnego w warunkach takiego obciążenia zewnętrznego, które wywołuje w nim pojawienie się i propagację zanikających z odległością pól naprężeń i stowarzyszonych z nimi pól przemieszczeń (małych odkształceń), przy czym oba te pola zależą harmonicznie od czasu z częstotliwością leżącą w obszarze ultradźwięków. Prosty przykład takiego obciążenia, analizowanym w pracach [3, 4, 6, 18], jest przetwornik ultradźwiękowy, sprzężony mechanicznie z płaszką powierzchnią materiału niejednorodnego i tak wykonany oraz zasilany elektrycznie, że pobudza on tę powierzchnię jako całość do drgań podłużnych (dylatacyjnych) lub poprzecznych (ściśnających). Ze względu na sposób formułowania zagadnienia prace [1 - 7] można podzielić na dwie grupy: Pierwsza grupa, obejmująca prace [1 - 4], dotyczy wyznaczania makroskopowych parametrów propagacji fali ultradźwiękowej i efektywnych dynamicznych modułów charakteryzujących sprężyste lub lepko-sprężyste zachowanie się materiału obciążonego dynamicznie. Te makroskopowe parametry materiału niejednorodnego są zdeterminowane przez odpowiednie parametry charakteryzujące poszczególne składniki, ich udział masowy (lub objętościowy) w materiale niejednorodnym, geometrię struktury oraz częstotliwość obciążenia (generatora fali ultradźwiękowej), przy czym zjawiskiem fizycznym uwikłanym w istotny sposób w proces określania tych parametrów jest rozpraszanie fali ultradźwiękowej na powierzchniach ziaren, które stanowią powierzchnie nieciągłości lokalnych własności fizycznych materiału niejednorodnego. W tym sensie problemy określenia wybranych cech struktury materiału niejednorodnego oraz lokalnego pola przemieszczeń, gdy dane są parametry makroskopowe charakteryzujące propagację fali ultradźwiękowej w ośrodku nie-

jednorodnym i jego własności dynamiczne, można uważać za wybrane przypadki szczególne zagadnienia odwrotnego do rozpraszania akustycznego; przykłady takich szczególnych przypadków rozpatruje się w drugiej grupie prac obejmującej publikacje [5-7].

W przedstawionych pracach za makroskopowe parametry propagacji fali ultradźwiękowej w ośrodku niejednorodnym uważa się prędkość propagacji fali efektywnej i jej tłumienie. Wyniki analizy zawartej w pracach grupy pierwszej pozwalają w szczególnych przypadkach obliczyć przybliżone wartości tych parametrów z informacji dotyczących własności składników oraz statystycznego opisu struktury ośrodka niejednorodnego. Znając parametry propagacji, możemy z kolei obliczyć wartości liczbowe odpowiednich efektywnych modułów dynamicznych ośrodka i na odwrót: Wartości liczbowe efektywnych dynamicznych parametrów materiałowych ośrodka niejednorodnego pozwalają obliczyć makroskopowe parametry propagacji efektywnej fali ultradźwiękowej w tym ośrodku.

Badania w zakresie propagacji fal ultradźwiękowych w ośrodkach niejednorodnych rozpoczęły się w Polsce od pracy I. Maleckiego [1], w której inkluzje są reprezentowane przez dyskretny rozkład őródek, które następnie zastępuje się ciągłym rozkładem sił. Pozwala to obliczyć zespoloną liczbę falową jednorodnego ośrodka zastępczego. W pracy [9] J. Ranachowski zaadoptował metodę I. Maleckiego [1] do badania ceramiki [10], rozwijając tę tematykę w wielu pracach. Niektóre z nich zostaną przytoczone w stosownych miejscach tej pracy, która stanowi kontynuację badań zapoczątkowanych przez I. Maleckiego i prowadzonych dalej przez J. Ranachowskiego.

W drugiej grupie prac, dotyczących zagadnienia odwrotnego do rozpraszania akustycznego, rozwiązano, przy pewnych założeniach upraszczających, następujące problemy: Zakładając, że znana jest charakterystyka kątowna potencjału skalarnego fali ultradźwiękowej rozproszonej na niejednorodnościach ośrodka, wyznaczono funkcję korelacji dla tych niejednorodności [5]. Przy założeniu, że znane są makroskopowe parametry propagacji fali efektywnej, wyznaczono statystyczne charakterystyki lokalnej struktury pola przemieszczeń fali i ośrodka niejednorodnego [6] oraz tekstury materiału w przypadku, gdy ośrodek, w którym rozchodzi się fala, jest jednoskładnikowym polikryształem [7].



# I. EFEKTYWNE PARAMETRY PROPAGACJI FAŁ ULTRADŹWIĘKOWYCH I PARAMETRY MATERIAŁOWE A STRUKTURA OŚRODKA NIEJEDNORODNEGO

## 1. MODEL WIELOSKŁADNIKOWYCH MATERIAŁÓW LINIOWO LEPKOSPĘRYSTYCH I SPĘRYSTYCH

### 1.1. Wprowadzenie

W pracy [11] sformułowano bardzo ogólny model niejednorodnego ośrodka uziarnionego, charakteryzującego się tym, że jego lokalne własności fizyczne są funkcją losową wektora położenia. W literaturze ośrodki posiadające tę cechę nazywa się stochastycznymi. Zgodnie z założeniem Autora, w pracy [11] sformułowano taki model ośrodka niejednorodnego, który objął wszystkie możliwe realizacje uziarnionego ośrodka stochastycznego, włącznie z ciałkami porowatymi, jakie są możliwe w zakresie liniowej sprężystości i lepkospężystości. Model ten stanowił dla Autora podstawę do dokonania w pracy [11] analizy uogólniającej w pewnym zakresie dotychczasowe wyniki badań dotyczących akustyki ośrodków stochastycznych, zawarte w pracach [12 - 15] oraz pracy [5]. Praca [1] jest nieco skróconą wersją pracy [11], opublikowaną w języku angielskim. Dlatego też omawiając dorobek myśli zawarty w pracach [1 - 7], uzasadnione jest odstępianie od zasady omawiania tych prac w chronologicznej kolejności ich powstawania, aby w pierwszej kolejności poświęcić kilka zdań pracy [1], ponieważ każda inna praca ze zbioru prac [1 - 6] bądź opiera się na modelu przedstawionym w pracy [1] i zwanym odąd modelem ośrodka I, bądź też dotyczy szczególnego przypadku tego modelu, a więc przy omawianiu każdej z prac [2 - 6] celowe będzie odwołanie się do modelu ośrodka I.

### 1.2. Model ośrodka I

W pracy [1] analizuje się propagację fal ultradźwiękowych (akustycznych) w ośrodku zbudowanym z dowolnej liczby  $M$  różnych składników ( $M = 1, 2, \dots$ ), przy czym każdy składnik jest materiałem liniowo lepkospężystym o znanej gęstości  $\rho^{(\alpha)}$  i znanych

składowych tensora zespolonych modułów  $C_{ijkl}^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, M$ ;  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ), opisujących reakcję sprężystą i relaksację lepkosprężystą materiału składnika  $\alpha$  w odpowiedzi na obciążenie zewnętrzne. W szczególnym przypadku, gdy w mechanicznym zachowaniu się materiału dominują zjawiska sprężystości, wspomniany tensor przechodzi w tensor Hooke'a modułów sztywności. Rozpatrywany ośrodek niejednorodny jest zbudowany z dużej liczby ziaren, sprężonych mechanicznie ze sobą lub ze składnikiem nierozproszonym w postaci ziaren, jeżeli taki składnik istnieje stanowiąc tzw. fazę matrycową. Każde ziarno jako całość jest zbudowane z tego samego materiału (fazy). Ziarna te są rozproszone w makroskopowej próbce, przy czym rozproszenie to jest przypadkowe ze względu na położenie, kształt, wymiary i materiał. W pojedynczej próbce materiału niejednorodnego parametry materiałowe, tj. gęstość  $\rho$  oraz składowe  $C_{ijkl}$  tensora rzeczywistych modułów sztywności materiału sprężystego lub zespolonych modułów opisujących zachowanie się materiału lepkosprężystego, są kawałkami stałe, natomiast w zbiorze statystycznym makroskopowo identycznych próbek są funkcjami losowymi  $\rho(\vec{r})$  i  $C(\vec{r})_{ijkl}$  wektora położenia  $\vec{r}$ , określonego względem układu odniesienia związanego z próbka.

Rozpatrując zbiór statystyczny próbek materiału niejednorodnego zakładano, że ułamek objętości zajętej przez daną fazę jest w każdej próbce taki sam i wynosi  $b^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, M$ ), przy czym objętość  $V$  każdej próbki jest taka duża, że jej wymiary liniowe we wszystkich kierunkach są bardzo duże w porównaniu do długości fal ultradźwiękowych propagujących się w tym materiale. Strukturę omawianego materiału niejednorodnego można opisać prawdopodobieństwem

$$P = P_{\alpha\beta\gamma\dots\kappa}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n), \quad (1.1)$$

tj. prawdopodobieństwem znalezienia jednocześnie fazy  $\alpha$  w punkcie  $\vec{r}_1$ ,  $\beta$  w punkcie  $\vec{r}_2$ ,  $\gamma$  w punkcie  $\vec{r}_3$ , ...,  $\kappa$  w punkcie  $\vec{r}_n$ . Prawdopodobieństwo  $P$  spełnia m.in. zależność

$$\sum_{\beta=1}^M \sum_{\gamma=1}^M \dots \sum_{\kappa=1}^M P_{\alpha\beta\gamma\dots\kappa}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) = P_{\alpha}(\vec{r}) \quad (1.2)$$

gdzie  $P_\alpha(\vec{r})$  jest prawdopodobieństwem znalezienia fazy  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, M$ ) w punkcie  $\vec{r}$ . Zakłada się, że prawdopodobieństwo  $P_\alpha(\vec{r})$  jest równe  $b^{(\alpha)}$ , a więc rozpatruje się ośrodki, dla których usrednianie wartości parametrów materiałowych  $\rho(\vec{r})$  i  $C(\vec{r})_{ijkl}$  po zbiorze statystycznym próbek, oznaczane przez nawiasy kąto-  
we  $\langle \dots \rangle$ , można zastąpić przez odpowiednie średnie objętościo-  
we

$$\rho^0 = (1/V) \cdot \int_V \rho(\vec{r}) dV, \quad C_{ijkl}^0 = (1/V) \cdot \int_V C(\vec{r})_{ijkl} dV, \quad (1.3)$$

tj.

$$\langle \rho(\vec{r}) \rangle = \rho^0, \quad \langle C(\vec{r})_{ijkl} \rangle = C_{ijkl}^0 \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (1.4)$$

Prawdopodobieństwo  $P$ , określone w granicy  $n \rightarrow \infty$ , wyraża pełny opis statystyczny struktury materiału niejednorodnego. Jednakże, jak wykazano w pracy [1], dla analizy własności dynamicznych (akustycznych) takiego ośrodka wystarczy rozważać prawdopodobieństwo  $P$  w granicy  $n \rightarrow L$ , gdzie  $L$  jest skończoną liczbą naturalną. Postępując podobnie jak w pracy [1], znajdziemy odpowiedź na pytanie, jaka musi być wartość tej liczby  $L$  w konkretnych przypadkach rozpatrywanych w niniejszej pracy.

### 1.3. Akustyczne równania ruchu jednorodnego ośrodka jednoskładnikowego

Rozpatrzmy najpierw ośrodek jednorodny zbudowany z fazy  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, M$ ), którego cząstki wykonują ruch harmonicznie zależny od czasu. Założymy, że pole przemieszczeń  $U(\vec{r}, t)_i^{(\alpha)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) w chwili  $t$  jest dostatecznie małe, aby można było zastąpić  $d^2 U(\vec{r}, t)_i^{(\alpha)} / dt^2$  pochodną cząstkową  $U(\vec{r}, t)_i^{(\alpha)} / \partial t^2$ . Równania ruchu cząstek ośrodka zbudowanego ze składnika  $\alpha$  przyjmą wtedy postać:

$$\rho(\vec{r}, t)^{(\alpha)} (\partial^2 U(\vec{r}, t)_i^{(\alpha)} / \partial t^2) = \sigma(\vec{r}, t)_{ij,j}^{(\alpha)} \quad (1.5)$$

$\sigma(\vec{r}, t)_{ij}^{(\alpha)}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) oznaczają wartości składowych tensora naprężeń ośrodka jednorodnego w chwili  $t$  i w punkcie  $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$



o współrzędnych  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) w kartezjańskim układzie odniesienia. Interesują nas jedynie takie rozwiązania równania (1.5), w których pole naprężeń  $\sigma(\vec{r}, t)_{ij}^{(\alpha)}$  i związane z nim pole przemieszczeń  $U(\vec{r}, t)_i^{(\alpha)}$  cząstek ośrodka zależą harmonicznie od czasu, tj.

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{r}, t)_{ij}^{(\alpha)} &= [\sigma(\vec{r})_{ij}^{(\alpha)} \exp(i\omega t)]^{(a)} \\ U(\vec{r}, t)_i^{(\alpha)} &= [u(\vec{r})_i^{(\alpha)} \exp(i\omega t)]^{(a)}\end{aligned}\quad (1.6)$$

gdzie  $\omega$  oznacza częstotliwość kątową drgań cząstek ośrodka. W pracy tej część rzeczywistą i urojoną jakiejkolwiek wielkości zespolonej  $Z$  będziemy oznaczali górnymi wskaźnikami odpowiednio (a) i (b), tj.

$$Z = Z^{(a)} + iZ^{(b)}, \quad i = (-1)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Dla rozpatrywanego ośrodka jednorodnego wprowadza się tensor  $e(r, t)_{ij}^{(\alpha)}$  infinytezymalnych odkształceń określony zależnością:

$$\begin{aligned}e(r, t)_{ij}^{(\alpha)} &= (1/2)[U(\vec{r}, t)_{j,i}^{(\alpha)} + U(\vec{r}, t)_{i,j}^{(\alpha)}] \\ &= e(\vec{r})_{ij}^{(\alpha)} \exp(i\omega t).\end{aligned}\quad (1.8)$$

Zgodnie z zasadami ogólnej teorii liniowej lepkościowości [16], dla materiału  $\alpha$ , którego cząstki wykonują ruch harmonicznie zależny od czasu, otrzymuje się następujące związki pomiędzy naprężeniem i odkształceniem

$$\sigma(\vec{r}, t)_{ij}^{(\alpha)} = C(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)} e(\vec{r}, t)_{kl}^{(\alpha)}, \quad (1.9)$$

przy czym

$$C(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)} = C(\omega)_{jikl}^{(\alpha)} = C(\omega)_{ijlk}^{(\alpha)} = C(\omega)_{klij}^{(\alpha)}. \quad (1.10)$$

W przypadku, gdy faza  $\alpha$  jest izotropowa, tensor modułów zespolonych  $C(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)}$  można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}C(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)} &= (1/3)[Y(\omega)_A^{(\alpha)} - Y(\omega)_D^{(\alpha)}] \delta_{ij} \delta_{kl} + \\ &+ (1/2) Y(\omega)_D^{(\alpha)} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}].\end{aligned}\quad (1.11)$$

Dolne wskaźniki A i D oznaczają odpowiednio aksjator i dewiator rozpatrywanych tensorów. Tensor posiadający strukturę typu (1.11)

będziemy odąd zaznaczali krótko

$$C(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)} = T[Y(\omega)_A^{(\alpha)}, Y(\omega)_D^{(\alpha)}]_{ijkl} \quad (1.12)$$

W przypadku granicznym, gdy w mechanicznym zachowaniu się izotropowego materiału składnika  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, M$ ) dominują zjawiska związane z liniową sprężystością materiału, w odpowiednich wzorach i równaniach należy dokonać następujących podstawień:

$$[Y(\omega)_A^{(\alpha)}](a) \rightarrow 3\lambda^{(\alpha)} + 2\mu^{(\alpha)}, \quad [Y(\omega)_A^{(\alpha)}](b) \rightarrow 0, \quad (1.13)$$

$$[Y(\omega)_D^{(\alpha)}](a) \rightarrow 2\mu^{(\alpha)}, \quad [Y(\omega)_D^{(\alpha)}](b) \rightarrow 0,$$

gdzie  $\lambda^{(\alpha)}$  i  $\mu^{(\alpha)}$  są współczynnikami Lamégo  $\alpha$ -tej fazy, przy czym  $\mu^{(\alpha)}$  jest modułem ścinania.

Aby otrzymać wyrażenie na  $C(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)}$  występujące w równaniach (1.9), napiszemy zasadę liniowej superpozycji Boltzmanna [16] w postaci:

$$\sigma(\vec{r}, t)_{ij}^{(\alpha)} = \int_{-\infty}^t \Psi(t-\tau)_{ijkl}^{(\alpha)} [\partial e(\vec{r}, \tau)_{kl}^{(\alpha)} / \partial \tau] d\tau, \quad (1.14)$$

przy czym przyjmujemy, że

$$\Psi(t)_{ijkl}^{(\alpha)} = C(0)_{ijkl}^{(\alpha)} + \psi(t)_{ijkl}^{(\alpha)}, \quad (1.15)$$

$$d\psi(t)_{ijkl}^{(\alpha)} / dt < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)_{ijkl}^{(\alpha)} = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

oraz że tensorowe wielkości rzeczywiste  $\Psi(t)_{ijkl}^{(\alpha)}$ ,  $C(0)_{ijkl}^{(\alpha)}$ ,  $\psi(t)_{ijkl}^{(\alpha)}$  spełniają reguły symetrii (1.10) oraz ponadto (1.12), gdy materiał fazy jest izotropowy. Rzeczywista funkcja tensorowa  $\psi(t)_{ijkl}^{(\alpha)}$  opisuje relaksację lepkosprężystą  $\alpha$ -tego materiału. Wielkością rzeczywistą jest również  $C(0)_{ijkl}^{(\alpha)}$ , która oznacza wartość równowagową (zrelaksowaną) składowej funkcji tensorowej  $\Psi(t)_{ijkl}^{(\alpha)}$ , jaką ta składowa osiąga po upływie dostatecznie długiego czasu. Przyjmując związek konstytutywny pomiędzy  $\sigma(\vec{r}, t)_{ij}^{(\alpha)}$  i  $e(\vec{r}, t)_{kl}^{(\alpha)}$  w postaci (1.9) oraz zakładając, że harmonicznym zależnym od czasu tensor odkształceń (1.8) znika w gra-

nicy  $t \rightarrow -\infty$ , otrzymany z (1.14) następujące wzory:

$$C(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)} = C(0)_{ijkl}^{(\alpha)} + \tilde{C}(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)}, \quad (1.16)$$

gdzie

$$\tilde{C}(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)} = i\omega \int_0^{\infty} \psi(\tau)_{ijkl}^{(\alpha)} \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (1.17)$$

Równania (1.16), (1.17) wyrażają wzajemne zależności pomiędzy zespolonym modułem  $C(\omega)_{ijkl}^{(\alpha)}$  i rzeczywistą funkcją relaksacji  $\psi(t)_{ijkl}^{(\alpha)}$  w przypadku, gdy pola naprężeń i odkształceń zależą harmonicznie od czasu.

#### 1.4. Akustyczne równania ruchu ośrodka niejednorodnego

##### 1.4.1. Równania podstawowe

W punkcie (1.3) przytoczono szereg podstawowych równań i wzorów dotyczących własności akustycznych jednoskładnikowych ośrodków liniowo lepkosprężystych. Związki te, podawane w różnych odmiennych formach, można znaleźć w literaturze specjalistycznej. Zostały one przytoczone w poprzednim punkcie po to, by w drodze ich uogólniania uzyskać zależności dotyczące własności akustycznych wieloskładnikowego ośrodka niejednorodnego I, którego struktura odpowiada modelowi przedstawionemu w p. 1.2.

Wróćmy teraz do ruchu drgającego cząstek ciała niejednorodnego I, zbudowanego ze składników (faz) lepkosprężystych, do których odnoszą się równania (1.9) - (1.17). W przypadku ciała niejednorodnego I w miejsce równań (1.5) wprowadza się równania ruchu postaci:

$$\rho(\vec{r}, t) \left[ \partial^2 U(\vec{r}, t) / \partial t^2 \right] = \sigma(\vec{r}, t)_{ij,j}, \quad (1.18)$$

gdzie  $\sigma(\vec{r}, t)_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) oznaczają wartości składowych tensora naprężeń w chwili  $t$  i w punkcie  $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ . Zasadniczą różnicą pomiędzy równaniami (1.5) i (1.18) zawiera się w tym, że wszystkie wielkości występujące w równaniach (1.5) są zdeterminowane przez prawa mechaniki ośrodków ciągłych, natomiast wszystkie wielkości występujące w równaniach (1.18) są funkcjami losowymi wektora położenia (wielkościami stochastycznymi). Podsta-



wą rozumowania zawartego w tej pracy jest bowiem hipoteza, że pola naprężeń i stowarzyszonych z nimi przemieszczeń w ośrodku przypadkowo niejednorodnym nie podlegają prawom mechaniki ośrodków ciągłych, lecz, dzięki przypadkowej mikrostrukturze ośrodka, są niedeterministyczne i mogą być traktowane jako funkcje losowe wektora położenia (zmiennie stochastyczne).

Poszukujemy stochastycznego pola naprężeń  $\sigma(\vec{r}, t)_{ij}$  i związanego z nim pola przemieszczeń  $U(\vec{r}, t)_i$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) w postaci funkcji losowych wektora położenia harmonicznie zależnych od czasu, tj.

$$\sigma(\vec{r}, t)_{ij} = [\sigma(\vec{r})_{ij} \exp(i\omega t)]^{(a)}, \quad (1.19)$$

$$U(\vec{r}, t)_i = [u(\vec{r})_i \exp(i\omega t)]^{(a)},$$

gdzie  $\sigma(\vec{r})_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) i  $u(\vec{r})_i$  są wielkościami stochastycznymi. Dla ciała niejednorodnego w miejsce równań (1.8) - (1.10) wprowadza się następujące zależności pomiędzy tensorem naprężenia (1.19) i odkształcenia  $e(\vec{r}, t)_{kl}$  w przypadku, gdy oba pola tensorowe zależą harmonicznie od czasu:

$$\sigma(\vec{r}, t)_{ij} = C(\vec{r}, \omega)_{ijkl} e(\vec{r}, t)_{kl}, \quad (1.20)$$

$$\sigma(\vec{r}, t)_{ij} = \int_{-\infty}^t \Psi(\vec{r}, t-\tau)_{ijkl} [\partial e(\vec{r}, \tau)_{kl} / \partial \tau] d\tau, \quad (1.21)$$

Ponadto przyjmuje się, że

$$\Psi(\vec{r}, t)_{ijkl} = C(\vec{r}, 0)_{ijkl} + \psi(\vec{r}, t)_{ijkl}, \quad (1.22)$$

$$d\psi(\vec{r}, t)_{ijkl} / dt < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(\vec{r}, t)_{ijkl} = 0, \quad (1.23)$$

przy czym stochastyczne wielkości zespolone  $C(\vec{r}, \omega)_{ijkl}$  oraz rzeczywiste  $C(\vec{r}, 0)_{ijkl}$ ,  $\Psi(\vec{r}, t)_{ijkl}$ ,  $\psi(\vec{r}, t)_{ijkl}$  spełniają reguły (1.10).  $C(\vec{r}, 0)_{ijkl}$  oznacza wartość równowagową (zrelaksowaną) tensorowego pola stochastycznego  $\Psi(\vec{r}, t)_{ijkl}$ , osiąganą po upływie dostatecznie długiego czasu ( $t \rightarrow \infty$ ), natomiast  $\psi(\vec{r}, t)$  opisuje relaksację lepkosprężystą materiału niejednorodnego.

$e(\vec{r}, t)_{kl}$  wyraża się wzorem, jaki otrzymamy pomijając w (1.8) górny wskaźnik ( $\alpha$ ). Wykorzystując równoważność równań (1.20) i (1.21) przy założeniu, że  $e(\vec{r}, t)_{kl} = 0$ , gdy  $t \rightarrow -\infty$ , otrzymujemy następujące wzory:

$$C(\vec{r}, \omega)_{ijkl} = C(\vec{r}, 0)_{ijkl} + \tilde{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}, \quad (1.24)$$

gdzie

$$\tilde{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl} = i\omega \int_0^{\infty} \psi(\vec{r}, \tau)_{ijkl} \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (1.25)$$

Stosując odwrotną transformację Fouriera i wykonując niezbędne przekształcenia, otrzymujemy z (1.25) następujące wzory wyrażające związki między częścią rzeczywistą  $\tilde{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}^{(a)}$  i urojoną  $\tilde{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}^{(b)}$  zespolonej części  $\tilde{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}$  modułu  $C(\vec{r}, \omega)_{ijkl}$  a funkcją relaksacji  $\psi(\vec{r}, t)_{ijkl}$

$$\tilde{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}^{(a)} = (2/\pi) \int_0^{\infty} [\omega^2 / (\omega^2 - \nu^2)] d\nu \int_0^{\infty} \psi(\vec{r}, t)_{ijkl} \cos \nu t dt, \quad (1.26)$$

$$\tilde{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}^{(b)} = -(2/\pi\omega) \int_0^{\infty} [\omega^2 / (\omega^2 - \nu^2)] \nu d\nu \int_0^{\infty} \psi(\vec{r}, t)_{ijkl} \sin \nu t dt. \quad (1.27)$$

Z równań (1.26) i (1.27) wynika, że

$$\left| \tilde{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}^{(a)} \right| \gg \left| \tilde{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}^{(b)} \right| \text{ dla } \omega \rightarrow \infty (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (1.28)$$

W przypadku, gdy ośrodek niejednorodny jest izotropowy, pola tensorowe  $C(\vec{r}, \omega)_{ijkl}$ ,  $\Psi(\vec{r}, t)_{ijkl}$ ,  $C(\vec{r}, 0)_{ijkl}$  oraz  $\psi(\vec{r}, t)_{ijkl}$  spełniają reguły symetrii (1.11), (1.12), tj.

$$C(\vec{r}, \omega)_{ijkl} = T[C(\vec{r}, \omega)_A, C(\vec{r}, \omega)_B]_{ijkl}, \quad (1.29)$$

$$\Psi(\vec{r}, \omega)_{ijkl} = T[\Psi(\vec{r}, \omega)_A, \Psi(\vec{r}, \omega)_B]_{ijkl} \text{ itd.} \quad (1.30)$$

Ponadto, gdy w mechanicznym zachowaniu się izotropowego ciała

niejednorodnego I dominują zjawiska związane z liniową sprężystością materiału, wtedy w odpowiednich wzorach i równaniach przytaczanych w tej pracy należy dokonać następujących podstawień:

$$\begin{aligned} C(\vec{r}, \omega)_A^{(a)} &\rightarrow 3\lambda(\vec{r}) + 2\mu(\vec{r}), & C(\vec{r}, \omega)_A^{(b)} &\rightarrow 0, \\ C(\vec{r}, \omega)_D^{(a)} &\rightarrow 2\mu(\vec{r}), & C(\vec{r}, \omega)_D^{(b)} &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

gdzie  $\lambda(\vec{r})$  i  $\mu(\vec{r})$  są stochastycznymi współczynnikami Lamégo ośrodka niejednorodnego, przy czym  $\mu(\vec{r})$  jest modułem ścinania.

#### 1.4.2. Lokalna fluktuacja pola przemieszczeń

Równania i zależności (1.19)-(1.31) pozwalają zapisać formalnie równania ruchu (1.18) w postaci

$$L(\vec{r}, \omega)\vec{u}(\vec{r}) = 0 \Leftrightarrow [C(\vec{r}, \omega)_{ijkl} u(\vec{r})_{k,l}]_{,j} + \omega^2 \rho(\vec{r}) u(\vec{r})_i = 0, \quad (1.32)$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3.$

Równania (1.32) opisują drgania harmoniczne cząstek ośrodka niejednorodnego w nieobecności, podobnie jak w przypadku równań (1.5), sił masowych.  $L(\vec{r}, \omega)$  jest stochastycznym liniowym operatorem różniczkowym z zespolonymi współczynnikami.  $L(\vec{r}, \omega)$  i  $\vec{u}(\vec{r})$  można przedstawić w postaci sumy ich wartości średnich, otrzymanych w wyniku uśredniania po zbiorze statystycznym makroskopowych próbek, i lokalnych fluktuacji:

$$L(\vec{r}, \omega) = \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle + \delta L(\vec{r}, \omega), \quad \vec{u}(\vec{r}) = \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle + \delta \vec{u}(\vec{r}), \quad (1.33)$$

gdzie

$$\langle \delta L(\vec{r}, \omega) \rangle = \langle \delta \vec{u}(\vec{r}, \omega) \rangle = 0. \quad (1.34)$$

Po podstawieniu (1.33) do (1.32), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle + \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle \delta \vec{u}(\vec{r}) + \delta L(\vec{r}, \omega) \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle + \\ + \delta L(\vec{r}, \omega) \delta \vec{u}(\vec{r}) = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Uśredniając równanie (1.35) otrzymujemy

$$\langle L(\vec{r}, \omega) \rangle \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle = -\langle \delta L(\vec{r}, \omega) \delta \vec{u}(\vec{r}) \rangle. \quad (1.36)$$

Podstawiając (1.36) do (1.35) otrzymujemy następujące równanie na lokalną fluktuację pola przemieszczeń  $\delta\vec{u}(\vec{r})$ :

$$\delta\vec{u}(\vec{r}) = W(\vec{r}, \omega) \left[ \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle + \delta\vec{u}(\vec{r}) \right] - \langle W(\vec{r}, \omega) \delta\vec{u}(\vec{r}) \rangle, \quad (1.37)$$

gdzie  $W(\vec{r}, \omega)$  jest stochastycznym operatorem całkowo-różniczkowym zdefiniowanym wzorem

$$W(\vec{r}, \omega) = - \left[ \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle \right]^{-1} \delta L(\vec{r}, \omega). \quad (1.38)$$

Wyliczenie lokalnej fluktuacji pola przemieszczeń  $\delta\vec{u}(\vec{r})$  ma istotne znaczenie z co najmniej trzech następujących powodów:

1. Jeżeli znamy  $\delta\vec{u}(\vec{r})$  i jeżeli spełniony jest warunek

$$H := \left| W(\vec{r}, \omega) \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \right| / \left| \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \right| < 1 \quad (1.39)$$

w każdym punkcie  $\vec{r}$ , w którym  $\langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \neq 0$ , wówczas możemy, jak to zostanie niżej wykazane, wyznaczyć minimalną liczbę  $L$  punktów  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_L$ , które muszą wystąpić w prawdopodobieństwie (1.1), aby przy  $n \rightarrow L$  prawdopodobieństwo  $P$  określało zadawalająco strukturę ośrodka, umożliwiając przeprowadzenie rachunków z założoną dokładnością.

2. Znając  $\delta\vec{u}(\vec{r})$  oraz strukturę ośrodka, tj.  $P$  przy  $n \rightarrow L$ , możemy obliczyć zespolone moduły efektywne równoważnego ośrodka jednorodnego, co również zostanie niżej omówione.
3. Jeżeli znamy  $\delta\vec{u}(\vec{r})$  oraz strukturę ośrodka, wówczas możemy obliczyć współczynnik rozpraszania fal ultradźwiękowych na granicach ziaren ośrodka niejednorodnego [1, 14].

**S ł a b e n i e j e d n o r o d n o ś c i .** W przypadku słabych niejednorodności są spełnione następujące nierówności:

$$\left| \delta\rho(\vec{r}) / \langle \rho(\vec{r}) \rangle \right| \ll 1, \quad \left| \delta C(\vec{r}, \omega)_{ijkl} / \langle C(\vec{r}, \omega)_{ijkl} \rangle \right| \ll 1 \quad (1.40)$$

dla wszystkich  $\langle C(\vec{r}, \omega)_{ijkl} \rangle \neq 0$ . Nierówności te pozwalają zaniedbać w równaniach (1.37) wszystkie wyrazy drugiego rzędu ze względu na lokalne fluktuacje parametrów materiałowych i pola przemieszczeń. Tak więc z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu ze względu na fluktuacje otrzymamy (w przybliżeniu Borna) następujące wyrażenie na lokalną fluktuację pola przemieszczeń:



$$\delta \bar{u}(\vec{r}) = w(\vec{r}, \omega) \langle \bar{u}(\vec{r}) \rangle, \quad (1.41)$$

czyli

$$\delta \bar{u}(\vec{r})^{(a)} = P(\vec{r}, \omega) \langle \bar{u}(\vec{r}) \rangle^{(a)} - Q(\vec{r}, \omega) \langle \bar{u}(\vec{r}) \rangle^{(b)}, \quad (1.42)$$

$$\delta \bar{u}(\vec{r})^{(b)} = P(\vec{r}, \omega) \langle \bar{u}(\vec{r}) \rangle^{(b)} + Q(\vec{r}, \omega) \langle \bar{u}(\vec{r}) \rangle^{(a)}, \quad (1.43)$$

gdzie całkowo-różniczkowe operatory  $P(\vec{r}, \omega)$  i  $Q(\vec{r}, \omega)$  zdefiniowano w sposób następujący:

$$P(\vec{r}, \omega) = [T(\vec{r}, \omega)]^{-1} \left\{ \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle^{(a)} \delta_{L(\vec{r}, \omega)}^{(a)} + \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle^{(b)} \delta_{L(\vec{r}, \omega)}^{(b)} \right\}, \quad (1.44)$$

$$Q(\vec{r}, \omega) = [T(\vec{r}, \omega)]^{-1} \left\{ \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle^{(a)} \delta_{L(\vec{r}, \omega)}^{(b)} - \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle^{(b)} \delta_{L(\vec{r}, \omega)}^{(a)} \right\}, \quad (1.45)$$

$$T(\vec{r}, \omega) = - \left[ \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle^{(a)} \right]^2 - \left[ \langle L(\vec{r}, \omega) \rangle^{(b)} \right]^2. \quad (1.46)$$

Umiarkowane i silne niejednorodności. W przypadku umiarkowanych i silnych niejednorodności nierówności (1.40) nie są spełnione i lokalną fluktuację pola przemieszczeń można obliczać opierając się na równaniu (1.37).

Aby rozwiązać formalnie równanie (1.37), zastosujemy następującą procedurę iteracyjną, zaproponowaną w pracach [1, 11]. Oznaczmy rozwiązanie tego równania otrzymane po wykonaniu  $n$  iteracji symbolem  $\delta \bar{u}(\vec{r})^{(n)}$  i zapoczątkujmy iterację przyjmując  $\delta \bar{u}(\vec{r})^{(0)}$  w postaci (1.41), tj. w postaci rozwiązania równania (1.37) w przybliżeniu Borna, które przepiszemy w postaci

$$\delta \bar{u}(\vec{r})^{(0)} = w(\vec{r}, \omega) \langle \bar{u}(\vec{r}) \rangle. \quad (1.47)$$

Po wykonaniu  $n$  iteracji otrzymujemy

$$\delta \bar{u}(\vec{r})^{(n)} = w(\vec{r}, \omega) \left\{ \langle \bar{u}(\vec{r}) \rangle + \delta \bar{u}(\vec{r})^{(n-1)} \right\} - \langle w(\vec{r}, \omega) \delta \bar{u}(\vec{r})^{(n-1)} \rangle, \quad (1.48)$$

czyli

$$\delta \bar{u}(\vec{r})^{(n)} = \left\{ w(\vec{r}, \omega) + \sum_{i=1}^n F_i \left\{ [w(\vec{r}, \omega)]^{i+1} \right\} \right\} \langle \bar{u}(\vec{r}) \rangle, \quad (1.49)$$

gdzie całkowo-różniczkowe operatory  $F_i \left\{ [w(\vec{r}, \omega)]^{i+1} \right\}$  są zdefinio-

wane w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 F_1 \{ [W(\vec{r}, \omega)]^2 \} &= [W(\vec{r}, \omega)]^2 - \langle [W(\vec{r}, \omega)]^2 \rangle, \\
 F_2 \{ [W(\vec{r}, \omega)]^3 \} &= [W(\vec{r}, \omega)]^3 - \langle [W(\vec{r}, \omega)]^3 \rangle - W(\vec{r}, \omega) \langle [W(\vec{r}, \omega)]^2 \rangle, \\
 F_3 \{ [W(\vec{r}, \omega)]^4 \} &= [W(\vec{r}, \omega)]^4 - \langle [W(\vec{r}, \omega)]^4 \rangle - W(\vec{r}, \omega) \langle [W(\vec{r}, \omega)]^3 \rangle + \\
 &\quad + [W(\vec{r}, \omega)]^2 \langle [W(\vec{r}, \omega)]^2 \rangle - [W(\vec{r}, \omega)]^2, \\
 &\quad \text{itd.}
 \end{aligned}
 \tag{1.50}$$

Operacje matematyczne takie jak  $[W(\vec{r}, \omega)]^n \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , mogą być wykonane formalnie przez wprowadzenie odpowiedniej funkcji tensorowej Greena  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , związanej z operacją odwracania operatora  $\langle L(\vec{r}, \omega) \rangle$ . Stosując tę funkcję możemy napisać

$$\begin{aligned}
 [W(\vec{r}, \omega)]^n \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle &= \int G(\vec{r}, \vec{r}^{(n)}) \delta_L(\vec{r}^{(n)}, \omega) d^3 \vec{r}^{(n)} \\
 &\quad \cdot \int G(\vec{r}^{(n)}, \vec{r}^{(n-1)}) \delta_L(\vec{r}^{(n-1)}, \omega) d^3 \vec{r}^{(n-1)} \dots \\
 &\quad \cdot \int G(\vec{r}^{(2)}, \vec{r}^{(1)}) \delta_L(\vec{r}^{(1)}, \omega) \langle \vec{u}(\vec{r}^{(1)}) \rangle d^3 \vec{r}^{(1)}.
 \end{aligned}
 \tag{1.51}$$

Procedura iteracyjna (1.48) generuje nieskończony szereg, który jest zbieżny, gdy procedura iteracyjna jest zbieżna. Powstaje teraz pytanie, kiedy procedura iteracyjna (1.48) jest zbieżna i jeżeli jest zbieżna, to do której iteracji wystarczy się ograniczyć, aby przy spełnionym warunku zbieżności procedury uzyskać fluktuację pola przemieszczeń z żadaną dokładnością. Warunek zbieżności procedury iteracyjnej (1.48) można zapisać w postaci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} | \delta \vec{u}(\vec{r})^{(n)} - \delta \vec{u}(\vec{r})^{(n-1)} | = 0 \tag{1.52}$$

dla każdej z możliwych realizacji operatora stochastycznego  $\delta L(\vec{r}, \omega)$ . Warunek zbieżności (1.52) można zgodnie z (1.49) przepisać w postaci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \{ [W(\vec{r}, \omega)]^{n+1} \} \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle = 0. \tag{1.53}$$

który dla każdej z możliwych realizacji operatora stochastycznego  $\mathcal{L}(\vec{r}, \omega)$  lub  $W(\vec{r}, \omega)$  i dla  $\langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \neq 0$  można również zapisać w postaci

$$\left| \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[ 1 / \left| \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \right| \right]^n \cdot \left| Y_n(\vec{r}, \omega) \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \right| \right\} \right| = 0, \quad (1.54)$$

gdzie

$$Y_n(\vec{r}, \omega) = F_n \left\{ [W(\vec{r}, \omega)]^{n+1} \right\} \quad (1.55)$$

jest wielkością  $(n+1)$ -tego rzędu ze względu na fluktuację  $\mathcal{L}(\vec{r})$  i  $\mathcal{C}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}$ , podobnie jak  $[W(\vec{r}, \omega)]^{n+1} \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle$ , podczas gdy  $\langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle$  jest wielkością zerowego rzędu ze względu na te same fluktuacje. Tak więc warunek (1.54) może być spełniony, jeżeli zachodzi nierówność (1.39) w każdym punkcie  $\vec{r}$ , w którym  $\langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \neq 0$ , i dla każdej z możliwych realizacji operatora stochastycznego  $W(\vec{r}, \omega)$ . Stąd najwyższy wskaźnik iteracji  $n = N$  wyliczymy z warunku

$$J_n = \left| \delta \vec{u}(\vec{r})^{(n)} - \delta \vec{u}(\vec{r})^{(n-1)} \right| / \left| \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \right| \leq a, \quad \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \neq 0, \quad (1.56)$$

gdzie  $a$  oznacza żadaną dokładność. Wielkość  $J_n$  można również wyrazić wzorem

$$J_n = \left| Y_n(\vec{r}, \omega) \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \right| / \left| \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \right| \quad \text{dla} \quad \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle \neq 0, \quad (1.57)$$

a zatem  $J_n$  jest wielkością tego samego rzędu (ze względu na fluktuacje) co  $H^{n+1}$ . Tak więc najwyższy wskaźnik iteracji  $n = N$  można wyliczyć z warunku

$$H^{N+1} \leq a, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.58)$$

przy czym  $H$ , które jest zdefiniowane wzorem (1.39), można traktować jako miarę niejednorodności ośrodka. W tabelicy 1 podano wartości najwyższego wskaźnika iteracji  $N$  dla  $a = 0,1$  i  $H \leq 0,9$ .

Tabela 1. Wartości najwyższego wskaźnika iteracji  $N$  dla  $a = 0,1$

H	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
N	0	1	1	2	3	4	6	10	21

Wykorzystując definicję lokalnej fluktuacji  $\delta Q(\vec{r})$  wielkości stochastycznej

$$\delta Q(\vec{r}) = Q(\vec{r}) - \langle Q(\vec{r}) \rangle, \quad (1.59)$$

możemy wyeliminować wszystkie fluktuacje parametrów materiałowych z równań (1.41), (1.49), (1.51). Jednocześnie wprowadzimy dodatkowe założenie, że różniczkowanie względem współrzędnych przestrzennych i uśrednianie po zbiorze statystycznym komutują ze sobą. Z (1.51) wynika, że założenie to pozwala tak zmodyfikować równanie (1.49), że będzie ono zawierało człony w postaci (N+2)-punktowych momentów statystycznych parametrów materiałowych

$$\langle A(\vec{r}_1) B(\vec{r}_2) C(\vec{r}_3) \dots D(\vec{r}_{N+2}) \rangle \quad (1.60)$$

i pochodnych przestrzennych takich momentów.  $A(\vec{r}_1)$ ,  $B(\vec{r}_2)$ ,  $C(\vec{r}_3)$ , ...,  $D(\vec{r}_{N+2})$  oznaczają wartości parametrów materiałowych  $\rho(\vec{r})$  i  $G(\vec{r}, \omega)_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ) w punktach  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_3, \dots, \vec{r}_{N+2}$ , przy czym wartości te zostały wybrane losowo ze zbiorów

$$\left\{ \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(M)} \right\}, \quad \left\{ G(\omega)_{ijkl}^{(1)}, G(\omega)_{ijkl}^{(2)}, \dots, G(\omega)_{ijkl}^{(M)} \right\}. \quad (1.61)$$

Przypomnijmy, że N oznacza najwyższy wskaźnik iteracji, a M oznacza liczbę różnych faz. Momenty statystyczne (1.60) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \langle A(\vec{r}_1) B(\vec{r}_2) C(\vec{r}_3) \dots D(\vec{r}_{N+2}) \rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^M \sum_{\gamma=1}^M \dots \sum_{\alpha=1}^M P_{\alpha\beta\gamma\dots\alpha}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_{N+2}) A^{(\alpha)} B^{(\beta)} \dots D^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (1.62)$$

gdzie każda z wielkości  $A^{(\alpha)}$ ,  $B^{(\beta)}$ , ...,  $D^{(\alpha)}$  może oznaczać wartość gęstości lub modułu zespolonego należąca do odpowiedniego zbioru (1.61). Tak więc w przypadku słabych, umiarkowanych i silnych niejednorodności niezbędna informacja, dotycząca struktury ośrodka i umożliwiająca obliczenie lokalnej fluktuacji pola przemieszczeń i tym samym, jak to niżej wyjaśnimy, tzw. efektywnych modu-



łów zespolonych może być zredukowana do prawdopodobieństwa (1.1) w granicy  $n \rightarrow L = N+2$ .

### 1.5. Efektywne parametry materiałowe i akustyczne

W pracy [1] zdefiniowano tzw. efektywne parametry materiałowe ośrodka niejednorodnego I wykorzystując koncepcję modułu efektywnego [17]. W tym celu sformułowano następującą hipotezę: Jest możliwe znalezienie dla fikcyjnego materiału jednorodnego, zwanego materiałem równoważnym, zbioru takich wartości liczbowych jego parametrów materiałowych, że pole przemieszczeń powstałe w jednorodnym materiale równoważnym w odpowiedzi na zewnętrzne obciążenie dynamiczne jest takie samo jak uśrednione (po zbiorze statystycznym makroskopowych próbek) pole przemieszczeń powstałe w realnym materiale niejednorodnym I, pozostającym pod działaniem tego samego obciążenia dynamicznego. Hipoteza ta pozwala znaleźć równania, w jakie są uwikłane stałe materiałowe jednorodnego ośrodka równoważnego, zwane efektywnymi dynamicznymi parametrami materiałowymi, oraz pozwala określić związki pomiędzy makroskopowymi parametrami propagacji efektywnej fali ultradźwiękowej w ośrodku niejednorodnym I a jego efektywnymi dynamicznymi parametrami materiałowymi. Rozpatrzmy te zagadnienia osobno dla wybranych przypadków drgań swobodnych i drgań wymuszonych cząstek ośrodka niejednorodnego I.

#### 1.5.1. Drgania swobodne

Wprowadzając w pracy [1] równania dla efektywnych dynamicznych parametrów materiałowych, rozpatrywano równania ruchu (1.32), (1.36) dla drgań swobodnych cząstek nieograniczonego ośrodka niejednorodnego I. Równania (1.36) można zapisać w postaci

$$C^0(\omega)_{ijkl} \langle u(\vec{r})_{k,jl} \rangle + \omega^2 \rho^0 \langle u(\vec{r})_i \rangle + \langle [\delta C(\vec{r}, \omega)_{ijkl} \delta u(\vec{r})_{k,l,j}] \rangle + \omega^2 \langle \delta \rho(\vec{r}) \delta u(\vec{r})_i \rangle = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (1.63)$$

Zgodnie z wyżej sformułowaną hipotezą równania te są równoważne następującym równaniom ruchu jednorodnego ośrodka równoważnego:

$$\bar{C}(\omega)_{ijkl} \langle u(\vec{r})_{k,jl} \rangle + \omega^2 \bar{\rho} \langle u(\vec{r})_i \rangle = 0. \quad (1.64)$$

Poziomą kreską u góry oznaczenia literowego zaznaczono efektywne dynamiczne parametry materiałowe, które nie zależą od wektora położenia, natomiast są funkcjami częstotliwości ruchu drgającego cząstek ośrodka. Ponadto żąda się, aby efektywne zespolone moduły spełniały następujące równania:

$$\langle \sigma(\vec{r}, t)_{ij} \rangle = \bar{C}(\omega)_{ijkl} \langle e(\vec{r}, t)_{kl} \rangle, \text{ gdy } \omega \rightarrow 0, \quad (1.65)$$

$$\langle \sigma(\vec{r}, t)_{ij} \rangle = \int_{-\infty}^t \bar{\Psi}(t-\tau)_{ijkl} \left[ \partial \langle e(\vec{r}, \tau)_{kl} \rangle / \partial \tau \right] d\tau, \quad (1.66)$$

gdzie

$$\bar{\Psi}(t)_{ijkl} = \bar{C}(0)_{ijkl} + \bar{\psi}(t)_{ijkl}, \quad (1.67)$$

$$d\bar{\psi}(t)_{ijkl}/dt < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\psi}(t)_{ijkl} = 0. \quad (1.68)$$

$\bar{\psi}(t)_{ijkl}$  opisuje relaksację lepkosprężystą materiału równowaznego ośrodka jednorodnego,  $\bar{C}(0)_{ijkl}$  jest wartością równowagową (zrelaksowaną) składowej funkcji tensorowej, którą ta składowa osiąga po upływie dostatecznie długiego czasu. Tensorowe wielkości rzeczywiste  $\bar{\Psi}(t)_{ijkl}$ ,  $\bar{C}(0)_{ijkl}$ ,  $\bar{\psi}(t)_{ijkl}$  spełniają reguły symetrii (1.10) i relacje analogiczne do równań i nierówności (1.24) - (1.28).

Wykorzystując hipotezę o równoważności równań (1.63) i (1.64) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{C}(\omega)_{ijkl} \langle u(\vec{r})_{k,jl} \rangle &= C^0(\omega)_{ijkl} \langle u(\vec{r})_{k,jl} \rangle + \\ &+ \left[ \delta C(\vec{r}, \omega)_{ijkl} \delta u(\vec{r})_{k,jl} \right]_{,j} + \omega^2 (\rho^0 - \bar{\rho}) \langle u(\vec{r})_i \rangle + \\ &+ \omega^2 \langle \delta \rho(\vec{r}) \delta u(\vec{r})_i \rangle = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.69)$$

W pracy [1] przyjmuje się, że średnie pole przemieszczeń  $\vec{U}(\vec{r}, t)$ , zwane falą efektywną ma postać płaskiej tłumionej fali propagującej się w ujemnym kierunku osi  $Ox_Q$  i spolaryzowanej w kierunku osi  $Ox_P$  ( $P, Q = 1, 2, 3$ ) kartezjańskiego układu współrzędnych  $Ox_1, x_2, x_3$  związanego z próbką, tj. dane jest wyrażeniami

$$\begin{aligned} \langle U(\vec{r}, t)_i \rangle &= \langle u(\vec{r})_i \rangle \exp(i\omega t) , \quad \langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle = \langle u(\vec{r}) \rangle \vec{e}_i \delta_{iP} , \\ \langle u(\vec{r}) \rangle &= \bar{A}_{PQ} \exp(i\bar{k}_{PQ} \vec{e}_Q \cdot \vec{r}) , \quad \bar{k}_{PQ}^{(a)} = \omega / \bar{c}_{PQ} , \quad \bar{k}_{PQ}^{(b)} = -\bar{\eta}_{PQ} , \end{aligned} \quad (1.70)$$

gdzie  $\vec{e}_P$  i  $\vec{e}_Q$  są wektorami jednostkowymi odpowiednio w kierunku osi  $Ox_P$  i  $Ox_Q$ .  $\bar{c}_{PQ}$  i  $\bar{\eta}_{PQ}$  oznaczają odpowiednio prędkość propagacji i tłumienie fali efektywnej rozchodzącej się w równoważnym ośrodku jednorodnym w kierunku wektora  $\vec{e}_Q$  i spolaryzowanej w kierunku wektora  $\vec{e}_P$ . Wyrażenia (1.70) opisują falę dylatacyjną (podłużną) lub ścinającą (poprzeczną), gdy odpowiednio  $P=Q$  lub  $P \neq Q$ . Podstawiając (1.70) do (1.64) otrzymujemy

$$\bar{k}_{PQ}^{(a)} = \omega Z^{(a)} , \quad \bar{k}_{PQ}^{(b)} = \omega Z^{(b)} , \quad Z = (\bar{\rho})^{1/2} / [\bar{c}(\omega)_{PQPQ}]^{1/2} . \quad (1.71)$$

Rozwiązując równania (1.71) względem  $\bar{c}(\omega)_{PQPQ}^{(a)}$  i  $\bar{c}(\omega)_{PQPQ}^{(b)}$ , otrzymujemy [3] :

$$\begin{aligned} \bar{c}(\omega)_{PQPQ}^{(a)} &= \bar{\rho} \omega^2 [(\bar{k}_{PQ}^{(a)})^2 - (\bar{k}_{PQ}^{(b)})^2] / (\bar{k}_{PQ} \bar{k}_{PQ}^*)^2 , \\ \bar{c}(\omega)_{PQPQ}^{(b)} &= -2\bar{\rho} \omega^2 \bar{k}_{PQ}^{(a)} \bar{k}_{PQ}^{(b)} / (\bar{k}_{PQ} \bar{k}_{PQ}^*)^2 , \end{aligned} \quad (1.72)$$

gdzie  $\bar{k}_{PQ}^*$  oznacza wielkość sprzężoną do wielkości zespolonej  $\bar{k}_{PQ}$ . Wzory (1.72) pozwalają wyliczyć efektywne dynamiczne moduły zespolone  $\bar{c}(\omega)_{PQPQ}$  ośrodka niejednorodnego I w przypadku, gdy znane są makroskopowe parametry propagacji  $\bar{c}_{PQ}$  i  $\bar{\eta}_{PQ}$  fali efektywnej w tym ośrodku oraz znana jest gęstość efektywna  $\bar{\rho}$  (np.  $\bar{\rho} = \rho^0$ ). W przypadku, gdy gęstość efektywną  $\bar{\rho}$  traktujemy jako niewiadomą, trzecie równanie, zamykające układ równań (1.72) na niewiadome w postaci  $\bar{c}(\omega)_{PQPQ}^{(a)}$ ,  $\bar{c}(\omega)_{PQPQ}^{(b)}$  i  $\bar{\rho}$ , możemy otrzymać z równania (1.69) po podstawieniu do niego (1.70). Otrzymamy w ten sposób równanie wiążące makroskopowe parametry propagacji  $\bar{c}_{PQ}$  i  $\bar{\eta}_{PQ}$

efektywnej fali ultradźwiękowej w ośrodku niejednorodnym I oraz efektywny moduł  $\bar{C}(\omega)_{PQPQ}$  i gęstość  $\bar{\rho}$  tego ośrodka z jego strukturą. Struktura ta jest określona przez prawdopodobieństwo (1.1) w granicy  $n \rightarrow L = N + 2$  i uwikłana poprzez lokalną fluktuację pola przemieszczeń (1.49) w operację uśredniania  $(N+2)$ -punktowych momentów statystycznych (1.60).

### 1.5.2. Drgania wymuszone

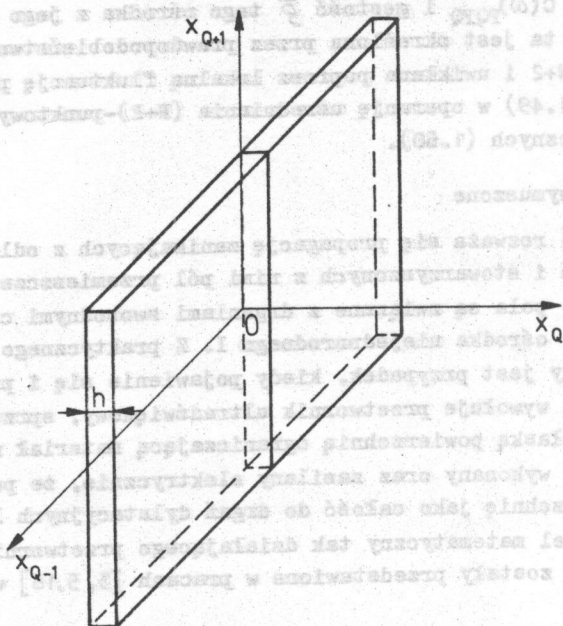
W pracy [1] rozważa się propagację zanikających z odległością pól naprężeń i stowarzyszonych z nimi pól przemieszczeń, przy czym oba te pola są związane z drganiami swobodnymi cząstek nieograniczonego ośrodka niejednorodnego I. Z praktycznego punktu widzenia ważny jest przypadek, kiedy pojawienie się i propagację takich pól wywołuje przetwornik ultradźwiękowy, sprzężony mechanicznie z płaską powierzchnią ograniczającą materiał niejednorodny i tak wykonany oraz zasilany elektrycznie, że pobudza on tę powierzchnię jako całość do drgań dylatacyjnych lub ścinających. Model matematyczny tak działającego przetwornika ultradźwiękowego zostały przedstawione w pracach [3, 5, 18] w sposób następujący:

Niech  $Ox_1x_2x_3$  będzie zbiorem osi odniesienia układu współrzędnych kartezjańskich o jednostkowych wektorach bazy  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , osadzonym w każdej próbce ośrodka niejednorodnego I należącej do zbioru statystycznego makroskopowo identycznych próbek. Wymiary liniowe każdej próbki są z założenia bardzo duże w porównaniu z długością analizowanych fal tak że traktujemy je jako nieskończenie rozległe. Zakłada się, że w każdej próbce jest zanurzona sztywna i nieskończenie rozległa płaska płyta o grubości  $h \rightarrow 0$  (rys.1), ograniczona płaszczyznami  $x_Q = 0$  i  $x_Q = h$  ( $Q = 1, 2, 3$ ;  $Q$  - ustalone). Ośrodek jest doskonale sprzężony mechanicznie z tą płytą, która jako całość drga z częstotliwością kątową  $\omega$  wzdłuż osi  $x_P$ , pozostając pod działaniem siły harmonicznie zależnej od czasu i danej wyrażeniem

$$F_1 = -\delta_{1P} \delta(x_Q) \tilde{F}_0 \exp(i\omega t)^{(a)}; \tilde{F}_0 - \text{stała rzeczywista.} \quad (1.73)$$

Tak więc osie  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  prostokątnego układu współrzędnych zostały wybrane w ten sposób, że oś  $x_Q$  jest normalna do drgają-





Rys. 1. Układ współrzędnych prostokątnych

cej płaszczyzny ( $h \rightarrow 0$ ), a oś  $x_P$  jest skierowana w kierunku drgań płaszczyzny. W dalszych rozważaniach dużymi literami P, Q, I ( $P, Q, I = 1, 2, 3$ ) będziemy oznaczali wskaźniki o ustalonych wartościach, a więc nie będziemy sumowali po powtarzających się wskaźnikach P, Q, I.

W rozpatrywanym przypadku granicznym  $h \rightarrow 0$  ośrodek niejednorodny I wypełnia obie półprzestrzenie oddzielone od siebie drgającą płaszczyzną  $x_Q = 0$ . Przemieszczeniowe równanie ruchu opisujące propagację zaburzeń akustycznych w tym ośrodku, wytwarzanych przez sztywną płaszczyznę  $x_Q = 0$  drgającą w kierunku  $\vec{e}_P$ , ma następującą postać:

$$\left[ c(\vec{r}, \omega)_{ijkl} u(\vec{r}, t)_{k,l} \right]_{,j} - \rho(\vec{r}) \left[ \partial^2 u(\vec{r}, t)_i / \partial t^2 \right] = \delta_{iP} \delta(x_Q) F_0 \exp(i\omega t); F_0 = \tilde{F}_0 / V, \quad (1.74)$$

gdzie  $V$  jest objętością ośrodka.

Interesują nas wyłącznie takie rozwiązania równań (1.74), które zależą harmonicznie od czasu, tj.

$$u(\vec{r}, t)_j = u(\vec{r})_j \exp(i\omega t), \quad (1.75)$$

przy czym od  $u(\vec{r})_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , żąda się, aby spełniały następujące warunki graniczne i ciągłości

$$\lim_{x_Q \rightarrow +\infty} u(\vec{r})_j = 0, \quad \lim_{x_Q \rightarrow 0(+)} u(\vec{r})_j = \lim_{x_Q \rightarrow 0(-)} u(\vec{r})_j = \delta_{jP} \cdot \text{constans} \quad (1.76)$$

Po podstawieniu (1.75) do równań (1.74) i uśrednieniu po zbiorze statystycznym próbek, otrzymujemy

$$\left\langle \left[ c(\vec{r}, \omega)_{ijkl} u(\vec{r})_{k,l} \right]_{,j} \right\rangle + \omega^2 \left\langle \rho(\vec{r}) u(\vec{r})_i \right\rangle = \delta_{iP} \delta(x_Q) F_0. \quad (1.77)$$

Formułujemy teraz hipotezę, że możliwe jest znalezienie takiego fikcyjnego materiału jednorodnego, zwanego ciałem równoważnym, że przemieszczeniowa odpowiedź ośrodka równoważnego na obciążenie dynamiczne (1.73) ma postać:

$$\left\langle u(\vec{r}, t)_i \right\rangle = \left[ \left\langle u(\vec{r})_i \right\rangle \exp(i\omega t) \right]^{(a)}, \quad \left\langle u(\vec{r})_i \right\rangle = \left\langle u(\vec{r}) \right\rangle \delta_{iP}. \quad (1.78)$$

Pole przemieszczeń (1.78) otrzymuje się przez uśrednianie pola (1.75) przy założeniu, że zaburzenia przemieszczeniowe wytwarzane przez drgającą płaszczyznę  $x_Q = 0$  są liniowo spolaryzowane wzdłuż kierunku  $\vec{e}_P$  i że inne mody, wytwarzane w procesie konwersji modów i rozpraszania na granicach niejednorodności (ziaren), znoszą się wzajemnie podczas uśredniania lub ich wypadkowe amplitudy są zaniedbywalnie małe w porównaniu z amplitudą składowej  $\left\langle u(\vec{r})_P \right\rangle = \left\langle u(\vec{r}) \right\rangle$ .

Równoważne ciało jednorodne jest scharakteryzowane dynamicznymi efektywnymi parametrami materiałowymi  $\bar{\rho}$  i  $\bar{c}(\vec{r}, \omega)_{ijkl}$ ,

które są tak dobrane, że ciało równoważne posiada własności dynamiczne ośrodka niejednorodnego. Oznacza to, że równania (1.77) są równoważne następującym równaniom:

$$\bar{C}(\omega)_{ijPl} \langle u(\vec{r}), j_l \rangle + \omega^2 \bar{\rho} \langle u(\vec{r}) \rangle \delta_{iP} = \delta_{iP} \delta(x_Q) F_0. \quad (1.79)$$

Stosując metodę operatorową, opartą na przejściu od funkcji  $\langle u(\vec{r}) \rangle$  do jej transformaty Fouriera, znaleziono [6] rozwiązanie równania (1.79) w postaci

$$\bar{e}_i \langle u(\vec{r})_i \rangle = \langle u(\vec{r}) \rangle \bar{e}_i \delta_{iI}, \quad (1.80)$$

$$\langle u(\vec{r}) \rangle = \bar{A}_{IQ} \exp(-i\bar{K}_{IQ}|x_Q|), \quad I = P, Q; P, Q = 1, 2, 3; P \neq Q, \quad (1.81)$$

gdzie część rzeczywista  $\bar{K}_{IQ}^{(a)}$  i urojona  $\bar{K}_{IQ}^{(b)}$  modułu zespolonego wektora falowego  $\bar{K}_{IQ}$  wyrażają się wzorami (1.70), (1.71), natomiast amplituda  $\bar{A}_{IQ}$  dana jest wyrażeniem

$$\bar{A}_{IQ} = i(F_0/2)\bar{K}_{IQ}/(\omega^2\bar{\rho}). \quad (1.82)$$

Tak więc rozwiązanie (1.80) - (1.82) równań (1.79) przedstawia średnie pole przemieszczeń (falę efektywną) w postaci fali płaskiej tłumionej, propagującej się rozbieżnie wzdłuż osi  $Ox_Q$  w obu jej kierunkach i spolaryzowanej w kierunku osi  $Ox_I$ , przy czym prędkość propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  i tłumienie  $\bar{\eta}_{IQ}$  są określone wzorami:

$$\bar{c}_{IQ} = 1/z^{(a)}, \quad \bar{\eta}_{IQ} = -z^{(b)}, \quad z = (\bar{\rho})^{1/2} / [\bar{C}(\omega)_{IQIQ}]^{1/2}. \quad (1.83)$$

Wyrażenia (1.80) - (1.83) opisują falę dylatacyjną ( $I = Q$ ) lub ścinającą ( $I = P \neq Q$ ). Gdy zmienimy znak wyrażenia (1.73) na siłę wymuszającą drgania, wówczas otrzymamy to samo rozwiązanie (1.80) - (1.83) dla zmienionego odpowiednio równania (1.79), z tą jednakże różnicą, że nastąpi zmiana znaku amplitudy (1.82).

## 2. MATERIAŁY POROWATE Z MATRYCĄ SPRĘŻYSTĄ

### 2.1. Wprowadzenie

Kiedy liczbę faz (składników) ośrodka niejednorodnego i ograniczymy do dwu zakładając ponadto, że jedna z faz jest ciałem stałym liniowo sprężystym, a drugą fazę stanowią pustki rozproszone przypadkowo ze względu na swe położenie, kształt i wymiary, to otrzymamy wtedy ciało porowate. Własności akustyczne ciał porowatych badano doświadczalnie i teoretycznie w pracach [2-4, 18]. W przypadku tak zdefiniowanego ciała porowatego nie są spełnione założenia (1.40) i (1.55). Tak więc po zastąpieniu modułów zespolonych lepkosprężystego zachowania się materiału odpowiednimi modułami sztywności materiału sprężystego można odnieść do ciała porowatego tylko te równania i wzory (1.1)-(1.83), które uzyskano nie korzystając z założeń (1.40), (1.55).

W pracach [3, 4, 18] szczególną uwagę zwrócono na materiały porowate, których porowatość może się zmieniać (rosnąć) w miarę upływu czasu. Przykładem takiego materiału może być jakiegokolwiek ciało stałe, w którym zwiększa się liczba mikropęknięć wskutek postępującego procesu zmęczenia i zniszczenia materiału. Ze względu na ważność techniczną skutków postępującego procesu tworzenia się i propagacji pęknięć rodzi się pytanie, jaka jest zależność efektywnych dynamicznych modułów sztywności  $\bar{C}(\omega)_{ijkl}$  oraz makroskopowych parametrów propagacji  $\bar{c}_{PQ}$  i  $\bar{\eta}_{PQ}$  fal ultradźwiękowych od postępu procesu pęknięcia materiału. Nasuwa się wtedy również pytanie, czy z obserwowanych zmian makroskopowych parametrów propagacji fali ultradźwiękowej można wnosić o postępie wspomnianych procesów degradacji materiału oraz który z dwu rozpatrywanych modów jest bardziej przydatny do takich badań. Można także postawić pytanie, jak zmienia się w miarę wzrostu porowatości gęstość energii pola fali ultradźwiękowej przy niezmiennym obciążeniu wzbudzającym drgania oraz do jakich wniosków prowadzi analiza zmian tej gęstości energii. Odpowiedzi na te i inne pytania szukano w pracach [3, 4, 18], posługując się zarówno eksperymentem jak i analizą teoretyczną. Przedstawimy teraz niektóre wyniki tych badań.



## 2.2. Dynamiczne efektywne moduły sztywności ciała porowatego

Przypuśćmy, że niezależna od czasu część  $\vec{u}(\vec{r})$  odpowiedzi przemieszczeniowej (1.75) ciała porowatego na obciążenie zewnętrzne (1.75) jest taka, że po uśrednieniu  $\langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle$  ma postać tłumionej płaskiej i liniowo spolaryzowanej fali, danej wyrażeniami (1.80)-(1.81) i zwanej falą efektywną. Wykorzystując w tym przypadku hipotezę o możliwości znalezienia równoważnego ciała, można wyznaczyć dynamiczne efektywne moduły sztywności ciała równoważnego z pomiarów prędkości propagacji  $\bar{c}_{PQ}$  i współczynnika tłumienia  $\bar{\gamma}_{PQ}$  ( $P, Q = 1, 2, 3$ ) fali efektywnej (1.80)-(1.83) w ciele porowatym. Należy jednak podkreślić, że doświadczenia muszą być przeprowadzane w taki sposób, który zapewni, że niezależna od czasu część  $\langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle$  średniego pola przemieszczeń  $\langle \vec{U}(\vec{r}, t) \rangle$ , która stanowi średnią odpowiedź przemieszczeniową (1.78) ciała porowatego na obciążenie harmonicznym zależnym od czasu (1.73), będzie liniowo spolaryzowaną falą efektywną daną wyrażeniami (1.80)-(1.83). Wtedy część rzeczywistą  $\bar{C}(\omega)_{I, Q I Q}^{(a)}$  i urojoną  $\bar{C}(\omega)_{I, Q I Q}^{(b)}$  ( $I = P, Q; P, Q = 1, 2, 3; P \neq Q$ ) dynamicznego efektywnego modułu sztywności  $\bar{C}(\omega)_{I, Q I Q}$  możemy wyznaczyć z pomiarów  $\bar{c}_{I, Q}$  i  $\bar{\gamma}_{I, Q}$  wykorzystując wzory (1.70) i (1.72).

W granicznym przypadku, gdy porowatość dąży do zera ( $b \rightarrow 0$ ) przy niezmiennym obciążeniu zewnętrznym (1.73), interesować nas będzie propagująca się w jednorodnym materiale matrycy płaska liniowo spolaryzowana fala dana wyrażeniami:

$$W(\vec{r}, t)_1 = [w(\vec{r}) \exp(i\omega t)]^{(a)} \delta_{II}, \quad w(\vec{r}) = A_{IQ} \exp(-iK_{IQ}|x_Q|), \quad (1.84)$$

gdzie

$$A_{IQ} = i(F_0/2)K_{IQ}/(\omega^2 \rho), \quad K_{IQ} = \omega/c_{IQ}, \quad C_{IQIQ} = \rho(c_{IQ})^2, \quad (1.85)$$

$$I = P, Q; P, Q = 1, 2, 3; P \neq Q.$$

$\vec{W}(\vec{r}, t)$  oznacza pole przemieszczeń w chwili  $t$  w punkcie  $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$  próbki wykonanej ze sprężystego materiału matrycy, charakteryzującego się gęstością  $\rho$  i tensorem modułów sztywności  $C_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ). Niezależną od czasu część fali (1.84) moż-

na przepisać w postaci

$$w(\vec{r}) = |A_{IQ}| \exp[-iK_{IQ}(|x_Q| + 2\pi/K_{IQ})] . \quad (1.86)$$

Dokonajmy teraz przekształcenia translacji układu współrzędnych prostokątnych przesuwając jego początek z punktu  $x_{Q-1} = x_Q$   $x_{Q+1} = 0$  (rys. 1) do punktu  $x_{Q-1} = x_{Q+1} = 0$ ,  $x_Q = -2\pi/K_{IQ}$ . Wtedy wyrażenie (1.86) będzie można przepisać w postaci

$$w(r) = |A_{IQ}| \exp(-iK_{IQ}|x_Q|) . \quad (1.87)$$

Jeżeli matryca ciała porowatego jest liniowo sprężystym ciałem stałym, wtedy każdą pustkę (pęknięcie lub por) można traktować jako pojedynczy element rozpraszający falę akustyczną i mierzone tłumienie jest sumarycznym efektem rozpraszania przez wszystkie pory. Próby ilościowej analizy tłumienia wykonane przez Papadakisa [19] doprowadziły go do wyróżnienia dwóch charakterystycznych obszarów częstotliwości; stosując uzyskane przez niego wyniki do ciała porowatego możemy wyróżnić obszar Rayleigha obejmujący częstotliwości kątowe spełniające warunek

$$\omega/\pi > 20 \bar{c}_{IQ} / \langle D \rangle \quad (1.88)$$

i obszar "stochastyczny", do którego należą częstotliwości kątowe spełniające warunek

$$\omega/\pi < 0,2 \bar{c}_{IQ} / \langle D \rangle , \quad I = P, Q; \quad P, Q = 1, 2, 3; \quad P = Q, \quad (1.89)$$

gdzie  $D$  jest charakterystycznym wymiarem liniowym pustki (np. średnicą w przypadku pustek kulistych). Opierając się na wynikach pracy [19] można oczekiwać, że w obszarze częstotliwości określonym przez nierówność (1.88) współczynnik rozpraszania przez pustki jest proporcjonalny do  $\omega^4$ , podczas gdy w obszarze małych częstotliwości należących do obszaru stochastycznego (1.89) współczynnik rozpraszania jest proporcjonalny do  $\omega^2$ . Wyjaśnia to wniosek, jaki wynika z doświadczeń przedstawionych w dalszej części pracy, że w obszarze małych częstotliwości (1.89) wpływ tłumienia wynikającego z rozpraszania na propagację fali efektywnej jest zanedbywalnie mały w porównaniu z in-

nyimi efektami spowodowanymi obecnością pustek, tj.

$$\left| \bar{k}_{IQ}^{(a)} \right| \gg \left| \bar{k}_{IQ}^{(b)} \right| . \quad (1.90)$$

Stąd wynika z wzorów (1.72), że w obszarze (1.89) długich fal zachodzi nierówność:

$$\left| \bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(b)} \right| \ll \left[ \bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(a)} \right]^2 + \left[ \bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(b)} \right]^2 \Bigg]^{1/2} , \quad (1.91)$$

a wzory (1.72) redukują się do

$$\bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(a)} = \bar{\rho} \omega^2 / (\bar{k}_{IQ}^{(a)})^2 , \quad (1.92)$$

$$\bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(b)} = \begin{cases} -2\bar{\rho} \omega^2 \bar{k}_{IQ}^{(b)} / (\bar{k}_{IQ}^{(a)})^3 & \text{dla małych częstotliwości,} \\ 0 & \text{dla bardzo małych częstotliwości.} \end{cases} \quad (1.93)$$

### 2.3. Wyznaczanie modułów dynamicznych ciała porowatego z pomiarów ultradźwiękowych

W pracach [3, 4] podano przykłady doświadczalnego wyznaczenia dynamicznych efektywnych modułów sztywności ciała porowatego. W tych badaniach doświadczalnym ciałem o rosnącej porowatości modelowano pięcioma próbkami spieków sproszkowanej miedzi o porowatości zmieniającej się w zakresie od 0,68% do 1,76% i średnim charakterystycznym wymiarem liniowym  $\langle D \rangle$  zmieniającym się w zakresie od  $1,42 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  do  $1,76 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Próbki te zostały przygotowane przez L. Radziszewskiego [20, 21]. Spiekał on w temperaturze 1223K w atmosferze ochronnej amoniaku próbki uformowane z proszku miedziowego o wysokiej czystości (99,9%) pod wysokim ciśnieniem hydrostatycznym. Ciśnienie hydrostatyczne powodowało, że pustki (pory), rozproszone przypadkowo w otrzymanych spiekach, miały w przybliżeniu kuliste kształty. Gęstość  $\rho$  czystej miedzi przyjęto jako równą  $8920 \text{ kg m}^{-3}$  [22]. Badania doświadczalne obejmowały pomiary prędkości propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  i współczynnika amplitudowego tłumienia  $\bar{\eta}_{IQ}$  dylatacyjnego ( $I=Q$ ) i ścinającego ( $I=P \neq Q$ ) modu falowego, propagujących się w pięciu próbkach porowatej miedzi o różnej porowatości i takim samym kształcie walca o średnicy i wysokości ok. 10 mm. Stosując

zestaw pomiarowy MATEC, wyprodukowany w r. 1980 w USA, zmierzono prędkości propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  techniką nakładania się impulsu echa ("Pulse Echo Overlap technique"), podczas gdy pomiarów tłumienia dokonano przez nakładanie odpowiednich obwiedni z rodzinny krzywych wykładowczych na impulsy echa widoczne na ekranie oscyloskopu. Pomiarów  $\bar{c}_{IQ}$  i  $\bar{\eta}_{IQ}$  dokonano dla częstotliwości  $\omega 2\pi = 4 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Jak to widać z tablicy 2, która zawiera wyniki pomiarów i dokonanych na ich podstawie obliczeń teoretycznych, warunek (1.89) był zawsze spełniony dla

$$\omega/\sigma = 8 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \ll 0,2 \bar{c}_{IQ} / \langle D \rangle, \quad I = P, Q; P \neq Q. \quad (1.94)$$

Wyniki obliczeń numerycznych podane w tablicy 2 potwierdzają również, że w obszarze (1.89) niskich częstotliwości są stosowalne wzory (1.92), (1.93), ponieważ wyniki numeryczne uzyskane przy zastosowaniu tych wzorów są bardzo dobrymi przybliżeniami wartości  $\bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(a)}$  i  $\bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(b)}$ , jakie otrzymujemy stosując wzory (1.72). Przykłady wyników pomiarowych przedstawiają również krzywe 1 na rys. 2 i 3 (str. 41, 42).

## 2.4. Obliczanie modułów dynamicznych ciała porowatego o znanej strukturze

### 2.4.1. Fałs podłużne

W pracy [2] zaproponowano metodę pozwalającą analizować zjawisko propagacji ultradźwiękowej fali podłużnej (dylatacyjnej) w ciele porowatym w tych przypadkach, kiedy jest uzasadnione stosowanie przybliżeń pojedynczego rozpraszania i kulistych pustek. Przedstawione w dalszej części pracy wyniki pomiarów i obliczeń teoretycznych [3, 4] wykazują, że przybliżenia te są stosowalne w obszarze (1.89) małych częstotliwości i małych porowatości. W przybliżeniu pojedynczego rozpraszania i kulistych pustek ciało porowate traktuje się [2] jako jednorodny izotropowy materiał sprężysty, w którym występują kuliste pustki o różnej przypadkowej objętości  $V_p$ . Promień każdej pustki traktuje się jako zmienną losową, której funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $g(R)$  jest znana, przy czym



Tablica 2. Pomiaru akustyczne i obliczenia dla porowatej miedzi dla  $\omega/\pi = 8 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$  [3]

wielkości zmierzone	porowatość				
	0,68 %	0,86 %	1,35 %	1,65 %	1,76 %
$\bar{c}_{qq} [(1 \pm 5 \cdot 10^{-3}) \text{ ms}^{-1}]$	4762	4738	4713	4680	4679
$\bar{c}_{Pq} [(1 \pm 5 \cdot 10^{-3}) \text{ ms}^{-1}]$	2328	2320	2308	2307	2306
$\bar{\eta}_{qq} = K_{qq}^{(b)} [\text{m}^{-1}]$	19,52 ± 1,8 %	—	—	—	24,78 ± 3,1 %
$\bar{\eta}_{Pq} = K_{Pq}^{(b)} [\text{m}^{-1}]$	7,97 ± 2 %	—	—	—	12,25 ± 1,2 %
wielkości obliczone dla $\langle D \rangle = 1,42 \cdot 10^{-6} \text{ m}, g = 8920 \text{ kgm}^{-3}$					
$0,2 \bar{c}_{qq} / \langle D \rangle [10^9 \text{ s}^{-1}]$	6,707 042	6,673 239	6,638 028	6,591 549	6,590 141
$0,2 \bar{c}_{Pq} / \langle D \rangle [10^9 \text{ s}^{-1}]$	3,278 873	3,267 606	3,250 704	3,249 296	3,247 887
$\bar{K}_{qq}^{(a)} [\text{m}^{-1}]$	5277	5304	5333	5370	5371
$\bar{K}_{Pq}^{(a)} [\text{m}^{-1}]$	10796	10833	10889	10894	10899
wielkości obliczone (1,92) na podstawie powyższych danych doświadczalnych					
$\bar{C}(\omega)_{qqq}^{(a)} [10^{11} \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}]$	2,022 757	2,022 757	1,981 343	1,953 694	1,952 859
$\bar{C}(\omega)_{PqPq}^{(a)} [10 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}]$	4,834 269	4,801 100	4,751 563	4,747 446	4,743 331

wielkości obliczone (1.72) na podstawie powyższych danych doświadczalnych				
$\bar{C}(\omega)_{qqqq}^{(a)}$ [ $10^{11} \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ]	2.022674	-	-	1.952735
$\bar{C}(\omega)_{qqqq}^{(b)}$ [ $10^9 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ]	1.496205	-	-	1.801760
$\bar{C}(\omega)_{pqpq}^{(a)}$ [ $10^{10} \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ]	4.834261	-	-	4.743313
$\bar{C}(\omega)_{pqpq}^{(b)}$ [ $10^9 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ]	0.713757	-	-	1.066272
wielkości obliczone (1.93) na podstawie powyższych danych doświadczalnych				
$\bar{C}(\omega)_{qqqq}^{(b)}$ [ $10^9 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ]	1.496246	-	-	1.801837
$\bar{C}(\omega)_{pqpq}^{(b)}$ [ $10^9 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ]	0.713776	-	-	1.066274
wielkości obliczone (1.156) na podstawie powyższych danych doświadczalnych				
$\langle f_{qq} \rangle$	0.534196	0.528085	0.515101	0.507988
$\langle f_{pq} \rangle$	0.551324	0.533709	0.506263	0.497101
wielkości obliczone w przybliżeniu pojedynczego rozpraszania [wzory (1.158), (1.159)]				
$\langle f_{qq} \rangle$	0.716396	0.594496	0.400341	0.332264
				0.312411

$$g(R) = N(R)/N, \quad N = \int_0^R N(R) dR, \quad R = (3V_p/4\pi)^{1/3}. \quad (1.95)$$

$N(R)$  jest liczbą pustek na jednostkę objętości, których promienie leżą w przedziale pomiędzy  $R$  i  $R + dR$ .

Podejście zaproponowane w pracy [2], które teraz omówimy, nie uwzględnia konwersji modów, jaka występuje na granicy nieciągłości lokalnych własności mechanicznych ośrodka, tj. nagrań każdej pustki (poru). Najbardziej istotnym powodem zaniedbania konwersji modów jest to, że współczynniki rozwinięcia  $C_m$  i  $B_m$  potencjałów skalarnego i wektorowego fal rozproszonych (odpowiednio podłużnych i poprzecznych) w szeregi tych samych funkcji różnią się istotnie między sobą; jak to wynika z wzorów (34b) - (34g) z pracy [23], wartość bezwzględna każdego współczynnika  $B_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) szeregu przedstawiającego rozproszony potencjał wektorowy jest mniejsza ok.  $(K_{QQ}/K_{PQ})^m$  razy ( $K \neq Q$ ) niż współczynnik  $C_m$  z tym samym wskaźnikiem  $m$  rozwinięcia w szereg rozproszonego potencjału skalarnego. Tak więc rozchodząca się w badanym ośrodku niejednorodnym (porowatym) falę płaską traktuje się jako wypadkową podłużnej fali padającej i podłużnych fal rozproszonych na niejednorodnościach. Zakłada się, że odległości wzajemne pomiędzy każdymi dwoma sąsiednimi kulami rozpraszającymi (pustkami) są bardzo duże w porównaniu z długością fali. Zakłada się ponadto rozpraszanie pojedyncze, tj. zakłada się, że fala padająca rozprasza się tylko na jednej z napotkanych na swej drodze niejednorodności. Wypadkowa fala podłużna, propagująca się w cieple porowatym, jest z założenia opisana wyrażeniami (1.80) - (1.83), (1.70), (1.71), natomiast pierwotna fala padająca jest generowana przez zewnętrzną siłę wymuszającą typu (1.73).

Stosując podejście zaproponowane w pracy [2], rozważmy, podobnie jak w pracy [3], sytuację, kiedy fala dylatacyjna jest wytwarzana przez drgającą sztywną płaszczyznę  $x_Q = \text{const.}$ , pozostającą pod działaniem siły typu (1.73), umieszczoną w nieskończenie rozległym ośrodku, zbudowanym prawie w całości z jednorodnego materiału matrycy badanego ciała porowatego; jedynie nieskończenie rozległa warstwa o grubości  $a$ , umieszczona w pewnej odległości od drgającej płaszczyzny po stronie większych

wartości  $x_Q$  i ograniczona dwoma płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny drgającej, jest zbudowana z badanego materiału porowatego. Wartości liczbowe współrzędnych  $x_Q$  określających płaszczyzny graniczne tej warstwy nie są istotne, ponieważ przez odpowiednią translację układu ortogonalnego osi współrzędnych można zawsze doprowadzić do takiej sytuacji, kiedy warstwa ta dzieli nieskończony ośrodek na trzy następujące obszary:

$$-\infty < x_Q < 0, \quad 0 \leq x_Q \leq a, \quad a < x_Q < +\infty \quad (1.96)$$

przy czym obszar  $0 \leq x_Q \leq a$  jest wypełniony badanym materiałem porowatym. Wielkości należące do każdego z obszarów (1.96) będą oznaczane górnymi wskaźnikami odpowiednio (1), (2) i (3). Zakłada się, że przylegające do siebie obszary są doskonale sprzężone mechanicznie ze sobą.

Tak więc dylatacyjna fala płaska, której część niezależna od czasu jest dana wzorami (1.85), (1.86), (1.87), pada na warstwę  $0 \leq x_Q \leq a$  ciała porowatego w kierunku normalnym do jej powierzchni  $x_Q = 0$ . Dla  $I = Q$  wzory określające tę falę przepisujemy w postaci

$$w(\vec{r}, t)_i = [w(\vec{r}) \exp(i\omega t)]^{(a)} \delta_{iQ}, \quad (1.97)$$

$$w(\vec{r}) = |A_{QQ}| \exp(-iK_{QQ}|x_Q|) = -\Psi_Q(\vec{r}), \quad (1.98)$$

$$K_{QQ} = \omega/c_{QQ}, \quad (1.99)$$

przyjmując, że warunki eksperymentu dobrano w ten sposób, że wartość bezwzględna amplitudy  $|A_{QQ}|$  jest równa jednostce długości. Wtedy potencjał skalarny fali padającej ma postać:

$$\Psi_Q(\mathbf{r}) = \varphi^{(1)} \exp(-iK_{QQ}|x_Q|), \quad \varphi^{(1)} = i|A_{QQ}|/K_{QQ} = i/K_{QQ}. \quad (1.100)$$

Potencjał skalarny fal rozproszonych przez jednorodną kulistą inkluzję  $\Psi_{is}$  jest dany wyrażeniem

$$\Psi_{is} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(R, K_{QQ}, K_{PQ}, K_{QQ}^{(i)}, K_{PQ}^{(i)}, h_m^{(1)}(K_{QQ}r) P_m(\cos\theta) \quad (1.101)$$

gdzie  $K_{QQ}^{(i)}$  i  $K_{PQ}^{(i)}$  ( $P, Q = 1, 2, 3; P \neq Q$ ) są liczbami falowymi



(1.85) fal płaskich (1.84). W przypadku, gdy inkluzje są kulistymi pustkami, wtedy  $K_{QQ}^{(1)} = K_{PQ}^{(1)} = 0$ .  $h_m^{(1)}(K_{QQ}r)$  oznacza kulistą funkcję Hankela pierwszego rodzaju scentrowaną w środku pustki,  $P_m(\cos \theta)$  jest wielomianem Legendre'a  $m$ -tego stopnia.

Potencjały skalarne fal dylatacyjnych padającej, przepuszczonej i odbitych od granic obszarów (1.96) oraz pochodne tych potencjałów normalne do płaszczyzn stanowiących granice obszarów (1.96) spełniają warunki ciągłości. Ponadto zakłada się, że spełnione są następujące warunki

$$(\bar{\rho} \bar{c}_{QQ} - \rho c_{QQ})^2 / (\bar{\rho} \bar{c}_{QQ} + \rho c_{QQ})^2 \ll 1, \quad \omega \ll c_{QQ}/a \iff a \ll 1/K_{QQ}. \quad (1.102)$$

Założenia te pozwalają uzyskać następującą zależność

$$(\bar{K}_{QQ}/K_{QQ})^2 a^2 = (\varphi^{(3)} - iK_{QQ}a\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)} + \psi^{(1)}) (\varphi^{(3)} - iK_{QQ}a\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)} - \psi^{(1)}), \quad (1.103)$$

gdzie  $\varphi^{(k)}$  i  $\psi^{(k)}$ ,  $k=1, 2, 3$ , oznaczają amplitudy potencjałów skalarnych odpowiednio fal przepuszczonych i odbitych w  $k$ -tym obszarze (1.96), przy czym  $\varphi^{(1)}$  dane jest wzorem (1.100). Z (1.95) i (1.101) wynika, że potencjał skalarny fali odbitej na granicy  $x_Q = 0$  i propagującej się w obszarze  $x_Q < 0$  w kierunku ujemnym osi  $x_Q$ , tj. w kierunku przeciwnym do kierunku fali padającej, można wyrazić wzorem

$$\psi^{(1)} \exp(iK_{QQ}x_Q) = a \int N(R) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(R, K_{QQ}, K_{PQ}, K_{QQ}^{(1)}, K_{PQ}^{(1)}) dR \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_n^{(1)}(K_{QQ}r) P_n(\cos \theta) dx_{Q-1} dx_{Q+1},$$

$$r = [(x_{Q-1})^2 + (x_Q)^2 + (x_{Q+1})^2]^{1/2}, \quad \cos \theta = x_Q/r, \quad x_Q < 0. \quad (1.104)$$

Podobnie potencjał skalarny fali propagującej się w obszarze  $x_Q > a$  w dodatnim kierunku osi  $x_Q$  można wyrazić jako

$$\begin{aligned}
 & (\varphi^{(1)} + \psi^{(3)}) \exp(-iK_{QQ}x_Q) \approx \varphi^{(3)} \exp(-iK_{QQ}x_Q) \\
 & = a \int_0^\infty N(R) \sum_{n=0}^\infty C_n(R, K_{QQ}, K_{PQ}, K_{QQ}^{(i)}, K_{PQ}^{(i)}) dR \int_{-\infty}^{+\infty} h_n^{(1)}(K_{QQ}r) P_n(\cos\theta) dx_{Q-1} dx_{Q+1}, \\
 & x_Q > a > 0. \tag{1.105}
 \end{aligned}$$

Z (1.104), (1.105) wynika, że

$$\psi^{(1)} = aF(-i), \quad \varphi^{(3)} = \varphi^{(1)} + aF(+i) = i(1/K_{QQ}) + aF(+i), \tag{1.106}$$

gdzie

$$F(\pm) = \left[ 2\pi / (K_{QQ})^2 \right] \int_0^\infty N(R) \sum_{n=0}^\infty (\pm i)^n C_n(R, K_{QQ}, K_{PQ}, K_{QQ}^{(i)}, K_{PQ}^{(i)}) dR. \tag{1.107}$$

Równanie (1.103) można teraz przepisać w postaci

$$\begin{aligned}
 (\bar{K}_{QQ}/K_{QQ})^2 &= [F(+i) - iK_{QQ}\varphi^{(1)} - iK_{QQ}aF(+i) + F(-i)] \cdot \\
 &\cdot [F(+i) - iK_{QQ}\varphi^{(1)} - iK_{QQ}aF(+i) - F(-i)]. \tag{1.108}
 \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy z dokładnością nie mniejszą niż  $F(\pm i)$  następujące równanie

$$(\bar{K}_{QQ}/K_{QQ})^2 = [F(+i) - iK_{QQ}\varphi^{(1)} + F(-i)] \cdot [F(+i) - iK_{QQ}\varphi^{(1)} - F(-i)], \tag{1.109}$$

lub

$$\begin{aligned}
 (\bar{K}_{QQ}/K_{QQ})^2 &= \left\{ 1 + 2\pi (K_{QQ})^{-2} \int_0^\infty N(R) \sum_{n=0}^\infty [(i)^n - (-i)^n] C_n(R, K_{QQ}, K_{PQ}, K_{QQ}^{(i)}, K_{PQ}^{(i)}) \cdot \right. \\
 &\cdot dR \left. \right\} \cdot \left\{ 1 + 2 (K_{QQ})^{-2} \int_0^\infty N(R) \sum_{n=0}^\infty [(i)^n + (-i)^n] C_n(R, K_{QQ}, K_{PQ}, K_{PQ}^{(i)}, K_{QQ}^{(i)}) dR \right\}. \tag{1.110}
 \end{aligned}$$

Wróćmy do przypadku, gdy inkluzje są kulistymi pustkami, tj. gdy  $K_{QQ}^{(i)} = K_{PQ}^{(i)} = 0$ . Wtedy współczynniki  $C_n(R, K_{QQ}, K_{PQ})$  mają nas-

tępującą postać [23, wzory (34a), (34b), (34f)]:

$$C_0 = (1/3) \left[ 1 - (3/4) (K_{PQ}/K_{QQ})^2 \right] (1/K_{QQ}) (K_{QQ}R)^3, \quad (1.111)$$

$$C_1 = -i(1/3) (1/K_{QQ}) (K_{QQ}R)^3, \quad (1.112)$$

$$C_n = (-i)^n (4n^2 - 1) \left[ n! 2^n / (2n)! \right]^2 (K_{QQ}R)^{2n-1} \cdot \left[ 1 - (2n^2 - 1) (K_{PQ}/K_{QQ})^2 (1/2n)/(n-1) \right]^{-1}, \quad n=2,3,4,\dots \quad (1.113)$$

Wprowadźmy teraz następujące ograniczenie:

$$K_{QQ}R \ll 1 \iff \omega \ll c_{QQ}/R, \quad (1.114)$$

które umożliwia urwanie sumowania w (1.110) na  $n=2$ . W ten sposób otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\bar{K}_{QQ}/K_{QQ})^2 &= (c_{QQ}/\bar{c}_{QQ})^2 \\ &= \left[ 1 + 14\pi (K_{QQ})^{-2} \int_0^\infty N(R) C_1(R, K_{QQ}, K_{PQ}) dR \right] \left\{ 1 - 4\pi (K_{QQ})^{-2} \int_0^\infty N(R) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [C_0(R, K_{QQ}, K_{PQ}) - C_2(R, K_{QQ}, K_{PQ})] dR \right\}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

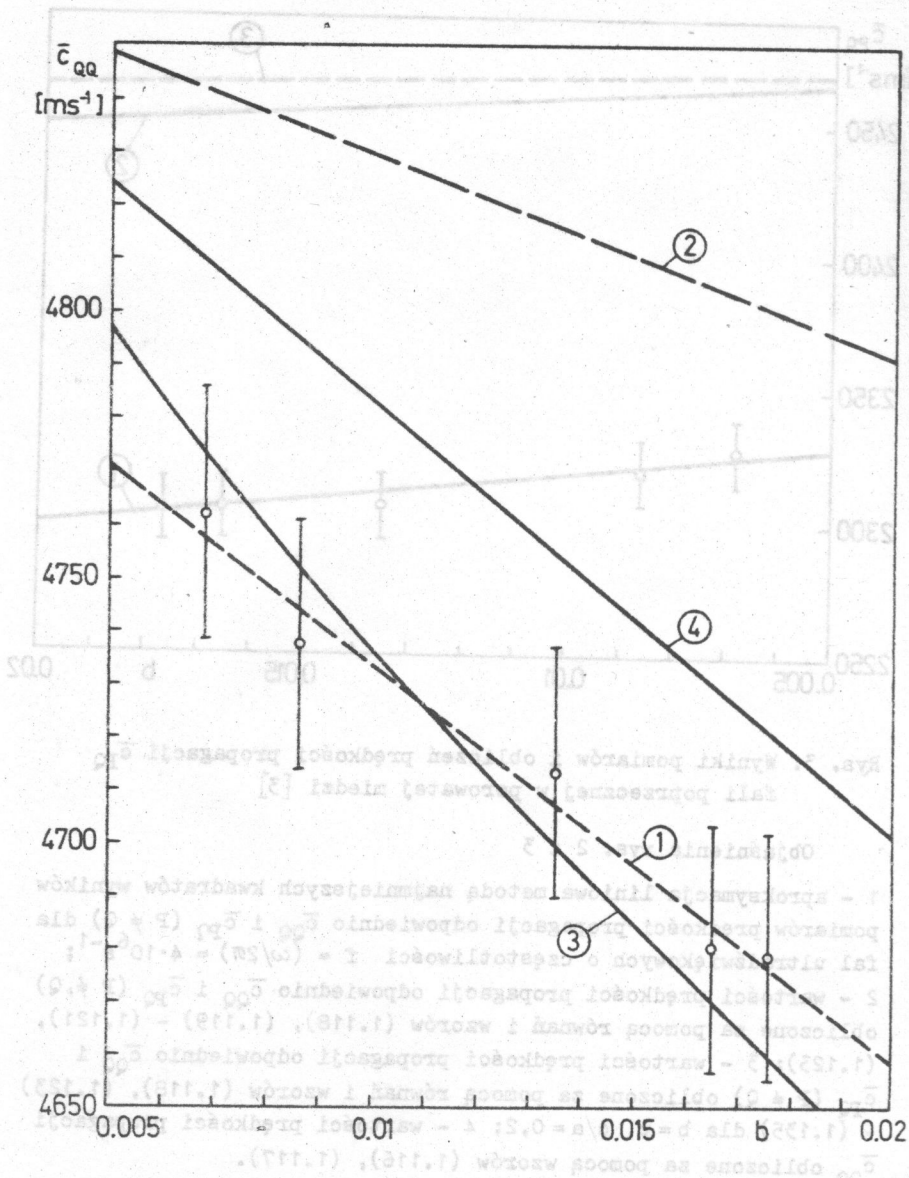
Tak więc w obszarze niskich częstotliwości (1.114), który zawiera się w obszarze "stochastycznym" (1.89), dynamiczny efektywny moduł sztywności  $\bar{c}(\omega)_{QQQQ}$ , jest rzeczywisty, jak należało oczekiwać, i dany wzorem (1.92) dla  $P=Q$ . Z kolei  $\bar{c}_{QQ}$  można wyliczyć z wzoru (1.115), który dla ciała porowatego z izotropową matrycą upraszcza się, po wykonaniu całkowania po  $R$  i pewnych przekształceń algebraicznych, do wzoru postaci

$$(\bar{c}_{QQ}/c_{QQ})^2 = \left\{ (1+b)(1 - [H(v) + 1]b) \right\}^{-1}, \quad (1.116)$$

gdzie

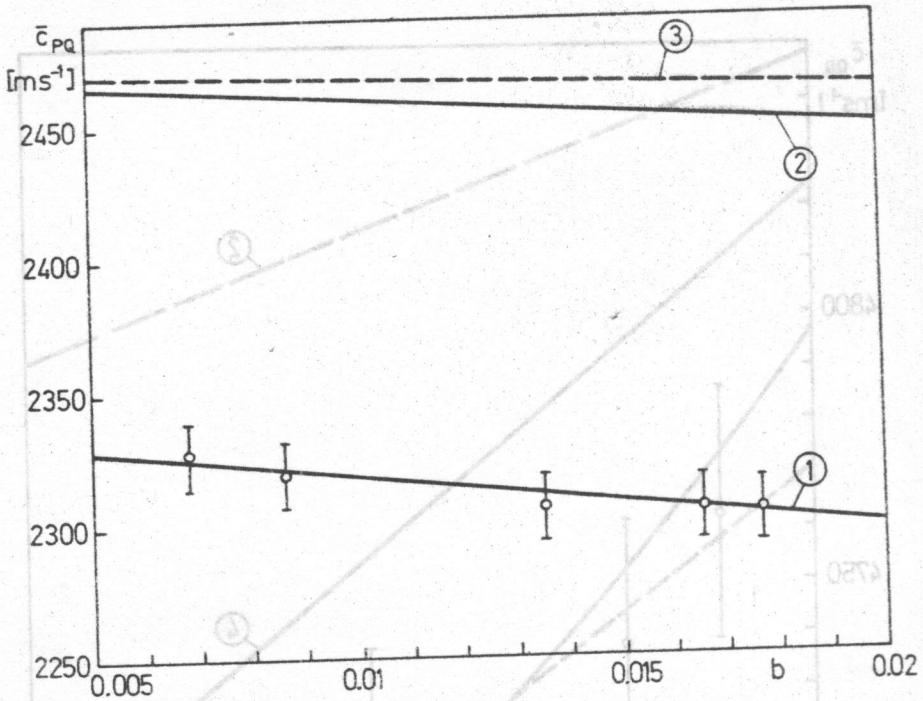
$$b = (4/3)\pi n_0 \langle R^3 \rangle, \quad f(v) = (1-v)/(1-2v), \quad (1.117)$$

$$H(v) = \left\{ 5 - (3/2)f(v)[1 - (9/2)f(v)] \right\} [1 - (9/2)f(v)]^{-1}; \quad 0 \leq v \leq 1/2.$$



Rys.2. Wyniki pomiarów i obliczeń prędkości propagacji  $\bar{c}_{qq}$  fali podłużnej w porowatej miedzi [3]





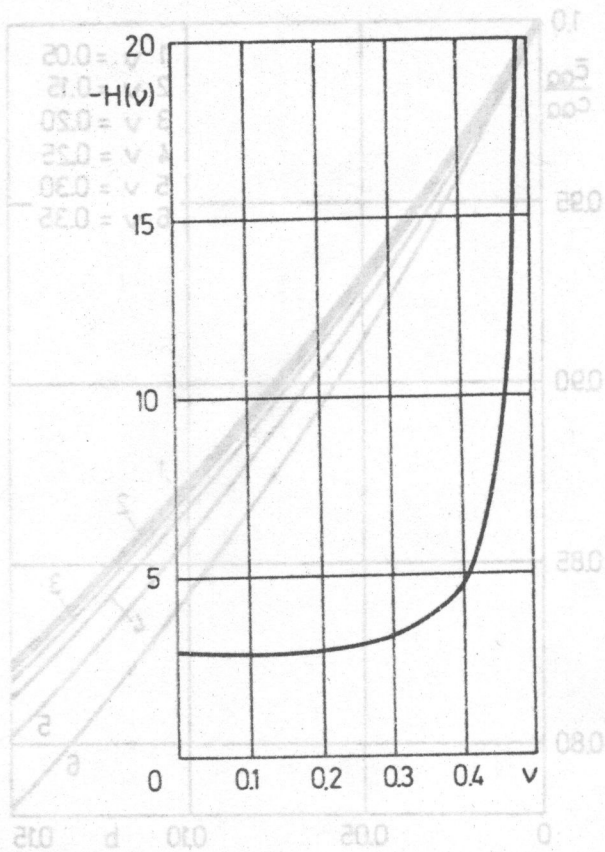
Rys. 3. Wyniki pomiarów i obliczeń prędkości propagacji  $\bar{c}_{PQ}$  fali poprzecznej w porowatej miedzi [3]

Objaśnienia rys. 2 i 3

- 1 - aproksymacja liniowa metodą najmniejszych kwadratów wyników pomiarów prędkości propagacji odpowiednio  $\bar{c}_{QQ}$  i  $\bar{c}_{PQ}$  ( $P \neq Q$ ) dla fal ultradźwiękowych o częstotliwości  $f = (\omega/2\pi) = 4 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ ;  
 2 - wartości prędkości propagacji odpowiednio  $\bar{c}_{QQ}$  i  $\bar{c}_{PQ}$  ( $P \neq Q$ ) obliczone za pomocą równań i wzorów (1.118), (1.119) - (1.121), (1.123);  
 3 - wartości prędkości propagacji odpowiednio  $\bar{c}_{QQ}$  i  $\bar{c}_{PQ}$  ( $P \neq Q$ ) obliczone za pomocą równań i wzorów (1.118), (1.123) - (1.135) dla  $b = c_0 c/a = 0,2$ ;  
 4 - wartości prędkości propagacji  $\bar{c}_{QQ}$  obliczone za pomocą wzorów (1.116), (1.117).

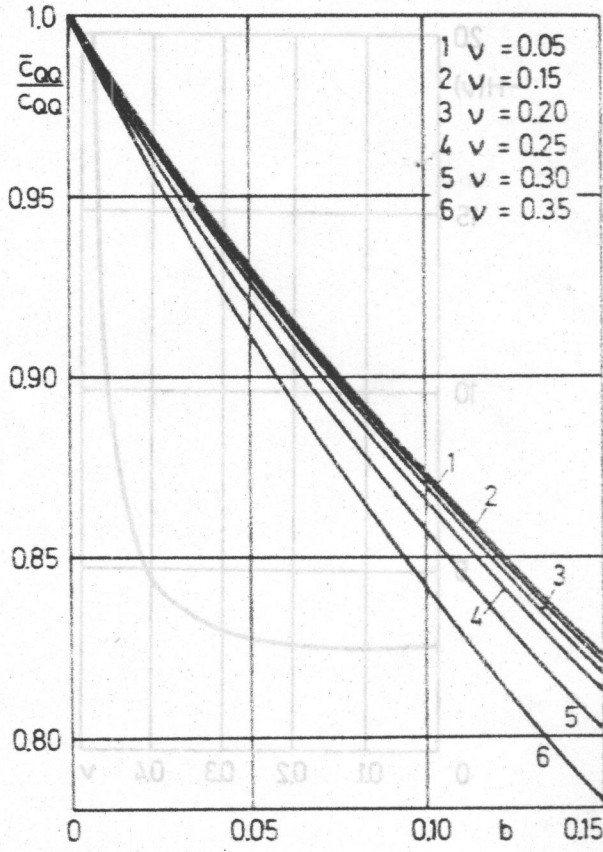
Rys. 3. Wyniki pomiarów i obliczeń prędkości propagacji  $\bar{c}_{PQ}$  fali poprzecznej w porowatej miedzi [3]

[3] Wyniki pomiarów i obliczeń prędkości propagacji  $\bar{c}_{PQ}$  fali poprzecznej w porowatej miedzi [3]



Rys. 4. Funkcja  $H(v)$  zdefiniowana wzorami (1.117) [2]

Rys. 5. Funkcja  $H(v)$  jako funkcja porównawcza do stała porównawcza [2]



Rys. 5.  $\bar{\sigma}_{QQ}/c_{QQ}$  jako funkcja porowatości  $b$ . Stała Poissona  $\nu$  - parametrem [2]





$\nu$  jest stałą Poissona materiału matrycy. Linia prosta 4 na rys. 2 przedstawia zależność prędkości  $\bar{c}_{QQ}$  od porowatości, którą uzyskano na podstawie wzorów (1.116), (1.117) dla miedzi, dla której przyjęto  $\varphi = 8920 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\nu = 0,326$  [22].

Funkcja  $H(\nu)$ , która została zdefiniowana wzorami (1.117), odgrywa istotną rolę w przewidywaniu, w przybliżeniu pojedynczego rozpraszania i kulistych pustek, niektórych akustycznych i mechanicznych własności ciał porowatych w obszarze długich fal i małych porowatości. Funkcja  $H(\nu)$  jest ujemna w całym przedziale  $0 \leq \nu \leq 1/2$  (rys.4) i osiąga maksymalną wartość  $-35/12$  w punkcie  $\nu = 1/11$ . Gdy  $\nu \rightarrow 1/2$  (matryca nieściśliwa), wtedy zgodnie wzorami (1.116), (1.117)  $\bar{c}_{QQ}/\alpha_{QQ} \rightarrow 0 \Rightarrow c_{QQ} \rightarrow \infty$ , natomiast gdy  $b \rightarrow 0$ , to zgodnie z tymi wzorami prędkość propagacji fali podłużnej w ośrodku porowatym dąży do prędkości propagacji tej fali w jednorodnym materiale matrycy, tj.  $\bar{c}_{QQ}/c_{QQ} \rightarrow 1$  (rys. 5 i 6). Jest to zgodne z tym, że im mniejsza jest porowatość  $b$ , tym lepszym przybliżeniem rozpraszania rzeczywistego jest rozpraszanie pojedyncze, a w granicy  $b \rightarrow 0$  uzyskujemy poprawność całkowitą (patrz również str. 62 rys. 9, krzywe 1-3).

#### 2.4.2. Fale podłużne i poprzeczne

Zakładając, że rozproszone pole przemieszczeń fal długich znika po uśrednieniu, Berryman [24] sformułował warunek samouzgodnienia ośrodka niejednorodnego, który umożliwił mu wykorzystanie teorii rozpraszania fal sprężystych do oceny efektywnych stałych sprężystych. W przypadku kulistych inkluzji i małych częstotliwości wyniki uzyskane przez Berrymana [24, (16) - (19)] zgadzają się w granicy  $\omega \rightarrow 0$  z wzorami samouzgodnionymi uzyskanymi przez Hilla [25] i Budiansky'ego [26] w ich rozważaniach statycznych.

Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy ciało niejednorodne I jest ośrodkiem dwufazowym, składającym się z izotropowej sprężystej matrycy i inkluzji w postaci kul o przypadkowych promieniach, zbudowanych z innego izotropowego i sprężystego materiału. Opierając się na wspomnianych wyżej rezultatach Berrymana [24], otrzymujemy dla rozpatrywanego przypadku następujące wzory i równania:

$$\bar{c}_{PQ} = (\bar{\mu}/\bar{\rho})^{1/2}, \bar{c}_{QQ} = [(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})/\bar{\rho}]^{1/2}, \bar{\rho} = \bar{\rho}_1 b_1 + \bar{\rho}_2 b_2; P \neq Q, \quad (1.118)$$

gdzie efektywne stałe Lamégo  $\bar{\lambda}$  i  $\bar{\mu}$  ( $\bar{\mu}$  jest modułem ścinania) można wyznaczyć z następującego układu równań:

$$\bar{\lambda} = [(4/3)\bar{\mu}(2\bar{\mu} - 3\bar{F})/(2\bar{F} - 3\bar{\mu})] - (2/3)\bar{\mu}, \quad (1.119)$$

$$\bar{\mu} = a_1 a_2 / (b_1 a_2 + b_2 a_1) - \bar{F},$$

przy czym  $\bar{F}$  ( $\bar{F} > 0$ ) można obliczyć z równania

$$\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - d_1 d_2 / (b_1 d_2 - b_2 d_1) = 0. \quad (1.120)$$

Wprowadzono tu oznaczenia:

$$a_i = \mu_i + \bar{F}, \quad d_i = \lambda_i + (2/3)\mu_i + (4/3)\bar{\mu}, \quad i = 1, 2. \quad (1.121)$$

Wskaźniki dolne  $i = 1, 2$  oznaczają odpowiednio fazę matrycową i rozproszoną;  $\lambda_i$  i  $\mu_i$  są stałymi Lamégo, przy czym  $\mu_i$  oznacza moduł ścinania  $i$ -tej fazy, natomiast  $b_i$  oznacza ułamek objętości zajętej przez  $i$ -tą fazę.

Układ równań (1.118) - (1.121) umożliwia numeryczne obliczenie wartości efektywnych stałych Lamégo oraz prędkości propagacji  $\bar{c}_{IQ}$ ,  $I = P, Q$ ;  $P \neq Q$ , jeżeli znane są  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\rho_i$  i  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ). Krzywe 1 na rys. 7 i 8 (str. 60, 61) przedstawiają przykłady takich obliczeń numerycznych prędkości propagacji  $\bar{c}_{QQ}$  i  $\bar{c}_{PQ}$ , jakie wykonano [3] dla materiału niejednorodnego, który był uprzednio badany doświadczalnie przez Kinrę i współautorów [27]. Materiał ten składał się z żywicy epoksydowej TRA-CAST, w której były rozproszone przypadkowo kuleczki szklane o średniej średnicy  $\langle D \rangle = 3 \cdot 10^{-4}$  m. Stałe materiałowe obu faz, które zostały podane w [27, tablica 2], wynoszą  $\rho_1 = 1180 \text{ kgm}^{-3}$ ,  $\rho_2 = 2470 \text{ kgm}^{-3}$ ,  $\nu_1 = 0,370$ ,  $\nu_2 = 0,249$ ,  $E_1 = 4,06 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 64,89 \text{ GPa}$ , gdzie  $E_i$  oznacza moduł Younga  $i$ -tej fazy. Na rys. 7 i 8 przedstawiono wartości  $\bar{c}_{QQ}$  i  $\bar{c}_{PQ}$  dla takiego kompozytu uzyskane nie tylko z obliczeń własnych [3] (krzywe 1), lecz także uzyskane w pracy [27] zarówno z pomiarów wykonanych odpowiednio dla częstotliwości  $\omega/2\pi = 3,5 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$  i  $\omega/2\pi = 8 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ , jak i obliczeń metodami

zaproponowanymi w pracach [28-30]. Porównując krzywe 1 na rys. 7 i 8 z wynikami pomiarów [27] i obliczeń wykonanych metodami zaproponowanymi w pracach [28-30], można z łatwością zauważyć, że zaproponowana wyżej metoda [3] obliczania  $\bar{c}_{QQ}$  i  $\bar{c}_{PQ}$  (równania (1.118) - (1.121)) daje wyniki (krzywe 1), które pozostają w lepszej zgodności z wynikami pomiarów [27] niż wyniki obliczeń wykonanych w pracy [27] innymi metodami (rys. 7 i 8 krzywe 2 i 3). W przypadku, gdy inkluzje są pustkami (porami), dość przekonywującym sposobem postępowania zmierzającego do obliczenia (przynajmniej oszacowania) prędkości propagacji efektywnych fal ultradźwiękowych podłużnej i poprzecznej byłoby zastąpienie ciała porowatego ciałem dwufazowym, charakteryzującym się bardzo małymi, lecz różnymi od zera wartościami liczbowymi parametrów materiałowych fazy rozproszonej. Wtedy naturalnym sposobem postępowania byłoby rozwinięcie prawej strony każdej zależności postaci

$$\bar{c}_{IQ} = \bar{c}_{IQ}(\rho_1, \rho_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, b_1, b_2), \quad I = P, Q; P \neq Q \quad (1.122)$$

w szereg Maclaurina względem zmiennych  $\rho_2, \lambda_2, \mu_2$ , a następnie dokonanie w otrzymanym rozwinięciu następujących podstawień i zmiany oznaczeń:

$$\rho_2 = \lambda_2 = \mu_2 = 0; \quad b_1 = b; \quad \rho_1 = \rho, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \mu_1 = \mu. \quad (1.123)$$

Ponieważ nie jest możliwe uzyskanie z układu równań (1.118) - (1.121) jawnych zależności typu (1.122), zatem ograniczymy się do podstawienia (1.123) do równań (1.119)-(1.121); wynik takiego podstawienia, charakteryzującego się pewnym niedostatkiem matematycznej i fizycznej precyzji, traktujemy jako podstawę algorytmu umożliwiającego numeryczne oszacowanie prędkości propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  ( $I = P, Q; P \neq Q$ ) efektywnych ultradźwiękowych fal podłużnych i poprzecznych w ciele porowatym w obszarze długich fal i małych porowatości. Krzywe 2 na rys. 2 i 3 są przykładami takich numerycznych oszacowań prędkości propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  fal podłużnej i poprzecznej w porowatej miedzi, przy czym  $\bar{c}_{IQ}$  dla każdego modu jest traktowana jako funkcja porowatości  $b$ .

### 2.4.3. Pustki elipsoidalne

Ponieważ problem propagacji fal ultradźwiękowych w ciałach dwufazowych z elipsoidalnymi inkluzjami jest bardzo skomplikowany w porównaniu z analogicznym zagadnieniem rozpatrywanym poprzednio dla ciał stałych zawierających kuliste inkluzje, zatem rozpatrując przypadek elipsoidalnych inkluzji ograniczymy się, podobnie jak w pracy [3], do koncepcji wykorzystania statycznego ( $\omega = 0$ ) modułu efektywnego do oceny niektórych aspektów propagacji fal ultradźwiękowych z obszaru bardzo małych częstotliwości (1.89). Koncepcja ta, chociaż pozbawiona ścisłego uzasadnienia, jest użyteczna w obszarze bardzo małych częstotliwości ultradźwiękowych, czyli fal bardzo długich w skali długości rzędu średniego wymiaru  $\langle D \rangle$  niejednorodności, stanowiąc podstawę algorytmu, który umożliwia numeryczne oszacowanie wartości prędkości propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  fali podłużnej i poprzecznej w dwufazowym ośrodku niejednorodnym z elipsoidalnymi inkluzjami. W ten sposób Kreher i in. [31] skonstruowali algorytm oparty na rezultatach pracy Eshelby'ego [32], który umożliwiał ocenę wartości prędkości propagacji efektywnych fal podłużnych w ceramice z elipsoidalnymi pustkami (porami). Algorytm oparty na późniejszej pracy Wu [33] i umożliwiający określenie przybliżonej wartości prędkości propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  ultradźwiękowych fal efektywnych podłużnych i poprzecznych w sprężystym izotropowym materiale dwufazowym, który zawiera elipsoidalne inkluzje, podano w pracy [3]. Przytoczymy teraz rozważania z pracy [3] prowadzące do uzyskania wspomnianego algorytmu.

Rozpatrzmy najpierw efektywne moduły sprężystości dwufazowego izotropowego ciała niejednorodnego przy założeniu, że zarówno faza matrycowa, jak i inkluzje są zbudowane z izotropowych i liniowo sprężystych materiałów i że inkluzje są elipsoidami o przypadkowych położeniach i orientacjach, przy czym osie tych elipsoid  $a$ ,  $b$  i  $c$  są również zmiennymi losowymi. Przyjmując hipotezę, że w granicy długich fal w przybliżonej analizie propagacji efektywnych fal ultradźwiękowych w ciałach niejednorodnych można zastąpić dynamiczne efektywne moduły sprężystości ośrodka jego odpowiednimi modułami statycznymi, i wykorzystując niektóre wyniki Wu [33, równania (8), (9), (18), (19), (22), (A1)-(A6)],

dochodzimy do wniosku, że prędkości  $\bar{c}_{IQ}$  ( $I = P, Q; P \neq Q$ ) można oszacować w obszarze długich fal za pomocą wzorów (1.118), przy czym  $\bar{\lambda}$  i  $\bar{\mu}$  należy obliczyć z następującego układu równań:

$$\bar{\mu} - \mu_1 + (b_2/5) [T_{1ijj} - (1/3)T_{11jj}] (\mu_1 - \mu_2) = 0, \quad (1.124)$$

$$\bar{\lambda} + (2/3)\bar{\mu} - \lambda_1 - (2/3)\mu_1 + (1/3)b_2 T_{1ijj} [\lambda_1 - \lambda_2 + (2/3)(\mu_1 - \mu_2)] = 0, \quad (1.125)$$

$$T_{1ijj} = 3 \left\{ 1 + 2\alpha [1 - (4\varepsilon/3)] \right\} \cdot [1 + 2\alpha(1 + \Pi) + S - Y]^{-1}, \quad (1.126)$$

$$T_{1ijj} - (1/3)T_{11jj} = 2 \left\{ 1 + \alpha [-\varphi + \varepsilon(\Gamma + \varphi + 1)] \right\}^{-1} + P^{-1} + 2 \left\{ P[\alpha(X - (4\varepsilon/3) + Q) + [1 + 2\alpha(1 - X) + S] [1 + (\alpha/2)(3g + \Pi) + Q] - [2 - 2P + 2\alpha(3\varepsilon g - 2\varepsilon + 1) + S] \cdot [\alpha(X - 2\varepsilon\Gamma) + Q]] \right\}^{-1} P^{-1} \{ 1 + 2\alpha(1 + \Pi) + (S/\Gamma) + Y \}^{-1}, \quad (1.127)$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$$P = 1 + (\alpha/2)\Theta, \quad Q = \beta\gamma g/2, \quad S = \beta\gamma\Gamma, \quad Y = \alpha\beta\Phi, \quad (1.128)$$

$$\alpha = (1/2)(1/\bar{\mu})(\mu_2 - \mu_1), \quad \beta = (3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})/(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}), \quad \varepsilon = \bar{\mu}(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}), \quad (1.129)$$

$$\gamma = (\mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2)/(3\lambda_1 + 2\mu_1), \quad \Theta = \alpha + 3\gamma, \quad \varphi = (a^2 + c^2)f/c^2, \quad (1.130)$$

$$\Phi = f + g - \varepsilon(f - g + 2g^2), \quad \Gamma = 1 - g, \quad \Theta = (3 + \varepsilon)g + (1 - \varepsilon)f, \quad (1.131)$$

$$\Pi = (3/2)(f + g) - (1/2)\varepsilon(5g + 3f), \quad X = -f + \varepsilon(f + g), \quad (1.132)$$

gdzie  $f$  i  $g$  są funkcjami kształtu inkluzji, określonymi za pomocą wzorów:

$$f = (\xi\zeta)^2(2 - 3g), \quad g = \xi\zeta^3 [(\xi/\zeta) - \cosh^{-1}\xi], \quad \text{jeżeli } a \geq c = b, \quad (1.133)$$

$$f = -\xi^2(2 - 3g), \quad g = \xi^2\zeta^3 [\cos^{-1}(1/\xi) - 1/(\xi^2\zeta)], \quad \text{gdy } a = b \geq c. \quad (1.134)$$

przy czym

$$\xi = a/c, \quad \zeta = [c^2/(a^2 - c^2)]^{1/2} \quad (1.135)$$



Układ wzorów i równań (1.118), (1.124) - (1.135) można traktować jako podstawę algorytmu umożliwiającego numeryczną ocenę wpływu kształtu sferoidalnego inkluzji na prędkości propagacji efektywnych fal ultradźwiękowych podłużnych i poprzecznych z obszaru częstotliwości (1.89). Analogicznie jak w przypadku inkluzji kulistych, podstawiamy (1.123) do równań (1.124) - (1.135) i otrzymany w ten sposób uproszczony układ równań traktujemy jako podstawę algorytmu umożliwiającego numeryczne oszacowanie wpływu kształtu sferoidalnego pustek na prędkości propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  ( $I = P, Q; P \neq Q$ ) rozpatrywanych efektywnych fal ultradźwiękowych w ciele porowatym. Linie 3 na rys. 2 i 3 oraz krzywe 3 i 5 na rys. 9 przedstawiają wyniki takich obliczeń numerycznych wykonanych dla porowatej miedzi przy założeniu, że  $b = c$ ,  $c/a = 0,2$ .

## 2.5. Gęstość energii fali ultradźwiękowej w ciele porowatym

W obszarze długich fal (1.89) upraszczają się również znacznie rozważania dotyczące gęstości energii fali ultradźwiękowej. Rozważania takie są treścią prac [4] i [18], których idee przedstawimy poniżej.

Rozważmy płaszczyznę sztywną  $x_Q = 0$  (rys. 1 przy  $h \rightarrow 0$ ), która jako całość drga z częstotliwością kątową  $\omega$ , pozostając pod działaniem siły wymuszającej (1.73). Płaszczyzna ta jest doskonale sprzężona z ośrodkiem sprężystym, który wypełnia obie półprzestrzenie otwarte  $-\infty < x_Q < 0$  i  $0 < x_Q < +\infty$ , powodując, że w kierunku rosnących  $|x_Q|$  rozchodzą się dwie fale płaskie liniowo spolaryzowane, dane wyrażeniami (1.84), (1.85), gdy ośrodkiem tym jest materiał jednorodny matrycy, oraz wyrażeniami (1.80) - (1.83), gdy do materiału jednorodnego wprowadzimy pustki (pory), przekształcając go w ciało porowate.

Pracę, jaką wykonują rzeczywiste naprężenia działające w jednostce objętości ośrodka, w którym rozchodzi się fala ultradźwiękowa, na przesunięcie cząstek drgającego ośrodka z położenia równowagi do położenia zajmowanego w chwili  $t$ , przyjmujemy za miarę gęstości energii pola odkształceń w chwili  $t$  związanych z falą, czyli krócej - za miarę gęstości energii fali ultradźwiękowej. Tak zdefiniowana gęstość energii fali ultradźwiękowej w jednorodnym materiale matrycy (przed wprowadzeniem pustek) wynosi

$$\xi_{IQ} = (1/4) \bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} w(\vec{r}, t)_{I,Q}^{(a)}, \quad \bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} = C_{IQIQ} w(\vec{r}, t)_{I,Q}^{(a)} / 2 \quad (1.136)$$

gdzie  $\bar{W}(\vec{r}, t)$  jest dane wzorami (1.84), (1.85).

Podobnie, wykorzystując koncepcję równoważnego ośrodka jednorodnego, gęstość energii fali ultradźwiękowej w ciele porowate tym można wyrazić wzorami

$$\bar{\xi}_{IQ} = (1/4) \bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} \langle U(\vec{r}, t)_{I,Q} \rangle^{(a)}, \quad (I = P, Q; P, Q = 1, 2, 3; P \neq Q), \quad (1.137)$$

$$\bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} = \left[ \bar{G}(\omega)_{IQIQ} \langle U(\vec{r}, t)_{I,Q} \rangle \right]^{(a)} / 2,$$

gdzie  $\langle \bar{U}(\vec{r}, t) \rangle$  jest dane wyrażeniami (1.80) - (1.83).

Wielkość  $\Delta \xi_{IQ}$  zdefiniowana wzorem

$$\Delta \xi_{IQ} = \bar{\xi}_{IQ} - \xi_{IQ}, \quad (1.138)$$

określa zmianę gęstości energii fali ultradźwiękowej w jednorodnym ciele stałym (materiale matrycy) wskutek wprowadzenia do niego pustek przekształcających jednorodną matrycę w ciało porowate o porowatości  $b$ . Oznaczmy przez  $\bar{h}_{IQ}$  zmianę energii pola fali ultradźwiękowej spowodowaną przez jedną pojedynczą izolowaną pustkę, wprowadzoną do równoważnego ośrodka jednorodnego, pozostającego pod obciążeniem (1.73) i posiadającego efektywne własności dynamiczne ciała porowatego. Wtedy, jak sugerują rozważania pracy [34],  $\Delta \xi_{IQ}$  jest sumą takich zmian energii  $\bar{h}_{IQ}$  spowodowaną przez wszystkie pustki  $n_0$  występujące w jednostce objętości ciała porowatego. Z analizy wymiarowej wynika, że energia  $\bar{h}_{IQ}$  może się wyrażać wzorem postaci

$$\bar{h}_{IQ} = (1/4) \left[ \bar{G}(\omega)_{IQIQ} \langle U(r, t)_{I,Q} \rangle \right]^{(a)} \langle U(r, t)_{I,Q} \rangle^{(a)} f_{IQ} D^3, \quad (1.139)$$

gdzie  $f_{IQ}$  jest bezwymiarowym dynamicznym czynnikiem kształtu pustki, który zależy nie tylko od kształtu pustki, lecz także od jej orientacji względem pola naprężeń i dynamicznych efektywnych własności ciała porowatego. Budiansky i O'Connell [34] obliczyli statyczny czynnik kształtu dla kilku szczególnych przypadków ciała porowatego. Jeżeli chodzi o dynamiczny czynnik kształtu, to

jego definicja pojawiła się dopiero w pracach [4] i [18], które dotychczas są jedynymi pracami poruszającymi niektóre zagadnienia związane z tym czynnikiem, jak również zajmującymi się wyznaczaniem jego wartości z pomiarów ultradźwiękowych. W tej pracy ograniczymy się głównie do podania za pracami [4] i [18] związków pomiędzy średnimi dynamicznymi czynnikami kształtu  $\langle f_{IQ} \rangle$  a prędkościami propagacji fal ultradźwiękowych w ciele porowatym  $\bar{c}_{IQ}$  i w materiale matrycy  $c_{IQ}$ . Związki te otrzymujemy w drodze rozważań, których punktem wyjścia jest przyjęcie równania (1.139) za definicję dynamicznego czynnika kształtu  $f_{IQ}$ .

Dla dalszych rozważań wprowadzimy trzy skale długości. Największa z tych skal odnosi się do objętości  $V \rightarrow \infty$  próbki badanego materiału i jej jednostka jest rzędu  $(V)^{1/3}$ . Najmniejsza z tych skal odnosi się do pustek i jej jednostka jest rzędu  $\langle D \rangle$ . Aby wprowadzić pośrednią skalę długości, rozważmy pewien obszar o objętości  $\Delta V$  ciała porowatego i zdefiniowany w taki sposób, że z jednej strony objętość  $\Delta V$  jest dostatecznie duża, aby zawierała dużą liczbę (zbiór statystyczny) pustek, a z drugiej strony objętość ta jest dostatecznie mała w porównaniu z  $V$ , aby próbkę można było traktować jako złożoną z dużej liczby rozłącznych mezodomen o tej samej objętości  $\Delta V$ . Długość rzędu  $(\Delta V)^{1/3}$  przyjmujemy za jednostkę pośredniej skali długości. Dalsze rozważania ograniczymy do takich częstotliwości kątowych  $\omega$  fal ultradźwiękowych, które zapewniają, że pole przemieszczeń  $\langle \vec{U}(\vec{r}, t) \rangle$ , związane z efektywną falą ultradźwiękową, można w przybliżeniu traktować jako wielkość stałą wewnątrz mezodomeny. Tak więc nasze rozważania ograniczymy do przypadku, kiedy długość efektywnej fali ultradźwiękowej  $2\pi(\bar{c}_{IQ}/\omega)$ , wytwarzanej przez siłę wymuszającą (1.73), jest jednocześnie dużo większa od jednostki najmniejszej i pośredniej skali długości oraz dużo mniejsza od jednostki największej skali długości, tj.

$$\langle D \rangle \ll (n_0)^{-1/3} \ll (\Delta V)^{1/3} \ll 2\pi(\bar{c}_{IQ}/\omega) \ll V^{1/3}, \quad (1.140)$$

gdzie  $n_0$  oznacza liczbę pustek na jednostkę objętości.

Przy tych założeniach energia  $\Delta \varepsilon_{IQ}$  spełnia następujące równanie:

$$\Delta v \cdot \Delta \varepsilon_{IQ} = (\Delta v/4) \cdot \bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} \langle U(\vec{r}, t)_{I,Q} \rangle^{(a)} n_o \langle f_{IQ} D^3 \rangle \quad (1.141)$$

Jeżeli rozmiary, kształty i orientacje pustek w mezodomenie są nieskorelowane ze sobą, wtedy

$$\langle \langle f_{IQ} D^3 \rangle \rangle = \langle f_{IQ} \rangle \langle D^3 \rangle \quad (1.142)$$

oraz

$$\Delta \varepsilon_{IQ} = (\Delta v/4) \cdot \bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} \langle U(\vec{r}, t)_{I,Q} \rangle^{(a)} n_o \langle f_{IQ} \rangle \langle D^3 \rangle \quad (1.143)$$

Zależność (1.138) można teraz przepisać w postaci

$$\begin{aligned} & \bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} \langle U(\vec{r}, t)_{I,Q} \rangle^{(a)} \\ &= \bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} w(\vec{r}, t)_{I,Q}^{(a)} + \bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} \langle U(\vec{r}, t)_{I,Q} \rangle^{(a)} n_o \langle f_{IQ} \rangle \langle D^3 \rangle \end{aligned} \quad (1.144)$$

W przybliżeniu długofalowym (1.140), w którym zachodzą relacje (1.89) - (1.93), możemy napisać

$$\bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} \langle U(\vec{r}, t)_{I,Q} \rangle^{(a)} = 2(\bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)})^2 / \bar{C}(\omega)_{IQIQ}^{(a)} \quad (1.145)$$

$$\bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)} w(\vec{r}, t)_{I,Q}^{(a)} = 2(\bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}^{(a)})^2 / C_{IQIQ} \quad (1.146)$$

Pola naprężeń  $\bar{G}(\vec{r}, t)_{IQ}$  i  $G(\vec{r}, t)_{IQ}$  w obu ośrodkach jednorodnych (w materiale równoważnym i w materiale matrycy) po obu stronach płaszczyzny  $x_Q = 0$  traktuje się w granicy  $x_Q \rightarrow 0(\pm)$  jako równe ze względu na to, że są spowodowane przez to samo obciążenie zewnętrzne (1.73). Tak więc w granicy  $x_Q \rightarrow 0(\pm)$  równanie (1.144) upraszcza się do zależności

$$1/\bar{C}(\omega)_{IQIQ}^{(a)} = (1/C_{IQIQ}) + n_o \langle f_{IQ} \rangle \langle D^3 \rangle / \bar{C}(\omega)_{IQIQ}^{(a)} \quad (1.147)$$

Wykorzystując zależności (1.92), (1.85) można wielkości rzeczywiste  $\bar{C}(\omega)_{IQIQ}^{(a)}$  i  $C_{IQIQ}$  wyrazić w granicy długich fal jako funkcje gęstości  $\bar{\rho}$  i  $\rho$  odpowiednio ośrodka równoważnego i matrycy oraz liczb falowych  $\bar{K}_{IQ}^{(a)}$  i  $K_{IQ}$  fal (1.80) - (1.83) i (1.84), (1.85), propagujących się w rozpatrywanych ośrodkach. W ten sposób otrzymujemy z równania (1.147) następujące wyrażenie na liczbę pustek w jednostce objętości

$$n_0 = \left[ 1 - (\bar{\rho}/\rho)(K_{IQ})^2 / (\bar{K}_{IQ}^{(a)})^2 \right] / \langle f_{IQ} \rangle \langle D^3 \rangle \quad (1.148)$$

Wzór (1.148) wyraża liczbę pustek  $n_0$  w jednostce objętości w funkcji gęstości  $\rho$  i  $\bar{\rho}$ , liczb falowych  $K_{IQ}$  i  $\bar{K}_{IQ}^{(a)}$  oraz geometrii pustek uwikłanej w wyrażeniu  $\langle f_{IQ} \rangle \langle D^3 \rangle$ . Stąd, korzystając z wzoru (1.117), otrzymujemy w przypadku pustek kulistych i długich fal

$$b = (\pi/6)(1/\langle f_{IQ} \rangle) \left[ 1 - (\bar{\rho}/\rho)(K_{IQ})^2 / (\bar{K}_{IQ}^{(a)})^2 \right] \quad (1.149)$$

Aby ilościowo opisać degradację materiału związaną ze wzrostem porowatości (np. wskutek procesów starzenia się i zmęczenia materiału), wprowadzamy wielkość  $H_{IQ}$  zdefiniowaną wzorem

$$H_{IQ} = n_0 \langle f_{IQ} \rangle \langle D^3 \rangle \quad (1.150)$$

Zgodnie z (1.70) i (1.147)  $H_{IQ}$  można wyrazić wzorem

$$H_{IQ} = 1 - (1/\omega^2)(1/\rho)(K_{IQ})^2 \bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(a)} \quad (1.151)$$

Stąd zmianę  $\Delta H_{IQ}$  wielkości  $H_{IQ}$  wskutek postępu procesu degradacji materiału można obliczyć ze wzoru (1.151) zastępując w nim  $\bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(a)}$  zmianą  $\Delta \bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(a)}$  tej wielkości związaną ze wzrostem porowatości.

Aby obliczyć w przybliżeniu  $\Delta \bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(a)}$  na podstawie pomiarów ultradźwiękowych, należy w najogólniejszym przypadku obliczyć różniczkę zupełną wielkości  $\bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(a)}$ , korzystając z pierwszego z wzorów (1.72) i traktując rzeczywistą część modułu sztywności  $\bar{c}(\omega)_{IQIQ}$  jako funkcję  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{c}_{IQ}$  i  $\bar{\eta}_{IQ}$ . Po zastąpieniu w wyrażeniu na wspomnianą różniczkę zupełną różniczek  $d\bar{\rho}$ ,  $d\bar{c}_{IQ}$  i  $d\bar{\eta}_{IQ}$  odpowiednimi skończonymi przyrostami, otrzymujemy

$$\Delta \bar{c}(\omega)_{IQIQ}^{(a)} = \omega^2 \bar{\rho} E_{IQ} \quad (1.152)$$

oraz

$$\Delta H_{IQ} = -(\bar{\rho}/\rho)(K_{IQ})^2 E_{IQ} \quad (1.153)$$

gdzie

$$E_{IQ} = F_{IQ} \left[ G_{IQ} (\Delta \bar{\rho}/\bar{\rho}) + L_{IQ} (\Delta \bar{c}_{IQ}/\bar{c}_{IQ}) + T_{IQ} (\Delta \bar{\eta}_{IQ}/\bar{\eta}_{IQ}) \right] \quad (1.154)$$



$$\begin{aligned}
 F_{IQ} &= 2(\bar{K}_{IQ}\bar{K}_{IQ}^*)^{-3}, \\
 G_{IQ} &= (1/2)\bar{K}_{IQ}\bar{K}_{IQ}^* \left[ (\bar{K}_{IQ}^{(a)})^2 - (\bar{K}_{IQ}^{(b)})^2 \right], \\
 L_{IQ} &= (\bar{K}_{IQ}^{(a)})^2 \left[ (\bar{K}_{IQ}^{(a)})^2 - 3(\bar{K}_{IQ}^{(b)})^2 \right], \\
 T_{IQ} &= (\bar{K}_{IQ}^{(b)})^2 \left[ (\bar{K}_{IQ}^{(b)})^2 - 3(\bar{K}_{IQ}^{(a)})^2 \right], \quad I = P, Q; P, Q = 1, 2, 3; P \neq Q.
 \end{aligned} \tag{1.154}$$

Wzory (1.152), (1.154) umożliwiają obliczenie zmian części rzeczywistej dynamicznego efektywnego modułu sztywności ciała porowatego związanych ze wzrostem jego porowatości, jeżeli znane są (np. z pomiarów) zmiany  $\Delta\bar{\rho}$ ,  $\Delta\bar{c}_{IQ}$  i  $\Delta\bar{\eta}_{IQ}$  odpowiednio gęstości  $\bar{\rho}$  oraz parametrów propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  i  $\bar{\eta}_{IQ}$  efektywnej fali ultradźwiękowej w badanym ciele porowatym. W rozpatrywanym przybliżeniu długich fal zależność  $\bar{c}(\omega)_{IQ}^{(a)}$  od tłumienia  $\bar{\eta}_{IQ}$  może być zaniedbana, a wyrażenie na  $E_{IQ}$  można napisać w następującej postaci:

$$E_{IQ} = (1/\bar{K}_{IQ}^{(a)})^2 \left[ (\Delta\bar{\rho}/\bar{\rho}) + 2(\Delta\bar{c}_{IQ}/\bar{c}_{IQ}) \right]. \tag{1.155}$$

Zależności (1.151) - (1.154) pozwalają nam uzyskać z pomiarów ultradźwiękowych dokładniejsze informacje o zmianach efektywnych własności dynamicznych ciała porowatego, związanych ze wzrostem jego porowatości, jeżeli potrafimy wyznaczyć wielkości  $\langle f_{IQ} \rangle$  i  $\langle D^3 \rangle$ . Podamy teraz kilka uwag dotyczących możliwości oszacowania średnich dynamicznych czynników kształtu  $\langle f_{IQ} \rangle$  z pomiarów prędkości propagacji  $c_{IQ}$  i  $\bar{c}_{IQ}$  ( $I = P, Q; P \neq Q$ ) fal ultradźwiękowych

Proste relacje pomiędzy prędkościami propagacji  $c_{IQ}$  i  $\bar{c}_{IQ}$  a średnimi dynamicznymi czynnikami kształtu  $\langle f_{IQ} \rangle$  otrzymujemy w przypadkach, kiedy problem można rozważać w przybliżeniu kulitych pustek i pojedynczego rozpraszania. W celu otrzymania wzorów wyrażających uwikłaną zależność  $\langle f_{IQ} \rangle$  od  $c_{IQ}$  i  $\bar{c}_{IQ}$  dla pustek o bardziej skomplikowanym kształcie, powinniśmy najpierw znaleźć zależność  $\bar{c}_{IQ}$  od  $n_0$  i geometrii pustek. Informacje umożliwiające podjęcie próby numerycznego wyznaczenia (oszacowania) takich funkcji dla pustek elipsoidalnych podano w pracy [3] i powtórzono w p. 2.4.3 tej pracy, a przykłady wyników takich obliczeń numerycznych podano na rys. 2 i 3 (linie nr 3) oraz na

rys. 9 (krzywe nr 3 i 5).

W tej pracy ograniczymy się, podobnie jak w pracy [4], do przybliżenia kulistych pustek, które można stosować w obszarze niskich częstotliwości (1.89) i małych porowatości. W tym miejscu należy podkreślić, że przybliżenie kulistych pustek nie oznacza założenia, że wszystkie pustki w ciele porowatym są kuliste, lecz oznacza założenie, że ze względu na makroskopowe własności akustyczne ośrodka, zdeterminowane przez jego strukturę oraz długość fali akustycznej, każdą pustkę o dowolnym kształcie i objętości  $V_p$  można zastąpić pustką kulistą o promieniu  $R$  danym wzorem (1.95). Przy tych założeniach oraz przy założeniu dodatkowym, że  $\bar{\rho} = \rho^0$  wzór (1.149) można przepisać w postaci

$$\langle f_{IQ} \rangle = (\pi/6)(1/b) \left[ 1 - (1-b)(\bar{c}_{IQ}/c_{IQ})^2 \right]. \quad (1.156)$$

Wzór (1.156) pozwala obliczyć średnie dynamiczne czynniki kształtu  $\langle f_{IQ} \rangle$  ( $I = P, Q$ ;  $P, Q = 1, 2, 3$ ;  $P \neq Q$ ) z pomiarów  $b$  oraz prędkości propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  i  $c_{IQ}$ . Jednakże w sytuacji, kiedy są spełnione warunki (1.90), (1.91), porowatość  $b$  można wyznaczyć z numerycznie znalezionej zależności  $\bar{c}_{IQ}$  od  $b$  (np. rys. 2, 3 i 9), co umożliwia oszacowanie  $\langle f_{IQ} \rangle$  z samych ultradźwiękowych pomiarów  $c_{IQ}$  i  $\bar{c}_{IQ}$ . Rozważając ten problem dla fali podłużnej w przybliżeniu pojedynczego rozpraszania, możemy wszystkie te zależności znaleźć analitycznie. Z prostego przekształcenia wzoru (1.116) otrzymujemy bowiem zależność

$$b = -(1/2) \left\{ H(\nu) + \left\{ [H(\nu)]^2 - 4[H(\nu) + 1] \left[ (c_{QQ}/\bar{c}_{QQ})^2 - 1 \right] \right\}^{1/2} \right\} [H(\nu) + 1]^{-1}, \quad (1.157)$$

która pozwala wyeliminować porowatość  $b$  z wzoru (1.156). W ten sposób otrzymujemy układ równań (1.156), (1.157), który pozwala oszacować w przybliżeniu długich fal i kulistych pustek średni dynamiczny współczynnik kształtu  $\langle f_{QQ} \rangle$  z pomiarów prędkości propagacji  $c_{QQ}$  i  $\bar{c}_{QQ}$  podłużnej fali ultradźwiękowej w jednorodnym materiale matrycy i w ciele porowatym.

Eliminując z równania (1.156) wyrażenie  $(c_{IQ}/\bar{c}_{IQ})^2$  za pomocą wzoru (1.116), otrzymujemy

$$\langle f_{QQ} \rangle = (\pi/6)(1/b) \left[ 1/(1+b) \right] \left[ -1 + b + (1+b)G(\nu, b) \right] / G(\nu, b), \quad (1.158)$$

gdzie

$$G(\nu, b) = 1 - [H(\nu) + 1] b, \quad b = (\rho - \rho^0) / \rho. \quad (1.159)$$

Wzory (1.158), (1.159) pozwalają oszacować w przybliżeniu długich fal i kulistych pustek średni dynamiczny czynnik kształtu  $\langle f_{QQ} \rangle$ , jeżeli znana jest stała Poissona materiału matrycy oraz porowatość lub gęstość ciała porowatego i materiału matrycy.

Tablica 2 podaje przykłady pomiarów ultradźwiękowych i obliczeń numerycznych wartości niektórych wielkości fizycznych, w tym również  $\langle f_{IQ} \rangle$  ( $I = P, Q; P \neq Q$ ), które wykonano opierając się na wynikach tych pomiarów, przeprowadzonych na pięciu próbkach porowatej miedzi [3, 4]. W ostatnim wierszu tablicy 2 podano wartości  $\langle f_{QQ} \rangle$  wyliczone dla porowatej miedzi w przybliżeniu pojedynczego rozpraszania na podstawie wzorów (1.158), (1.159) dla znanej porowatości i stałej Poissona materiału matrycy (miedzi).

Objaśnienia rys. 7-9

Rys. 7. Prędkość propagacji podłużnej fali ultradźwiękowej w dwufazowym ośrodku składającym się z żywicy epoksydowej (matryca) i kulistych inkluzji szklanych - w funkcji ułamka objętości zajętej przez inkluzje,

- - wyniki pomiarów Kinry i in. [27] ;  $\omega/\pi = 7 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ , średni promień kulek szklanych  $\langle R \rangle = 150 \mu\text{m}$ ,
- 1 - wartości liczbowe obliczone z równań (1.118)-(1.121),
- 2 - wartości liczbowe obliczone przez Kinrę i in. [27] przy wykorzystaniu wyników pracy [28] .

Rys. 8. Prędkość propagacji poprzecznej fali ultradźwiękowej w dwufazowym ośrodku składającym się z żywicy epoksydowej (matryca) i kulistych inkluzji szklanych - w funkcji ułamka objętości zajętej przez inkluzje,

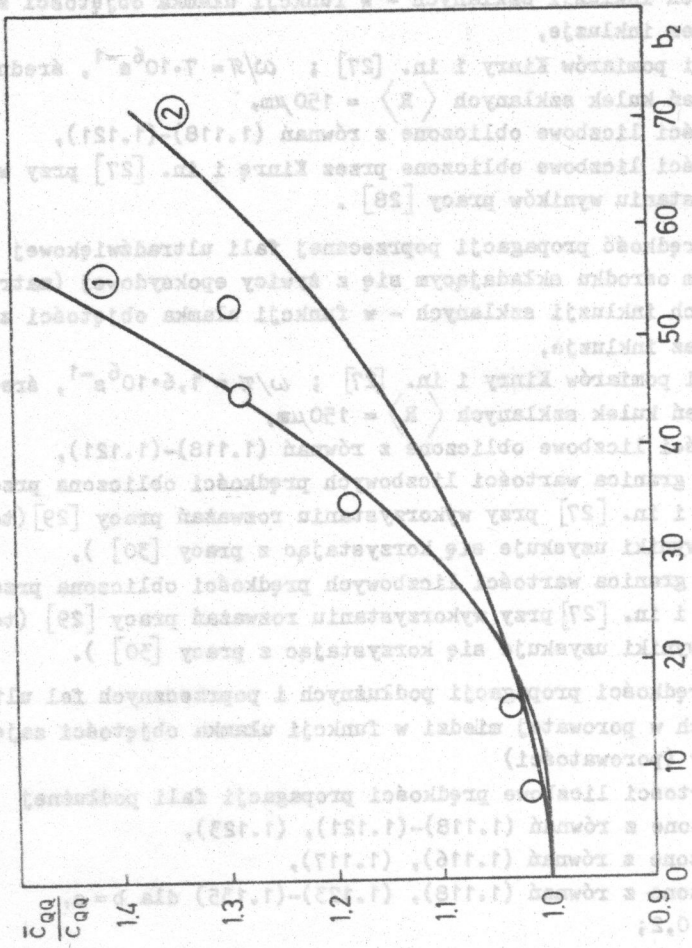
- - wyniki pomiarów Kinry i in. [27] ;  $\omega/\pi = 1,6 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ , średni promień kulek szklanych  $\langle R \rangle = 150 \mu\text{m}$ ,
- 1 - wartości liczbowe obliczone z równań (1.118)-(1.121),
- 2 - górna granica wartości liczbowych prędkości obliczona przez Kinrę i in. [27] przy wykorzystaniu rozważań pracy [29] (te same wyniki uzyskuje się korzystając z pracy [30] ),
- 3 - dolna granica wartości liczbowych prędkości obliczona przez Kinrę i in. [27] przy wykorzystaniu rozważań pracy [29] (te same wyniki uzyskuje się korzystając z pracy [30] ).

Rys. 9. Prędkości propagacji podłużnych i poprzecznych fal ultradźwiękowych w porowatej miedzi w funkcji ułamka objętości zajętej przez pory (porowatości)

- wartości liczbowe prędkości propagacji fali podłużnej
- 1 - obliczone z równań (1.118)-(1.121), (1.123),
- 2 - obliczone z równań (1.116), (1.117),
- 3 - obliczone z równań (1.118), (1.123)-(1.135) dla  $b = c$ ,  $c/a = 0,2$ ;
- wartości liczbowe prędkości propagacji fali poprzecznej
- 4 - obliczone z równań (1.118)-(1.121), (1.123),
- 5 - obliczone z równań (1.118), (1.123)-(1.135) dla  $b = c$ ,  $c/a = 0,2$ .

Opisanie rys. 7-9

Rys. 7. Prędkość propagacji podłużnej fal ultradźwiękowych w dwuczłonowym ośrodku anizotropnym nie z tyłu epoksydowej (masy) i kuliastych inkluzji szklanych - w funkcji różnicy odległości między punktami pomiaru.



Rys. 7

Rys. 8. Prędkość propagacji poprzecznej fal ultradźwiękowych w dwuczłonowym ośrodku anizotropnym nie z tyłu epoksydowej (masy) i kuliastych inkluzji szklanych - w funkcji różnicy odległości między punktami pomiaru.

Rys. 9. Prędkość propagacji podłużnej fal ultradźwiękowych w porowatym szkle w funkcji różnicy odległości między punktami pomiaru.

- wartość liczbowa prędkości propagacji fal poprzecznych  
- odległość x równa (1.118)-(1.121), (1.122)  
- odległość x równa (1.118), (1.122) dla  $\nu = 0.5$



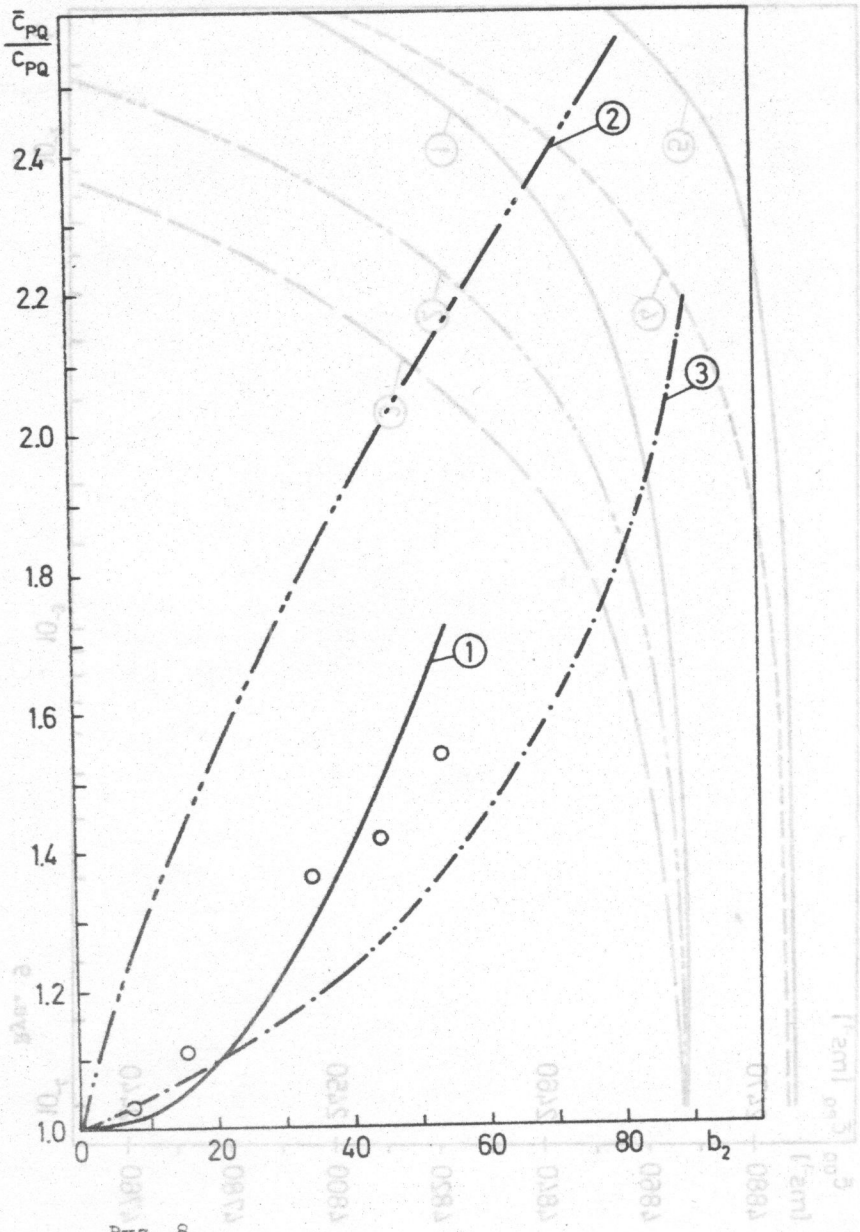
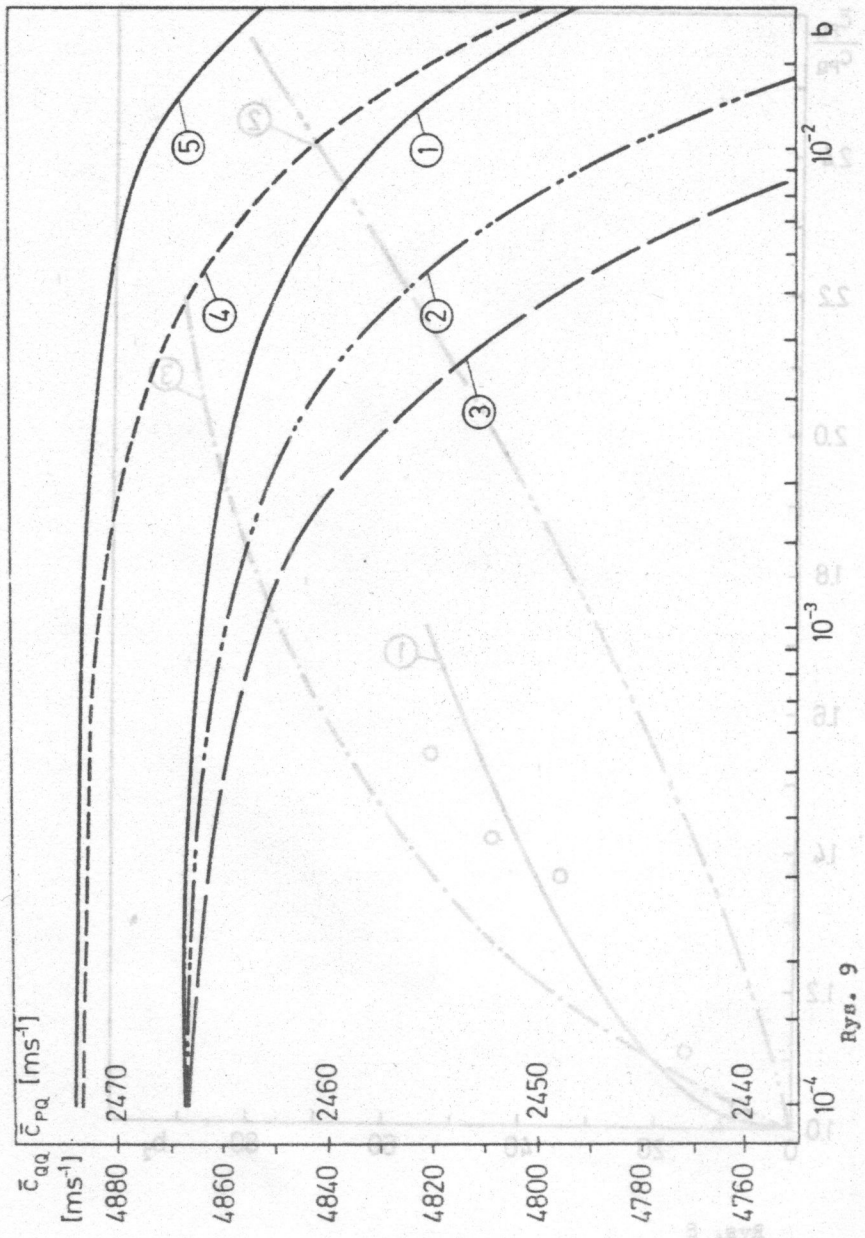


Рис. 8



Rys. 9

## II. WYZNACZANIE NIEKTÓRYCH CECH STRUKTURY MATERIAŁÓW NIEJEDNORODNYCH NA PODSTAWIE POMIARÓW MAKROSKOPOWYCH PARAMETRÓW AKUSTYCZNYCH

### 3. FUNKCJE KORELACYJNE NIEJEDNOŚCI STRUKTURY OŚRODKA

#### 3.1. Wprowadzenie

W części I tej pracy, opartej na publikacjach [1-4], zajmowano się stanem drgań cząstek ośrodka niejednorodnego, który charakteryzował się tym, że pole przemieszczeń cząstek, uśrednione po zbiorze statystycznym próbek, ma postać liniowo spolaryzowanej fali płaskiej podłużnej lub poprzecznej. Przedmiotem tych rozważań był problem wyznaczenia parametrów makroskopowych zarówno ośrodka (parametry materiałowe), jak i propagacji efektywnej fali ultradźwiękowej (parametry akustyczne) na podstawie posiadanych informacji o własnościach fizycznych poszczególnych składników i strukturze ośrodka niejednorodnego.

Problem odwrotny do przedstawionego poprzednio zagadnienia, zwany zagadnieniem odwrotnym do rozpraszania akustycznego, został w pracy [5] sformułowany jako zadanie określenia funkcji korelacyjnych i autokorelacyjnych niejednorodności ośrodka na podstawie wyników obserwacji makroskopowych charakterystyk pola akustycznego fal rozproszonych na tych niejednorodnościach. Przedstawimy teraz rozważania zawarte w pracy [5], przytaczając je prawie w całości dosłownie. Prowadzą one do rozwiązania zagadnienia analogicznego do zagadnienia rozpatrywanego przez Debye'a i Buechego [36], dotyczącego rozpraszania światła.

#### 3.2. Założenia podstawowe

Założmy, że przypadkowo niejednorodny izotropowy ośrodek wypełniający obszar  $V'$ , jest zanurzony w nieskończenie rozległym i jednorodnym ośrodku o gęstości  $\rho_S$ . Prędkość propagacji  $c_{00}$  fali podłużnej w ośrodku jednorodnym jest stała, z założenia znana, natomiast w obszarze  $V'$  jest wielkością stochastyczną. Prędkości te spełniają następującą nierówność:

$$|c(\vec{r}')_{QQ} - c_{QQ}|/c_{QQ} \ll 1, \quad \vec{r}' \in V \quad (2.1)$$

gdzie  $c(\vec{r}')_{QQ}$  oznacza lokalną prędkość fali podłużnej w ośrodku niejednorodnym.  $c(\vec{r}')_{QQ}$  jest zmienną losową funkcją wektora położenia  $\vec{r}'$ .

Wprowadźmy teraz inne pomocnicze wielkości stochastyczne zdefiniowane wzorami

$$\tilde{U}(\vec{r}') = 2(c(\vec{r}')_{QQ} - c_{QQ})/c_{QQ}, \quad (2.2)$$

$$U(\vec{r}') = 1 - (c_{QQ}/c(\vec{r}')_{QQ})^2, \quad \vec{r}' \in V'. \quad (2.3)$$

Wtedy zgodnie z (1.59) możemy napisać

$$\begin{aligned} \langle \tilde{U}(\vec{r}') \rangle &= 2 \left[ \langle c(\vec{r}')_{QQ} \rangle - c_{QQ} \right] / c_{QQ}, \\ \delta \tilde{U}(\vec{r}') &= 2 \delta c(\vec{r}')_{QQ} / c_{QQ}, \quad \vec{r}' \in V'. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ze względu na założenie (2.1) możemy również napisać

$$\begin{aligned} U(\vec{r}') &= 1 - (c_{QQ}/c(\vec{r}')_{QQ})^2 = 1 - \left\{ 1 + [c(\vec{r}')_{QQ} - c_{QQ}]/c_{QQ} \right\}^{-2} \\ &\approx 1 - \left\{ 1 - 2[c(\vec{r}')_{QQ} - c_{QQ}]/c_{QQ} \right\} = \tilde{U}(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Zakłada się dalej, że

$$|\langle \tilde{U}(\vec{r}') \rangle| \ll |\delta \tilde{U}(\vec{r}')| \ll 1, \quad (2.6)$$

$$|\rho_S c_{QQ} - \rho(\vec{r}') c(\vec{r}')_{QQ}| / \rho_S c_{QQ} \ll 1. \quad (2.7)$$

gdzie  $\rho(r')$  jest gęstością ośrodka niejednorodnego wypełniającego obszar  $V'$ .

Rozatrywane zagadnienie rozwiązuje się w układzie współrzędnych, którego początek leży w pewnym ustalonym punkcie w obszarze  $V'$ . Zakłada się, że objętość  $V'$  obszaru wypełnionego przez ośrodek niejednorodny spełnia następującą nierówność:

$$(V')^{1/3} \gg L_c, \quad (2.8)$$

gdzie  $L_c$  jest promieniem korelacji niejednorodności. Strukturę ośrodka niejednorodnego opisuje się za pomocą funkcji korelacji  $\xi_{AB}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)$ , która określa, w jakim stopniu fluktuacja  $\delta A$  wiel-

kości fizycznej A w danym punkcie  $\vec{r}_1$  jest skorelowana z fluktuacją innej wielkości fizycznej B w punkcie  $\vec{r}_2$ . Funkcja korelacji  $g_{AB}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  ośrodka izotropowego zależy tylko od  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ , natomiast nie zależy od kierunku. Funkcję korelacji ośrodka izotropowego  $g_{AB}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  definiuje się za pomocą następującego równania [36]:

$$\langle \delta A(\vec{r}_1) \delta B(\vec{r}_2) \rangle = g_{AB}(x) \langle \delta A(\vec{r}_1) \delta B(\vec{r}_1) \rangle, \quad \vec{x} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (2.9).$$

Porównując to równanie z warunkiem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \langle \delta A(\vec{r}) \delta B(\vec{r} - \vec{x}) \rangle = \langle \delta A(\vec{r}) \delta B(\vec{r}) \rangle \quad (2.10)$$

oraz z definicją promienia korelacji  $L_c$ :

$$\lim_{x \rightarrow L_c} \langle \delta A(\vec{r}) \delta B(\vec{r} - \vec{x}) \rangle = \langle \delta A(\vec{r}) \delta B(\vec{r}) \rangle / e, \quad (2.11)$$

otrzymuje się

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_{AB}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow L_c} g_{AB}(x) = 1/e \quad (e = 2,718\dots). \quad (2.12)$$

Wzory (2.9) - (2.12) odnoszą się również do przypadku, gdy B jest tą samą wielkością fizyczną co A. Wtedy

$$\langle \delta A(\vec{r}) \delta A(\vec{r} - \vec{x}) \rangle = \langle \delta A(0) \delta A(\vec{x}) \rangle = g_A(\vec{x}) \langle (\delta A)^2 \rangle. \quad (2.13)$$

$g_A(x)$  przedstawia stopień skorelowania między dwoma fluktuacjami tej samej wielkości fizycznej w dwóch różnych punktach jako funkcję odległości wzajemnej tych punktów.  $g_A(x)$  nosi nazwę funkcji autokorelacji.

Załóżmy, że rozpatrywany ośrodek niejednorodny jest ośrodkiem dwufazowym. Jedna z tych dwóch faz występuje w postaci izolowanych ziaren rozsianych przypadkowo w matrycy. Fluktuacje  $\delta A(\vec{r})$ ,  $\delta B(\vec{r})$ , ... odpowiednich wielkości fizycznych A, B, ... są wynikiem fluktuacji objętościowej  $\delta\beta(\vec{r})$  koncentracji  $\beta(\vec{r})$  ziaren. Gdy  $\beta \ll 1$ , wówczas

$$\delta A(\vec{r}) = \left[ \frac{\delta A(\beta(\vec{r}))}{\partial \beta} \right]_{\beta=0} \delta \beta(\vec{r}). \quad (2.14)$$

Podstawiając wzór (2.14) do (2.13) i (2.9) otrzymuje się odpo-



wiednio

$$\langle \delta_A(0) \delta_A(\vec{x}) \rangle = \varepsilon_A(\vec{x}) \left[ \frac{\partial A}{\partial \beta} \right]_{\beta=0}^2 \langle (\delta\beta)^2 \rangle, \quad (2.15)$$

$$\langle \delta_A(0) \delta_B(\vec{x}) \rangle = \varepsilon_{AB}(\vec{x}) \left[ \frac{\partial A}{\partial \beta} \right]_{\beta=0} \left[ \frac{\partial B}{\partial \beta} \right]_{\beta=0} \langle (\delta\beta)^2 \rangle. \quad (2.16)$$

### 3.3. Rozkład kątowy pola skalarnego fal rozproszonych

Przypuśćmy, że w ośrodku jednorodnym rozchodzi się fala podłużna (1.97), (1.98), zmierzając w kierunku obszaru  $V'$  zajętego przez ośrodek niejednorodny. Ponieważ o ośrodku niejednorodnym zakłada się, że rozpraszanie na niejednorodnościach nie prowadzi do pojawiania się innych modów falowych niż mody charakteryzujące się potencjałem skalarnym, tj. bezwirowymi polami przemieszczeń i prędkości drgających cząstek ośrodka, zatem można przyjąć, że w całej rozpatrywanej przestrzeni istnieje skalarny potencjał prędkości fali akustycznej, który spełnia równanie [37, (13.6)]:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = c^{-2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

gdzie w przypadku obecnie rozpatrywanym

$$c = \begin{cases} c_{QQ}, & \text{gdy } \vec{r} \notin V' \text{ lub } \vec{r} \in S' \\ c(\vec{r}')_{QQ}, & \text{gdy } \vec{r} \in V' \end{cases} \quad (2.18)$$

$S'$  oznacza granicę (brzeg) obszaru  $V'$ . Dla ułatwienia zapisu dalszych równań i wzorów, zastąpmy oznaczenie  $c_{QQ}$  na prędkość propagacji podłużnej fali ultradźwiękowej w ośrodku jednorodnym oznaczeniem  $c_s$ .

Potencjału prędkości fali akustycznej  $\psi(\vec{r}, t)$ , spełniającego równanie (2.17), będziemy poszukiwali w postaci

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) \exp(i\omega t) = \varphi(\vec{r}) \exp(ik_s c_s t), \quad k_s = \omega/c_s. \quad (2.19)$$

Po podstawieniu (2.19) do równania (2.17) otrzymuje się następujące równanie dla funkcji  $\varphi(\vec{r}, t)$ :

$$(\nabla^2 + k_s^2)\varphi(\vec{r}) = k_s^2 U(\vec{r})\varphi(\vec{r}), \quad (2.20)$$

gdzie  $U(\vec{r})$  jest dane wzorem (2.5) i jest różne od zera tylko wtedy, gdy wektor położenia  $\vec{r}$  wyznacza punkt leżący wewnątrz obszaru  $V'$ . Potencjału skalarnego  $\Psi(\vec{r}, t)$  poszukuje się w postaci superpozycji płaskiej fali padającej  $\exp[i(\omega t + \vec{k}_s \cdot \vec{r})]$  z inną falą  $\varphi_{sc}(\vec{r})\exp(i\omega t)$ , zwaną falą rozproszoną. Oznacza to, że rozwiązanie równania (2.20) szukamy w postaci

$$\varphi(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}_s \cdot \vec{r}) + \varphi_{sc}(\vec{r}), \quad \vec{k}_s = k_s \vec{n}, \quad (2.21)$$

gdzie  $\vec{n}$  jest wektorem jednostkowym w kierunku propagacji fali padającej.

Sformułowane zadanie (2.20), (2.21) wyznaczenia niezależnej od czasu części potencjału skalarnego  $\varphi_{sc}(\vec{r})$  fali rozproszonej, gdy  $k_s$  i  $U(\vec{r})$  są znane, różni się tylko stałym czynnikiem  $k_s^2$  po prawej stronie równania (2.21) od zadania wyznaczenia fal de Broglie'a związanych ze stacjonarnym, elastycznym rozpraszaniem bezspinowych cząstek. Po zastosowaniu metody funkcji Greena [38] i przy dodatkowym założeniu

$$|\varphi_{sc}(\vec{r})| \ll |\exp(i\vec{k}_s \cdot \vec{r})|, \quad (2.22)$$

otrzymuje się następujący wzór dla potencjału skalarnego fali rozproszonej:

$$\varphi_{sc}(\vec{r}) = (1/r)A(\vec{r})\exp(i\vec{k}_s \cdot \vec{r}), \quad (2.23)$$

gdzie

$$A(\vec{r}) = - (1/4)(1/\pi)k_s^2 r \int_V |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} U(\vec{r}') \exp(i\vec{k}_s \cdot \vec{r}') \cdot \exp[ik_s(|\vec{r} - \vec{r}'| - r)] d^3\vec{r}'. \quad (2.24)$$

We wzorze (2.24) całkowania dokonuje się po elementach objętości  $dV' = d^3\vec{r}' = dx_1' dx_2' dx_3'$  obszaru rozpraszającego  $V'$ ,  $\vec{r}'$  jest wektorem położenia punktu leżącego wewnątrz obszaru  $V'$ , podczas gdy  $\vec{r}$  jest wektorem położenia punktu obserwacji (punkt  $\vec{r}$  może leżeć zarówno wewnątrz obszaru  $V'$ , jak i na zewnątrz niego). Przyjmując dodatkowe założenia (przybliżenie dalekiego pola)

$$(1/2)k_s^2(r')^2/r \ll 1, \quad r \gg r', \quad (2.25)$$

można napisać wyrażenie dla  $A(\vec{r})$  w następującej postaci:

$$A(\vec{r}) = -(1/4)(1/\pi)k_s^2 \int_{V'} U(\vec{r}') \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r}') d^3\vec{r}', \quad (2.26)$$

gdzie  $V'$

$$\vec{K} = [\vec{n} - (\vec{r}/r)]k_s, \quad K = 2k_s \sin(\theta/2), \quad \theta = \arccos(\vec{n} \cdot \vec{r}/r). \quad (2.27)$$

Zgodnie z założeniem (2.25), rozwiązanie (2.26), (2.27) jest słuszne na zewnątrz obszaru  $V'$  dla dużych odległości  $r$  od niejednorodności.

Ze względu na założenia (2.1), (2.6) i wzory (2.2) - (2.5), (2.13) i (2.14) zachodzi, z dokładnością do wyrazów małych pierwszego rzędu, następujący związek

$$\langle U(\vec{r}'_1)U(\vec{r}'_2) \rangle = \langle \delta\tilde{U}(\vec{r}'_1)\delta\tilde{U}(\vec{r}'_2) \rangle = g(x) \langle (\delta\tilde{U}(\vec{r}'_1))^2 \rangle, \quad \vec{x} = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2, \quad (2.28)$$

gdzie

$$(\delta\tilde{U}(\vec{r}'))^2 = \left[ \frac{\partial U}{\partial \beta} \right]_{\beta=0} \langle (\delta\beta)^2 \rangle, \quad \text{gdy } \beta \ll 1. \quad (2.29)$$

Ze wzorów (2.26) - (2.28) wynika, że

$$\langle |\varphi_{sc}(\vec{r})|^2 \rangle = (B/r^2) \int_{V'} g(x) \exp(i\vec{K} \cdot \vec{x}) d^3\vec{r}'_1 d^3\vec{r}'_2, \quad (2.30)$$

gdzie

$$B = (1/16)\pi^{-2}k_s^4 \langle (\delta\tilde{U}(\vec{r}'))^2 \rangle. \quad (2.31)$$

Po dokonaniu następującej zamiany zmiennych:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = \vec{r}'_1 - \vec{x}/2 = \vec{r}'_2 + \vec{x}/2,$$

można wykonać w (2.30) całkowanie po zmiennych  $x_0, y_0, z_0$  i po wszystkich kierunkach. Po wykonaniu tego całkowania ( $\vec{K}$  przyjęto za oś biegunową) i po zastosowaniu przekształcenia całkowego Fouriera dla funkcji nieparzystych otrzymuje się

$$g(x) = \left[ (1/2)\pi^{-2}r^2/BV' \right] \int_0^\infty \langle |\varphi_{sc}(K)|^2 \rangle K^2 \frac{\sin Kx}{Kx} dK. \quad (2.32)$$

Wykorzystując (2.12) oraz wzór

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Kx}{Kx} = 1 \quad (2.33)$$

otrzymuje się

$$g(x) = \left[ \int_0^{\infty} \langle |\varphi_{sc}|^2 \rangle k^2 \frac{\sin Kx}{Kx} dk \right] \left[ \int_0^{\infty} \langle |\varphi_{sc}|^2 \rangle k^2 dk \right]^{-1} \quad (2.34)$$

$\omega, r = \text{const.}$

Wykorzystując wzory (2.23), (2.26) i (2.27) można znaleźć wyrażenie na  $\nabla\varphi_{sc}(\vec{r})$  słuszne w polu dalekim. Po znalezieniu tego wyrażenia i po wykonaniu wszystkich opisanych operacji matematycznych, które umożliwiły uzyskanie z (2.23), (2.26) i (2.27) wzoru (2.34), otrzymuje się

$$g(x) = \left[ \int_0^{\infty} \langle |\nabla\varphi_{sc}|^2 \rangle k^2 \frac{\sin Kx}{Kx} dk \right] \left[ \int_0^{\infty} \langle |\nabla\varphi_{sc}|^2 \rangle k^2 dk \right]^{-1}, \quad (2.35)$$

$\omega, r = \text{const.}$

Wzory (2.34) i (2.35) umożliwiają wyznaczenie funkcji korelacji  $g(x)$ , gdy znany jest rozkład kątowy kwadratu potencjału skalarnego oraz kwadratu gradientu potencjału skalarnego fali rozproszonej w przypadkowo niejednorodnym ośrodku izotropowym.

### 3.4. Rozkład kątowy intensywności fali akustycznej rozproszonej w nielepkiej emulsji

Jako przykład dwufazowego ośrodka przypadkowo niejednorodnego, wypełniającego obszar  $V'$ , rozpatruje się nielepką emulsję. Emulsję traktuje się jako mieszaninę dwóch chemicznie nie reagujących i nie mieszających się ze sobą cieczy. Jedna z tych cieczy jest spójna i objętościowo dominuje, natomiast druga ciecz jest jednorodna oraz rozproszona w pierwszej w postaci ziaren rozłożonych przypadkowo. Fluktuacje

$$\delta c(\vec{r}')_{QQ} \text{ oraz } \delta \bar{\rho}(\vec{r}') = \bar{\rho}_0(\vec{r}') - \langle \bar{\rho}_0(\vec{r}') \rangle, \quad (2.39)$$

gdzie  $\bar{\rho}_0(\vec{r}')$  jest wartością równowagową gęstości  $\rho_0(\vec{r}')$  wewnątrz obszaru  $V'$ , są wynikiem fluktuacji  $\delta\beta$  objętościowej koncentracji  $\beta$  ziaren. O emulsji wypełniającej obszar  $V'$  zakłada się, że jest zanurzona w nieskończenie rozległej cieczy o gęstości  $\rho_s$ , w której prędkość propagacji fali akustycznej (ultradźwiękowej)  $c_s$

jest znana. Zakłada się również, że nierówności (2.1), (2.6) i (2.7) są spełnione. Ponadto przyjmuje się, że

$$|\delta\bar{\rho}_0(\vec{r}')| / \langle \bar{\rho}_0(\vec{r}') \rangle \ll 1. \quad (2.40)$$

Równania akustyczne uzyskuje się linearyzując, ze względu na zaburzenia akustyczne, równania przepływu dla rozpatrywanej emulsji. O zaburzeniach akustycznych zakłada się, że są priodycznymi fluktuacjami gęstości  $\Delta\rho(\vec{r}, t)$ , ciśnienia  $\Delta p(\vec{r}, t)$  i prędkości  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  cieczy, odpowiednio wokół wartości równowagowych  $\bar{\rho}(\vec{r})$ ,  $\bar{p}(\vec{r})$  i  $\vec{v}(\vec{r}) = 0$ . Przyjmuje się, że fluktuacje są adiabatyczne, tj.

$$dp(\vec{r}, t)/dt = c^2 [d\rho(\vec{r}, t)/dt], \quad (2.41)$$

gdzie  $c = c(\vec{r}')_{QQ}$  lub  $c = c_s$ , zgodnie z (2.18).

Zakłada się, że równania przepływu w rozpatrywanym przypadku mają następującą postać [39] :

$$d\rho(\vec{r}, t)/dt + \rho(\vec{r}, t) \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.42)$$

$$\rho(\vec{r}, t) [d\vec{v}(\vec{r}, t)/dt] + \nabla p(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.43)$$

Aby wyznaczyć zakres stosowalności przybliżenia nielepkiej emulsji (2.42), (2.43), należy wprowadzić do równania Naviera-Stokesa odpowiednie zmienne bezwymiarowe oraz określić warunki, które muszą być spełnione, by równania Naviera-Stokesa można było zastąpić równaniem Eulera (2.43). Warunki te mają następującą postać:

$$L_c^2 \omega / \eta \gg 1, \quad L_c \langle c(\vec{r}')_{QQ} \rangle / \eta \gg 1, \quad \pi \langle c(\vec{r}') \rangle / \omega \gg a, \quad (2.44)$$

gdzie  $a$  jest amplitudą drgań,  $\eta$  - lepkością kinematyczną.

Z równań (2.41) - (2.43) uzyskuje się z dokładnością do małych wyrazów pierwszego rzędu ze względu na fluktuacje ciśnienia i gęstości oraz prędkość  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  następujące równanie [39] :

$$\nabla^2 [\Delta p(\vec{r}, t)] = c_1^{-2} [\partial^2 \Delta p(\vec{r}, t) / \partial t^2] + \nabla \ln \bar{\rho}(\vec{r}) \cdot \nabla [\Delta p(\vec{r}, t)], \quad (2.45)$$

gdzie  $c = c(\vec{r}')_{QQ}$  i  $\nabla \ln \bar{\rho}(\vec{r}') \neq 0$ , gdy  $\vec{r} \in V'$ ;  $c = c_s = \text{const.}$  i  $\nabla \ln \bar{\rho}(\vec{r}) = 0$ , gdy  $\vec{r} \notin V'$  i  $\vec{r} \in S'$ . Podstawiając

$$\Delta p(\vec{r}, t) = \Delta p(\vec{r}) \exp(i\omega t) = \Delta p(\vec{r}) \exp(ik_s c_s t) \quad (2.46)$$



do równania (2.45), uzyskuje się następujące równanie

$$(\nabla^2 + k_s^2) \Delta p(\vec{r}) = k_s^2 U_p(\vec{r}) \Delta p(\vec{r}), \quad (2.47)$$

gdzie

$$U_p(\vec{r}) = U(\vec{r}) + (1/k_s^2) (1/\langle \bar{\rho}(\vec{r}) \rangle) \nabla \delta \bar{\rho}(\vec{r}) \cdot \nabla; \quad (2.48)$$

$k_s$  i  $U(\vec{r})$  są dane odpowiednio wzorami (2.19) i (2.5).

Zaburzenie akustyczne  $\Delta p(\vec{r}, t)$  przyjmuje się w postaci superpozycji monochromatycznej płaskiej fali padającej

$$P_0 \exp[i(\omega t + \vec{k}_s \cdot \vec{r})], P_0 = \text{const.}$$

z inną falą, zwaną falą rozproszoną. Tak więc rozwiązanie równania (2.47) przyjmuje się w postaci

$$\Delta p(\vec{r}, t) = [P_0 \exp(i\vec{k}_s \cdot \vec{r}) + \Delta p_{sc}(\vec{r})] \exp(i\omega t) = \Delta p(\vec{r}) \exp(i\omega t). \quad (2.49)$$

Fala padająca jest rozwiązaniem równania (2.47) dla  $U_p(\vec{r}) = 0$ . Rozwiązując równanie (2.47) metodą funkcji Greena, przy dodatkowym założeniu, że

$$|\Delta p_{sc}(\vec{r})| \ll |P_0 \exp(i\vec{k}_s \cdot \vec{r})|, \quad (2.50)$$

można otrzymać wzór

$$\Delta p_{sc}(\vec{r}) = (1/r) A_p(\vec{r}) \exp(i\vec{k}_s \cdot \vec{r}), \quad (2.51)$$

gdzie  $A_p(\vec{r})$  jest dane wzorem (2.24), jeżeli  $U(\vec{r})$  i  $\exp(i\vec{k}_s \cdot \vec{r})$  zastąpimy odpowiednio wyrażeniami  $U_p(\vec{r})$  oraz  $P_0 \exp(i\vec{k}_s \cdot \vec{r})$ .

Uwzględniając założenia (2.1), (2.6), (2.7) i (2.25) uzyskuje się następujące przybliżone (z dokładnością do wyrazów małych pierwszego rzędu) wyrażenie całkowe na  $A_p(\vec{r})$ :

$$A_p(\vec{r}) = - (1/4) (1/\pi) k_s^2 P_0 \int_{V'} \left[ 2 [\delta c(r')]_{QQ} / c_s + [i\vec{n} \cdot \nabla (\delta \bar{\rho}(\vec{r}') / \langle \bar{\rho}(\vec{r}') \rangle)] \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}') d^3 \vec{r}', \quad (2.52)$$

gdzie  $\vec{k}$  jest dane wzorem (2.27).

Wykorzystując wzory (2.15), (2.28) i (2.29) oraz nierówność (słuszną w przypadku emulsji)

$$\left| \vec{n} \cdot \vec{k} / \langle \bar{\rho}(\vec{r}') \rangle \right| \left[ \partial \bar{\rho}(\vec{r}') / \partial \beta \right]_{\beta=0} \ll \left| (2/c_s) [\partial c(\vec{r}')_{QQ} / \partial \beta]_{\beta=0} \right| \quad (2.53)$$

można otrzymać następujący wzór:

$$\langle |\Delta P_{sc}(\vec{r})|^2 \rangle = (B_p/r^2) \int_V g(x) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{x}, \quad (2.54)$$

gdzie  $\vec{x}$  jest określone wzorem (2.28), natomiast  $B_p$  jest z przyjętą dokładnością określone wzorem

$$B_p = (\sqrt{16})(1/\pi^2) P_0^2 \langle (\delta\beta)^2 \rangle \left[ (2/c_s) \left[ \partial c(\vec{r}')_{QQ} / \partial \beta \right]_{\beta=0} \right]^2 \quad (2.55)$$

Podstawiając do (2.54) prawą stronę (2.55) oraz relacje

$$I_0 = A P_0^2, \quad I_{sc} = A \langle |\Delta P_{sc}(\vec{r})|^2 \rangle, \quad A = \text{const.}, \quad (2.56)$$

uzyskuje się, po wykonaniu całkowania po wszystkich kierunkach ( $K$  jest osią biegunową), równanie

$$I_{sc} = [I_0 K^4 V / (4\pi r^2 K)] \langle (\delta\beta)^2 \rangle \left[ (2/c_s) \left[ \partial c(\vec{r}')_{QQ} / \partial \beta \right]_{\beta=0} \right]^2 \int_0^\infty x g(x) \sin Kx dx, \quad (2.57)$$

gdzie  $I_0$  i  $I_{sc}$  oznaczają intensywność odpowiednio fali padającej i rozproszonej. Relację (2.57) można traktować jako równanie całkowe dla funkcji korelacji  $g(x)$ . Stosując przekształcenie całkowe Fouriera dla funkcji nieparzystej i wykorzystując wzory (2.12) i (2.33) otrzymuje się ostatecznie

$$g(x) = \left[ \int_0^\infty I_{sc} K^2 \frac{\sin Kx}{Kx} dK \right] \left[ \int_0^\infty I_{sc} K^2 dK \right]^{-1}, \quad \omega = \text{const.}, \quad r = \text{const.} \quad (2.58)$$

Wzór (2.58) pozwala wyznaczyć funkcję korelacji izotropowej emulsji nielepkiej, gdy jest znany rozkład kątowy intensywności fali rozproszonej w tym ośrodku.

#### 4. OPIS STATYSTYCZNY STRUKTURY MATERIAŁU I POLA PRZEMIESZCZEŃ FALI ULTRADŹWIĘKOWEJ

##### 4.1. Wprowadzenie

Formułując zagadnienie odwrotne do rozpraszania fali ultradźwiękowej w ośrodku niejednorodnym I, należałoby postawić zadanie znalezienia, na podstawie pomiarów makroskopowych parametrów propagacji efektywnej fali ultradźwiękowej, takiego funkcjonału, który by podawał łączne prawdopodobieństwo, że w  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) różnych punktach ośrodka niejednorodnego I składowe wektora przemieszczenia przyjmują z góry określone wartości liczbowe i jednocześnie ośrodek w tych punktach jest zbudowany z faz, które również zostały z góry określone. W pracy [6] podano metodę rozwiązania szczególnego przypadku tego zagadnienia odwrotnego, gdy  $n=1$  oraz gdy wyrażenie na poszukiwaną gęstość prawdopodobieństwa spełnia następujące warunki:

a) Zapewnia uzyskanie, po wykonaniu odpowiednich rachunków, obserwowanych średnich parametrów materiałowych ośrodka oraz obserwowanej efektywnej fali ultradźwiękowej (1.80) - (1.83), scharakteryzowanej makroskopowymi parametrami propagacji  $\bar{c}_{IQ}$  i  $\bar{\eta}_{IQ}$ .

b) Odpowiadająca temu wyrażeniu entropia Shannona jest większa od entropii Shannona odpowiadającej każdemu innemu wyrażeniu na szukaną funkcję gęstości prawdopodobieństwa, spełniającą warunki (a).

Entropia Shannona, która pojawia się w warunku dodatkowym (b), jest miarą informacji, której brakowało, aby sformułowane zagadnienie odwrotne było jednoznaczne przed wprowadzeniem warunku (b). Warunek ten zawiera w sobie założenie, że struktura materiału niejednorodnego jest w tak wysokim stopniu nieuporządkowana, na jaki tylko pozwalają warunki (a), i czyni rozpatrywane zagadnienie odwrotne jednoznacznym zadaniem wariacyjnym na poszukiwanie ekstremum (maksimum) warunkowego funkcjonału wyrażającego entropię Shannona.

Sformułowane wyżej zadanie wariacyjne rozwiązano w pracy [6] metodą współczynników nieoznaczonych Lagrange'a zakładając, że średnie pole przemieszczeń jest liniowo spolaryzowaną falą płas-

ką (1.80) - (1.83). Przy tym założeniu nie można uzyskać metodą wsp. Łączynników nieoznaczonych żadnego opisu statystycznego składowych pola przemieszczeń w kierunku innym iż kierunek polaryzacji, ponieważ wartości średnie tych składowych są z założenia równe zeru. Omawiając poniżej rozważania pracy [6], dokonujemy prawie dosłownego przekładu na język polski najważniejszej części tej własnej pracy.

#### 4.2. Statystyczna charakterystyka mikrostruktury i pola przemieszczeń

Punktem wyjścia rozważań zmierzających do sformułowania wyżej wspomnianego problemu wariacyjnego są w pracy [6] równania ruchu (1.77). Po rozłożeniu wielkości stochastycznych występujących w pierwszym członie po lewej stronie równania (1.77) na wartości średnie i odpowiednie fluktuacje, otrzymujemy, po uwzględnieniu (1.78), dla  $i = P$

$$\omega^2 \langle \rho(\vec{r}) u(\vec{r}) \rangle = (1/\omega^2) \left\{ F_0 \delta(x_Q) - c^0(\omega) P_{jPl} \langle u(\vec{r}), l, j \rangle - \langle [\delta C(\vec{r}, \omega) P_{jkl} \delta u(\vec{r})_{k,1}], j \rangle \right\}, \quad j, k, l = 1, 2, 3. \quad (2.59)$$

Wykorzystując równanie (1.79) dla  $I = P$  eliminujemy z równania (2.59) wyrażenie  $F_0 \delta(x_Q)$ , a następnie zaniedbujemy po prawej stronie zmodyfikowanego w ten sposób równania (2.59) wyrażenie  $\langle [\delta C(\vec{r}, \omega) P_{ijkl} \delta u(\vec{r})_{k,1}], j \rangle$  zakładając, że jest ono małe w porównaniu do innych wyrażeń występujących w tym równaniu. Następnie zastępujemy  $\langle u(\vec{r}) \rangle$  wyrażeniem (1.81) dla  $I = P$ . W ten sposób otrzymujemy z (2.59) następujące równanie:

$$\langle \rho(\vec{r}) u(\vec{r}) \rangle = (D_{PQPQ} G_{PQ} + \bar{\rho}) \bar{A}_{PQ} \exp(-i \bar{K}_{PQ} |x_Q|), \quad (2.60)$$

gdzie

$$D_{PQPQ} = c^0(\omega) P_{QPQ} - \bar{c}(\omega) P_{QPQ}, \quad G_{PQ} = (\bar{K}_{PQ} / \omega)^2. \quad (2.61)$$

Po rozdzieleniu części rzeczywistej i urojonej, otrzymujemy z

równania (2.60)

$$\langle (\vec{r})u(\vec{r})^{(a)} \rangle = (H-N) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(a)} - (J+L) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(b)}, \quad (2.62)$$

$$\langle (\vec{r})u(\vec{r})^{(b)} \rangle = (J+L) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(a)} + (H-N) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(b)}, \quad (2.63)$$

gdzie

$$H = D_{PQPQ}^{(a)} G_{PQ}^{(a)} + \bar{\rho}, \quad J = D_{PQPQ}^{(a)} G_{PQ}^{(b)}, \quad (2.64)$$

$$L = D_{PQPQ}^{(b)} G_{PQ}^{(a)}, \quad N = D_{PQPQ}^{(b)} G_{PQ}^{(b)} \quad (2.65)$$

$$G_{PQ}^{(a)} = (1/\bar{c}_{PQ})^2 - (\bar{\eta}_{PQ}/\omega)^2, \quad G_{PQ}^{(b)} = -2(\bar{\eta}_{PQ}/\omega)(1/\bar{c}_{PQ}), \quad (2.66)$$

$$\langle u(\vec{r}) \rangle^{(a)} = d[\bar{\eta}_{PQ} \cos y + (\omega/\bar{c}_{PQ}) \sin y] \quad (2.67)$$

$$\langle u(\vec{r}) \rangle^{(b)} = d[-\bar{\eta}_{PQ} \sin y + (\omega/\bar{c}_{PQ}) \cos y], \quad (2.68)$$

$$d = F_0 / (2\omega^2 \bar{\rho}) \exp(-\bar{\eta}_{PQ} |x_Q|), \quad y = (\omega/\bar{c}_{PQ}) |x_Q|. \quad (2.69)$$

Dynamiczny efektywny moduł zespolony  $\bar{C}(\omega)_{PQPQ}$ , który występuje w wyrażeniu (2.61) na  $D_{PQPQ}$ , traktuje się jako znaną funkcję parametrów akustycznych  $\bar{c}_{PQ}$  i  $\bar{\eta}_{PQ}$ , określoną wzorami (1.71), (1.72).

Wprowadźmy teraz 3-wymiarowy element prawdopodobieństwa

$P_{\alpha, \vartheta, \varphi}(\vec{r}) d\vartheta d\varphi$  zdefiniowany jako łączne prawdopodobieństwo znalezienia w punkcie  $\vec{r}$  równocześnie  $\alpha$ -tej fazy i pola przemieszczeń  $u(\vec{r})$  o wartości bezwzględnej  $\vartheta$  i argumencie  $\varphi$  leżących odpowiednio w interwałach  $[\vartheta, \vartheta+d\vartheta]$  i  $[\varphi, \varphi+d\varphi]$ . Zmienne stochastyczne

$$\vartheta = \{ [u(\vec{r})^{(a)}]^2 + [u(\vec{r})^{(b)}]^2 \}^{1/2}, \quad \varphi = \arctg [u(\vec{r})^{(b)} / u(\vec{r})^{(a)}] \quad (2.70)$$

traktuje się jako ciągłe w przedziałach

$$0 \leq \vartheta < +\infty, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (2.71)$$

i równe zero na zewnątrz tych przedziałów. Tak więc 3-wymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $P_{\alpha, \vartheta, \varphi}(\vec{r})$  jest ciągła ze względu na zmienne stochastyczne  $\vartheta$  i  $\varphi$  oraz jednocześnie dyskretna ze względu na zmienną stochastyczną  $\alpha$ . Funkcja ta opisuje równocześnie lokalną mikrostrukturę ośrodka i lokalne pole przemieszczeń fali ultradźwiękowej. Entropia Shannona związana z funkcją gęstości prawdopodobieństwa jest z dokładnością do stałej



addytywnej proporcjonalna do

$$I(\alpha; \nu, \varphi) = - \sum_{\alpha=1}^M \int_0^{\infty} \nu d\nu \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r}) \ln P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r}) d\varphi \quad (2.72)$$

Celem rozważań przedstawionych w tym punkcie jest zaproponowanie metody wyznaczania funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r})$  na podstawie znanych obserwabli w postaci makroskopowych parametrów akustycznych  $\bar{c}_{IQ}$  i  $\bar{\eta}_{IQ}$  ośrodka niejednorodnego oraz jego parametrów materiałowych  $\bar{\rho}$  (gdy  $\bar{\rho} \neq \bar{\rho}^0$ ),  $b^{(\alpha)}$ ,  $\rho^{(\alpha)}$  i  $C(\omega)_{IQIQ}^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, M$ ;  $I = P, Q$ ;  $P, Q = 1, 2, 3$ ;  $P \neq Q$ ).

Poszukiwana funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r})$  powinna spełniać następujący warunek normalizacji

$$\int_0^{\infty} \nu d\nu \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r}) d\varphi = b^{(\alpha)} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^M \int_0^{\infty} \nu d\nu \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r}) d\varphi = 1 \quad (2.73)$$

i jest uwikłana w równania (2.62), (2.63), (2.67), (2.68) w następujący sposób:

$$\sum_{\alpha=1}^M \rho^{(\alpha)} \int_0^{\infty} \nu d\nu \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r}) \cos \varphi d\varphi = (H-N) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(a)} - (J+L) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(b)} \quad (2.74)$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \rho^{(\alpha)} \int_0^{\infty} \nu d\nu \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r}) \sin \varphi d\varphi = (J+L) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(a)} + (H-N) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(b)} \quad (2.75)$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \int_0^{\infty} \nu d\nu \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r}) \cos \varphi d\varphi = \langle u(\vec{r}) \rangle^{(a)} \quad (2.76)$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \int_0^{\infty} \nu d\nu \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r}) \sin \varphi d\varphi = \langle u(\vec{r}) \rangle^{(b)} \quad (2.77)$$

Wartości liczbowe wyrażeń występujących po prawej stronie równań (2.74) - (2.77) można wyliczyć za pomocą wzorów (2.64) - (2.69), jeżeli znane są wartości liczbowe wyżej wymienionych obserwabli.

Dlatego też układ równań i wzorów (2.64) - (2.69), (1.71), (1.72), (2.73) - (2.77) traktuje się jako podstawę do wyznaczenia zależności gęstości prawdopodobieństwa  $P_{\alpha; \lambda, \varphi}(\vec{r})$  od wektora położenia  $r$  oraz obserwabli  $\bar{c}_{IQ}, \bar{\eta}_{IQ}, \bar{\rho}, b^{(\alpha)}, \rho^{(\alpha)}$  i  $G(\omega)_{IQIQ}^{(\alpha)}$ . Oczywiście, problem znalezienia funkcji  $P_{\alpha; \lambda, \varphi}(\vec{r})$  sformułowany w taki sposób nie jest jednoznaczny. Jednakże teoria informacji podaje konstruktywne kryterium [35], umożliwiające odgadnięcie funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $P_{\alpha; \lambda, \varphi}(\vec{r})$  w takich przypadkach, kiedy dostępne informacje nie stwarzają możliwości wyznaczenia tej funkcji w sposób pewny. Wykorzystując to podejście uzyskujemy pewne oszacowanie statystyczne, które można nazwać oszacowaniem przy założeniu maksymalnej entropii. Znajdujemy w ten sposób funkcję gęstości prawdopodobieństwa  $P_{\alpha; \lambda, \varphi}(\vec{r})$ , która spełnia warunki (2.73) - (2.77), i jednocześnie wyróżnia się jako jedyną tym spośród wszystkich funkcji spełniających te warunki, że odpowiadająca jej entropia (2.72) osiąga wartość maksymalną. Tak więc problem sprowadza się do zagadnienia wariacyjnego na ekstremum warunkowe funkcjonału (2.72) przy warunkach (2.73) - (2.77).

Maksymalizując funkcjonał (2.72) wprowadzamy czynniki nieoznaczone Lagrange'a  $-(W_{\alpha} + 1), S_a, S_b, Y_a, Y_b$ , odpowiadające odpowiednio warunkom (ograniczeniom) (2.73), (2.74), (2.75), (2.76) i (2.77). Postępowanie to prowadzi do funkcjonału

$$I' = - \sum_{\alpha=1}^M \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha; \lambda, \varphi}(\vec{r}) \left[ \ln P_{\alpha; \lambda, \varphi}(\vec{r}) - W_{\alpha} - 1 + (Y_a \cos \varphi + Y_b \sin \varphi) + (S_a \cos \varphi + S_b \sin \varphi) \rho^{(\alpha)} \right] d\varphi, \quad (2.78)$$

którego wariacja  $\delta I'$  ze względu na  $P_{\alpha; \lambda, \varphi}(\vec{r})$  powinna znikać przy wszystkich wartościach wariacji  $P_{\alpha; \lambda, \varphi}(\vec{r})$ . Prowadzi to do następującego równania:

$$\ln P_{\alpha; \lambda, \varphi}(\vec{r}) - W_{\alpha} + f(Y, S, \varphi, \rho^{(\alpha)}) \cdot \lambda = 0, \quad (2.79)$$

gdzie

$$f(Y, S, \varphi, \rho^{(\alpha)}) = (Y_a + S_a \rho^{(\alpha)}) \cos \varphi + (Y_b + S_b \rho^{(\alpha)}) \sin \varphi. \quad (2.80)$$

Stąd otrzymujemy, że poszukiwana funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r})$  powinna mieć postać

$$P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r}) = \exp(W_{\alpha}) \exp[-f(Y, S, \varphi, \rho^{(\alpha)}) \nu^{\beta}] \quad (2.81)$$

Czynniki  $W_{\alpha}, S_a, S_b, Y_a$  i  $Y_b$  można wyznaczyć z układu równań (2.73) - (2.77), podstawiając do nich (2.81). Jeżeli ponadto wykonamy w tych równaniach całkowanie po  $\nu$  i oznaczymy wyrażenie (2.80) literą  $f$ , to otrzymamy kolejno

$$\exp(W_{\alpha}) = b^{(\alpha)} / \int_{-\pi}^{\pi} (1/f) d\varphi, \quad (2.82)$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \rho^{(\alpha)} \exp(W_{\alpha}) \int_{-\pi}^{\pi} f^{-2} \cos \varphi d\varphi = (H-N) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(a)} - (J+L) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(b)}, \quad (2.83)$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \rho^{(\alpha)} \exp(W_{\alpha}) \int_{-\pi}^{\pi} f^{-2} \sin \varphi d\varphi = (J+L) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(a)} + (H-N) \langle u(\vec{r}) \rangle^{(b)}, \quad (2.84)$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \exp(W_{\alpha}) \int_{-\pi}^{\pi} f^{-2} \cos \varphi d\varphi = \langle u(\vec{r}) \rangle^{(a)}, \quad (2.85)$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \exp(W_{\alpha}) \int_{-\pi}^{\pi} f^{-2} \sin \varphi d\varphi = \langle u(\vec{r}) \rangle^{(b)}, \quad (2.86)$$

gdzie prawe strony równań (2.83) - (2.86) są dane wzorami (1.71), (1.72), (2.61), (2.64) - (2.69). Tak więc układ wzorów i równań (2.80) - (2.86) stanowi łączny statystyczny opis lokalnej struktury materiału i pola przemieszczeń w przypadku, gdy obserwowana efektywna fala ultradźwiękowa ma postać fali płaskiej i liniowo spolaryzowanej.

Przedstawiona w tym punkcie analiza [6] dotyczy ośrodka niejednorodnego I o bardzo skomplikowanej strukturze. Jedynym istotnym uproszczeniem wprowadzonym do rozważań jest założenie, że ostatni człon po prawej stronie równania (2.59) jest mały w porównaniu z innymi członami tego równania. Założenie to implikuje, że iloczyn fluktuacji zespolonych modułów ośrodka nie-

jednorodnego i fluktuacji pochodnych składowych wektora przemieszczenia względem współrzędnych powinny słabo zmieniać się wraz z wektorem położenia  $\vec{r}$ , podczas gdy iloczyny lokalnych fluktuacji gęstości i pola przemieszczeń mogą zmieniać się dowolnie.

Przedstawione wzory i równania (1.71), (1.72), (2.61), (2.64) - (2.69), (2.80) - (2.86) można traktować jako podstawę do opracowania algorytmu do numerycznego obliczenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $P_{\alpha; \nu, \varphi}(\vec{r})$ , przy czym opis statystyczny wynikający z tych wzorów i równań odnosi się do lokalnej struktury i lokalnej wartości składowej pola przemieszczeń w kierunku polaryzacji. Jednakże taki opis może okazać się użytecznym do wyjaśnienia niektórych efektów fizycznych (mechanicznych), obserwowanych w ciałach niejednorodnych i wynikających z lokalnego stanu przemieszczeń (drgan) cząstek ośrodka i jego lokalnej struktury.

## 5. TEKSTURA MATERIAŁÓW POLIKRYSTALICZNYCH

### 5.1. Wprowadzenie

W pracy [6], omówionej w poprzednim punkcie, wskazano na znaczenie teoretyczne podanej przez Jaynesa [35] zasady maksymalnej entropii Shannona w badaniach ultradźwiękowych ciał niejednorodnych, których struktura charakteryzuje się wysokim stopniem nieuporządkowania. Zasada Jaynesa została wprowadzona do badań ultradźwiękowych ciał niejednorodnych po raz pierwszy [43] przez Autora w r. 1980. W pracy [7], przekazanej do opublikowania na początku 1985 r., Autor przedstawił swe propozycje dotyczące wykorzystania zasady Jaynesa do obliczania niektórych charakterystyk struktury wybranych materiałów polikrystalicznych. Zasadę Jaynesa Autor niejednokrotnie wprowadzał do prac wspólnych (np. [44, 45]) wykonując ich części teoretyczne. W pracach [7, 44, 45] doprowadzono analizę struktury materiału niejednorodnego do konkretnych wyników numerycznych.

W pracy [7] rozważa się w dalszym ciągu liniowo spolaryzowane ultradźwiękowe fale płaskie, rozchodzące się w jednoskładnikowym polikrystalicznym materiale z prędkością  $c_{PG}$ . O materiale tym założono, że jest zbudowany z kryształów sześciennych i że jego makroskopowe próbki mają symetrię ortorombową. Przykładem takiego materiału może być żelazo. Jeżeli wszystkie możliwe orientacje kryształów w próbce żelaza występują z tym samym prawdopodobieństwem, wtedy materiał ten jest makroskopowo izotropowy. Procesy technologiczne takie jak walcowanie, wyciąganie, gwałtowne nagrzewanie (np. przy spawaniu), chłodzenie itp. często prowadzą do częściowego uporządkowania krystalitów, czyli do powstania tzw. tekstury, co powoduje, że materiał staje się makroskopowo anizotropowy. Tę makroskopową anizotropię można obserwować mierząc prędkości propagacji odpowiednich fal płaskich lub powierzchniowych, lub też prędkości propagacji  $c_{PG}$  liniowo spolaryzowanych fal ultradźwiękowych propagujących się i spolaryzowanych w różnych kierunkach. W pracy [7] pokazano, jak z pomiarów tych prędkości można uzyskać informacje ilościowe dotyczące tekstury, korzystając z zasady maksymalnej entropii



pii Shannona. Rozważania teoretyczne zawarte w tej pracy są poparte przykładami obliczeń numerycznych, przy czym niektóre wyniki numeryczne uzyskane na podstawie pomiarów ultradźwiękowych porównano z wynikami obliczeń numerycznych tego samego parametru tekstury, wykonanymi przez Autora inną metodą na podstawie wyników pomiarów dyfrakcji neutronów opublikowanych w pracy [46].

Tak więc to krótkie omówienie pracy [7] wskazuje wyraźnie na jej znaczenie zarówno pod względem teoretycznym, jak i użytkowym. Przedstawiając poniżej bardziej szczegółowo poszczególne zagadnienia omawiane w pracy [7], dokonujemy prawie dosłownego przekładu na język polski przeważającej części tej pracy.

## 5.2. Ocena tekstury na podstawie pomiarów efektywnego modułu Younga

Rozpatrzmy makroskopową próbkę wykonaną z żelaza z teksturą, przy czym próbka ta charakteryzuje się symetrią ortorombową wynikającą z częściowego uporządkowania kryształów. Oznaczmy przez  $Ox_1x_2x_3$  zbiór ortogonalnych osi układu odniesienia związanych z próbką. Osie układu współrzędnych wybrano w taki sposób, że płaszczyzny  $x_1x_2$ ,  $x_2x_3$  i  $x_3x_1$  są płaszczyznami symetrii zwierciadlanej związanej z symetrią ortorombową próbki. Oznaczmy przez  $OX_1X_2X_3$  ortogonalny zbiór osi układu współrzędnych dla pojedynczego kryształu, przy czym osie te wybrano odpowiednio w kierunkach krystalograficznych  $[100]$ ,  $[010]$  i  $[001]$ . Istnieje wiele sposobów opisu orientacji wzajemnej tych dwóch układów odniesienia, czyli orientacji poszczególnego pojedynczego kryształu w próbce względem osi  $Ox_1x_2x_3$  tej próbki. Opisami orientacji przyjętymi w pracy [7] jest podanie wartości liczbowych trzech kątów Eulera lub kosinusów kierunkowych osi  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  i  $Ox_3$  względem osi  $OX_1$ ,  $OX_2$  i  $OX_3$ .

Przypuśćmy, że wyznaczono efektywny dynamiczny moduł Younga  $E^{(j)}$  w kierunku jednej z osi próbki  $Ox_j$ ,  $j=1, 2, 3$ , np. z pomiaru prędkości propagacji fali prętowej w przecie odpowiednio wyciętym z materiału próbki. W takim przypadku procedura uśredniania stałych elastycznych zaproponowana przez Voigta [47] i niektóre wyniki pracy [48] umożliwiają uzyskanie następujących zależności:

$$E^{(j)} = \left\langle 1/\left[s_{11} - 2(s_{11} - s_{12} - 0,5 \cdot s_{44})f(N^{(j)})\right] \right\rangle, \quad (2.87)$$

gdzie górny wskaźnik  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) oznacza kierunek  $Ox_j$  pomiaru efektywnego modułu Younga, a  $s_{11}$ ,  $s_{12}$  i  $s_{44}$  oznaczają współczynniki podatności sprężystej pojedynczego kryształu w polikryształe. Wprowadzono tutaj następujące oznaczenia:

$$N_k^{(j)} = \vec{E}_k \cdot \vec{e}_j, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (2.88)$$

$$f(N^{(j)}) = (N_1^{(j)})^2 (N_2^{(j)})^2 + (N_1^{(j)})^2 (N_3^{(j)})^2 + (N_2^{(j)})^2 (N_3^{(j)})^2. \quad (2.89)$$

$\vec{E}_1, \vec{E}_2, \text{ i } \vec{E}_3$  są wektorami jednostkowymi wyznaczającymi kierunki odpowiednio osi  $Ox_1, Ox_2$  i  $Ox_3$ . Podobnie  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  i  $\vec{e}_3$  są wersorami określającymi kierunki odpowiednio osi  $Ox_1, Ox_2$  i  $Ox_3$ . Nawiasy kątowe  $\langle \dots \rangle$  oznaczają uśrednianie po kosinusach kierunkowych (2.88). Ortorombowa symetria umożliwia ograniczenie całkowania w (2.87) tylko do jednego oktantu kuli, tj wystarczy rozważać tylko dodatnie wartości kosinusów (2.88). Ponieważ

$$(N_1^{(j)})^2 + (N_2^{(j)})^2 + (N_3^{(j)})^2 = 1 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2.90)$$

zatem każda z funkcji (2.89) zależy tylko od dwóch kosinusów kierunkowych i może być przedstawiona na przykład w następującej formie:

$$f(N^{(j)}) = f(u^{(j)}, w^{(j)}) \\ = (u^{(j)})^2 + (w^{(j)})^2 - (u^{(j)})^4 - (w^{(j)})^4 + \\ + (u^{(j)})^2 (w^{(j)})^2 [1 - (w^{(j)})^2] [(u^{(j)})^2 - 2], \quad (2.91)$$

gdzie

$$u^{(j)} = \vec{E}_3 \cdot \vec{e}_j, \quad w^{(j)} = \cos \Phi^{(j)}, \quad \Phi^{(j)} = \arctg \left[ \frac{(\vec{E}_2 \cdot \vec{e}_j)}{(\vec{E}_1 \cdot \vec{e}_j)} \right]. \quad (2.92)$$

Wtedy równanie (2.87) można przepisać w postaci

$$E^{(j)} = \left\langle F(u^{(j)}, w^{(j)}) \right\rangle, \quad (2.93)$$

gdzie

$$F(u^{(j)}, w^{(j)}) = 1/\left[s_{11} - 2(s_{11} - s_{12} - 0,5 \cdot s_{44})f(u^{(j)}, w^{(j)})\right]. \quad (2.94)$$

Z drugiej strony wielkość  $E^{(j)}$  można formalnie określić wzorem

$$E^{(j)} = \int_0^1 du^{(j)} \int_0^1 p(u^{(j)}, w^{(j)}) F(u^{(j)}, w^{(j)}) dw^{(j)}, \quad (2.95)$$

gdzie  $p(u^{(j)}, w^{(j)}) du^{(j)} dw^{(j)}$  jest prawdopodobieństwem, że kosi-  
nusy (2.92), charakteryzujące orientację dowolnie wybranego kry-  
ształu w próbce, mają wartości leżące odpowiednio w przedziałach  
 $[u^{(j)}, u^{(j)} + du^{(j)}]$  oraz  $[w^{(j)}, w^{(j)} + dw^{(j)}]$ . Funkcja gęstości praw-  
dopodobieństwa  $p(u^{(j)}, w^{(j)})$  musi spełniać następujące warunki:

$$0 \leq p(u^{(j)}, w^{(j)}) \quad (2.96)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 p(u^{(j)}, w^{(j)}) du^{(j)} dw^{(j)} = 1.$$

Zasada Jaynesa [35] maksymalnej entropii umożliwia znalezienie  
funkcji  $p(u^{(j)}, w^{(j)})$  spełniającej warunki (2.95), (2.96). Postę-  
pując w sposób podobny jak w punkcie 4 tej pracy (równania i  
wzory (2.72) - (2.86)) maksymalizujemy funkcjonal

$$I = - \int_0^1 \int_0^1 p(u^{(j)}, w^{(j)}) \ln p(u^{(j)}, w^{(j)}) du^{(j)} dw^{(j)}, \quad (2.97)$$

przy warunkach (2.95), (2.96). W wyniku takiego postępowania  
otrzymujemy, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $p(u^{(j)}, w^{(j)})$   
powinna mieć postać

$$p(u^{(j)}, w^{(j)}) = (1/Z) \exp[-L^{(j)} F(u^{(j)}, w^{(j)})], \quad (2.98)$$

gdzie czynniki Lagrange'a  $L^{(j)}$  i  $1 - \ln Z$ , odpowiadające odpo-  
wiednio warunkom (2.95) i (2.96), należy wyliczyć z układu rów-  
nań

$$Z = \int_0^1 \int_0^1 \exp[-L^{(j)} F(u^{(j)}, w^{(j)})] du^{(j)} dw^{(j)}, \quad (2.99)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 F(u^{(j)}, w^{(j)}) \exp[-L^{(j)} F(u^{(j)}, w^{(j)})] du^{(j)} dw^{(j)} = E^{(j)} Z \quad (2.100)$$

Rys. 10 przedstawia wyniki rozwiązania numerycznego układu równań (2.99) - (2.100) dla stali scharakteryzowanej następującymi wartościami parametrów materiałowych pojedynczego kryształu [46]:

$$c_{11} = 205 \text{ GPa}, c_{12} = 133 \text{ GPa}, c_{44} = 125 \text{ GPa}, \rho = 7.819 \text{ gcm}^{-3}, \quad (2.101)$$

gdzie  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  i  $c_{44}$  są modułami sprężystości, a  $\rho$  - gęstością. Po wyliczeniu  $L^{(j)}$  funkcję (2.98) należy traktować jako znaną i można wtedy wyliczyć taką wielkość jak na przykład

$$n(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = (1/Z) \int_{a_2}^{a_1} du^{(j)} \int_0^1 \exp[-L^{(j)} F(u^{(j)}, w^{(j)})] dw^{(j)}. \quad (2.102)$$

Tutaj

$$\theta^{(1)} = \arccos a_1, \theta^{(2)} = \arccos a_2, 0 \leq \theta^{(1)} \leq \theta^{(2)} \leq (1/2)\pi, \quad (2.103)$$

a zatem  $n(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$  można interpretować jako ułamek całkowitej liczby kryształitów w próbce, charakteryzujący się kątem

$$\theta^{(j)} = \arccos(\vec{E}_3 \cdot \vec{e}_j) \quad (2.104)$$

leżącym w przedziale  $\theta^{(1)} \leq \theta^{(j)} \leq \theta^{(2)}$ . Tak więc wielkość (2.102) można traktować jako pewną charakterystykę tekstury. Na rys. 11 przedstawiono przykłady obliczeń numerycznych wielkości (2.102) dla stali scharakteryzowanej wartościami (2.101) parametrów materiałowych.

Rozpatrzmy teraz zagadnienie znalezienia funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla kątów orientacji pojedynczego kryształu w przypadku, kiedy efektywny moduł Younga zmierzono w trzech ( $j = 1, 2, 3$ ) lub co najmniej w dwóch różnych kierunkach. W tych przypadkach musimy wyznaczyć trzy lub dwa czynniki Lagrange'a  $L^{(j)}$  i czynnik normujący  $Z$ . Punktem wyjścia pozostają w dalszym ciągu równania (2.87) - (2.89), do których należy dołączyć rela-

cje typu

$$N_k^{(j)} = N_k^{(j)}(\theta, \psi, \varphi), \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (2.105)$$

wyrażające zależność kosinusów (2.88) od funkcji trygonometrycznych kątów Eulera  $\theta, \psi, \varphi$ ; zależności takie są podane na przykład w [50] jako wzory (2). Kąty Eulera w przedstawionych rozwiązaniach są zdefiniowane w taki sam sposób jak w pracach [46], [50], tj.  $\theta = \arccos(\vec{E}_3 \cdot \vec{e}_3)$  jest kątem nutacji,  $\varphi$  jest kątem obrotu właściwego. Funkcję gęstości prawdopodobieństwa  $p(\xi, \psi, \varphi)$ , której odpowiada maksymalna entropia, znajduje się teraz żądając, aby wariacja  $\delta I$  funkcjonału

$$I = - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\xi, \psi, \varphi) \left[ \ln p(\xi, \psi, \varphi) + \ln Z - 1 + \sum_{j=1}^3 L^{(j)} f(N^{(j)})(\xi, \psi, \varphi) \right] d\xi d\psi d\varphi \quad (2.106)$$

znikała dla dowolnej wariacji  $\delta p(\xi, \psi, \varphi)$ . Wprowadzono tutaj oznaczenie

$$\xi = \cos \theta. \quad (2.107)$$

W wyniku takiego postępowania otrzymuje się

$$p(\xi, \psi, \varphi) = (1/Z) \exp \left[ - \sum_{j=1}^3 L^{(j)} f(N^{(j)})(\xi, \psi, \varphi) \right], \quad (2.108)$$

gdzie  $Z$  i  $L^{(j)}$  są określone jako funkcje  $E^{(j)}$  za pomocą równań

$$Z = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \exp \left[ - \sum_{j=1}^3 L^{(j)} f(N^{(j)})(\xi, \psi, \varphi) \right] d\xi d\psi d\varphi \quad (2.109)$$

$$ZE^{(1)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(N^{(1)})(\xi, \psi, \varphi) \cdot$$

$$\cdot \exp \left[ - \sum_{j=1}^3 L^{(j)} f(N^{(j)})(\xi, \psi, \varphi) \right] d\xi d\psi d\varphi.$$

(2.110)



Funkcje  $f(N^{(j)})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , są określone przez (2.89), natomiast  $p(\xi, \psi, \varphi) d\xi d\psi d\varphi$  oznacza prawdopodobieństwo, że wartości kosinusa  $\xi$  kąta Eulera  $\theta$  oraz pozostałych dwóch kątów Eulera  $\psi$  i  $\varphi$  leżą odpowiednio w przedziałach  $[\xi, \xi+d\xi]$  oraz  $[\psi, \psi+d\psi]$  i  $[\varphi, \varphi+d\varphi]$ .

### 5.3. Ocena tekstury na podstawie pomiarów prędkości propagacji fal ultradźwiękowych

Przypuśćmy, że dany jest zbiór wartości nie więcej niż 9 prędkości  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) propagacji (w kierunku osi  $Ox_j$ ) płaskich i liniowo spolaryzowanych (w kierunku osi  $Ox_i$ ) efektywnych fal ultradźwiękowych (1.80) - (1.83) w badanym materiale polikrystalicznym. W tym przypadku procedura uśredniania Voigta i niektóre wyniki pracy [50] prowadzą do następujących zależności:

$$D_{ij} = \langle H(\xi, \psi, \varphi)_{ij} \rangle, \quad (2.111)$$

gdzie

$$D_{ij} = [\sigma_{ij}^2 - (c_{11} - c_{44})\delta_{ij} - c_{44}] / (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}),$$

$$H(\xi, \psi, \varphi)_{ij} = -2\delta_{ij}f(N^{(i)}) + (1 - \delta_{ij})g(N^{(i)}, N^{(j)}), \quad (2.112)$$

$$g(N^{(i)}, N^{(j)}) = \sum_{k=1}^3 (N_k^{(i)})^2 (N_k^{(j)})^2, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Równania (2.112) można przepisać w postaci

$$D_{ij} = 2\delta_{ij} \langle f(u^{(i)}, w^{(i)}) \rangle + (1 - \delta_{ij}) \langle g(u^{(i)}, w^{(i)}, u^{(j)}, w^{(j)}) \rangle, \quad (2.113)$$

gdzie

$$g(u^{(i)}, w^{(i)}, u^{(j)}, w^{(j)}) = [1 + 2(w^{(i)})^2 (w^{(j)})^2 - (w^{(i)})^2 - (w^{(j)})^2] \cdot [1 - (u^{(i)})^2 - (u^{(j)})^2 + (u^{(i)})^2 (u^{(j)})^2] + (u^{(i)})^2 (u^{(j)})^2. \quad (2.114)$$

Funkcje  $f(u^{(i)}, w^{(i)})$  są zdefiniowane wzorem (2.91), przy czym

$u^{(i)}$  i  $w^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) są dane wyrażeniami (2.92). Gdy znany jest zbiór wartości 9 prędkości propagacji  $c_{ij}$ , wtedy równania (2.111), (2.112) prowadzą do następującego układu równań liniowo niezależnych od siebie:

$$\langle f(N^{(i)}) \rangle = - (1/2) D_{ii} \quad (2.115)$$

$$\langle g(N^{(i)}, N^{(j)}) \rangle = (1/2) (D_{ij} + D_{ji}), \quad i, j = 1, 2, 3; i \neq j.$$

W tym przypadku funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla kątów orientacji pojedynczego kryształu ma postać

$$p(\xi, \psi, \varphi) = (1/Z) \exp[-L(\xi, \psi, \varphi)]$$

$$L(\xi, \psi, \varphi) = \sum_{i=1}^3 Y^{1i} f(N^{(i)})(\xi, \psi, \varphi) + \sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^3 Y^{ij} g(N^{(i)})(\xi, \psi, \varphi), N^{(j)}(\xi, \psi, \varphi), \quad (2.116)$$

przy czym czynnik normujący  $Z$  i 6 czynników nieoznaczonych Lagrange'a  $Y^{11}, Y^{22}, Y^{33}, Y^{12}, Y^{13}, Y^{23}$  należy wyznaczyć z układu

$$Z = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \exp[-L(\xi, \psi, \varphi)] d\xi d\psi d\varphi \quad (2.117)$$

$$Z D_{ii} = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(N^{(i)})(\xi, \psi, \varphi) \exp[-L(\xi, \psi, \varphi)] d\xi d\psi d\varphi, \quad (2.118)$$

$$Z (D_{ij} + D_{ji}) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(N^{(i)})(\xi, \psi, \varphi), N^{(j)}(\xi, \psi, \varphi) \cdot \exp[-L(\xi, \psi, \varphi)] d\xi d\psi d\varphi; \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (2.119)$$

W przypadku, gdy znana jest z pomiaru tylko jedna prędkość  $c_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) fali podłużnej, wtedy funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla kątów orientacji dla pojedynczego kryształu ma postać

$$p(u^{(i)}, w^{(i)}) = (1/Z) \exp[-W^{(i)} f(u^{(i)}, w^{(i)})] \quad (2.120)$$

gdzie czynnik normujący  $Z$  i czynnik Lagrange'a  $w^{(i)}$  należy obliczyć z równań

$$Z = \int_0^1 \int_0^1 \exp[-W^{(i)} f(u^{(i)}, w^{(i)})] dw^{(i)} du^{(i)} \quad (2.121)$$

$$ZA_{ii} = \int_0^1 \int_0^1 f(u^{(i)}, w^{(i)}) \exp[-W^{(i)} f(u^{(i)}, w^{(i)})] dw^{(i)} du^{(i)} \quad (2.122)$$

$$A_{ii} = (1/2)(c_{11} - \rho v_{ii}^2)(c_{11} - c_{12} - 2c_{44}) \quad (2.123)$$

Po obliczeniu  $w^{(i)}$  funkcja gęstości prawdopodobieństwa (2.120) jest znana, co umożliwia, po zastąpieniu (2.98) w (2.102) funkcją gęstości prawdopodobieństwa (2.120), obliczenie wielkości  $n(\theta^{(i)}, \theta^{(i+1)})$ , zdefiniowanej wzorem (2.102). Przykłady takich obliczeń numerycznych dla stali scharakteryzowanej parametrami materiałowymi (2.101) oraz dla  $v_{33} = 5814 \text{ ms}^{-1}$  i  $5778 \text{ ms}^{-1}$  przedstawiono na rys. 12, gdzie

$$\tilde{n}(\theta^{(i)}, \theta^{(i+1)}) = n(\theta^{(i)}, \theta^{(i+1)}) + n(90^\circ - \theta^{(i+1)}, 90^\circ - \theta^{(i)}) \quad (2.124)$$

W bardziej skomplikowanym przypadku, gdy znane są z pomiarów wartości liczbowe prędkości propagacji dwóch fal poprzecznych  $v_{ij}$  i  $v_{ji}$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ), korzystamy z równań (2.111) wyrażając, za pomocą podstawień (2.105), kosinusy  $N_k^{(j)}$  przez funkcje trygonometryczne kątów Eulera. W ten sposób otrzymujemy

$$\langle g(N^{(i)}, N^{(j)}) \rangle = B_{ij} \quad (2.125)$$

gdzie w przybliżeniu Voigta

$$B_{1j} = [(\rho/2)(v_{1j}^2 + v_{2j}^2) - c_{44}] / (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}), \quad i, j = 1, 2, 3; i \neq j; \\ i, j - \text{ustalone.} \quad (2.126)$$

Wykorzystując zasadę maksymalnej entropii otrzymujemy w tym przypadku

$$p(\xi, \psi, \varphi) = (1/Z) \exp \left[ -S^{ij} g(N^{(i)}(\xi, \psi, \varphi), N^{(j)}(\xi, \psi, \varphi)) \right], \quad (2.127)$$

gdzie czynnik normujący Z i czynnik Lagrange'a należy wyliczyć z równań

$$Z = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \exp \left[ -S^{ij} g(N^{(i)}(\xi, \psi, \varphi), N^{(j)}(\xi, \psi, \varphi)) \right] d\xi d\psi d\varphi \quad (2.128)$$

$$ZB_{1j} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(N^{(i)}(\xi, \psi, \varphi), N^{(j)}(\xi, \psi, \varphi)) \cdot \\ \cdot \exp \left[ -S^{ij} g(N^{(i)}(\xi, \psi, \varphi), N^{(j)}(\xi, \psi, \varphi)) \right] d\xi d\psi d\varphi. \quad (2.129)$$

Jeżeli procedurę uśredniania Voigta zastąpimy procedurą Reussa [51], wówczas wzór (2.126) należy zastąpić wzorem

$$B_{1j} = \left\{ (1/2)(1/\rho) \left[ 1/(v_{1j}^2 + v_{2j}^2) \right] - (1/4)s_{44} \right\} / (s_{11} - s_{12} - (1/2)s_{44}). \quad (2.130)$$

Na rys. 13 przedstawiono wartości  $n(\theta^{(i)}, \theta^{(i+1)})$  obliczone dla stali scharakteryzowanej parametrami materiałowymi (2.101) oraz dla  $v_{32} = 3850 \text{ ms}^{-1}$  i  $v_{23} = 3860 \text{ ms}^{-1}$ , przy czym rachunki numeryczne wykonano stosując zarówno przybliżenie Voigta, jak i Reussa (2.130). Na rys. 14 podano porównanie wartości wielkości  $\tilde{n}(\theta^{(i)}, \theta^{(i+1)})$ , zdefiniowanej wzorem (2.124), obliczonych dla tych samych wartości prędkości propagacji  $v_{32}$  i  $v_{23}$  oraz dla tej samej stali [46] jak w przypadku przedstawionym na rys. 13, przy czym rachunki numeryczne wykonano stosując zarówno przybliżenia

Voigta (2.126) i Reussa (2.130), jak i korzystając z danych doświadczalnych [46], dotyczących prędkości propagacji fal ultradźwiękowych o częstotliwości  $2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$  oraz dyfrakcji neutronów w tym materiale.

Rozbieżności ilościowe pomiędzy rezultatami obliczeń numerycznych przeprowadzonych na podstawie wyników pomiarów ultradźwiękowych i obserwacji dyfrakcji neutronów, widoczne na rys. 14, zostały dość szeroko omówione w pracy [7]. W tym miejscu wymienimy tylko dwa następujące czynniki powodujące takie rozbieżności:

a) Wartości liczbowe parametrów materiałowych badanej stali (2.101) nie zostały przez autorów pracy [46] wyznaczone w drodze pomiarów, lecz przyjęte na podstawie przesłanek związanych ze składem tego materiału. Z drugiej strony w zaproponowanych metodach oceny tekstury wartości liczbowe tych parametrów wywierają istotny wpływ na wyniki obliczeń numerycznych dotyczących ilościowej charakterystyki tekstury.

b) Przedstawione na rys. 14 rezultaty obliczeń numerycznych, które dotyczą ilościowej charakterystyki tekstury stali (2.101), określającej anizotropię własności akustycznych tego materiału, uzyskano opierając się na wynikach pomiarów [46] tylko dwu spośród dziewięciu prędkości propagacji  $v_{ij}$  fal ultradźwiękowych.

Tak więc pewne rozbieżności ilościowe pomiędzy wynikami obliczeń numerycznych, dotyczącymi ilościowej charakterystyki tekstury stali (2.101) i uzyskanymi na podstawie obserwacji dyfrakcji neutronów oraz na podstawie pomiarów ultradźwiękowych - przy wykorzystaniu zasady Jaynesa [35], można przypisać przede wszystkim niedostatkowi w ilości i dokładności danych wejściowych w przypadku zastosowania ostatniej z wymienionych metod, opartej na teorii informacji. Z drugiej jednak strony dobra zgodność jakościowa pomiędzy tymi dwoma grupami wyników obliczeń numerycznych, widoczna na rys. 14 i uzyskana mimo wyżej omówionych niedostatków w ilości i dokładności danych wejściowych, wskazuje na wartość zaproponowanej metody, opartej na pomiarach ultradźwiękowych i teorii informacji. W szczególności metoda ta jest stosunkowo prosta i tania oraz zapewnia możliwość śledzenia zmian tekstury podczas trwania wielu procesów technologicznych [45].



Objaśnienia rys. 10 - 14

- Rys. 10. Rozwiązanie numeryczne równań (2.99) - (2.100) dla stali scharakteryzowanej wartościami liczbowymi (2.101) parametrów materiałowych. [7] .
- Rys. 11. Ilościowa charakterystyka (2.102) tekstury stali (2.101) odpowiadająca dwom wartościom modułu Younga  $E(j)$  [7] .
- Rys. 12. Ilościowa charakterystyka (2.124) tekstury stali (2.101) odpowiadająca dwom wartościom prędkości  $v_{33}$  propagacji ultradźwiękowej fali podłużnej [7] .
- Rys. 13. Ilościowa charakterystyka (2.102) tekstury stali (2.101) odpowiadająca prędkościom propagacji dwóch poprzecznych fal ultradźwiękowych, obliczona przy zastosowaniu przybliżenia Voigta (2.126) i Reussa (2.130) [7] .
- Rys. 14. Ilościowa charakterystyka (2.124) tekstury stali (2.101) obliczona dla tych samych obserwowanych [46] prędkości propagacji dwóch poprzecznych fal ultradźwiękowych i przy zastosowaniu tych samych przybliżeń jak na rys. 13. Teksturę tej samej stali obliczono również na podstawie danych doświadczalnych [46] dotyczących dyfrakcji neutronów w tym materiale [7] .

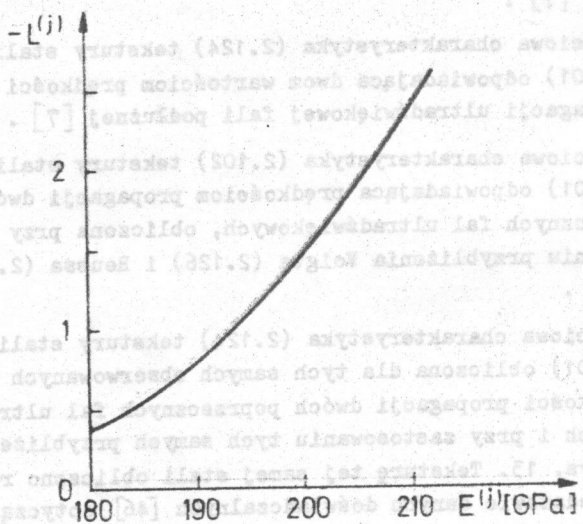
Rys. 10. Rozkładanie numeryczne równań (2.99) - (2.100) dla sta-  
li i stopów (2.101) i stopów (2.102) w przedziale temperatur 180-210 K.  
Przebiegów numerycznych [7].

Rys. 11. Liczbowe charakterystyki (2.102) i (2.103) dla sta-  
li i stopów (2.101) i stopów (2.102) w przedziale temperatur 180-210 K.  
Przebiegów numerycznych [7].

Rys. 12. Liczbowe charakterystyki (2.124) i (2.125) dla sta-  
li i stopów (2.101) i stopów (2.102) w przedziale temperatur 180-210 K.  
Przebiegów numerycznych [7].

Rys. 13. Liczbowe charakterystyki (2.103) i (2.104) dla sta-  
li i stopów (2.101) i stopów (2.102) w przedziale temperatur 180-210 K.  
Przebiegów numerycznych [7].

Rys. 14. Liczbowe charakterystyki (2.105) i (2.106) dla sta-  
li i stopów (2.101) i stopów (2.102) w przedziale temperatur 180-210 K.  
Przebiegów numerycznych [7].



Rys. 10

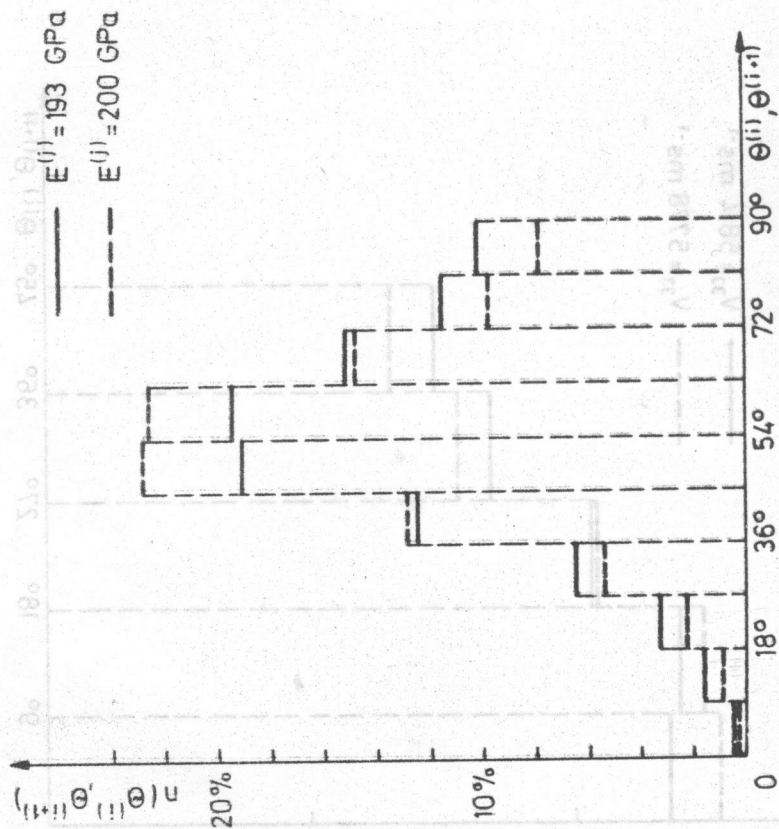
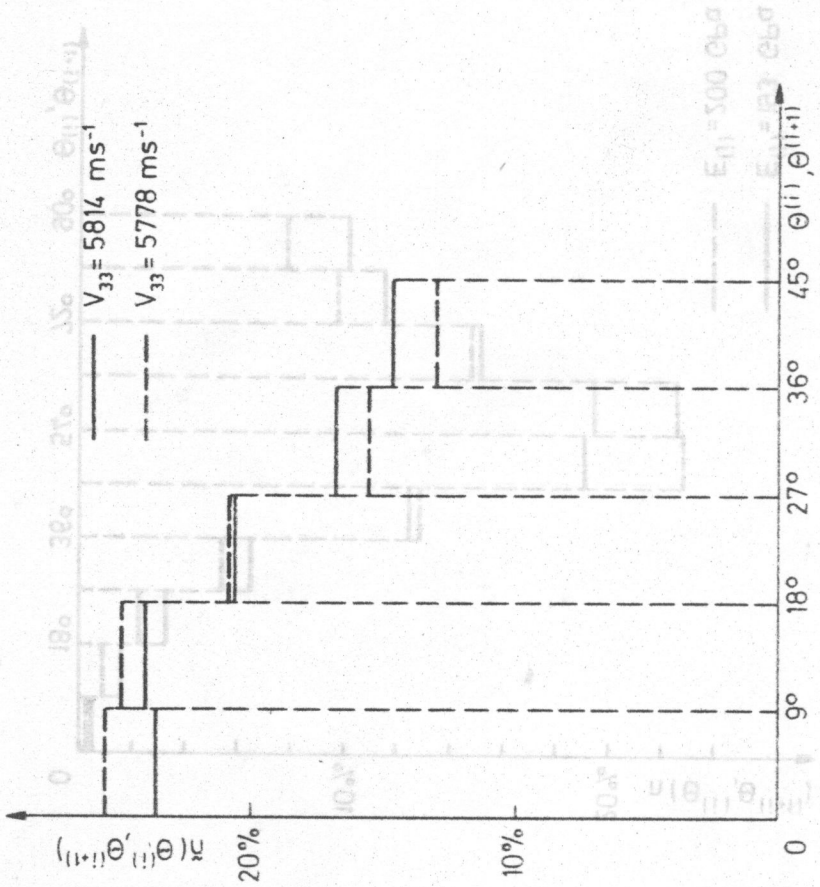


Рис. 11



Rys. 12

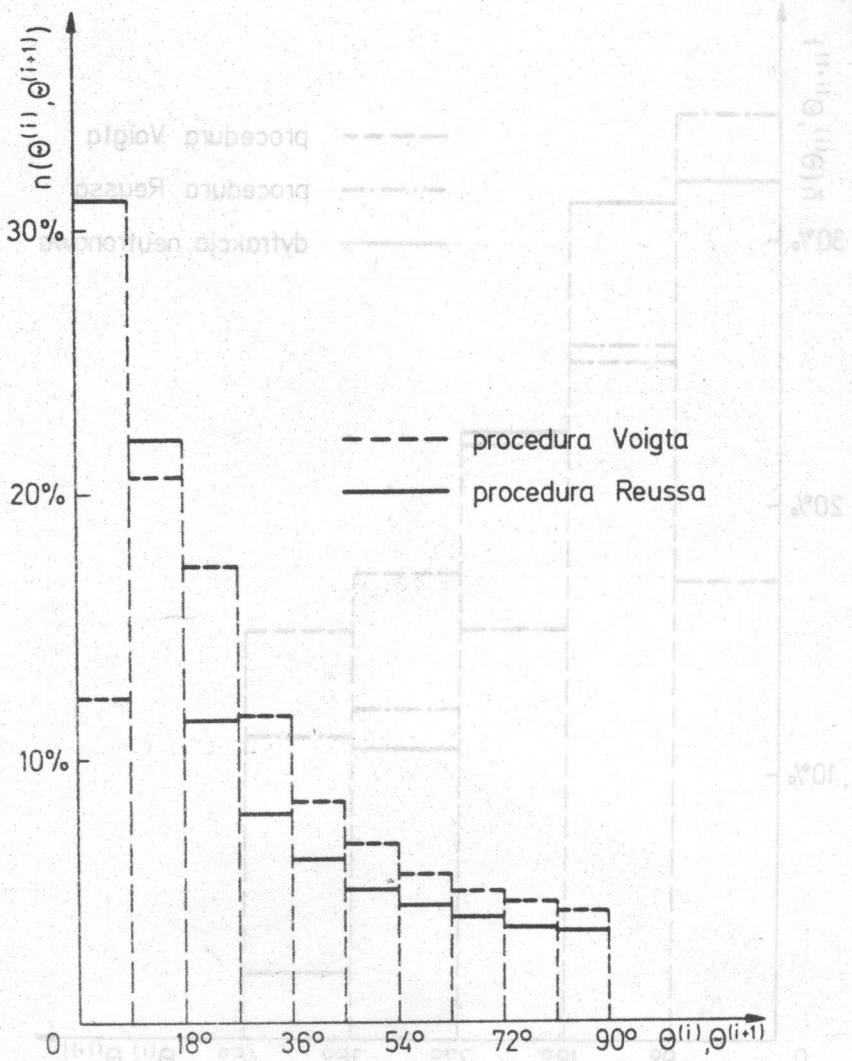
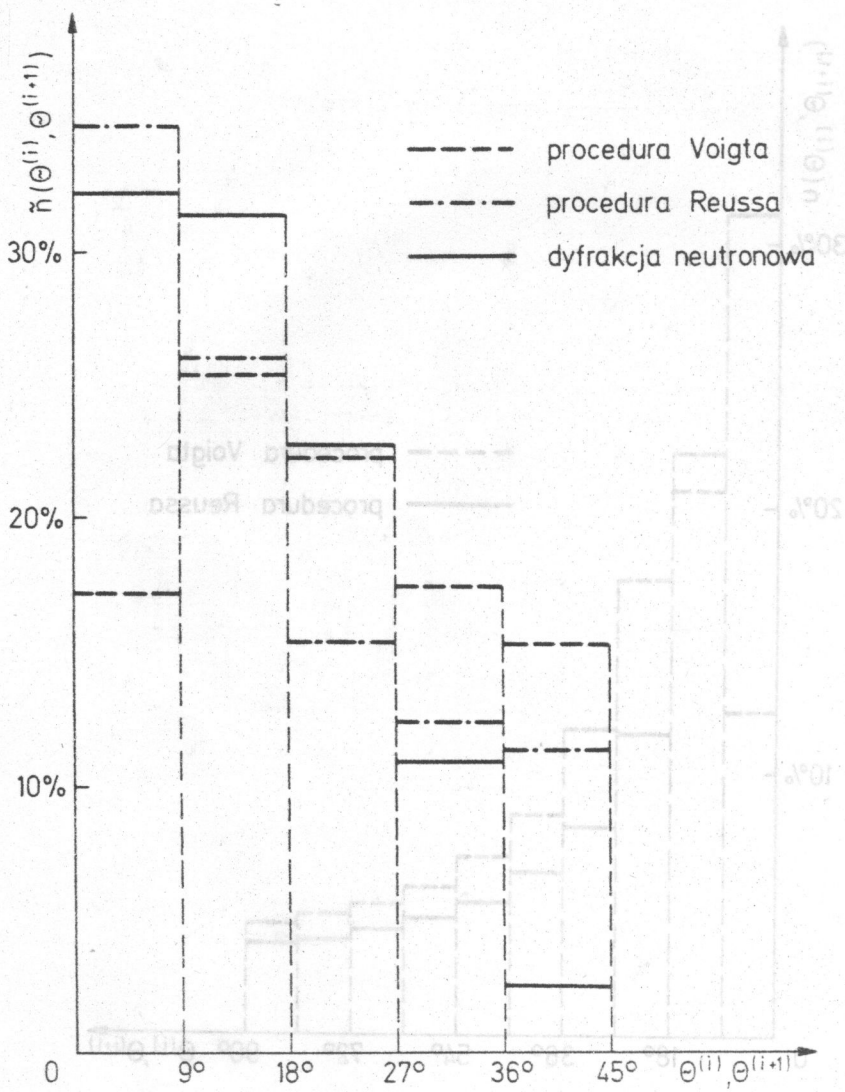


Рис. 13





Rys. 14

Fig. 14

## UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

Omawiany cykl prac [1 - 7] zarówno porusza szeroki wachlarz zagadnień dotyczących teoretycznych podstaw badania struktury materiałów niejednorodnych metodami ultradźwiękowymi, jak i podaje przykłady zastosowania ultradźwiękowych metod doświadczalnych do takich badań. We wszystkich pracach [1 - 7] analizuje się stan drgań ośrodka niejednorodnego charakteryzujący się tym, że pole przemieszczeń cząstek ośrodka, związane z ich ruchem drgającym i uśrednione po zbiorze statystycznym próbek, czyli tzw. fala efektywna, ma postać liniowo spolaryzowanej płaskiej fali podłużnej (dylatacyjnej) lub poprzecznej (ścinającej). Do podanego uprzednio omówienia tych prac można dołączyć następujące uwagi i wnioski dotyczące dalszych perspektyw tych badań.

Ze względu na gwałtowny wzrost produkcji i zastosowania kompozytów polimerowych zachodzi potrzeba rozwijania ultradźwiękowych metod badania tych materiałów. Prace [1,6] zawierają omówienie szeregu ważnych zagadnień teoretycznych i proponują metody analizy, które mogą stanowić punkt wyjścia do dalszych rozważań dotyczących ultradźwiękowych metod badania polimerowych rozumianych jako liniowo lepko-sprężyste ośrodki stochastyczne. W pracy [1] podano związki pomiędzy makroskopowymi parametrami propagacji efektywnej fali ultradźwiękowej w ośrodku niejednorodnym I a jego efektywnymi dynamicznymi parametrami materiałowymi oraz zaproponowano procedurę iteracyjną, umożliwiającą wyznaczenie lokalnej fluktuacji pola przemieszczeń w określonych warunkach z dowolną dokładnością, co z kolei umożliwi obliczanie tłumienia (rozpraszania) fal ultradźwiękowych w ośrodku na podstawie informacji o jego strukturze. W pracy [6] opracowano schemat rachunkowy, który dotyczy ośrodka niejednorodnego I i pozwala uzyskać łączny statystyczny opis jego lokalnej struktury i pola przemieszczeń fali ultradźwiękowej, gdy znane są efektywne parametry propagacji tej fali i parametry materiałowe poszczególnych składników (faz) tego ośrodka. Taki lokalny opis statystyczny (i jego udoskonalone wersje) może okazać się użyteczny do interpretacji efektów fizycznych (mechanicznych), które są wynikiem lokalnego stanu drgań ośrodka i zależą od jego lokalnej struktury, jak na

przykład zmęczenie ultradźwiękowe materiału [42, 43], rozpraszanie fali sprężystej itd.

Można oczekiwać, że w badaniach ultradźwiękowych kompozytów polimerowych, rozumianych jako liniowo lepkosprężyste ośrodki stochastyczne, duże możliwości wiążą się z falami ultradźwiękowymi o dużych częstotliwościach. Zgodnie bowiem z nierównością (1.28) w obszarze dostatecznie dużych częstotliwości część urojona zależnego od częstotliwości składnika funkcji, która opisuje lepkosprężyste zachowanie się materiału, staje się zaniedbywalnie mała w porównaniu z częścią rzeczywistą tego składnika, co może prowadzić do istotnych uproszczeń bardzo skomplikowanego opisu teoretycznego.

Dalsze wysiłki, aby stworzyć podstawy teoretyczne akustyki kompozytów polimerowych, powinny w szerokim zakresie uwzględniać konieczność opracowania odpowiednich algorytmów dla programów obliczeń numerycznych. Konieczność ta wynika z dużej uciążliwości i skomplikowanej formy rachunków analitycznych dotyczących zagadnień teoretycznych akustyki kompozytów polimerowych.

Rozważania zawarte w pracach [1, 6] stosują się również w uproszczonej formie do stochastycznych kompozytów sprężystych. Uproszczenie to polega na pomijaniu członów opisujących relaksację lepkosprężystą i zastępowaniu każdego niezależnego od częstotliwości składnika funkcji, która opisuje lepkosprężyste zachowanie się materiału poszczególnego składnika kompozytu, odpowiednimi modułami sztywności. W ultradźwiękowych badaniach kompozytów liniowo sprężystych stosunkowo dużą użyteczność wykazują fale długie (w porównaniu do odpowiednich wymiarów liniowych charakteryzujących mikrostrukturę). W tym obszarze częstotliwości efektywne dynamiczne moduły sztywności kompozytów liniowo sprężystych, które są wielkościami zespolonymi zależnymi od częstotliwości, można traktować w przybliżeniu jako wielkości rzeczywiste, ponieważ, jak wykazano w pracy [3], ich części urojone są zaniedbywalnie małe w porównaniu z odpowiednimi częściami rzeczywistymi. Przybliżenie to bardzo upraszcza opis zjawiska propagacji długich fal ultradźwiękowych w sprężystych ośrodkach niejednorodnych i ułatwia interpretację wyników pomiarów wykonanych przy użyciu długich fal ultradźwiękowych.

W pracach [2, 3] zajmowano się propagacją efektywnej fali ultradźwiękowej w ośrodkach porowatych o porach kulistych i eliipsoidalnych. Sformułowano warunki, jakie muszą być spełnione, aby pory dowolnego kształtu można było przybliżać pustkami kulistymi, nie wywołując tym istotnej rozbieżności pomiędzy przewidywanymi i obserwowanymi efektywnymi własnościami dynamicznymi ciała porowatego. Stosując zaproponowaną przez siebie metodę analizy procesu propagacji fali w ciele porowatym [2], Autor uzyskał stosunkowo prosty wzór wyrażający zależność prędkości propagacji fali podłużnej w ciele porowatym od porowatości, stałej Poissona materiału matrycy oraz prędkości propagacji fali podłużnej w jednorodnym materiale matrycy. Przybliżony opis zjawiska propagacji fali podłużnej zawarty w pracy [2] oraz wnioski z niego wypływające zostały wykorzystane również przez innych autorów [20, 21, 52 - 54].

Rozważania przedstawione w pracach [2 - 4] są słuszne w obszarze małych porowatości i długich fal, w którym dynamiczne zachowanie się ciała porowatego jest określone przez części rzeczywiste jego efektywnych dynamicznych modułów sztywności. Dlatego też w rozważaniach teoretycznych prac [3, 4] zajmowano się wyłącznie częściami rzeczywistymi tych modułów, które są określone przez prędkości propagacji odpowiednich fal ultradźwiękowych w materiale porowatym i jego gęstość. W pracach [2, 3] obliczano prędkości propagacji efektywnych fal podłużnych i poprzecznych posługując się metodami zaproponowanymi przez Autora, w tym również metodą uwzględniającą wpływ niekulistości pustek.

W pracy IV wskazano na związki pomiędzy parametrami propagacji efektywnych fal ultradźwiękowych oraz gęstością energii pola tych fal a zmianą (wzrostem) porowatości materiału, spowodowaną na przykład postępowaniem procesów zmęczenia i starzenia się materiału. Rozważania te sugerują ultradźwiękową metodę oceny postępu procesu tworzenia się mikropęknięć w ciele stałym. Porównanie wyników pomiarów i obliczeń teoretycznych uzyskanych dla fali podłużnej i poprzecznej sugeruje [3], że w obszarze długich fal i małych porowatości ultradźwiękowe fale podłużne są bardziej użyteczne do badania zmian porowatości w materiale obciążonym aniżeli fale ścinające. Ta większa użyteczność wynika stąd,

że z jednej strony w obszarze długich fal i małych porowatości fale podłużne są bardziej czułe na zmiany porowatości, a z drugiej strony w tym obszarze konieczne obliczenia teoretyczne można oprzeć na stosunkowo prostej metodzie podanej w pracy [2]. W ten sposób uzyskujemy na przykład zależność (1.157), która pozwala oceniać zmiany porowatości z pomiarów prędkości propagacji fali podłużnej w ciele porowatym, jeżeli znana jest gęstość i stałe Lamégo matrycy.

Praca [5] stanowi przykład ilustrujący, jakie możliwości poznawcze kryje w sobie powiązanie zjawiska obserwowanego w skali makro ze statystycznym opisem mikrostruktury ośrodka niejednorodnego i stanem drgań jego cząstek, gdy przez ośrodek ten przechodzi fala ultradźwiękowa. W pracy rozważano niejednorodny i makroskopowo izotropowy ośrodek, wypełniający skończony obszar zamknięty w ośrodku nieskończenie rozległym, jednorodnym i izotropowym. Przedmiotem analizy w pracy [5] jest potencjał skalarny fali podłużnej. Zakładając słabą niejednorodność oraz małą różnicę impedancji akustycznych obu ośrodków, wyliczono rozkład kątowy potencjału skalarnego ultradźwiękowej fali rozproszonej. Wykazano dalej, że z rozkładu kąтового kwadratu potencjału skalarnego lub kwadratu gradientu potencjału skalarnego można wyznaczyć funkcję korelacji. Stwarza to możliwość wyznaczenia funkcji korelacji dla niektórych izotropowych ośrodków niejednorodnych na podstawie odpowiednich pomiarów rozkładu kąowego intensywności fali ultradźwiękowej rozproszonej w poszczególnym ośrodku. Praca [5] określa bowiem warunki, w jakich rozkład kątowy pola skalarnego fali ultradźwiękowej, rozproszonej przez ośrodek niejednorodny, jest powiązany w taki sam sposób ze strukturą tego ośrodka jak intensywność światła w zjawisku rozpraszania światła rozpatrywanym przez Debye'a i Buechego [36].

W pracy [7] została zaproponowana metoda ilościowej oceny tekstury ciał polikrystalicznych oparta na pomiarach ultradźwiękowych i teorii informacji. Przykłady praktycznego zastosowania tej metody do ilościowej oceny tekstury formowanej w stali przez różne procesy technologiczne można znaleźć w pracach [7,45]. Przykłady te wskazują na duże znaczenie praktyczne tej metody, która również umożliwia obserwowanie zmian tekstury podczas trwania



wielu procesów technologicznych. Ocena ilościowa tekstury materiału na podstawie pomiarów prędkości propagacji fal ultradźwiękowych w badanym materiale i teorii informacji wiąże się z koniecznością przeprowadzenia bardzo dokładnych pomiarów tych prędkości. Jak wynika z pracy [4], bardzo duża dokładność pomiarów prędkości propagacji fal ultradźwiękowych byłaby również konieczna przy ocenie wzrostu porowatości materiału na podstawie obserwowanych zmian prędkości propagacji fal ultradźwiękowych w tym materiale.

1. J. Lewandowski - Acoustic waves in solids with random cavities. I. Effective macroscopic parameters, Acta Mechanica, (in press) 1986-08-17).

2. J. Lewandowski - Acoustic waves in solids with random cavities. II. Energy density considerations, Acta Mechanica, (in press) 1986-08-17).

3. J. Lewandowski - Correlation function estimation for inhomogeneous scattering on acoustic wave, Archives of Acoustics, 5, 4, 283-292, 1978. In some papers results are published in the form of papers.

4. J. Lewandowski - Wyniesienie funkcji korelacji dla niejednorodności rozpraszających fal akustycznych, Archiwum Akustyki, 5, 4, 311-320, 1978.

5. J. Lewandowski - Maximum entropy estimate of the relation to the inverse problem of acoustic scattering, Acta Mechanica, 62, 63-76, 1986.

6. J. Lewandowski - Evaluation of the texture of polypropylene aggregate from ultrasonic measurements, Ultrasonics, 24, 2, 73-86, 1986.

7. M. Mielicki - Metoda "krótkiej prędkości" badania rozpraszania się fal ultradźwiękowych w ośrodkach nieliniowych, Archiwum Elektrotechniki, 5, 4, 643-674, 1986.

8. J. Lewandowski - Propagation of ultrasonic waves in porous ceramics, Ultrasonics, 205-207, Sept. 1975.

9. J. Lewandowski - Album elektrotechniki, Warszawa, 1978.

LITERATURA

1. Lewandowski J.- Acoustic and effective material parameters of heterogeneous viscoelastic bodies, *Acta Mechanica*, 57, 143 - 158, 1985.
2. Lewandowski J.- Akustyczne metody badania struktury niejednorodnych ciał stałych, *Prace IPPT, Warszawa* 18/1976.
3. Lewandowski J.- Acoustic waves in solids with random cavities: I. Effective macroscopic parameters, *Acta Mechanica* (praca przyjęta do druku 1986-08-13).
4. Lewandowski J.- Acoustic waves in solids with random cavities: II. Energy density considerations, *Acta Mechanica* (praca przyjęta do druku 1986-08-13).
5. Lewandowski J.- Correlation function determination for inhomogeneities scattering an acoustic wave, *Archives of Acoustics*, 3, 4, 283 - 292, 1978. Ta sama praca została opublikowana w języku polskim jako artykuł:  
Lewandowski J.- Wyznaczanie funkcji korelacji dla niejednorodności rozpraszających falę akustyczną, *Archiwum Akustyki*, 13, 4, 311 - 320, 1978.
6. Lewandowski J.- Maximum entropy estimate of the solution to the inverse problem of acoustic scattering, *Acta Mechanica*, 62, 63 - 76, 1986.
7. Lewandowski J.- Evaluation of the texture of polycrystalline aggregate from ultrasonic measurements, *Ultrasonics*, 24, 2, 73 - 86, 1986.
8. Malecki I.- Metoda "źródeł przestrzennych" badania rozchodzenia się fal ultradźwiękowych w ośrodkach uziarnionych, *Archiwum Elektrotechniki*, 5, 4, 645 - 674, 1956.
9. Ranachowski J.- Propagation of ultrasonic waves in porous ceramics, *Ultrasonics*, 203 - 207, Sept. 1975.
10. Ranachowski J., Hermanski V.- Album of electrical porcelain structures, *Instytut Elektrotechniki, Warszawa*, 1972.

11. Lewandowski J.- Fale akustyczne w stochastycznych ośrodkach liniowo lepko-sprężystych, Akustyka molekularna i kwantowa, t.4, 135 - 151, Warszawa IPPT PAN, 1983.
12. Lewandowski J.- Rozkład kątowy pola fali akustycznej w ośrodku przypadkowo niejednorodnym, Prace XXV Seminarium Otwartego z Akustyki, str. 256 - 259, Gdańsk-Władysławowo wrzesień 1977.
13. Lewandowski J.- Współczynnik tłumienia fal akustycznych w stałych ośrodkach stochastycznych, Materiały XXVII Seminarium Otwartego z Akustyki, str. 72 - 74, Gliwice wrzesień 1981.
14. Lewandowski J.- Coefficient de diffusion et vitesse de propagation des ultrasons dans les milieux solide aléatoire, Revue d'Acoustique, 64, 35 - 37, 1983.
15. Lewandowski J.- Propagacja fal akustycznych w stochastycznych ośrodkach lepko-sprężystych, Prace XXX Seminarium Otwartego z Akustyki, str. 209 - 212, Gdańsk wrzesień 1983.
16. Gross B.- Mathematical structure of the theories of viscoelasticity, Paris: Herman and C., 1953.
17. Beran M. J.- Statistical continuum theories, Interscience Publ., New York 1978.
18. Lewandowski J.- The influence of ageing and fatigue on the acoustic properties of solids, w: Brittle matrix composites, Elsevier Appl. Sci. Publishers, London and New York, str. 215 - 226, 1986.
19. Papadakis E. M.- Ultrasonic attenuation caused by scattering in polycrystalline metals; J. Acous. Soc. Am., 37, 711 - 717, 1965.
20. Radziszewski L., Ranachowski J.- Porowatość i moduły sprężystości spieków metalicznych wyznaczone metodą rezonansową, Prace IPPT, Warszawa 38/1985.
21. Radziszewski L., Ranachowski J.- Badanie parametrów propagacji fal ultradźwiękowych i modułów sprężystości w spiekanych proszkach miedzi, Prace IPPT, Warszawa 34/1986.

22. Simmons G.- Single crystal elastic constants and calculated aggregate properties, J. Grad. Res. Cent., 34, 1-269, 1965.
23. Ying C.F., Truell R.- Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, J. Appl. Phys., 27, 1086-1097, 1956.
24. Berryman J.G.- Theory of elastic properties of composite materials, Appl. Phys. Lett. 35 (11), 856-858, 1979.
25. Hill R.- A self-consistent mechanics of composite materials, J. Mech. Phys. Solids, 13, 213-221, 1965.
26. Budiansky B.- On the elastic moduli of some heterogeneous materials, J. Mech. Phys. Solids, 13, 223-227, 1965.
27. Kinra V.K., Petraitis M.S., Datta S.K.- Ultrasonic wave propagation in a random particulate composite, Int. J. Solids Structures, 16, 301-312, 1976.
28. Datta S.K.- A self-consistent approach to multiple scattering by elastic ellipsoidal inclusions, J. Appl. Mech., 44, 657-662, 1977.
29. Hashin Z., Shtrikman S.- A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials, J. Mech. Phys. Solids, 11 127-140, 1963.
30. Walpole L.J.- On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems, J. Mech. Phys. Solids, 14, 151-152, 1966.
31. Kreher W., Ranachowski J., Rejmund F.- Ultrasonic waves in porous ceramics with non-spherical holes, Ultrasonics, 15, 70-74, 1977.
32. Eshelby J.D.- The determination of the elastic field of an inclusion, and related problems, Proc. R. Soc. London, A 241, 376-396, 1957.
33. Wu T.T.- The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material, Int. J. Solids Structures, 2, 1-8, 1966.

34. Budiansky B., O'Connell R.J.- Elastic moduli of a cracked solid, *Int. J. Solids Structures*, 12, 81-97, 1976.
35. Jaynes E.T.- Information theory and statistical mechanics, *Phys. Rev.*, 106, 620-630, 1957.
36. Debye P., Bueche A.M.- Scattering by an inhomogeneous solid, *J. Appl. Phys.*, 20, 6, 518-525, 1949.
37. Malecki I.- Teoria fal i układów akustycznych, PWN, Warszawa, 1964.
38. Dawydow A.S.- Mechanika kwantowa, PWN, Warszawa, 1969, str. 378-381.
39. Chernov L.A.- Wave propagation in a random medium, Dover, New York, 1960.
40. Pekeris C.L.- Note on scattering in an inhomogeneous medium, *Phys. Rev.*, 71, 4, 268, 1947.
41. Mason W.P., Wood W.A.- Fatigue mechanism in fcc metals at ultrasonic frequencies, *J. Appl. Phys.*, 39, 12, 5581-5584, 1968.
42. Hoffelner W., Gudmundson P.- A fracture mechanics analysis of ultrasonic fatigue, *Eng. Fracture Mechanics*, 16, 365-371, 1982.
43. Lewandowski J.- Pole akustyczne w stałych ośrodkach stochastycznych przy założeniu maksymalnej entropii, w: *Elektryczne i akustyczne metody badań dielektryków*, IPPT PAN, str. 197-203, Warszawa-Jabłonna, 1980.
44. Gawda H., Lewandowski J.- Ultrasonic investigation of fibres texture in plants, *Archives of Acoustics*, 9, 1-2, 75-82, 1984.
45. Adamski M., Brokowski A., Deputat J., Lewandowski J.- Evaluation of texture with ultrasonic waves, 11th World Conference on Nondestructive Testing 1985, vol. III, 1600-1606, Taylor Publishing Co., Dallas (USA), 1985.



46. Allen A.J., Hutchings M.T., Sayers D.M., Allen D.R., Smith R.L.- Use of neutro diffraction texture measurements to establish a model for calculation of ultrasonic velocities in highly oriented austenitic weld materal, J. Appl. Phys., 54, 2, 555-560, 1983.
47. Voigt W.- Lehrbuch der Kristall Physik, Teubner, Leipzig, 1928.
48. Alers G.A., Liu Y.C.- Calculation of elastic anisotropy in rolled sheet, Trans. Metal. Soc. AIME, 236, 482-489, 1966.
49. Allen D.R., Sayers C.M.- Neutron scattering studies of textures in mild steel, NDT Int., 263-269, Oct. 1981.
50. Sayers C.M.- Ultrasonic velocities in anisotropic polycrystalline aggregates, J. Phys. D: Appl. Phys., 15, 2157-2167, 1982.
51. Reuss A., Z. Angew. Math. Mech., 9, 49, 1924.
52. Królikowski J., Szczepek J., Witczak Z.- Odbicie fal ultradźwiękowych od powierzchni styku elementów maszyn, Materiały XIV Krajowej Konferencji Badań Nieniszczących. Referaty i komunikaty, 77-80, Kiekrz 1985.10.2-4.
53. Królikowski J., Szczepek J., Witczak Z.- High pressure in ultrasonic study of contact of solids, Physica, 139 and 140B, 803-805, 1986.
54. Gawda H., Haman J.S., An ultrasonic method of determining Young's modulus in cereal plants, Transactions of ASAE, 26, 1, 250-254, 1983.

SPIS TREŚCI	Str
Streszczenie .....	3
Wstęp .....	5
I. EFEKTYWNE PARAMETRY PROPAGACJI FAL ULTRADŹWIĘKOWYCH I PARAMETRY MATERIAŁOWE A STRUKTURA OŚRODKA .....	8
1. Model wieloskładnikowych materiałów liniowo lepko- sprężystych i sprężystych .....	8
1.1. Wprowadzenie .....	8
1.2. Model ośrodka niejednorodnego I .....	8
1.3. Akustyczne równania ruchu jednorodnego ośrodka jednoskładnikowego .....	10
1.4. Akustyczne równania ruchu ośrodka niejednorodnego..	13
1.4.1. Równania podstawowe .....	13
1.4.2. Lokalna fluktuacja pola przemieszczeń .....	16
1.5. Efektywne parametry materiałowe i akustyczne .....	22
1.5.1. Drgania swobodne .....	22
1.5.2. Drgania wymuszone .....	25
2. Materiały porowate z matrycą sprężystą .....	29
2.1. Wprowadzenie .....	29
2.2. Dynamiczne efektywne moduły sztywności ciała porowatego .....	30
2.3. Wyznaczanie modułów dynamicznych ciała porowatego z pomiarów ultradźwiękowych .....	32
2.4. Obliczanie modułów dynamicznych ciała porowatego o znanej strukturze .....	33
2.4.1. Fale podłużne .....	33
2.4.2. Fale podłużne i poprzeczne .....	46
2.4.3. Pustki elipsoidalne .....	49
2.5. Gęstość energii fali ultradźwiękowej w ciele porowatym .....	51

II. WYZNACZANIE NIEKTÓRYCH CECH STRUKTURY MATERIAŁU NIE- JEDNORODNEGO NA PODSTAWIE POMIARÓW MAKROSKOPOWYCH PARAMETRÓW AKUSTYCZNYCH .....	63
3. Funkcje korelacyjne niejednorodności struktury materiału .....	63
3.1. Wprowadzenie .....	63
3.2. Założenia podstawowe .....	63
3.3. Rozkład kątowy pola skalarnego fal rozproszonych ..	66
3.4. Rozkład kątowy intensywności fali akustycznej roz- proszonej w nielepkiej emulsji .....	69
4. Opis statystyczny struktury materiału i pola przemiesz- czeń fali ultradźwiękowej .....	73
4.1. Wprowadzenie .....	73
4.2. Statystyczna charakterystyka mikrostruktury i pola przemieszczeń .....	74
5. Tekstura materiałów polikrystalicznych .....	80
5.1. Wprowadzenie .....	80
5.2. Ocena tekstury na podstawie pomiarów efektywnego modułu Younga .....	81
5.3. Ocena tekstury na podstawie pomiarów prędkości propagacji fal ultradźwiękowych .....	86
UWAGI I WNIOŚKI KOŃCOWE .....	97
Literatura .....	102

