

PRACE IPPT • IFTR REPORTS

Witold Kosiński

RÓWNANIA EWOLUCJI
CIAŁ DYSSYPATYWNYCH

36/1983

PRACA HABILITACYJNA



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

- 7.72 — Globalny opis ciał.
7.76 — Zagadnienia dynamiczne powierzchni osobliwości. Problemy początkowe.
7.77 — Termodynamika ciał odkształcalnych.

Witold Kosiński

RÓWNANIA EWOLUCJI
CIAŁ DYSSYPATYWNYCH

36/1983

PRACA HABILITACYJNA

WARSZAWA 1983

ISSN 0208-5658

P r a c a h a b i l i t a c y j n a

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 czerwca 1983 r.

57001



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 190 egz. Ark.wyd. 8 . Ark. druk. 12 .

Oddano do drukarni w sierpniu 1983 r.

Nr zamówienia 579/83 M-10 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Witold Kosiński
Sam. Pracownia
Teorii Materiałów
Niesprężystych

RÓWNANIA EWOLUCJI CIAŁ DYSSIPATYWNYCH

W licznych procesach technologicznych przekraczane są kilkakrotnie dopuszczalne wartości odkształceń zakresu sprężystego w wyniku czego poddawane obróbce materiały ulegają dużym deformacjom plastycznym. Proces zaawansowanego płynięcia ma kilka faz: wstępną, pośrednią i pokrytyczną. W fazie wstępnej stan odkształcenia jest względnie jednorodny. Faza pośrednia to początek lokalizacji odkształceń niesprężystych i osiąganie stanów utraty stateczności charakteryzujących się nierównomiernym rozkładem gradientu odkształcenia. W końcu następuje trzecia faza, której rozwój często prowadzi do zniszczenia próbki.

Ten szkicowy tylko opis zjawiska płynięcia plastycznego jasno prezentuje potrzebę globalnego spojrzenia na ciała odkształcalne, gdyż opis lokalny, w którym przyjmuje się, że ciało składa się z identycznych kopii tego samego materiału, nie jest wystarczający.

Jednocześnie jest interesujące, że dużym odkształceniom quasi-statycznym na równi z odkształceniami dynamicznymi towarzyszą różne osobliwości: od nieciągłości gradientów, odkształceń i prędkości na pewnych zbiorach, takich jak powierzchnie wirów czy linie poślizgu, po zjawiska nieciągłości w rozkładzie masy, charakterystyczne dla fal uderzeniowych.

Obok powyżej omawianych istnieją również i przypadki procesów technologicznych, w których mają miejsca przemiany fazowe bądź oddziaływanie na granicy dwóch faz, takie na przykład jak adsorpcja (por. Ościk [1979]). Tu aparat globalny uwzględniający efekty powierzchniowe (ogólniej-osobliwości powierzchniowe) okazuje się nie tylko pomocny ale wręcz niezbędny.

Niniejsza praca wychodzi na przeciw temu zapotrzebowaniu.

Jej celem jest ujęcie globalne uniwersalnych praw fizyki kontinuum oraz praw rządzących materiałem konkretnego ciała odkształcalnego.

Istniejące niespełne, wewnętrznie niespójne teorie, oraz wiele nieuzasadnionych postulatów mechaniki racjonalnej sprawiły, że w prezentowanym ujęciu stojąc na gruncie mechaniki Newtona, przeprowadzono dość dokładną analizę warunków niezmienniczości zarówno opisu samych zdarzeń jak i procesów w czasoprzestrzeni zdarzeń, którym podlegają ciała odkształcalne. To jest w zasadzie zawartość wstępnej części rozdziału pierwszego.

Zasadnicza część rozdziału pierwszego zawiera wyprowadzenie równań bilansu z globalnych praw bilansu przy dopuszczeniu, że w trakcie ruchu występuje powierzchnia osobliwości. W ogólności wspomniana powierzchnia charakteryzuje się koncentracją masy, energii powierzchniowej i potencjalnymi nieciągłościami pól fizycznych opisujących otaczający ją ośrodek. W szczególności materiał powierzchni może mieć odmienne własności od materiału ośrodka.

Podane w tym rozdziale przykłady przybliżają zasygnalizowany wyżej rodzaj osobliwości uwzględniany przy wyprowadzeniach.

Rozdział drugi zajmuje centralne miejsce ze względu na aspekt modelowania konstytutywnego, do którego w pracy przywiązuje się dużo uwagi. W rozdziale tym przedstawiono oryginalną koncepcję modelowania konstytutywnego. Wyprowadzono ogólną postać równania ewolucji w przestrzeni globalnych stanów ciała odkształcalnego. Istniejące w literaturze przykłady równań ewolucji wskazują na uniwersalność uzyskanego rezultatu. Dyskusja metody wyprowadzenia oraz samej postaci równania przeprowadzona w końcowej części tego rozdziału zawiera ponadto charakterystykę niedoskonałości modelowania konstytutywnego. Sformułowana w tym rozdziale hipoteza nierozróżnialności przestrzeni stanów rzuca nowe światło na kwestię niejednoznaczności modelowania i rozwiązania problemów początkowo-brzegowych.

Te oba rozdziały przynoszą wyprowadzenie jednego "wektorowego" równania ewolucji dla ciała, na którego składowe przypadają równania uniwersalne tj. równania bilansu, oraz równania szczegółowe, tzn. odnoszące się do konstytucji ciała, do jego materiału.

Istniejące już w literaturze ogólne podejścia do równań bilansu z efektami powierzchniowymi i dodatkową produkcją wewnątrz ciała (por. Edelen [1976], Seriven [1960], Slattery [1967], Moschel [1974], Kosiński^{x/} [1981]) nie prezentowały niezbędnego w takim

x/ Por. literaturę tam cytowaną.

przypadku jednolitego spojrzenia na zespół równań uniwersalnych oraz szczególnych-materialnych. Szczególnie ważnym elementem takiego podejścia jest analiza warunków niezmienniczości, jakim powinien podlegać końcowy układ równań. Warunki te można osiągnąć poprzez dokładną analizę struktury czasoprzestrzeni, w której całe ciało, a nie tylko jego elementy-cząstki jest badane. We wspomnianych powyżej pozycjach bibliografii brakowało tej analizy.

Czasoprzestrzeń ze swojej strony jest obiektem wyposażonym w swoje automorfizmy a zatem opis własności materialnych ciała oraz obiekty geometryczne i dynamiczne użyte do tego celu nie mogą być od tych automorfizmów zależne. Stąd szczegółowo przedstawiono miary i wielkości niezmiennicze takie jak deformację, naprężenie, wektor strumienia ciepła, związane z samym ciałem a nie czasoprzestrzenią.

W literaturze przedmiotu trudno odszukać te partie materiału może z wyjątkiem wykładów Nolla [1973]. Autorowi przyświecał tam jednak inny cel, a był nim opis lokalny.

Prezentowane konsekwentne globalne ujęcie rozwijanej teorii pozwoliło na znaczne zmniejszenie liczby założeń, jakie zazwyczaj towarzyszą teoriom w podejściu lokalnym. W szczególności niezależność budowanych obiektów i równań od układów odniesienia powiązanych transformacjami Galileusza czy konieczna reprezentacja całkowa w przestrzeni fizycznej mier określonych na cieleto konsekwencja struktury czasoprzestrzeni i jej automorfizmów.

Kwestia modelowania konstytutywnego została zainicjowana i już w części rozwiązana w grupie prac z mechaniki racjonalnej. Prezentowane tutaj wyniki są naturalnym poszerzeniem pracy Perzyny i Kosińskiego [1973]. Rozwój badań na tym polu nie był - by możliwy bez istniejącej literatury oraz częściowych wyników już publikowanych por. Kosiński [1976, 1981, 1983, 1983], Frischmuth i Kosiński [1982].

Dwa ostatnie rozdziały są rozwinięciem poprzednich rozważań, ponieważ przedstawiają kwestie istnienia, jednoznaczności oraz ciągłej zależności rozwiązań pewnych realizacji wyprowadzonych uprzednio równań od danych początkowych.

Rozdział trzeci zawiera dowód poprawności problemu początkowego równań termo-niesprężystości z wewnętrznymi zmiennymi stanu.

W rozdziale czwartym nawiązano jeszcze raz do termodynamiki, aby sformułować ogólne twierdzenie o stabilności rozwiązań klasycznych w klasie rozwiązań słabych z przestrzeni BV dla układów, zapisywanych w postaci równań bilansu. Uzyskane tu rezultaty wskazują, że drugie prawo termodynamiki może służyć nie tylko jako kryterium potencjalności związków konstytutywnych lecz także jako kryterium dopuszczalności i stabilności rozwiązań słabych.

Rozwiązania słabe i efekty nielokalne stanowią klucz do lokalnej postaci nierówności produkcji entropii. Uwzględnienie, na przykład efektów nielokalnych oznacza potrzebę odejścia od ogólnie stosowanej nierówności Clausiusa-Duhema dla podciał na rzecz ogólniejszej, przez dopuszczenie istnienia dodatkowego strumienia entropii wewnątrz ciała. Uzyskane w p. 9,5 na tej drodze prawo lokalne dla podciał przyjmuje odmienną postać od prawa obowiązującego dla całego ciała.

Jeśli natomiast dopuści się do rozważań rozwiązania słabe, nieklasyczne, to konieczne jest, jak wykazano w p. 9.5 i 20, uwzględnienie osobliwości w postaci dodatkowej powierzchniowej produkcji entropii.

Wnioski te stają się jasne i są możliwe do uzyskania dzięki globalnemu sformułowaniu konsekwentnie prowadzonemu w niniejszej pracy.

I. Ciało odkształcalne i jego ruch

Dla ustalenia podstawowych pojęć i założeń wprowadzimy w tym rozdziale niezbędne definicje i aksjomaty odkształcalnego ośrodka ciągłego.

1. Ośrodek ciągły

Jeśli \mathcal{E} jest przestrzenią euklidesową, okreśmy klasę BLP bijekcji między otwartymi podzbiórami przestrzeni \mathcal{E} jako

$$\text{BLP} := \left\{ f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}, \mathcal{A} \text{ Dom } f \text{ jest otwarte w } \mathcal{E} \text{ oraz } f \text{ jest bilipschitzowskie i jacobian } \Delta(f) \text{ jest dodatni tam gdzie istnieje na } \mathcal{A}. \right\}$$

Przypomnijmy, że odwzorowanie $f: \mathcal{A} \rightarrow Y$ między przestrzeniami metrycznymi $(\mathcal{A}, \rho_{\mathcal{A}})$ i (Y, ρ_Y) jest bilipschitzowskie, jeśli jest bijektywne $\mathcal{A} \rightarrow f(\mathcal{A})$ oraz f i f^{-1} spełniają warunek Lipschitza, tzn. istnieją dwie dodatnie stałe $\text{Lip}(f)$ i $\text{Lip}(f^{-1})$ takie, że

$$\rho_{\mathcal{A}}(a, b) \leq \text{Lip}(f^{-1}) \rho_Y(f(a), f(b)) \leq \text{Lip}(f^{-1}) \text{Lip}(f) \rho_{\mathcal{A}}(a, b)$$

dla każdego $a, b \in \mathcal{A}$, gdzie określenie stałych odbywa się zgodnie z zależnością

$$\text{Lip}(f) := \sup \left\{ \rho_Y(f(a), f(b)) \left(\rho_{\mathcal{A}}(a, b) \right)^{-1} : a, b \in \mathcal{A}, a \neq b \right\}.$$

Jako pojęcie niezbędne dla wprowadzenia terminu konfiguracji wyszczególnijmy w BLP klasę wszystkich bijekcji izometrycznych BI. Na koniec przed wprowadzeniem pierwszej definicji przyjmijmy określenie: dwa odwzorowania $\alpha: \mathcal{B} \rightarrow \alpha(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$ i $\gamma: \mathcal{B} \rightarrow \gamma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$ są homotopijne w klasie BLP jeśli istnieją: bijekcja $h: \mathcal{B} \rightarrow h(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$ oraz ciągłe odwzorowanie $H: [0, 1] \times h(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}$, takie, że

$$H(0, \cdot) = \alpha \circ h^{-1}, \quad H(1, \cdot) = \gamma \circ h^{-1} \quad \text{i} \quad H(s, \cdot) \in \text{BLP}$$

dla każdego $s \in [0, 1]$. Podwójna strzałka \rightsquigarrow oznacza bijektywność odwzorowania.

DEFINICJA 1. Ośrodek ciągły (ciało) jest to niepusty zbiór \mathcal{B} , elementy którego nazywamy cząstkami, wyposażony w 1° strukturę przestrzeni mierzalnej z miarą M zdefiniowaną na \mathcal{C} -algebrze podzbiorów zbioru \mathcal{B} i \mathcal{C} -skończoną, 2° strukturę rozmaitości Lipschitzowskiej zdefiniowaną przez niepustą rodzinę odwzorowań \mathcal{C} , elementy której nazywamy umiejęcownianiami, spełniająca następujące warunki:

a/ każde $\alpha \in \mathcal{C}$ jest bijekcją \mathcal{B} na pewien podzbiór otwarty przestrzeni euklidesowej \mathcal{E} (trójwymiarowej w ogólnym przypadku);

b/ jeśli zdefiniujemy zbiór przemieszczeń jako

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} := \{ \lambda = \alpha \circ \gamma^{-1} ; \gamma \in \mathcal{C}, \alpha \in \mathcal{C} \},$$

to

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{C}} \subset \text{BLP};$$

c/ jeśli $\lambda \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ oraz $\alpha \in \mathcal{C}$, przy $\text{Dom } \lambda = \alpha(\mathcal{B}) =: \text{Rng } \lambda$, to $\lambda \circ \alpha \in \mathcal{C}$,

tzn:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{C} \subset \mathcal{C};$$

d/ każde dwa elementy rodziny \mathcal{C} są homotopijne w klasie $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} \subset \text{BLP}$. \square

Zauważmy, że z warunku b/ wynika, iż każde przemieszczenie $\lambda \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ wraz ze swoim odwzorowaniem odwrotnym λ^{-1} jest homeomorfizmem spełniającym warunek Lipschitza, a więc na podstawie twierdzenia Rademachera [1919] odwzorowaniem prawie wszędzie różniczkowalnym. Z kolei z twierdzenia Kirszbrauna [1934] wnosimy, że każde $\lambda \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ posiada ciągle rozszerzenie na całą przestrzeń \mathcal{E} zachowujące stałą Lipschitza $\text{Lip}(\lambda)$.

Powiemy, że ośrodek ciągły \mathcal{B} jest odkształcalny, gdy

$$\mathcal{B} \not\subset \mathcal{H}_{\mathcal{C}},$$

czyli w klasie $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ istnieje co najmniej jedno odwzorowanie bilipschitzowskie nieizometryczne. Skoro wraz z λ każdym przemieszczeniem do $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ należy odwzorowanie odwrotne λ^{-1} , więc klasa $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ ośrodka odkształcalnego zawsze zawiera co naj-

mniej dwa odwzorowania nieizometryczne.

Zauważmy, że punkty b/ i c/ pozwalają sformułować warunek d/ następująco: dla każdego dwóch elementów $\alpha, \delta \in \mathcal{C}$ istnieje odwzorowanie ciągłe $H: [0, 1] \times \mathcal{X}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}$ takie, że

$$H(0, \cdot) = id_{\mathcal{X}(\mathcal{B})}, H(1, \cdot) = \delta \circ \alpha^{-1} \text{ oraz } H(s, \cdot) \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}} \subset \text{BLP},$$

dla każdego $s \in [0, 1]$. Dzięki temu sformułowaniu staje się jasne, że w przypadku ośrodka odkształcalnego do klasy $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ należy kontinuum odwzorowań nieizometrycznych.

Powiemy, że dwa umiejscowienia $\alpha, \delta \in \mathcal{C}$ wyznaczają tę samą konfigurację, jeśli $d_{\alpha} = d_{\delta}$, gdzie dla dowolnego $\chi \in \mathcal{C}$ definiujemy metrykę $d_{\chi}: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$ wzorem

$$(1.1) \quad d_{\chi}(X, Y) := d \langle \chi(X), \chi(Y) \rangle_{\mathcal{E}}$$

dla każdego $X, Y \in \mathcal{B}$. Tutaj $d \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$ oznacza metrykę w przestrzeni euklidesowej \mathcal{E} .

Jest rzeczą elementarną sprawdzić, że w ten sposób określa się relację równoważności w zbiorze \mathcal{C} i przez \mathcal{K} oznaczmy zbiór klas abstrakcji tej relacji, tj. zbiór konfiguracji. Zamiennie możemy posługiwać się wtedy przyporządkowaniem

$$\mathcal{K} := \{d_{\alpha} : \alpha \in \mathcal{C}\}.$$

W zbiorze konfiguracji wprowadzamy funkcję odległości $d_{\mathcal{K}}$ wzorem

$$d_{\mathcal{K}}(d_{\alpha}, d_{\delta}) := \ln \max \left\{ \sup \frac{d_{\alpha}(X, Y)}{d_{\delta}(X, Y)}, \sup \frac{d_{\delta}(X, Y)}{d_{\alpha}(X, Y)} : X \neq Y \right\}$$

Sprawdzenie, że $d_{\mathcal{K}}$ spełnia aksjomaty metryki jest nieskomplikowane, pomocne przy tym jest następujące spostrzeżenie

$$d_{\mathcal{K}}(d_{\delta}, d_{\alpha}) = \ln \max \{ \text{Lip}(\delta \circ \alpha^{-1}), \text{Lip}(\alpha \circ \delta^{-1}) \},$$

gdzie $\text{Lip}(\alpha \circ \delta^{-1})$ oznacza stałą Lipschitza przemieszczenia $\alpha \circ \delta^{-1}$.

Natomiast w zbiorze umiejscowień \mathcal{C} wprowadzamy naturalną metrykę sup zgodnie z zależnością

$$d_{\mathcal{C}}(\alpha, \delta) := \sup \{ d \langle \alpha(X), \delta(X) \rangle : X \in \mathcal{B} \}.$$

Przyjmijmy podstawowe dla dalszej części określenia. Niech $\tau > 0$ wtedy ciągle w sensie Lipschitza odwzorowanie odcinka $[0, \tau] \subset \mathbb{R}^+$ w zbiór \mathcal{C} nazwiemy procesem przemieszczania (lub krótko przemieszczaniem) ciała \mathcal{B} . Funkcją $\rho: [0, \tau] \rightarrow \mathcal{K}$ nazwiemy procesem deformacji ciała \mathcal{B} jeśli istnieje conajmniej jeden proces przemieszczania $\chi: [0, \tau] \rightarrow \mathcal{C}$ będący jego realizacją, czyli $\rho(s) = d\chi(s)$ dla $s \in [0, \tau]$.

Pytaniem o dużym znaczeniu jest możliwość wyznaczenia procesu przemieszczania z posiadanego procesu deformacji. Drugą kwestią jest sposób opisu ruchu ciała odkształcalnego. Ale samo pojęcie ruchu wymaga wprowadzenia punktu (ciała), czy nawet układu odniesienia względem, którego jest obserwowana zmiana położenia ciała \mathcal{B} .

2. Czasoprzestrzeń

Dla przygotowania odpowiedzi na kwestie wyżej poruszone przypomnijmy następujący rezultat, którego dowód można znaleźć w wielu publikacjach (por. np. Noll [1973]).

LEMAT 1. Jeśli $\lambda: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ jest izometrią (izomorfizmem euklidesowym) z przestrzeni euklidesowej \mathcal{E}' na przestrzeń euklidesową \mathcal{E}'' , to istnieje izomorfizm $\lambda_*: \mathcal{T}(\mathcal{E}') \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E}'')$ między odpowiadającymi przestrzeniami stycznymi (translacyjnymi) $\mathcal{T}(\mathcal{E}')$ oraz $\mathcal{T}(\mathcal{E}'')$ taki, że

$$\lambda(x) - \lambda(y) = \lambda_*(x - y)$$

dla każdego $x, y \in \mathcal{E}'$. Tutaj minus po lewej stronie oznacza działanie w \mathcal{E}' , zaś po prawej stronie - działanie w \mathcal{E}'' . \square

W przypadku $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$ zbiór izomorfizmów przestrzeni stycznej oznaczmy przez $\text{Orth}(\mathcal{T}(\mathcal{E}'))$, zaś $\text{Orth}^+(\mathcal{T}(\mathcal{E}'))$ oznacza właściwe (tj. o dodatnich wyznacznikach) automorfizmy przestrzeni stycznej.

Przystępując do wprowadzenia pojęcia ruchu, jego prędkości i przyspieszenia, trzeba zatrzymać się swoją uwagę na terminach: czas i równoczesność zdarzeń oraz względność ruchu.

W rozwijanej nierelatywistycznym opisie zjawisk korzystamy z czasoprzestrzeni Galileusza W .

Różne są metody opisu czasoprzestrzeni zdarzeń. Jedną z nich przedstawioną przez Nolla [1973] bazuje na koncepcji funkcji upływu czasu $\hat{t}: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ z góry zadanych własnościach. Równoczesność zdarzeń jest relacją wprowadzoną przepisem: $e \in W$ jest równoczesne z $f \in W$ jeśli $\hat{t}(e, f) = 0$. Klasy abstrakcji tej relacji są nazywane chwilami, a ich zbiór Γ okazuje się być przestrzenią euklidesową, której przestrzeń styczna jest utożsamiana z osią rzeczywistą \mathbb{R} .

Omińmy dalszy opis koncepcji Nolla neoklasycznej czasoprzestrzeni i sformułujemy w języku wiązek pojęcie

czasoprzestrzeni W . W licznych opracowaniach tego typu ujęcie jest często spotykane (por. np. Woźniak [1974]).

DEFINICJA 2. Niepusty zbiór W nazwiemy czasoprzestrzenią (Newtona) jeśli istnieje wiązka włóknista $x/\{W, \Gamma, \mathcal{E}, \hat{c}_h, RF, \mathcal{J}\}$ o następujących własnościach: a/ baza Γ jest jednowymiarową przestrzenią euklidesową, b/ poszczególne włókna $\hat{c}_h^{-1}(\tau), \tau \in \Gamma$ są zbiorami izomorficznymi z typowym włóknem \mathcal{E} , które jest trójwymiarową przestrzenią euklidesową, c/ elementy (odwzorowania z) atlasu wiązki RF zachowują strukturę poszczególnych włókien a ich odpowiednie kompozycje są gładkimi funkcjami z \mathcal{J} do \mathcal{E} , d/ grupa wiązki \mathcal{J} działa efektywnie w \mathcal{E} i \mathcal{J}_* jest podgrupą grupy $xx/ \text{Orth}^+(\mathcal{J}(\mathcal{E}))$. \square

Rzut wiązki $\hat{c}_h: W \rightarrow \Gamma$ wyznacza relację równoczesności a jej klasy, będące włóknami nazywać będziemy zbiorami zdarzeń równoczesnych. Z definicji atlasu każda mapa

$$RF \ni \beta: \Gamma_\beta \times \mathcal{E} \rightarrow \hat{c}_h^{-1}(\Gamma_\beta) \text{ dla pewnego } \Gamma_\beta \subset \Gamma$$

ma własność:

$$\hat{c}_h(\beta(\tau, x)) = \tau \text{ dla każdego } (\tau, x) \in \Gamma_\beta \times \mathcal{E}.$$

x/ wiązka współrzędnościowa, wg Steenroda [1951].

xx/ Przez \mathcal{J}_* oznaczyliśmy podgrupę odwzorowań unitarnych przestrzeni stycznej (translacyjnej) $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ generowanych przez elementy z \mathcal{J} .

Ponadto zbiory Γ_β pokrywają całą bazę, tzn. $\bigcup\{\Gamma_\beta: \beta \in RF\} = \Gamma$.
Bez straty ogólności będziemy przyjmować, że każde Γ_β jest przedziałem, tzn. (lukowo)spójnym podzbiorem zbioru chwil Γ .

Warunek b/ oznacza, że wybierając dowolne $\beta \in RF$ dla każdego $\tau \in \Gamma_\beta$ odwzorowanie $\beta_\tau := \beta|_{\tau}$ wyznacza naturalny izomorfizm poszczególnego włókna z \mathcal{E} . Struktura euklidesowa we włóknie $\hat{c}h^{-1}(\tau)$ jest wtedy zgodna z definicją metryki

$$d\langle e, f \rangle_{\beta_\tau} := d\langle \beta_\tau^{-1}(e), \beta_\tau^{-1}(f) \rangle_{\mathcal{E}} \text{ dla każdego } e, f \in \hat{c}h^{-1}(\tau).$$

Warunek c/ oznacza, że lewa strona nie zależy od konkretnej mapy β , a jedynie od chwili τ , tzn. zdarzenia równoczesne i tylko takie mają jednoznacznie wyznaczoną metrykę; dla włókna $\hat{c}h^{-1}(\tau)$ metrykę będziemy oznaczać przez $d\langle \cdot, \cdot \rangle_\tau$.
Metryki na poszczególnych włóknach przez złączenie ich dziedzin pozwalają na wprowadzenie jednej funkcji odległości $\{d\langle \cdot, \cdot \rangle_\tau: \tau \in \Gamma\}$
=: \hat{d} jako

$$\hat{d}: \bigcup\{\hat{c}h^{-1}(\tau) \times \hat{c}h^{-1}(\tau): \tau \in \Gamma\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ poprzez } \hat{d}(e, f) := d\langle e, f \rangle_\tau$$

jeśli $\hat{c}h(e) = \hat{c}h(f) = \tau$.

Obok funkcji \hat{d} , która jest zdefiniowana tylko na parach zdarzeń równoczesnych, naturalnie, tj. zgodnie ze strukturą wiązki, zdefiniowana jest funkcja upływu czasu

$$\hat{t}: W \times W \rightarrow \mathbb{R} \text{ poprzez } \hat{t}(e, f) := \hat{c}h(e) - \hat{c}h(f) \in \mathbb{R}$$

dla dowolnych $e, f \in W$, gdzie minus oznacza działanie w przestrzeni afinicznej Γ .

Powyżej wprowadzone funkcje \hat{d} oraz \hat{t} charakteryzują strukturę czasoprzestrzeni zdarzeń W . Dowolna bijekcja $\hat{a}: W \rightarrow W$ będzie nazwana automorfizmem czasoprzestrzeni W , jeśli zachowuje relację równoczesności, odległość między zdarzeniami oraz upływ czasu, tzn. o ile spełnia warunki

- i) jeśli $\hat{c}h(e) = \hat{c}h(f)$, to $\hat{c}h(\hat{a}(e)) = \hat{c}h(\hat{a}(f))$,
 - ii) $\hat{d}(\hat{a}(e), \hat{a}(f)) = \hat{d}(e, f)$, dla każdych $e, f \in W$.
- takich, że $\hat{c}h(e) = \hat{c}h(f)$,

$$iii) \hat{t}(\hat{a}(e), \hat{a}(g)) = \hat{t}(e, g) \quad \text{dla ka\u017cydzi\u0119 } e, g \in W.$$

Wykorzystuj\u0105c lemat 1 o reprezentacji izomorfizm\u00f3w przestrzeni euklidesowych formu\u0142ujemy (por. Noll [1973]).

SPOSTRZE\u017cENIE 1. Z ka\u017cdym automorfizmem $\hat{a}: W \rightarrow W$ czaso-przestrzeni W s\u0105 jednoznacznie zwi\u0105zane: a/ liczba $t_a \in \mathbb{R}$ b/ dla ka\u017cdego $\tau \in \Gamma$, jeden izomorfizm przestrzeni stycznych

$$\hat{a}_{\tau*}: \mathcal{T}(\hat{c}h^{-1}(\tau)) \rightarrow \mathcal{T}(\hat{c}h^{-1}(\tau + t_a)) \text{ taki, \u017ce}$$

$$\hat{a}(e) \in \hat{c}h^{-1}(\tau + t_a) \text{ je\u015bli } e \in \hat{c}h^{-1}(\tau) \text{ oraz } \hat{a}(e) - \hat{a}(f) = \hat{a}_{\tau*}(e - f),$$

je\u015bli $\hat{c}h(e) = \hat{c}h(f) = \tau$, gdzie plus oznacza translacj\u0119 w przestrzeni Γ , za\u015b minus po prawej stronie dzia\u0142anie w przestrzeni

$\mathcal{T}(\hat{c}h^{-1}(\tau))$; r\u00f3nica $e - f$ jest elementem przestrzeni stycznej $\mathcal{T}(\hat{c}h^{-1}(\tau))$. \square

Przechodz\u0105c do szczeg\u00f3\u0142owej charakterystyki element\u00f3w atlasu RF i wprowadzenia podstawowego pojecia kinematyki wybierzmy dwa dowolne punkty x, y przestrzeni \mathcal{E} , map\u0119 $\beta \in RF$ i rozpatrzmy odleg\u0142o\u015b\u0107 \hat{d} mi\u0119dzy elementami ich linii \u015bwiat\u0105 t.j. zbiorami zdarze\u0144 $\{\beta(\tau, x): \tau \in \Gamma_\beta\}$ i $\{\beta(\tau, y): \tau \in \Gamma_\beta\}$ w mapie β . Zgodnie z definicj\u0105 otrzymamy

$$(2.1) \quad d \langle \beta(\tau, x), \beta(\tau, y) \rangle_\tau = d \langle x, y \rangle_{\mathcal{E}}$$

dla ka\u017cdzej chwili $\tau \in \Gamma_\beta$. To oznacza, \u017ce linia \u015bwiat\u0105 punktu x w mapie β jest "r\u00f3wnole\u017c\u0105" do linii \u015bwiat\u0105 punktu y , w tej samej mapie, przy czym ich wzajemna odleg\u0142o\u015b\u0107 \hat{d} w czasoprzestrzeni W jest r\u00f3wna odleg\u0142o\u015bci punktu x od punktu y w przestrzeni fizycznej \mathcal{E} . W\u0142asno\u015b\u0107 ta jest niezale\u017cna od wyboru mapy $\beta \in RF$. Skoro cia\u0142a odkszta\u0142calne "s\u0105 postrzegane" w przestrzeni fizycznej \mathcal{E} , nad kt\u00f3r\u0105 zbudowaliśmy czasoprzestrze\u0144 zdarze\u0144 W , to m\u00f3wi\u0105c niezbyt \u015bci\u015ble, elementy atlasu RF wyznaczaj\u0105 klas\u0119 kinematycznych proces\u00f3w (cia\u0142) sztywnych, t.j. klas\u0119 proces\u00f3w odniesienia dla opisu ruch\u00f3w cia\u0142 odkszta\u0142calnych. St\u0105d te\u017c jasnym si\u0119 wydaje nazwanie dowolnej pary $\{\mathcal{E}, \beta\}$, gdzie $\beta \in RF$, uk\u0142adem odniesienia, Rola

układów odniesienia będzie widoczna w trakcie badania ruchów ciał odkształcalnych.

Zatrzymajmy się na koniec nad charakterystyką czasoprzestrzeni, którą wprowadza grupa \mathcal{J}_x oraz postać automorfizmów przestrzeni fizycznej \mathcal{E} .

Niech β_1, β_2 będą dwoma mapami z RF : dla każdego $\tau \in \Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2}$ funkcje (bijekcje) $\beta_{1\tau} := \beta_1(\tau, \cdot)$ oraz $\beta_{2\tau} := \beta_2(\tau, \cdot)$ są dobrze określone, a odwzorowanie $\beta_{1\tau}^{-1} \circ \beta_{2\tau} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ na mocy warunku c/ Definicji jest automorfizmem przestrzeni \mathcal{E} jednoznacznie wyznaczonym przez element grupy \mathcal{J} . Oznaczmy to przyporządkowanie przez $g_{\beta_1, \beta_2} : \Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2} \rightarrow \mathcal{J}$, a odpowiadające mu przyporządkowanie do przestrzeni stycznej przez

$$g_{\beta_1, \beta_2, x} : \Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2} \rightarrow \mathcal{J}_x.$$

Korzystając z Lematu 1 mamy

$$(2.2) \quad (\beta_{1\tau}^{-1} \circ \beta_{2\tau})(x) - (\beta_{1\tau}^{-1} \circ \beta_{2\tau})(y) = g_{\beta_1, \beta_2, x}(\tau)(x - y)$$

dla każdych $x, y \in \mathcal{E}$, gdzie zgodnie z przyjętymi oznaczeniami możemy napisać $(\beta_{1\tau}^{-1} \circ \beta_{2\tau})(x) = g_{\beta_1, \beta_2}(\tau)x$. Wybierając całkiem dowolnie punkt $q \in \mathcal{E}$, powyższą reprezentację doprowadzamy do postaci

$$(2.3) \quad g_{\beta_1, \beta_2}(\tau)x = c_{\beta_1, \beta_2}(\tau) + g_{\beta_1, \beta_2, x}(\tau)(x - q), \text{ gdzie } c_{\beta_1, \beta_2}(\tau) = \beta_{1\tau}^{-1} \circ \beta_{2\tau}(q),$$

dla każdego $x \in \mathcal{E}$ oraz $\tau \in \Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2}$. Warunek gładkości, o którym mowa w Definicji 2 punkt c/, należy ściślej sformułować, wprowadzając w zbiorze \mathcal{J} metrykę sup w naturalny sposób

$$d_{\mathcal{J}}(a, b) := \sup \{ d \langle a(x), b(x) \rangle : x \in \mathcal{E} \} \text{ dla każdej pary } a, b \in \mathcal{J}.$$

Wtedy gładkość funkcji $g_{\beta_1, \beta_2}, g_{\beta_1, \beta_2, x}$ oraz c_{β_1, β_2} określonych na $\Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2}$ oznacza ich ciągłość w sensie Lipschitza, co najmniej, oraz dwukrotną różniczkowalność. Możliwe też jest sformułowanie warunków gładkości map w postaci żądania, by dla każdej mapy $\beta \in RF$ funkcja $\Gamma_{\beta} \ni \tau \mapsto d \langle \beta(\tau, x), \beta(\tau, y) \rangle \in R$ była klasy C^2 dla każdych dwóch punktów $x, y \in \mathcal{E}$.

Transformacja euklidesowa między układem odniesienia

$\{ \mathcal{E}, \beta_1 \}$ oraz $\{ \mathcal{E}, \beta_2 \}$ jest scharakteryzowana przez przyporządkowanie $g_{\beta_1, \beta_2} : \Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2} \rightarrow \mathcal{J}$ powyżej określone. Transformacje

Galileusza tworzą szczególną, węższą, klasę transformacji, których charakterystyka jest określona żadaniami

$$(2.4) \quad g_{\beta_1 \beta_2 *}(t) \equiv a_* \in J_* \quad \text{oraz} \quad c_{\beta_1 \beta_2}(t) = q_0 + c_0 \cdot (t - t_0)$$

dla każdego $t \in \Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2}$, gdzie $q_0 \in \mathcal{E}$, $c_0 \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$ oraz $t_0 \in \Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2}$ są ustalonymi elementami.

Szczególna rola transformacji Galileusza wiąże się z pojęciem inercyjnego^{x/} układu odniesienia, które może być wprowadzone, gdy zdefiniujemy ruch ciała oraz wprowadzimy I-szą zasadę dynamiki Newtona.

3. Ruch ośrodka

Przystępujemy do wprowadzenia trzeciej z kolei podstawowej definicji.

DEFINICJA 3. Niech dane będzie ciało odkształcalne \mathcal{B} wraz z rodziną umiejscowień \mathcal{C} oraz przemieszczeń $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$. Jeśli $\Gamma_{\mathcal{X}} \subset \Gamma$ jest przedziałem, to odwzorowanie $\chi: \Gamma_{\mathcal{X}} \times \mathcal{B} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}^{-1}(\Gamma_{\mathcal{X}})$ nazwiemy procesem kinematycznym dla ciała \mathcal{B} , o ile

a/ $\hat{\mathcal{C}}(\chi(t, \mathcal{X})) = t$ dla każdego $t \in \Gamma_{\mathcal{X}}$ oraz $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$,

b/ jeśli dla każdego $t \in \Gamma_{\mathcal{X}}$ określimy odwzorowanie $\chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}^{-1}(t)$ przepisem $\chi_t(\mathcal{X}) = \chi(t, \mathcal{X})$ dla każdego $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, to dla dowolnego układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$ funkcja $\beta_t^{-1} \circ \chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ jest umiejscowieniem z rodziny \mathcal{C} dla każdego $t \in \Gamma_{\mathcal{X}}$,

c/ dla każdego układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$ odwzorowanie $\mu: \Gamma_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{C}$ dane przepisem $\mu(t) = \beta_t^{-1} \circ \chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ jest lokalnie ciągłe w sensie Lipschitza.

Odwzorowanie $\mu: \Gamma_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{C}$ występujące w warunku c/ nazwiemy ruchem ciała \mathcal{B} względem układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$, wyznaczonym przez proces kinematyczny χ . \square

^{x/}Używanego często w podręcznikach terminu "inercjalnego układu" nie znalazłem w słowniku języka polskiego.

Zauważmy, że warunek a/, zapewniając zgodność odwzorowania χ z rozwiłkieniem czasoprzestrzeni, umożliwia w punkcie b/ określenie rodziny odwzorowań $\{\alpha_T: T \in \Gamma_\chi\}$. Wybierając dowolne $X \in \mathcal{B}$, zbiór $\{\alpha_T(X): T \in \Gamma_\chi\}$ nazwiemy linią światła cząstki X w procesie χ . Warunek c/ może być sformułowany słabiej przez żądanie, by dla pewnego układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$ takiego, że $\Gamma_\beta \supset \Gamma_\chi$ odwzorowanie $\mu: \Gamma_\chi \rightarrow \mathcal{C}$ było lokalnie ciągłe w sensie Lipschitza. (Aby definicje procesu ruchu nie były puste należy zażądać by $\Gamma_\beta \supset \Gamma_\chi$.)

Jest oczywisty bezpośredni sposób powiązania każdego ruchu z procesami przemieszczania.

Niech dany będzie jeden proces kinematyczny χ oraz dwa układy odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta_1\}, \{\mathcal{E}, \beta_2\}$ takie, że $\Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2} \supset \Gamma_\chi$. Ruchy μ_1 oraz μ_2 , odpowiednio względem β_1 oraz β_2 , są wtedy powiązane zależnością

$$(3.1) \quad \mu_1 = g_{\beta_1 \beta_2} \circ \mu_2,$$

gdzie

$$g_{\beta_1 \beta_2}(T) = \beta_{1T}^{-1} \circ \beta_{2T}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \quad \text{dla każdego } T \in \Gamma_\chi \text{ jest auto-}$$

morfizmem przestrzeni \mathcal{E} reprezentowanym przez (2.3).

Proces kinematyczny nie może być rozpatrywany jako podstawowa wielkość kinematyczna, gdyż obserwacji fizycznej dokonuje się w układach odniesienia. Ponadto automorfizmy czasoprzestrzeni nie powinny wpływać na opis matematyczny zjawisk. W związku z tym wielkością kinematyczną podstawową dla rozważania będzie proces deformacji wprowadzony już uprzednio.

Jeśli $\chi: \Gamma_\chi \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$ jest procesem kinematycznym, gdzie Γ_χ jest przedziałem domkniętym $\Gamma_\chi \equiv [t_0, t_0 + \sigma], \sigma \in \mathcal{R}^+$ zaś $\{\mathcal{E}, \beta\}$ jest układem odniesienia, to ruch $\mu: \Gamma_\chi \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ względem $\{\mathcal{E}, \beta\}$ poprzez proces przemieszczania $\mu_{t_0}^{t_0+s}: [0, \sigma] \rightarrow \mathcal{C}$, gdzie $\mu(s) := \mu_{t_0+s}$, wyznacza proces deformacji $p: [0, \sigma] \rightarrow \mathcal{X}$ zgodnie z przepisem:

$$(3.2) \quad p(s)(X, Y) := d \langle \mu(t_0+s, X), \mu(t_0+s, Y) \rangle_{\mathcal{E}}$$

dla każdej pary $X, Y \in \mathcal{B}$ oraz każdego $s \in [0, \sigma]$. Zauważmy, że proces deformacji można bezpośrednio związać z procesem

kinematycznym χ poprzez

$$(3.3) \quad p(s)(X, Y) := \hat{d}(\chi(t_0+s, X), \chi(t_0+s, Y)),$$

dla każdego $X, Y \in B$ oraz $s \in [0, r]$. Rzeczywiście, zgodnie z określeniem funkcji odległości \hat{d} , wybierając dowolny układ odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta_1\}$, przedstawiamy (3.3) w postaci

$$(3.3a) \quad p(s)(X, Y) = d\left(\beta_{1, t_0+s}^{-1}(\chi(t_0+s, X)), \beta_{1, t_0+s}^{-1}(\chi(t_0+s, Y))\right)_{\mathcal{E}} = d_{\beta_1}(t_0+s)(X, Y).$$

Niezależność prawej strony od szczególnego β_2 jest oczywista. Zauważmy, że złożenie automorfizmu $\hat{a}: W \rightarrow W$ czasoprzestrzeni W z procesem kinematycznym χ wyznacza nowy proces kinematyczny χ' i ten sam proces deformacji o ile automorfizm \hat{a} jest właściwy i regularny, tzn. nie zmienia orientacji żadnej z przestrzeni zdarzeń równoczesnych i dla dowolnych map $\beta_2, \beta_2 \in RF$ odwzorowanie $\hat{a}: \Gamma_{\beta_1} \cap \Gamma_{\beta_2} \rightarrow J_X$ określone poprzez $\hat{a}_{\beta_1, \beta_2}(t) := \beta_{2, t}^{-1} \hat{a}_{\beta_1, t} \beta_{1, t}$ jest ciągle w sensie Lipschitza w metryce \sup w naturalny sposób wprowadzonej do J_X . Z własności automorfizmów czasoprzestrzeni nie trudno wywnioskować słuszność ogólniejszego spostrzeżenia.

SPOSTRZEŻENIE 2. Dwa procesy kinematyczne $\chi: \Gamma_X \times B \rightarrow W$ oraz $\chi': \Gamma_{X'} \times B \rightarrow W$ połączone właściwym i regularnym automorfizmem czasoprzestrzeni $\hat{a}: W \rightarrow W$ przepisem $\chi' = \hat{a} \circ \chi$ wyznaczają jeden proces deformacji. Na odwrót, jeśli dwa procesy kinematyczne χ i χ' wyznaczają ten sam proces deformacji $p: J \rightarrow \mathcal{K}$, to istnieje lokalny automorfizm (tj: spełniający warunki i) - iii) automorfizmu) czasoprzestrzeni $\hat{a}: \chi(\Gamma_X, B) \rightarrow \chi'(\Gamma_{X'}, B)$ taki, że $\chi' = \hat{a} \circ \chi$, tzn. dla każdego $X \in B$ oraz $t \in \Gamma_X$, zachodzi równość $\chi(t, X) = \hat{a}(\chi(t-t_a, X))$, gdzie liczba $t_a \in \mathbb{R}$ realizuje automorfizm w przestrzeni chwil Γ :

$$\Gamma_{X'} = \Gamma_X - t_a := [t_0 - t_a, t_0 + d - t_a], \text{ gdzie } [0, d] \equiv J.$$

□

Zgodnie z określeniem (3.2) oraz postacią automorfizmów przestrzeni euklidesowej stwierdzamy słuszność następującego spostrzeżenia.

SPOSTRZEŻENIE 3. Dwa ruchy $\mu: \Gamma_\mu \times B \rightarrow \mathcal{E}$ oraz $\mu': \Gamma_{\mu'} \times B \rightarrow \mathcal{E}$ względem układów $\{\mathcal{E}, \beta\}$ oraz $\{\mathcal{E}, \beta_2\}$ wyznaczają ten sam proces deformacji $p: J \rightarrow \mathcal{X}$ dla ciała B wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją proces kinematyczny χ oraz właściwy automorfizm $\hat{\alpha}: W \rightarrow W$ takie, że μ jest ruchem ciała względem $\{\mathcal{E}, \beta\}$ wyznaczonym przez χ , zaś μ' jest ruchem ciała względem $\{\mathcal{E}, \beta_2\}$ wyznaczonym przez $\hat{\alpha} \circ \chi$. \square

Jako konsekwencję spostrzeżeń 2 i 3 otrzymujemy :

WNIOSEK. Dwa ruchy $\mu: \Gamma_\mu \times B \rightarrow \mathcal{E}$ oraz $\mu': \Gamma_{\mu'} \times B \rightarrow \mathcal{E}$ wyznaczają ten sam proces deformacji, jeśli są powiązane następującą relacją

$$(3.4) \quad \mu' = c + Q \cdot (\mu - q),$$

gdzie $q \in \text{Rng } \mu \subset \mathcal{E}$ może być wybrane dowolnie, $c: \Gamma_\mu \rightarrow \mathcal{E}$ jest określone przez $c(t) = (\mu'_t \circ \mu_t^{-1})(q)$, zaś $Q: \Gamma_\mu \rightarrow \text{Orth}^4(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ jest zdefiniowane przez $Q(t) = (\mu'_t \circ \mu_t^{-1})_*$. W szczególności wybierając

pewne $x_0 \in B$ możemy wstawić $q(t) = \mu_t(x_0)$ i wtedy $c(t) = \mu'_t(x_0)$. \square

Zauważmy, że w powyższym sformułowaniu przyjęliśmy $\Gamma_{\mu'} = \Gamma_\mu$; jeśli interesuje nas bardziej ogólny przypadek należy dopuścić translację $t_a \in \mathbb{R}$ w zbiorze chwil tak by $\Gamma_{\mu'} = \Gamma_\mu - t_a$ (por. Spostrzeżenie 1).

Na zakończenie tego punktu wyprowadźmy zależność między polami prędkości $\dot{\mu}: \Gamma_\mu \times B \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E})$ i przyspieszenie $\ddot{\mu}: \Gamma_\mu \times B \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E})$ dwóch ruchów μ i μ' wyznaczającymi ten sam proces deformacji $p: J \rightarrow \mathcal{X}$ ciała B . Zgodnie z definicją, oraz założeniem ciągłości w sensie Lipschitza ruchów mamy, dla każdego $\chi \in B$ oraz $\tau \in \Gamma_\mu$,

$$\dot{\mu}(\tau, \chi) \equiv \frac{d}{dt} \mu(\tau, \chi) := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu(\tau+s, \chi) - \mu(\tau, \chi)}{s} \in \mathcal{T}(\mathcal{E}),$$

gdzie granica po prawej stronie istnieje prawie wszędzie na $\mathcal{J} = \Gamma_{\mu} - d$. Stąd różniczkując μ' otrzymamy, przy wyborze $q(t) = \mu_T(x_0)$ i gdy $c(t) = \mu'_T(x_0)$

$$(3.5) \quad \ddot{\mu}' - \dot{c} = Q(\dot{\mu} - \dot{q}) + A(\mu' - c),$$

gdzie $A: \Gamma_{\mu} \rightarrow \text{Skew}(\mathcal{J}(\mathcal{E}))$ jest określone przez $A := \dot{Q}Q^T$, zaś $\text{Skew}(\mathcal{J}(\mathcal{E}))$ oznacza zbiór $\{A \in \text{Lin}(\mathcal{J}(\mathcal{E})) : A = -A^T\}$. Jeśli pola μ oraz μ' są ciągłe w sensie Lipschitza na Γ_{μ} oraz $\Gamma_{\mu'}$, przy ustalonym drugim argumencie, to możemy wyznaczyć dla prawie wszystkich wartości chwil, $\ddot{\mu}$ oraz $\ddot{\mu}'$. Proste przeliczenia dają następujący związek

$$(3.6) \quad \ddot{\mu}' - \dot{c} = Q(\ddot{\mu} - \ddot{q}) + 2A(\dot{\mu}' - \dot{c}) + (A - A^2)(\mu' - c).$$

Powyższe zależności będą wykorzystane w dowodzie następującego spostrzeżenia:

SPOSTRZEŻENIE 4. Niech $\chi: \Gamma_{\mu} \times B \rightarrow W$ będzie procesem kinematycznym dla ciała B . Dla dowolnie wybranej cząstki $x_0 \in B$ oraz dowolnego układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$ określimy pole

$$\xi: \Gamma_{\chi} \times B \rightarrow \mathcal{E} \text{ poprzez } \xi(t, x) \equiv c_T := \beta_T^{-1}(\chi_T(x_0)) \text{ dla } (t, x) \in \Gamma_{\chi} \times B.$$

W klasie układów odniesienia $\{\{\mathcal{E}, \beta\} : \beta \in RF\}$, powiązanych transformacjami Galileusza, czasoprzestrzenne rozkłady prędkości $\{v_T : T \in \Gamma_{\chi}\}$ i przyspieszenia $\{a_T : T \in \Gamma_{\chi}\}$ dla ciała B określone przez $v_T := \beta_{T \times}(\dot{\mu}_T - \xi_T): B \rightarrow \mathcal{J}(\text{ch}^{-1}(U))$, $a_T := \beta_{T \times}(\ddot{\mu}'_T - \dot{\xi}_T)$ gdzie $\mu_T = \beta_T^{-1} \circ \chi_T$, są dobrze zdefiniowane przez proces kinematyczny χ , tzn. ich postaci nie zależą od wyboru szczególnego układu odniesienia z tej klasy.

Dowód. Niech $\{\mathcal{E}, \beta\}$ oraz $\{\mathcal{E}, \beta_1\}$ będą układami odniesienia powiązanymi transformacją Galileusza. Wtedy, zgodnie z (2.4) oraz (3.4) ruch μ względem β oraz ruch μ' względem β_1 , oba wyznaczone przez χ , są powiązane zależnością

$$(3.7) \quad \mu'_T - \frac{c'_T}{\beta_1} = Q_0(\mu_T - \frac{c_T}{\beta}) \text{ przy } \frac{c'_T}{\beta_1} \equiv \beta_{1T}^{-1}(\chi(t, x_0)),$$

gdzie $Q_0 := (\beta_{\tau}^{-1} \circ \beta_{\tau})_*$ dla każdego $\tau \in \Gamma_{\mathcal{X}}$ jest stałym elementem z $\text{Orth}^+(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$. Stąd $Q_0 = 0 \in \text{Lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ otrzymujemy

$$\dot{\mu}' - \dot{c}' = Q_0 (\dot{\mu} - \dot{c}) \quad \text{oraz} \quad \ddot{\mu}' - \ddot{c}' = Q_0 (\ddot{\mu} - \ddot{c}).$$

Na podstawie tych zależności dla dowolnego $\tau \in \Gamma_{\mathcal{X}}$ mamy

$$\beta_{1\tau*} (\dot{\mu}'_{\tau} - \dot{\mu}'_{\tau}(x_0)) = \beta_{1\tau*} (\beta_{1\tau}^{-1} \circ \beta_{1\tau})_* (\dot{\mu}_{\tau} - \dot{\mu}_{\tau}(x_0)) = \beta_{1\tau*} (\dot{\mu}_{\tau} - \dot{\mu}_{\tau}(x_0))$$

skoro $(\beta_{1\tau}^{-1} \circ \beta_{1\tau})_* = \beta_{1\tau*}^{-1} \circ \beta_{1\tau*}$. Podobnie udawadnia się równość

$$(3.8) \quad \beta_{1\tau*} (\ddot{\mu}'_{\tau} - \ddot{\mu}'_{\tau}(x_0)) = \beta_{1\tau*} (\ddot{\mu}_{\tau} - \ddot{\mu}_{\tau}(x_0))$$

dla każdego

$$\tau \in \Gamma_{\mathcal{X}}. \quad \square$$

Zauważmy, że rozkład prędkości $\{\beta_{1\tau*} \dot{\mu}_{\tau} : \tau \in \Gamma_{\mathcal{X}}\}$ jest zależny od układu odniesienia nawet w klasie układów odniesienia występujących w powyższym spostrzeżeniu.

Inaczej ma się sprawa z rozkładem przyspieszeń $\{\beta_{1\tau*} \ddot{\mu}_{\tau} : \tau \in \Gamma_{\mathcal{X}}\}$, jeśli w miejsce $q(\tau) \equiv \mu_{\tau}(x_0)$ wstawimy jedno ustalone zdarzenie $q \in \text{Rng } \mu$; wtedy w miejsce (3.6) otrzymamy

$$\ddot{\mu}' - Q \ddot{\mu} = \ddot{c} + 2A(\dot{\mu}' - \dot{c}) + (A - A^2)(\mu' - c),$$

gdzie $c(\tau) := \mu'_{\tau} \mu_{\tau}^{-1}(q)$. Jeśli układy $\{\mathcal{E}, \beta\}$ i $\{\mathcal{E}, \beta_1\}$ są powiązane transformacją Galileusza, to zgodnie z (2.4) obiekty $A = 0 \in \text{Lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ oraz $\ddot{c} = 0 \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$ i wtedy

$$(3.9) \quad \ddot{\mu}' = Q \ddot{\mu}.$$

Powtarzając końcową część ostatniego spostrzeżenia otrzymujemy:

WNIOSEK. W klasie układów odniesienia powiązanych transformacjami Galileusza rozkład przyspieszenia $\{\beta_{1\tau*} \ddot{\mu}_{\tau} : \mu_{\tau} = \beta_{1\tau}^{-1} \circ \chi_{\tau}, \tau \in \Gamma_{\mathcal{X}}\}$ jest dobrze zdefiniowany dla procesu kinematycznego $\chi: P_{\mathcal{X}} \times B \rightarrow W$. \square

Rola dwóch ostatnich rezultatów będzie widoczna po wprowadzeniu pierwszej zasady dynamiki Newtona i przy określaniu zmiennych stanu ośrodka ciągłego odkształcalnego.

4. Deformacja

Odkształcalny ośrodek ciągi charakteryzowany warunkiem $B \notin \mathcal{P}_C$ będzie opisywany pewnymi polami tensorowymi określonymi na B . Ciało B naturalnie wyposażone w strukturę rozmierności zorientowanej, a tym samym w wiązkę styczną $\mathcal{T}(B)$, dzięki istnieniu klasy umiejscowień C , dopuszcza możliwość określenia następujących klas morfizmów:

$$\mathcal{C}^* := \{ \alpha_* : \mathcal{T}(B) \rightarrow \mathcal{T}(E) : \alpha \in C \},$$

$$\mathcal{G} := \{ g \in \text{Sym}^+(\mathcal{T}(B), \mathcal{T}^*(B)) : g = (\alpha_*)^* \alpha_*, \alpha \in C \}.$$

Przez α_* oznaczyliśmy odwzorowanie styczne $\mathcal{T}(B) \rightarrow \mathcal{T}(E)$ generowane przez umiejscowienie $\alpha \in C$. Jeśli X jest cząstką ciała B , to liniowy morfizm $\alpha_* X : \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}(E)$ jest zdefiniowany następująco:

$$\alpha_* X \tilde{u} := (\nabla_g \alpha(X))v, \text{ jeśli } (\delta, v) \in \tilde{u} \in \mathcal{T}_X,$$

przy czym $\nabla_g \alpha(X) := \nabla(\alpha \circ \delta^{-1})_{\delta(X)}$, wtedy $\alpha_* := \{ \alpha_* X : X \in B \}$.

Zauważmy, że lokalnie w każdej cząstce X morfizm $\alpha_* X$ wyznacza klasę umiejscowień równoważnych umiejscowieniom α , w następujący sposób

$$\delta \sim \alpha \Leftrightarrow \nabla_g \alpha(X) = 1 \in \text{lin}(\mathcal{T}(E)).$$

Aby odróżnić klasę równoważności tak zdefiniowaną od morfizmu ją wyznaczającego, będziemy używać oznaczenia $\nabla \alpha(X)$ dla klasy. Warty odnotowania jest fakt odwracalności morfizmu $\alpha_* X$ dla każdego X .

W tym miejscu jest wyraźna potrzeba wprowadzenia dodatkowego założenia bądź krótkiego komentarza. Zgodnie z warunkiem b/ definicji 1, przemieszczenia $\gamma \circ \alpha^{-1}$ oraz $\alpha \circ \gamma^{-1}$ są prawie wszędzie różniczkowalne, w związku z tym mogą istnieć cząstki $X \in B$ takie, że gradient $\nabla(\alpha \circ \gamma^{-1})$ jest w nich nieokreślony. Tak więc aby być w zgodzie z warunkami należy bądź założyć, że dla każdego umiejscowienia α istnieje przemieszczenie

na nim określone i wszędzie różniczkowalne, bądź zastrzec, że wprowadzone pojęcia mają swoje niepuste znaczenia prawie wszędzie, względem miary objętościowej w \mathcal{E} przeniesionej na ciało \mathcal{B} przy pomocy szczególnego umiejscowienia.

Jeśli $\alpha_{**X}: \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E})$ jest liniowym morfizmem, to jego sprzężenie $(\alpha_{**X})^*: \mathcal{T}^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{T}_X^*$ jest określone poprzez warunek $\langle (\alpha_{**X})^* w, v \rangle = \langle w, \alpha_{**X} v \rangle$ dla wszystkich $v \in \mathcal{T}_X$ oraz $w^* \in \mathcal{T}^*(\mathcal{E})$, gdzie $\langle u^*, w \rangle \in \mathbb{R}$ oznacza wartość formy $u^* \in \mathcal{T}^*(\mathcal{E}) = \text{Lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}), \mathbb{R})$ na wektorze $w \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$, bądź formy $u^* \in \mathcal{T}_X^*(\mathcal{B}) = \text{Lin}(\mathcal{T}_X, \mathbb{R})$ na wektorze $w \in \mathcal{T}_X$.

Zauważmy, że elementy zbioru \mathcal{G} mają następującą charakterystykę: jeśli $g \in \mathcal{G}$, to dla każdego $X \in \mathcal{B}$ morfizm $g_X \in \text{Sym}^+(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X^*)$; ten ostatni zbiór można scharakteryzować przez warunek

$$(4.1) \quad \mathcal{G}_X := \text{Sym}^+(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X^*) = \left\{ \begin{array}{l} \text{gdziein}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X^*): \text{ dla wszystkich } v, w \in \mathcal{T}_X \\ \langle gv, w \rangle = \langle gw, v \rangle \text{ i} \\ \langle gv, v \rangle > 0, \text{ jeśli } v \neq 0. \end{array} \right\}$$

W rzeczywistości elementy zbioru \mathcal{G}_X są wszystkimi dopuszczalnymi ze względu na zbiór \mathcal{C} iloczynami wewnętrznymi w przestrzeni stycznej $\mathcal{T}_X(\mathcal{B})$ przeniesionymi z $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ poprzez $(\alpha_{**X})^{-1}$, dla wszystkich umiejscowień $\alpha \in \mathcal{C}$. Jest to widoczne z następującej relacji.

Dla umiejscowienia $\alpha \in \mathcal{C}$ określmy $g_X := (\alpha_{**X})^* \alpha_{**X}$ i weźmy dowolne $v \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Jeśli $\tilde{t} = (\alpha_{**X})^{-1} v \in \mathcal{T}_X$, to

$$v \cdot v = \langle v, v \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \alpha_{**X} \tilde{t}, \alpha_{**X} \tilde{t} \rangle = \langle (\alpha_{**X})^* \alpha_{**X} \tilde{t}, \tilde{t} \rangle = \langle g_X \tilde{t}, \tilde{t} \rangle =: \tilde{t} \cdot \tilde{t}$$

Posiadając w każdej przestrzeni stycznej \mathcal{T}_X zdefiniowany zbiór dopuszczalnych iloczynów skalarnych \mathcal{G}_X , możemy dla dowolnego umiejscowienia $\alpha \in \mathcal{C}$ określić pole iloczynów skalarnych na wiązce stycznej $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ w sposób punktowy. W szczególności, jeśli $g \in \mathcal{G}$ oraz $t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{B})$, to pole skalarne na ciełe $\langle \tilde{g}t, \tilde{t} \rangle: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określone poprzez $\langle \tilde{g}t, \tilde{t} \rangle(x) = \langle g_x t(x), t(x) \rangle$.

Na koniec zauważmy, że dwa umiejscowienia, wyznaczające wspólną konfigurację \mathcal{E}_m ^{określają} ten sam iloczyn skalarny. Ponadto dla dowolnego $X \in \mathcal{B}$ każdy element zbioru \mathcal{G}_X może być wyznaczony jako drugi mieszany gradient funkcji $-\frac{1}{2}(d_x)^2 w$ dla pewnego $d_x \in \mathcal{K}$. Przy różniczkowaniu należy skorzystać z definicji gradientu

dowolnego morfizmu $f: B \rightarrow E_1$ klasy C^1 z B do przestrzeni euklidesowej E_1 , która mówi, że $\nabla f(X): T_X \rightarrow T(E_1)$ jest określony poprzez $(\nabla f(X))t = (\nabla_x f(X))v$, jeśli $(x, v) \in t \in T_X$, gdzie $\nabla_x f(X) = \nabla(f \circ \alpha^{-1})(\alpha(X))$.

Przejdźmy do innych pól deformacji określonych na ciele i do lokalnych miar deformacji określonych dla cząstek.

Niech $\alpha: \Gamma_X \times B \rightarrow W$ będzie procesem kinematycznym zaś $\{E, \beta\}$ układem odniesienia. Wtedy z ruchem μ wyznaczonym poprzez $\mu(t) = \beta_t^{-1} \cdot \chi_t$ dla $t \in \Gamma_X$ można związać "ruch styczny" $\{M_X; X \in B\}$, $M: \Gamma_X \rightarrow \text{lin}(T(B), T(E))$ poprzez $M_X(t) := \mu(t) \cdot X$ dla $t \in \Gamma_X$ i dla prawie każdego $X \in B$. Noll [1973] nazywa $M_X(t)$ przemieszczeniem elementu ciała T_X w $T(E)$ w chwili t , zaś całą funkcję $M_X: \Gamma_X \rightarrow \text{lin}(T_X, T(E))$ nazywa ruchem elementu ciała T_X w $T(E)$ indukowanym przez ruch μ ciała B .

To, że przestrzeń styczną T_X w cząstce X nazywa się elementem ciała jest raczej uzasadnione, gdyż wektory styczne w cząstce X opisują w pierwszej aproksymacji punkty z otoczenia cząstki X niezależnie od jakiegokolwiek umiejscowienia. Łatwo to uzyskać z poniższego rozumowania: jeśli $\delta \in \mathcal{C}$, zaś u przebiega otoczenie wektora zerowego w przestrzeni $T(E)$, to $\delta(X) + u$ przebiega otoczenie punktu $\delta(X)$ w obszarze zajmowanym przez ciało B w umiejscowieniu α a $\delta^{-1}(\delta(X) + u)$ przebiega otoczenie cząstki $X \in B$. Jeśli $\alpha \in \mathcal{C}$ jest innym umiejscowieniem, to dla pewnych $v \in T(E)$ zachodzi równość $\delta^{-1}(\delta(X) + u) = \alpha^{-1}(\alpha(X) + v)$, a tym samym $\mathcal{N}(\delta(X) + u) = \alpha(X) + v$ z przemieszczeniem $\mathcal{N} := \alpha \delta^{-1}$. Przybliżając przemieszczenie \mathcal{N} jego gradientem w otoczeniu $\delta(X)$, widzimy, że ostatnia równość może być zapisana jako $(\nabla_{\delta} \alpha)(X)u = v + o(u)$ z dokładnością do członów wyższego rzędu. A to właśnie jest warunek na to, by pary (δ, u) i (α, v) wyznaczały ten sam wektor styczny w punkcie $X \in B$.

Wróćmy do lokalnych miar deformacji. Jeśli $p: [0, \tau] \rightarrow \mathcal{K}$ jest procesem deformacji dla ciała B , to funkcję $P: [0, \tau] \rightarrow \mathcal{G}$ określoną przez $P(t) = \nabla_x \nabla_x (-\frac{1}{2} p^2(t))$ nazwiemy wewnętrznym procesem ciała wyznaczonym przez proces p . Jeśli dokonamy lokalizacji P_X procesu P dla pewnego $X \in B$, to funkcję $P_X: [0, \tau] \rightarrow \mathcal{G}_X$ nazwiemy za Nollem [1973] procesem deformacji elementu T_X wyznaczonym przez proces deformacji p ciała B . Zauważmy, że wyznaczenie

P_X wymaga znajomości procesu p w pewnym otoczeniu cząstki X . Ponadto różne procesy p_1 oraz p_2 , lokalnie w cząstce X , mogą prowadzić do wyznaczenia tego samego procesu deformacji elementu X . To oznacza, że zaniedbanie w opisie /przejście od/ procesu deformacji $p: [0, \sigma] \rightarrow \mathcal{X}$ na rzecz (do) wewnętrznego procesu deformacji $P: [0, \sigma] \rightarrow \mathcal{G}$, jako sumy $\{P_X: [0, \sigma] \rightarrow \mathcal{G}_X: X \in \mathcal{B}\}$ oznacza rezygnację z części informacji niesionych przez p . Mówiąc mniej ściśle oznacza to utożsamienie konfiguracji różniących się wyższymi niż drugie pochodnymi mieszanymi. Taka świadoma rezygnacja ze zmiennej p na korzyść indukowanej przez nią zmiennej P łączy się z często nieświadomie przyjętym postulatem słabej lokalności. Wypada nadmienić, że większość teorii konstytutywnych wprowadza postulat mocnej lokalności, który stwierdza, że jedynie poszczególne izolowane elementy ciała \mathcal{T}_X i procesy deformacji dla nich określone P_X są istotne w opisie mechanicznych własności ciała traktowanego jako sumy identycznych kopii elementów materialnych \mathcal{T}_X .

W teoriach tych używa się lokalnych miar deformacji odniesionych do pewnej ustalonej wybranej "konfiguracji". Użycie cudzośłowu ma odróżnić ten termin od używanego i inaczej zdefiniowanego w pracy pojęcia. Prześledźmy z naszego punktu tę metodę podejścia. Wpierw dokonuje się wyboru pewnego umiejscowienia odniesienia $\alpha: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ następnie odpowiadające mu odwzorowanie styczne $\alpha_*: \mathcal{T}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E})$ zlokalizowane do szczególnej cząstki $X \in \mathcal{B}$ i jej elementu materialnego \mathcal{T}_X , oznaczone przez $K := \alpha_{*X} \in \text{Lin}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}(\mathcal{E}))$ (gdzie $\text{Lin}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}(\mathcal{E}))$ oznacza podzbiór odwracalnych odwzorowań liniowych) winno spełniać $K_* K \in \mathcal{G}_X$. Jeśli $\mu: \Gamma_\mu \rightarrow \mathcal{C}$ jest ruchem ciała, to $M_X := \mu_{*X}: \Gamma_\mu \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}(\mathcal{E}))$ jest ruchem elementu \mathcal{T}_X w układzie $\mathcal{T}(\mathcal{E})$. Następujące funkcje określone na odcinku $[0, \sigma] \subset \mathbb{R}^+$, gdzie $\Gamma_\mu \equiv [t_0, t_0 + \sigma]$, o wartościach w $\text{Lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ grają podstawową rolę w tym podejściu:

$$(4.2) \quad F := M_X K_0^{-1}, \quad C := F^T F = (K_0^*)^{-1} M_X^* M_X K_0^{-1}.$$

Pierwszy obiekt można nazwać czasowym przebiegiem tensora przeszczenia, zaś drugi - czasowym przebiegiem prawego tensora Cauchy'ego-Greena, oba mierzone względem umiejscowienia

odniesienia \mathcal{K} elementu ciała \mathcal{T}_X .

W większości teorii lokalnych mechaniki ciał odkształcalnych tensor C gra rolę podstawowej miary deformacji. W teoriach odrzucających opis względem wybranego umiejscowienia odniesienia (por. Noll [1972, 1973], Perzyna i Kosiński [1973], Šilhavy i Kratochvíl [1977]) tę rolę pełni miara deformacji $M_X^* M_X$

Terminy wewnętrzny proces deformacji i wewnętrzna miara deformacji, jakie przypisuje się obiektowi $M_X^* M_X$, wynikają z niezależności miary $M_X^* M_X$ od układu i umiejscowienia odniesienia. Jest ona natomiast zależna od procesu kinematycznego $\chi: \Gamma_\mu \times B \rightarrow W$, który generował ruch $\mu: \Gamma_\mu \rightarrow C$ poprzezabrany układ odniesienia. Niech $\{\mathcal{E}, \beta\}$ i $\{\mathcal{E}, \beta_1\}$ będą dwoma układami odniesienia a μ oraz μ' odpowiadającymi im ruchami ciała wyznaczonymi przez proces χ , wtedy

$$\mu'(t) := \beta_{1t}^{-1} \circ \chi_t = \beta_{1t}^{-1} \circ \beta_t \circ \beta_t^{-1} \circ \chi_t = \beta_{1t}^{-1} \circ \beta_t \circ \mu(t)$$

dla $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Stąd

$$M_X'(t) := \mu'(t) * X = (\beta_{1t}^{-1} \circ \beta_t) * M_X(t)$$

dla $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. W efekcie

$$M_X'(t) * M_X(t) = ((\beta_{1t}^{-1} \circ \beta_t) *) (\beta_{1t}^{-1} \circ \beta_t) * M_X(t) * M_X(t) = M_X(t) * M_X(t)$$

dla każdego $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ skoro $(\beta_{1t}^{-1} \circ \beta_t) * \in \text{Orth}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ oraz

$((\beta_{1t}^{-1} \circ \beta_t) *) \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ jest przetrzeźnią z wyróżnionym elementem $I \in \text{Sym}^+(\mathcal{T}(\mathcal{E}), \mathcal{T}(\mathcal{E}))$

-iloczynem skalarnym, wtedy bijekcja $I: \mathcal{T}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E})^*$ użyta do identyfikacji $\mathcal{T}(\mathcal{E})^* \times \mathcal{T}(\mathcal{E})$ pozwala element sprzężony A^* do dowolnego elementu $A \in \text{Lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ identyfikować z innym elementem zbioru $\text{Lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}), \mathcal{T}(\mathcal{E}))$, ten właśnie element oznaczymy poprzez A^τ zamiast A^* . W przypadku podzbioru $\text{Orth}(\mathcal{T}(\mathcal{E})) \subset \text{Lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ każdy jego element Q spełnia tożsamość $Q^* I Q = I$, $Q Q^* = I$. Zauważmy na marginesie, że $\text{Orth}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$

może być traktowana jako przykład tzw. grupy ortogonalnej elementu I (iloczynu skalarnego) należącego do $\text{Sym}^+(\mathcal{T}(\mathcal{E}), \mathcal{T}(\mathcal{E}))$. Jeśli mamy dowolną przestrzeń wektorową (liniową) oraz jej sprzężoną

\mathcal{T}^* , to dla każdego elementu $G \in \text{Sym}^+(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ możemy określić odpowiadającą mu grupę ortogonalną $\text{Orth}(G)$ jako zbiór tych

$A \in \text{Lin}(\mathcal{T})$, dla których $A^* G A = G$. Jest oczywiste że $\text{Orth}(G) \subset \text{Unim}(\mathcal{T})$, gdzie $\det: \text{Lin}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieliniową

* $\text{Unim}(\mathcal{T}) := \{ A \in \text{InvlIn}(\mathcal{T}) : (\det A)^2 = 1 \}$

funkcją zachowującą złożenie, tzn. $\det(A_1 A_2) = \det(A_1) \det(A_2)$.

Po tych dywagacjach wróćmy do głównego wątku. Z określenia wielkości F oraz C widać, że tensor Cauchy'go - Greena jest niezależny od układu odniesienia, natomiast jest zależny od umiejscowienia odniesienia; inaczej ma się sprawa z tensorem przemieszczenia, który jest zależny od obu "odniesień": układu i umiejscowienia.

Określmy dodatkowo obiekty $C_{(t)}$, $F_{(t)}$, L , D oraz W jak następuje: Dla pewnego $t \in [0, \tau]$ określmy $F_{(t)}: [0, \tau] \rightarrow \text{lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ poprzez

$$(4.3) \quad F_{(t)}(s) = M_X(s) M_X(t)^{-1}, \quad \text{wtedy } C_{(t)}(\cdot) := F_{(t)}^T F_{(t)}(\cdot).$$

Jeśli $L: [0, \tau] \rightarrow \text{lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ zdefiniujemy punktowo poprzez warunek $L(t) := \frac{d}{ds} F_{(t)}(s) \Big|_{s=t}$ dla $t \in [0, \tau]$, to $D := \frac{1}{2}(L + L^T)$ oraz $W := \frac{1}{2}(L - L^T)$. Zauważmy, że zmiana układu odniesienia realizowana w przestrzeni $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ przez $g_{\beta_1 \beta_2 *}: [0, \tau] \rightarrow \mathcal{J}_X$ prowadzi do następujących relacji między obiektami generowanymi przez μ i przez μ' :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} F'(s) &= g_{\beta_1 \beta_2 *}(s) F(s), & F'_{(t)}(s) &= g_{\beta_1 \beta_2 *}(s) F_{(t)}(s) g_{\beta_1 \beta_2 *}(t)^T, \\ C'_{(t)}(s) &= g_{\beta_1 \beta_2 *}(t) C_{(t)}(s) g_{\beta_1 \beta_2 *}(t)^T, \\ L'(t) &= g_{\beta_1 \beta_2 *}(t) L(t) g_{\beta_1 \beta_2 *}(t)^T + A(t) \\ D'(t) &= g_{\beta_1 \beta_2 *}(t) D(t) g_{\beta_1 \beta_2 *}(t)^T, \end{aligned}$$

gdzie

$$A(t) := \frac{d}{dt} (g_{\beta_1 \beta_2 *}(t)) g_{\beta_1 \beta_2 *}(t)^T.$$

Jeśli zmiana układu odniesienia jest powiązana transformacją Galileusza, to $g_{\beta_1 \beta_2 *}(s) \equiv Q_0 = \text{conste} \mathcal{J}_X$ i krzywa tensorowa $A: [0, \tau] \rightarrow \text{Skew}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ redukuje się do zera. W klasie układów odniesienia powiązanych dowolnymi transformacjami, można jednoznacznie związać z danym procesem kinematycznym χ ciała B i cząstką X czaso-przebiegi $F_{W,t}$, D_W na Γ_X o wartościach w $\text{lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}), \mathcal{T}(\text{di}^{-1}(\Gamma_X)))$, jak następuje

$$(4.5) \quad F_{W,t}(\tau) := \beta_{L*} F_{(t)}(\tau - \tau_0) \beta_{t*}^{-1}, \quad D_W(\tau) := \beta_{L*} D(\tau - \tau_0) \beta_{t*}^{-1},$$

natomiast czasowe przebiegi

$$(4.6) \quad L_w(\tau) := \beta_{\tau_*} L(\tau - \tau_0) \beta_{\tau_*}^T, \quad W_w(\tau) := \beta_{\tau_*} W(\tau - \tau_0) \beta_{\tau_*}^T$$

można jednoznacznie związać z procesem kinematycznym w klasie układów odniesienia powiązanych transformacjami Galileusza.

5. Niezależność od układu odniesienia

Wydaje się, że tu jest miejsce by poprawnie zdefiniować pojęcie niezależności danego obiektu od układu odniesienia. Pojęcie to już pojawiło się na poprzednich stronach lecz odnosiło się do wielkości (obiektów) szczególnych, określonych na ciele. W spostrzeżeniu 4 użyliśmy terminu "rozkłady (obiekty) dobrze zdefiniowane przez proces kinematyczny", który przy obecnie proponowanej definicji oznacza rozkłady niezależne od układów odniesienia powiązanych transformacjami Galileusza.

W celu wprowadzenia odpowiedniej definicji przyjmijmy, że dopuszczone na tym etapie rozważań obiekty (typu: funkcji tensorowych, pól skalarnych, wektorowych czy tensorowych, a nawet równań czy relacji między polami powyższego typu) są wartościami pewnych operatorów (morfizmów) określonych na iloczynie kartezjańskim zbiorów dopuszczalnych procesów kinematycznych AKP_B ciała B i atlasie RF czasoprzestrzeni W .

Niech $\mathcal{F}: AKP_B \times RF \rightarrow \mathcal{R}$ będzie operatorem powyższym, zaś \mathcal{F} przestrzenią fizyczną \mathcal{E} lub jedną z wiązek o bazie \mathcal{E} , czy też zbiorem tensorów euklidesowych albo ich czasowymi przebiegami. Wtedy dowolny obiekt $f \in \mathcal{F}$ ma dobrze określone tzw. pchnięcie (transformatę) wzdłuż $\beta: \Gamma_B \times \mathcal{E} \rightarrow \partial \mathcal{H}(\Gamma_B) \subset W$, które przeprowadza f w obiekt tego samego typu ale określony na W , lub też nad jedną z przestrzeni zdarzeń równoczesnych czy też nad jej przestrzenią (przestrzeniami) translacyjną. Oznaczmy symbolicznie obraz transformaty (wartość pchnięcia) obiektu f wzdłuż β przez $\beta_*[f]$.

DEFINICJA 4. Niech $\mathcal{F}: AKP_B \times RF \rightarrow W(B, W)$ będzie operatorem o zbiorze wartości $W(B, W)$, który jest wiązką nad ciałem B

lub jej pojedynczym włóknom czy też czasoprzestrzenią W , lub też wiązką nad W albo nad jej przestrzeniami translacyjnymi zdarzeń równoczesnych. Niech obiekt g należy do obrazu \mathcal{F} , tzn. $g \in \mathcal{F}(AKP_B, RF)$ zaś $PRF \subset RF$ jest podzbiorem map atlasu czasoprzestrzeni W . Wtedy powiemy, że g jest niezależny od układu odniesienia z klasy PRF , jeśli dla ustalonego, ale dowolnego procesu $\chi \in AKP(B)$, operator $\mathcal{F}(\chi, \cdot)$ ma tę samą wartość dla każdego układu odniesienia z PRF , tzn. dla każdej pary $\beta, \beta_1 \in PRF$ zachodzi równość

$$(5.1) \quad \mathcal{F}(\chi, \beta) = \mathcal{F}(\chi, \beta_1).$$

Niech z kolei $\mathcal{F}: AKP_B \times RF \rightarrow \mathcal{R}$, gdzie \mathcal{R} jest zbiorem (wiązka) o bazie \mathcal{E} , o którym wspominaliśmy powyżej. Obiekt $f \in \mathcal{F}(AKP_B, RF)$ nazwiemy niezależnym od układu odniesienia z klasy $PRF \subset RF$, jeśli dla ustalonego, ale dowolnego procesu $\chi \in AKP(B)$ zachodzi równość

$$(5.2) \quad \beta_* [f] = \beta_{1*} [f_1], \text{ gdzie } f = \mathcal{F}(\chi, \beta) : f_1 = \mathcal{F}(\chi, \beta_1)$$

dla każdej pary układów odniesienia $\beta, \beta_1 \in PRF$; tu $AKP(B) = AKP_B$ □

Zauważmy, że obiekt $g \in W(B, W) \cap \mathcal{F}(AKP_B, RF)$ jest niezależny od układu odniesienia z klasy PRF , jeśli dla każdego procesu $\chi \in AKP(B)$ morfizm $\mathcal{F}(AKP(B), \cdot)$ jest stały (niezmienniczy) na PRF . Z kolei obiekt $f \in \mathcal{R} \cap \mathcal{F}(AKP(B), RF)$, jest niezależny od układu odniesienia, jeśli dla każdego $\chi \in AKP(B)$ morfizm

$$\mathcal{F}(AKP(B), \cdot) |_{PRF} : PRF \rightarrow \mathcal{R}$$

$(PRF \subset RF)$ jest współzmienniczy z pchnięciem (transformatą) generowanym przez mapę z klasy PRF stojącą w jego argumentcie.

W myśl powyższej definicji wewnętrzna miara deformacji g generowana przez operator $\mathcal{F}: (\chi, \beta) \mapsto \{((\beta_T^{-1} \circ \chi_T)_* (\beta_T^{-1} \circ \chi_T)_* : \tau \in \Gamma_\chi)\}$ jest niezależna od układu odniesienia z klasy RF , natomiast tensor przemieszczenia F wyznaczony przez operator $\mathcal{F}: (\chi, \beta) \mapsto \{((\beta_T^{-1} \circ \chi_T)_* K_T^{-1} : \tau \in \Gamma_\chi)\}$ nie jest niezależny od układu odniesienia z klasy RF , gdzie $K_T \in \text{InvLin}(\mathcal{J}(B), \mathcal{J}(E))$. Jeśli ograniczymy się do klasy $PRF \subset RF$ określonej przez warunek

$\beta, \beta_2 \in PRF_1 \iff \beta_t^{-1} \circ \beta_{2t} = 1_{T(t)}$ dla każdego $t \in T_{\beta_1} \cap T_{\beta_2}$, to wtedy obiekt F jest niezależny od układów z klasy PRF_1 .

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na możliwą inną interpretację powyższego faktu. Jeśli spojrzymy na definicję dwóch obiektów: tensora przemieszczenia F oraz chwilowego tensora przemieszczenia $F_{(t)}$, danego przez (4.3) i spróbujemy odnaleźć jeden operator definiujący oba obiekty przez odpowiedni dobór argumentów, to okazuje się, że dobrym takim operatorem jest następujący

$$(5.3) \quad \mathbb{F} : AKP(\mathcal{B}) \times RF \times AKP(\mathcal{B}) \times RF \rightarrow \mathcal{R},$$

określony przepisem

$$(5.4) \quad \mathbb{F}(\chi, \beta_1, \chi_2, \beta_2) = \{(\beta_{1t}^{-1} \circ \chi_t)_* \circ (\chi_{2t}^{-1} \circ \beta_{2t})_* : t \in T_{\chi_1}, t \in T_{\chi_2}\}$$

dla każdych dwóch procesów $\chi_1, \chi_2 \in AKP_{\mathcal{B}}$ oraz układów odniesienia $\beta_1, \beta_2 \in RF$.

Wybierając χ_2 oraz β_2 tak, że $\beta_{2t}^{-1} \circ \chi_{2t} \equiv \chi$ dla każdego $t \in T_{\chi_2} = T_{\chi}$, otrzymamy tensor przemieszczenia F wyżej określony, o ile $\chi_1 \equiv \chi, \beta_1 \equiv \beta$, zaś $\chi_* = \chi$. Aby odtworzyć chwilowy tensor przemieszczenia wystarczy wstawić w (5.4) $\chi_2 = \chi_1 \equiv \chi$ oraz $\beta_2 = \beta_1 \equiv \beta$.

Jeśli teraz przez $\mathbb{F}_{C-T} : (\chi, \beta) \mapsto \{(\beta_t^{-1} \circ \chi_t)_* \circ (\chi_t^{-1} \circ \beta_t)_* : t \in T_{\chi}\}$ oznaczymy operator wyznaczający chwilowy tensor przemieszczenia, to jak łatwo widać jest on obcięciem (zawężeniem) operatora \mathbb{F} występującego w (5.3) do (dziedziny) zbioru $\text{Diag } AKP(\mathcal{B}) \times \text{Diag } RF$, gdzie $\text{Diag } C$ oznacza przekątną produktu $C \times C$. Z kolei operator \mathbb{F}_{T-P} jest obcięciem tego samego operatora \mathbb{F} występującego w (5.3) do zbioru $AKP(\mathcal{B}) \times RF \times (AKP(\mathcal{B}) \times RF)_{fit}$, gdzie $(AKP(\mathcal{B}) \times RF)_{fit}$ oznacza zbiór par zgodnych dobranych w ten sposób, że

$$(5.5) \quad (\chi_2, \beta_2) \in (AKP(\mathcal{B}) \times RF)_{fit} \iff \beta_{2t}^{-1} \circ \chi_{2t} \equiv \chi \text{ dla } t \in T_{\chi_2} = T_{\beta_2}.$$

Zauważmy, że definicja (5.5) jest dana z dokładnością do elementów klasy równoważności wyznaczonej przez χ , tzn. wystarczy żądać by $\beta_{2t}^{-1} \circ \chi_{2t} \in \nabla \chi$ dla każdego $t \in T_{\chi_2}$.

Z powyższego przykładu wynika, że choć obiekty F oraz $F_{(t)}$ należą do obrazu tego samego operatora \mathbb{F} ich własności oznaczeni-

nicze są różne. Oczywiście natomiast wydaje się, że operator \mathbb{F} jest niezależny od układu odniesienia w klasie RF, gdzie termin "niezależność" rozumiemy tutaj w sensie intuicyjnym, gdyż takowego nie przynosi Definicja 4. Ta niezależność operatora \mathbb{F} od układu odniesienia jest w gruncie rzeczy niczym innym jak poprawnością jego definicji operacyjnej (5.4).

SPOSTRZEŻENIE 5. Poprawnie określony operator (5.3), tj. taki, że dla każdej pary ruchów $\chi_1, \chi_2 \in AK_B$ oraz pary układów odniesienia $\beta_1, \beta_2 \in RF$ transformatora obrazu (obiektu) $\mathbb{F}(\chi_1, \beta_1, \chi_2, \beta_2)$ jest zgodna z przekształceniami stycznymi β_{1x}, β_{2x} (innymi słowy, obiekt ten jest niezależny od układu odniesienia), zawężony do podzbioru dziedziny (por. operator $\mathbb{F}_{T-\tau}$) może wyznaczać obiekt zależny od układu odniesienia w klasie RF, jak i węższej klasie. \square

6. Zasada bezwładności.

Struktura włóknista czasoprzestrzeni związana z istnieniem czasu absolutnego jest wzbogacona przez przyjęcie, że obowiązuje pierwsza zasada dynamiki Newtona. Jej różne sformułowania często stają się równoważne, jeśli czasoprzestrzeni nada się strukturę przestrzeni afinicznej.

Pozostawiając na chwilę ciało odkształcalne, rozpatrzmy podstawowy obiekt mechaniki klasycznej - punkt materialny.

Dla niego można w sposób analogiczny wprowadzić pojęcia procesu kinematycznego oraz ruchu i jego pochodnych. W przyjmowanym sformułowaniu pierwsza zasada (postulat Newtona) stwierdza, że a/ istnieje wyróżniona klasa procesów kinematycznych (w sformułowaniu oryginalnym - ruchów) punktów materialnych zwanych procesami swobodnymi, b/ istnieją układy odniesienia, względem których ruchy, wyznaczone przez procesy swobodne, odbywają się bez przyspieszeń (por. Ingarden i Jamiołkowski [1980]).

Zwykle do punktu a/ dodaje się komentarz, który wskazuje kiedy mamy do czynienia z procesami swobodnymi. Otóż procesy swobodne mają miejsce wtedy, kiedy na punkt materialny czy ciało nie działają żadne wpływy zewnętrzne. Inaczej: procesy swobodne to sposób w jaki poruszają się wszystkie te ciała (i punkty

materialne), które są doskonale odizolowane od jakichkolwiek wpływów zewnętrznych, tzn. nie podlegają żadnym oddziaływaniom pochodzącym od innych ciał.

Aby powyższe sformułowanie pierwszej zasady przenieść na grunt mechaniki ciał odkształcalnych wprowadza się dla ciała B pojęcie: pędu ciała B względem układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$ w procesie kinematycznym $\chi: \Gamma_\chi \times B \rightarrow W$ jako wartości liniowego i ciągłego w μ morfizmu $\mathcal{L}_B(\mu, \dot{\mu}(\cdot)) \in \text{Mor}(\Gamma_\mu, \mathbb{R}^3)$ gdzie $\mu(\tau) := \beta_\tau^{-1} \circ \chi_\tau, \tau \in \Gamma_\chi$ oraz całkowitej siły działającej na B w procesie χ , oznaczonej dalej przez $\mathcal{F}(\chi) := \{\mathcal{F}(\chi_\tau) \in \mathcal{T}(\text{ch}^{-1}(\tau)) : \tau \in \Gamma_\chi\}$. Należy zauważyć, że jeśli miara M zdefiniowana na ciele B jest nieznikająca tożsamościowo, to liniowy morfizm \mathcal{L}_B jest nietrywialny.

Procesem kinematycznym swobodnym nazywamy taki proces $\chi: \Gamma_\chi \times B \rightarrow W$, który spełnia dwa warunki:

a/ całkowita siła $\mathcal{F}(\chi)$ działająca na B jest równa zeru tzn. $\mathcal{F}(\chi_\tau) \equiv 0$, dla $\tau \in \Gamma_\chi$.

b/ względem każdego układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$ ruch $\mu = \beta \circ \chi$ jest "ciągłem" izometrii, tzn. dla każdych dwóch chwil $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma_\chi$ umiejscowienia $\mu(\tau_1): \mu(\tau_2)$ są homotopijne w podklasie $\text{BIC}_{\mathbb{R}^3}^{\tau_1, \tau_2}$.

Zasada dynamiki dla ciał odkształcalnych przyjmuje postać dwóch stwierdzeń:

a/ istnieją swobodne procesy kinematyczne dla ciał,

b/ istnieje układ odniesienia, względem którego pęd każdego ciała w procesie swobodnym jest niezależny od czasu.

W przeważającej części znanych teorii mechaniki kontinuum morfizm \mathcal{L}_B definiujący pęd ciała B na własność: jeśli ruch $\mu: \Gamma_\mu \times B \rightarrow \mathcal{E}$ jest "ciągłem" izometrii, to dla każdego $\tau \in \Gamma_\mu$ i każdego "ciągu" automorfizmów $g: \Gamma_\mu \rightarrow \mathcal{J}$: $\mathcal{L}_B(\mu, \dot{\mu}(\tau)) = \mathcal{L}_B(g \circ \mu, \dot{\mu}(\tau))$ Stąd otrzymujemy $\mathcal{L}_B(\mu, \dot{\mu}(\tau)) = \mathcal{L}_B(\mu(\tau_0)^*, \dot{\mu}(\tau))$, gdzie τ_0 jest pewną chwilą z Γ_μ zaś $\mu(\tau_0)^*$ jest stałą funkcją na Γ_μ o wartości $\mu(\tau_0)$. Własność ta wiąże się z zazwyczaj przyjmowanym prawem stałości masy w ruchach sztywnych ciał odkształcalnych. W dalszej części ograniczamy się do przypadków ciał spełniających powyższy warunek. Bezpośrednio z zasady otrzymujemy następujące:

SPOSTRZEŻENIE 6. Jeśli $\{\mathcal{E}, \beta\}$ jest układem odniesienia, o którym mowa w punkcie b/ zasady, to układ $\{\mathcal{E}, \beta_1\}$ spełnia

warunki z punktu b/ wtedy i tylko wtedy, gdy jest powiązany transformacją Galileusza. Wtedy oba te układy nazwiemy inercyjnymi.

Dowód. Stałość $\mathcal{L}_B(\mu, \dot{\mu}(t))$ w czasie oznacza, że $\frac{d}{dt} \mathcal{L}_B(\mu, \dot{\mu}(t)) = 0$. Zgodnie z określeniem morfizmu \mathcal{L}_B i jego własnościami mamy $\mathcal{L}_B(\mu, \dot{\mu}(t)) = \mathcal{L}_B(\mu(t_0)^+, \dot{\mu}(t)) = 0$. Niech μ' będzie ruchem względem β_1 . Wtedy ze względu na (3.1) oraz (2.2) μ' jest „ciągłem” izometrii i

$$\mathcal{L}_B(\mu', \dot{\mu}'(t)) = \mathcal{L}_B(\mu(t_0)^+, \dot{\mu}'(t)) = Q(t) \mathcal{L}_B(\mu(t_0)^+, \dot{\mu}(t)) + \mathcal{L}_B(\mu(t_0)^+, \dot{c}(t)) + 2A(t) \mathcal{L}_B(\mu(t_0)^+, \dot{\mu}'(t) - \dot{c}(t)) + (\dot{A}(t) - A^2(t)) \mathcal{L}_B(\mu(t_0)^+, \mu'(t) - c(t)),$$

gdzie $Q(t) = (\beta_1^{-1} \circ \beta_t)_*$ i $A(t) = \dot{Q}(t) Q(t)^T$.

Skoro $\mathcal{L}_B(\mu(t_0)^+, \dot{\mu}(t))$ ma znikać tożsamościowo ze względu na B oraz $t \in \Gamma_\chi$, jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$A(t) \equiv 0$ oraz $\dot{c}(t) = 0$. Stąd ze względu na reprezentację (2.4) transformacji Galileusza otrzymujemy tezę. \square

Jak dotąd nie potrzeba było wprowadzać do W struktury afinicznej. Dla porównania zatrzymajmy się nad konsekwencją I zasady dynamiki dla punktów materialnych. Jeśli m jest masą punktu materialnego, to jego pęd w procesie $\chi: \Gamma_\chi \rightarrow W$ względem układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$ będzie $m\dot{\mu}(t)$.

Jeśli proces χ jest swobodny a układ β jest inercyjny, to $m\dot{\mu}(t) = 0$ i dla każdego $s \in \mathbb{R}$, takiego, że $t+s \in \Gamma_\chi$, mamy

$$(6.1) \quad \mu(t+s) = \mu(t) + sV,$$

gdzie $V \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$ jest pewnym ustalonym wektorem. Stąd otrzymujemy dwie relacje:

$$\chi_{t+s} - \beta_{t+s} \circ \beta_t^{-1} \circ \chi_t = s \beta_{t+s*} V \in \mathcal{T}(\hat{ch}^{-1}(t+s))$$

$$\beta_t \circ \beta_{t+s}^{-1} \circ \chi_{t+s} - \chi_t = s \beta_{t*} V \in \mathcal{T}(\hat{ch}^{-1}(t))$$

dla każdych t i s takich, że $t+s \in \Gamma_\chi$. Obie relacje wskazują, że rzuty linii świata rozpatrywanego punktu materialnego na przestrzeń zdarzeń równoczesnych dla każdej chwili z przedziału Γ_χ są wyznaczone przez jeden wektor V oraz

odstęp czasu s jaki upłynął między porównywanymi zdarzeniami χ_{r+s} i χ_r ; druga relacja pokazuje, że rzut ten jest linią prostą. Ten fakt posłużył już dość dawno fizykom jako motywacja dla wprowadzenia w czasoprzestrzeni struktury afinicznej.

Przyjęcie, że W posiada obok struktury włóknistej strukturę afiniczną jest wygodnym założeniem a nie konsekwencją dotychczasowych rozważań i I-szej zasady dynamiki. Wtedy można mówić o liniach prostych w czasoprzestrzeni. Proste te przedstawiają linie świata procesów swobodnych punktów materialnych.

Jeśli W jest przestrzenią afiniczną, to z istnienia czasu absolutnego, tj. struktury włóknistej, wynika, że można wyróżnić nie tylko prostoliniowe układy współrzędnych ale węższą klasę-inercyjne układy współrzędnych.

Skoro zasada bezwładności wyróżnia klasę układów inercyjnych zatrzymajmy swoją uwagę na zbiorze zdarzeń W wyposażonym w rodzinę $IF \subset RF$, gdzie

$IF := \{ \beta \in RF : \text{każde dwa elementy } IF \text{ są połączone transformacją Galileusza} \}$.

Z ostatnio udowodnionego spostrzeżenia 6 wynika, że jeśli do zbioru IF należy choćby jedna mapa β , taka że $\{ \mathcal{E}, \beta \}$ tworzy układ inercyjny, to zbiór IF zawiera wszystkie układy inercyjne. Na marginesie warto wspomnieć, że w praktyce nie potrafimy wskazać ani jednego - jak to się mówi - w „pełni inercyjnego” układu odniesienia. Możemy natomiast podać układy, które z dużym przybliżeniem mogą pełnić rolę układów inercyjnych w stosunku do określonych zjawisk mechanicznych.

Zbiór $\{ W, IF \}$ może być wyposażony w strukturę afiniczną w następujący sposób:

wyberzmy dowolny element $j \in W$ i określmy przestrzeń styczną (translacyjną) $\mathcal{T}(W)$ jako parę $\{ W, j \}$ wraz z działaniami, następująco, dla dowolnych zdarzeń $e, f \in W$ oraz liczby rzeczywistej $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(6.1)_a \quad e + f := \beta \left(\{ \beta^{-1}(e) + (\beta^{-1}(f) - \beta^{-1}(j)) \} \right)$$

$$(6.1)_b \quad \lambda e := \beta \left(\{ \beta^{-1}(j) + \lambda (\beta^{-1}(e) - \beta^{-1}(j)) \} \right)$$

dla dowolnej mapy $\beta \in \Gamma^F$ zawierającej w swej przeciw-dziedzinnie $e, f \in \mathcal{N}_e$, gdzie działania w iloczynie $\Gamma_\beta \times \mathcal{E}$ są rozumiane jako działania w każdym czynniku osobno. Należy wykazać, że lewa strona jest dobrze określona, tzn. nie zależy od wybranej mapy

β . Wpierw zauważmy, że zdarzenie $e + f$ nastąpiło w chwili $\hat{c}h_j(e+f) := \hat{c}h(e) + (\hat{c}h(f) - \hat{c}h(j))$, gdzie wyrażenie w nawiasie oznacza wektor w przestrzeni $\mathcal{T}(\Gamma)$, zaś plus jest działaniem (translacją) w przestrzeni chwil Γ . Z tym spostrzeżeniem przystąpmy do wykazania poprawności definicji sumy dwóch wektorów (zdarzeń).

Niech $\beta_1 \in \Gamma^F$ i $\Gamma_{\beta_1} \supset \Gamma_\beta$, wtedy ze względu na fakt, że mapy $\beta : \Gamma_\beta \times \mathcal{E} \rightarrow \hat{c}h^{-1}(\Gamma_\beta)$ oraz $\beta_1 : \Gamma_{\beta_1} \times \mathcal{E} \rightarrow \hat{c}h^{-1}(\Gamma_{\beta_1})$ są z atlasu RF wystarczy wykazać, że

(6.2)

$$\beta_{\hat{c}h_j(e+f)} \left(\beta_{\hat{c}h(e)}^{-1}(e) + (\beta_{\hat{c}h(f)}^{-1}(f) - \beta_{\hat{c}h(j)}^{-1}(j)) \right) = \beta_{\hat{c}h_j(e+f)} \left(\beta_{\hat{c}h(e)}^{-1}(e) + (\beta_{\hat{c}h(f)}^{-1}(f) - \beta_{\hat{c}h(j)}^{-1}(j)) \right).$$

W kolejności przekształceń lewej strony przy wykorzystaniu postaci transformacji Galileusza (2.2) - (2.4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \beta_{(e+f)} \left(\beta_{(e)}^{-1} \circ \beta_{2(e)} \beta_{2(e)}^{-1}(e) + (\beta_{(f)}^{-1}(f) \circ \beta_{2(f)} \beta_{2(f)}^{-1}(f) - \beta_{(j)}^{-1} \circ \beta_{2(j)} \beta_{2(j)}^{-1}(j)) \right) \\ &= \beta_{(e+f)} \left(q_0 + c_0 \cdot (\hat{c}h(e) - \mathcal{I}_0) + g_{\beta_1} \beta_1 * (\beta_{2(e)}^{-1}(e) - q_1) + (c_0 \cdot (\hat{c}h(f) - \hat{c}h(j)) \right. \\ & \quad \left. + g_{\beta_1} \beta_1 * (\beta_{2(f)}^{-1}(f) - \beta_{2(j)}^{-1}(j))) = \beta_{(e+f)} \circ \beta_{2(e+f)}^{-1} \circ \beta_{(e+f)} \left(q_0 + \right. \\ & \quad \left. + c_0 \cdot (\hat{c}h(e) + \hat{c}h(f) - \hat{c}h(j) - \mathcal{I}_0) + g_{\beta_1} \beta_1 * (\beta_{2(e)}^{-1}(e) + (\beta_{2(f)}^{-1}(f) - \beta_{2(j)}^{-1}(j)) - q_1) \right) \\ &= \beta_{2(e+f)} \circ g_{\beta_1} \beta_1 (\hat{c}h_j(e+f)) \circ g_{\beta_1} \beta_1 (\hat{c}h_j(e+f)) \left(\beta_{2(e)}^{-1}(e) + (\beta_{2(f)}^{-1}(f) - \beta_{2(j)}^{-1}(j)) \right) \end{aligned}$$

co kończy dowód równości (6.2), gdzie dla przejrzystości zapisu opuściliśmy symbol $\hat{c}h$. Przechodząc do dowodu poprawności (6.1) b) zauważmy, że zdarzenie λe nastąpiło w chwili $\hat{c}h_j(\lambda e) := \hat{c}h(j) + \lambda(\hat{c}h(e) - \hat{c}h(j))$. Podobnie jak poprzednio wystarczy wykazać równość

$$\begin{aligned} & \beta_{\hat{c}h_j(\lambda e)} \left(\beta_{\hat{c}h(j)}^{-1}(j) + \lambda (\beta_{\hat{c}h(e)}^{-1}(e) - \beta_{\hat{c}h(j)}^{-1}(j)) \right) \\ (6.3) \quad &= \beta_{2(\hat{c}h_j(\lambda e))} \left(\beta_{2(\hat{c}h(j))}^{-1}(j) + \lambda (\beta_{2(\hat{c}h(e))}^{-1}(e) - \beta_{2(\hat{c}h(j))}^{-1}(j)) \right) \end{aligned}$$

W kolejności przekształceń, otrzymujemy dla lewej strony

$$\begin{aligned} & \beta_{1(e)} (\beta_{1(j)}^{-1} \circ \beta_{1(j)} \circ \beta_{1(j)}^{-1}(j)) + \lambda (\beta_{1(e)}^{-1} \circ \beta_{1(e)} \circ \beta_{1(e)}^{-1}(e) - \beta_{1(j)}^{-1} \circ \beta_{1(j)} \circ \beta_{1(j)}^{-1}(j)) \\ &= \beta_{1(e)} (q_0 + c_0 \cdot (\hat{c}_h(j) - \eta_0)) + g \beta \beta_1 \times (\beta_{1(j)}^{-1}(j) - q_1) + \lambda (g \beta \beta_1 \times (\beta_{1(e)}^{-1}(e) - \beta_{1(j)}^{-1}(j))) \\ & \quad + c_0 \cdot (\hat{c}_h(e) - \hat{c}_h(j))) = \beta_{1(\eta_e)} \circ \beta_{1(\eta_e)}^{-1} \circ \beta_{1(\eta_e)} (q_0 + c_0 \cdot (\hat{c}_h(j) + \\ & \quad + \lambda (\hat{c}_h(e) - \hat{c}_h(j)) - \eta_0) + g \beta \beta_1 \times (\beta_{1(j)}^{-1}(j) + \lambda (\beta_{1(e)}^{-1}(e) - \beta_{1(j)}^{-1}(j)) - q_1)) \\ &= \beta_{1(\eta_e)} \circ g \beta \beta_1^{-1} (\hat{c}_h(\eta_e)) \circ g \beta \beta_1 (\hat{c}_h(\eta_e)) (\beta_{1(j)}^{-1}(j) + \lambda (\beta_{1(e)}^{-1}(e) - \beta_{1(j)}^{-1}(j))), \end{aligned}$$

co kończy dowód równości prawej strony (6.2).

Nie budzi zastrzeżeń równość $e + f = f + e$ dla każdej pary zdarzeń $e, f \in \mathcal{W}$, gdyż \mathcal{E} jest przestrzenią afiniczną a w niej równości $(x-y) + (z-v) = x + (z-v) - y$ oraz $x + (y-v) = y + (x-v)$ są spełnione dla dowolnych punktów $x, y, z, v \in \mathcal{E}$. Ten fakt wraz z innymi własnościami działań w \mathcal{E} oraz $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ wystarczająco, by wykazać, że działania (6.1) a, b spełniają wszystkie aksjomaty przestrzeni wektorowej, której elementem neutralnym (wektorem zerowym) jest zdarzenie j ; rzeczywiście dla dowolnego $e \in \mathcal{W}$ otrzymamy

$$e + j := \beta (\beta^{-1}(e) + (\beta^{-1}(j) - \beta^{-1}(j))) = \beta \beta^{-1}(e) = e.$$

Stąd już automatycznie przychodzi nam zdefiniować odejmowanie w przestrzeni \mathcal{W} , traktowanej jako przestrzeń afiniczna,

$$(6.4) \quad e - f := e + (-1) \cdot f,$$

gdzie po prawej stronie występuje dodawanie w przestrzeni wektorowej $\mathcal{T}(\mathcal{W}) \equiv \{ \mathcal{W}, j \}$ oraz mnożenie przez skalar, oba działania zdefiniowane przez (6.1). W ten sposób określimy strukturę afiniczną w \mathcal{W} .

W przestrzeni translacyjnej $\mathcal{T}(\mathcal{W})$ wydzielimy podzbiór $\mathcal{T}(\mathcal{W}_p) := \hat{c}_h^{-1}(\hat{c}_h(j))$, tj. zbiór zdarzeń równoczesnych ze zdarzeniem j . Nie trudno wykazać, korzystając z (6.1), że $\mathcal{T}(\mathcal{W}_p)$ jest

podprzestrzenią $\mathcal{T}(W)$. Z drugiej strony zauważmy, że rzut wiązki $\hat{c}_h: W \rightarrow \Gamma$ generuje odwzorowanie styczne $\hat{c}_{h*}: \mathcal{T}(W) \rightarrow \mathcal{T}(\Gamma)$ między przestrzeniami translacyjnymi przestrzeni $\{W, \mathcal{T}(W)\}$ oraz $\{\Gamma, \mathcal{T}(\Gamma)\}$. Jako odwzorowanie afiniczne rzut \hat{c}_h spełnia równość $\hat{c}_h(e) - \hat{c}_h(f) = \hat{c}_{h*}(e-f)$, a ponadto zgodnie z (6.1) i późniejszą definicją \hat{c}_{h_j} , mamy

$$\hat{c}_{h*}(e-f) = \hat{c}_{h_j}(e+(-f)) - \hat{c}_h(j).$$

Zauważmy, że zdarzenie f jest równoczesne ze zdarzeniem e , o ile zdarzenie $e-f$ jest równoczesne ze zdarzeniem j . To spostrzeżenie pozwala napisać inny warunek definiujący podprzestrzeń $\mathcal{T}(W_p)$

$$(6.5) \quad \mathcal{T}(W_p) \equiv \{v \in \mathcal{T}(W) : \hat{c}_{h*}(v) = 0\}.$$

Elementy podprzestrzeni $\mathcal{T}(W_p)$ nazywa się często wektorami przestrzennymi. Jeśli wykorzystamy następujący fakt: podprzestrzeń \mathcal{T}_p przestrzeni wektorowej \mathcal{T} określa z dokładnością do stałego czynnika formę $\tau \in \text{lin}(\mathcal{T}, \mathbb{R})$, która znika na \mathcal{T}_p , to z jednoznaczności formy \hat{c}_{h*} wyznaczonej przekształceniem afinicznym \hat{c}_h wynika, że podprzestrzeń wektorów przestrzennych w czasoprzestrzeni W jest niezależna od konstrukcji struktury afinicznej w W . Przy obecnej konstrukcji struktury afinicznej wektory przestrzenne są reprezentowane przez zdarzenia równoczesne ze zdarzeniem j . (Obecna sytuacja jest podobna do tej występującej przy wprowadzaniu pojęcia wektora stycznego do różności, raz jest to klasa równoważności krzywych, kiedy indziej klasa równoważności par: wektor z przestrzeni Banacha - mapa).

Z definicji $\mathcal{T}(W_p)$ wynika, że przestrzenie zdarzeń równoczesnych są równoległymi przestrzeniami afinicznymi, gdyż przestrzeń zdarzeń równoczesnych ze zdarzeniem e otrzymuje się dodając do e dowolny wektor przestrzenny, tzn.

$$\hat{c}_h^{-1}(\hat{c}_h(e)) = e + \mathcal{T}(W_p) := \{e+f : f \in \mathcal{T}(W_p) \equiv \hat{c}_h^{-1}(\hat{c}_h(j))\}.$$

Dla uniknięcia nieporozumień wektory będziemy oznaczać symbolem zdarzenia z podkreśleniem np. $\underline{f} \in \mathcal{T}(W)$.

Skoro przestrzeń $\{\mathcal{W}, \mathbb{R}\}$ posiada strukturę afiniczną wyróżnioną w niej klasę inercyjnych reperów. Zgodnie z definicją reperem przestrzeni afinicznej $\{\mathcal{W}, \mathcal{T}(\mathcal{W})\}$ nazywamy układ $\{p, e_i\}$, gdzie $p \in \mathcal{W}$ zaś $\{e_i; i=1, \dots, 4\}$ bazą przestrzeni wektorowej $\mathcal{T}(\mathcal{W})$. Każdy punkt $f \in \mathcal{W}$ można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$f = p + \xi^i(f) e_i,$$

gdzie $\xi^i(f) \in \mathbb{R}$ są rozkładem wektora $f-p$ w bazie $\{e_i\}$. Z tego widać, że wybierając zdarzenie $p \in \mathcal{W}$ oraz czwórkę wektorów liniowo niezależnych w $\mathcal{T}(\mathcal{W})$ utworzyliśmy prostoliniowy /kartezjański/ układ współrzędnych $\{\xi^i\}$. Zapisuję inaczej: $\xi: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$, jest wzajemnie jednoznaczny odwzorowaniem a para (\mathcal{W}, ξ) jest mapą, której dziedziną jest cała przestrzeń.

Reperem inercyjnym (inercyjnym układem współrzędnych $\{\xi^i\}$) nazywamy reper $\{p, e_i\}$ (odpowiednio $\{\xi^i\}$) taki, że

- 1° $\hat{h}_x(e_4) = 1$,
- 2° $\hat{h}_x(e_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$,
- 3° $h(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$,

gdzie $h(\cdot, \cdot): \mathcal{T}(\mathcal{W}_p) \times \mathcal{T}(\mathcal{W}_p) \rightarrow \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym (dodatnio określoną i symetryczną formą biliniową zgodną z funkcją odległości $\hat{d} \equiv \{d(\cdot, \cdot): \tau \in \Gamma\}$ wprowadzoną w p.2), tzn. jeśli e, f są zdarzeniami równoczesnymi, czyli $e, f \in \mathcal{T}(\mathcal{W}_p)$, wtedy

$$(6.6) \quad h(e-f, e-f) = (\hat{d}(e, f))^2.$$

Zauważmy, że wektory e_α są przestrzenne, wzajemnie prostopadłe o długości równej 1 (w sensie iloczynu h); dzięki warunkom 1° i 2° dla dowolnego zdarzenia $e \in \mathcal{W}$, równość

$$(6.7) \quad \hat{c}h(e) - \hat{c}h(p) = \hat{c}h_x(\xi^i(e) e_i) = \xi^4(e)$$

pozwala nazwać współrzędną $\xi^4(e)$ czasem absolutnym t zdarzenia e liczoną od punktu (zdarzenia) p .

Nietrudno wykazać słuszność następującego spostrzeżenia /por. W.Kopczyński, A.Trautman [1981]/.

SPOSTRZEŻENIE 7. Jeśli czwórkę $\{\mathcal{W}, \mathcal{T}(\mathcal{W}), \hat{c}h_x, h\}$ nazwiemy.

czasoprzestrzeni Galileusza, to każde przekształcenie \hat{f} wzajemnie jednoznaczne \hat{W} na siebie zachowujące strukturę afiniczną oraz formę $\hat{ch}_x: \mathcal{T}(\hat{W}) \rightarrow \mathbb{R}$, oraz iloczyn skalarny $h: \mathcal{T}(\hat{W}_p) \times \mathcal{T}(\hat{W}_p) \rightarrow \mathbb{R}^t$, gdzie $\mathcal{T}(\hat{W}_p)$ jest określone przez (6.5), ma następującą postać w

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \xi'^\alpha &= R^\alpha_\beta \xi^\beta + V^\alpha t + a^\alpha, & R^\alpha_\beta R^\gamma_\delta \delta_{\alpha\gamma} &= \delta_{\beta\delta}, \\ t' &= t + t_0, \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy następujący rozkład punktu $e \in \hat{W}$ i jego obrazu $\hat{f}(e)$ po przekształceniu, oba względem reperu inercyjnego $\{p, \underline{e}_i\}$:

$$e = \xi^\alpha \underline{e}_\alpha + t \underline{e}_4 + p, \quad \hat{f}(e) = \xi'^\alpha \underline{e}_\alpha + t' \underline{e}_4 + p,$$

przy czym

$$V^\alpha \underline{e}_\alpha + \underline{e}_4 = \hat{f}_x(e_\alpha), \quad p + a^\alpha \underline{e}_\alpha + t_0 \underline{e}_4 = \hat{f}(p), \quad R^\beta_\alpha \underline{e}_\beta = \hat{f}_x(\underline{e}_\alpha). \quad \square$$

Przypomnijmy sobie w tym miejscu wyniki p.2 dotyczące postaci transformacji Galileusza (2.2) - (2.4), porównując je z (6.8) stwierdzamy, że są nośnikami tej samej informacji, lecz w różnych reprezentacjach: w $\hat{\mathcal{E}}$ oraz w reperze inercyjnym czasoprzestrzeni Galileusza.

W układzie inercyjnym $\{\xi^i\}$ generowanym przez reper inercyjny $\{p, \underline{e}_i\}$ przestrzenie zdarzeń równoczesnych dane są równaniem $\xi^4 = \text{const}$, stąd przyjęło się dla nich nazwę hiperpłaszczyzn równoczesności; współrzędne inercyjne noszą też nazwę współrzędnych czasoprzestrzennych dostosowanych. Dla pełnego obrazu trzeba dodać, że iloczyn skalarny h nie jest tutaj wprowadzony ad hoc, gdyż zgodnie z definicją 2 czasoprzestrzeni \hat{W} każde włókno $\hat{ch}^{-1}(t), t \in \Gamma$, jest izomorficzne z przestrzenią euklidesową \mathcal{E} , w której istnieje iloczyn skalarny l taki, że $\langle l u, u \rangle = d \langle x, y \rangle_{\mathcal{E}}^2$, gdy $u = x - y \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$.

7. Czasoprzestrzeń Galileusza czy Newtona?

Jeśli przyjmiemy zasadę bezwładności w jej sformułowaniu klasycznym, to tym samym zgodzimy się na wyróżnienie pewnej klasy układów odniesienia - klasy układów inercyjnych.

Zbiór zdarzeń \mathcal{W} z wyróżnioną podklasą IF klasy wszystkich map z atlasu RF tworzy przestrzeń afiniczną, jak to pokazaliśmy w poprzednim punkcie. Jasne ujęcie zasad mechaniki klasycznej jest możliwe dzięki wprowadzeniu czterowymiarowej czasoprzestrzeni Galileusza. Twierdzę więcej, że jedynie możliwe konsekwentne ujęcie zasad mechaniki i termodynamiki ciał odkształcalnych w postaci zespołu praw zachowania, lub praw bilansu, mówiąc ściślej, jest w przypadku, gdy czasoprzestrzeń zdarzeń ma strukturę afiniczną, tzn. jest czasoprzestrzenią Galileusza $\{\mathcal{W}, IF\}$.

Celem, dla którego część badaczy podstaw mechaniki kontinuum, a wśród nich W. Noll, odrzucili koncepcję czasoprzestrzeni Galileusza na rzecz $\{\mathcal{W}, RF\}$ tzw. neo - klasycznej czasoprzestrzeni Newtona w Definicji 2, była chęć uwzględnienia i umotywowania od samego początku potrzeby żądania od związków konstytutywnych ich materialnej obiektywności. Żądanie to, zwane przez Truesdella i Nolla [1965] zasadą obiektywności materialnej, jest obecnie mocno dyskutowane. Istnieją prace (z kontr-przykładami), które tę zasadę kwestionują (por. I. Müller [1972, 1982] Edelen i McLennan [1973], Söderholon [1976, 1982], Murdoch [1982, 1983]).

Na obecnym etapie rozwoju badań nad podstawami mechaniki ośrodków ciągłych tzw. zasada obiektywności materialnej nie może być akceptowana bez ograniczeń. Gdy na przełomie lat 50-tych i 60-tych formułowano w literaturze podstawy tzw. „mechaniki racjonalnej”, wspomniana „zasada” była wygodnym narzędziem (w obróbce „skrawaniem”) analizy dopuszczalnych związków konstytutywnych materiałów prostych z pamięcią itp. W wielu monografiach „zasada obiektywności materialnej” była wyliczana jednym tchem wraz z bardzo kontrowersyjną i sztuczną zasadą „współobecności”. Ta ostatnia znalazła się dosyć wcześnie na indeksie u dużej rzeszy autorów prac z zakresu teorii równań konstytutywnych, jako że jej uwzględnienie oznacza ograniczenie do minimum roli obserwacji fizycznej na korzyść formalnych schematów postępowania (por. Woods [1973, 1981]).

Obecny stan badań pozwala wskazać kilka niezależnych prac, które wykazały, że zasady: obiektywności materialnej i nie-

zależności własności materialnych od nałożonego sztywnego ruchu, są równoważne, jeśli analizujemy tylko ograniczenie, jakie one nakładają na funkcje konstytutywne.

Istotne w tym jest spostrzeżenie, że sformułowanie obu zasad jest odmienne i wychodzą one z innych przesłanek fizycznych (Murdoch [1982]). Aby jednak być w zgodzie z obecnym stanem rzeczy, należy dodać, że istnieją w literaturze dwie interpretacje zasady niezależności własności materialnych od nałożonego sztywnego ruchu. W zalecanej przez Mullera, Murdocha, Rivlina wersji widzimy możliwość uniknięcia wprowadzenia neoklasycznej czasoprzestrzeni i zasady obiektywności materialnej, utrzymując czasoprzestrzeń Galileusza oraz konsekwentny i spójny układ zasad mechaniki i termodynamiki w postaci całkowo-różniczkowych praw bilansu. Dodatkowym argumentem przemawiającym za prezentowanym tutaj ujęciem, odmiennym od tego jaki można znaleźć w wykładach Nolla [1973], jest próba sformułowania podstaw mechaniki w języku dopuszczającym analizę zjawisk z osobliwościami (typu fal uderzeniowych). W tym przypadku prawa bilansu są naturalnym opisem pól, w którym jest możliwe zdefiniowanie rozwiązań i procesów słabych (ogólnionych).

Aby wypublikować odmienność obecnego sformułowania, przypomnijmy, że w ujęciu Nolla [1959, 1973] mechanika jest budowana na postulacie zrównoważenia sił, który nie wprowadza ani pojęcia pędu, ani momentu pędu.

Jego spełnienie prowadzi do bilansu sił (tj. suma sił objętościowych i powierzchniowych działających na ciało i każde jego podciało w pewnym oraz w każdym umiejscowieniu jest zero) oraz bilansie momentów, które sprowadza się do symetrii tensora naprężenia. Dzięki temu podejściu równanie bilansu sił ma postać równania równowagi i jest niezależne od układu odniesienia w klasie RF, lecz nie ma możliwości ujęcia go w postaci prawa bilansu. Dodatkowy postulat (tzw. zewnętrzne założenie konstytutywne) wprowadza rozbitcie sił objętościowych na siły inercyjne i grawitacyjne.

Następny krok Nolla to postulowanie prawa bilansu energii w postaci, która wymaga spełnienia prawa bilansu sił (równanie

ruchu lub równowagi). W tym przypadku także postać równań jest niezależna od układu odniesienia w klasie RF, a także od warunków ruchu, lecz nie ma - jak poprzednio - możliwości zapisania jego jako C- π prawa bilansu.

Podejście proponowane przez Nolla ma swoje uzasadnienie wtedy, gdy zależy nam na postaci praw niezależnej od układu odniesienia w klasie RF, przy analizie ograniczeń termodynamicznych na funkcje konstytutywne, jakie niesie nierówność Clausiusa-Duhema. Ponadto podejście to ma rację bytu tylko wtedy, gdy analizowane procesy są odpowiednio gładkie i założone zostało istnienie klasycznych (silnych) rozwiązań występującego układu równań w badanym przedziale czasu. Jak wiemy często to ostatnie założenie - przy nieliniowej strukturze równań - może być spełnione tylko na małym odcinku czasowym.

8. Brzeg ciała i jego podciała

Wprowadzenie praw bilansu musimy poprzedzić uściśleniem takich pojęć jak podciało i brzeg ciała. Podzbiory ciała, które w umiejscowieniach z klasy \mathcal{C} są reprezentowane przez obszary dopuszczające stosowanie twierdzenia Greena-Gaussa Ostrogradskiego dla funkcji z osobliwościami, mogą być odpowiednimi kandydatami na podciała. Żądaniem naturalnym w takim przypadku jest, by przemieszczenia z rodziny $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ zachowywały tę własność obrazów podciał z jednego umiejscowienia. Okazuje się, że najszerszą dotąd poznaną klasą podzbiorów w \mathcal{E} , spełniającą te wymagania, jest klasa zbiorów o skończonym perimetrze.

DEFINICJA 5. Podzbiór $P \subset B$ nazwiemy podciałem ciała B, jeśli istnieje umiejscowienie $\gamma \in \mathcal{C}$ takie, że $\gamma(P) \subset \mathcal{E}$ jest zbiorem o skończonym perimetrze a ponadto P jest zbiorem M-mierzalnym.

Zbiory o skończonym perimetrze mają kilka równoważnych definicji. Przytoczmy tę najlepiej odpowiadającą celom pracy. Wpierw scharakteryzujemy klasę funkcji o skończonej wariacji w sensie Tonelli'ego - Cesari'ego, określonych na pewnym zbiorze otwartym $G \subset \mathbb{E}^n$. Jednym z warunków koniecznych i wystarczających na to, by funkcja $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ należała do wspomnianej

klasy, oznaczonej przez $BV(G)$ jest (por. Volpert i Čudajev [1975]), by była całkowalna na G oraz

$$(8.1) \bigvee_{K>0} \bigwedge_{\varphi \in C_0^1(G)} \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left| \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} f \, dx \right| \leq K \sup \{ |\varphi(x)| : x \in G \},$$

gdzie E^n oznacza n -wymiarową przestrzeń euklidesową, zaś $C_0^1(G)$ - zbiór funkcji klasy C^1 o zwartych nośnikach w G . Całkowalność i mierzalność są tutaj rozumiane w sensie Lebesgue'a.

Po zastosowaniu twierdzenia Riesz'a uzyskuje się następujący rezultat: jeśli $f \in BV(G)$, to jej pierwsze cząstkowe pochodne dystrybucyjne są skończonymi regularnymi miarami rzeczywistymi określonymi na \mathcal{G} - algebrze podzbiorów borelowskich zbioru G , tzn. są miarami Radona, zgodnie z nomenklaturą Alexiewicza [1969].

Zastępując zbiór G całą przestrzenią E^n definiujemy klasę $BV(E^n)$. Podzbiór ograniczony i mierzalny ACE^n ma skończony perimetr, jeśli jego funkcja charakterystyczna 1_A należy do klasy $BV(E^n)$. Jak się pokazuje (por. Volpert [1967]) podzbiór ograniczony i mierzalny ECE^n o brzegu ∂E kawałkami gładkimi (klasy C^1 , w szczególności) ma skończony perimetr $Per(E)$ równy $H_{n-1}(\partial E)$, $n-1$ wymiarowej mierze Hausdorffa brzegu.

Klasa zbiorów o skończonym perimetrze jest najszerszą znaną klasą zbiorów, w której obowiązuje uogólniona (tzn. w sensie miar) wersja twierdzenia Greena-Gaussa dla funkcji klasy $BV(E^n)$ (por. Volpert i Čudajev [1975] oraz Federer [1969]). Ponadto klasa tych zbiorów jest zamknięta ze względu na część wspólną oraz różnicę, zaś skończony perimetr jest niezmiennikiem transformacji bilipschittowskich.

Z tymi własnościami zaznajomieni - dalsze będziemy przytycać w miarę ich potrzeby - jesteśmy gotowi sformułować i przyjąć bez dowodu niżej (por. Banfi i Fabrizio [1981])

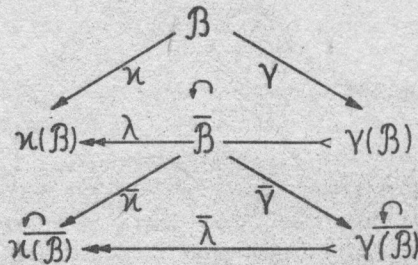
SPOSTRZEŻENIE 8. Jeśli podzbiór $P \subset B$ ma skończony perimetr w jednym umiejscowieniu, to ma skończony perimetr w każdym umiejscowieniu z \mathcal{C} . Ponadto klasa wszystkich podciał ciała B , oznaczana przez $\Omega(B)$, tworzy algebrę Booléa, jeśli ciało

\mathcal{B} jest swoim podciałem i za działania w algebrze wybierzemy sumę teoriomnogościową podciał i ich część wspólną, zaś relacją porządkującą będzie relacja zawierania. \square

Stąd wynika, że definicja podciała jest poprawna, nie zależy od umiejscowienia \mathcal{X} , a klasa podciał danego ciała nie zawsze tworzy algebrę Boole'a. Przypadki, gdy ciało nie jest swoim podciałem, wymagają odrębnego traktowania i w dalszej części w zasadzie ograniczymy nasze rozważania do przypadku omawianego w spostrzeżeniu 8 zaznaczając w niektórych miejscach, które z rezultatów przenoszą się na przypadek, gdy ciało nie ma skończonego perimetru.

Niech ciało \mathcal{B} jest swoim podciałem, wtedy można zanurzyć \mathcal{B} w jego atrakcyjne domknięcie $\overline{\mathcal{B}}$, określone jednoznacznie przez \mathcal{B} z dokładnością do (topologicznego) izomorfizmu. Procedurę tę, wzorowaną na tej przedstawionej przez Nolla [1978] przy odmiennej definicji ciała odkształcalnego, przedstawiamy pokrótce.

Skoro przemieszczenia z rodziny $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ są ciągłymi w sensie Lipschitza odwzorowaniami otwartych podzbiorów przestrzeni \mathcal{E} , istnieją ich ciągle rozszerzenia na całą przestrzeń zachowujące stałą Lipschitza; ten fakt gwarantuje twierdzenie Kirszbrauna [1934]. Dla naszych celów wystarczy ograniczyć swoją uwagę do rozszerzeń określonych na domknięciach dziedzin przemieszczeń. W samej rzeczy, dla każdego przemieszczenia $\mathcal{P}_{\mathcal{C}} = \lambda : \text{Dom } \lambda \rightarrow \text{Rng } \lambda$, gdzie oba zbiory $\text{Dom } \lambda$ i $\text{Rng } \lambda$ są otwarte, określamy rozszerzenie $\overline{\lambda} : \overline{\text{Dom } \lambda} \rightarrow \overline{\text{Rng } \lambda}$ spełniające warunek Lipschitza i określone na zbiorze zwartym o obrazie też zwartym. Jeśli umiejscowienia $\alpha, \delta \in \mathcal{C}$ spełniają warunek $\lambda = \alpha \circ \delta^{-1} : \delta(\mathcal{B}) \rightarrow \alpha(\mathcal{B})$, to domknięcie ciała \mathcal{B} jest zbiorem $\overline{\mathcal{B}}$ o własności: umiejscowienia α i δ mają jednoznacznie określone odwracalne rozszerzenie $\overline{\alpha} : \overline{\mathcal{B}} \rightarrow \overline{\alpha(\mathcal{B})}$ oraz $\overline{\delta} : \overline{\mathcal{B}} \rightarrow \overline{\delta(\mathcal{B})}$, które czynią poniższy diagram przemienny:



Rys. 1. Definicja brzegu ciała

gdzie symbol \hookrightarrow oznacza zanurzenie.

Wyposażając teraz zbiór \bar{B} w topologię w ten sposób, że zbiór $A \subset B$ jest otwarty, jeśli dla pewnego umiejscowienia $\delta \in \mathcal{C}$, a więc i dla każdego, zbiór $\delta(A)$ jest otwarty w \mathcal{E} , tworzymy z \bar{B} zwartą przestrzeń Hausdorffa spełniającą drugi aksjomat przeliczalności, gdyż umiejscowienia są bijekcjami.

Ciało B jest otwarte w tej topologii, zbiór \bar{B} jest domknięciem ciała w tej topologii, natomiast podzbiór $\partial B := \bar{B} \setminus B$ jest brzegiem ciała B . Ponadto, dla każdego umiejscowienia $\alpha \in \mathcal{C}$

$$(7.2) \quad \bar{\alpha}(\partial B) = \partial \bar{\alpha}(\bar{B}),$$

a jeśli $\lambda: \delta(B) \rightarrow \alpha(B)$ jest przemieszczeniem z δ do α , to rozszerzenie $\bar{\lambda}: \delta(\bar{B}) \rightarrow \alpha(\bar{B})$ zachowuje brzeg, tzn.

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \bar{\lambda}(\partial \delta(B)) &= \partial \alpha(B) \\ \bar{\lambda}(\partial \delta(\bar{B})) &= \partial \bar{\lambda}(\bar{B}), \end{aligned}$$

gdzie użyliśmy tego samego symbolu ∂ dla oznaczenia operacji brzegu, raz w topologii ciała, a raz w topologii \mathcal{E} .

Powiązanie z każdym umiejscowieniem $\alpha \in \mathcal{C}$ jego rozszerzenia $\bar{\alpha}$ do domknięcia \bar{B} może być wykorzystane przy definicji klasy rozszerzeń umiejscowień (lub umiejscowień rozszerzonych)

$$\bar{\mathcal{C}} := \{ \bar{\alpha} : \bar{\alpha}|_B = \alpha, \bar{\alpha}: \bar{B} \rightarrow \alpha(\bar{B}), \alpha \in \mathcal{C} \}.$$

Możliwość jednoznacznego określenia klasy \mathbb{C} dla ciała, które jest swoim podciałem, będzie wykorzystana w licznych miejscach tej pracy.

9. Prawa bilansu

Zasada bezwładności sformułowana dla ciała odkształcalnego wyczerpuje pierwsze prawo Newtona. Treść drugiego prawa zawiera się w stwierdzeniu, że zmiana pędu ciała jest wywołana całkowitą siłą na nie działającą:

$$(9.1) \quad \frac{d}{dt} L_B(\mu, \dot{\mu}(t)) = \mathcal{F}(\alpha_t, \beta_t)$$

o ile ruch μ , określony przez $\mu(t) := \beta_t^{-1} \circ \chi_t$ dla $t \in \Gamma_\chi$, wywołany procesem kinematycznym $\chi: \Gamma_\chi \times \mathcal{B} \rightarrow W$ odbywa się względem inercyjnego układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$.

Argumentami morfizmu \mathcal{F} , obok jawnie tu występującymi procesem oraz mapą układu odniesienia, mogą być wielkości charakteryzujące otoczenie ciała B oraz dodatkowe pola zdefiniowane na ciele, jeśli dopuścimy do rozważań inne zjawiska obok zjawisk mechanicznych.

9.1. Bilans masy

Podstawowym założeniem - opartym na obserwacji fizycznej - robionym w mechanice kontinuum jest rozkład siły działającej na ciało na części: powierzchniową i objętościową. Część powierzchniowa modeluje działanie zewnątrz ciała /tzw. "zewnętrznego świata"/ zlokalizowane do powierzchni rozgraniczającej ciało i otoczenie. Tą powierzchnią rozgraniczającą jest brzeg ciała abstrakcyjnie zdefiniowany w poprzednim punkcie.

Rodzaj sił objętościowych, ich pochodzenie są zależne od sytuacji fizycznej, do której budowany układ równań ma się odnieść. Potrzeba uwzględnienia praw grawitacji Newtona daje jedną z możliwych interpretacji tych sił jako sił grawitacji b_g . Reprezentacja siły b_g zwykle ma postać

$$b_g = \int_{\mathcal{B}} \nabla \phi \circ \mu \, dm_g,$$

gdzie $\phi: \Pi_x \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ jest potencjałem grawitacyjnym zewnątrz ciała, μ ruchem, zaś m_g - miarą zadaną na \mathcal{G} -algebrze podzbiorów ciała B, zwaną rozkładem masy grawitacyjnej. Doświadczalnie potwierdzamy fakt równości masy m_g oraz masy bezwładnej M , o której mowa w definicji 1 ciała, prowadzi do reprezentacji

$$(9.2) \quad m_g(B) = \int_{\mu(B)} (\nabla \phi \circ \mu_r) \rho_{\mu_r} dv$$

przy założeniu, że masa M jest bezwzględnie ciągła względem objętościowej miary Lebesgue'a. To ostatnie założenie, kwestionowane w przypadku pól z osobliwościami oznacza, że z każdym umiejscowieniem α ciała B można związać gęstość masy $\rho_\alpha: \alpha(B) \rightarrow \mathbb{R}^+$ spełniającą zależność

$$(9.3) \quad M(P) = \int_{\alpha(P)} \rho_\alpha dv$$

dla każdego podzbioru borelowskiego P c.B. Zauważmy, że warunek (9.3) oznacza, że masa jest zachowana, tzn.

$$(9.4) \quad \rho_\gamma = \rho_\alpha \circ \lambda \cdot \det(\nabla \lambda)$$

dla każdego dwóch umiejscowień γ, α połączonych przemieszczeniem $\lambda: \gamma(B) \rightarrow \alpha(B)$.

Przypuśćmy, że masa bezwładna M nie jest reprezentowana w postaci (9.3) w dowolnym umiejscowieniu α , lecz istnieje koncentracja masy na pewnej powierzchni. W zapisie globalnym

$$(9.5) \quad M(B) = \int_{B_\alpha^\circ} \rho_\alpha dv + \int_{S_\alpha^\circ} \rho_{S_\alpha} da,$$

gdzie $B_\alpha^\circ \cap S_\alpha^\circ = \emptyset$, $\alpha(B) \subset B_\alpha^\circ \cup S_\alpha^\circ$ oraz $\text{vol}(S_\alpha^\circ) = 0$, $H_2(S_\alpha^\circ) \neq 0$. Weźmy inne umiejscowienie γ i dla niego

$$(9.5)' \quad M(B) = \int_{B_\gamma^\circ} \rho_\gamma dv + \int_{S_\gamma^\circ} \rho_{S_\gamma} da, \quad B_\gamma^\circ \cap S_\gamma^\circ = \emptyset$$

Aby przejście do reprezentacji lokalnej dla pociąg, ze względu na to, że każde podciało jest M -mieralne, wystarczy założyć,

że masa bezwładna jest borelowska. .

Rozpatrzmy przypadek szczególny, gdy

$$(9.6) \quad \alpha^{-1}(B_\alpha^0) = \gamma^{-1}(B_\gamma^0) \quad \text{i} \quad \alpha^{-1}(S_\alpha^0) = \gamma^{-1}(S_\gamma^0)$$

dla każdej pary umiejscowień.

Warunki (9.6) oznaczają, że nośnikiem powierzchniowej koncentracji masy jest jedna powierzchnia $\alpha^{-1}(S_\alpha^0)$ w ciele B, którą się nazywa powierzchnią materialną o nieznikającej masie powierzchniowej. Przyjmijmy ze względu na (9.6) naturalne założenie

$$(9.7) \quad M(P) = \int_{\alpha(P) \cap B_\alpha^0} \rho_\alpha dv + \int_{\alpha(P) \cap S_\alpha^0} \rho_{S_\alpha} da$$

dla każdego umiejscowienia $\alpha \in \mathcal{C}$. Wtedy dla każdego M - mierzalnego podzbioru $\mathcal{P} \subset \alpha^{-1}(B_\alpha^0)$ otrzymamy

$$M(P) = \int_{\alpha(P)} \rho_\alpha dv = \int_{\delta(P)} \rho_\alpha \circ \lambda \det(\nabla \lambda) dv = \int_{\delta(P)} \rho_\delta dv.$$

Stąd ze względu na dowolność zbioru P otrzymujemy identycznie jak w (9.4)

$$(9.4)' \quad \rho_\delta = \rho_\alpha \circ \lambda \det(\nabla \lambda),$$

gdzie $\lambda: \delta(B) \rightarrow \alpha(B)$ jest przemieszczeniem z δ do α . Podobnie dla dowolnego $\mathcal{J} \subset \alpha^{-1}(S_\alpha^0)$ otrzymamy

$$M(\mathcal{J}) = \int_{\alpha(\mathcal{J})} \rho_{S_\alpha} da = \int_{\delta(\mathcal{J})} \rho_{S_\alpha} \circ \tilde{\lambda} \tilde{J} da = \int_{\delta(\mathcal{J})} \rho_{S_\delta} da$$

i w konsekwencji dla gęstości powierzchniowej, tak jak i dla objętościowej, lokalne prawo zachowania przyjmie znaną postać

$$(9.8) \quad \rho_{S_\delta} = \rho_{S_\alpha} \circ \tilde{\lambda} \tilde{J},$$

gdzie \tilde{J} jest jacobianem deformacji elementu powierzchniowego \mathcal{J}_α^0 odpowiadającego przemieszczeniu λ .

Jeśli koncentracja masy jest taka, że

$$\alpha^{-1}(\mathcal{A}_\alpha) \neq \gamma^{-1}(\mathcal{A}_\gamma)$$

dla nierównoważnych dwóch umiejscowień $\alpha, \gamma \in \mathcal{C}$, to powiemy, że mamy do czynienia z niematerialną powierzchnią koncentracji masy. Wtedy na ogół $\alpha^{-1}(\mathcal{B}_\alpha^\circ) \neq \gamma^{-1}(\mathcal{B}_\gamma^\circ)$ i nawet przy założeniu, że dla dowolnego podciała $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ ma miejsce

$$(9.9) \quad M(\mathcal{P}) = \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}_\alpha^\circ} \rho_\alpha dv + \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap \mathcal{A}_\alpha} \rho_{\mathcal{A}_\alpha} da$$

wraz z analogiczną reprezentacją w umiejscowieniu γ , dowolnie wybranym z klasy \mathcal{C} , nie otrzymuje się lokalnego prawa zachowania masy typu (9.4). Natomiast zauważmy, że i ten przypadek prowadzi do zachowania masy każdego podciała, co jest oczywiste z przyjętej definicji ciała (por. Definicję 1).

Przeanalizujemy ten fakt w pewnym ruchu $\mu: \Gamma_\chi \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ względem układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$, wyznaczonym przez proces kinematyczny $\chi: \Gamma_\chi \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$. Wtedy dla każdego $\tau \in \Gamma_\chi$ i dowolnego podciała $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$, otrzymamy

$$(9.10) \quad M(\mathcal{P}) = \int_{\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}_{\mu_\tau}^\circ} \rho_{\mu_\tau} dv + \int_{\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{A}_{\mu_\tau}^\circ} \rho_{\mathcal{A}_{\mu_\tau}} da = \\ = \int_{\alpha \circ \mu_\tau^{-1}(\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}_{\mu_\tau}^\circ)} \rho_{\mu_\tau} \pi_\tau^{-1} \cdot \det(\nabla \lambda_\tau^{-1}) dv + \int_{\alpha \circ \mu_\tau^{-1}(\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{A}_{\mu_\tau}^\circ)} \rho_{\mathcal{A}_{\mu_\tau}} \pi_\tau^{-1} \cdot \tilde{J}_\tau da,$$

gdzie dla każdego $\tau \in \Gamma_\chi$ $\lambda_\tau := \alpha \circ \mu_\tau^{-1}: \mu_\tau(\mathcal{B}) \rightarrow \alpha(\mathcal{B})$ jest przemieszczeniem z umiejscowienia μ_τ do wybranego umiejscowienia α . Podobszary $\mathcal{B}_{\mu_\tau}^\circ$ oraz powierzchnie $\mathcal{A}_{\mu_\tau}^\circ$ zgodnie z reprezentacjami (9.5) zależą od umiejscowienia μ_τ , dla każdego $\tau \in \Gamma_\chi$. Przez \tilde{J}_τ oznaczyliśmy jacobian deformacji elementu powierzchniowego \mathcal{A}_α° , odpowiadającej przemieszczeniu λ_τ . Zauważmy, że oczywiste relacje ze względu na różnowartościowość każdego μ_τ dla $\tau \in \Gamma_\chi$

$$\alpha \circ \mu_\tau^{-1}(\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}_{\mu_\tau}^\circ) = \alpha(\mathcal{P}) \cap \lambda_\tau(\mathcal{B}_{\mu_\tau}^\circ) \subset \alpha(\mathcal{P}),$$

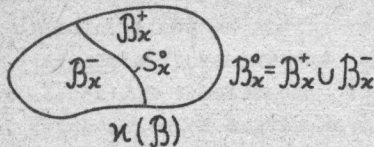
$$\alpha \circ \mu_T^{-1}(\mu_T(\mathcal{P}) \cap \mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}) = \alpha(\mathcal{P}) \cap \lambda_T(\mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}) \subset \alpha(\mathcal{P})$$

pozwalają na przekształcenie prawej strony do sumy 6-ciu całek

$$\begin{aligned} M(\mathcal{P}) = & \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}_x^{\circ}} g_{\mu_T} \circ \lambda_T^{-1} \cdot \det(\nabla \lambda_T^{-1}) \, dV + \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap \mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}} g_{\mu_T} \circ \lambda_T^{-1} \cdot \tilde{f}_T \, da \\ & + \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap (\lambda_T(\mathcal{B}_{\mu_T}^{\circ}) \setminus \mathcal{B}_x^{\circ})} g_{\mu_T} \circ \lambda_T^{-1} \cdot \det(\nabla \lambda_T^{-1}) \, dV - \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{B}_x^{\circ} \setminus \lambda_T(\mathcal{B}_{\mu_T}^{\circ}))} g_{\mu_T} \circ \lambda_T^{-1} \cdot \det(\nabla \lambda_T^{-1}) \, dV \\ & + \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap (\lambda_T(\mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}) \setminus \mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ})} g_{\mu_T} \circ \lambda_T^{-1} \cdot \tilde{f}_T \, da - \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{S}_x^{\circ} \setminus \lambda_T(\mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}))} g_{\mu_T} \circ \lambda_T^{-1} \cdot \tilde{f}_T \, da. \end{aligned}$$

Porównując to wyrażenia dla $M(\mathcal{P})$ z równością (9.9) stwierdzamy, że trudno oczekiwać by gęstości masy objętościowej i masy powierzchniowej były zachowane, jak to miało miejsce w poprzednim przypadku. Aby utrzymać równanie bilansu masy w postaci lokalnej należy sprowadzić całki do wspólnego obszaru całkowania, osobno całki objętościowe a osobno całki powierzchniowe. Inną możliwością jest różniczkowanie względem \mathcal{T} związku (9.10) i wykorzystanie ostatnio uzyskanego wyrażenia. Zauważmy, że wtedy dwie pierwsze całki nie przedstawiają trudności przy różniczkowaniu natomiast pozostałe, ze względu na zmienny w czasie obszar, nastroczać mogą dużo kłopotów.

Przy różniczkowaniu całek objętościowych należy zwrócić uwagę na wielce prawdopodobną wielospójność ^{zbiornu} całkowania. Jeśli zbiór \mathcal{B}_x° jest dwóspójny, jak na schematycznym rysunku 2 dla obszarów płaskich, rozdzielony powierzchnią \mathcal{S}_x° , to należy



Rys.2. Powierzchnia koncentracji masy \mathcal{S}_x° rozdziela obszar $\alpha(\mathcal{B})$ na podobszary \mathcal{B}_x^- i \mathcal{B}_x^+ .

doпустить, że zmierzając do punktu x leżącego na powierzchni S_x^0 osobno z obszarów B_x^- i B_x^+ graniczne wartości $\rho_{\mu\tau}(\lambda_\tau^{-1}(x-0))$ oraz $\rho_{\mu\tau}(\lambda_\tau^{-1}(x+0))$ mogą być różne. Wtedy po zróżniczkowaniu względem τ w wyrażeniu wystąpi całka po całej lub części powierzchni S_x^0 ze skoku funkcji $\rho_{\mu\tau} \circ \lambda_\tau^{-1}$ na tej powierzchni. To oznacza, że w końcowym różniczkowym prawie bilansu masy dojdą człony wynikłe z dodatkowych całek powierzchniowych.

Aby ułatwić przejście od postaci całkowej prawa bilansu do różniczkowej postaci lokalnej dokonuje się pewnych założeń. Typowym standardowym założeniem w wyprowadzeniu lokalnych praw bilansu jest hipoteza, że zmianę masy przypisaną podobszarowi w umiejscowieniu ciała bilansuje się z góry zadanymi strumieniami masy przez brzeg oraz objętościowymi i powierzchniowymi źródłami masy w obszarze. W szczególności zakłada się istnienie funkcji rozkładu masy $\rho : \bigcup_{\tau \in I} \{\tau\} \times \mu_\tau(B) \rightarrow \mathbb{R}^+$ i $\rho_S : \bigcup_{\tau \in I} \{\tau\} \times S_\tau^0 \rightarrow \mathbb{R}^+$, dla których

$$(9.11) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \int_S \rho \, dv + \int_{S_S} \rho_S \, da \right\} + \int \rho_S \, da + \int_{S_S} \rho_S \, da = \int \rho_S \, dv + \int \rho_{S_S} \, da$$

o z góry zadanym rozkładach ρ , ρ_S , ρ_S oraz ρ_{S_S} (por. Kosiński [1981]).

Rola powierzchni S_x^0 jak widać w przedstawionych rozważaniach nie ogranicza się tylko do nośnika masy powierzchniowej.

Jeśli wprowadzane do opisu pola doznają nieciągłości, to fizyczna i matematyczna analiza /por. dyskusję klasy $BV(\mathbb{R}^n)$ / w p.17/ wykazuje, że nieciągłości regularne, tzn. w postaci skoków wartości pola, występują na hiperpowierzchniach $n-1$ wymiarowych. W przypadku pól określonych na obszarach w \mathbb{R}^3 nieciągłości skokowe występują na powierzchniach. Mając to na uwadze powierzchnię S_x^0 traktujemy jako nośnik obu typu osobliwości powierzchniowych: koncentracji wielkości fizycznych i ich nieciągłości /w samych wartościach lub w ich pochodnych/.

Ważnym do zanotowania jest, że takie jednolite podejście nie wymaga rozdzielania powierzchni S_x^0 , dalej zwanej powierzchnią osobliwości, na dwie części: jedną jako nośnika powierzch-

niowych koncentracji pól i drugą - nośnika nieciągłości /skoków tych pól/. Wynika to stąd, że całej powierzchni przypisujemy oba atrybuty potencjalnego nośnika efektów powierzchniowych i dopiero konkretna sytuacja fizyczna zadecyduje, na jakich częściach powierzchni, które z osłbłości znikają.

Na przykład, jeśli rozpatrzmy postać prawa bilansu masy (9.11) po lokalizacji, to w punktach powierzchni $\mathcal{S}_{\mu\tau}^{\circ}$, jego pełna postać będzie

$$(9.12) \quad \frac{\partial \varrho_{\mathcal{S}}}{\partial \tau} + \operatorname{div}_{\mathcal{S}}(\varrho_{\mathcal{S}} \tilde{V} + \tilde{w}_{\mathcal{S}}) + \varrho_{\mathcal{S}}(\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \tilde{c} - u_n \tau_{\mathcal{S}} \tilde{b}_{\tau}) \\ = \llbracket \varrho (v_{\tau} \cdot n_{\tau} - u_n) \rrbracket + \llbracket w \rrbracket \cdot n_{\tau} + \beta_{\varrho},$$

gdzie operator $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}$ odnosi się do różniczkowania na powierzchni, \tilde{b}_{τ} jest drugim tensorem metrycznym powierzchni, u_n składową normalną zaś \tilde{c} składowymi stycznymi prędkości przesuwania się powierzchni w \mathcal{E} . Wektor \tilde{V} mierzy prędkość względną ruchu punktów powierzchniowych /por. późniejszą analizę/. Jeśli w pewnych punktach nie ma koncentracji masy powierzchniowej, $\varrho_{\mathcal{S}} = 0$, to w miejsce (9.12) otrzymamy związek

$$(9.12) \quad \llbracket \varrho (v_{\tau} \cdot n_{\tau} - u_n) \rrbracket + \llbracket w \rrbracket \cdot n_{\tau} = 0,$$

który przy znikającym strumieniu masy w /lub ciągłym/ sprowadza się do warunku Stokesa-Christoffela.

Na zakończenie omawiania prawa bilansu masy zastanówmy się jakie sytuacje fizyczne mogą być modelowane reprezentacjami (9.5) przy warunkach

$$\alpha^{-1}(\mathcal{S}_{\alpha}^{\circ}) \neq \delta^{-1}(\mathcal{S}_{\delta}^{\circ}), \quad \alpha^{-1}(\mathcal{B}_{\alpha}^{\circ}) \neq \delta^{-1}(\mathcal{B}_{\delta}^{\circ})$$

dla dwóch nierównoważnych /w sensie konfiguracji/ umiejscowień.

Jeśli przyjmemy, że omawiane ciało \mathcal{B} , reprezentujące układ zamknięty, składa się z gazu zamkniętego balonem z umieszczoną w środku ważyką błoną półprzepuszczalną i deformalną, to jak łatwo widać różne umiejscowienia realizowane przez deformację po-

włoki balonu prowadzą do reprezentacji (9.5) i wymienionych wyżej warunków.

Inny przykład dostarcza nam kartka papieru zamknięta w zbiorniku z gazem. Jeśli ten zbiornik umieścimy w polu grawitacyjnym, to wywołamy przemieszczanie się kartki w kierunku linii pola, które może być modelowane powyższą reprezentacją.

W obu przedstawionych przykładach zarówno wałka błona jak i kartka papieru reprezentują tzw. powierzchnie p - materialne wg. nomenklatury przyjętej u Kosińskiego [1981]. Powierzchnię p - materialną w ruchu μ charakteryzuje się przez warunek: składowa normalna absolutnej prędkości w $\{\mathcal{E}, \beta\}$ t.j. pola prędkości w \mathcal{E} / punktów chwilowo tworzących powierzchnię pokrywa się z u_n -składową normalną prędkości poruszania się powierzchni-na całym przedziale Γ_μ .

Dla odmiany powłoka balonu, z przypisaną jej masą powierzchniową, reprezentuje powierzchnię /absolutnie/materialną w ciele /por. warunek (9.6) /. Przykładami zjawisk fizycznych, w których występuje powierzchniowa koncentracja masy nie odpowiadająca modelowi z powierzchnią p - materialną są: adsorpcja na granicy dwóch faz /np. ciekłej i stałej/, spalanie w gazie powierzchniowo rozłożonego ładunku wybuchowego. W obu tych zjawiskach następuje wymiana cząstek powierzchni i ośrodka je otaczającego.

Do modelowania ruchu ciała z powierzchnią osobliwości, a szczególnie powierzchnią p - materialną, wygodnie jest przyjąć nieco odmienne rozumowanie od dotychczasowego. W ciele \mathcal{B} /a dokładniej - w jego domknięciu $\bar{\mathcal{B}}$ / wyróżniamy pewną powierzchnię $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ i rozszerzamy pojęcie umiejscowienia do pary $\{x, l_x\}$, gdzie $x \in \mathcal{E}$ zaś $l_x: \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \rightarrow x(\mathcal{B})$ jest odwzorowaniem różnowartościowym, o własnościach: $l_x: \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \rightarrow x(\mathcal{B})$ i $l(\mathcal{S}_{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{E}$ jest orientowalną, regularną powierzchnią klasy C^2 w \mathcal{E} . Jeśli $\{\gamma, l_\gamma\}$ jest innym umiejscowieniem ciała \mathcal{B} , to odwzorowanie $l_\gamma \circ l_x^{-1}: l_x(\mathcal{S}_{\mathcal{B}}) \rightarrow l_\gamma(\mathcal{S}_{\mathcal{B}})$ winno być bilipschitzowskie, klasy C^2 o dodatnim wyznaczniku oraz powierzchnie $l_x(\mathcal{S}_{\mathcal{B}})$ i $l_\gamma(\mathcal{S}_{\mathcal{B}})$ powinny być homotopijne w tej klasie odwzorowań.

Przejsie do powierzchni absolutnie materialnej jest natych-

miastowe przez postawienie warunku

$$l_x = \alpha|_{S_B}$$

dla każdego umiejscowienia $\{x, l_x\}$. Dla takiej powierzchni traci sens wprowadzanie l_x obok x .

Jeśli $\{\mu_r, l_{\mu_r}\}$ jest ruchem ciała B z powierzchnią S_B i $\{x, l_x\}$ jest pewnym umiejscowieniem, to wygodnie jest opisywać zmiany w czasie punktów chwilowo tworzących powierzchnię $l_{\mu_r}(S_B)$ przy pomocy opisu względnego, gdyż zachodzi oczywista równość

$$l_{\mu_r} \circ l_x^{-1}(l_x(S_B)) = l_{\mu_r}(S_B).$$

Dla powierzchni $l_x(S_B) \subset \mathcal{E}$ wybierzmy parametryzację Gaussa L^1, L^2 tak, że równanie parametryczne /co najmniej lokalnie/ ma postać

$$l_x(S_B): \quad x = \Psi(L^1, L^2) \in \mathcal{E}, \quad (L^1, L^2) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Deformacja $l_{\mu_r} \circ l_x^{-1}$ powierzchni $l_x(S_B)$ prowadzi do nowej powierzchni $l_{\mu_r}(S_B)$ o przedstawieniu parametrycznym

$$l_{\mu_r}(S_B)_1: \quad x = l_{\mu_r} \circ l_x^{-1}(\Psi(L^1, L^2)) =: \bar{\Psi}(\tau, L^1, L^2).$$

Jeśli, niezależnie od wprowadzonego opisu względem umiejscowienia odniesienia $\{x, l_x\}$, dla powierzchni $l_{\mu_r}(S_B) \subset \mathcal{E}$ przyjęliśmy parametry Gaussa l^1, l^2 oraz /lokalnie/ przedstawienie parametryczne

$$l_{\mu_r}(S_B)_2: \quad x = \Psi(\tau, l^1, l^2),$$

to z faktu, że funkcje $\bar{\Psi}$ oraz Ψ opisują tę samą powierzchnię wynika, iż między parametryzacją L^1, L^2 oraz l^1, l^2 musi zachodzić związek funkcyjny, ogólnie czasowo zależny, tzn.

$$(\Upsilon) \quad l^\alpha = \hat{l}^\alpha(\tau, L^A), \quad \alpha, A = 1, 2,$$

taki, że

$$\varphi(\tau, \hat{L}^\alpha(\tau, L^\Delta)) = \bar{\Psi}(\tau, L^\Delta).$$

W ten sposób jacobian J_{τ} transformacji (T), dany przez $\det(l_{\Delta, \Delta}^\alpha)$ (ze względu na to, że wektory styczne parametryzacji L^Δ wiążą się z wektorami parametryzacji L^α przepisem

$\bar{\Psi}_{,\Delta} = l_{,\Delta}^\alpha \Psi_{,\alpha}$ oraz składowe tensorów metrycznych $G_{\Delta\Gamma} := \bar{\Psi}_{,\Delta} \cdot \bar{\Psi}_{,\Gamma} = l_{,\Delta}^\alpha l_{,\Gamma}^\beta \Psi_{,\alpha} \cdot \Psi_{,\beta}$) pozwala wyrazić zależność między wyznacznikami $G = \det(G_{\Delta\Gamma})$ oraz $g := \det(g_{\alpha\beta}) = \det(\Psi_{,\alpha} \cdot \Psi_{,\beta})$ następująco

$$G = J_{\tau}^2 g.$$

Ten związek jest pomocny przy różniczkowaniu względem czasu całek powierzchniowych. Obok niego niezbędna jest znajomość prędkości ruchu punktu $L^\Delta = \text{const}$, w powierzchni $\ell_{\mu\tau}(\mathcal{S}_B)$. Aby to otrzymać wystarczy zróżniczkować (T) względem τ i wprowadzić oznaczenie

$$(9.13) \quad V^\alpha := \frac{\partial \ell^\alpha(\tau, L^\Delta)}{\partial \tau}.$$

Wtedy V^α są składowymi prędkości punktu $L^\Delta = \text{const}$ w bazie wektorów stycznych $\Psi_{,\alpha}$ do powierzchni $\ell_{\mu\tau}(\mathcal{S}_B)$.

W powyższym rozumowaniu powierzchnia $\ell_{\mu\tau}(\mathcal{S}_B)$ składa się a ściślej mówiąc - jest obrazem cząstek tworzących powierzchnię \mathcal{S}_B , przy czym cząstki te w umiejscowieniu odniesienia ℓ_x zostały scharakteryzowane parą liczb L^1, L^2 , natomiast ich miejsce w chwili τ na powierzchni jest dane przez wartości transformacji (T) /por. Scriven [1960], Moeckel [1974]/.

Warto w tym miejscu zanalizować zmianę składowych prędkości V^α przy zmianie parametryzacji powierzchni $\ell_{\mu\tau}^0$. Przypuśćmy, że parametry Gaussa ($L^{\alpha'}$) ruchomej powierzchni $\ell_{\mu\tau}^0$: $x = \Psi'(\tau, L^{\alpha'})$, $\tau \in T_\chi$, $(L^{\alpha'}) \in \mathbb{R}^2$ zostały tak dobrane, że prędkość przemieszczania się powierzchni w \mathcal{E} , określona wzorem

$$u_\tau^i := \frac{\partial \Psi^i}{\partial \tau} \Big|_{L^{\alpha'} = \text{const}}$$

ma stały kierunek normalny n_τ do powierzchni, tzn. $u_\tau = u_n n_\tau$, gdzie $u_n = u_\tau \cdot n_\tau$. Taką parametryzację nazwiemy konwekcyjną /por. Bowen i Wang [1971] / oraz Kosiński [1981] /. Skoro w każdej sytuacji prędkość u_τ można rozłożyć na sumę $u_n n_\tau + c^\alpha \varphi_{,\alpha}$ /por. (9.12) / warunkiem na to by parametryzacja była konwekcyjna jest znikanie składowych stycznych $\tilde{c} := c^\alpha \varphi_{,\alpha}$. Wtedy krzywe całkowite pola wektorowego μ_τ wyznaczają trajektorie ortogonalne ruchomej powierzchni $\{ \int \mu_\tau, \tau \in \Gamma_\mu \}$.

Niech $V^{\alpha'}$ będą składowymi stycznymi prędkości wyznaczonymi związkami (9.13) tzn. $V^{\alpha'} = \frac{\partial \bar{l}^{\alpha'}}{\partial \tau}(\tau, L^\Delta)$. Jeśli (l^α) jest inną parametryzacją, tzn. niekonwekcyjną, to z jednoznaczności przedstawienia powierzchni mamy

$$x = \varphi(\tau, l^\alpha) = \varphi(\tau, \bar{l}^{\alpha'}(\tau, l^{\alpha'})) =: \Psi'(\tau, l^{\alpha'}),$$

a w niej

$$u_\tau := \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \Big|_{l^{\alpha'} = \text{const}}, \quad u_\tau \cdot n_\tau = u'_\tau \cdot n_\tau = u_n$$

i

$$u_n n_\tau = u'_\tau = \frac{\partial \Psi'}{\partial \tau} \Big|_{l^{\alpha'} = \text{const}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \Big|_{l^{\alpha'} = \text{const}} + \frac{\partial \Psi}{\partial l^\alpha} \frac{\partial \bar{l}^\alpha}{\partial \tau}.$$

Stąd

$$c^\alpha(\tau, l^{\alpha'}) := g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial l^\beta} \cdot u_\tau = - \frac{\partial \bar{l}^\alpha(\tau, l^{\alpha'})}{\partial \tau}.$$

Wzbogaceni o tę zależność przechodzimy do wyznaczenia poszukiwanego związku; skoro $\hat{l}^\alpha(\tau, L^\Delta) = \bar{l}^\alpha(\tau, \bar{l}^{\alpha'}(\tau, L^\Delta))$, więc

$$V^\alpha := \frac{\partial \hat{l}^\alpha}{\partial \tau} \Big|_{L^\Delta = \text{const}} = \frac{\partial \bar{l}^\alpha}{\partial \tau} \Big|_{l^{\alpha'} = \text{const}} + \frac{\partial \bar{l}^\alpha}{\partial l^{\alpha'}} \frac{\partial \bar{l}^{\alpha'}}{\partial \tau} = -c^\alpha + \frac{\partial \bar{l}^\alpha}{\partial l^{\alpha'}} V^{\alpha'}.$$

Stąd otrzymujemy końcowy związek

$$V^\alpha + c^\alpha = \frac{\partial \bar{l}^\alpha}{\partial l^{\alpha'}} V^{\alpha'},$$

gdzie przypominamy, że $V^{\alpha'}$ są składowymi prędkości \tilde{V} liczonymi względem parametryzacji konwekcyjnej.

Stąd wnioskujemy, że dopiero suma $V^\alpha + c^\alpha$ tworzy składowe wektora powierzchniowego \tilde{V} , tj. obiektu spełniającego prawo transformacji

$$V^{\alpha''} + c^{\alpha''} = \frac{\partial \ell^{\alpha''}}{\partial \ell^\alpha} (V^\alpha + c^\alpha)$$

przy zmianie parametryzacji powierzchni.

Aby zamknąć ten komentarz zauważmy, że dla p - materialnej powierzchni osobliwości można określić prędkość V_T punktów, tj. obrazów cząstek z powierzchni S_B , tworzących powierzchnię $S_{\mu_T}^0$, jak następuje

$$(9.14) \quad V_T := \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \hat{c}^\alpha(t, L^A)) \Big|_{L^A = \text{const}} = u_n n_T + (V^\alpha + c^\alpha) \varphi_{,\alpha}$$

Jeszcze jeden punkt pozostał do wyjaśnienia, a jest nim sprawa reprezentacji masy podciała w postaci całek względem miary Lebesgue'a w \mathcal{E} i dodatkowo, w przypadku koncentracji masy na powierzchni, jako miary powierzchniowej /tj. dwu-wymiarowej miary Hausdorffa/. Jeśli zgodnie z podstawowym założeniem, masa jest niezależna od wpływów zewnętrznych, to także jest niezależna od układów odniesienia i automorfizmów czasoprzestrzeni Galileusza. To oznacza, że jej reprezentacja w przestrzeni fizycznej \mathcal{E} musi być niezmiennicza przy transformacjach ortogonalnych i przesunięciach. Jak wiadomo /por. Łojasiewicz [1973, tw.7. s.113]/ każda miara borelowska ν w \mathbb{R}^3 skończona na zbiorach ograniczonych i niezmiennicza na przesunięcia jest bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Skoro ponadto miara Lebesgue'a jest niezmiennicza względem odwzorowań ortogonalnych, reprezentacje (9.3), (9.5) oraz (9.7) i (9.9) są uzasadnione. Należy się zgodzić, że dla pełnej ogólności powinniśmy dopuścić reprezentację trójskładnikową

$$M(\mathcal{P}) = \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap B_x^0} g_x dv + \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap S_x^0} g_{i_2} dH_2 + \int_{\alpha(\mathcal{P}) \cap L_x^0} g_{i_3} dH_3$$

w pewnym, jak i dowolnym umiejscowieniu α , gdzie H_2 oraz H_1 oznaczają odpowiednie miary Hausdorffa, zaś powierzchnia S_α° oraz krzywa L_α° nie są uniwersalne i na ogół zależą od umiejscowienia α spełniając, wraz z obszarem B_α° , warunek

$$\alpha(B) \subset B_\alpha^\circ \cup S_\alpha^\circ \cup L_\alpha^\circ \subset \overline{\alpha(B)}.$$

9.2. Bilans pędu i momentu pędu

Przejsście od globalnego prawa bilansu pędu reprezentującego II prawo Newtona do postaci lokalnej jest oparte na reprezentacjach całkowych oraz postulacie o lokalizacji. Lewa strona zawierająca pochodną pędu może być - dzięki znanemu rozkładowi masy (9.5) - zapisana w postaci

$$(9.15) \quad \dot{L}_B(\mu, \mu(\tau)) = \int_{B_{\mu\tau}^\circ} g_{\mu\tau} \dot{\mu}_\tau \mu_\tau^{-1} dv + \int_{S_{\mu\tau}^\circ} g_{\mu\tau} V_\tau da.$$

Powierzchniowe pole $V_\tau: S_{\mu\tau}^\circ \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E})$ reprezentuje tzw. absolutną w \mathcal{E} prędkość punktów z \mathcal{E} chwilowo leżących /t.j. tworzących/ powierzchnię $S_{\mu\tau}^\circ$. Termin absolutna ma oznaczać, że jest to prędkość odmienna od tej wprowadzonej wzorem (9.13). Jeśli powierzchnia osobliwości jest ρ -materialna, to V_τ dane jest przez (9.14). Jest oczywiste, że morfizm przypisujący parze: dopuszczalny proces kinematyczny ciała B i układ odniesienia-pole $V_\tau = \{V_\tau; \tau \in \Gamma_\mu\}$ winien być niezależny od układu odniesienia z klasy IF /por. Def.4/.

Całkowita siła działająca na ciało B w ruchu μ przy koncentracji masy na powierzchni $S_{\mu\tau}^\circ$ rozkłada się teraz 4 na części

$$(9.16) \quad \mathcal{F}_B(\alpha, \beta) = \int_{B_{\mu\tau}^\circ} g_{\mu\tau} b_{\mu\tau} dv + \int_{S_{\mu\tau}^\circ} g_{\mu\tau} b_{\mu\tau} da + \int_{\partial B_{\mu\tau}^\circ} t_{\mu\tau} da + \int_{\partial S_{\mu\tau}^\circ} t_{\mu\tau} dl,$$

gdzie uwzględniliśmy równość mas grawitacyjnej oraz bezwładnościowej i przyjęliśmy oznaczenie $b_{\mu\tau}$ i $b_{\beta\mu\tau}$ odpowiednio dla objętościowej i powierzchniowej siły grawitacyjnej.

Zauważmy, że warunki $\mu_{\tau}(B) \subset B_{\mu\tau} \cup J_{\mu\tau} \subset \overline{\mu_{\tau}(B)}$ oraz własności miary Lebesgue'a pozwalają zastąpić obszar pod pierwszą ośką przez $\mu_{\tau}(B) \setminus J_{\mu\tau}^{\circ}$.

Wielkość $t_{\mu\tau}$ jest polem obciążeń wywołanych przez otoczenie na brzegu ciała w umiejscowieniu μ_{τ} , za wyjątkiem brzegu powierzchni $J_{\mu\tau}^{\circ}$. Tutaj podobnie jak w pierwszej całce zastąpimy $\partial B_{\mu\tau} \setminus J_{\mu\tau}^{\circ}$ przez $\partial \mu_{\tau}(B) \setminus \partial S_{\mu\tau}^{\circ}$. Ostatnia całka reprezentuje całkowite obciążenie wytworzone na brzegu powierzchni $J_{\mu\tau}^{\circ}$ przez otoczenie a wielkość podcałkowa $t_{\mu\tau}$ jest wektorowym polem obciążeń krzywoliniowych o wymiarze siła na jednostkę długości krzywej $\partial S_{\mu\tau}^{\circ}$.

Postulat o lokalizacji, będący odbiciem obserwacji fizycznych stwierdza, że z każdym podciałem $P \subset B$ w ruchu μ można związać układ sił działających na nie o postaci analogicznej do (9.16). Trzeba od razu przestrzec przed traktowaniem powyższego postulatu jako oczywistego tak dla sił jak i dla każdego innego oddziaływania. Mechanika kontinuum nie powinna być stosowana, gdy z wymiarami ciała i podciała zejdziemy do wielkości kilku czy kilkunastu ziaren /w przypadku ciała stałego/. Wtedy zaczynają grać rolę oddziaływania (siły) z tego poziomu, które w kontynualnym modelu były zaniedbywane. Po drugie - "uciąglenie" rzeczywistej struktury atomowej ciała i wprowadzenie na jej miejsce odpowiednich pól mechanicznych i termicznych wymaga identyfikacji doświadczalnej i reguł interpretacji fizycznej. To może być zrobione znów tylko wtedy, gdy wymiary podciała nie są zbyt małe.

W końcu, niezachowanie rozkładu masy w obszarze $\chi_{\tau}(P)$ zajmowanym przez podciało może powodować produkcję /zmianę/pędu spowodowaną zmianą masy. Stąd dla zlokalizowanego rozkładu sił działających na podciało przyjmujemy, że z każdym podciałem można związać ograniczoną wektorową miarę borelowską $\mathcal{F}_{\tau}(\chi_{\tau}, \beta)$ o reprezentacji

$$(9.17) \quad \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\chi_{\mathcal{T}}, \beta)(\mathcal{C}) = \int_{\mu_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{B}_{\mu_{\mathcal{T}}}^{\circ}} \rho_{\mu_{\mathcal{T}}} b_{\mu_{\mathcal{T}}} dv + \int_{\mu_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{S}_{\mu_{\mathcal{T}}}^{\circ}} \rho_{\beta_{\mu_{\mathcal{T}}}} b_{\beta_{\mu_{\mathcal{T}}}} da + \int_{\mu_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) \cap \partial \mu_{\mathcal{T}}(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{S}_{\mu_{\mathcal{T}}}^{\circ}} \frac{1}{3} \mu_{\mathcal{T}} da$$

$$+ \int_{\mu_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) \cap \partial \mathcal{S}_{\mu_{\mathcal{T}}}^{\circ}} \frac{1}{3} \mu_{\mathcal{T}} dl + \int_{\mu_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{B}_{\mu_{\mathcal{T}}}^{\circ}} \rho_{\mathcal{F}} dv + \int_{\mu_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{S}_{\mu_{\mathcal{T}}}^{\circ}} \rho_{\beta_{\mathcal{F}}} da$$

określoną na $\Omega(\bar{\mathcal{P}})$ - borelowskich podzbiorach domknięcie podciała \mathcal{P} . Miara $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\chi_{\mathcal{T}}, \beta)$ reprezentuje siły działające na obszar $\mu_{\mathcal{T}}(\mathcal{P})$ i jego każdą borelowską część a wywołane przez jego zewnątrz.

Postulowanie istnienia miary $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\chi_{\mathcal{T}}, \beta)$ ma wyrażać formułowane w mechanice klasycznej stwierdzenie, że siły wywierane na ciało przez otoczenie przenoszą się w sposób objętościowy i kontaktowy. Uwzględnienie w naszych rozważaniach efektów powierzchniowych nakazuje dołączenie drugiej i czwartej całki do końcowego wyrażenia na $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, natomiast produkcję pędu związaną z niezachowaniem masy reprezentują dwie ostatnie całki.

Lemat Cauchy'ego udawadniany w mechanice kontinuum przy spełnieniu równań równowagi nie wydaje się aby mógł być tutaj wykazany. Istniejące jego odpowiedniki w postaci klasycznej i dla słabo zbilansowanych oddziaływań są omawiane i ewentualnie dowodzone przez Nolla [1959, 1973] Gurtina i Williamsa [1967], Gurtina, Mizela i Williamsa [1968], oraz Gurtina i Martinsa [1976] /por. też Barański [1974] /.

Warto zauważyć odmienną postać reprezentacji całkowej całkowych sił działających na całe ciało (9.16) od tej obowiązującej dla podciał $\mathcal{P} \Subset \mathcal{B}$ w relacji (9.17). Odmiennosć wynika z zachowania masy tego ciała - a więc w każdym umiejscowieniu $\mu(\mathcal{B})$ - przy jednocześnie możliwym niezachowaniu masy w umiejscowieniach podciał $\mu(\mathcal{P})$.

Obecnie przyjmiemy, tak jak w lemacie Cauchy'ego, następującą reprezentację strumieniową /por. Noll [1973], Kosiński [1981] / dla sił powierzchniowych i obciążeń krzywoliniowych istnieją pola tensorowe

$$\mathbb{T}_{\mu\tau} : \mu_\tau(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ \rightarrow \text{lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E})), \quad \mathcal{S}_{\mu\tau} : \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ \rightarrow \text{lin}(\mathcal{T}(\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ), \mathcal{T}(\mathcal{E})),$$

takie, że dla każdego podciała $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ zachodzi

$$(9.18) \quad \begin{aligned} \frac{t}{\mathcal{P}} \mu_\tau &= \mathbb{T}_{\mu\tau} n_\tau, \quad H_2\text{-p.w. na } \partial\mu_\tau(\mathcal{P}) \setminus \partial\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ \\ \frac{t}{\mathcal{P}} \mathcal{S}_{\mu\tau} &= \mathcal{S}_{\mu\tau} \tilde{n}_\tau, \quad H_1\text{-p.w. na } \partial\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ \cap \partial\mu_\tau(\mathcal{P}), \end{aligned}$$

gdzie n_τ oznacza wektor normalny zewnętrzny do brzegu $\partial\mu_\tau(\mathcal{P})$, zaś \tilde{n}_τ oznacza wektor normalny do krzywej $\partial\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ$ - leżący w przestrzeni /płaszczyźnie/ stycznej. $\mathcal{T}(\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ)$ - zewnętrzny do $\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ$. Tensor $\mathbb{T}_{\mu\tau}$ jest tensorem naprężeń Cauchy'ego, zaś $\mathcal{S}_{\mu\tau}$ nazwiemy tensorem napięć powierzchniowych.

Przyjmując reprezentację strumieniową (9.18) dla układu sił (9.17), prawo bilansu pędu (9.1) w przypadku koncentracji masy (9.5) zlokalizowane do dowolnego podciała $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ wyraża równość

$$(9.19) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mu_\tau(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} \rho_{\mu\tau} v_\tau dv + \int_{\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} \rho_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} V_\tau da \right\} &= \int_{\mu_\tau(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} \rho_{\mu\tau} b_{\mu\tau} dv + \int_{\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} \rho_{\mu\tau} b_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} da + \\ &+ \int_{\partial\mu_\tau(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} \mathbb{T}_{\mu\tau} n_\tau da + \int_{\partial\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \partial\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} \mathcal{S}_{\mu\tau} \tilde{n}_\tau dl + \int_{\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} \rho_F dv + \int_{\mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} \rho_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} de. \end{aligned}$$

A stąd w obszarze $\mu_\tau(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ$ otrzymamy

$$(9.20) \quad \frac{\partial(\rho_{\mu\tau} v_\tau)}{\partial t} + \text{div}(\rho_{\mu\tau} v_\tau \otimes v_\tau - \mathbb{T}_{\mu\tau}) = \rho_{\mu\tau} b_{\mu\tau} + \rho_F \quad H_3\text{-p.w.},$$

zaś dla punktów tworzących chwilową powierzchnię $\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ$ dostajemy

$$(9.21)_1 \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\rho_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} V_\tau)}{\partial t} + \text{div}_s(\rho_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} V_\tau \otimes \tilde{V}_\tau - \mathcal{S}_{\mu\tau}) - \rho_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} V_\tau da \quad c^\alpha - 2u_n \rho_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} K_F V_\tau \\ = \llbracket \rho_{\mu\tau} v_\tau (v_\tau \cdot n_\tau - u_n) - \mathbb{T}_{\mu\tau} n_\tau \rrbracket + \rho_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} b_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} + \rho_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^\circ} \end{aligned}$$

gdzie

$$(9.21)_2 \quad V_{\tau} := \dot{\mu}_{\tau} \circ \mu_{\tau}^{-1}, \quad 2K_{\tau} = \text{tr}_3 \hat{h}_{\tau}, \quad \tilde{V}_{\tau} := (V^{\alpha} + c^{\alpha}) \Psi_{,\alpha}, \quad u_n := u_{\tau} \cdot n_{\tau}$$

przy \hat{h}_{τ} jako drugim tenszorze metrycznym powierzchni $\int_{\mu_{\tau}}^{\circ} \int_{\mu_{\tau}} (\beta_B)$

u_{τ} - chwilowej prędkości poruszania się powierzchni w \mathcal{E} , mierzonej w parametryzacji $(1^1, 1^2)$. Składowa normalna u_n tej prędkości, jako wielkość niezależna od parametryzacji, wraz z wektorem $\tilde{c} := c^{\alpha} \Psi_{,\alpha}$ służą do przedstawienia prędkości u_{τ} w postaci

$$(9.22) \quad u_{\tau} = u_n n_{\tau} + c^{\alpha} \Psi_{,\alpha}.$$

Jeszcze raz podkreślimy, że ogólnie prędkość V_{τ} punktów chwilowo tworzących powierzchnię nie musi pokrywać się ani z prędkością $u_n n_{\tau} + (V^{\alpha} + c^{\alpha}) \Psi_{,\alpha}$ ani z u_{τ} . Nawet ograniczając się tylko do składowych normalnych wielkości $V_{\tau} \cdot n_{\tau}$, u_n oraz $V_{\tau} \cdot n_{\tau}$ są na ogół różne.

Przypadek powierzchni p - materialnej określa warunek

$$(9.23)_1 \quad V_{\tau} \cdot n_{\tau} = u_n,$$

natomiast powierzchnia absolutnie materialna jest scharakteryzowana przez równość

$$(9.22)_2 \quad V_{\tau} \cdot n_{\tau} = u_n = V_{\tau} \cdot n_{\tau}.$$

Mówimy, że powierzchnia osobliwości $\int_{\mu_{\tau}}^{\circ}$ jest fałą uderzeniową, gdy co najmniej jedna z nierówności

$$(9.23)_3 \quad V_{\tau}^{-} \cdot n_{\tau} \neq u_n \quad \text{lub} \quad V_{\tau}^{+} \cdot n_{\tau} \neq u_n$$

jest spełniona, gdzie wskaźniki \pm oznaczają graniczne wartości prędkości cząstek z obszarów $\mu_{\tau}(\mathcal{B})^{+}$ i $\mu_{\tau}(\mathcal{B})^{-}$.

Przedstawiona reprezentacja (9.17) sił działających na każde podciało wraz z równaniem (9.19) i jego konsekwencjami - równaniami bilansu (9.20) i (9.21) dotyczyła wybranego ruchu μ odpowiadającego procesowi χ i układowi odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$.

Niezmienniczość tej reprezentacji przy zmianie układu odniesienia z klasy IF jest rozumiana tutaj w sensie Def.4 z p.5. Do tego punktu wrócimy w dalszej części pracy.

Przeprowadzając krótką inspekcję równań bilansu (9.12) i (9.21), stwierdzamy, że niezmienniczo występuje tutaj pochodna czasowa mierząca zmianę \mathcal{G}_S oraz $\beta_S V$ wzdłuż trajektorii ortogonalnych ruchomej powierzchni $\{S_{\mu\tau}; \tau \in \Gamma_\alpha\} \subset \mathcal{E}$. Niezmienniczość jest tutaj rozumiana w sensie niezależności od wybranej parametryzacji powierzchni. Dla przypomnienia to właśnie pochodna przemieszczeniowa $\frac{\delta}{\delta t}$ wprowadzona przez Thomasa [1957] jest taką szczególną pochodną czasową pokrywającą się z cząstkową pochodną po czasie, jeśli powierzchnia ruchoma jest dana w parametryzacji konwekcyjnej, natomiast w dowolnej parametryzacji jest dana wzorem

$$(9.24) \quad \frac{\delta f(t, l^\alpha, l^\alpha)}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial l^\alpha} c^\alpha$$

dla dowolnego pola określonego na powierzchni.

Końcowa uwaga tej części dotyczy prędkości $\tilde{V} := (V^\alpha + c^\alpha) \downarrow_\alpha$. W sytuacji gdy powierzchnia osobliwości nie jest p-materialna przyjęte w p. 9.1 rozszerzenie pojęcia umiejscowienia nie może być bezpośrednio zastosowane. Ale i wtedy składowe V^α mogą być wyznaczone z relacji (9.13), gdyż nie jest istotne czy punkty - obrazy cząstek materialnych tworzących chwilową powierzchnię $S_{\mu\tau}$ pozostaną na niej, czy ją opuszczą w następnym momencie, interesują nas bowiem tylko składowe styczne ich prędkości.

Dla zobrazowania tego Scriven [1960] i Moeckel [1974] przyjęli, że powierzchnia $S_{\mu\tau}$ jest miejscem w \mathcal{E} /w oryginale - jest złożona z fikcyjnych cząstek, dla której krzywa $\partial S_{\mu\tau}$ w (9.11) i (9.16) jest brzegiem poruszającym się z prędkością tych cząstek /tzn. jest krzywą "materialną"/. Same cząstki są scharakteryzowane przez pary liczb L^1, L^2 zaś ich pozycja w powierzchni w chwili τ jest dana przez transformację (T); wtedy (9.13) daje poszukiwane składowe styczne.

Na końcu zauważmy, że gdy w uniwersalnym rozkładzie prędkości punktów powierzchniowych

$$(9.25) \quad V_{\tau} = (V_{\tau} \cdot n_{\tau}) n_{\tau} + (V^{\alpha} + c^{\alpha}) \varphi_{,\alpha}$$

składowa normalna $V_{\tau} \cdot n_{\tau}$ jest różna od u_n , to musi być wtedy dana związkami konstytutywnymi.

Przy założeniu, że równania bilansu masy i pędu są spełnione, bilans momentu pędu w teorii niepolarnego continuum, tj. teorii w której nie uwzględnia się dodatkowych wielkości momentowych poza momentem związanym z siłą $\mathcal{F}_P(\chi_{\tau}, \beta)$, działającą na każde podciało $P \subset B$, wprowadza dwa ograniczenia

$$(9.26) \quad \Pi_{\mu\tau} = \Pi_{\tau\mu}^T, \quad H_3\text{-p.w.}, \quad S_{(\tau)}^{\alpha} = S^{\alpha\beta} - S^{\beta\alpha} = 0, \quad H_2\text{-p.w.},$$

gdy tensor napięć powierzchniowych przedstawimy w postaci absolutnej $S_{\tau} = n_{\tau} \otimes S_{(\tau)} + \varphi_{,\beta} \otimes S_{\tau}^{\beta}$ (bądź indeksowy $S^{k\alpha} = n^k S_{(\tau)}^{\alpha} + \varphi_{,\beta}^k S^{\alpha\beta}$, gdzie n^k są składowymi wektora normalnego n_{τ} , natomiast wektor $S_{(\tau)}$ /o składowych $S_{(\tau)}^{\alpha}$ / wraz z dwójką wektorów S_{τ}^{β} /o składowych $S^{\alpha\beta}$ /, tworzą układ wektorów leżących na płaszczyźnie stycznej do powierzchni $\mathcal{I}_{\mu\tau}^0$.

9.3. Warunki spełnienia zasady względności Galileusza

Wybór czasoprzestrzeni Galileusza dokonany w p.7. nakłada na wyprowadzone na ostatnich stronach równania bilansu pewne ograniczenia niezmienniczości. Ścisła definicja niezależności obiektu od układu odniesienia, podana w p.5 stanowi, że morfizm \mathcal{F} przyporządkujący^{x/} procesowi kinematycznemu χ , polom i czasowym przebiegom \square określonym na ciele oraz układowi odniesienia β z klasy IF równania bilansu ma spełniać równość

$$(ZG) \quad \beta_2[\mathcal{F}(\chi, \square, \beta)] = \beta_{1*}[\mathcal{F}(\chi, \square, \beta_1)]$$

^{x/} Oryginalnie definicja w p.5 odnosi się jedynie do morfizmów określonych na $AKP(\mathcal{B}) \times \mathbb{R}^4$. W istocie morfizm \mathcal{F} powinien być traktowany jako złożenie /superpozycja/ morfizmów $\mathcal{F}(\chi, \square, \beta) = \mathcal{F}(\chi, \mathbb{T}_{\Theta}(\chi, \beta), \beta)$, gdzie $\square = \mathbb{T}_{\Theta}(\chi, \beta)$.

dla każdego $\beta, \beta_2 \in IF$, tzn. układów powiązanych transformacją Galileusza.

Zacznijmy analizę od równań bilansu masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v + w_\rho) = \rho_s,$$

$$(9.27) \quad \frac{\delta \rho_s}{\delta t} + \operatorname{div}_s(\rho_s \tilde{V} + \tilde{w}_{s_s}) - 2u_n \rho_s \kappa_T = \llbracket \rho(v_T \cdot n_T - u_n) + w_\rho \cdot n_T \rrbracket + \rho_s.$$

Wszystkie dotychczasowe wyprowadzenia były wykonane w układzie $\{\mathcal{E}, \beta\}$. Zgodnie z założeniami strumień masy w_ρ jest wartością morfizmu \mathbb{T}_w niezależnego od układu odniesienia z klasy IF, a skoro jest wektorem, przejście od układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$ do układu $\{\mathcal{E}, \bar{\beta}\}$ jest rządzone zależnością

$$\bar{w}_\rho = Q w_\rho,$$

gdzie przez \bar{w}_ρ oznaczyliśmy wartość morfizmu \mathbb{T}_w w $\bar{\beta}$, zaś w_ρ jest jego wartością w β , natomiast tensor $Q \in \operatorname{Orth}^+(\mathcal{T}/\mathcal{E})$ występuje w transformacji Galileusza wiążącej β z $\bar{\beta}$, tzn.

$$(9.28) \quad (\bar{\beta}_T^{-1} \circ \beta_T)(x) := q \bar{\beta}(\tau) x = Q(x - q) + v_0 \cdot (\tau - \tau_0), \text{ dla } x, q \in \mathcal{E}.$$

Stąd dla czasowego przebiegu pola prędkości $v_T := \dot{\mu}_T \circ \mu_T^{-1}$ przy $\mu_T := \beta_T^{-1} \circ \alpha_T$, gdzie $\beta_T^{-1} := \beta^{-1}(\tau, \cdot)$ dla $\tau \in \Gamma_X$, mamy

$$\bar{v}_T = Q v_T + v_0.$$

Jeśli źródła /produkcja/ masy ρ_s jest absolutnym skalarzem, to jak łatwo sprawdzić morfizm \mathcal{F} spełnia warunek w (ZG). Równania bilansu masy (9.27), które są jego wartością, mają więc tę samą postać we wszystkich inercyjnych układach odniesienia. To ostatnie stwierdzenie jest treścią zasady względności Galileusza.

Na marginesie warto podać wartości morfizmu \mathbb{T}_ρ przy dwóch różnych układach inercyjnych. W szczególności dla składowych stycznymi $(V^\alpha + c^\alpha) \varphi_{,2} := \bar{V}$ oraz składowej normalnej u_n mamy

$$\bar{V}^\alpha = V^\alpha, \quad v_0 \cdot \bar{\varphi}^\alpha =: d^\alpha, \quad \bar{u}_n = u_n + v_0 \cdot \bar{n},$$

a stąd

$$\frac{\overline{\delta \rho_3}}{\delta \tau} = \frac{\delta \rho_3}{\delta \tau} - d^\alpha \frac{\partial \rho_3}{\partial t^\alpha} \equiv \frac{\partial \rho_3}{\partial \tau} - (d^\alpha + c^\alpha) \frac{\partial \rho_3}{\partial t^\alpha}, \text{ bo } \rho_3 = \overline{\rho_3}.$$

Podobnie dla prędkości absolutnej punktów powierzchniowych otrzymano

$$\overline{V}_t = Q V_t + v_o.$$

Przejdźmy do równań bilansu pędu. Szczegółowa acz nieskomplikowana analiza ich postaci w innym układzie inercyjnym prowadzi do następującego spostrzeżenia

SPOSTRZEŻENIE 9. Równania bilansu pędu spełniają zasadę względności Galileusza wtedy i tylko wtedy, gdy objętościowa produkcja pędu P_F oraz powierzchniowa P_{F_3} przyjmują postać

$$(9.29) \quad P_F \equiv p_F + (p_3 - \text{div} w_3) V, \quad P_{F_3} \equiv p_{F_3} + (p_3 + [w_3] - \text{div} \tilde{w}_{F_3}) V,$$

gdzie ogólne człony wektorowe p_F oraz p_{F_3} są wyznaczone przez morfizmy niezależne od układu odniesienia z klasy IF. \square

Należy stwierdzić, że z najbardziej typową sytuacją spotykamy się, gdy oba człony p_F oraz p_{F_3} są zerami; ich różne od zera wartości mogą oznaczać uwzględnienie źródeł pędu w opisie innych od tych związanych ze zmianą masy w podobszarach. Jeśli wstawimy $p_F = 0$ i $p_{F_3} = 0$, to człony p_F oraz p_{F_3} znikają jednocześnie z zachowaniem masy objętościowej w każdym podobszarze oraz masy powierzchniowej w każdej części powierzchni osobliwości, tzn. gdy

$$(9.30) \quad \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho v) = 0; \quad \frac{\delta \rho_3}{\delta \tau} + \text{div}_3(\rho_3 \tilde{V}) - 2u_n \rho_3 K_T = \llbracket \rho(v_t \cdot n_t - u_n) \rrbracket.$$

Na koniec zauważmy, że wyniki spostrzeżenia 9 zostały otrzymane z analizy lokalnej postaci równań bilansu. Jeśli wstawimy je do postaci całkowej (9.18), to się okaże, że postacie dwóch ostatnich całek wykorzystują lokalne równania bilansu masy (9.12) oraz (9.27)₁ burząc jednocześnie strukturę całkoworóżniczkowych równań bilansu. Stąd z punktu widzenia niesprzeczności proponowanych rozważań wydaje się uzasadnienie przyjąć, że oba człony: powierzchniowy i krzywoliniowy z w_3 oraz \tilde{w}_{F_3}

w bilansie masy (9.11) znikają. Wtedy wyniki spostrzeżenia mogą być zapisane symetrycznie następująco

$$(9.29)' \quad p_F = p_F + \beta_S v \quad , \quad p_{F_S} = p_{F_S} + \beta_{S_S} V.$$

Zachowanie masy w umiejscowieniu całego ciała B oznacza znikanie całek

$$(9.31) \quad \int_{B_{\mu_T}^0} p_S dv + \int_{\mathcal{I}_{\mu_T}^0} p_{S_S} da = 0,$$

natomiast z postaci oddziaływań siłami (9.16) zewnątrz na ciało wynika zerowanie się całkowitej produkcji pędu

$$(9.32) \quad \int_{B_{\mu_T}^0} (p_F + \beta_S v_T) dv + \int_{\mathcal{I}_{\mu_T}^0} (p_{F_S} + \beta_{S_S} V) da = 0.$$

To oznacza, że formułując lokalne równania bilansu masy oraz pędu dla ciała w ruchu μ względem układu odniesienia β w postaci (9.27) oraz (9.20) i (9.21), przy znikających w_S oraz w_{S_S} , należy dodać dwa powyższe warunki całkowite. Słuszność praw bilansu tak przedstawianych nie jest ograniczona wielkością /tj. skończonością/ perimetru całego ciała, gdyż wyprowadzenie lokalnych równań bilansu opierało się na sformułowaniu praw dla podciał, a te obiekty mają już skończony perimetr.

Zamykając te rozważania podajmy postać lokalną równań (9.20) - (9.21) wykorzystujących rezultaty spostrzeżenia 9 w postaci (9.29)':

$$(9.33) \quad \rho \left(\frac{\partial v_T}{\partial t} + (grad v_T) v_T \right) = \rho \cdot b_T + div T_T + p_F,$$

$$\rho_S \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V_{,a} V^a \right) = div_S S_T + \llbracket \rho (v_T \cdot n_T - u_n) (v_T - V) - T_T n_T \rrbracket + \rho_S b_S + p_{F_S},$$

gdzie $\rho = \rho_{\mu_T}$, $T_T \equiv T_{\mu_T}$, $b_{\mu_T} \equiv b_T$, $S_T \equiv S_{\mu_T}$,
przy równaniach bilansu masy

$$(9.34) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = \rho_s$$

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \operatorname{div}_y(\rho_s \tilde{V}) - 2u_n \rho_s \kappa_\tau = [\rho(v_\tau \cdot n_\tau - u_n)] + \rho_s \cdot$$

Oczywiście i tutaj obowiązują warunki całkowe (9.31) i (9.32).

9.4. Bilans energii

Dotychczas rozpatrzyliśmy trzy prawa bilansu tworzące wspólnie aksjomaty dynamiki ciał odkształcalnych. Choć wiele zagadnień kontinuum można rozwiązywać ograniczając się do dynamiki i związków konstytutywnych zachodzących między wielkościami kinematycznymi i dynamicznymi, to dla pełnej poprawności problemu i jego rozwiązania wymagane jest spełnienie praw termodynamiki. Obok kryterium poprawności występują inne kryteria, takie jak: niesprzeczność z obserwacjami fizycznymi, możliwość szczegółowej analizy efektów termicznych zaniedbywanych w przypadku ograniczania się do dynamiki oraz wyznaczenia zakresu aproksymacji wtedy dokonywanych. Z kryterium poprawności ściśle się wiąże zagadnienie dopuszczalności rozwiązań z osobliwościami, a w szczególności rozwiązań słabych. Ten aspekt będzie rozwinięty w ostatnim rozdziale rozprawy.

W termodynamice rozpatruje się wielkości związane nie tylko z ruchem, lecz także z ciepłem jako formą energii dostarczanej ciału na sposób niemechaniczny. Prawo bilansu energii jest pierwszym prawem termodynamiki. Przy dopuszczonej w naszych rozważaniach osobliwościach energia ciała rozбивa się na energię związaną masami: objętościową oraz powierzchniową, tzn. dla każdego podziału $\mathcal{P} \subset B$ wyrażenie

$$(9.35) \quad E(\mu_\tau(\mathcal{P})) := \int \rho_\tau (e + \frac{1}{2} v_\tau \cdot v_\tau) d\mu_\tau + \int \rho_s (e_s + \frac{1}{2} V_\tau \cdot V_\tau) d\mu_\tau$$

$\mu_\tau(\mathcal{P}) \llcorner \mathcal{B}_{\mu_\tau} \qquad \mu_\tau(\mathcal{P}) \cap \mathcal{S}_{\mu_\tau}^\circ$

reprezentuje energię przyporządkowaną ^{pod-}ciału \mathcal{P} w procesie α w układzie inercyjnym $\{\mathcal{E}, \beta\}$.

Strumień energii dopływa do ciała z otoczenia na sposób mechaniczny, jako produkt sił i prędkości ruchu, jakże te siły wywołują, oraz na sposób niemechaniczny. Ten drugi rodzaj strumienia nosi nazwę strumienia ciepła. Rozbicie strumienia energii na te dwie części jest takie samo dla każdego podziału jak i dla całego ciała. W końcu energia może być dostarczana do ciała na sposób objętościowy w $\mathcal{B}_{\mu_T}^{\circ}$ oraz powierzchniowy w $\mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}$. Jest istotne, że w przeciwieństwie do prawa bilansu masy, gdzie masa całego ciała była zachowana, a tym samym układ był zamknięty, uwzględniamy źródła energii. To oznacza, że energetycznie układ nie jest zamknięty /w takim przypadku mówi się, że układ nie jest izolowany/. Przeprowadźmy specyfikę całkową dotychczas wymienionych wielkości. W kolejności omawiania możemy związać z obszarem $\mu_T(\mathcal{P}) \subset \mu_T(\mathcal{B})$ strumień energii

$$W(\mu_T(\mathcal{P})) := \int_{\mu_T(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}_{\mu_T}^{\circ}} (q - v_T \cdot t_T) da + \int_{\mu_T(\mathcal{P}) \cap \mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}} (q_{\mathcal{E}} - V_T \cdot t_{\mathcal{E}}) dl,$$

źródła energii dostarczanej przez otoczenie

$$R(\mu_T(\mathcal{P})) := \int_{\mu_T(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}_{\mu_T}^{\circ}} \rho (\sigma_{\mathcal{E}} + v_T \cdot b_T) dv + \int_{\mu_T(\mathcal{P}) \cap \mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}} \rho_s (\sigma_{\mathcal{E}_s} + V_T \cdot b_s) da, \text{ gdzie } t_T \equiv t_{\mu_T} \text{ i } t_{\mathcal{E}} \equiv t_{\mathcal{E}_{\mu_T}}.$$

Na koniec należy uwzględnić produkcję energii w każdym podobszarze, gdzie ani masa ani pęd nie są zachowane, w ogólnej postaci

$$P(\mu_T(\mathcal{P})) := \int_{\mu_T(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}_{\mu_T}^{\circ}} \rho_e dv + \int_{\mu_T(\mathcal{P}) \cap \mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}} \rho_{e_s} da.$$

Jest oczywiste, że gdy w miejsce \mathcal{P} wstawimy ciało \mathcal{B} , to spełnione być musi równanie

$$\int_{\mathcal{B}_{\mu_T}^{\circ}} \rho_e dv + \int_{\mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}} \rho_{e_s} da = 0, \text{ tzn. } P(\mu_T(\mathcal{B})) = 0.$$

Prawo bilansu energii dla ciała \mathcal{B} w ruchu μ jest postulowane w postaci

$$(9.36) \quad \frac{d}{dt} E(\mu_{\tau}(\mathcal{B})) = -W(\mu_{\tau}(\mathcal{B})) + R(\mu_{\tau}(\mathcal{B})),$$

zaś dla każdego podciała $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ żądamy równości

$$(9.37) \quad \frac{d}{dt} E(\mu_{\tau}(\mathcal{P})) = -W(\mu_{\tau}(\mathcal{P})) + R(\mu_{\tau}(\mathcal{P})) + P(\mu_{\tau}(\mathcal{P})).$$

Stąd po przyjęciu reprezentacji strumieniowych dla q oraz \tilde{q}_L /por. 9.17 /, rutynowe zastosowanie twierdzenia Greena-Gaussa prowadzi do lokalnych równań bilansu energii

$$(9.38) \quad \frac{\partial (\rho(e + \frac{1}{2}v_{\tau} \cdot v_{\tau}))}{\partial \tau} + \operatorname{div} \left(\rho(e + \frac{1}{2}v_{\tau} \cdot v_{\tau})v_{\tau} + q_{\tau} - v_{\tau}T_{\tau}^T \right) = \rho(\sigma_{\tau}e + v_{\tau} \cdot b_{\tau}) + \rho e$$

H₂-p.w.)

$$\frac{\delta (\rho_s(e_s + \frac{1}{2}V_{\tau} \cdot V_{\tau}))}{\delta \tau} + \operatorname{div}_s \left(\rho_s(e_s + \frac{1}{2}V_{\tau} \cdot V_{\tau})\tilde{V} + \tilde{q}_L - V_{\tau}S_{\tau} \right) - 2u_n \left(\rho_s(e_s + \frac{1}{2}V_{\tau} \cdot V_{\tau}) \right)_{\tau}$$

$$= \rho_{e_s} + \rho_s(\sigma_{\tau}e_s + b_s \cdot V_{\tau}) + \left[\left(\rho(e + \frac{1}{2}v_{\tau} \cdot v_{\tau})(v_{\tau} \cdot n_{\tau} - u_n) + (q_{\tau} - v_{\tau}T_{\tau}^T) \cdot n_{\tau} \right) \right]$$

H₂-p.w.

Postacie te mogą być uproszczone zakładając, że równania bilansu masy oraz pędu są spełnione. Na przykład w miejsce (9.38)₁ otrzymamy

$$(9.39) \quad \rho \left(\frac{\partial e}{\partial \tau} + q_{\tau} \cdot \nabla_{\tau} \right) + \operatorname{div} q_{\tau} = \operatorname{tr} (q_{\tau} \cdot \nabla_{\tau} T_{\tau}^T) - \rho F \cdot v_{\tau} + \rho e - \rho q_{\tau} \left(e + \frac{1}{2}v_{\tau} \cdot v_{\tau} \right),$$

gdzie ograniczyliśmy się do przypadku równań (9.33) i (9.34).

Stąd bezpośrednio otrzymuje się następujący rezultat jako warunek niezmienniczości postaci równania bilansu energii przy zmianie układu odniesienia z klasy IF.

SPOSTRZEŻENIE 10. Jeśli równania bilansu masy i pędu są spełnione oraz spełniona jest zasada względności Galileusza, to warunkiem niezmienniczości postaci równań bilansu energii w układach inercyjnych jest zachodzenie następujących równości:

$$p_e = p_F \cdot v + p_g \left(e + \frac{1}{2} v \cdot v \right), \quad H_3 - \text{p.w. na } \mathcal{B}_{\mu_T}^{\circ}$$

$$(9.40) \quad p_{e_3} = p_{F_3} V + p_{g_3} \left(e_3 + \frac{1}{2} V \cdot V \right), \quad H_3 - \text{p.w. na } \mathcal{S}_{\mu_T}^{\circ}$$



Krótko komentując uzyskany wynik wypada wspomnieć o rezultatach Greena i Rivlina [1964], którzy z niezmienniczości globalnego równania zachowania energii pod działaniem transformacji euklidesowych uzyskali lokalne równania zachowania masy, pędu i momentu pędu. W obecnym podejściu dowolność wyrazów określających produkcję wielkości termodynamicznych w podobszarach uniemożliwia powtórzenia rozumowania Greena i Rivlina. Natomiast przyjmując explicite związki między p_e , p_g oraz p_F można uzyskać wyniki podobne do tych wspomnianych powyżej. Będzie to celem innej publikacji /por. Kosiński [1983] /.

9.5. Nierówność produkcji entropii

Istotą drugiego prawa termodynamiki jest nierówność produkcji entropii. Jej sformułowanie wykorzystuje pojęcia entropii układu oraz temperatury; oba te pojęcia nie były potrzebne przy formułowaniu pierwszego prawa termodynamiki.

W klasycznym wykładzie termodynamiki procesów odwracalnych temperatura bezwzględna pojawia się jako czynnik całkujący w wyrażeniu na ciepło przemiany odwracalnej, dla którego pełna różniczka jest różniczką entropii.

Stąd rola jaką gra entropia jest odmienna od tej jaką mają inne wielkości termodynamiczne jak energia wewnętrzna czy temperatura. Ta odmienność ma swoje głębokie uzasadnienie w fakcie, że w ogólności nie potrafimy mierzyć samej entropii, nawet dla prostych układów termodynamicznych, lecz jedynie jej przyrosty.

Dla uzupełnienia tak określonego pojęcia entropii^{x/} na początku tego wieku /Nernst w 1906 r., Planck w 1908 r./ sformułowano tzw. trzecią zasadę termodynamiki, która miała rozstrzygać o wartości entropii dowolnego układu materialnego w pobliżu temperatury zera bezwzględnej.

Interesujące badania w termodynamice neo-klasycznej /Wilmański [1974] /, racjonalnej /Coleman, Owen [1974], Day [1972] Coleman, Owen i Serrin [1981], Šilhavy [1980, 1982], Bree i Beavers [1979] / miały za zadanie sformułowanie warunków wystarczających /i ewentualnie koniecznych/ istnienia entropii w stanach dalekich od równowagi. Oceniając pobieżnie te badania nasuwa się spostrzeżenie, że warunki istnienia entropii są mocno powiązane z drugim prawem termodynamiki; formułując dosadniej - wydaje się nie-możliwe podanie warunków istnienia entropii bez postulowania w formie bardziej czy mniej jawnej warunku niezrównoważania ciepła dostarczanego do układu z ciepłem odzyskiwanym.

Nie jest naszym celem wchodzenie głębiej w dyskusję o istnieniu entropii dla kontinuum materialnego. Obok możliwych konstrukcji entropii jako funkcjonału działania spełniającego nierówność Clausiusa /por. Coleman i Owen [1974] oraz Fabrizio [1980] / wystarczy dla naszych celów informacja, że układowi zamkniętemu \mathcal{B} można przypisać /choć niejednoznacznie/ funkcję

$N_{\mu_T}(\mathcal{B})$ - entropię układu taką, że w każdym procesie χ względem inercyjnego układu odniesienia β i w każdej chwili entropia dostarczana do układu przez powierzchnię $\partial\mu_T(\mathcal{B}) \setminus \Delta_{\mu_T}^0$ oraz entropia dostarczana przez krzywą $\partial\Delta_{\mu_T}^0$ ograniczającą powierzchnię osobliwości /ruchomą/ wraz z objętościowymi źródłami /ich prędkościami/ $\rho s \pi_{\mu_T}$ w $\mathcal{B}_{\mu_T}^0$ oraz powierzchniowymi skoncentrowanymi źródłami $\rho s \pi_{\mu_T}$ na $\Delta_{\mu_T}^0$ nie równoważą zmian funkcji $N_{\mu_T}(\mathcal{B})$. Dla tej ostatniej, zgodnie z dotychczasową procedurą przyjmujemy reprezentację w postaci sumy dwóch całek

^{x/} Odmienne przedstawia się definicja entropii w termodynamice statystycznej wykorzystującej wzór Boltzmanna: Entropia = $k \ln$ /liczba mikrostanów/ - gdzie k jest stałą Boltzmanna. Wzór ten stosuje się jedynie do układów izolowanych w równowadze pełnej lub niepełnej /por. Zalewski [1978] /.

$$N_{\mu\tau}(B) := \int_{B_{\mu\tau}^{\circ}} \rho \eta_{\mu\tau} dv + \int_{S_{\mu\tau}^{\circ}} \rho s_3 \eta_{3\mu\tau} da$$

Wtedy drugie prawo termodynamiki dla ciała przyjmie postać nierówności

$$(9.41) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \int_{B_{\mu\tau}^{\circ}} \rho \eta_{\mu\tau} dv + \int_{S_{\mu\tau}^{\circ}} \rho s_3 \eta_{3\mu\tau} da \right\} \geq \int_{\partial\tau(B) \setminus S_{\mu\tau}^{\circ}} \frac{q_{\tau}}{\vartheta_{\mu\tau}} da + \int_{\partial S_{\mu\tau}^{\circ}} \frac{\tilde{q}_{\alpha}}{\vartheta_{\mu\tau}} d\ell$$

$$+ \int_{B_{\mu\tau}^{\circ}} \frac{\rho \sigma_{\eta}}{\vartheta_{\mu\tau}} dv + \int_{S_{\mu\tau}^{\circ}} \frac{\rho s_1 \sigma_{\eta_3}}{\vartheta_{3\mu\tau}} da,$$

gdzie postulujemy, że strumień entropii, tj. entropia dostarczana do ciała przez otoczenie przez brzeg, jest tylko związana ze strumieniami ciepła $q = q_{\tau} n_{\tau}$ i $q_{\alpha} = \tilde{q}_{\alpha} \tilde{n}$.

Występujące w dwóch pierwszych całkach prawej strony współczynniki proporcjonalności $\vartheta_{\mu\tau}$ oraz $\vartheta_{3\mu\tau}$ noszą nazwę temperatury bezwzględnej odpowiednio: objętościowej i powierzchniowej.

Zatrzymajmy się na chwilę przy właśnie sformułowanym drugim prawie termodynamiki dla rozpatrywanego układu zamkniętego - ciała B . Zewnątrz ciała oddziałują na układ dostarczając mu ciepło. Skutkiem tego jest zmiana entropii układu. Przepływ entropii przez brzeg $\partial\mu\tau(B) \setminus S_{\mu\tau}^{\circ}$ oraz $\partial S_{\mu\tau}^{\circ}$, ze względu na reprezentację strumieniową, może być przedstawiony w postaci dwóch członów $\frac{q_{\tau} \cdot n_{\tau}}{\vartheta_{\mu\tau}}$, $\frac{\tilde{q}_{\alpha} \cdot \tilde{n}}{\vartheta_{3\mu\tau}}$. Jeśli objętościowe i skoncentrowane źródła entropii σ_{η} oraz σ_{η_3} pochodzą jedynie od źródeł ciepła σ_e oraz σ_{e_3} , to symetrycznie można je przedstawić w postaci

$$(9.42) \quad \sigma_{\eta} = \frac{\sigma_e}{\vartheta_{\mu\tau}}, \quad \sigma_{\eta_3} = \frac{\sigma_{e_3}}{\vartheta_{3\mu\tau}}.$$

Powstaje pytanie jak wygląda przepływ entropii w układzie między poszczególnymi podciałami? Czy postulowana w samej nie-

równości (9.41) produkcja entropii jest wyrażana w tej samej postaci dla każdego podciała jak i dla ciała? Odpowiedzi na oba te pytania w przypadku nieskomplikowanych układów dostarcza obserwacja fizyczna. Co się dzieje z układami złożonymi, w których pomiary mogą być w zasadzie dokonywane tylko na całości? Czy sformułowanie prawa termodynamiki ma ograniczać dyskusję tylko do efektów i zjawisk prostych już zaobserwowanych?

W stanowisku tutaj prezentowanym nie mamy na celu działać wbrew istniejącym ogólnie znanym i akceptowanym prawom przyrody. Chcemy natomiast zostawić w modelowaniu matematycznym termodynamiki ciał odkształcalnych pewien margines swobody działania samej teorii, działania rozumianego jako samo-organizacji równań, które na tę teorię się składają. Aby być zrozumianym przejdźmy do konkretów, a będą one zawarte w zlokalizowanej postaci drugiego prawa termodynamiki.

Jeśli $P \subset B$ jest podciałem, to w ruchu μ w chwili τ nie można z góry przewidzieć, że strumień entropii przepływający przez brzeg $\partial \mu_\tau(P) = \partial \mu_\tau(P) \setminus \partial S_{\mu_\tau} \cup \partial S_{\mu_\tau}$ będzie się składał tylko z członów powierzchniowego $\frac{q_\tau \cdot n_\tau}{\nu_{\mu_\tau}}$ oraz krzywoliniowego $\frac{q_\tau \cdot \tilde{n}}{\nu_{\mu_\tau}}$, tak jak miało to miejsce na brzegu ciała. Innymi słowy nierówność (9.41) nie pociąga za sobą nierówności

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mu_\tau(P) \cap B_{\mu_\tau}} s_{\mu_\tau} dv + \int_{\mu_\tau(P) \cap S_{\mu_\tau}} s_{\mu_\tau} da \right\} \geq \int_{\mu_\tau(P) \cap S_{\mu_\tau}} \frac{q_\tau}{\nu_{\mu_\tau}} da + \int_{\mu_\tau(P) \cap S_{\mu_\tau}} \frac{q_\tau}{\nu_{\mu_\tau}} dl + \int_{\mu_\tau(P) \cap S_{\mu_\tau}} \frac{q_\tau \cdot n_\tau}{\nu_{\mu_\tau}} dv + \int_{\mu_\tau(P) \cap S_{\mu_\tau}} \frac{s_{\mu_\tau} \cdot n_\tau}{\nu_{\mu_\tau}} da$$

dla każdego podciała $P \subset B$ i w każdej chwili $\tau \in \Gamma_X$.

W miejsce tej nierówności postulujemy inną, której postać jest konsekwencją dopuszczenia, że tzw. wewnętrzny strumień entropii, tj. strumień entropii przepływającej między podciałami, nie jest konieczne wyrażany jako stosunek strumienia ciepła do temperatury. Motywacją takiego rozumowania jest brak określonych praw, które by takie odróżnienie z góry zabraniały. Ponadto przyjęcie identycznego wyrażenia dla wewnętrznego strumienia entropii z tym obserwowanym na granicy układ otoczenia poważnie zuboża modelowanie matematyczne, konstytutywne, jak to pokażemy później na przykładzie.

Konsekwentnie, w miejsce ostatniej nierówności, dopuszczamy istnienie powierzchniowego wewnętrznego wektora strumienia entropii $k_{\mu\tau} : \bar{B}_{\mu\tau} \setminus \mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E})$ oraz krzywoliniowego $\tilde{k}_{\mu\tau} : \mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ} \cup \partial\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E})$ takich, że

$$(9.43) \quad \begin{aligned} k_{\mu\tau} \cdot n_{\tau} &= q_{\tau} & , H_2\text{-p.w. na } \partial\mu_{\tau}(\mathcal{B}) \cap \partial\bar{B}_{\mu\tau} \setminus \bar{\mathcal{I}}_{\mu\tau}^{\circ}, \\ \tilde{k}_{\mu\tau} \cdot \tilde{n}_{\tau} &= q_{\tau} & , H_1\text{-p.w. na } \partial\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ} \cap \partial\mu_{\tau}(\mathcal{B}), \quad \mathcal{I} \in \Gamma_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

i spełniających nierówność

$$(9.44) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mu_{\tau}(\mathcal{P}) \cap \bar{B}_{\mu\tau}^{\circ}} \rho \eta_{\mu\tau} dv + \int_{\mu_{\tau}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} \rho_3 \eta_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} da \right\} &\geq \int_{\partial\mu_{\tau}(\mathcal{P}) \cap \bar{B}_{\mu\tau}^{\circ} \setminus \mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} k_{\mu\tau} \cdot n_{\tau} da + \\ &+ \int_{\partial\mu_{\tau}(\mathcal{P}) \cap \partial\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} \tilde{k}_{\mu\tau} \cdot \tilde{n}_{\tau} dl + \int_{\mu_{\tau}(\mathcal{P}) \cap \bar{B}_{\mu\tau}^{\circ}} \rho \sigma \eta dv + \int_{\mu_{\tau}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} \rho_3 \eta_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} da \end{aligned}$$

dla każdego $\mathcal{P} \in \Omega(\mathcal{B})$.

Stąd lokalna postać nierówności produkcji entropii będzie

$$(9.45) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\rho \eta_{\mu\tau})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \eta_{\mu\tau} v_{\tau} - k_{\mu\tau}) &\geq \rho \sigma \eta & , H_3\text{-p.w. w } \bar{B}_{\mu\tau}^{\circ} \setminus \mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ} \\ \frac{\partial(\rho_3 \eta_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}})}{\partial t} + \operatorname{div}_g(\rho_3 \eta_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} \tilde{V} - \tilde{k}_{\mu\tau}) - 2u_n \rho_3 \eta_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} \kappa_{\tau} &\geq \rho_3 \eta_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} (v_{\tau} \cdot n_{\tau} - u_n) + \\ &- \llbracket k_{\mu\tau} \rrbracket \cdot n_{\tau} + \rho_3 \eta_{\mathcal{I}_{\mu\tau}^{\circ}} \kappa_{\tau} & , H_2\text{-p.w. na } \bar{\mathcal{I}}_{\mu\tau}^{\circ}. \end{aligned}$$

Postacie te mogą być uproszczone zakładając, że równania bilansu masy są spełnione.

Krótki komentarz, jaki niewątpliwie jest pożądanym, powinien dotyczyć określenia różnicy w wynikach możliwych do uzyskania po zastosowaniu nierówności (9.45) z jednej strony, a dobrze znanej nierówności Clausiusa-Duhema termodynamiki racjonalnej, z

drugiej strony. Jak ogólnie wiadomo ta druga nierówność, w przypadku procesów i ciał bez osobliwości powierzchniowych, może być przedstawiona następująco

$$(9.46) \quad \rho \left(\frac{\partial \eta_T}{\partial t} + \text{grad} \eta_T \cdot v_T \right) \geq \text{div} \left(\frac{q_T}{v_T} \right) + \rho \frac{r_e}{v_T}, \text{ gdzie } \eta_T = \eta_{\mu T}$$

Tymczasem nierówności (9.45) przy tych samych założeniach sprowadza się do

$$(9.47) \quad \rho \left(\frac{\partial \eta_T}{\partial t} + \text{grad} \eta_T \cdot v_T \right) \geq \text{div} k_{\mu T} + \rho r_2,$$

gdzie przyjęto, że masa jest zachowana, tzn. $\rho_S = 0$. Nie ekspluatując różnicy w członie źródłowym, który w zasadzie powinien być taki sam /por. (9.42)₁ /, interesuje nas różnica w drugim członie prawych stron.

W ciele sprężystym jedyny przepływ entropii pochodzi od przepływu ciepła. W większości znanych modelach ciał niesprężystych nie uwzględnia się innego przepływu entropii od tego obserwowanego w ciele sprężystym. W ciałach tych produkcja entropii jest skutkiem niesprężystej reakcji materiału ciała. Ponadto produkcja jest punktowa, jako że efekty niesprężyste są określone i ograniczane do punktu, nie uwzględnia się bowiem niesprężystego oddziaływania różnych punktów ciała na siebie. W znanym modelu termodynamicznym z wewnętrznymi zmiennymi stanu równania ewolucji dla zmiennych są formułowane jako równania różniczkowe zwyczajne. Taki formalizm nie może prowadzić do przepływu entropii między podciałami czy cząstkami nie generowanego przepływem ciepła. Stąd dopuszczenie w termodynamice z wewnętrznymi zmiennymi stanu cząstkowych równań ewolucji dla zmiennych wewnętrznych przy jednoczesnym ograniczeniu drugiego prawa termodynamiki do postaci nierówności Clausiusa-Duhema (9.46) prowadzi do rezultatów bardzo wątpliwych. W szczególności uzyskuje się, jako jeden z warunków koniecznych spełnienia nierówności (9.46) przez każde rozwiązanie klasyczne równań pola, niezależność energii, jak i naprężenia, od zmiennych wewnętrz-

nych /por. Frischmuth [1982] oraz Frischmuth i Perzyna [1983] /.

W związku z tym można się pokusić o sformułowanie następującej hipotezy: jeśli jedyny nielokalny efekt termodynamiczny jest związany z przewodnictwem ciepła, to koniecznie różnica

$$j_{\mu\tau}^0 k_{\mu\tau} - q_{\mu\tau} \quad \text{musi znikać.}$$

Wyprzedzając rozważania ostatniego rozdziału warto zasygnalizować, że formułowane czasami w literaturze równanie bilansu entropii^{x/} jest w naszym rozumieniu - konsekwencją spełnienia nierówności produkcji entropii przez każde klasyczne, tzn. ciągłe w sensie Lipschitza, rozwiązanie równań bilansu zgodne z założeniami konstytutywnymi o układzie. Skoro rozwiązanie ma być klasyczne równanie bilansu entropii wyprowadza się w pierwszym rzędzie dla punktów z obszaru $B_{\mu\tau}^0$. Warunki ciągłości rozwiązania sprawiają wtedy, że nierówność (9.45)₂, a także pozostałe równania bilansu na powierzchni stają się niezależne od równań w obszarze.

Ruchoma powierzchnia $\{j_{\mu\tau}^0 : \tau \in \Gamma_x\} \subset \mathcal{E}$ jest wtedy nośnikiem tylko jednego rodzaju osobliwości, a mianowicie powierzchniowej koncentracji wielkości termodynamicznych.

Jeśli natomiast zechcemy rozważyć rozwiązania nieklasyczne, to powierzchnia $j_{\mu\tau}^0$ staje się nośnikiem obu typów osobliwości i równanie bilansu entropii na powierzchni, otrzymując dodatkowe człony, zmienia swoją postać. Powierzchnia $j_{\mu\tau}^0$ staje się powierzchnią nieciągłości rozwiązania oraz miejscem, gdzie może zajść, a w przypadku fal uderzeniowych - musi zajść, produkcja entropii.

Fakt, że rozwiązania nieklasyczne są dopuszczone w układach niedyssypatywnych, jeśli ograniczyć ten termin do rozwiązań klasycznych, wiąże się bardzo mocno z istnieniem przyrostu, a więc i produkcji entropii zlokalizowanej do powierzchni osobliwości.

Jest wartym podkreślenia, że ograniczając rozważania do układów niedyssypatywnych, nieprzewodzących ciepła, bez powierzchniowej koncentracji masy, energii, entropii i napięcia powierzchniowego, równania bilansu w klasie procesów ciągłych, odnoszące się do części $B_{\mu\tau}^0$, pokrywają cały obszar $\mu\tau(B) \subset \mathcal{E}$, gdyż z założenia nie ma wtedy powierzchni $j_{\mu\tau}^0$.

^{x/} Por. Green i Naghdi [1977].

To samo dotyczy nierówności produkcji entropii, która wtedy koniecznie prowadzi do równania zachowania entropii η :

$$(9.48) \quad \rho \left(\frac{\partial \eta_\tau}{\partial \tau} + \text{grad} \eta_\tau \cdot v_\tau \right) = 0,$$

o ile masa jest zachowana.

Jeśli dopuścimy do rozważań procesy - rozwiązania nieciągłe, to tym samym zgodzimy się, że w każdej chwili $\tau \in \Gamma$ (obszar $\mu_\tau(B)$) zawiera powierzchnię nieciągłości rozwiązania $\rho \mu_\tau$.

Drugie prawo termodynamiki postulowane nierównością produkcji entropii wskazuje, że powierzchnia $\rho \mu_\tau$ nabiera obu cech powierzchni osobliwości, staje się bowiem nośnikiem powierzchniowej /koncentracji/ produkcji entropii.

Na potwierdzenie tej obserwacji posłużmy się znanymi wynikami z dynamiki płynów /por. Courant i Friedrichs [1948] /, gdzie wykazano, że skok /przyrost/ entropii na fali uderzeniowej nielepkiej i nieprzewodzącej cieczy bez efektów radiacji ($r_0 = 0$), tj. układu niedyssypatywnego o prawie (9.48), jest wielkością trzeciego rzędu w intensywności fali. Podobny rezultat otrzymano dla równań elastodynamiki /por. Bland [1970] /.

Aby pogodzić te wyniki z nierównością produkcji entropii oraz równaniem zachowania entropii (9.48), obowiązującym w obszarze $B_{\mu_\tau}^0$, dla $\tau \in \Gamma_\chi$, należy dopuścić powierzchniową produkcję entropii p_{η_S} , która równoważy przyrost entropii na fali, tj. powierzchni $\rho \mu_\tau$. To oznacza, że równanie bilansu entropii na powierzchni będzie postaci

$$\llbracket \rho \eta_\tau (v_\tau \cdot n_\tau - u_n) \rrbracket + p_{\eta_S} = 0,$$

gdź zgodnie z założeniem $\rho_S = 0$, $q_S = 0$, $S = 0$, przy jednoczesnym żądaniu

$$p_{\eta_S} \geq 0.$$

Powyżej przytoczony przykład miał na celu wykazać, że nawet w tak prostych układach niedyssypatywnych bez tzw. efektów powierzchniowej koncentracji, przechodząc do dyskusji rozwiązań nieklasycznych /tzn. z nieciągłościami/, należy się liczyć, że

powierzchnia osobliwości rozwiązań będzie jednocześnie nośnikiem co najmniej powierzchniowej produkcji entropii. To oznacza, że występująca w obszarze $\{\mu(B): \tau \in T_\mu\}$ podczas ruchu μ powierzchnia jest powierzchnią osobliwości w obu aspektach znaczeniowych.

9.6. Komentarz do rozdziału

Przedstawiony zarys dynamiki i termodynamiki ciał odkształcalnych może w swych partiach razić ogólnością. Znamy dość dobrze wykład nieliniowej teorii pola mechaniki Truesdella i Toupina [1960] wraz z jego kontynuacją artykułem Truesdella i Nolla [1965] i dla niektórych Czytelników ogólność obecnej prezentacji może wydawać się zbyt sztuczna. Spróbuję więc wyjaśnić cele, dla których zdecydowano się na takie a nie na inne ujęcie. Jednocześnie spróbuję przedstawić różnice między zawartością tego rozdziału a spotkanymi w literaturze podobnymi wynikami czy ujęciami.

Najbliższym tematycznie i zawartością jest bez wątpienia artykuł Nolla [1973], w szczególności w zakresie pierwszych ośmiu punktów. Formułowanie i wyprowadzanie w p.9 równań bilansu dla ośrodka z osobliwościami powierzchniowymi jest wzorowane na książce autora [1981] /por. też artykuł Moekela [1974], gdzie autor ograniczył się w zasadzie do powierzchni oddziaływania^{x/}.

Celem tego rozdziału było przygotowanie bazy do wyprowadzenia ogólnego równania ewolucji dla ciała odkształcalnego, co jest treścią drugiego rozdziału. Jednocześnie zainteresowanie nasze sięga poza samo wyprowadzenie, chcemy bowiem podać ogólne warunki stabilności klasycznego rozwiązania problemu początkowo-brzegowego dla ciała odkształcalnego w klasie rozwiązań słabych, nie wspominając o twierdzeniu o istnieniu rozwiązania problemu Cauchy'ego. To oznacza, że budowana aksjomatyka ośrodka ciągłego musiała dopuszczać wystarczająco szeroką klasę deformacji: przemieszczeń. W związku z tym powtórzenie za Truesdellem i Nollem [1965] lub samym Nollem [1973] definicji ciała odkształcalnego nie odpowiadałoby naszym zamierzeniom. Obie definicje bowiem przyjmują za klasą przemieszczeń dyferomorfizmy. Stąd w Defini-

^{x/} Ang. interface.

cji i osłabiono to żądanie. Nie koniec na tym, gdyż osłabiając gładkość nie mogliśmy tracić z oczu możliwości określenia klasycznej miary deformacji - tensora przemieszczenia^{x/} F . W tym pomocna jest klasa funkcji spełniających warunek Lipschitza. Jeśli każde przemieszczenie $\lambda \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ jest bilipschitzowskie, to prawie wszędzie (H_3 - p.w.) jest określony gradient $\nabla \lambda$, który jest skończony, a ponadto gradient odwrotny też jest skończony /oba o nie znikających wyznacznikach/. To oznacza, że przemieszczenia z klasy $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ są regularnymi odwzorowaniami topologicznymi p.w. Podobnie założona ciągłość lipschitzowska procesów przemieszczania w funkcji czasu prowadzi do naturalnie określonego H_1 - p.w. na Γ wektora prędkości przemieszczeń. Te dwie podstawowe wielkości kinematyczne są wtedy określone na produkcie przedziału czasu i podobszaru w \mathcal{E} prawie wszędzie względem miary H_4 . Podzbiory miary H_4 zero, gdzie F oraz v są nieokreślone, są potencjalnymi hiperpowierzchniami/tj. ruchomymi powierzchniami w \mathcal{E} /nieciągłości.

W tym miejscu dotykamy najważniejszej kwestii łączącej część aksjomatyczną z prawami bilansu. Istnienie jednostronnych pochodnych przestrzennych i czasowych procesów przemieszczania jest zagwarantowane przez ich ciągłość w sensie Lipschitza w obu zmiennych. Punkty, w których jednostronne pochodne są różne, tworzą zbiór miary H_4 zero. Są to w nomenklaturze teorii klasy BV punkty regularne. Zbiór ten zostaje w dalszej części wyposażony w dodatkowy atrybut jako nośnik drugiego rodzaju osobliwości - powierzchniowych koncentracji /przy stałym τ / wielkości termodynamicznych.

Aby skończyć omawianie warunków Definicji 1 ciała, należy skomentować warunek $BI \subset \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \subset BLP$. Pierwsze zawieranie zabezpiecza niezależność definicji konfiguracji od układu odniesienia, jako że właściwe automorfizmy czasoprzestrzeni lokalnie są reprezentowane w przestrzeni fizycznej przez klasę BI.

^{x/} Ogólnie używa się terminu gradient deformacji. W jednej ze swych pierwszych prac Noll [1955] nazwał tensor F tensorem przemieszczenia. Jako bardziej odpowiadający nomenklaturze tutaj używanej zachowamy tę nazwę podobnie jak to robi Noll [1972, 1973].

Warunek dodatniości jacobianu odwzorowań z BLP, a więc i przemieszczeń, zabezpiecza zachowanie orientacji ciała oraz możliwość sformułowania warunku d/ Definicji 1.

Warunek o/, z kolei, jest dość naturalny i odpowiada do pewnego stopnia-przyjmowanemu przez Nolla warunkowi:

jeśli $x \in \mathcal{C}$ oraz λ jest dyferomorfizmem w \mathcal{E} takim, że $\text{Dom } \lambda = \text{Rng } x$, to $\lambda \circ x \in \mathcal{C}$. Zwróćmy jednak uwagę, że postulowane w Definicji 1 zawieranie $\mathcal{P}_C \circ \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ jest mocniejszym warunkiem od powyżej wspomnianego i zabezpiecza przed zbyt szeroką klasą umiejscowień. Ma to swoje znaczenie wszędzie tam, gdzie pewne "deformacje" ciała są niedopuszczalne; ciało nie musi pojawiać się w dowolnie zaprogramowanym umiejscowieniu.

Warunek d/ w słabszej postaci został sformułowany u Kosin-skiego [1981]. Wyraża on, postulowany przez Rychlewskiego [1970] w jego wykładach, fakt możliwości przejścia w sposób ciągły od jednego umiejscowienia ciała do drugiego. Wzmocnienie tego warunku jest żądaniem, by to ciągłe przejście - homotopia pozosta-wała w klasie przemieszczeń na każdym kroku.

Ponadto obecne sformułowanie zawiera ukryty warunek jedno-znaczności rozwiązania problemu początkowego czy początkowo-brzegowego dla ciała. Spróbujmy to wyjaśnić. Przystępując do rozwiązywania problemu ewolucji w czasie umiejscowienia ciała znamy zazwyczaj jego umiejscowienie początkowe. Gdyby się zda-rzyło, że procedura rozwiązywania dałaby jako wynik dwa lub wię-ciej umiejscowień końcowych warunek d/ rozstrzygnie, które z tych umiejscowień jest realne, dopuszczalne dla ciała według na-stępującego schematu rozumowania: otrzymane w procedurze roz-wiązywania nowe umiejscowienie /tzn. rozwiązanie/ jest dopusz-czalne, jeśli jest homotopijne w klasie BLP z umiejscowieniem wyjściowym /lub odniesienia, jeśli tylko takie było znane na po-czątku procedury/.

Warunek d/ ma swoje zastosowanie jako kryterium ujednoznac-znia nawet wtedy, gdy badany jest statyczny problem brzegowy. W szczególności w teorii ciał hipersprężystych znane przypadki rozwiązań niejednoznacznych /w przemieszczeniach i obciążeniach, por. Ball [1977] / dzięki zastosowaniu powyższego schematu rozu-

owania mogą stać się jednoznaczne.

Znaczenie warunku d/ może być poszerzone, jeśli homotopijność umiejscowień będzie wykorzystana przy ocenie dopuszczalności warunków brzegowych. Konkretnie, gdy dla badanego problemu brzegowego /lub początkowo-brzegowego/ zostaną postawione warunki brzegowe w przemieszczeniach, to ze znajomości umiejscowienia początkowego α /lub odniesienia/ można wyznaczyć obszar w \mathcal{E} zajmowany przez ciało w nowym szukanym umiejscowieniu δ odpowiadającym zadanym warunkom brzegowym.

Skoro homotopijność obszarów $\alpha(B) \subset \mathcal{E}$ oraz $\delta(B) \subset \mathcal{E}$ jest warunkiem koniecznym homotopijności umiejscowień α oraz δ , otrzymujemy w ten sposób warunek dopuszczalności /t.j. rozwiązywalności/ stawianego problemu brzegowego.

Przechodząc do dalszych partii tego rozdziału, natrafiamy na definicję przestrzeni konfiguracji \mathcal{X} wzorowaną na tej danej przez Nolla [1972]. Metryka $d_{\mathcal{X}}$ tej przestrzeni jest najbardziej naturalna, gdyż wykorzystuje ciągłość w sensie Lipschitza umiejscowień.

Zaproponowana w dalszej części definicja czasoprzestrzeni jest ogólniejsza od zwykle przyjmowanej w kursach mechaniki klasycznej. Formalnie odbiega też od definicji neo-klasycznej czasoprzestrzeni przyjętej przez Nolla [1959, 1973], ale formalna różnica zanika, jeśli prześledzi się wnioski z niej wynikające i porówna z własnościami czasoprzestrzeni stawianymi przez Nolla.

Układ odniesienia pojawia się w rozwijanej koncepcji czasoprzestrzeni naturalnie i odmiennie niż u Nolla [1973] czy Wang'a i Truesdella [1973].

Afiniczność czasoprzestrzeni, jak stwierdzamy w tekście, nie jest atrybutem czasoprzestrzeni nawet po przyjęciu zasady bezwładności choć, jak piszą w swych wykładach Ingarden i Jamiołkowski [1980, s. 42]: "Istnienie ruchów swobodnych jest tym czynnikiem fizycznym, który wskazuje, że nie tylko poszczególne klasy zdarzeń równoczesnych, lecz także cała czasoprzestrzeń ma strukturę przestrzeni afinicznej".

Z kolei Koczyński i Trautman [1981, s. 45], podając dwa odmiennie sformułowania I zasady dynamiki, piszą: "Okazuje się, że sformułowania te są sobie równoważne, jeśli czasoprzestrzeni

nadać taką strukturę geometryczną, żeby miało w niej sens pojęcie prostoliniowości i jednostajności. Strukturą taką jest struktura przestrzeni afinicznej.

Odmienność dalszego podejścia tutaj prezentowanego od metody stosowanej przez Nolla została wyjaśniona w p.7. Główna myśl tego punktu sprowadza się do stwierdzenia, że naszym celem jest wyprowadzenie układu równań ewolucyjnych dla kontinuum materialnego (ciała) reprezentującego uniwersalne prawa bilansu oraz własności termo-mechaniczne (konstrytywne) materiału, z którego ciało się składa. Wymagamy przy tym, co jest naturalne, aby wyprowadzony układ był jednolity ze względu na formę, jak i własności niezmienniczości. Właśnie równania zapisywane w postaci tzw. praw bilansu posiadają tę jednolitą formę.

Z kolei warunki niezmienniczości równania bilansu pędu przesądzają, że dopuszczona najszersza grupa transformacji układów odniesienia musi być grupą Galileusza. Ten fakt wraz z przyjętą zasadą bezwładności decydują, że w wyprowadzeniu równań bilansu przyjęto za obowiązującą zasadę względności Galileusza w odniesieniu zarówno do zjawisk mechanicznych, jak i termo-dynamicznych. Można warto nadmienić, że w podejściu Nolla [1973] nie ma miejsca na inercyjne układy odniesienia, jako że trudno znaleźć w jego wykładach zasady bezwładności.

Ustawienie definicji czasoprzestrzeni po definicji ciała odkształcalnego może razić jako nie-typowe. Ale celem naszym było skupienie uwagi czytelnika na dynamice ciał odkształcalnych, a nie na dynamice w ogóle. Ponadto definicja ciała nie wymaga poprzedzenia definicją czasoprzestrzeni, gdyż: a/ ciało jest obserwowane w przestrzeni fizycznej, tj. we włóknie wzorcowym \mathcal{E} , b/ własności ciała nie powinny zależeć od czasoprzestrzeni, w której się porusza (por. zasada względności Galileusza lub tzw. zasada obiektywności materialnej, odniesiona do poszczególnego punktu ciała).

Na koniec zatrzymajmy się na chwilę nad pojęciami wprowadzonymi w p. 4. Skoro celem naszym jest opis globalny własności materiału ciała, niezbędne było wprowadzenie pełnych pól procesów deformacji. W opisie lokalnym preferowanym w literaturze przedmiotu ograniczenie się do odwzorowań w punkcie, czy w

przestrzeni stycznej do rozmaitości w punkcie, jest całkowicie wystarczające.

Nie będziemy tutaj powtarzać motywacji, częściowo zawartej w p. 4, wyboru wewnętrznych miar deformacji (por. Noll [1972., 1973]), ograniczając się do przypomnienia, że wewnętrzne miary deformacji, takie jak proces p czy P są niezależne od układów odniesienia i automorfizmów przestrzeni fizycznej. Określenie operatorów konstytutywnych w funkcji tych zmiennych nie wymaga postulowania reguł niezmienniczości przy zmianie układu odniesienia.

II. Materiał ciała

Globalny opis materiału ciała odkształcalnego wymaga ścisłego określenia jego własności niezależnie od jego zanurzenia w przestrzeni fizycznej \mathcal{E} , w konkretnym umiejscowieniu z rodziny \mathcal{C} .

Wzorując się na metodach geometrii różniczkowej, w odniesieniu do własności morfizmów określonych na rozmaitościach, spróbujemy rozwiązać ten problem, wprowadzając pojęcie morfizmu materialnego. Aby je przybliżyć i pozwolić Czytelnikowi odnaleźć reguły interpretacyjne posłużymy się przykładem.

W nieliniowej mechanice continuum wśród różnych modeli materiałów występuje model materiału sprężystego. Ogólna definicja rozróżnia pojęcia ciała, materiału oraz równania konstytutywnego, który materiał ciała charakteryzuje. W myśl nomenklatury Nolla [1958, 1972] materiał jest klasą równoważności elementów materialnych (czytaj, struktur związków konstytutywnych przypisanych punktowi materialnemu - cząstce ciała i jej przestrzeni stycznej) względem relacji materialnego izomorfizmu. Ciało w tak formułowanej teorii pojawia się tylko na początku, gdy wprowadza się pojęcie umiejscowienia, gdyż dalsze rozważania, w szczególności charakterystyka konstytutywna, prowadzone są dla typowej cząstki ciała.

10. Ciało sprężyste

W opisie globalnym definicja materiału ciała sprężystego, z wyjątkiem formalnego aparatu globalnego nie będzie się różnić od definicji dotąd używanej i ogólnie znanej. Ta ostatnia sprowadza się do podania (por. Truesdell i Noll [1965]) funkcji konstytutywnej naprężenia w cząstce, która przyporządkowuje tensorom symetrycznym dodatnio określonym (tensorom nad $\mathcal{T}(\mathcal{E})$) tensory symetryczne. W opisie zalecanym przez Nolla [1973, 1978] już funkcja konstytutywna będzie określona na miarach wewnętrznych deformacji o wartościach w zbiorze tensorów naprężeń wewnętrznych, właściwych^{x/}.

^{x/}Ang. intrinsic stress. Wydaje się, że polskim odpowiednikiem mógłby być wewnętrzny tensor naprężenia lub naprężenie istotne.

Aby przybliżyć odnieśmy to do pojęć używanych w pierwszym rozdziale (por. p. 4 i 9.2). Jeśli $\chi: \Gamma_X \times B \rightarrow W$ jest procesem kinematycznym, zaś $\{\mathcal{E}, \beta\}$ jest układem odniesienia, wtedy dla cząstki $\mathcal{X} \in B$ określiliśmy ruch elementu ciała \mathcal{T}_X w $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ indukowany przez ruch $\mu := \{\mu_t := \beta_t^{-1} \circ \chi_t; t \in \Gamma_X\}$ jako $M_X: \Gamma_X \rightarrow \text{lin}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}(\mathcal{E}))$, poprzez

$$(10.1) \quad M_X(t) := \mu(t)_{*X} \in \text{lin}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}(\mathcal{E}))$$

dla każdego $t \in \Gamma_X$. Jeśli $\Gamma_X = [t_0, t_0 + \sigma] \subset \mathbb{R}$, to wtedy nie zmieniając oznaczenia będziemy pisać, że $M_X: [0, \sigma] \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{lin}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}(\mathcal{E}))$. Wewnętrzny proces deformacji gra podstawową

$$(10.2) \quad P_X := M_X^* M_X: [0, \sigma] \rightarrow \text{Sym}^+(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X^*)$$

rolę w teoriach niezmienniczych (por. Noll [1972, 1973], Perzyna i Kosiński [1973], Šilhavy i Kratochvíl [1977], Banfi i Fabrizio [1981]).

Jeśli $T_{\mu_t} \in \text{lin}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ jest tensorem naprężeń Cauchy'ego (por. (9.17)), to wewnętrzny tensor naprężenia S będzie określony przepisem

$$(10.3) \quad S_X(t) := M_X(t)^{-1} T_{\mu_{t_0+t}}(\mu_{t_0+t}^{-1}(\mathcal{X})) (M_X(t)^*)^{-1} \in \text{Sym}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X^*)$$

Tensor $S_X(t)$ opisuje siły kontaktowe działające na element ciała \mathcal{T}_X samoistnie, bez uwzględnienia jakiegokolwiek układu odniesienia, czy przestrzeni fizycznej.

W zmiennych P_X oraz S_X określenie elementu ciała \mathcal{T}_X jako sprężystego elementu materialnego, to podanie zależności funkcyjnej

$$(10.4) \quad S_X(t) = \mathcal{G}_X(P_X(t)),$$

gdzie

$$\mathcal{G}_X: \mathcal{G}_X \subset \text{Sym}^+(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X^*) \rightarrow \mathcal{S}_X \subset \text{Sym}(\mathcal{T}_X^*, \mathcal{T}_X)$$

jest nazywany operatorem reakcji, lub funkcją konstytutywną naprężenia w \mathcal{X} . Jest oczywiste, że różne cząstki, tj. różne elementy tego samego ciała, mogą być charakteryzowane przez różne operatory reakcji. Aby o ciele \mathcal{B} móc powiedzieć, że jest ciałem sprężystym wymaga się, by dla każdej cząstki $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ była podana zależność (10.4). Ten fakt można zapisać następująco: istnieje pole funkcji konstytutywnej naprężenia

$$\mathcal{E}: \bigcup_{\mathcal{X} \in \mathcal{B}} \mathcal{G}_{\mathcal{X}} \rightarrow \bigcup_{\mathcal{X} \in \mathcal{B}} \mathcal{J}_{\mathcal{X}},$$

które jest cięciem wiązki tensorowej, tzn. $\mathcal{E} := \{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}: \mathcal{G}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \in \mathcal{B}\}$.

Wśród ciał sprężystych można wyróżnić podklasę ciał sprężystych materialnie jednolitych. Ciało sprężyste, którego każde dwa elementy są materialnie izomorficznie należy do wspomnianej podklasy przy czym materialny izomorfizm elementów $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ oraz $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ oznacza, że istnieje $A_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \in \text{Inv-lin}(\mathcal{T}_{\mathcal{X}}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}})$ taki, że

$$(10.5) \quad \mathcal{E}_{\mathcal{X}}(A_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}^* G A_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}) = A_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}^{-1} \mathcal{E}_{\mathcal{Y}}(G) (A_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}^*)^{-1}$$

dla każdego $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$. Powyższe definicje oznaczają nic innego jak stwierdzenie, że wszystkie cząstki ciała \mathcal{B} (elementy ciała) składają się z tego samego materiału, mają te same własności mechaniczne. Innymi słowy wykonując ten sam wymagowany eksperyment mechaniczny równolegle na dwóch elementach ciała $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ oraz $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ nie zauważymy różnicy w reakcji, tj. wartościach naprężeń.

Aby być w zgodzie z ogólnie przyjętymi oznaczeniami i ze względu na późniejsze definicje, pojęcie ciała sprężystego lepiej wprowadzać następująco. Wpierw budujemy wiązkę morfizmów

$$\Pi_{\text{Mor}}: \text{Mor}(\text{Sym}^+(\mathcal{T}(\mathcal{B}), \mathcal{T}^*(\mathcal{B})), \text{Sym}(\mathcal{T}^*(\mathcal{B}), \mathcal{T}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B},$$

gdzie rzut wiązki Π_{Mor} w działaniu na parę $(a_{\mathcal{X}}, X)$ daje punkt X , przy $a_{\mathcal{X}}: \text{Sym}^+(\mathcal{T}_{\mathcal{X}}, \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^*) \rightarrow \text{Sym}(\mathcal{T}_{\mathcal{X}}^*, \mathcal{T}_{\mathcal{X}})$.

Jeśli istnieje $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$, cięcie wiązki Π_{Mor} , to ciało \mathcal{B} nazwiemy sprężystym. Przypomnijmy, że

$$(10.6) \quad \mathcal{E}_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \text{Mor}(\text{Sym}^+(\mathcal{T}(\mathcal{B}), \mathcal{T}^*(\mathcal{B})), \text{Sym}(\mathcal{T}^*(\mathcal{B}), \mathcal{T}(\mathcal{B})))$$

jest cięciem wiązki π_{Mor} , jeśli

$$(10.7) \quad \pi_{Mor} \circ \mathfrak{F}_s = id_B.$$

Warunek (10.7) oznacza, że odwzorowanie konstytutywne \mathfrak{F}_s jest zlepieniem odwzorowań z włókien.

Dla ciał sprężystych materialnie jednolitych warunek (10.5) może być bez trudności sformułowany dla cięcia \mathfrak{F}_s , jeśli zauważymy, że dla dowolnego $X \in B$ wartością odwzorowania \mathfrak{F}_s w tym punkcie jest funkcja konstytutywna występująca w poprzedniej definicji, tzn. $\mathfrak{F}_s(X) = \mathcal{V}_s X$.

Jeśli α jest umiejscowieniem ciała B , to realizacją odwzorowania konstytutywnego \mathfrak{F}_s w umiejscowieniu α jest morfizm

$$\mathfrak{f}_\alpha: \alpha(B) \rightarrow Mor(Sym^+(\mathcal{T}(E), \mathcal{T}^*(E)), Sym(\mathcal{T}^*(E), \mathcal{T}(E))),$$

gdzie ze względu na to, że E jest przestrzenią euklidesową przestrzeń styczna $\mathcal{T}(E)$ redukuje się do przestrzeni transylacyjnej. α Obraz wiązki morfizmów π_{Mor} pod działaniem umiejscowienia α jest dobrze określony, gdyż dla każdego

$X \in B$ element $\mathfrak{t}_X \in \mathcal{T}_X$, tj. wektor styczny, jest reprezentowany przez parę $(\alpha(X), v)$, gdzie $v \in \mathcal{T}(E)$; podobnie każdy element \mathfrak{t}_X^* , tj. wektor kostyczny, jest reprezentowany przez $(\alpha(X), w)$, gdzie $w \in \mathcal{T}^*(E) \simeq \mathcal{T}(E)$ (skoro $\mathcal{T}(E)$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym). Wtedy zbiór $Sym^+(\mathcal{T}(E), \mathcal{T}^*(E))$ jest utożsamiony ze zbiorem (stożkiem otwartym) symetrycznych i dodatnio określonych tensorów drugiego rzędu nad $\mathcal{T}(E)$. Zauważmy, że zbiór $Sym(\mathcal{T}^*(E), \mathcal{T}(E))$ jest przestrzenią liniową unormowaną, zaś $Sym^+(\mathcal{T}(E), \mathcal{T}^*(E))$ jest przestrzenią metryczną. Stąd zbiór $Mor_E := Mor(Sym^+(\mathcal{T}(E), \mathcal{T}^*(E)), Sym(\mathcal{T}^*(E), \mathcal{T}(E)))$ stanie się przestrzenią liniową unormowaną, jeśli ograniczymy się do morfizmów ciągłych w sensie Lipschitza i normą dowolnego morfizmu $\hat{a} \in Mor_E$ zdefiniujemy następująco:

$$(10.8) \quad \|\hat{a}\|_{Mor_E} := \|\hat{a}(1_{\mathcal{T}(E)})\|_{\mathcal{T}^2(E)} + \sup \left[\frac{\|\hat{a}(C_1) - \hat{a}(C_2)\|_{\mathcal{T}^2(E)}}{\|C_1 - C_2\|_{\mathcal{T}^2(E)}}; C_1, C_2 \in \mathcal{T}^2(E), C_1 \neq C_2 \right],$$

α /Innymi słowy w każdym punkcie rozmaitości $\alpha(B) \subset E$ przestrzeni styczna jest taka sama i oznaczamy ją przez $\mathcal{T}(E)$.

$$\text{gdzie } \mathcal{J}^2(\mathcal{E}) := \mathcal{J}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{J}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{J}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{J}^*(\mathcal{E}) = \mathcal{J}^*(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{J}(\mathcal{E}) \\ = \text{Lin}(\mathcal{J}(\mathcal{E}), \mathcal{J}(\mathcal{E})) \simeq \text{Lin}(\mathcal{J}^*(\mathcal{E}), \mathcal{J}^*(\mathcal{E})) \simeq \text{Lin}(\mathcal{J}^*(\mathcal{E}), \mathcal{J}(\mathcal{E})).$$

Przy takim wyborze normy w $\text{Mor}_{\mathcal{E}}$ ograniczać będziemy naszą uwagę do operatorów konstytutywnych \mathcal{F} dla ciała B , które w konkretnym umiejscowieniu α są realizowane przez morfizm \mathcal{F}_{α} ciągły w sensie Lipschitza jako odwzorowanie z $\alpha(\beta) \in \mathcal{E}$ do $\text{Mor}_{\mathcal{E}}$. Aby pokazać, że tak określony warunek regularności właściwie charakteryzuje \mathcal{F} a nie jego realizacje, rozpatrzmy inne umiejscowienie $\gamma \in \mathcal{C}$. Skoro dla dowolnego $X \in \mathcal{B}$ oraz $G \in \mathcal{G}_X$ między realizacją \mathcal{F}_{α} oraz operatorem \mathcal{F} zachodzi związek (por. (10.2) i (10.3) oraz (4.2)):

$$(10.9) \quad \mathcal{F}(X)(G) = (\alpha_{*X})^{-1} \mathcal{F}_{\alpha}(\alpha(X)) \left((\alpha_{*X}^*)^{-1} G (\alpha_{*X}) \right) (\alpha_{*X})^{\dagger},$$

to między realizacjami \mathcal{F}_{α} oraz \mathcal{F}_{γ} mamy zależność

$$(10.10) \quad \mathcal{F}_{\gamma}(\gamma(X))(C) = F_{\alpha\delta, X} \mathcal{F}_{\alpha}(F_{\alpha\delta, X}^{\top} C F_{\alpha\delta, X}) F_{\alpha\delta, X}^{\top}$$

dla dowolnego $C \in \text{Sym}^+(\mathcal{J}(\mathcal{E}), \mathcal{J}(\mathcal{E}))$, gdzie

$$F_{\alpha\delta, X} := \nabla(\gamma \circ \alpha^{-1}) \alpha(X) = \delta_{*X} (\alpha_{*X})^{-1}$$

jest wartością tensora przemieszczenia w punkcie $\alpha(X)$, inaczej gradientem przemieszczenia $\gamma \circ \alpha^{-1}$ w punkcie $\alpha(X)$. Tensor $F_{\alpha\delta, X}^{\top}$ jest jego transpozycją określoną przez

$$F_{\alpha\delta, X}^{\top} := \nabla(\gamma \circ \alpha^{-1})^{\top} \alpha(X) = (\alpha_{*X}^*)^{-1} \delta_{*X}.$$

Zauważmy na marginesie, że formalnie prawa strona jest elementem zbioru $\text{InvlIn}(\mathcal{J}_{\delta(X)}^*(\mathcal{E}), \mathcal{J}_{\alpha(X)}^*(\mathcal{E}))$, ale na skutek afiniczności przestrzeni \mathcal{E} mają miejsce równości $\mathcal{J}_{\delta(X)}^*(\mathcal{E}) = \mathcal{J}_{\alpha(X)}^*(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{J}^*(\mathcal{E}) = \mathcal{J}(\mathcal{E})$, gdzie ostatnia równość wynika z istnienia iloczynu skalarnego w $\mathcal{J}(\mathcal{E})$.

Przechodząc do dowodu poprawności warunku regularności wykazemy, że jeśli dla dowolnego umiejscowienia realizacja \mathcal{F}_{α} w dowolnym punkcie $\alpha(X)$ jest w klasie $\text{Mor}_{\mathcal{E}}$, to dla każdego umiejscowienia $\gamma \in \mathcal{C}$, realizacja $\mathcal{F}_{\gamma}(\gamma(X))$ jest w $\text{Mor}_{\mathcal{E}}$. Rzeczywiście, skoro $\text{Lin}(\mathcal{J}(\mathcal{E}), \mathcal{J}^*(\mathcal{E}))$ tworzy algebrę Banacha

(z jednością, jeśli normę $\|\cdot\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})}$ wybierzemy tak x' , by $\|1_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})} = 1$) dla dowolnego $C, C_1 \in \text{Sym}^+(\mathcal{J}(\mathcal{E}), \mathcal{J}^2(\mathcal{E}))$ mamy

$$\begin{aligned} & \|F_{\alpha, \delta, X} \mathcal{F}_\alpha(x(X)) (F_{\alpha, \delta, X}^T C F_{\alpha, \delta, X}) F_{\alpha, \delta, X}^T - F_{\alpha, \delta, X} \mathcal{F}_\alpha(x(X)) (F_{\alpha, \delta, X}^T C_1 F_{\alpha, \delta, X}) F_{\alpha, \delta, X}^T\| \\ & \leq \|F_{\alpha, \delta, X}\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})} \|F_{\alpha, \delta, X}^T\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})} \text{Lip}(\mathcal{F}_\alpha(x(X))) \|F_{\alpha, \delta, X}^T (C - C_1) F_{\alpha, \delta, X}\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})} \\ & \leq \text{Lip}^4(\delta \circ \alpha^{-1}) \text{Lip}(\mathcal{F}_\alpha(x(X))) \|C - C_1\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})}, \end{aligned}$$

gdzie $\text{Lip}(\mathcal{F}_\alpha(x(X)))$ oznacza stałą Lipschitza morfizmu $\mathcal{F}_\alpha(x(X))$ w $\text{Mor } \mathcal{E}$. Stąd bezpośrednio otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\delta(\delta(X))\|_{\text{Mor } \mathcal{E}} & \leq \|F \mathcal{F}_\alpha(F^T F) F^T\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})} + \text{Lip}^4(\delta \circ \alpha^{-1}) \text{Lip}(\mathcal{F}_\alpha(x(X))) \\ & \leq \text{Lip}^2(\delta \circ \alpha^{-1}) \left\{ \|\mathcal{F}_\alpha(x(X)) (F^T F)\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})} + \text{Lip}^2(\delta \circ \alpha^{-1}) \text{Lip}(\mathcal{F}_\alpha(x(X))) \right\} \\ & \leq \text{Lip}^2(\delta \circ \alpha^{-1}) \left\{ \left(\|\text{Lip}(\mathcal{F}_\alpha(x(X)))\|_{F^T F - 1_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}}\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})} + \|\mathcal{F}_\alpha(x(X))\|_{1_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \text{Lip}^2(\delta \circ \alpha^{-1}) \text{Lip}(\mathcal{F}_\alpha(x(X))) \right\} \leq \\ & \leq \text{Lip}^2(\delta \circ \alpha^{-1}) \left\{ \|\mathcal{F}_\alpha(x(X))\|_{\text{Mor } \mathcal{E}} \cdot \max(1, \|F^T F - 1_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})}\|) + \text{Lip}^2(\delta \circ \alpha^{-1}) \text{Lip}(\mathcal{F}_\alpha(x(X))) \right\} \\ & \leq \max\{1, \|F^T F - 1_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}\|, \text{Lip}^2(\delta \circ \alpha^{-1})\} \text{Lip}^2(\delta \circ \alpha^{-1}) \|\mathcal{F}_\alpha(x(X))\|_{\text{Mor } \mathcal{E}}, \end{aligned}$$

gdzie przy F jawnie nie wpisaliśmy zależności od α, δ i X .

Skoro współczynnik szacujący normę $\mathcal{F}_\delta(\delta(X))$ przez normę $\mathcal{F}_\alpha(x(X))$ można dobrać stałą, wstawiając w miejsce $\|F_{\alpha, \delta, X} F_{\alpha, \delta, X}^{-1}\|_{\mathcal{J}(\mathcal{B})}$ sumę $\text{Lip}^2(\delta \circ \alpha^{-1}) + 1$, łatwo stąd widać, że jeśli $\mathcal{F}_\alpha: \mathcal{X}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Mor } \mathcal{E}$ jest ciągle w sensie Lipschitza, to i jednocześnie $\mathcal{F}_\delta: \mathcal{B} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{E}$. To kończy dowód poprawności.

11. Morfizm materialny

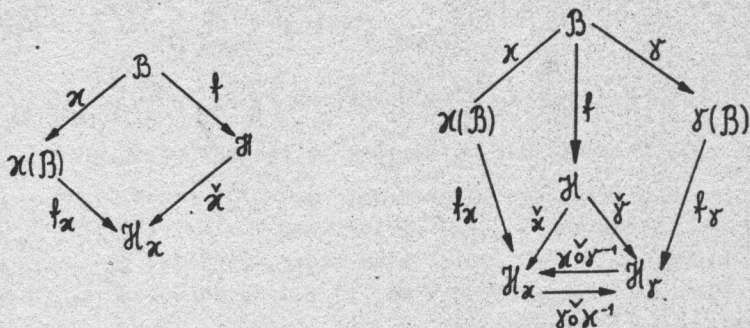
Dość obszerna analiza określenia ciała sprężystego miała na celu przybliżenie pojęcia morfizmu materialnego, który zamierza-

x/ Jest to zawsze możliwe wstawiając $\|A\|_{\mathcal{J}^2(\mathcal{E})} := \frac{1}{3} \{\text{tr}(AA^T)\}^{1/3}$ gdy $\dim \mathcal{E} = 3$.

my wprowadzić. Jako pojęcie ogólniejsze od operatora konstytutywnego \mathcal{F} ciała sprężystego będzie ono wymagało pewnych dodatkowych reguł interpretacyjnych. W szczególności morfizm ten dla ciała może działać w przestrzeni odmiennej od tej dotąd rozpatrywanej. Odtąd przekształcenia ciągłe w sensie Lipschitza nazywamy przekształceniami klasy L.

DEFINICJA 6. Niech \mathcal{H} będzie zbiorem z pewną strukturą. Przekształcenie $f: B \rightarrow \mathcal{H}$ nazwiemy morfizmem materialnym ciała odkształcalnego B w zbiór \mathcal{H} , jeśli są spełnione następujące warunki:

- 1° z każdym umiejscowieniem $x \in \mathcal{C}$ jest związana przestrzeń metryczna \mathcal{H}_x zwana x -obrazem zbioru \mathcal{H} ,
- 2° dla każdego umiejscowienia $x \in \mathcal{C}$ istnieje przekształcenie $f_x: x(B) \rightarrow \mathcal{H}_x$ klasy L, zwane realizacją przekształcenia f w umiejscowieniu x , które wraz z przyporządkowaniem $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_x$ występującym w warunku 1° sprawia, że następujące diagramy są przemienne:



Rys. 3) Definicja morfizmu materialnego

dla każdego innego umiejscowienia $\gamma \in \mathcal{C}$ z klasy $d_2 \in \mathcal{K}$. Dla przyporządkowania z warunku 1° będziemy używać oznaczenia \tilde{x} , tzn. $\tilde{x}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_x$.

3° realizacje są niezależne od układu odniesienia z klasy IF. Zauważmy, że diagram prawy zabezpiecza przejście między różnymi realizacjami morfizmu materialnego tej samej konfiguracji. Przedstawiona definicja ma swoje zastosowanie w teoriach

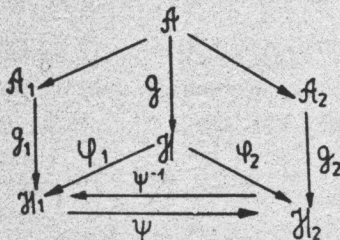
globalnych jak i lokalnych. Przykład z teorii lokalnych dostarcza nam właśnie rozpatrzony operator konstytutywny ciała sprężystego. Można spróbować sklasyfikować lokalne teorie jako te, w których morfizmy materialne są przekształceniami w wiązki morfizmów zbudowane nad ciałem.

Potrzeba wprowadzenia określenia morfizmu materialnego jest związana z warunkami niezmienniczości własności konstytutywnych od realizacji morfizmu.

W mechanice kontinuum często posługujemy się samymi realizacjami f_x , bądź też tylko wartościami $f_x(x(\hat{X}))$ dla typowej cząstki $X \in \mathcal{B}$, jeśli ciało jest materialnie jednolite i jednorodne. Wtedy powstaje pytanie: kiedy różne funkcje $g_1: A_1 \rightarrow \mathcal{H}_1, g_2: A_2 \rightarrow \mathcal{H}_2, A_1, A_2 \subset \mathcal{E}$ można traktować jako różne realizacje tego samego morfizmu materialnego dla pewnego ciała odkształcalnego B . Odpowiedź na to pytanie jest szczególnie ważna, gdy opis własności ciała jest globalny. Poniższe spostrzeżenie podaje odpowiedź-choć częściową-na to pytanie.

SPOSTRZEŻENIE 9. Dwa przekształcenia $g_1: A_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ oraz $g_2: A_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ klasy L, o niepustych dziedzinach A_1, A_2 , otwartych podzbiorów \mathcal{E} oraz kodziedzinach \mathcal{H}_1 oraz \mathcal{H}_2 , będących przestrzeniami metrycznymi, są reprezentacjami morfizmu materialnego pewnego ciała odkształcalnego, jeśli

- a/ zbiory A_1 i A_2 są homotopijne w klasie BLP,
- b/ istnieje zbiór \mathcal{A} oraz dwa morfizmy $\varphi_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}_1$ oraz $\varphi_2: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}_2$, a także morfizm bilipschitzowski $\psi: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$,
- c/ istnieje zbiór \mathcal{R} bijektywny z jednym ze zbiorów A_1, A_2 oraz przekształcenie $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$, które sprawiają, że następujące diagramy są przemienne:



Rys.4 Warunki dla reprezentacji morfizmu

Dowód. Warunek a/ jest żądaniem koniecznym do tego aby zbiory A_1 i A_2 były obrazami dwóch umiejscowień tego samego ciała, które utożsamiamy ze zbiorem A występującym w warunku c/. Jeśli przez α_1 , oznaczymy bijekcję między zbiorem A i powiedzmy zbiorem A_1 (warunek c/ mówi, że A jest bijektywny z jednym z dwóch zbiorów), to α_1 jest umiejscowieniem ciała A . Jeśli

$h: [0,1] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ jest homotopią od A_1 do A_2 z klasy BLP, to dla każdego $\tau \in [0,1]$ odwzorowanie $h(\tau, \alpha_1(\cdot))$ staje się elementem budowanej klasy umiejscowień \mathcal{C}_A ciała A . Dołączając do \mathcal{C}_A wszystkie odwzorowania powstałe z superpozycji α_1 oraz $h(\tau, \alpha_1(\cdot))$ z dowolnymi izometriami o dodatnim jakobianie tworzymy następane elementy klasy \mathcal{C}_A . Warunek b/ w świetle Definicji 6 oznacza, że odwzorowanie ψ_1 należy utożsamić z α_1 natomiast ψ_2 pełni rolę $h(1, \alpha_1(\cdot))$. Przekształcenie g o własności żądanej warunkiem c/, to nic innego jak morfizm materialny, którego realizacjami w umiejscowieniu α_1 jest g_1 , zaś w umiejscowieniu $h(1, \alpha_1(\cdot)) - g_2$. \square

W przypadku ciała sprężystego materialnie jednolitego i jednorodnego przedstawiony rezultat częściowy już był stosowany w nieliniowej mechanice kontinuum. Oczywiście, że dotyczyło to teorii lokalnej, a więc funkcji konstytutywnej naprężenia w typowej cząstce \mathcal{X} . Odnosząc do oznaczeń stosowanych dotyczyło to morfizmu $\mathcal{F}_\alpha(\alpha(\mathcal{X})) =: \mathcal{G}_\alpha$, przy czym α nie występuje tam jako umiejscowienie, lecz jako obszar, tj. obraz umiejscowienia w \mathcal{E} . Jeśli δ jest innym umiejscowieniem, to z lokalności przedstawienia wynika, że

$$(11.1) \quad \mathcal{G}_\delta(C) = F \mathcal{G}_\alpha(F^T C F) F^T$$

dla każdego $C \in \text{Sym}^+(\mathcal{T}(\mathcal{E}), \mathcal{T}(\mathcal{E}))$, gdzie $F = \nabla(\delta \circ \alpha^{-1})\alpha(\mathcal{X})$. Jeśli zastosujemy ten warunek do funkcji konstytutywnej tensora naprężenia Cauchy'ego, otrzymamy

$$(11.2) \quad \tilde{\mathcal{G}}_\delta(M) = \tilde{\mathcal{G}}_\alpha(MF) \quad \text{przy} \quad \tilde{\mathcal{G}}_\delta(M) := \mathcal{G}(MM^T),$$

dla każdego $M \in \text{Invl}^+(\mathcal{T}(\mathcal{E}), \mathcal{T}(\mathcal{E}))$. Skoro opis jest lokalny, to funkcja konstytutywna \mathcal{G} zależy od umiejscowienia α .

poprzez klasę ∇x umiejscowień równoważnych umiejscowieniu x w punkcie X w sensie relacji \sim_X (por. p.4). Jest to oczywiste, z drugiej strony, z powyższych warunków współzmienniczości, jeśli pod F wstawimy ${}^1T(\varepsilon)$. Tak więc w miejsce \mathcal{E}_x poprawniej jest wstawić $\mathcal{E}_{\nabla x}$. Niestety w przypadku teorii nielokalnej tego typu uproszczenia mogą być niedopuszczalne,

Zamykając ten punkt warto dodać krótki komentarz odnośnie wyższości opisu niezmienniczego, wewnętrznego od opisu względnego, w pewnej wybranej "konfiguracji" (czytaj - umiejscowieniu) odniesienia.

W teorii materiałów prostych (por. Truesdell i Noll [1965, s. 56-61]) warunek współzmienniczości podobny do (11.2) wynika jako wniosek z zasady lokalnego działania. W sformułowaniu wykorzystującym wewnętrzne miary odkształceń i naprężeń, warunki współzmienniczości są konsekwencją przejścia od opisu na ciele, lub jego elemencie \mathcal{T}_X , do opisu względnego - w przestrzeni fizycznej.

Z drugiej strony są niestety pewne minusy, gdyż ogólność pojęcia morfizmu materialnego sprawia, że spostrzeżenie 9 nie rozstrzyga kwestii jednoznaczności: te same dwa przekształcenia g_1 oraz g_2 mogą prowadzić do różnych ciał materialnych, oraz ich morfizmów materialnych. W szczególności przystające obszary A_1 i A_2 , tzn. nakładalne na siebie przy pomocy właściwej izometrii, niekoniecznie muszą być obrazami hipotetycznego ciała w dwóch umiejscowieniach z jednej konfiguracji. Wtedy niejednoznaczność jest prawie nieunikniona, jeśli dodatkowo $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$. Jedynym punktem ratującym sytuację jest sprawdzenie czy $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \lambda$, gdzie $x/\lambda: A_1 \rightarrow A_2$, (por. prawy diagram w Definicji 6).

12. Modelowanie konstytutywne

Modelowanie konstytutywne dowolnego ciała odkształcalnego zaczyna się od zebrania dostępnego "katalogu" eksperymentów, by na jego podstawie określić charakterystyczne własności,

x/ W symbolach użytych w dowodzie $\lambda \equiv h(1, \cdot)$.

charakterystyczne punkty czy charakterystyczne zjawiska, którym ciało podlega. Ten zabieg "określania" - w języku teorii systemów - może być nazwany doborem przestrzeni stanów. Jeśli posiadamy katalog eksperymentów, to wyznaczanie przestrzeni stanów jest pierwszym krokiem modelowania konstytutywnego.

Tworzenie katalogu eksperymentów to metodyczne wypisywanie zaobserwowanych przebiegów czasowych pewnych układów wielkości fizycznych. Przebiegi czasowe to nic innego jak procesy, tj. odwzorowania przedziału czasu w przestrzeń (iloczyn kartezjański, zazwyczaj) wielkości fizycznych. Jeśli mamy dokonać modelowania konstytutywnego, to musimy się wyzwoić od automorfizmów czasoprzestrzeni. Stąd każdy przebieg czasowy przyporządkowany przedziałowi czasu $[t_0, t_0 + \tau] \subset \Gamma$ przy chwili t_0 , jako początku obserwacji, należy sprowadzić do odcinka $[0, \tau]$. W ten sposób wyzwalamy się od afiniczności zbioru chwil; automorfizmy przestrzenne będą wyrugowane, jeśli wyniki obserwacji mechanicznych przedstawimy w miarach wewnętrznych, naprężeniach istotnych. Aby wielkości termodynamiczne, typu strumień ciepła $q_{\mu\tau}$ czy strumień entropii $k_{\mu\tau}$, przedstawić w miarach niezmienniczych, wewnętrznych, wystarczy użyć dla każdej cząstki X ruchu $M_X: [0, \tau] \rightarrow \text{dim}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}(E))$ jej elementu materialnego odpowiadającego ruchowi $\mu: [t_0, t_0 + \tau] \times B \rightarrow \mathcal{E}$ ciała B . Wtedy wewnętrzne miary $q: [0, \tau] \rightarrow \mathcal{T}(B)$ oraz $k: [0, \tau] \rightarrow \mathcal{T}(B)$ wraz z istotnym gradientem temperatury $g: [0, \tau] \rightarrow \mathcal{T}^*(B)$ będą określone przepisami

$$q(t)_X := M_X(t)^{-1} q_{\mu_{T_0+t}}(\mu_{T_0+t}(X)), \quad k(t)_X := M_X(t)^{-1} k_{\mu_{T_0+t}}(\mu_{T_0+t}(X))$$

$$g(t)_X := \nabla \vartheta(X, T_0+t) = (\nabla_{\mu_{T_0+t}} \vartheta_{\mu_{T_0+t}}(\mu_{T_0+t}(X))) M_X(t).$$

Wróćmy do przerwanej myśli i zastanówmy się, jak wygląda katalog eksperymentów z punktu widzenia teorii systemów.

Jeśli podjęliśmy decyzję co do natury zjawisk i rodzaju wielkości fizycznych podlegających naszej obserwacji, naszemu zainteresowaniu, to możemy utworzyć - przynajmniej teoretycznie - zbiór wszystkich przebiegów czasowych (procesów) tych wielkości. Zbiór ten będzie zawierał wszystkie procesy dopuszczalne z teoretycznego punktu widzenia.

Procesy obserwowane, tj. procesy skatalogowane, tworzą na ogół pewien podzbiór właściwy. Skoro typowa obserwacja fizyczna polega na pomiarze reakcji obiektu badanego na pewne wymuszenia, najmniejszym i typowym elementem katalogu jest para. Pierwszy element pary reprezentuje przebieg czasowy wymuszenia (bodziec), zaś drugi - przebieg czasowy reakcji na ten bodziec. Oczywiście, że każdy z elementów pary ze swojej strony może być kompozycją przebiegów czasowych różnych wielkości mechanicznych i termodynamicznych, jeśli tylko termomechaniczne zjawiska nas interesują.

W takim obrazie katalog eksperymentów składa się z uporządkowanych par procesów, które zostały zaobserwowane. To ostatnie określenie w języku tutaj stosowanym oznacza, że są to pery będące w relacji. Tak więc katalog eksperymentów to relacja w zbiorze wszystkich możliwych procesów, ściślej uporządkowanych par procesu. Stąd w miejsce terminu katalog będziemy używać określenia obserwowana relacja dla ciała B w interesującym nas zakresie zjawisk termo-mechanicznych.

Aby przejść do opisu formalnego, wygodnie jest w tym miejscu przeprowadzić dokładniejszy opis procesów - wymuszeń.

13. Rozmaitość procesów

Jak wspomnieliśmy, zapis obserwowanej relacji wymaga wstępnego ustalenia, które z wielkości fizycznych występujących w eksperymencie uznamy za wymuszenia, a które za relacje na te wymuszenia. Brak jednoznaczności w wyborze nie powinien nas martwić. Kryterium doboru pozostaje wygoda.

W przypadku zjawisk termo-mechanicznych wielkościami termodynamicznymi występującymi jako wymuszenia mogą być: rozkład temperatury \mathcal{V} , rozkład prędkości określony w Spostrzeżeniu 4, czy deformacja określona przez (3.3) lub jedna z dwóch ostatnich wielkości.

Niech \mathcal{P} oznacza zbiór wartości procesów wymuszeń. Wtedy zgodnie z przyjętymi założeniami procesem wymuszenia, albo krócej \mathcal{P} - procesem o trwaniu d , nazwiemy ciągłe w sensie Lipschitza odwzorowanie odcinka $[0, d]$ w \mathcal{P} , $d > 0$. Procesy o

jednakowym trwaniu tworzą zbiór \mathcal{M}_d , a wszystkie procesy
zbiór $\mathcal{M} := \bigcup \{ \mathcal{M}_d : d > 0 \}$. Wydzielmy jego dwa właściwe podzbiory

$$(13.1) \quad \mathcal{M}^+ := \bigcup \{ \mathcal{M}_d : d > 0 \} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{M}_0 := \{ P \in \mathcal{M} : \text{Dom } P = \{0\} \}.$$

Elementy zbioru \mathcal{M} nazwiemy procesami w trwaniu zero (por. Noll [1972]), będą one grały ważną rolę przy wyprowadzeniu równania ewolucji.

Dla wygody i jawnego wypisania czasu trwania procesu elementy zbioru \mathcal{M} będziemy utożsamiać z parami (P, d) , jeśli $\text{Dom } P = [0, d]$. Tutaj P nie jest tą samą wielkością użytą w rozdziale pierwszym.

Jeśli $P_1 \in \mathcal{M}_{d_1}$ oraz $P_2 \in \mathcal{M}_{d_2}$ są takie, że $P_1(d_1) = P_2(0)$, to możemy określić kompozycję tych procesów, tj. nowy proces $(P_1 * P_2, d_1 + d_2)$ naturalnie zdefiniowaną przez

$$(13.2) \quad (P_1 * P_2)(s) := \begin{cases} P_1(s), & s \in [0, d_1] \\ P_2(s - d_1), & s \in [d_1, d_1 + d_2] \end{cases}.$$

Potrzeba różniczkowania morfizmów materialnych określonych na \mathcal{M} zmusza nas do wyposażenia zbioru \mathcal{M} w strukturę rozmaitości różniczkowej.

W tym celu należy założyć, że zbiór \mathcal{P} może być umieszczony w pewnej przestrzeni Banacha \mathcal{E} , jako jej podzbiór otwarty. W zasadzie przy znanych wielkościach wchodzących w skład wymuszeń jest to zawsze możliwe. Pewną trudność wprowadzają więzy, np. geometryczne lub metryczne, wtedy poniżej przedstawiona procedura nie może być bezpośrednio zastosowana lecz i wtedy jest możliwe zbudowanie rozmaitości \mathcal{P} -procesów, jeśli tylko zbiór \mathcal{P} można wyposażyć w strukturę rozmaitości różniczkowej nad \mathcal{E} .

Rozmaitość będzie budowana nad przestrzenią Banacha $\mathcal{B}([0, 1], \mathcal{E})$ funkcji ciągłych w sensie Lipschitza z odcinka $I := [0, 1]$ w przestrzeń Banacha \mathcal{E} . Jest oczywiste, że każdy inny wybór odcinka wzorcowego jest równie dopuszczony.

Procedura tworzenia map i atlasu rozmaitości \mathcal{M} została przedstawiona w poprzednich pracach autora [1981, 1983]_A, stąd

naszskicujemy tylko samą metodę.

Rozpatrzmy zbiór W odwzorowań odpowiednio gładkich z $[0,1] \times \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}^+$ takich, że jeśli $\varphi \in W$ oraz $d \in \mathbb{R}^{++} :=]0, \infty[$, to odwzorowanie

$$\varphi_d(\cdot) := \varphi(\cdot, d) : (I, (0,1)) \longrightarrow ([0,d], (0,d))$$

między parami $x/$ jest co najmniej ciągle i posiada co najmniej ciągłą odwrotność φ_d^{-1} .

Dalej będziemy używać oznaczenia I na przedział $[0,1]$. Jeśli Ψ, φ należą do W , to przez kompozycję $\varphi^{-1} \circ \Psi =$

$=: g_{\varphi\Psi}$ rozumiemy odwzorowanie określone przez

$$g_{\varphi\Psi}(s,t) = \varphi^{-1}(\Psi(s,t)), \quad (s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^{++}.$$

Jest jasne, że pewne warunki regularności (gładkości) są wymagane dla kompozycji tak określonych, by elementy rodziny W mogły służyć do utworzenia map dla \mathcal{M} . Jeśli $\varphi \in W$, to mapę $(U_\varphi, \hat{\varphi})$, gdzie $U_\varphi \subset \mathcal{M}^+$ określamy przez warunki

$$\hat{\varphi} : U_\varphi \rightarrow \mathcal{B}(I, \mathcal{E}) \times \mathbb{R} \text{ oraz } \hat{\varphi}(P, \tau) := (P \circ \varphi_\tau, \tau),$$

dla każdego $(P, \tau) \in \mathcal{M}_\tau \cap U_\varphi$. Zauważmy, że $P \circ \varphi_\tau \in \mathcal{B}(I, \mathcal{E})$ jest określone na odcinku $[0,1]$ o wartościach w \mathcal{P} . Mówimy, że proces P pod działaniem mapy $(U_\varphi, \hat{\varphi})$ został przeskalowany.

Przyjmując, że rodzina $\{U_\varphi : \varphi \in W\}$ pokrywa zbiór \mathcal{M}^+ i każde $\hat{\varphi}(U_\varphi)$ oraz $\hat{\varphi}(U_\varphi \cap U_\psi)$ są otwarte w $\mathcal{B}(I, \mathcal{E}) \times \mathbb{R}$ rodzina $\{U_\varphi, \hat{\varphi} : \varphi \in W\}$ tworzy atlas, co najmniej klasy C^∞ na \mathcal{M}^+ . Przy odpowiednich warunkach regularności atlas ten może się stać klasy L (tj. Lipschitzowski), co najwyżej $x/$.

Potrzebne jest w tym miejscu kilka uwag. Po pierwsze topologia przestrzeni $\mathcal{B}(I, \mathcal{E})$ narzuca pewne ograniczenia na φ , tj. rodzinę W , gdyż dla dowolnego $\mathcal{M}^+ \ni P : [0,d] \rightarrow \mathcal{P}$ złożenie $P \circ \varphi_d$ powinno być elementem $\mathcal{B}(I, \mathcal{E})$ dla każdego $\varphi \in W$. Po drugie przyjmując dwa poniższe naturalne żądania i/ oraz ii/ otrzymujemy

$x/$ Zgodnie z definicją (por. Spanier [1966]) dla odwzorowania między parami, mamy $\varphi_d([0,1]) = [0,d]$, $\varphi_d(0) = 0$, $\varphi_d(1) = d$. Zauważmy, że $(0,1)$ oznacza uporządkowaną parę, zaś $]0,1[$ otwarty przedział.

$x/$ Pokażemy to poniżej.

dalsze ograniczenia na rodzinę W , przy wybranej topologii przestrzeni modelowej $\mathcal{B}(I, \mathcal{C})$.

Wspomniane dwa żądania są następujące:

i/ wraz z każdym procesem $(P, d) \in \mathcal{M}$ do zbioru M należy każde obcięcie

$$(13.3) \quad S^{\tau d}(P, d) := (P|_{[0, \tau]}, \tau) \quad \text{dla } 0 \leq \tau \leq d,$$

oraz segment

$$(13.4) \quad S_{\ell p}(P, d) := (P|_{[\ell, p]}, p - \ell) \quad \text{przy } P|_{[\ell, p]}(s) := P(\ell + s),$$

gdzie $s \in [0, p - \ell]$ i $0 \leq \ell \leq p \leq d$,

ii/ zbiór M jest zamknięty ze względu na działanie złożenia (13.2).

Możliwa gładkość atlasu $\{(U_\varphi, \hat{\varphi}) : \varphi \in W\}$ jest scharakteryzowana następującym wyliczeniem pochodnej Frecheta $\delta(\hat{\varphi} \circ \hat{\varphi}^{-1})$ w pewnym punkcie $m \in \hat{\varphi}(U_\varphi \cap U_\psi)$ dla dowolnych dwóch map $(U_\varphi, \hat{\varphi})$ oraz $(U_\psi, \hat{\psi})$ w kierunku $n := [R, q] \in \mathcal{B}(I, \mathcal{C}) \times \mathbb{R}$:

$$\delta(\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}^{-1})(m)[n] = \left[(R + q \frac{\partial g_{\psi\varphi}(\cdot, t)}{\partial t} \Big|_{t=q} \dot{P}) \circ g_{\psi\varphi}(\cdot, \tau), q \right],$$

gdzie przyjęliśmy $m := [P, \tau]$.

Zauważmy, że procesy P oraz R są o trwaniu 1, dlatego dla odróżnienia elementy przestrzeni modelowej $\mathcal{B}(I, \mathcal{C}) \times \mathbb{R}$ oznaczamy w nawiasie kwadratowym. Widzimy, że przyjęte założenie ciągłości w sensie Lipschitza procesów ze zbioru M^+ przesądza o stopniu gładkości odwzorowań $\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}^{-1}$.

Aby pokryć cały zbiór $M = M^+ \cup M_0$ mapami, musimy rozszerzyć dziedziny funkcji z rodziny W do zbioru $[0, 1] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+$. To spowoduje rozszerzenie dziedzin odwzorowań $g_{\psi\varphi}$, gdzie z definicji przyjmujemy

$$g_{\psi\varphi}(s, 0) = s \quad \text{dla } s \in [0, 1], \psi, \varphi \in W.$$

Rozszerzone dzięki temu operatory przeskalowujące $\hat{\varphi}$ w działaniu na proces o trwaniu zero $(P, 0) \in M_0$, gdzie $P: \{0\} \rightarrow \mathcal{P}$,

daje element $[P1_I, 0] \in \mathcal{B}(I, \mathcal{E}) \times \mathbb{R}$, gdzie $P1_I$ jest procesem stałym ^{x/} o trwaniu jeden.

Operator odwrotny $\hat{\varphi}^{-1}$ wtedy będzie określony jako jednopunktowe odwzorowanie ^{xx/} δ_0 , które funkcji stałej przy-
porządkowuje jej wartość, tzn.

$$\hat{\varphi}^{-1}[P_0 1_I, 0] = (\delta_0(P_0 1_I), 0) = (P_{(0)}, 0) \in \mathcal{M}_0,$$

gdzie $P_0 \in \mathcal{P}$ zaś $P_{(0)}: \{0\} \rightarrow \{P_0\} \subset \mathcal{P}$.

Jeśli określimy ciągły i liniowy funkcjonal

$$\alpha: \mathcal{B}(I, \mathcal{E}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{przez } \alpha[R, d] := d$$

dla dowolnego $[R, d]$, to pod działaniem rozszerzonych operatorów przeskalowujących, zbiór \mathcal{M}_0 zostanie odwzorowany w jądro funkcjonelu α . Przyjmując dla ułatwienia wyводу ^{xxx/} że zbiór $\mathcal{B}(I, \mathcal{P}) := \{P \in \mathcal{B}(I, \mathcal{E}) : P \subset \mathcal{P}\}$ jest otwarty w $\mathcal{B}(I, \mathcal{E})$, a następnie tworząc pary $(\bar{u}_\varphi, \hat{\varphi})$, tak, że $\bar{u}_\varphi = \hat{\varphi}^{-1}(W_\varphi)$, gdzie W_φ jest otwarte w $\mathcal{B}(I, \mathcal{P}) \times \mathbb{R}^+$, otrzymamy atlas na rozmaitości z brzegiem $\bar{\mathcal{M}}$. Poprzednio skonstruowana rozmaitość \mathcal{M}^+ będzie otwarta w $\bar{\mathcal{M}}$, natomiast zbiór \mathcal{M}_0 będzie właściwym podzbiorem brzegu

$$(13.5) \quad \partial \bar{\mathcal{M}} := \{(P, 0) : P \in \mathcal{M}_0 \text{ albo } P: I \rightarrow \mathcal{P} \text{ i } P = \text{const}\}.$$

Zauważmy, że konstruując rozmaitość dla zbioru wszystkich procesów \mathcal{M} musieliśmy dołączyć pewne obiekty, postaci $(P, 0)$, które nie mogą być traktowane jako procesy w pierwotnym sensie, gdyż tutaj trwanie procesu P jest różne od zera.

Ten fakt wyjaśnia dlaczego użyliśmy oznaczenia pary dla elementów zbioru \mathcal{M} .

Aby zobrazować sytuację, z którą się tutaj zetkneliśmy, przedstawmy skończenie wymiarowy odpowiednik rozmaitości $\bar{\mathcal{M}}$.

^{x/} Przypominamy, że $\mathbf{1}_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A .

^{xx/} Ang. point map albo one-element evaluation map (por. Semadeni [1971] i Spanier [1966]).

^{xxx/} To wprowadza pewne ograniczenia, w szczególności zbiór \mathcal{P} nie może być nigdzie gęsty w przestrzeni \mathcal{E} , gdyż zbieżność w normie $\mathcal{B}(I, \mathcal{E})$ implikuje zbieżność punktową.

Przy założeniu, że zbiór \mathcal{P} jest jednowymiarowy, można to uzyskać, dokonując rzutowania $pr_3: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, określonego następująco:

$$pr_3(\mathcal{P}) := (\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(d), d) \quad \text{dla } \mathcal{P} \in \mathcal{M}_d.$$

Pod tak określonym rzutowaniem zbiór \mathcal{M}_0 przejdzie w przekątną płaszczyzny $x^3 = 0$, zaś każdy ze zbiorów procesów o jednakowym trwaniu \mathcal{M}_d w płaszczyznę $x^3 = d$. Jest widoczne, że zbiór $pr_3(\mathcal{M})$ nie jest rozmaiłością, natomiast zbiór $pr_3(\mathcal{M}^+)$ jest. Aby zbudować rozmaiłość zawierającą $pr_3(\mathcal{M}^+)$ oraz $pr_3(\mathcal{M}_0)$ musimy dodać brzeg do rozmaiłości $pr_3(\mathcal{M}^+)$, a będzie nim cała płaszczyzna $x^3 = 0$. Otrzymana rozmaiłość z brzegiem będzie obrazem skonstruowanej rozmaiłości $\bar{\mathcal{M}}$ pod działaniem pr_3 , przy czym punkty spoza przekątnej płaszczyzny $x^3 = 0$ nie są obrazami żadnych procesów z \mathcal{M} pod działaniem pr_3 ; podobnie jest w naszej konstrukcji z elementami zbioru $\bar{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}_0$.

Przed zamknięciem tego punktu i przejściu do określania stanu dla materiału ciała, wydzielmy ze zbioru wszystkich krzywych na rozmaiłość $\bar{\mathcal{M}}$, te które są ciągłymi kompozycjami procesów.

Określmy system odwrotny $\{\mathcal{M}_d, S^{dr}, d, r \in \mathcal{J}\}$, gdzie \mathcal{J} jest otwartym przedziałem w \mathbb{R}^+ uporządkowanym relacją „ \leq ”, natomiast S^{dr} to odwzorowania skaczące (por. Engelking [1975]) zwane tutaj operatorami obciążenia

$$(13.6) \quad S^{dr}: \mathcal{M}_r \rightarrow \mathcal{M}_d,$$

a określonymi zależnościami (13.3). Zauważmy, że $S^{rr} = id_{\mathcal{M}_r}$ oraz $S^{dk} S^{kr} = S^{dr}$ dla $d \leq k \leq r$. Granica systemu odwrotnego, tj. przestrzeń $\mathcal{M}(\mathcal{J}) := \varprojlim (\mathcal{M}_d, \mathcal{J})$, jest podprzestrzenią iloczynu przestrzeni $\prod_{d \in \mathcal{J}} \mathcal{M}_d$, składającą się ze wszystkich punktów $\{m^d\}$, zwanych niciami, takimi, że jeśli $p \leq d$, to $m^p = S^{pd} m^d$.

Przez nicio-podobną krzywą na \mathcal{M} , krótko - nić na \mathcal{M} rozumiemy krzywą $\gamma: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{M}$ taką, że $\{\gamma(d)\} \in \mathcal{M}(\mathcal{J})$.

x/ Jeśli $\mathcal{P} \notin \mathcal{C}$, to w miejsce całych płaszczyzn będziemy mieli ich podzbiór właściwy.

Zauważmy, że jeśli punkt $z \in \mathcal{M}_0$ należy do nici γ , to koniecznie musi być punktem początkowym krzywej.

Wyznamy wektor styczny w \mathcal{M} do krzywej $\gamma: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{M}$ przechodzącej przez (\mathcal{P}, b) w punkcie $b \in \mathcal{J}$. Dokonajmy tego w mapie $(\bar{U}_\varphi, \hat{\varphi}) \ni \gamma(b)$, otrzymamy

$$(13.7) \quad \left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=b} = \left[\frac{\partial \varphi(\cdot, t)}{\partial t} \Big|_{t=b}, \dot{\mathcal{P}} \circ \varphi_b, 1 \right].$$

Prostym zastosowaniem powyższej formuły jest:

SPOSTRZEŻENIE 10. Niech $m \in \mathcal{M}_d$, $d > 0$, wtedy wszystkie różniczkowalne (prawie wszędzie) nici przechodzące przez m są równoważne, tzn. wyznaczają ten sam wektor styczny. \square

W przypadku, gdy $m = (\mathcal{P}, d)$ wspólny wektor styczny występujący w tym spostrzeżeniu będziemy oznaczać $x/$ przez $(\dot{\mathcal{P}}, 1)$. Jest on jednoznacznie wyznaczony przez punkt m .

Zauważmy, że gdy $m \in \mathcal{M}_0$, wektor styczny do nici w punkcie $t = 0$ nie jest jednoznacznie wyznaczony przez m .

Dwie krzywe γ_1, γ_2 zaczynające się w punkcie $m \in \mathcal{M}_0$ mogą się różnić wektorami stycznymi w $t = 0$, albowiem po prawej stronie wyrażenia (13.7) dla $t = 0$ będzie występowała prawostronna pochodna $\dot{\mathcal{P}}^+(0)$.

Krzywe zaczynające się w zerze wspólnym wektorem stycznym będą formowały kiełek. Wtedy zbiór $\mathcal{K}(0)$ wszystkich kiełków, zwany rodzajem nad zerem, jest taki sam jak zbiór wszystkich nici określonych na $[0, d]$ przy $d > 0$.

Dla ścisłości wywodu, przytoczmy określenie kiełka \mathcal{K} : dwa punkty $m^r, m^d \in \mathcal{M}$ należą do kiełka \mathcal{K} , lub inaczej - wyznaczają ten sam kiełek \mathcal{K} , jeśli istnieje $k > 0$ takie, że $S^{kd} m^d = S^{kr} m^r$. Stąd oczywiście wynika, że wartości początkowe obu procesów są jednakowe jak i wszystkie istniejące w zerze pochodne, w szczególności pierwsza pochodna.

Jeśli przez $\{\mathcal{M}^+, \mathcal{T}(\mathcal{M}^+), \bar{U}_m\}$ oznaczymy wiązkę styczną nad rozmaitością \mathcal{M}^+ , natomiast przez $\dot{\mathcal{P}}$ oznaczymy zbiór wszyst-

$x/$ w mapie $(\bar{U}_\varphi, \hat{\varphi})$ jego reprezentacją jest wektor $[\dot{\mathcal{P}} \circ \varphi_d, 1]$.

kich możliwych wartości czasowych pochodnych \mathcal{P} -procesów, wtedy ostatnie spostrzeżenie wraz z uwagą po nim następującą wykazują, że istnieją dwa morfizmy

$$V: M^+ \rightarrow \mathcal{T}(M^+) \quad \text{oraz} \quad \pi_0: \mathcal{P}(0) \rightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

takie, że V jest cięciem wiązki stycznej $\mathcal{T}M^+$ danym przez

$$V(m) := [\dot{P}, 1] \in \mathcal{T}_m, \quad \text{jeśli} \quad m = (P, d) \in M_d, \quad d > 0,$$

zaś π_0 jest surjekcją (rzutem) określoną dla dowolnego kielka $L \in \mathcal{P}(0)$ przez

$$\pi_0(L) = (R(0), \dot{R}(0)), \quad \text{jeśli} \quad (R, r) \in L.$$

Powyżej określone zbiory kielków będą pomocne przy definiowaniu infinityzimalnej tworzącej pewnej jedno-parametrowej rodziny operatorów działających w przestrzeni stanów.

14. Przestrzeń stanów

Koncepcja stanu obiektu fizycznego formalnie i nieformalnie jest używana w prawie wszystkich dziedzinach fizyki. Potrzeba określenia stanu obiektu na początku, na końcu czy w trakcie obserwacji jest ściśle powiązana z celem, jaki jest stawiany fizykom, tj. określaniem praw rządzących zjawiskami przyrody.

W mechanice klasycznej punktu materialnego położenie (czytaj-umiejscowienie) wraz pędem są wielkościami składającymi się na ten stan punktu.

W złożonej sytuacji, na jaką trafiamy w mechanice i termodynamice ciał odkształcalnych, wybór wielkości określających stan jest pierwszym krokiem modelowania matematycznego, a to oznacza, że różne przestrzenie stanów prowadzą zazwyczaj do różnych finalnych modeli.

Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy w p. 12, przystępując do modelowania posiadamy katalog obserwacji, który przy dokonany rozbięciu każdej obserwacji na uporządkowane pary procesów (P, Z) można utożsamić z pewną relacją w zbiorze wszystkich procesów. Przeprowadzona dyskusja zbioru procesów wymuszeń \mathcal{M} może być powtórzona ze zbiorem procesów reakcji oznaczanym dalej przez \mathcal{L} .

Element $Z \in \mathcal{Z}$ będący w relacji z procesem $P \in \mathcal{M}$ jest ^{możliwą} reakcją obiektu (ciała) na wymuszenie P zaobserwowane w trakcie eksperymentu, a wtedy para (P, Z) jest elementem katalogu, tzn. elementem obserwowanej relacji. Przyjmiemy \mathcal{R} na oznaczenie tej relacji.

Jakie własności winna posiadać relacja \mathcal{R} ? Po pierwsze, jeśli $(P, Z) \in \mathcal{R}$, to $\text{dur } P = \text{dur } Z$, tzn. czas trwania^{x)} obu procesów musi być taki sam.

Po drugie, jeśli $(P, Z) \in \mathcal{R}$, to dla każdej pary $0 \leq \tau \leq d \leq \text{dur } P$

$S_{\tau d}(P, Z) \in \mathcal{R}$, gdzie operator segmentu $S_{\tau d}$ był określony związkami (13.4) dla P , identycznie definiujemy go dla $Z \in \mathcal{Z}$.

Zbiory \mathcal{M}, \mathcal{Z} jak i $\mathcal{M} \times \mathcal{Z}$ mogą być uporządkowane relacją $<$, która w przypadku \mathcal{M} , jest określona następująco

$$(14.1) \quad P < P' \text{ jeśli } S^{\tau d} P' = P \text{ dla pewnego } 0 < \tau \leq d = \text{dur } P'$$

Wtedy warunek drugi oznacza, że relacja \mathcal{R} zachowuje porządek. Fizycznie warunek ten wyraża następujący fakt: obserwacja jest przeprowadzana ciągle, w danym przedziale czasu, można ją zacząć w dowolnej chwili i w dowolnej chwili można ją przerwać.

Jeśli zgodzimy się z tym, że w katalogu dwukrotnie może występować ten sam proces wymuszenia w relacji z różnymi procesami reakcji, to znaczy, że jesteśmy przygotowani do wprowadzenia pojęcia stanu. Jeśli $(P, Z) \in \mathcal{R}$ oraz $(P, Z_1) \in \mathcal{R}$ przy $Z_1 \neq Z$, to musi istnieć przyczyna, dla której badany obiekt różnie zareagował na to samo wymuszenie. Ta przyczyna, to różne stany, w jakich znajdował się obiekt w chwili rozpoczęcia obserwacji pod wymuszeniem P .

Do poprzednich dwóch własności relacji \mathcal{R} dołączymy trzecią: jeśli $(P, Z) \in \mathcal{R}$ oraz $P_1 \in \mathcal{M}$ jest taki, że $P * P_1 \in \text{Dom } \mathcal{R}$, to istnieje $Z_1 \in \mathcal{Z}(\mathcal{R})$ taki, że $Z * Z_1 \in \mathcal{R}(P * P_1)$, gdzie dla dowolnego $P' \in \text{Dom } \mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}(P) := \{ Z \in \mathcal{Z} : (P, Z) \in \mathcal{R} \}.$$

x/ Jeśli $P: [0, d] \rightarrow \mathcal{P}$, to $\text{dur } P := d$. Identyfikujemy $\text{dur } Z$.

Ta trzecia własność ma obrazować następującą sytuację; jeśli wymuszenie P_1 jest kontynuacją wymuszenia P oraz Z jest reakcją na wymuszenie P , to istnieje Z_1 będący reakcją na wymuszenie P_1 takie, że kompozycja $Z * Z_1$ jest złożoną reakcją, jedną z możliwych, na kompozycję wymuszeń $P * P_1 \in \text{Dom } \mathcal{R}$.

W warunku tym nie możemy wstawiać w miejsce "istnieje $Z_1 \in \mathcal{R}(P_1)$ " zdania: "dla każdego $Z_1 \in \mathcal{R}(P_1)$ ", gdyż warunek $(P, Z) \in \mathcal{R}$ oznacza, że w chwili rozpoczęcia wymuszenia P obiekt był w określonym stanie skoro zareagował w sposób Z .

Użycie terminu "określony stan" nie jest zbyt ściśle, gdyż jeszcze i w tym przypadku jest możliwe, że istnieje więcej - różnych od Z_1 - reakcji, które skomponowane z reakcją Z tworzą złożoną reakcję na wymuszenie $P * P_1$; w symbolach

$\sqrt{Z_2 \in \mathcal{R}(P_1) \text{ i } Z_2 \neq Z_1}$ takie, że $Z * Z_2 \in \mathcal{R}(P * P_1)$.

W takiej sytuacji można powiedzieć, że proces P nie jest charakterystyczny dla stanów, w którym obiekt się znajdował, tzn. proces P był częściowo pasywny, nie włączył wszystkich "mechanizmów" termo-mechanicznych. Nie można tego powiedzieć o procesie P_1 , gdyż jego działanie pozwoliło stwierdzić, że stany początkowe przed procesem P były różne, skoro wymuszenie $P * P_1$ doprowadziło do dwóch różnych reakcji $Z * Z_1$ oraz $Z * Z_2$.

Oczywiście należy być w tym stwierdzeniu ostrożnym, gdyż dotychczasowe obserwacje nie wykluczają, że istnieje wymuszenie P_2 takie, że $P * P_1 * P_2 \in \text{Dom } \mathcal{R}$ oraz dwie reakcje $Z_3, Z_4 \in \mathcal{R}(P_2)$ takie, że $Z * Z_1 * Z_3$ oraz $Z * Z_1 * Z_4$ są w relacji z $P * P_1 * P_2$ i dodatkowo $Z_4 \neq Z_3$.

To rozumowanie prowadzi nas do konkluzji, że z punktu widzenia wyboru przestrzeni stanów najbardziej wartościowe są takie obserwacje $(P, Z) \in \mathcal{R}$, które spełniają następujący warunek

$$(14.2) \quad \bigwedge_{P_1 \in \text{Dom } \mathcal{R}} P * P_1 \in \text{Dom } \mathcal{R} \bigwedge_{Z_1, Z_2 \in \mathcal{R}(P_1)} \{ (P * P_1, Z * Z_1) \in \mathcal{R} \wedge (P * P_1, Z * Z_2) \in \mathcal{R} \} \Rightarrow Z_1 = Z_2.$$

Jeśli obserwacja (P, Z) spełnia warunek (14.2), to powiemy o niej, że rozdziela stan; wtedy w miejsce (P, Z) będziemy

pisac $\{P, Z\}$.

Sens tego określenia przybliża następujące rozumowanie: gdyby (P, Z) było obserwacją, spełniającą (14.2) i dokonaną na obiekcie będącym w dwóch różnych stanach, to istniałoby takie wymuszenie P_1 , że złożona reakcja na $P * P_1$ nie byłaby jednoznaczna, to jest jednak sprzeczne z warunkiem (14.2), ergo - parę $\{P, Z\}$ można utożsamić ze stanem.

Jeśli przez \mathcal{R}_u oznaczymy zbiór obserwacji rozróżniających stany tzn.

$$\mathcal{R}_u := \{(P, Z) \in \mathcal{R} : (P, Z) \text{ spełnia warunek (14.2)}\}$$
 to wtedy wybór przestrzeni stanów jest niczym innym jak określeniem zbioru $\Sigma_{\mathcal{R}}$ oraz morfizmu $\tilde{u}: \mathcal{R}_u \rightarrow \Sigma_u$.

Jest oczywiste, że \tilde{u} nie może być różnowartościowe, gdyż własność rozróżniania stanu zachowuje się przy kompozycji, tzn.

$$(14.3) \quad \bigwedge_{\{P, Z\} \in \mathcal{R}_u} \bigwedge_{(P_1, Z_1) \in \mathcal{R}} \{ (P * P_1, Z * Z_1) \in \mathcal{R} \Rightarrow (P * P_1, Z * Z_1) \in \mathcal{R}_u \}$$

Następujące własności są naturalne dla morfizmu \tilde{u} wyznaczającego przestrzeń stanów

1° $\tilde{u}(\{P * P_1, Z * Z_1\}) = \tilde{u}(\{P, Z\})$ jeśli $\{P, Z\}$ oraz (P_1, Z_1) spełniają warunek (14.3),

2° $\bigwedge_{\{P, Z\} \in \mathcal{R}_u} \bigwedge_{\{P', Z'\} \in \mathcal{R}_u} \{ Z \neq Z' \Rightarrow \tilde{u}(\{P, Z\}) \neq \tilde{u}(\{P', Z'\}) \}$,

3° $\bigwedge_{\{P, Z\} \in \mathcal{R}_u} \bigwedge_{\{P', Z'\} \in \mathcal{R}_u} \{ (P, Z) < (P', Z') \Rightarrow \tilde{u}(\{P, Z\}) = \tilde{u}(\{P', Z'\}) \}$.

Warunek 1° jest oczywisty ze względu na (14.3). Warunek 2° stwierdza, że morfizm \tilde{u} jest różnowartościowy ze względu na drugi element pary - obserwacji, przy pierwszym ustalonym.

Ostatni warunek jest właściwie konsekwencją warunku pierwszego.

Zauważmy, że pierwszy element typowej pary $\{P, Z\}$ spełnia specjalną rolę; będzie to uwzględnione w definicji przestrzeni stanów. Zanim ją podamy przyjmijmy, że przestrzeń procesów reakcji jest przestrzenią jednostajną. W zasadzie mogliśmy się zadowolić słabszym warunkiem, który sprowadza się do żądania, że dla morfizmu zdefiniowanego na przestrzeni jednostajnej o

wartościach w Z jest możliwe podanie warunków jego jednostajności bądź ciągłości w sensie Lipschitza. Jeśli wspomniany morfizm jest określany tak jak morfizm materialny, to przez jego jednostajną ciągłość będziemy rozumieć jednostajną ciągłość jego realizacji w umiejscowieniach. Wtedy nie ma żadnych problemów, gdyż mamy do czynienia z podzbiórami przestrzeni metrycznych (por. Kosiński [1983, p.3]).

W dotychczasowych rozważaniach konsekwentnie używaliśmy terminu obiekt, a to z tego względu, że dążymy do sformułowania globalnego opisu konstytutywnego.

Jak pamiętamy ciało składa się z podciał, które grały podstawową rolę przy wprowadzeniu lokalnych praw bilansu. Na obecnym etapie rola podciał nie będzie mniejsza, gdyż mając też na uwadze zlokalizowaną postać równania ewolucji nie możemy poprzestać na analizie w pełni globalnej, tj. odnoszący się do całego ciała (por. wyprowadzenia równań bilansu w postaci różniczkowej).

Jeśli $A \subset B$ jest dowolnym podciałem, to można zawsze określić Z_A oraz M_A jako odpowiednie zbiory procesów odnoszących się do podciała A . Rozszerzamy to pojęcie do wszystkich obiektów globalnych, tj. określonych na całym ciele i wprowadzamy rzut (obcięcie lub zawężenie) σ_A , które dowolnemu obiektowi globalnemu (obiektem określonym dla całego ciała) przyporządkowuje ten sam obiekt ale określony dla podciała A . Na przykład, jeśli

P jest procesem wymuszenia dla całego ciała B , to $\sigma_A(P)$ jest procesem wymuszenia tylko podciała A . Należy od razu przestrzec przed sytuacjami, w których rzut σ może nie komutować z morfizmami określonymi na B . Ma to miejsce wtedy, gdy morfizmy zawierają w swoim przepisie definiującym operację różniczkowania przestrzennego. Wtedy rzut σ_A będzie z nimi komutował, jeśli ograniczymy argumenty rzutu do podciał, które są otwarte w B .

Po tych uwagach porządkowych przejdźmy do podstawowej definicji tego rozdziału.

DEFINICJA 7. Przestrzenia stanów ciała B odkształcalnego z jego obserwowaną relacją R nazwiemy niepusty zbiór Σ , który jest przestrzenią Tichonowa (tzn. $T_3; 1/2$ - przestrzenią topologiczną), wyposażony w następującą strukturę :

i/ istnieje ciągła surjekcja

$$\hat{g}: \Sigma \rightarrow \mathcal{P},$$

ii/ istnieje morfizm materialny $\mathcal{R}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}$ o własnościach:

a/ $\mathcal{R}(A)(\sigma, P) = \hat{\sigma}_A \mathcal{R}(B)(\sigma, P)$ dla każdego podciała $A \subset B$ i $(\sigma, P) \in \text{Dom } \mathcal{R}(B)$,

b/ $\mathcal{U} := \text{Mor}(D_{\mathcal{R}}, \mathcal{Z}_{\mathcal{R}})$, gdzie $D_{\mathcal{R}} \in U\{\hat{g}(g) \times M_g : g \in \mathcal{P}\}$ otwarty,

przy $M_g := \{P \in \mathcal{M} : P(0) = g\}$ i $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}} := U\{\hat{\sigma}_A \mathcal{Z}, \hat{\sigma}_X \mathcal{Z} : A \subset B, X \in \mathcal{B}\}$,

c/ dla każdego $\sigma \in \Sigma$ oraz każdego podciała $A \subset B$ odwzorowanie $\mathcal{R}(A)(\sigma, \cdot)$ zachowuje porządek,

d/ dla każdego podciała A oraz $g \in \mathcal{P}$ zbiór $\{\mathcal{R}(A)(\cdot, P) : P \in M'_g\}$ jest rodziną funkcji jednostajnie ciągłych, która oddziela punkty na włóknie $\hat{g}^{-1}(g)$, gdzie $M'_g := M_g \cap \text{pr}_M D_{\mathcal{R}}$,

e/ jeśli $\sigma \in \Sigma$ oraz $(P, d) \in M'_{\hat{g}(\sigma)}$, to istnieje $\sigma' \in \Sigma$ takie, że $\hat{g}(\sigma') = P(d)$ i dla każdego $P' \in M'_{P(d)}$ zachodzi

$$S_{p_1 p_2} \mathcal{R}(A)(\sigma, P * P') = \mathcal{R}(A)(\sigma', P'), \quad A \in \Omega(\mathcal{B}),$$

gdzie $p_1 = \text{dur } P$, $p_2 = \text{dur } P * P'$,

f/ jeśli $P \in M_g \cap \text{Dom } \mathcal{R}$, to $\mathcal{R}(A)(\hat{g}^{-1}(g), P) = \hat{\sigma}_A \mathcal{R}(P)$ dla każdego $A \subset B$

Warunek całkowitej regularności stawiamy przestrzeni Σ zapewnia, że jest przestrzenią jednostajną. Warunek i/ oraz część

warunku e/ zabezpieczają, że w stanie zawsze jest zawarta pełna informacja o chwilowej wartości wymuszenia. Morfizm materialny \mathcal{R} pełni podstawową rolę. Ostatnie dwa warunki wraz z c/ zabezpieczają, że morfizm materialny jest zgodny z relacją \mathcal{R} oraz podzbiorem \mathcal{R}_A obserwacji rozróżniających stany. Warunek d/ odpowiada koncepcji stanu scharakteryzowanego zależnością (14.2). Warunki regularności, jak wspomnieliśmy mogą być zastąpione bardziej naturalnym, w obecnym wywodzie, żądaniem ciągłości w sensie Lipschitza. Przyjęta tu jednostajna ciągłość jest wzorowana na pracy Nolla [1972].

Warunek e/ formułuje własność ewolucji stanów wzdłuż procesów wymuszania, tzn. wychodząc z jednego stanu σ procesem P , dochodzimy do jednoznacznie wyznaczonego stanu σ' , na końcu tego procesu.

Porównując obecną definicję przestrzeni stanów oraz morfizmu \mathcal{R} z poprzednimi (por. Perzyna i Kosiński [1973], Kosiński [1976, 1981]) stwierdzamy, że obok podstawowej różnicy wynikającej ze sformułowania nielokalnego istnieją jeszcze inne. Należy do niej warunek d/. We wspomnianych wyżej pracach przyjmowaliśmy, że morfizm $\mathcal{R}(\cdot, \mathcal{P})$ jest bijektywny, co prowadziło do bardzo ograniczonej klasy modeli materiałów (por. Frischmuth [1982]).

Przedstawiona struktura stanów ma jeszcze kilka charakterystycznych własności, na które chcemy zwrócić uwagę. Zbiór $\sum_{\mathcal{U}}$ określamy przez operator stanu $\tilde{\mathcal{U}}: \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{U}}$ jest podzbiorem Σ , gdyż wartość morfizmu materialnego \mathcal{R} dla każdego podciała \mathcal{A} będąc operatorem określonym na podzbiornie otwartym $\mathcal{Z} \times \mathcal{M}$ musi zawierać w swoim wykresie relację \mathcal{R} (por. warunek f/). To oznacza, że w ogólności operator $\mathcal{R}(\mathcal{B}): \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{Z}$ pokrywa sobą szerszą klasę par - obserwacji- $(\mathcal{P}, \mathcal{Z})$ niż te, umieszczone w katalogu. Jest to zrozumiałe z tego powodu, że prowadząc proces modelowania konstytutywnego nie tylko odtwarzamy, przy pomocy \mathcal{R} , zaobserwowane procesy lecz przewidujemy nowe. Niestety w ogólności nie możemy twierdzić, że uda się zbudować operator \mathcal{R} taki, który poda reakcję na wszystkie dowolne i dopuszczone w fizyce procesy wymuszeń.

W tym miejscu pojawia się to co nazwiemy defektem niepełnej rozróżnialności przestrzeni stanów. Sformułujemy go następująco: istnieją stany hierozeróżnialne w trakcie obserwacji fizycznej.

Hipotezę tę spróbujemy poprzeć pewnym rozumowaniem. Po pierwsze nie możemy wykluczyć, że w katalogu obserwacji brakuje pewnych procesów wymuszeń i związanych z nimi procesów reakcji, skoro na samym początku rozważań ograniczyliśmy się do klasy procesów ciągłych. To oznacza, że używając tylko procesów z rodziny \mathcal{M} i superpnując je z procesami występującymi w obserwacjach rozróżniających stany (por. klasę $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$) nie stwierdzimy, że stany są różne.

Skoro nie możemy ich odróżnić wykonując procesy z klasy \mathcal{M} , to zastosujemy formalnie procedurę (14.2) poszerzając tym samym katalog eksperymentów, tzn. poszerzając relację \mathcal{R} . Ale wtedy będziemy zmuszeni wykonać wszystkie testy (eksperymenty wymuszenia) jakie są dopuszczone przez fizykę i pomierzyć sprzężone z

nimi reakcje. Zakładając, co jest nierealne, że dokonaliśmy tego, otrzymamy pełen graf nowej i maksymalnej relacji \mathcal{R}_{max} . Lecz w takim wypadku traci sens samo modelowanie konstytutywne, jest ono nam nie potrzebne, bo posiadając \mathcal{R}_{max} mamy katalog wszystkich dopuszczonych przez fizykę testów wymuszeń i sprzężonych z nimi reakcji. Nic nowego poza obserwacjami w \mathcal{R}_{max} nie może się zdarzyć, nie musimy tworzyć morfizmów materialnych aby co-kolwiek przewidzieć, gdyż jest nam to nie potrzebne.

Powstaje pytanie: co zrobić jeśli przyjmie się powyższą hipotezę za słuszną? Czy modelowanie ma sens? Odpowiedź na to pytanie daje nowe spojrzenie na problem niejednoznaczności rozwiązań.

Jeśli już zdecydowaliśmy się na wybór przestrzeni stanów Σ oraz związanych z nią morfizm materialny, to żądamy aby był zgodny z dostępnym katalogiem, tj. obserwowaną relacją w tym sensie, że

$$\bigwedge_{\sigma, \sigma_1 \in \Sigma} \left\{ \bigwedge_{A \subset B} \bigwedge_{\mathcal{P}} \mathcal{R}(A)(\sigma_1, \mathcal{P}) = \mathcal{R}(A)(\sigma, \mathcal{P}) \right\} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma.$$

To znaczy: dla każdego podciała A operacja konstytutywna $\mathcal{R}(A)$ jest jednoznaczna, tak jak tego wymagaliśmy w Definicji 7, ale jest tak tylko dla par $(\mathcal{P}, \mathcal{Z})$ z dziedziny $\mathcal{R}(A)$, którą z góry zawęziliśmy - dokładniej określiliśmy - w trakcie definiowania morfizmu \mathcal{R} .

Może się zdarzyć, że dla $\sigma_0 \in \Sigma$ i pewnego procesu $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{M}$, który choć nie jest w dziedzinie operatora $\mathcal{R}(A)$ jest możliwe wyznaczenie dla niego wartości operatora, na przykład w przejściu granicznym przy $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_0$, ale wartość ta zależy od wyboru ciągu $\{\mathcal{P}_n\}$. Tym samym otrzymamy niejednoznaczność reakcji na bodziec \mathcal{P}_0 . Z punktu widzenia dotychczasowej analizy prowadzonej w p. 12 i 14 będzie to oznaczało, że stany podciała A w chwili rozpoczęcia procesu \mathcal{P}_0 były różne. Lecz zgodnie z założeniem wyszliśmy z określonego stanu $\sigma_0 \in \Sigma$. Jak więc mamy interpretować zaistniałą sytuację? Odpowiedź jest prosta: to co uważaliśmy za stan nim nie jest, wielkość σ_0 jest nośnikiem tylko części informacji o stanie. Brak pełnej informacji sprawiło, że utożsamiliśmy "prawdziwe stany" wprowadzając

na ich określenie jedno σ_0 . Efektem tego było obcięcie przestrzeni Σ i operatora konstytutywnego na niej określonego.

Rozwiązanie tego problemu powinno polegać na znalezieniu dodatkowych warunków ujednoznaczających opis reakcji, a można to uzyskać bądź przez poszerzenie dziedziny operatora $\mathcal{R}(A)$ tak w pierwszym (Σ) jak i drugim argumente ($\text{pr}, m, D_{\mathcal{R}}$). Rozszerzenie w pierwszym argumente oznacza wyznaczenie zbioru Σ_{\max} oraz relacji równoważności działającej w tym zbiorze, dla którego zbiór Σ jest przestrzenią ilorazową. Wtedy zbiór Σ_{\max} będzie można nazwać przestrzenią prawdziwych stanów.

Rozszerzenie dziedziny w drugim argumente może oznaczać, na przykład, dopuszczenie do rozważaniach procesów o mniejszej regularności. W obu przypadkach będzie się to wiązało z potrzebą zdefiniowania operatora $\mathcal{R}(A)$ na elementach spoza jego pierwotnej dziedziny.

Przykładów sytuacji, w których poszerzenie zbioru procesów (czytaj-rozwiązań) stworzyła potrzeba zdefiniowania operatorów relacji konstytutywnych dostarczają wszelkie zjawiska z osobliwościami, a w szczególności teoria słabych rozwiązań problemów początkowo brzegowych w dynamice ośrodków ciągłych. Zajmiemy się jej elementami w ostatnim rozdziale, a więc tutaj wymienimy tylko warunek entropowy Laxa - Olejnik dla fal uderzeniowych, warunek Krużkowa-Laxa dopuszczalności rozwiązań słabych układów ^{bez lepkości} jako granice rozwiązań problemów z lepkością. Z metodologicznego punktu widzenia działalność taka nie ma końca, ale jest nadzieja, że za każdym razem posuwamy się nieco dalej w modelowaniu konstytutywnym, przybliżając się do idealnego modelu przestrzeni stanów, morfizmu materialnego i operatorów konstytutywnych.

Ważną konsekwencją przyjętych własności w Definicji przestrzeni stanów jest istnienie morfizmu materialnego rządzącego ewolucją stanów wzdłuż procesów. Pomocny w tym jest ogólny fakt z teorii systemów uzyskany przez Mesarovića i Takaharę [1975, tw. 2.1, r. V] , który w zastosowaniu do warunku ii/ Definicji 7 daje następujący rezultat.

SPÓSTRZEŻENIE 10. Istnieje operator ewolucji $\hat{e}: D_{\mathcal{R}} \rightarrow \Sigma$, gdzie $D_{\mathcal{R}} = \text{Dom } \mathcal{R}(\mathcal{B})$ taki, że dla każdej pary $(s, p) \in D_{\mathcal{R}}$

oraz $P' \in \mathcal{M}$ takiego, że $P * P' \in \rho_{r,m} D_{\mathcal{R}}$, zachodzą następujące warunki, dla każdego podciała $A \subset B$

$$\hat{g}(\hat{e}(\sigma, P)) = P(p_1),$$

$$(14.4) \quad S_{p_1 p_2} \mathcal{R}_A(\sigma, P * P') = \mathcal{R}_A(\hat{e}(\sigma, P), P'),$$

$$\hat{e}(\sigma, P_{[0]}) = \sigma, \quad \hat{e}(\sigma, P * P') = \hat{e}(\hat{e}(\sigma, P), P'),$$

gdzie $p_1 := \text{dur } P$, $p_2 := \text{dur}(P * P')$ oraz dla ułatwienia zapisu w miejsce \mathcal{R}_A , $A \in \mathcal{D}(B)$, piszemy $\mathcal{R}_A: D_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}_A \mathcal{X}$. Ponadto dla każdego $P \in \rho_{r,m} D_{\mathcal{R}}$ odwzorowanie $\hat{e}(\cdot, P): \Sigma_{P(0)} \rightarrow \Sigma_{P(p_1)}$, gdy $\text{dur } P = p_1$, jest jednostajnie ciągłe. \square

Warunki jakie morfizm \hat{e} spełnia oznaczają, że jest on zgodny z głównym morfizmem \mathcal{R} . Jest ponadto tranzytywny (por. ostatnia równość), co tłumaczy jego oryginalną nazwę (por. Mesarović i Takahara [1975]) - funkcja przejścia dla stanów x .

Jednostajną ciągłość uzyskaliśmy dzięki następującemu faktowi z teorii przestrzeni jednostajnych (por. Isbell [1964]); Odwzorowanie $h: \mathcal{V} \rightarrow \hat{g}^{-1}(g)$ z przestrzeni jednostajnej \mathcal{V} we włókno $\hat{g}^{-1}(g)$ jest jednostajnie ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowania $\mathcal{R}_A(h(\cdot), P'): \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}_A \mathcal{X}$ są jednostajnie ciągłe dla wszystkich $P' \in \mathcal{M}_g \cap \rho_{r,m} D_{\mathcal{R}} \subset A \subset B$.

Jeśli wykorzystamy (14.4)₂ i wstawimy $\mathcal{V} := \hat{g}^{-1}(P(0))$ oraz $h = e(\cdot, P)$, to uzyskamy powyższy rezultat.

Jednostajna ciągłość morfizmu \hat{e} jest warunkiem odmiennym od ciągłości w sensie Lipschitza dowolnej realizacji $\hat{e}_x: \hat{x}(D_{\mathcal{R}}) \rightarrow \hat{x}(\Sigma)$ morfizmu \hat{e} . Oba warunki regularności nie są wystarczające do analizy, jaką mamy zamiar przeprowadzić w następnej części rozdziału, lecz ze względu na dotychczasowe potrzeby modelowania konstytutywnego wydają się być żądaniami minimalnymi. W szczególności w lokalnej teorii rozwijanej przez Nolla [1972] topologia przestrzeni stanów $\Sigma = \bigcup \{ \hat{g}^{-1}(g) : g \in \mathcal{D} \}$ została wprowadzona jako suma topologii włókien $\hat{g}^{-1}(g)$ indukowana przez tzw. naturalną strukturę jednostajną tych włókien. Naturalna struktura jednostajna na g -włóknie $\hat{g}^{-1}(g)$ została zdefiniowana jako najściślejsza jednostajność, przy której

odwzorowania

$$\mathbb{R}_X(\cdot, P)^f: \hat{g}^{-1}(q) \rightarrow \mathcal{F}$$

są jednostajnie ciągłe dla wszystkich $P \in \mathcal{M}_g$. Tutaj wskaźnik f oznacza końcową wartość reakcji wyznaczonej przez lokalny operator konstytutywny \mathbb{R}_X typowej cząstki $X \in \mathcal{B}$.

Jak widać stąd jest pewna odmiennosc w podejściu do przestrzeni Σ topologia jest przeniesiona przy pomocy operatora konstytutywnego ze zbioru reakcji \mathcal{F} . Niestety w takim podejściu trafiają się bardzo niepokojące własności. W szczególności okazuje się, że topologia przestrzeni stanów materiału sprężystego jest dyskretna i trudno sobie wtedy wyobrazić jakąkolwiek dyskusję stabilności materialnej.

Odmienne podejście, też w przypadku teorii lokalnej, zaproponował Frischmuth [1982], który założył, że topologia przestrzeni stanów jest topologią iloczynu kartezjańskiego dwóch przestrzeni \mathcal{K} oraz \mathcal{G} , gdzie $\mathcal{G} \subset \text{Sym}^+(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X^*)$, zaś \mathcal{K} jest tzw. przestrzenią metody przygotowania (Perzyna [1971]).

15. Wyprowadzenie równania ewolucji

Przedstawiona definicja stanów, wraz z jej konsekwencją w postaci morfizmu $\hat{\mathcal{E}}$, reprezentuje tzw. podejście funkcjonalne, które oznacza, że jeśli znamy początkowy stan \mathcal{C}_0 oraz proces P zaczynający się w stanie, to dla dowolnego podciała $A \subset B$ możemy wyznaczyć stan na końcu procesu. Równoległe możemy wyznaczyć cały proces reakcji odpowiadający parze (\mathcal{C}_0, P) .

W często stosowanym w fizyce podejściu zainteresowanie nasze idzie w innym kierunku tj. w stronę równań ewolucyjnych, które wiążą chwilową zmianę stanu z samym stanem i ewentualnie procesem.

Celem tego punktu jest wyprowadzenie w obecnej strukturze, równania ewolucji, któremu odpowiada operator ewolucji $\hat{\mathcal{E}}$. W ten sposób zamknijemy w jednolitą całość uniwersalne równania bilansu dla ośrodka, które już posiadają postać równań ewolucji, z równaniami ewolucji dla materiału ośrodka.

Aby to wykonać potrzebne są nam dodatkowe założenia.

Założenie A. Przestrzeń stanów jest rozmaitością różniczkowalną modelowaną na pewnej przestrzeni Banacha \mathcal{B}_S .

Można uniknąć tego założenia i przeprowadzać wyprowadzenia w pewnym umiejscowieniu $x \in \mathcal{C}$, w którym ze względu na założenia o morfizmie materialnym obraz przestrzeni Σ jest podzbiorem przestrzeni Banacha.

W dalszej części często będziemy pisać

$$(15.1) \quad \Sigma_g := \hat{g}^{-1}(g), g \in \mathcal{P} \text{ oraz } \Sigma_\tau := \hat{g}^{-1}(m(\tau)),$$

jeśli $m \in \mathcal{M}_d$ i $\tau \in [0, d] = \text{Dom } m$; nie będziemy też robić rozróżnienia między $m(\tau)$ a $\text{pr}_{\mathcal{P}}(m(\tau)) = P(\tau)$, gdy $m = (P, d)$.

Dla dowolnego punktu m rozmaitości \mathcal{M} określimy kategorię (por. Kosiński [1983]).

$$(15.2) \quad \mathcal{T}_m := \{ \Sigma, \Sigma_g, \text{Mor}(\Sigma_{g_1}, \Sigma_{g_2}), \text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma), g, g_1, g_2 \in \text{Rng } m \},$$

gdzie $\text{Rng } m := \{ P(s) \in \mathcal{P} : s \in \text{Dom } m, \text{ jeśli } m = (P, d) \}$, tak że

T_1 Zbiór morfizmów $\text{Mor}(\Sigma_{g_1}, \Sigma_{g_2})$ jest niepusty jeśli proces m osiągnie wartość g_2 nie wcześniej niż g_1 .

T_2 Dla dowolnego $g, g_1 \in \text{Rng } m$ następujący związek jest prawdziwy

$$(15.3) \quad \text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma_{g_1}) \subset \text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma).$$

T_3 Dla dowolnego $g \in \text{Rng } m$ zbiór $\text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma)$ jest rozmaitością różniczkowalną modelowaną na przestrzeni Banacha $\mathcal{B}(\mathcal{D}_g, \mathcal{B}_S)$ operatorów z podzbioru $\mathcal{D}_g \subset \mathcal{B}_S$ różniczkowalnych w sensie Frecheta o ograniczonych pochodnych przestrzeni \mathcal{B}_S w tę przestrzeń.

Przypomnijmy, że struktura rozmaitości różniczkowalnej na $\text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma)$ jest konstruowana przez wzięcie atlasu klasy C^1 na $\text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma)$, jako rodziny map $\{(\mathcal{L}_i, \mathcal{T}_i) : i \in \text{zbiór indeksów}\}$, spełniających następujące warunki

x/ Jeśli $m \in \partial \mathcal{M}$, to wstawiamy $\text{Dom } m = 0$.

- D_1 Każde \mathcal{L}_i jest podzbiorem zbioru $\text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma)$ i wszystkie $\{\mathcal{L}_i\}$ pokrywają $\text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma)$.
- D_2 Każde T_1 jest zawężeniem do \mathcal{L}_i kowariantnego funktora określonego na \mathcal{F}_m , tzn. $T_i = ({}^0T_i, {}^1T_i)$ odwzorowuje podkategorię $\{\Sigma_g, \Sigma, \mathcal{L}_i\}$ na podkategorię kategorii $\{\mathcal{O}_g, \mathcal{B}_S, \text{BD}(\mathcal{O}_g, \mathcal{B}_S)\}$ tak, że
- D_3 Przyporządkowanie obiektowe ${}^0T_i: \Sigma_g \rightarrow \mathcal{O}_g \subset \mathcal{B}_S$ jest homeomorfizmem klasy C^1 i dla każdego $f \in \mathcal{L}_i$ odwzorowanie 0T_i przyporządkowuje homeomorficznie obrazowi $f(\Sigma_g)$ podzbiór ${}^0T_i(f(\Sigma_g)) \subset \mathcal{B}_S$.
- D_4 Przyporządkowanie^{x/} ${}^1T_i: \mathcal{L}_i \rightarrow \text{BD}(\mathcal{O}_g, \mathcal{B}_S)$ jest bijekcją z \mathcal{L}_i na pewien podzbiór otwarty ${}^1T_i(\mathcal{L}_i) \subset \text{BD}(\mathcal{O}_g, \mathcal{B}_S)$, takie, że ${}^1T_i(\text{id}_{\Sigma_g}) = \text{id}_{\mathcal{O}_g}$ oraz dla każdego i, j zbiór ${}^1T_i(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j)$ jest otwarty w $\text{BD}(\mathcal{O}_g, \mathcal{B}_S)$.
- D_5 Jeśli (\mathcal{L}_j, T_j) jest inną mapą z funktorem $T_j = ({}^0T_j, {}^1T_j)$, to odwzorowanie ${}^1T_j \circ ({}^1T_i)^{-1}: {}^1T_i(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j) \rightarrow {}^1T_j(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j)$ jest homeomorfizmem klasy C^1 . \square
- Biorąc rozdzielną sumę kategorii $\bigcup \{ \mathcal{F}_m : m \in \bar{M} \} =: \mathcal{F}(\bar{M})$ otrzymamy wiązkę kategorii $(\mathcal{F}(\bar{M}), \mathcal{F}, \bar{M})$ z naturalnym rzutem $\mathcal{F}: \mathcal{F}(\bar{M}) \rightarrow \bar{M}$.

Zauważmy, że w powyższym określeniu nie przyjęliśmy aksjomatu o jednoznaczności dziedziny i kodziedziny morfizmów w kategorii, gdyż wszystkie zbiory Σ_g są tego samego typu (por. komentarz u Semadeniego i Wiwegera [1978, s.46]). W punkcie dotyczącym regularności atlasu nad $\text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma)$ przestrzeń Banacha $\text{BCD}(\mathcal{O}_g, \mathcal{B}_S)$ operatorów różniczkowalnych ciągle w sensie Frecheta z ograniczonymi pochodnymi, byłaby bardziej odpowiednia, tym bardziej, że $\text{BCD}(\mathcal{O}_g, \mathcal{B}_S) \subset \text{BD}(\mathcal{O}_g, \mathcal{B}_S)$ (por. Martin [1975, s.87]).

Następnym krokiem jest rozpatrzenie w każdym punkcie m rozmaitości \bar{M} odwrotnego systemu odwzorowań (por. Isbell [1964])

$$(15.6) \quad \mathcal{F}_m := \{ \Sigma_\tau, f_m^{\tau}, q, \tau \in \text{Dom } m \},$$

x/ Ang. morphism function.

gdzie jednostajnie ciągle odwzorowania skaczące $x/$ są określone przez operator ewolucji \hat{e} następująco:

$$(15.7) \quad f_m^{q\tau} := \hat{e}(\sigma, m_{[\tau, q]}) \quad , \quad \sigma \in Z_\tau,$$

gdzie $m_{[\tau, q]} = (S_{\tau q} P, q - \tau)$, jeśli $m = (P, d)$, $0 \leq \tau \leq q \leq d$ i $S_{\tau q}$ zostało określone wzorem (13.4). Ze względu na własności morfizmu \hat{e} funkcje f spełniają zależności wymagane od odwzorowań skaczących

$$(15.8) \quad f_m^{\tau\tau} = id_{Z_\tau} \quad , \quad f_m^{qs} f_m^{sp} = f_m^{qp} \quad \text{dla } 0 \leq p \leq s \leq q.$$

Zauważmy, że podprzódziół $Dom m \subset \mathbb{R}^+$ jest tutaj traktowany jako zbiór skierowany przez relację „ \geq ”. Ponadto dla odwzorowań $f_m^{q\tau}$ mamy następujące własności

I_1 . Jeśli $q, \tau \in Dom m$, $m \in \mathcal{M}^+$ oraz $q \leq \tau$, to

$$(15.9) \quad f_m^{q\tau} = f_{m_{[\tau, q]}}^{(q-\tau)0}$$

I_2 Dla dowolnych dwulnych dwóch procesów $m_1 \in \mathcal{M}_{d_1}$ oraz $m_2 \in \mathcal{M}_{d_2}$ takich, że $m_1(d_1) = m_2(0)$ i $k \leq d_1 \leq \ell \leq d_1 + d_2$ zachodzi

$$(15.10) \quad f_{m_1 * m_2}^{\ell k} = f_{m_2}^{(\ell - d_1)0} f_{m_1}^{d_1 k}.$$

Własność I_1 jest konsekwencją definicji segmentu procesu, natomiast własność I_2 jest inaczej zapisaną relacją (14.4).

Jeśli weźmiemy rozdzielną sumę systemów odwrotnych $U \{ \mathcal{F}_m : m \in \mathcal{M} \} =: \mathcal{F}(\bar{\mathcal{M}})$, to przy naturalnym rzucie $\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(\bar{\mathcal{M}}) \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$ struktura $(\mathcal{F}(\bar{\mathcal{M}}), \pi_{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{M}})$ może być nazwana wiązką systemów odwrotnych odwzorowań. Naszym następnym założeniem jest

Założenie B. Wiązka $\mathcal{F}(\bar{\mathcal{M}})$ jest sub-wiązką wiązki $\bar{\mathcal{F}}(\bar{\mathcal{M}})$

$$\text{przy } \pi_{\mathcal{F}} = \bar{\pi} |_{\mathcal{F}(\bar{\mathcal{M}})}$$

Zauważmy, że dla dowolnego $m \in \mathcal{M}$ zbiór nici systemu odwrotnego \mathcal{F}_m , tj. granica systemu odwrotnego $\lim_{\leftarrow} \mathcal{F}_m$ może być

x/ Ang. bounding map, por. Engelking [1976].

bijektywnie odwzorowana na zbiór wszystkich podniesień procesu m do Σ pod działaniem operatora ewolucji \hat{e} .

Ostatnią potrzebną do analizy wiązką określimy punktowo dla dowolnego $m \in \bar{\mathcal{M}}$ jako podkategorie

$$A_m := \{ \Sigma_0, f_m^{s_0}, s \in \text{Dom } m \}$$

kategorii $\{ \Sigma_{m(s)}, \Sigma, \text{Mor}(\Sigma_{m(s)}, \Sigma) \}$ (ze względu na (15.3) i ostatnie założenie). Zauważmy, że $A_m \subset \mathcal{F}_m$. Biorąc rozdzielną sumę $\bigcup_{m \in \bar{\mathcal{M}}} A_m$ formujemy wiązkę $(A(\bar{\mathcal{M}}), \pi_A, \bar{\mathcal{M}})$ zwaną wiązką nici. Jest ona subwiązką wiązek $\mathcal{F}(\bar{\mathcal{M}})$ oraz $\mathcal{B}(\bar{\mathcal{M}})$, przy

$$\pi_A = \pi|_{A(\bar{\mathcal{M}})} = \pi_A|_{A(\bar{\mathcal{M}})}.$$

Wyposażeni w odpowiednie obiekty przystępujemy do głównego etapu wyprowadzenia, którego celem jest odnalezienie infini-tezyalnych tworzących przekształceń skaczących.

Przez krzywą w kategorii $\{ \Sigma_g, \Sigma, \text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma) \}$ rozumiemy odwzorowanie $\beta: J \rightarrow \text{Mor}(\Sigma_g, \Sigma)$ klasy C^1 , gdzie $J \subset \mathbb{R}^+$ jest przedziałem.

Weźmy nić (dokładniej - krzywą nicio-podobną) $\gamma: J \supset J' \rightarrow \mathcal{M}$ klasy C^1 przechodzącą przez punkt $m \in \mathcal{M}^+$ dla $s=d$, tzn. $\gamma(d) = m$, gdzie d jest prawym końcem przedziału J .

Niech $\hat{\gamma}$ będzie cięciem wiązki π_A nad \mathcal{M}

$$(15.11) \quad \hat{\gamma}: \mathcal{M} \rightarrow A(\bar{\mathcal{M}}), \quad \pi_A \circ \hat{\gamma} = \text{id}_{\mathcal{M}}$$

danym przez

$$(15.12) \quad \hat{\gamma}(m') = f_{m'}^{s_0} \in A_{m'} \text{ jeśli } m' \in \mathcal{M}_r.$$

Jest widoczne, że cięcie $\hat{\gamma}$ jest generowane przez operator ewolucji \hat{e} skoro (15.12), ze względu na (15.7), można zapisać w postaci

$$(15.13) \quad \hat{\gamma}(m')(\cdot) = \hat{e}(\cdot, m') : \Sigma_{m(s_0)} \rightarrow \Sigma.$$

Rozpatrzmy złożenie $\hat{\gamma} \circ \gamma: J' \rightarrow A(\bar{\mathcal{M}})$, które jest podniesieniem krzywej γ do $A(\bar{\mathcal{M}})$, gdyż $\pi_A(\hat{\gamma} \circ \gamma) = \gamma$.

SPÓSTRZEŻENIE 11. Zawężenie odwzorowania $\hat{\gamma} \circ \gamma$ do przedziału J

jest krzywą w podkategorii A_m .

Dowód. Z tego, że d jest prawym końcem przedziału J oraz z (13.3) i (13.6), mamy $\delta(t) = S^{td}_m$ dla $t \in J$; stąd ze względu na (15.12) otrzymujemy

$$\hat{s}(\delta(t)) = f_{\delta(t)}^{t0} = f_{S^{td}_m}^{t0} \in A_{\delta(t)}.$$

Analizując własność I_1 i wstawiając $q=t$ oraz $r=0$ w (15.9), ostatnia relacja może być zastąpiona następującym ciągiem równości

$$\hat{s}(\delta(t)) = f_{\delta(t)}^{t0} = f_{m[0,t]}^{t0} = f_m^{t0} \in A_m,$$

gdź $S^{td}_m = m_{[0,t]}$ dla $t \in [0, d]$. Skoro t było dowolne z przedziału J , otrzymujemy wymagany rezultat. \square

Aby sformułować ważny wniosek skorzystajmy z używanego w p. 13 jednopunktowego odwzorowania $\delta_0: M \rightarrow P$ określonego przez $\delta_0(m) = m(0)$, dla dowolnego $m \in M$.

WNIOSEK. Dla każdego $g \in P$ obraz włókna $\delta_0^{-1}(g)$ pod działaniem cięcia \hat{s} jest w $Mor(\Sigma_g, \Sigma)$. \square

Aby wyznaczyć wektor styczny do krzywej β w $Mor(\Sigma_g, \Sigma)$ będącej podniesieniem krzywej δ , wymagane są własności różniczkowalności cięcia \hat{s} . Zauważmy, że cięcie \hat{s} jest naturalnie zdefiniowane na zbiorze M , który nie jest otwarty w \bar{M} . Stąd poniższe założenie.

Założenie C. Dla każdego $g \in P$ zawężenie cięcia \hat{s} do M^+ , traktowane jako morfizm między rozmaitościami M^+ i $Mor(\Sigma_g, \Sigma)$, jest klasy C^1 .

Dla dowolnego $g \in P$ rozpatrzmy zbiór $\mathcal{H}_g(0) := \mathcal{H}(0) \cap \delta_0^{-1}(g)$, gdzie $\mathcal{H}(0)$ jest żądźbkiem nad zerem (por. p. 13). Wtedy elementami zbioru $\mathcal{H}_g(0)$ są kiełki procesów z M^+ , których wartości początkowe są identyczne i równe g . Jeśli λ jest takim kiełkiem rozpatrzmy nie $\delta: J \rightarrow M$ przechodzącą przez $m \in \lambda \cap M_d$ w $s=d$. Wtedy pod działaniem cięcia \hat{s} w $A(\bar{M})$ mamy podniesienie $\hat{s} \circ \delta$. Dzięki spostrzeżeniu 11 możemy zdefiniować krzywą $\beta: J \rightarrow Mor(\Sigma_g, \Sigma) =: Y_g$, poprzez

$\beta := \hat{s}_* \delta|_{\mathcal{J}}$. Jak poprzednio przyjmujemy, że d jest prawym końcem przedziału $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}'$. Wyznamy wektor styczny do krzywej β w $t \in \mathcal{J} \subset \mathbb{R}^+$; otrzymamy

$$(15.15) \quad \frac{d}{dt} \beta(t) = \hat{s}_* \delta(t) \frac{d\delta(t)}{dt},$$

gdzie $\hat{s}_*: \mathcal{J}(\delta_c^{-1}(q)) \rightarrow \mathcal{J}(Y)$ jest odwzorowaniem stycznym. Jeśli weźmiemy inne $m_1 \in L \cap M_d$, wtedy zgodnie z definicją kielka istnieje $0 < k \leq \min(d, d_1)$ takie, że $S^{td} m = S^{kd_1} m$. Skoro $\delta(t) = S^{td} m$ dla $0 < t \leq d$ więc

$$(15.16) \quad \delta(t) = S^{td} m = S^{td_1} m_1, \quad t \in [0, k].$$

Rozpatrzmy teraz przypadek gdy $\mathcal{J} = [0, d]$ i spróbujmy^{x/} wyznaczyć wektor styczny do β w $t = 0$. Lecz zgodnie z określeniem nicio-podobnych krzywych na M , początek nici δ wypada wtedy w punkcie brzegu ∂M . Choć w punktach zbioru $M \cap \partial M$ cięcie jest naturalnie zdefiniowane jako morfizm identyecznościowy, jego pochodna tj. wartość odwzorowania stycznego \hat{s}_* może w ogólności nie być wyznaczona jednoznacznie, gdyż zbiór $M = M_0 \cup M^+$ nie jest otwarty w \bar{M} , a tym samym \hat{s}_* może być naturalnie zdefiniowane jako morfizm klasy C^1 tylko na M^+ . Stąd w przyjętym Założeniu C odwzorowanie \hat{s}_* jest zdefiniowane i ciągłe na $M^+ \cap \delta_c^{-1}(q)$.

Pocieszające jest w tym to, że wartości $\hat{s}_* \delta(t)$ dla t małych ale różnych od zera zależą od procesu $S^{td} m$ poprzez kielka L , do którego on należy, tzn. każde dwa procesy m oraz m_1 należące do L , tj. spełniające (15.16), wyznaczają tę samą wartość $\hat{s}_* \delta(t)$, dla $0 < t < k$. Konsekwentnie, jeśli "graniczna wartość" $\hat{s}_* \delta(t)$ istnieje, dla $t \rightarrow 0$, to w ogólności będzie to wielowartościowy operator \hat{s}_{*L} , tj. podzbiór liniowych morfizmów $\text{Lin}(\mathcal{T}_{\delta(0)}, \mathcal{T}_{\hat{s}(\delta(0))})$, zależny od kielka $L \subset \delta_c^{-1}(q)$.

^{x/} Zauważmy, że przy $\mathcal{J} = [0, d]$ krzywa δ zaczyna się w punkcie $\delta(0) = S^{0d} m$, który jest procesem $m|_{[0]}$ o trwaniu zero.

a poszukiwane wyrażenie przyjmie postać

$$(15.17) \quad \frac{d\beta(0)}{dt} \in \hat{\lambda}_{*t} \quad \frac{d\gamma(0)}{dt}.$$

Ta relacja rządzi początkową ewolucją β w podkategorii Y_g w punkcie ω_{Z_g} . Początkowa prędkość jest dana w funkcji początkowej prędkości $\frac{d\gamma(0)}{dt}$ procesu m (por. rzut Π_0 w p.13).

Przejdźmy do ewolucji w przestrzeni stanów. Dla $\sigma \in \Sigma_g \equiv \hat{g}^{-1}(g)$ okreśmy krzywą $\beta_\sigma \in \Sigma$ jako podniesienie krzywej γ , przez

$$(15.18) \quad \beta_\sigma: J \rightarrow \Sigma, \quad \beta_\sigma(t) = \int_{\sigma(t)}^{\tau_0} \sigma \in \hat{g}^{-1}(m(t)).$$

Aby być w zgodzie z wymogami ścisłości i móc wykorzystać dotychczasowe wyniki relacja (15.18) powinna być dana przy użyciu cięcia $\hat{\lambda}$ i dwupunktowego odwzorowania E .

W tym celu okreśmy kompozycje

$$(15.19) \quad E \circ (\hat{\lambda} \times id): M^+ \cap \delta_0^{-1}(g) \times \{\sigma\} \rightarrow \Sigma \text{ przez}$$

$$E \circ (\hat{\lambda} \times id)(m', \sigma) = E(\hat{\lambda}(m'), \sigma) \equiv \hat{\lambda}(m')(\sigma)$$

dla dowolnego $m' \in M^+ \cap \delta_0^{-1}(g)$. Zbiór $\{\sigma\}$ jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa (i zero-wymiarową rozmaitością) natomiast $\hat{\lambda}$ jest ciągle, stąd twierdzenie o eksponecjalnej odpowiedniości (por. Spanier [1966]) daje ciągłość odwzorowania $\hat{\lambda} := E \circ (\hat{\lambda} \times id)_{\{\sigma\}}$ dla każdego σ . Tym samym złożenie

$$\beta_\sigma := \hat{\lambda} \circ \gamma_\sigma: J \rightarrow \Sigma, \text{ przy } \gamma_\sigma(t) := (\gamma(t), \sigma) \in M \times \{\sigma\}$$

jest ciągle. W tym miejscu potrzebne jednak jest nam ciągła różniczkowalność β_σ . Problem ten będzie rozwiązany jeśli dwu-punktowe odwzorowanie $E: Mor(\Sigma_g, \Sigma) \times \Sigma_g \rightarrow \Sigma$ będzie klasy C^1 . W rzeczywistości wystarcza dla naszych celów gładkość $E(\cdot, \sigma): Mor(\Sigma_g, \Sigma) \rightarrow \Sigma$, dla ustalonego σ . Oznaczmy, jeśli istnieje, przez $S_g(\Sigma) \subset \Sigma$ zbiór tych stanów, dla których $E(\cdot, \sigma)$ jest klasy C^1 i nazwijmy go dziedzina infinitezymalnej tworzącej układu ewolucyjnego przestrzeni stanów w punkcie g .

Aby móc postąpić dalej zrobmy następane

Założenie D. Dla każdego $g \in \mathcal{P}$ zbiór $\Omega_g(\Sigma)$ jest otwarty i niepusty.

Przyjmując oznaczenie $E_\sigma(m') := E(m', \sigma)$, wartość odwzorowania stycznego $\hat{b}_* = (E \circ (\hat{s} \times id_{\{0\}}))_* = E_{\sigma_*} \hat{s}_*$ w punkcie (m, σ) będzie dane przez

$$\hat{b}_{*(m, \sigma)} = E_{\sigma_*} \hat{s}_{*(m)} \hat{s}_{*m} : \mathcal{T}_m(\bar{M}) \rightarrow \mathcal{T}_{E_\sigma(\hat{s}(m))}(\Sigma),$$

gdzie

$$E_{\sigma_*} : \mathcal{T}(Y_\sigma) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma).$$

Dla wektora stycznego do β_σ otrzymujemy

$$(15.20) \quad \frac{d}{dt} \beta_\sigma(\tau) = E_{\sigma_*} \hat{s}(\delta(\tau)) \hat{s}_{*\delta} \frac{d\delta(\tau)}{dt}.$$

Przechodząc do początku krzywej β_σ osiągamy w argumentie cięcia \hat{s} punkt $\delta(0)$ leżący na brzegu $\partial \bar{M}$ rozmiatości \bar{M} , a tym samym, w myśl relacji (15.17), wielowartościowy operator $\hat{s}_{*\delta}$ oraz związek

$$(15.21) \quad \frac{d}{dt} \beta_\sigma(0) \in E_{\sigma_* \hat{s}(\delta(0))} \hat{s}_{*\delta} \frac{d\delta(0)}{dt},$$

gdzie jak poprzednio $m = \delta(d) \in \mathcal{L} \in \mathcal{H}(g)$. Tutaj prawa strona jest podzbiorem wiązki stycznego $\mathcal{T}_\sigma(\Sigma)$, gdyż $E(\hat{s}(\delta(0)), \sigma) = id_\Sigma \sigma$.

Uzyskany wyniki rządzi tylko początkową ewolucją stanu. Aby otrzymać równanie rządzące ewolucją stanu w dowolnej chwili t wykorzystajmy własności (15.8) i (15.9); wtedy uzyskamy

$$(15.22) \quad \beta_\sigma(t+h) = \int_{\delta(t+h)}^{t+h, 0} \sigma = \int_m^{t+h, 0} \sigma = \int_m^{t+h, t} \rho_t^0 \sigma = \int_m^{\rho_h} \sigma,$$

dla $0 \leq t \leq t+h \leq d$, $\sigma \in \hat{g}^{-1}(g)$ i $m \in \delta_0^{-1}(g) \cap M_d$. Wstawmy

$\delta_t : [0, d-t] \rightarrow M^+$ określone przez $\delta_t(d-t) = m_{[t, d]} = S_{td} m$ jako nową nić przechodzącą przez $m_{[t, d]}$ w $h = d - t$.

Wtedy z zależności (15.18) i (15.22) otrzymamy

$$(15.23) \quad \beta_{\sigma}(t+h) = \hat{z}(m_{[t, t+h]}) \int_m^{ptD} \sigma = \hat{z}(\delta_t(h)) \beta_{\sigma}(t) = E(\hat{z}(\delta_t(h)), \beta_{\sigma}(t)).$$

Biorąc pochodną względem h i przechodząc potem z h do zera przy użyciu \hat{z} i ze względu na (15.21) uzyskujemy

$$(15.24) \quad \frac{d\beta_{\sigma}(t)}{dt} \in E_{\beta_{\sigma}(t) \times \hat{z}(\delta_t(0))} \hat{z}_{*} \lambda(t) \left. \frac{d\delta_t(h)}{dh} \right|_{h=0},$$

gdzie $\lambda(t)$ oznacza kielik, do którego należy proces $m_{[t, t+h]}$

Zwróćmy uwagę ^{x/}, że $\delta_t(0) = m_{[t, t]} = \equiv (g(t)_{(0)}, 0) \in M_0, \hat{z}(\delta_t(0)) = id_{Z(g(t))}$, a więc $E(\hat{z}(\delta_t(0)), \beta_{\sigma}(t)) = \beta_{\sigma}(t)$.

W powyższym związku stan σ może być traktowany jako punkt początkowy dla krzywej $\beta_{\sigma}(t)$. Stąd jeśli określimy

$\sigma(\tau) := \beta_{\sigma}(\tau)$ dla $\tau \in [0, d]$, to $\sigma(0) = \sigma$ i wtedy otrzymany rezultat (15.24) może być sformułowany w postaci:

TWIERDZENIE 1. Jeśli założenia A-D są spełnione, to dla dowolnego $g \in \mathcal{P}$, $\sigma \in \Omega_g(\bar{Z})$ oraz $m \in \mathcal{L} \cap M_d$, gdzie $\lambda \in \Psi_g(0) := \Psi(0) \cap \delta_0^{-1}(g)$ ewolucja stanu $\sigma(t)$ wzdłuż procesu jest rządzona przez

$$(15.25) \quad \frac{d\sigma}{dt} \in E_{\sigma(t) \times \hat{z}(\delta_t(0))} \hat{z}_{*} \lambda(t) \left. \frac{d\delta_t(h)}{dh} \right|_{h=0}$$

z warunkiem początkowym

$$\sigma(0) = \sigma, \quad \lambda(0) = \lambda,$$

gdzie $\delta_t(h) := m_{[t, t+h]} \equiv S_{t+h} m \in \mathcal{L}(t)$. □

Zauważmy, że chwilowa wartość prawej strony (15.25) nie zależy od szczególnego procesu $m_{[t, t+h]}$ z kielika $\lambda(t)$, gdyż wartość $\frac{d\delta_t(h)}{dh}$ w $h=0$ jest taka sama dla wszystkich procesów z kielika $\lambda(t)$ i jest równa prawo-stronnej pochodnej procesu $m_{[t, t+h]}$ w zerze. Ponadto relacja (15.25) obowiązuje

x/ Symbol $g(t)_{(0)}$ oznacza proces o trwaniu zero z wartością $g(t)$.

dla $t \in [0, \epsilon]$ z $0 < \epsilon \leq d$, gdyż zbiór $\Omega_g(\Sigma)$ jest otwarty.

Sytuacja opisana twierdzeniem przypomina znany fakt z teorii równań ewolucji w przestrzeniach Banacha, gdzie półgrupy nieliniowych i nierozszerzających operatorów posiadają tworzące, którymi są wielowartościowe operatory dyssypatywne tj. podzbiory iloczynu kartezjańskiego.

Relacja (15.25) przyjmie postać równania w poniższych dwóch przypadkach:

- i/ istnieje granica $\lim_{h \rightarrow 0} \hat{\Sigma}_* \delta_t(h)$ i jest taka sama niezależnie od wyboru elementu $m_{[t, t+h]}$ z kielka $\mathcal{I}(t)$,
- ii/ istnieje granica $\lim_{h \rightarrow 0} \hat{\Sigma}_* \delta_t(h)$ i jest taka sama dla każdego elementu $m_{[t, t+h]} \in \delta_c^{-1}(m(t)) \equiv \delta_c^{-1}(g(t))$.

Przypadek ii) odpowiada sytuacji, gdy cięcie $\hat{\Sigma}$ może być gładko rozszerzone do $\mathcal{M} \cap \delta_c^{-1}(g(t))$ wzdłuż nici. Wtedy granica odwzorowania stycznego $\hat{\Sigma}_*$ zależy tylko od $g(t)$ i możemy, dla każdej pary $(g, \epsilon) \in \mathcal{P}_x \Sigma$ oraz punktu brzegu $n = (g_0, 0) \in \mathcal{M}_0$, takich że $\epsilon \in \hat{g}^{-1}(g)$ określić liniowe odwzorowanie

$$(15.26) \quad A_{g, \epsilon} : \mathcal{T}_n(\partial \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_\epsilon(\Sigma) \quad \text{przez} \quad A_{g, \epsilon} = E_{\epsilon, \hat{\Sigma}(n)} \hat{\Sigma}_{*n},$$

zwane infinitesimalną tworzącą ewolucyjnego układu przestrzeni stanów w (g, ϵ) . Przy jego pomocy i przy spełnieniu warunku ii) Twierdzenie 1 wraz z relacją (15.25) przyjmie następującą postać:

WNIOSEK 1. Jeśli istnieje gładkie rozszerzenie $x/$ cięcia $\hat{\Sigma}$ do punktów z \mathcal{M}_0 , to ewolucja stanu $\sigma(t)$ jest rządona przez równanie

$$(15.27) \quad \frac{d}{dt} \sigma(t) = A(g(t), \sigma(t)) \left. \frac{d \delta_t(h)}{dh} \right|_{h=0}$$

z warunkami $\sigma(0) = \sigma$, $\hat{g}(\sigma) = g(0)$, $\hat{g}(\sigma(t)) = g(t) = m(t)$, $\sigma \in \Omega_g(\Sigma)$, gdzie

$$\delta_t(h) = m_{[t, t+h]} \quad i$$

$x/$ Rozumiemy to w ten sposób: odwzorowanie $\hat{\Sigma}_*$ posiada graniczne wartości na \mathcal{M}_0 , kiedy punkty z \mathcal{M}_0 są osiągane wzdłuż nici. Ponadto te wartości nie zależą od nici a jedynie od punktu z \mathcal{M}_0 , w którym nić jest zaczepiona.

$$(15.28) \quad A: (\mathcal{P} \times \Sigma)_{\text{fit}} \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{J}(\partial \bar{M}), \mathcal{J}(\Sigma)) \quad \text{przy } A(g, \sigma) = A_{g, \sigma}$$

jest określony przez (15.26), gdzie $(\mathcal{P} \times \Sigma)_{\text{fit}} := \{(g, \sigma) \in \mathcal{P} \times \Sigma : \sigma \in \hat{g}^{-1}(g)\}$.

Ze względu na reprezentację wektora stycznego do rozmaitości \bar{M} (por. (13.7)) ostatnie równanie może być zapisane w bardziej przejrzystej postaci jak następuje

$$(15.29) \quad \frac{d\sigma(t)}{dt} = A_1(g(t), \sigma(t)) \frac{dg(t)}{dt} + A_2(g(t), \sigma(t)),$$

gdzie dla każdego $(g, \sigma) \in (\mathcal{P} \times \Sigma)_{\text{fit}}$ obiekt $A_1(g, \sigma)$ działa liniowo na prawostronną pochodną $dg(t)/dt$. Istnienie czionu A_2 , to skutek zależności wartości odwzorowania $\hat{\Sigma}_*$ od trwania procesu.

Wyprowadzone równanie (15.29) zostało uzyskane, jak sformułowaliśmy we wniosku 1, przy założeniu, że cięcie \mathcal{Z} (por. (15.14)) jest gładkie na $\mathcal{M}^+ \cup \mathcal{M}_0$.

Rozpatrzmy przypadek i), bardziej ogólniejszy. Zgodnie z nim granica $\lim_{h \rightarrow 0} \hat{\Sigma}_* \delta_{\mathcal{Z}}(h)$ istnieje i jest taka sama dla każdego procesu z kielku $\mathcal{Z}(t)$. Oznaczmy tę granicę jak poprzednio przez

$\hat{\Sigma}_* \mathcal{Z}(t)$, lecz teraz jest to jedno-wartościowe odwzorowanie $\mathcal{J}_{\hat{\Sigma}_* \mathcal{Z}(t)} \rightarrow \mathcal{J}_{\hat{\Sigma}_* \mathcal{Z}(0)}$ i możemy określić dla każdego $g \in \mathcal{P}, \sigma \in \Omega_g(\Sigma)$ oraz $m \in \mathcal{M}_0$ morfizm $\mathcal{J}_{\hat{\Sigma}_* \mathcal{Z}(t)}^{-1} \circ \mathcal{J}_{\hat{\Sigma}_* \mathcal{Z}(0)}^{-1} \circ \sigma^{-1}(g)$ i $t \in \mathcal{J}_g^{-1}(0)$

$$(15.30) \quad A_{\mathcal{Z}, \sigma} : \mathcal{J}_m(\partial \bar{M}) \rightarrow \mathcal{J}_\sigma(\Sigma), \quad \text{przy } A_{\mathcal{Z}, \sigma} := E_{\sigma_* \hat{\Sigma}_* \mathcal{Z}(t)}$$

Przy jego pomocy formułujemy:

WNIOSEK 2. Jeśli odwzorowanie styczne $\hat{\Sigma}_*$ naturalnie zdefiniowane i ciągłe na \mathcal{M}^+ posiada wartości graniczne na \mathcal{M}_0 , gdy punkty z \mathcal{M}_0 są osiągane wzdłuż nici i wartości te różnią się od kielku do kielku będąc stałe dla danego kielku, to ewolucja $\sigma(t)$ wzdłuż procesu $m \in \mathcal{M}^+$ jest rządzona przez

$$(15.31) \quad \frac{d\sigma(t)}{dt} = \tilde{A}_{\mathcal{Z}(t), \sigma(t)} \frac{d\mathcal{Z}_t(h)}{dh} \Big|_{h=0} \quad \text{przy } \sigma(0) = \sigma \in \Omega_g(\Sigma),$$

gdzie $\hat{g}(\sigma(t)) = g(t) = p_{\mathcal{P}}(m(t)) = m(t)$, $\delta_t[h] = m_{[t, t+h]} \in \mathcal{L}(t)$. \square

Jest oczywiście, że (15.31) jest postacią ogólniejszą od (15.27), gdyż kreslek $\mathcal{L}(t)$ oprócz $g(t)$ zawiera dodatkowe informacje (por. rzut Π_{σ} na końcu p.13).

Używając notacji podobnej do tej w (15.29), równanie (15.31) zapisujemy w postaci

$$(15.32) \quad \frac{d\sigma(t)}{dt} = \tilde{A}_1(\mathcal{L}(t), \sigma(t)) \frac{dg(t)}{dt} + \tilde{A}_2(\mathcal{L}(t), \sigma(t)),$$

gdzie dla każdego \mathcal{L} i σ obiekt $\tilde{A}_1(\mathcal{L}, \sigma)$ działa liniowo na prawo-stronną pochodną $\frac{dg(t)}{dt}$. Oba morfizmy \tilde{A}_1 oraz \tilde{A}_2 , tak jak morfizmy A_1 i A_2 występujące w (15.29), są ogólnie nieliniowe w swoich zmiennych. Ponadto wartości morfizmów \tilde{A}_2 oraz A_2 leżą w wiązce stycznej $\mathcal{T}(\Sigma)$.

Sposób zależności morfizmu \tilde{A} od pierwszego argumentu jest nadzwyczaj interesujące i jednocześnie decyduje o charakterze (materiale) ciała.

16. Komentarz i przykłady

Celem modelowania konstytutywnego jest odtworzenie obserwowanej relacji \mathcal{R} oraz przewidywanie przyszłej reakcji materiału ciała na wymuszenia z \mathcal{M} . Istnienie operatora ewolucji w przestrzeni stanów zagwarantowane Spostrzeżeniem 10 pozwala zastąpić morfizm materialny \mathcal{R} dwoma morfizmami: operatorem \hat{e} oraz poniżej określonym morfizmem materialnym \hat{S} , który wyznaczony przez \mathcal{R} działa z przestrzeni stanów Σ do przestrzeni reakcji \mathcal{J} . Tak więc określamy

$$(16.1) \quad \hat{S}: \mathcal{B} \rightarrow \text{Mor}(\Sigma, \mathcal{J}_{\mathcal{B}}) \text{ przez } \hat{S}(A)(\sigma) := \mathcal{R}(A)(\sigma, \hat{g}(\sigma))$$

dla każdego podciała $A \subset \mathcal{B}$, a także dla każdej cząstki $X \in \mathcal{B}$
 $\hat{S}(X)(\sigma) = \mathcal{R}(X)(\sigma, \hat{g}(\sigma)_{(x)})$, gdzie $\mathcal{J}_{\mathcal{B}} = \bigcup \{ \mathcal{J}_A \mid A \subset \mathcal{B}, X \in \mathcal{B} \}$.
 Stąd oraz z definicji \mathcal{R} wynikają własności

$$\hat{S}_A := \hat{S}(A) = \sigma_A \hat{S}(\mathcal{B}) \quad \text{dla każdego podciała } A \subset \mathcal{B}$$

oraz $\hat{S}_A(\hat{e}(\sigma, m)) = \mathcal{R}_A(\sigma, m)^f$,
 gdzie nie odróżniamy pary $(P, d) = m$ od $P \in M_d$. Tutaj f oznacza
 końcową wartość procesu reakcji $\mathcal{R}_A(\sigma, m)$, tj. $\mathcal{R}_A(\sigma, m)^f = \mathcal{R}_A(\sigma, m^d)$
 jeśli $m \in M_d$.

Jest oczywiste, że z formalnego punktu widzenia możliwa jest
 procedura odwrotna od tej tutaj zastosowanej. Polegałaby na
 określeniu \hat{e} oraz \hat{S} i przy ich pomocy-morfizmu \mathcal{R} . Wtedy
 poszlibyśmy drogą zaproponowaną przez Nolla [1972] w teorii
 lokalnej; w prezentowanej rozprawie - podobnie jak Perzyna i
 Kosiński [1973] - używaliśmy innego podejścia, a to dlatego, że po-
 jęciem pierwotnym był dla nas katalog obserwacji, tj. obserwo-
 wana relacja, dla której budowaliśmy odpowiednią przestrzeń stan-
 ów oraz morfizm \mathcal{R} realizujący tę relację. Wydaje się, że
 metoda tutaj zastosowana jest bliższa fizycznej obserwacji i
 mniej formalna. Podobne podejście do tego stosowanego tutaj pre-
 zentują Banfi i Fabrizio [1981]. Koncepcja przestrzeni stanu
 budowanego na obserwacji była wykorzystana przez Willemsa [1972].

Komentując wyprowadzone tutaj równanie ewolucji (15.32),
 wypada w tym miejscu wspomnieć, że wykorzystując podejście Nolla
 autorzy Šilhavy i Kratochvíl [1977] rozwinęli teorię niesprężysto-
 tego elementu materialnego z zakresem sprężystym, bazując na innym
 zbiorze założeń niż ten użyty w obecnej pracy. W efekcie uzyskali
 równanie ewolucji dla zmiennej stanu elementu ciała \mathcal{T}_X . W postaci
 równania tam wyprowadzonego występuje, podobnie jak i u nas, zależ-
 ność od kielka procesu, lecz w miejsce prawo-stronnej pochodnej
 pojawia się pochodna lewostronna. Wynik tych autorów wydaje się
 oddalać od oczekiwania i natury fizycznej zjawisk.

Wykorzystując schemat Nolla [1972] w zastosowaniu do nielep-
 kiego sprężysto-plastycznego elementu materialnego, Del Piero
 [1975] wyprowadził równanie ewolucji w przestrzeni stanów.

Uzyskany w obecnym wyprowadzeniu układ ewolucyjny w postaci
 relacji (15.25) ma swoich szczególnych poprzedników w postaciach
 równań ewolucji postulowanych w teoriach lokalnych materiałów
 sprężysto-plastycznych i sprężysto-lepkoplastycznych przez
 Halphena i Quoc Son Nguyena [1975] oraz Suqueta [1981]. W
 równaniach tam prezentowanych wykorzystuje się subróżniczki
 wypukłych funkcji dyssypacji.

W poniżej przedstawionych przykładach znajdzie miejsce zmodyfikowana struktura z wewnętrznymi zmiennymi stanu charakteryzująca się cząstkowymi równaniami ewolucji dla stanu, a zaproponowanych przez Perzynę [1980].

Spróbujmy przeanalizować kilka szczególnych przypadków:
Przypadek 1. Istnieje morfizm $\tilde{A} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ taki, że

$$\tilde{A}_i(\cdot, \cdot) = \tilde{A}_i(\pi_0(\cdot), \cdot) \quad \text{dla } i=1,2$$

gdzie $\pi_0: \mathcal{P}(0) \rightarrow \mathcal{P}, \hat{P}$ jest rzutem z p.13. Wtedy (15.32) przyjmie postać

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \tilde{A}_1\left(g(t), \frac{dg(t)}{dt}, \sigma(t)\right) \frac{dg(t)}{dt} + \tilde{A}_2\left(g(t), \frac{dg(t)}{dt}, \sigma(t)\right)$$

Formalnie oba wyrażenia prawej strony są zależne od pochodnej $\frac{dg}{dt}$. Jednakże zależność ta jest rozbita na dwie części, a przeprowadzone wyprowadzenie pokazuje, które morfizmy; cięcie i czy odwzorowanie E, są odpowiedzialne za nią.

W szczególności, ograniczając się w teorii lokalnej do tzw. materiałów nielepkich, dla których operator ewolucji \hat{e} ma własność x/

$$\hat{e}(\sigma, m) = \hat{e}(\sigma, \hat{\Psi}(m))$$

dla $m \in \mathcal{M}^+$, $\sigma \in \Sigma_{m_0}$ i dowolnego operatora przeskalowującego $\hat{\Psi}$ (por. p.13), uzyskuje się niezależności operatora \hat{e} , a stąd i cięcia \hat{z} od trwania procesu. Bliższa analiza wynikającej stąd symetrii cięcia \hat{z} prowadzi do istnienia morfizmu \hat{z} określonego na podzbiorze (rozmaitości) $\mathcal{B}(\mathcal{I}, \mathcal{P})$ przestrzeni Banacha $\mathcal{B}(\mathcal{I}, \mathcal{P})$ o własności

$$(16.2) \quad \hat{z}(m) = \hat{z}(P \circ \Psi)$$

dla każdego $\Psi \in \mathcal{W}$ oraz $m \in \mathcal{M}^+$, gdzie $P = p_{\hat{z}}(m)$, tzn. $m = (P, \text{dur } P)$, (por. p.13). Stąd wynika, że zamiast rozpatrywać cięcie określo-

x/ Poprawniej należałoby zapisać $\hat{e}(\sigma, \mathcal{P}) = \hat{e}(\sigma, P \circ \Psi)$.

ne na rozmaitości M wystarczy rozpatrzyć cięcie na rozmaitości $\mathcal{B}(I, \mathcal{P})$ o dodatkowej własności symetrii $\mathcal{Z}(R) = \mathcal{Z}(R \circ g_{\psi})$ dla dowolnej funkcji $g_{\psi} = \varphi^{-1} \psi$ przy $\psi, \varphi \in W$ (por. p.13). Jak się łatwo przekonać, wektor styczny do nici na rozmaitości $\mathcal{B}(I, \mathcal{P})$ przechodzącej przez punkt $R \in \mathcal{B}(I, \mathcal{P})$ jest \dot{R} . Stąd wnioskujemy, że o ile ma miejsce przypadek (16.2), to morfizm \tilde{A}_2 znika, zaś \tilde{A}_1 ma własność, dla każdej trójki $(g, \dot{g}, \sigma) \in \mathcal{P} \times \dot{\mathcal{P}} \times \Sigma$:

$$(16.3) \quad \tilde{A}_2(g, \xi \dot{g}, \sigma) = \tilde{A}_1(g, \dot{g}, \sigma) \quad \text{dla każdej liczby } \xi > 0.$$

SPOSTRZEŻENIE 12. Jeśli dla materiału nielepkiego zachodzi przypadek 1, to równanie ewolucji w przestrzeni stanów ma postać

$$(16.4) \quad \frac{d\sigma(t)}{dt} = \tilde{A}_1(g(t), \frac{dg(t)}{dt}, \sigma(t)) \frac{dg(t)}{dt},$$

gdzie morfizm \tilde{A}_1 ma własność (16.3). \square

Własność (16.3) wraz z liniowością $\tilde{A}_1(g, \dot{g}, \sigma)$ w działaniu na dg/dt sprawiają, że prawa strona (16.4) jest jednorodna stopnia jeden w $dg(t)/dt$. Jest to warunek konieczny, by równanie (16.4) opisywało ewolucję stanu materiału nielepkiego. \square

Zanim przejdziemy do rozpatrzenia następnego przypadku, przytoczymy przykłady możliwych realizacji przestrzeni stanów.

Pierwszy z nich jest zaczerpnięty z pracy autora [1983]. Przyjęto tam, że układ $\{\Sigma, \mathcal{P}, \mathbb{P}, \hat{g}\}$ formuje wiązkę włóknistą klasy C^1 , w której typowe włókno \mathbb{P} jest (domkniętym) podzbiorem przestrzeni Banacha, zaś $\hat{g}: \Sigma \rightarrow \mathcal{P}$ jest rzutem wiązki. Przy tych założeniach okazuje się, że rzut \hat{g} jest rozwióknieniem i istnieje rodzina $\{\hat{e}^d: (\Sigma \times M_d)_{\hat{g}t} \rightarrow \Sigma^{[0, d]}; d > 0\}$ funkcji podnoszących dla \hat{g} , która może być pomocna do wykazania istnienia operatora ewolucji. W przypadku nielepkiego elementu

x/ Tutaj rozpatrywany był przypadek materiału całkowicie nielepkiego. Interesującą klasyfikacją i charakterystykę materiałów prostych z pamięcią częściowo nielepkich przeprowadził Rychlewski [1974].

materialnego przyjęte założenia wystarczają do konstrukcji operatora $\hat{\epsilon}$. W omawianym przykładzie nie wykorzystywano istnienia morfizmu materialnego.

Szczególnym przypadkiem odpowiadającym założeniu o strukturze włóknistej przestrzeni stanów jest trywialna wiązka:

$$(16.5) \quad \Sigma = \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

W takim przypadku Perzyna [1971] nazywa zbiór \mathcal{P} przestrzenią metody przygotowania. Jeśli ograniczymy się do teorii lokalnej, to budowana struktura odnosi się do typowego elementu materialnego \mathcal{T}_X , gdzie $X \in \mathcal{B}$. Wtedy dobrym wyborem wielkości fizycznych tworzących elementy zbioru \mathcal{P} są trójki $(g_X, \vartheta, \nabla \vartheta)$, gdzie $g_X \in \mathcal{G}_X = \text{Sym}^2(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X)$ jest wewnętrzną miarą deformacji, ϑ - temperatura, zaś $\nabla \vartheta$ - istotnym gradientem temperatury (por. (12.1)).

Elementy zbioru \mathcal{P} mogą być różnie dobierane. Raz mogą to być klasy równoważności przeszłych historii wielkości fizycznych wchodzących w skład elementów zbioru \mathcal{P} , a kiedy indziej zespół parametrów fizycznych - makroskopowych, których zadaniem jest odtworzenie zjawisk zachodzących na poziomie mikro. Wtedy dla tych parametrów przyjmuje się nazwę wewnętrznych zmiennych stanu lub parametrów wewnętrznych.

Dość liczne przypadki, w których rzeczywiste materiały mogły być opisane w ramach termodynamiki kontinuum przez odpowiedni dobór parametrów wewnętrznych i równań ewolucji je opisujących, sprawiły, że termodynamika z wewnętrznymi zmiennymi stanu cieszy się dużym powodzeniem (por. książkę Perzyny [1978] oraz prace Kratochvíla, Krönera, Teodosiu, Mroza, Valanis i innych w pozycji pod redakcją Sawczuka [1974]).

Istniejące modele materiałów opierające się na rozkładzie (16.5) w większości dotyczą teorii lokalnej z wewnętrznymi zmiennymi stanu.

Przedstawiany formalizm bez kłopotów może być zastosowany w przypadku teorii lokalnej, lecz wtedy utracimy spójność z nie-lokalnym podejściem poprzedniego rozdziału.

Istnieją w literaturze próby nielokalnego ujęcia własności materiałowych, którego dobrym omówieniem jest artykuł Edelena

[1976]. Ale zarówno u Edelena, jak i w cytowanych przez niego pracach nielokalność jest w zasadzie rozumiana jako pamięć przestrzenna materiału (por. Morgan [1975]).

Celem naszym, jak wspomnieliśmy we wstępie, było uwzględnienie oprócz efektów przestrzennie nielokalnych złożone efekty nielokalności w czasie. Ich dobrym przykładem jest termodynamiczna teoria z wewnętrznymi zmiennymi stanu, których ewolucja jest rządzona cząstkowymi równaniami różniczkowymi. Jedną z pierwszych prób budowania w ramach tej teorii modelu ciał niesprężystych z imperfekcjami była praca Perzyny [1980]. Podejście Perzyny było odmienne od prezentowanego tutaj.

W swoim doktoracie Frischmuth [1982] przedstawił próbę ujęcia zmodyfikowanej teorii z parametrami wewnętrznymi w ramach ogólniejszej teorii modeli konstytutywnych. Zbadał ograniczenia termodynamiczne na nią nakładane przez drugie prawo termodynamiki oraz dokonał analizy stabilności rozwiązań równań teorii.

Nielokalny charakter zmodyfikowanej teorii z parametrami wewnętrznymi zostanie rozpatrzony w następującym przykładzie.

Przypadek 2. Przestrzeń stanów jest produktem typu (16.5), w którym każde $g \in \mathcal{P}$ jest parą (d, ϑ) , gdzie d jest metryką w umiejscowieniu aktualnym (por. (1.1)), zaś ϑ polem temperatury, natomiast każde $\omega \in \mathcal{P}$ jest zespołem parametrów wewnętrznych.^{x/}

Morfizmy w równaniu ewolucji mają wtedy naturalne rozkłady na składowe związane z elementami odpowiednio zbiorów \mathcal{P} oraz \mathcal{P} , tzn.

$$\tilde{A}_i = \left(\tilde{A}_i, \tilde{A}_i \right) \quad \text{skoro } \mathcal{G}(T) = (d\chi_T, \vartheta_T, \omega_T)$$

w procesie termo-kinematycznym (ϑ_T, χ_T) .

Łatwo widać, że $\tilde{A}_1 = id$, zaś $\tilde{A}_2 = 0$. Dla A_i postuluje się następujący rozkład

$$\tilde{A}_1 = 0 \quad \text{oraz} \quad \tilde{A}_2(\chi(t), \mathcal{G}(t)) = \mathcal{L}(g_t, \vartheta_t, \omega_t),$$

^{x/} W ogólności ω nie jest polem wektorowym na \mathcal{B} , lecz kolekcją pól tensorowych różnych walencji. Dla naszych celów wystarczy założyć, że wartości ω należą do wiązki wektorowej nad \mathcal{B} .

gdzie \mathcal{L} jest nieliniowym operatorem różniczkowania m -tego rzędu, zaś $g_T \in \mathcal{G}$. W efekcie prowadzi to do następującego równania ewolucji

$$(16.6) \quad \frac{d\omega(T)}{dT} = \mathcal{L}(g_T, \nu_T, \omega(T)).$$

Aby przygotować podstawę do analizy badań prowadzonych w dalszych częściach rozprawy, przedstawimy pełen układ równań bilansu z równaniem ewolucji zapisanym w dogodnej postaci.

Ograniczając się do obszaru $\mathcal{B}_{\mu_T}^0$, równania bilansu mogą być powtórzone za wyrażeniami (9.33)₁, (9.34)₁ oraz (9.39) przy warunku (9.40)₁. Ze względu na to, że będziemy w dalszej części dyskutować rozwiązania problemów początkowych, wygodnie jest zapisać te równania w umiejscowieniu początkowym.

Jeśli proces $\alpha: \Gamma_X \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$ odbywa się na przedziale $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$, to wygodnie jest po wyborze układu odniesienia $\{\mathcal{E}, \beta\}$ i wprowadzeniu ruchu $\mu_{\tau} = \beta_{\tau}' \circ \alpha_{\tau}$, dokonać transformacji równań bilansu do odniesienia μ_{τ_0} . Jeśli przez

$$(16.7) \quad \hat{u}: [0, \sigma] \times \mu_{\tau_0}(\mathcal{B}) \rightarrow \bigcup \{ \mu_{\tau}(\mathcal{B}) : \tau \in \Gamma_{\mu} \}$$

oznaczymy przemieszczenia ciała względem umiejscowienia początkowego μ_{τ_0} , to możemy wprowadzić dla każdego t tensor przemieszczenia

$$(16.8) \quad F(\mu_{\tau_0}(X), t) = \text{Grad } \hat{u}(\mu_{\tau_0}(X), t) := \mu_{\tau_0+t} * X (\mu_{\tau_0} * X)^{-1}$$

Porównując ten związek z (4.2) widzimy, że rolę występującego tam umiejscowienia odniesienia elementu \mathcal{T}_X pełni $\mu_{\tau_0} * X$, przy czym umiejscowienia odniesienia różnych elementów są wartościami odwzorowania stycznego $\mu_{\tau_0} *$. Mówimy wtedy, że zostało podane pole umiejscowienia odniesienia. Jeśli dodatkowo określimy pole elementu objętości j_t dla każdej chwili $t \in [0, \sigma]$ przez

$$j_t(\mu_{\tau_0}(X))^2 := \det(\text{Grad } \hat{u}(\mu_{\tau_0}(X), t)),$$

to możemy zdefiniować tensor naprężenia Poli-Kirchhoffa

$$(16.9) \quad \tilde{T}_{\mu_{T_0}}(\mu_{T_0}(X), t) := \int_t T_{\mu_{T_0+t}}(\mu_{T_0+t}(X), T_0+t) F^T(\mu_{T_0}(X), t)^{-1},$$

gdzie $T_{\mu_{T_0+t}}$ jest tensorem Cauchy'ego i dla wartości zapisu opuszczając będziemy argumenty funkcji. Podobnie przenosimy wektor strumienia ciepła q_{μ_T} do umiejscowienia początkowego

$$(16.10) \quad \tilde{q}_{\mu_{T_0}}(t) := \int_t q_{\mu_{T_0+t}} (F^T(t))^{-1}.$$

Strumień entropii jako element $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ podlega temu samemu prawu przeniesienia jak q . Przy zachowaniu masy (por. (9.39)) element objętości \int_t wiąże gęstości masy w umiejscowieniach μ_{T_0+t} i μ_{T_0} związkiem

$$(16.11) \quad \rho_0 := \rho_{\mu_{T_0}} = \rho_{\mu_{T_0+t}} \int_t.$$

Wtedy równania bilansu (9.33) i (9.39) przeniesione do μ_{T_0} przyjmą postać

$$(16.12) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_0 v - \text{Div} \tilde{T} = \rho_0 b,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \varepsilon + \frac{1}{2} v \cdot v) - \text{Div} (v \tilde{T} - \tilde{q}) = \rho_0 (b \cdot v + r_c),$$

gdzie opuściliśmy wskaźniki t oraz μ_T , przy występujących wielkościach. Zauważmy, że w obu związkach zmiennymi niezależnymi jest położenie cząstki w umiejscowieniu μ_{T_0} oraz t . W szczególności pole prędkości v jest zdefiniowane przy pomocy μ_T następująco

$$(16.13) \quad v(\mu_{T_0}(X), t) = \dot{\mu}_{T_0+t} \circ \mu_{T_0}^{-1}(X).$$

Stąd między przemieszczaniem \hat{u} a polem v zachodzi następujący związek

$$\frac{\partial \hat{u}(x, t)}{\partial t} = v(x, t),$$

gdzie

$$(16.14) \quad x := \mu_{\tau_0}(X).$$

W następnym rozdziale będziemy używać wektora przemieszczenia $\underline{u}: \dot{\mu}_{\tau_0}(\mathcal{B}) \times [0, \tau] \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E})$ określonego związkami

$$(16.15) \quad \underline{u}(\mu_{\tau_0}(X), t) := \hat{u}(\mu_{\tau_0}(X), t) - \mu_{\tau_0}(X).$$

Wtedy oczywiste są związki

$$(16.16) \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = v \quad ; \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Aby przejść do równania ewolucji, zastąpimy niezmiennicze (istotne) parametry wewnętrzne ich odpowiednikami w umiejscowieniu początkowym, tak jak istotny tensor naprężenia $S(X, t)$ w ruchu μ jest zastępowany przez tensor \tilde{T} w umiejscowieniu początkowym zgodnie z przepisem

$$(16.17) \quad S(X, t) = j_t^{-1} M_X^*(t) \tilde{T}(x, t) F^T(x, t) M_X^*(t)^{-1},$$

gdzie użyliśmy (16.9) oraz oznaczenia (16.14) wraz z

$$(16.18) \quad M_X(t) := \mu_{\tau_0+t} \circ \mu_X.$$

Wydzielając, jeśli istnieje, w operatorze \mathcal{L} człon lokalny l_0 , tzn. człon nie zawierający różniczkowania, możemy równanie ewolucji zapisać w postaci

$$(16.19) \quad \frac{\partial \omega(t)}{\partial t} - \mathcal{L}_\pi(F_t, \vartheta_t, \omega_t; \mu_{\tau_0}) = l_0(F_t, \vartheta_t, \nabla \vartheta_t, \omega_t; \mu_{\tau_0}),$$

gdzie \mathcal{L}_π jest ogólnie nieliniowym operatorem różniczkowym.

Jawne wpisanie zależności od μ_{τ_0} wynika z podstawienia

$$(16.20) \quad g(X, T_0 + t) := M_X^*(t).$$

Przyjmując notację z definicji morfizmu, operator L_r oraz morfizm l_0 są obrazami swoich odpowiedników w umiejscowieniu

μ_{T_0} .
Stąd w miejsce $l_0(F, \vartheta, \nabla \vartheta, \omega, \mu_{T_0})$ powinniśmy napisać $l_{\mu_{T_0}}(F, \vartheta, \nabla \vartheta)$, gdzie pola F, ϑ, ω są określone na $\mu_{T_0}(B)$.

Nie wypisana dotąd postać morfizmu konstytutywnego \hat{S} sprowadza się do pola operatora konstytutywnego działającego na wartościach pól $g, \vartheta, \nabla \vartheta$ oraz ω , tzn. zakładamy, że istnieje morfizm $\tilde{S}: \Sigma \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{R}^B \times \mathcal{J}^*(B) \times \mathcal{V} \times \mathcal{B}$ oraz morfizm materialny $\tilde{S}: \mathcal{B} \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{V}, \mathcal{R}^B)$ takie, że

$$\hat{S}(X) = \tilde{S}(X) \circ \mathcal{D}_{TX} \tilde{S}, \quad X \in \mathcal{B}.$$

W efekcie obecne założenia sprowadzają się do lokalnych związków konstytutywnych w postaci

$$(16.21) \quad \begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \tilde{\mathcal{T}}_{\mu_{T_0}}(F, \vartheta, \nabla \vartheta, \omega, x), \quad \varepsilon = \hat{\varepsilon}_{\mu_{T_0}}(F, \vartheta, \nabla \vartheta, \omega; x) \\ \eta &= \hat{\mu}_{\mu_{T_0}}(F, \vartheta, \nabla \vartheta, \omega; x) \quad q = \hat{q}_{\mu_{T_0}}(F, \vartheta, \nabla \vartheta, \omega; x). \end{aligned}$$

Jeśli dyskutujemy nieprzewodnik ciepła, to $\hat{Q} \equiv 0$ przy $\nabla \vartheta \equiv 0$ w zmiennych stanu występuje entropia; właśnie ten przypadek zostanie rozpatrzony w następnym rozdziale, gdzie uprościmy równanie ewolucji stawiając zero w miejsce operatora L_r . Do cząstkowego równania ewolucji powrócimy w rozdziale czwartym.

17. Defekty modelowania konstytutywnego

Przed zamknięciem tego rozdziału przeprowadzimy heurystyczną dyskusję koncepcji stanu morfizmu materialnego, tj. pojęć wprowadzonych na poprzednich stronach.

Ze względu na nielokalność w rozważaniach tutaj prowadzonych użyte pojęcia nie mogą być traktowane identycznie z tymi poja-

wiającymi się w teoriach lokalnych, gdzie wszystkie wielkości fizyczne jak i relacje między nimi zachodzące są ograniczone do X punktu ciała i jego infinitezymalnego otoczenia \mathcal{T}_X .

Rzeczywisty eksperyment mechaniczny, czy też termo-mechaniczny, jest przeprowadzany z reguły na próbce o skończonych rozmiarach, a wielkości fizyczne są mierzone na brzegu lub w wybranych punktach próbki.

Przy budowaniu relacji konstytutywnych i formułowaniu katalogu eksperymentów teorii lokalnej całej klasy opisanych eksperymentów wybiera się zazwyczaj te, które z dużym prawdopodobieństwem mogą być traktowane w całości lub w części próbek jako eksperymenty z jednorodnymi rozkładami mierzonych wielkości (parametrów) fizycznych. Dodatkowe założenie o jednolitości materialnej próbki, tzn. założenie, że żadna cząstka materiału próbki nie jest wyróżniona ze względu na swoje cechy - własności termo-mechaniczne, domyka zbiór postulatów teorii lokalnej:

W podejściu globalnym stajemy przed sytuacją dużo trudniejszą. Z zasady interesują nas te rozkłady wielkości fizycznych, które nie są jednorodne. Dodatkowo nie zamierzamy a priori zakładać, że wszystkie cząstki ciała są materialnie jednakowe. W końcu niejednorodność rozkładów wraz ze skończonością rozkładów badanych próbek ciał nakazują uwzględnić w analizie uniwersalne prawa bilansu, którym podlegają badane obiekty fizyczne. Ten właśnie aspekt zagadnienia z reguły nie uwzględniały w teoriach lokalnych nakazuje większą czujnością przy formowaniu i korzystaniu z katalogu obserwacji. Formowanie katalogu na potrzeby teorii globalnej ma jeszcze jeden rys charakterystyczny. W realnym eksperymencie nie jesteśmy zazwyczaj w stanie, jak to wspomnieliśmy wyżej, zmierzyć rozkładu danej wielkości fizycznej w całej próbce. Z drugiej strony do analizy modelowej potrzebne nam są rozkłady w całym ciele. Powstaje pytanie - skąd je brać? Są dwie możliwości. Pierwsza: otrzymywane z eksperymentu pomiary dokonane w wybranych punktach ciała (próbki) przedłużać, tj. rozszerzać na pozostałe punkty, tak by otrzymać pola na ciele (próbce). Oczywiście, że przedłużać można na nieskończenie wiele sposobów, ale raz wybrane kryterium uciągania powinno być konsekwentnie stosowane przy formułowaniu katalogu eksperymentów.

Druga możliwość, to uzupełnienie eksperymentu fizycznego obróbką numeryczną, polegającą na znalezieniu rozwiązań równań bilansu dla próbki, znając rozwiązania w wybranych punktach. dzięki otrzymanym z eksperymentu pomiarom.

W pewnym sensie druga metoda jest lepsza od pierwszej, ale stosując ją musimy z góry określić rodzaj oddziaływań i zjawisk, które zamierzamy uwzględnić, gdyż od nich zależy postać równań bilansu użytych do obliczeń.

W stosowaniu obu metod należy się liczyć z niejednoznacznością uzyskanych (ciągłych) rozkładów wielkości fizycznych, które mogą się następnie pojawić w katalogu obserwacji. Jest to problem, którego rozwiązanie nie wydaje się możliwe na obecnym etapie wiedzy. Ta niejednoznaczność wraz z ograniczoną dokładnością aparatury badawczej i komputerów ^{x/} jeszcze długo będą hamulcami w adekwatnym formowaniu konkretnych równań konstytutywnych.

Mając to wszystko na uwadze stwierdzamy, że hipoteza niepełnej rozróżnialności przestrzeni stanów, sformułowana w p.14, nie uwzględnia wszystkich defektów modelowania konstytutywnego.

Skoro część, jeśli nie większość obserwacji z katalogu, nie jest rzeczywista ^{xx/}, budowane na ich podstawie związki konstytutywne - morfizmy materialne - mogą dawać wyniki często odbiegające od rzeczywistości. Stąd ważną rolę powinny odgrywać kryteria urealnijające budowane i otrzymywane związki charakteryzujące materiał ciała.

Obok eksploatowanej zasady względności Galileusza, podobną rolę może pełnić już wspomiana w rozdziale 1 zasada niezależności własności materialnych od nałożonego sztywnego obrotu ciała. Nie będziemy jej dalej dyskutować, odwołując się do uwag zrobionych w p.7, zwracając jedynie uwagę, że w przeciwieństwie do roli, jaką ona pełni w teorii lokalnej, jej zastosowanie w sformułowa-

x/ Na dodatek te ostatnie w żaden sposób nie chcą jeszcze podawać ciągłych rozkładów wartości funkcji.

xx/ Porównaj dyskutowane dwie metody "uciąglenia" pomiarów w próbce po zmiennej x , nie wspominając o potrzebie różnych metod "uciąglenia" w czasie.

niu globalnym równań teorii może być dużo mniejsze. Jej główna rola to analiza zlokalizowanych do punktów ciała obrazów morfizmów materialnych w umiejscowieniach. W przypadku sformułowania niezmienniczego, tj. na ciele \mathfrak{B} i w miarach niezmienniczych, zasada ta jest z reguły automatycznie spełniona.

Jest jeszcze trzecie - nie wspomiane dotąd-kryterium urealnienia budowanych związków fizycznych równań ewolucji, a zwane drugim prawem termodynamiki. Przyjmując sformułowanie tego kryterium w postaci żądania, by każda para (P, Z) , reprezentująca rozwiązanie równań bilansu i równania ewolucji w wybranej przestrzeni stanów $x/$, była zgodna z drugim prawem termodynamiki zapisanym w postaci nierówności produkcji entropii, otrzymujemy zespół ograniczeń na morfizm materialny oraz operator reakcji \hat{S} i morfizmy występujące w równaniu ewolucji.

W dalszej części rozprawy wrócimy do tej kwestii w kilku miejscach. Rozdział czwarty przyniesie głębszą analizę roli drugiego prawa termodynamiki jako kryterium stabilności rozwiązań słabych.

x/ Wybierając przestrzeń stanów, dokonaliśmy specyfikacji morfizmu \mathcal{R} i morfizmu reakcji \hat{S} .

III. Istnienie i ciągła zależność rozwiązania problemu Cauchy'ego w termo-niesprężystości

Przygotowaniu ogólnej strukturą równania ewolucji ciała dysypatywnego możemy przystąpić do jakościowej analizy szczególnych realizacji tego równania.

Ze względu na stopień trudności i istniejący aparat matematyczny jesteśmy zmuszeni ograniczyć się w tym rozdziale do twierdzenia o istnieniu rozwiązania w obszarze nieograniczonym.

Przejdźmy do zasadniczego wyniku tej części pracy, którym jest twierdzenie o istnieniu rozwiązania problemu Cauchy'ego.

Nieliniowość oraz hiperboliczny charakter równań uniemożliwiają uzyskania globalnego w czasie rozwiązania klasycznego. Rozwiązanie problemu początkowego będzie istniało dla małego odcinka czasu i na całym \mathbb{R}^n . Do tego wymagane jest:

- odpowiednie zachowanie się wartości początkowej rozwiązania dla $|x|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty$, oraz

- odpowiednia regularność współczynników funkcyjnych równania.

Doświadczenia z nieliniowymi równaniami różniczkowymi wskazują, że najbardziej dogodnymi klasami funkcji, w których należy szukać rozwiązań równań quasi-liniowych, są przestrzenie Sobolewa H^s (typu \mathcal{L}^2) o stosunkowo dużym wykładniku s . Duży wykładnik s zapewnia istnienie rozwiązania klasycznego, tzn. w sensie

mocnym. W szczególności udawadniane poniżej twierdzenie stanowi, że poszukiwane w rozwiązaniu pole prędkości cząstek będzie w klasie $C([0, T], \mathcal{M}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ o ile v_0 - prędkość

początkowa - spełnia warunek $v_0 \in H^s$, przy $s > \frac{n}{2} + 1$. To oznacza, że w przypadku problemu przestrzennego, gdy $n = m = 3$, rozwiązanie v będzie należeć do $C([0, T], C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$ o ile $s > 2,5$.

Założenia dotyczące współczynników funkcyjnych równania są następstwem użytej do dowodu metody opartej na twierdzeniu o punkcie stałym dla odwzorowań zwężających. Najpierw dowodzi się, istnienia rozwiązania równania liniowego, w którym współczynniki

są funkcjami zmiennych niezależnych i nie zależą od rozwiązania. Twierdzenie o istnieniu dla takiego przypadku opiera się na uogólnionej przez Kato [1970, 1973] wersji twierdzenia Hille - Phillipsa-Yosida'y o półgrupach operatorów, a obejmującej abstrakcyjne równania ewolucji z jawną zależnością od czasu. Zapewnia ono taką gładkość rozwiązania jak gładkie są współczynniki i warunki początkowe.

Następnym krokiem jest zbudowanie rodziny równań liniowych sparametryzowanej elementami z pewnej kuli z przestrzeni rozwiązań, zawierającej warunki początkowe i wykazanie, że rozwiązania tych równań z tym samym warunkiem początkowym pozostają w tejże kuli. Przy odpowiednio dobranym wspólnym przedziale czasowym istnienia rozwiązań, odwzorowanie, przyporządkowujące elementowi kuli rozwiązanie odpowiadające mu równania, staje się odwzorowaniem zwięzającym. Punkt stały odwzorowania jest poszukiwanym rozwiązaniem problemu z wyjściowym nieliniowym systemem równań różniczkowych.

18. Problem Cauchy'ego dla quasi-liniowego abstrakcyjnego równania ewolucji

Przytoczmy podstawowe dla naszych celów twierdzenie Hughesa -Kato-Marsdena w wersji nam odpowiadającej.

TWIERDZENIE (Hughes-Kato-Marsden [1977]). Niech

$$(18.1) \quad \frac{dU}{dt} + A(t, U)U = f(t, U) \quad 0 \leq t \leq T, \quad U(0) = \varphi$$

będzie abstrakcyjnym problemem Cauchy'ego sformułowanym w refleksyjnej i ośrodkowej przestrzeni Banacha \tilde{Y} , gdzie dla każdego t i U obiekt $A(t, U)$ jest liniowym (na ogół nieograniczonym) operatorem w \tilde{Y} , natomiast f jest funkcją na $[0, T] \times \tilde{Y}$ w \tilde{Y} .

Niech będą dane ponadto dwie inne refleksywne i óśrodkowe przestrzenie Banacha \tilde{X} oraz \tilde{Z} takie, że

$$\tilde{Y} \subset \tilde{X} \subset \tilde{Z}$$

i powyższe zanurzenia są ciągłe oraz gęste. Jeśli przez $\tilde{N}(\tilde{Z})$ oznaczymy zbiór wszystkich norm równoważnych normie $\|\cdot\|_{\tilde{Z}}$ przestrzeni \tilde{Z} , zmetryzowany funkcją odległości \wp_Z

$$(18.2) \quad \wp_Z(\|\cdot\|_{\alpha_1}, \|\cdot\|_{\alpha_2}) = \ln \max \left\{ \sup_{0 \neq z \in \tilde{Z}} \frac{\|z\|_{\alpha_2}}{\|z\|_{\alpha_1}}, \sup_{0 \neq z \in \tilde{Z}} \frac{\|z\|_{\alpha_1}}{\|z\|_{\alpha_2}} \right\}$$

to wymagamy istnienia dodatkowo trzech obiektów N , S , oraz otwartego zbioru $\tilde{W} \subset \tilde{Y}$ o następujących własnościach, przy dowolnych $t, t' \dots \in [0, \pi]$ oraz $w, w' \dots \in \tilde{W}$:

- (i) istnieją stałe dodatnie λ_N i μ_N takie, że funkcja $N: \tilde{W} \rightarrow \tilde{N}(\tilde{Z})$ spełnia dwa warunki

$$\wp_Z(N(w), \|\cdot\|_{\tilde{Z}}) \leq \lambda_N \quad \text{i} \quad \wp_Z(N(w'), N(w)) \leq \mu_N \|w - w'\|_{\tilde{X}};$$

- (ii) istnieje stała β taka, że dla każdego $w \in \tilde{W}$ operator $A(w)$ jest infinitesimalnym generatorem quasi-związanej półgrupy typu β i klasy C^0 w $\tilde{Z}_{N(w)}$, gdzie $\tilde{Z}_{N(w)}$ oznacza przestrzeń Banacha $\{\tilde{Z}, \|\cdot\|_{N(w)}\}$,

- (iii) obiekt S jest izomorfizmem \tilde{Y} na \tilde{X} ,

- (iv) istnieją dodatnie stałe λ_E i μ_E takie, że funkcja $E: \tilde{W} \rightarrow \text{lin}(\tilde{Z}, \tilde{Z})$ ma własności

$$SA(w)S^{-1} = A(w) + E(w) \quad \text{i} \quad \|E(w)\|_{\tilde{Z}, \tilde{Z}} \leq \lambda_E, \quad \|E(w) - E(w')\| \leq \mu_E \|w - w'\|,$$

gdzie $\text{lin}(\tilde{Z}, \tilde{Z})$ oznacza zbiór wszystkich liniowych ograniczonych operatorów w \tilde{Z} ;

- (v) istnieją stałe dodatnie λ_A i μ_A takie, że funkcja

$$A(\cdot): \tilde{W} \rightarrow \text{lin}(\tilde{Y}, \tilde{Z})$$

spełnia dwa warunki

$$\|A(w)\|_{\tilde{Y}, \tilde{Z}} \leq \lambda_A \quad ; \quad \|A(w) - A(w')\|_{\tilde{Y}, \tilde{Z}} \leq \mu_A \|w - w'\|_{\tilde{Z}},$$

(vi) istnieje zbiór \mathcal{U} gęsty w \tilde{W} taki, że dla każdego $y \in \mathcal{U}$

$$A(w)y \in \tilde{Y} \quad ; \quad \|A(w)y\|_{\tilde{Y}} \leq \lambda_0$$

z pewną dodatnią stałą λ_0 , ogólnie zależną od y ,

(vii) istnieją stałe dodatnie λ_f i μ_f takie, że funkcja
 $f: [0, T] \times \tilde{W} \rightarrow \tilde{Y}$ spełnia

$$\|f(t, w)\|_{\tilde{Y}} \leq \lambda_f \quad ; \quad \|f(t, w) - f(t, w')\|_{\tilde{Y}} \leq \mu_f \|w - w'\|_{\tilde{Z}}$$

oraz $t \mapsto f(t, w)$ jest ciągła w normie $\|\cdot\|_{\tilde{Y}}$.

Przy warunkach (i) - (vii) następująca teza jest prawdziwa:
 dla każdego $\phi' \in \tilde{W}$ istnieje otoczenie $V_{\phi'} \subset \tilde{Y}$ oraz dodatnia liczba $T' \leq T$ takie, że dla każdego warunku początkowego ϕ w $V_{\phi'}$ problem Cauchy'ego (18.1) ma jednoznaczne rozwiązanie $t \mapsto U(t)$ o własnościach

$$U(\cdot) \in C^0([0, T'], \tilde{W}) \cap C^1([0, T'], \tilde{X}),$$

przy czym T' może zależeć od wszystkich stałych występujących w warunkach (i) - (vii) oraz od $R_{\phi'} = \text{dist}(\phi', \tilde{Y} - \tilde{W})$. Ponadto odwzorowanie $\phi \rightarrow U(t)$ z \tilde{W} do \tilde{Y} jest ciągłe w normie $\|\cdot\|_{\tilde{Y}}$ jednostajnie w $t \in [0, T']$

Uwaga. W oryginalnej wersji twierdzenia autorzy dopuszczali jawną zależność operatora A oraz funkcji N i E od czasu, zakładając jednocześnie odpowiednie warunki regularności tych zależności.

18.1 Problem Cauchy'ego w termo-niesprężystości bez przewodnictwa ciepła z wewnętrznymi zmiennymi stanu

Do sformułowania problemu Cauchy'ego przypomnijmy podstawowe równania

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \text{Div } \tilde{\mathbb{T}} + \rho_0 \underline{b} \quad \rho_0 \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial t} = \tilde{\mathbb{T}} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} + \rho_0 \underline{r}_e$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \hat{l}_0(H, \eta, \omega) \quad , \quad \rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} \geq \rho_0 r_e$$

przy założeniu znikającego strumienia ciepła \underline{q} oraz zależności funkcji konstytutywnych naprężenia $\hat{\mathbb{T}}$, energii wewnętrznej $\hat{\underline{\varepsilon}}$ oraz temperatury $\hat{\underline{v}}$ od tych samych zmiennych H , η i ω , które jawnie zostały wypisane pod funkcją \hat{l}_0 prawej stronie kinetycznego równania dla zmiennych wewnętrznych ω . Funkcje konstytutywne mogą jawnie zależeć od cząstki, tj. $x \in \mu_{T_0}(\mathcal{B})$.

Wprowadzona miara deformacji w postaci tensora przemieszczenia $\underline{H} := \nabla \underline{u}$ obok przyjętej dla tego rozdziału umowy, że występująca tutaj entropia jest sprowadzona do zera w stanie równowagi, tak jak zmienne wewnętrzne, oznaczają, że

$$\hat{l}_0(0, 0, 0) = 0, \quad \hat{\mathbb{T}}(0, 0, 0) = 0, \quad \hat{\underline{\varepsilon}}(0, 0, 0) = 0.$$

Procesy (rozwiązania) gładkie będą zgodne z nierównością termodynamiczną C-D wyrażającą drugie prawo termodynamiki wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\tilde{\mathbb{T}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\underline{\varepsilon}}}{\partial \underline{H}}, \quad \underline{v} = \frac{\partial \hat{\underline{\varepsilon}}}{\partial \eta} \quad \text{oraz} \quad - \frac{\partial \hat{\underline{\varepsilon}}}{\partial \omega} \cdot \hat{l}_0 \geq 0.$$

Zauważmy, że dla takich procesów prawo bilansu energii redukuje się do postaci (por. p. 20)

$$\rho_0 \underline{v} \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \rho_0 \frac{\partial \hat{\underline{\varepsilon}}}{\partial \omega} \cdot \hat{l}_0 + \rho_0 r_e.$$

Ostatnie równanie wraz z pierwszym równaniem ruchu oraz wprowadzonym polem prędkości cząstek $v = (v_i)$ $i=1,2,3$ może być zapisane w jawnej, indeksowej notacji następująco

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - v_i = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - A_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u^j}{\partial x^k \partial x^l} - A_i^k \frac{\partial \eta}{\partial x^k} - A_i^{kp} \frac{\partial \omega_p}{\partial x^k} = \rho_0 \bar{b}_i, \quad (18.3)$$

$$\rho_0 \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = \hat{k}$$

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} = \hat{b}_p, \quad (u(0), v(0), \eta(0), \omega(0)) = (u_0, v_0, \eta_0, \omega_0),$$

gdzie przyjęliśmy kartezjańskie ortogonalne układy współrzędnych:

przestrzenny $\{x^i\}$ w \mathbb{R}^m oraz materialny $\{x^L\}$ w \mathbb{R}^n , i oznaczenie ω_p , $p=1,2,\dots,p$ dla układu współrzędnych wektora zmiennych wewnętrznych ω , oraz następuje definicje dla funkcyjnych współczynników równania wektorowego

$$A_{ij}^{kl} := \frac{\rho_0 \partial^2 \hat{E}(H, \eta, \omega)}{\partial H^i \partial H^j \partial H^k \partial H^l}, \quad A_i^k := \rho_0 \frac{\partial^2 \hat{E}(H, \eta, \omega)}{\partial H^i \partial \eta}, \quad A_i^{kp} := \frac{\rho_0 \partial^2 \hat{E}(H, \eta, \omega)}{\partial H^i \partial \omega_p} \quad (18.4)$$

$$\rho_0 \bar{b}_i := \rho_0 b_i + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\rho_0 \frac{\partial \hat{E}(H, \eta, \omega)}{\partial H^i \partial x^k} \right), \quad \hat{k} := -\rho_0 \frac{\partial \hat{E}(H, \eta, \omega)}{\partial \omega_p} \hat{b}_p + \rho_0 \tau_c$$

Wyraz $\rho_0 \bar{b}_i$ pokrywa się z siłami masowymi $\rho_0 b_i$ o ile rozkład gęstości masy odniesienia jest jednorodny (tzn. $\text{grad} \rho_0 = 0$) i funkcja konstytutywna energii wewnętrznej nie zależy jawnie od współrzędnych x^k , tzn. własności materialne nie zależą od cząstki, materiał jest jednorodny. Wśród wyrazów występujących po prawej stronie układu (18.3) tylko \hat{k} oraz $\rho_0 \bar{b}_i$ mogą jawnie zależeć od czasu, o ile gęstość objętościowych źródeł ciepła τ_c i składowe siły masowych b_i są zmienne w czasie.

Współczynniki funkcyjne lewej strony w żadnym przypadku nie zależą jawnie od czasu, natomiast mogą w pewnych sytuacjach zależeć jawnie od zmiennej niezależnej $\{x^K\}$. Będzie to miało miejsce we wspomnianym powyżej przypadku zmiennych z punktem x własności materialnych oraz niejednorodnym rozkładem gęstości masy. Zależność r_2 oraz b_1 od u_j jest depuszczalna.

Dla porządku należy wspomnieć, że wybór innego niż kartezjański układu współrzędnych materialnych $\{x^K\}$ prowadzi do jawnej zależności funkcyjnych współczynników równania od zmiennej $\{x^K\}$. Ponadto pojawią się dodatkowe człony z gradientami przemieszczenia i symbolami Christoffela Γ_{PK}^K układu $\{x^K\}$.

Do zapisania układu (18.3) w postaci abstrakcyjnego równania ewolucji przyjmijmy następujące oznaczenie dla zmiennej poszukiwanej

$$u := [u, v, \underline{\eta}]^T, \quad \text{gdzie } \underline{\eta} = \begin{pmatrix} \eta \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_p \end{pmatrix}.$$

Wtedy układ (18.3) jest równaniem wektorowym ewolucji (18.1) z następującymi operatorami $A(U)$ i prawą stroną $f(t, u)$

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ -\rho_0^{-1} \sum_{k,l=1}^m a^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} & 0 & -\rho_0^{-1} \sum_{k=1}^K a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(18.5)

$$f(t, u) := \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b} \\ a_{v_0}^{-1} \hat{k} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \hat{k} = \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{t}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{t}_{01} \\ \vdots \\ \hat{t}_{0p} \end{bmatrix}$$

oraz wektorem warunku początkowego $(\underline{u}(0), \underline{v}(0), \underline{\eta}(0)) = (\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{\eta}_0)$,
gdzie

$$a^{KL} := [A_{ij}^{KL}]$$

$$a^k := [A_i^k, A_i^{\Gamma k}]$$

$$a_{\vartheta} := \begin{bmatrix} \vartheta_0 \vartheta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$K, L = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \quad \Gamma = 1, \dots, p.$$

Zauważmy, że funkcja operatorowa $A(\cdot)(\cdot)$ jest liniowa względem argumentu stojącego w miejsce prawej kropki i nieliniowa względem argumentu reprezentowanego przez lewą kropkę, przy czym obie zależności są operatorowe. Wielkość $f(\cdot, \cdot)$ jest funkcją czasu pierwszego argumentu i nieliniowym na ogół operatorem względem drugiego, zawierającym operacje różniczkowanie oo najwyższej pierwszego rzędu.

Inaczej przedstawia się operator $A(\cdot)(\cdot)$ gdyż na obu miejscach występuje różniczkowanie, prawe jest 2-go rzędu.

Wyjściowy quasi-liniowy układ cząstkowych równań różniczkowych (18.3) będzie na ogół układem hiperbolicznym, o ile wartości zmiennych $\nabla \underline{u}$, $\underline{\eta}$ oraz ω będą ograniczone do pewnego otwartego zbioru. Wynika to z faktu, że wartości własne i wektory własne macierzy odpowiadającego mu układu pierwszego rzędu w wektorze poszukiwanym $[\underline{v}, H, \underline{\eta}, \omega]^T$ zależą od rozwiązania.

Obok tej czysto matematycznej motywacji można przedstawić drugą o zawartości fizycznej. Postulowane związki konstytutywne dla funkcji ε , $\underline{\pi}$ oraz ϑ i ω nie muszą być słuszne w pełnym zakresie zmienności odkształceń, entropii i parametrów wewnętrznych. W szczególności może mieć miejsce sytuacja, że istnieje obszar (zbiór otwarty i spójny) $\Omega \subset \mathbb{R}^{nm} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ taki, że wspomniane funkcje konstytutywne są określone tylko na $\Omega \times \mathbb{R}^n$. (Umieściliśmy przestrzeń zmiennych niezależnych aby być w stanie jednym rozumowaniem objąć przypadek ośrodka jednorodnego i niejednorodnego.) Ze względu na wymogi dowodu przyjmijmy, że Ω jest obszarem zawierającym $\underline{0}$ ściągającym do zera.

Przy tak ograniczonej zmienności parametrów stanu sformułowanie podstawowego układu założeń będzie rozłożone na następujące etapy, umożliwiające przeprowadzenie dowodu istnienia,

- wybór odpowiednich przestrzeni \tilde{X} , \tilde{Y} , \tilde{Z} oraz zbioru \tilde{W} ;
- przyjęcie odpowiednich założeń regularności w zależnościach funkcji konstytutywnych od swych zmiennych;
- skonstruowanie funkcji N , wartości której definiują rodzinę norm równoważnych normie przestrzeni \tilde{Z} .

18.2 Wybór przestrzeni rozwiązań i założenia regularności

Skoro n jest liczbą przestrzennych zmiennych niezależnych, m - liczbą składowych wektora przemieszczenia i prędkości zaś $p + 1$ liczbą składowych wektora $\underline{\eta} := [\eta, \omega]^T$ przyjmujemy następujące definicje przestrzeni

$$\tilde{Y} := \mathcal{H}^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{p+1}),$$

$$\tilde{X} := \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{p+1}),$$

$$\tilde{Z} := \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{H}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{H}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{p+1}).$$

Jeśli Ω jest wprowadzonym uprzednio obszarem ściągającym do zera leżącym w $\mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{p+1}$, to przez $\tilde{W} \subset \tilde{Y}$ oznaczmy kulę o środku w pewnym $(\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{\eta}_0)$ o dostatecznie małym promieniu takim, że każdy $\underline{w} \in \tilde{W}$ spełnia warunek

$$(18.6) \quad (\nabla \underline{u}(x), \underline{\eta}(x)) \in \Omega$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$, o ile $\underline{w} := (\underline{u}, \underline{v}, \underline{\eta})$. Zauważmy, że wprowadzając operator ∇_1 określony na $\mathcal{H}_{n,m}^r \times \mathcal{H}_{n,m}^{r-1} \times \mathcal{H}_{n,p+1}^{r-1}$ o wartościach w $\mathcal{H}_{n,m}^{r-1} \times \mathcal{H}_{n,p+1}^{r-1}$ dla $1 \leq r \leq s+1$, gdzie $\mathcal{H}_{n,m}^r := \mathcal{H}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, dany jest przepisem

$$\nabla_1(\underline{u}, \underline{v}, \underline{\eta}) := (\nabla \underline{u}, \underline{\eta}),$$

warunek (18.6) może być zapisany następująco

$$(18.6)' \quad (\nabla_1 w)(x) \in \Omega \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}^n.$$

Jeśli $\nabla_1(u_{00}, v_{00}, \eta_{00})(x) \in \Omega$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$, to ze względu na ciągłe zanurzenie $\mathcal{H}_{n,m}^{s+1}$ w $C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ przy $s > \frac{n}{2}$, zawsze istnieje kula $\tilde{W} \subset \tilde{Y}$ o nieznikającym promieniu i środku w $U_{00} := (u_{00}, v_{00}, \eta_{00}) \in \tilde{Y}$ taka, że na każdym $w \in \tilde{W}$ obraz $\nabla_1 w$ przyjmuje wartości w pewnym zwartym zbiorze $\Omega' \subset \Omega$. To oznacza, że warunkiem wystarczającym istnienia kuli $\tilde{W} \subset \tilde{Y}$ o środku w U_{00} jest $(\nabla_1 U_{00})(x) \in \Omega$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$. Wydaje się, że przejście do drugiego etapu i sformułowanie założeń o regularności funkcji będzie bardziej zrozumiałe, jeśli przytoczymy pewne fakty (por. Hughes, Kato i Marsden [1977, s. 282-283]) dotyczące funkcji z przestrzeni Sobolewa. Poniżej zebraliśmy te, które będą wykorzystywane w oszacowaniach.

Własności F (funkcji gładkich na przestrzeniach Sobolewa)

a/ Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ jest otwarty oraz $s > \frac{n}{2}$ zaś $\psi \in \mathcal{H}_{n,k}^s$ i przyjmuje wartości w Ω , natomiast $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}_{n,k}^s$ jest kulą o środku w ψ i dostatecznie małym promieniu takim, że wszystkie $\psi \in \mathcal{U}$ przyjmują wartości w zwartym zbiorze $\Omega' \subset \Omega$, to dla dowolnej funkcji $F: \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ klasy C_b^1 można znaleźć stałą C_1 , przy której dla wszystkich $\psi \in \mathcal{U}$

$$\|F(\cdot, \psi(\cdot))\|_{\mathcal{H}_{n,q}^s} \leq C_1 (1 + \|\psi\|_{\mathcal{H}_{n,k}^s}^3),$$

b/ Jeśli F jest klasy C_b^{s+1} , to istnieje stała C_2 taka, że

$$\|F(\cdot, \psi(\cdot)) - F(\cdot, \chi(\cdot))\|_{\mathcal{H}_{n,q}^s} \leq C_2 \|\psi - \chi\|_{\mathcal{H}_{n,k}^s}$$

dla $\psi, \chi \in \mathcal{U}$ oraz $0 \leq \tau \leq s$.

o/ Jeśli dodatkowo $0 \in \Omega$ oraz Ω jest ściągalny do zera i $F(\cdot, 0) \in \mathcal{H}_{n,q}^s$, to $F(\cdot, \psi(\cdot)) \in \mathcal{H}_{n,q}^s$ dla $\psi \in \mathcal{U}$.

• We własności a/ występuje jednostajnie lokalna przestrzeń Sobolewa $\mathcal{H}_{n,q}^s$. Przypomnijmy jej definicję i podstawowe własności (por. Kato [1975]).

Dla dowolnej liczby całkowitej $s \geq 0$ przestrzeń liniowa $\mathcal{H}_{ul}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ oznacza zbiór wszystkich \mathbb{R}^k -wartościowych mierzalnych funkcji ψ na \mathbb{R}^n takich, że $\psi \in \mathcal{L}_{ul}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ oraz wszystkie pochodne dystrybucyjne $D^\alpha \psi$ rzędu $|\alpha| \leq s$ należą do \mathcal{L}_{ul}^2 , przy czym norma $\|\psi\|_{\mathcal{H}_{ul}^s}$ wektora ψ jest zdefiniowana następująco

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_{ul}^s} := \sup_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha \psi\|_{\mathcal{L}_{ul}^2},$$

gdzie $\mathcal{L}_{ul}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) := \{\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \text{ mierzalna i}$

$$\|\psi\|_{\mathcal{L}_{ul}^2}^2 := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |y-x|_{\mathbb{R}^n} < 1} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |\psi(y)|^2 dy \right)^{1/2} < \infty \}.$$

W normie $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{ul}^s}$ przestrzeń $\mathcal{H}_{ul}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ jest przestrzenią Banacha oraz $\mathcal{H}_{n,k}^s \subset \mathcal{H}_{n,k}^{s+1}$ dla każdego $s \geq 0$, natomiast w przypadku $s > \frac{n}{2} + 1$ ma miejsce ciągłe włożenie

$$\mathcal{H}_{n,k}^s \subset C_b^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k).$$

Jeśli tylko $s > \frac{n}{2}$, to punktowe mnożenie indukuje liniowe ciągłe odwzorowania

$$\mathcal{H}_{n,k}^{s-l} \times \mathcal{H}_{n,l}^{r+l} \rightarrow \mathcal{H}_{n,k}^r$$

dla $0 \leq l \leq s$, $0 \leq r \leq s-l$. Przypomnijmy, że identyczny fakt zachodzi dla "normalnych" przestrzeni Sobolewa.

Dla analizy szerokiej klasy problemów początkowych fizyki matematycznej jednostajnie lokalne przestrzenie Sobolewa są bardziej naturalnymi przestrzeniami w porównaniu z normalnymi przestrzeniami Sobolewa \mathcal{H}^s , w których poszukuje się rozwiązania. Wynika to z koniecznego a często niedopuszczalnego z fizycznego punktu widzenia, warunku znikania w nieskończoności wartości funkcji z $\mathcal{H}_{n,k}^s$. Tej własności nie łączy się z elementami przestrzeni $\mathcal{H}_{n,k}^s$, od tych ostatnich wymaga się bowiem pewnego rodzaju ograniczonej w nieskończoności. Przykła-

dem niech tu będzie przestrzeń \mathcal{H}_{ul}^s , do której należą wszystkie funkcje okresowe, które lokalnie są całkowalne z kwadratem. Dogodną charakteryzacją przestrzeni \mathcal{H}_{ul}^s jest następujący warunek, przy dowolnej funkcji $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nieznikającej tożsamościowo:

$$u \in \mathcal{H}_{n,k}^s \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\phi_x u\|_{\mathcal{H}_{n,k}^s} < \infty,$$

gdzie

$$\phi_x(y) := \phi(y-x) \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wyliczmy niezbędne założenia regularności drugiego (założenia A_1) oraz trzeciego etapu (założenia A_2).

ZAŁOŻENIA. A_1 (i) funkcja konstytutywna energii wewnętrznej $\hat{E}: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C_b^{s+3} , gdzie b oznacza ograniczonosc pochodnych względem x aż do rzędu $s+3$,

(ii) funkcje $\hat{I}_0: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ oraz $b(t, \cdot, \cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $\tau_e(t, \cdot, \cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ są klasy C_b^{s+1} , te ostatnie dla każdego $t \in [0, T]$ a ponadto $\hat{I}_0^{-1} := (\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi}(\cdot, \cdot))^{-1}: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C_b^{s+1} ,

(iii) $b \in C^0([0, T], C_b^{s+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m))$ i $\tau_e \in C^0([0, T], C_b^{s+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}))$

oraz

$$b(\cdot, \cdot, 0) \in C^0([0, T], \mathcal{H}_{n,m}^s) \text{ i } \tau_e(\cdot, \cdot, 0) \in C^0([0, T], \mathcal{H}_{n,1}^s),$$

zaś

$$\hat{I}_0(\cdot, 0) \in \mathcal{H}_{n,p}^s.$$

A_2 . Istnieje stała dostatecznie c_0 taka, że $g_0(x) \geq c_0$ oraz

$$A_{ij}^{KL}(x, p) \lambda^i \lambda^j \xi_k \xi_L + 2 A_i^K(x, p) \lambda^i \xi_k \mu + 2 A_i^{K\Gamma}(x, p) \lambda^i \xi_k \mu^\Gamma + g_0 \hat{\mathcal{V}}(x, p) \mu^2 + \delta \Gamma \delta^\Gamma \geq c_0 (|\lambda|_{\mathbb{R}^m}^2 |\xi|_{\mathbb{R}^n}^2 + |\mu|^2 + |\underline{\delta}|_{\mathbb{R}^p}^2)$$

dla każdego $(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}$ i $\gamma \in \mathbb{R}^p$. \square

W powyższych założeniach przyjęliśmy najogólniejszą sytuację zależności wszystkich funkcji konstytutywnych od zmiennej x (przypadek materiału niejednorodnego) oraz zależność pola sił masowych b oraz objętościowych źródeł ciepła od czasu, zmiennej przestrzennej x oraz pełnego wektora $(\underline{u}, v, \nabla \underline{u}, \eta, \omega)$. Te ostatnią zależność reprezentuje przestrzeń $\mathbb{R}^t := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^{p+1}$.

19. Dowód twierdzenia

Wykorzystując A_1 i A_2 można wykazać istnienie funkcji $N: \tilde{W} \rightarrow \tilde{N}(z)$ spełniającej warunek (1) twierdzenia H-K-M. Do tego celu zdefiniujmy pomocniczą funkcję operatorową

$\mathfrak{H}(\cdot, \cdot, \cdot): \tilde{W} \times \mathcal{P}_{1,3}(\tilde{z}) \times \mathcal{P}_{1,3}(z) \rightarrow \mathbb{R}$ następującym przepisem

$$(19.1) \quad \mathfrak{H}(w; \underline{\hat{u}}^1, \underline{\hat{\eta}}^1, \underline{\hat{u}}^2, \underline{\hat{\eta}}^2) := \sum_{k,l=1}^m (a^{kl} \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial x^k}, \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial x^l})_0 + \sum_{k=1}^m (a^T \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial x^k}, \hat{\eta}^2)_0 + \sum_{k=1}^m (a^T \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial x^k}, \hat{\eta}^1)_0 + (a_\alpha \eta_1, \eta_2),$$

gdzie $(\cdot, \cdot)_0$ oznacza iloczyn skalarny w \mathcal{L}^2 nad \mathbb{R}^n , zaś a^{kl} , a^k i a_α są zespołami macierzy $k, l = 1, \dots, m$ zdefiniowanych przy wyrażeniu (18.5) i zależnymi od x oraz $\nabla_x w$. Literka T oznacza transpozycję. Wykorzystując zapis indeksowy można formę $\mathfrak{H}(w; \underline{\hat{u}}^1, \underline{\hat{\eta}}^1, \underline{\hat{u}}^2, \underline{\hat{\eta}}^2)$ przedstawić w jawnej postaci

$$\mathfrak{H}(w; \mathcal{P}_{1,3} \hat{u}^1, \mathcal{P}_{1,3} \hat{u}^2) = \int_{\mathbb{R}^n} A_{ij}^{kl} \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \hat{u}^j}{\partial x^l} dv + \int_{\mathbb{R}^n} A_i^k \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial x^k} \hat{\eta}^1 dv + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0 \hat{v} \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 dv + \int_{\mathbb{R}^n} \hat{q}_r \hat{q}^r dv$$

Ze względu na posiadaną własność (por. (18.4)₁) $A_{ij}^{kl} = A_{ji}^{lk}$ nietrudno sprawdzić, że forma $\mathfrak{H}(w; \cdot, \cdot)$ jest symetryczna.

Ponadto założenia A_1 sprawiają, że współczynniki formy są jednostajnie ciągłe na \mathbb{R}^n i w związku z tym można, wykorzystując

mutatis mutandis dowód Morreya [1966, s.253-254] dla obszaru ograniczonego, wykazać słuszność następującej wersji nierówności Gårdinga:

LEMATG. Istnieją stałe dodatnie M_1, c_1 i d_0 takie, że

$$(19.2) \quad |\mathfrak{H}(w; p_{r_{1,3}} \underline{u}, p_{r_{2,3}} \underline{\hat{u}})| \leq M_1 \{ \|\underline{\hat{u}}\|_{\mathcal{H}^1} \|\underline{u}\|_{\mathcal{H}^1} + \|\underline{\hat{u}}\|_{\mathcal{H}^1} \|\underline{v}\|_{\mathcal{H}^0} + \|\underline{\hat{u}}\|_{\mathcal{H}^1} \|\underline{\hat{v}}\|_{\mathcal{H}^0} + \|\underline{v}\|_{\mathcal{H}^0} \|\underline{\hat{v}}\|_{\mathcal{H}^0} \},$$

$$\mathfrak{H}(w; p_{r_{1,3}} \underline{\hat{u}}, p_{r_{2,3}} \underline{u}) \geq c_1 (\|\underline{u}\|_{\mathcal{H}^1}^2 + \|\underline{v}\|_{\mathcal{H}^0}^2) - d_0 \|\underline{u}\|_{\mathcal{H}^0}^2$$

dla wszystkich $\underline{u}, \underline{\hat{u}}, \underline{\hat{v}} \in \tilde{\mathcal{Z}}$ oraz $w \in \tilde{\mathcal{W}}$. \square

Znikające η odpowiada klasycznej nierówności Gårdinga (por. Fichera [1972]). Posiadając Lemat G można się pokusić o zdefiniowanie wymaganej w trzecim etapie funkcji $N: \tilde{\mathcal{W}} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{\mathcal{Z}})$

Określmy dla każdego $w \in \tilde{\mathcal{W}}$ biliniową i symetryczną formę na $\tilde{\mathcal{Z}} \times \tilde{\mathcal{Z}}$ przepisem

$$(19.3) \quad (\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{u}})_{N(w)} := \mathfrak{H}(w; p_{r_{1,3}} \underline{\hat{u}}, p_{r_{2,3}} \underline{\hat{u}}) + d_0 (\underline{u}^1, \underline{\hat{u}})_0 + (\beta_0 \underline{v}^1, \underline{\hat{v}})_0,$$

wtedy odpowiadająca jej norma $N(w)$ na $\tilde{\mathcal{Z}}$ jest poszukiwaną wartością funkcji $N(\cdot)$. Rzeczywiście z nierówności (19.2) wynika bezpośrednio, że istnieje stała $c_3 > 0$ taka, że dla każdego $\underline{u} \in \tilde{\mathcal{Z}}$ i wszystkich $w \in \tilde{\mathcal{W}}$ zachodzi nierówność

$$(19.4) \quad c_3 \|\underline{u}\|_{\tilde{\mathcal{Z}}} \leq \|\underline{u}\|_{N(w)} \leq c_3^{-1} \|\underline{u}\|_{\tilde{\mathcal{Z}}},$$

a więc $N(w) \in \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{\mathcal{Z}})$ dla wszystkich $w \in \tilde{\mathcal{W}}$. Pozostałe dwie nierówności wymagane w punkcie (i) założeń twierdzenia H-K-M będą sprawdzone w dalszej kolejności. Do tego potrzebne są poniższe warunki Lipchitza dla funkcyjnych współczynników równania,

LEMAT 1. Istnieją stałe dodatnie c_4, c_5 i c_6 takie, że dla każdego $w, w' \in \tilde{W}$

$$\| a^{kL}(x, \nabla_1 w) - a^{kL}(x, \nabla_1 w') \|_{\mathcal{H}^r} \leq c_4 \| w - w' \|_{\mathcal{H}^{r+1} \times \mathcal{H}^r \times \mathcal{H}^r},$$

$$\| a^k(x, \nabla_1 w) - a^k(x, \nabla_1 w') \|_{\mathcal{H}^r} \leq c_4 \| w - w' \|_{\mathcal{H}^{r+1} \times \mathcal{H}^r \times \mathcal{H}^r},$$

$$\| a_{\alpha}(x, \nabla_1 w) - a_{\alpha}(x, \nabla_1 w') \|_{\mathcal{H}^r} \leq c_4 \| w - w' \|_{\mathcal{H}^{r+1} \times \mathcal{H}^r \times \mathcal{H}^r},$$

$$\| f(t, x, w, \nabla_1 w) - f(t, x, w', \nabla_1 w') \|_{\mathcal{H}^r} \leq c_5 \| w - w' \|_{\mathcal{H}^{r+1} \times \mathcal{H}^r \times \mathcal{H}^r}$$

$$| \mathbb{H}(w, \rho_{r_1, 3} u, \rho_{r_2, 3} u) - \mathbb{H}(w', \rho_{r_1, 3} u, \rho_{r_2, 3} u) | \leq c_6 \| w - w' \|_{\tilde{\mathcal{X}}} \left(\| u \|_{\mathcal{H}^1}^2 + \| \eta \|_{\mathcal{H}^0}^2 \right).$$

Dowód. Pierwsze cztery nierówności są bezpośrednim zastosowaniem punktu b) Własności F funkcji gładkich określonych na \mathcal{H}^2 oraz przyjętych założeń regularności A_1 . Ostatnia nierówność jest konsekwencją trzech pierwszych jak widać z poniższego przeliczenia

$$\begin{aligned} & | \mathbb{H}(w, \rho_{r_1, 3} u, \rho_{r_2, 3} u) - \mathbb{H}(w', \rho_{r_1, 3} u, \rho_{r_2, 3} u) | \leq \\ & \sum_{k, L=1}^m \left((a^{kL} - a'^{kL}) \frac{\partial u}{\partial x^k}, \frac{\partial u}{\partial x^L} \right)_0 + 2 \sum_{k=1}^m \left((a^{T_k} - a'^{T_k}) \frac{\partial u}{\partial x^k}, \eta \right)_0 \\ & + (a_{\alpha} - a'_{\alpha}) \eta, \eta)_0 \\ & \leq c_4 \| w - w' \|_{\tilde{\mathcal{X}}} \left\{ \| \nabla u \|_0^2 + 2 \| \nabla u \|_0 \| \eta \|_0 + \| \eta \|_0^2 \right\} \\ & \leq 2nc_4 \| w - w' \|_{\tilde{\mathcal{X}}} \left(\| u \|_{\mathcal{H}^1}^2 + \| \eta \|_{\mathcal{H}^0}^2 \right), \end{aligned}$$

gdzie dla oznaczenia argumentu w' użyliśmy prim przy współczynnikach funkcyjnych. \square

WNIOSEK 1. Przy istniejących założeniach $A_1 - A_2$ funkcja $N: \tilde{W} \rightarrow \tilde{N}(\tilde{Z})$ powyżej zdefiniowana spełnia warunek (1) twierdzenia H-K-M.

Dowód. Wpierw oszacujemy moduł różnicy $\|u\|_{N(w)}$ i $\|u\|_{N(w')}$ dla $w \in \tilde{W}, w' \in \tilde{W}$ oraz $u \in \tilde{Z}$; uwzględniając ostatnio udowodnioną nierówność oraz równoważność norm $N(w)$ i $\|\cdot\|_{\tilde{Z}}$ otrzymamy

$$\left| \|u\|_{N(w)} - \|u\|_{N(w')} \right| \leq \frac{\left| \|u\|_{N(w)}^2 - \|u\|_{N(w')}^2 \right|}{\|u\|_{N(w)} + \|u\|_{N(w')}} \leq c_6 \frac{\|u\|_{\tilde{Z}}^2 \|w-w'\|_{\tilde{Z}}}{2c_3 \|u\|_{\tilde{Z}}} \\ \leq \frac{c_6}{2c_3} \|w-w'\|_{\tilde{Z}} \|u\|_{\tilde{Z}}.$$

Zapisując stosunek dwóch norm w postaci

$$\frac{\|u\|_{N(w)}}{\|u\|_{N(w')}} = \frac{\|u\|_{N(w)} - \|u\|_{N(w')}}{\|u\|_{N(w')}} + 1,$$

oraz powtórnie wykorzystując nierówność z Lematu 1 oraz powyższe oszacowanie otrzymamy

$$\frac{\|u\|_{N(w)}}{\|u\|_{N(w')}} \leq c_6 \frac{\|w-w'\|_{\tilde{Z}} \|u\|_{\tilde{Z}}}{\|u\|_{N(w')}} + 1 \leq \frac{c_6}{c_3} \|w-w'\|_{\tilde{Z}} + 1$$

i identyczne oszacowanie dla odwrotności lewej strony. Stąd wykorzystując znaną nierówność $\ln(1+a) \leq a \cdot \text{const}$, o ile $0 < \delta < 1+a < \infty$ otrzymamy (por. definicję normy w $\tilde{W}(\tilde{z})$)

$$S_{\tilde{Z}}(N(w), N(w')) \leq \mu_N \|w-w'\|_{\tilde{Z}}.$$

Tę samą procedurę i nierówność logarytmiczną stosuje się by wykazać, że istnieje stała $\gamma_N > 0$ taka, że $S_{\tilde{Z}}(N(w), \|\cdot\|_{\tilde{Z}}) \leq \gamma_N$. \square

Przejdźmy do warunku (ii) i podstawowej nierówności dla dowodu całego twierdzenia.

LEMAT 2. Istnieje stała $\beta > 0$ taka, że dla wszystkich $w \in \tilde{W}$, $u \in \tilde{Z}$ oraz $\lambda > \beta$ zachodzi nierówność

$$(19.6) \quad \|A(w)u + \lambda u\|_{N(w)} \geq (\lambda - \beta) \|u\|_{N(w)}.$$

Dowód. Niech $U = (\underline{u}, \underline{v}, \underline{\eta})$, zaś pod współczynniki funkcyjne nie wpisujemy explicite zależności od x , w oraz $\nabla_1 w$. Wykorzystując nierówność Schwarz'a, wzory Greena-Gauss'a i całkowania przez części oraz fakt, że w nieskończoności funkcje z \mathcal{H}^s znikają, otrzymamy

$$\begin{aligned} & \|A(w)u + \lambda u\|_{N(w)} \|u\|_{N(w)} \geq (A(w)u + \lambda u, u)_{N(w)} = \lambda (u, u)_{N(w)} \\ & \quad + \mathfrak{H}(w, \text{pr}_{1,3}(A(w)u), \text{pr}_{2,3}u) + d_0(\text{pr}_1(A(w)u), \underline{u}) + (e_0 \text{pr}_2(A(w)u), \underline{v}) \\ & = \lambda (u, u)_{N(w)} + \mathfrak{H}(w; (-v, 0), (\underline{u}, \underline{\eta})) + d_0(-v, \underline{u})_0 - \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{KL} \frac{\partial^2 u}{\partial x^K \partial x^L} + a^{K\partial} \frac{\partial \eta}{\partial x^K}, \underline{v})_0 \\ & = \lambda (u, u)_{N(w)} + \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{KL} \frac{\partial(-v)}{\partial x^K}, \frac{\partial u}{\partial x^L})_0 + \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{TK} \frac{\partial(-v)}{\partial x^K}, \underline{\eta})_0 + \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{TK\partial} \frac{\partial u}{\partial x^K}, 0)_0 \\ & \quad + (a_{\partial\partial} \underline{0}, \underline{\eta})_0 - d_0(v, \underline{u})_0 - \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{KL} \frac{\partial^2 u}{\partial x^K \partial x^L}, \underline{v})_0 - \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{K\partial} \frac{\partial \eta}{\partial x^K}, \underline{v})_0 = \\ & = \lambda (u, u)_{N(w)} - d_0(v, \underline{u})_0 - \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{KL} \frac{\partial v}{\partial x^K}, \frac{\partial u}{\partial x^L})_0 + \\ & \quad - \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{K\partial} \frac{\partial \eta}{\partial x^K}, \underline{v})_0 - \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{TK} \frac{\partial v}{\partial x^K}, \underline{\eta})_0 - \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (a^{KL} \frac{\partial^2 u}{\partial x^K \partial x^L}, \underline{v})_0 = \\ & (a) \quad = \lambda (u, u)_{N(w)} - d_0(v, \underline{u})_0 + \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (\frac{\partial}{\partial x^K} a^{KL}, \underline{v}, \frac{\partial u}{\partial x^L})_0 + \sum_{K,L}^{\tilde{m}} (\frac{\partial}{\partial x^K} a^{K\partial} \underline{\eta}, \underline{v})_0 \geq \end{aligned}$$

$$\stackrel{(b)}{\geq} \lambda \|u\|_{N(w)}^2 - c_7 \|u\|_{N(w)}^2 - d_0(v, u)_0 \geq$$

$$\stackrel{(c)}{\geq} (\lambda - \beta) \|u\|_{N(w)}^2,$$

gdzie $\beta := c_7 + d_0 \frac{c_3}{2}$, ponieważ:

$$\text{ad/a/ } 0 = \sum_{k,l} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial u}{\partial x^l} a^{kl} v \right) dx = \sum_{k,l} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u}{\partial x^l} \frac{\partial a^{kl}}{\partial x^k} v + \frac{\partial u}{\partial x^l} a^{kl} \frac{\partial v}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l} a^{kl} v \right) dx$$

$$\text{i stąd } \sum_{k,l} \left(\frac{\partial a^{kl}}{\partial x^k} v, \frac{\partial u}{\partial x^l} \right)_0 = - \sum_{k,l} \left(a^{kl} \frac{\partial v}{\partial x^k}, \frac{\partial u}{\partial x^l} \right)_0 - \sum_{k,l} \left(a^{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}, v \right)_0,$$

gdż z symetrii A_{ij}^{KL} wynika, że $a^{TKL} = a^{LK}$. Podobnie dla czwartego członu mamy

$$\sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \left(a^{k \frac{\partial v}{\partial x^k}}, v \right)_0 + \left(a^{TKL} \frac{\partial v}{\partial x^k}, \eta \right)_0 = \sum_{k,l} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (v a^{kl} \eta) - v \left(\frac{\partial a^{kl}}{\partial x^k} \eta \right) \right) dx.$$

ad/b/ Ze względu na założenia A_1 , punkt a/ własności F funkcji gładkich określonych na \mathcal{H}^s oraz przynależność każdego w do kuli \tilde{W} , pochodne $\frac{\partial a^{kl}}{\partial x^N}$ i $\frac{\partial a^{kl}}{\partial x^N}$, $K, L, N=1, \dots, n$, są jednostajnie ograniczone, a stąd dwa ostatnie człony są ograniczone odpowiednio przez $c_7 \|v\|_0 \|u\|_{\mathcal{H}^1}$ i $c_7'' \|u\|_0 \|v\|_0$. Tak więc ich suma jest ograniczoną przez $\frac{c_7 + c_7''}{2} (\|u\|_{\mathcal{H}^1}^2 + \|v\|_0^2 + \|u\|_0^2)$, a ze względu na nierówność norm równoważnych (19.5) w sumie przekraczają $-c_7 \|u\|_{N(w)}^2$.

ad/c/ Z nierówności $(v, u)_0 \leq \|v\|_0 \|u\|_0 \leq \frac{1}{2} \|u\|_{\tilde{W}}^2$ przy powtórnym zastosowaniu (19.5), nierówność

wynika,

$$-(v, u)_0 \geq -\frac{d_0}{2} \|u\|_{N(w)}^2 \geq -\frac{d_0 c_3}{2} \|u\|_{N(w)}^2. \quad \square$$

Wymagane w twierdzeniu Hille-Phillipsa-Yosidy odwracalność i gęstość obrazu operatora $A(w) + \lambda I$ będą wykazane jako konsekwencje następującego lematu:

LEMAT 3. Jeśli β jest dostatecznie duże, to dla każdego $w \in \tilde{V}$ odwzorowanie $A(w) + \lambda I: \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^1 \rightarrow \tilde{Z}$ jest odwracalne dla $\lambda > \beta$ i ze względu na oszacowanie (19.6) zachodzi nierówność

$$\| (A(w) + \lambda I)^{-1} \|_{N(w)} \leq \frac{1}{\lambda - \beta}.$$

Dowód. Wyznamy formalnie operator odwrotny do operatora $A(w) + \lambda I$, gdzie $A(w)$ jest dany zależnością (18.5); otrzymamy

$$(A(w) + \lambda I)^{-1} = \begin{bmatrix} \rho_0 \lambda (C_{\lambda \rho}(w))^{-1} & \rho_0 (C_{\lambda \rho}(w))^{-1} & \frac{1}{\lambda} (C_{\lambda \rho}(w))^{-1} A_3(w) \\ \rho_0 \lambda^2 (C_{\lambda \rho}(w))^{-1} - I & \rho_0 \lambda (C_{\lambda \rho}(w))^{-1} & (C_{\lambda \rho}(w))^{-1} A_3(w) \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} I \end{bmatrix}$$

gdzie

$$C_{\lambda \rho}(w) := \lambda^2 \rho_0 I - A_1(w) = \lambda^2 \rho_0 I - \sum_{k, l=1}^n a^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l},$$

$$A_3(w) := \sum_{k=1}^m a^{k\partial} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Jak widać warunkiem odwracalności operatora $A(w) + \lambda I$ jest odwracalność operatora $C_{\lambda \rho}(w)$. Dowód tego faktu wzorowany na metodzie Yosidy [1980, s. 427-430] całkowania równania falowego w \mathbb{R}^n , został naszkicowany w pracy^{z/} Hughesa-Kato i Marsdena [1977]. W obecnie rozpatrywanym przypadku występujące

^{z/} W pracy tej wkrađło się kilka błędów korektorskich, w szczególności brak minusa przed operatorem $A_\lambda(t, w)$ i macierzy a_{00} w kilku miejscach na str. 287. Końcowe wyliczenia operatora odwrotnego podającego wyrażenia dla ψ oraz ψ' nie zawierają wszystkich członów.

tam macierze a_{01} oraz a_{10} należy przyrównać do zera. W dowodzie korzysta się z nierówności założonej w A_2 odpowiadającej przypadkowi znikających μ i δ , tj.

$$A_{ij}^{kl} (x, p) \lambda^i \lambda^j \xi_k \xi_l \geq c_0 |\lambda|_{\mathbb{R}^m}^2 |\xi|_{\mathbb{R}^n}^2.$$

Powtarzając wspomniany dowód uzyskuje się następujący rezultat: dla $\lambda > \beta$ operator $C_{\lambda S}(w)$ jest wzajemnie jednoznaczny z \mathcal{H}^2 na $\mathcal{H}_{n,m}^0$ dla dostatecznie dużych β . Skoro $A_3(w)$ działa z $\mathcal{H}_{n,p+1}^1$ do $\mathcal{H}_{n,m}^0$ więc kompozycja $(C_{\lambda S}(w))^{-1} A_3(w)$ jest dobrze określona jako operator z $\mathcal{H}_{n,p+1}^1$ do $\mathcal{H}_{n,m}^2$. Tak więc możemy napisać, dla dowolnego $w \in \tilde{W}$ i $\lambda > \beta$

$$A(w) + \lambda I: \mathcal{H}_{n,m}^2 \times \mathcal{H}_{n,m}^1 \times \mathcal{H}_{n,p+1}^1 \rightarrow \mathcal{H}_{n,m}^1 \times \mathcal{H}_{n,m}^0 \times \mathcal{H}_{n,p+1}^1,$$

oraz dla operatora odwrotnego $(A(w) + \lambda I)^{-1}$ następujące wyrażenia na rozwiązanie równania operatorowego

$$(A(w) + \lambda I) \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g} \\ \underline{h} \\ \underline{\tau} \end{bmatrix}$$

stawiane dla dowolnej trójki $(\underline{g}, \underline{h}, \underline{\tau}) \in \mathcal{H}_{n,m}^1 \times \mathcal{H}_{n,m}^0 \times \mathcal{H}_{n,p+1}^1$,

$$\underline{v} = \lambda \underline{u} - \underline{g} \in \mathcal{H}_{n,m}^1$$

$$\underline{u} = \lambda \rho_0 (C_{\lambda S}(w))^{-1} \underline{g} + \rho_0 (C_{\lambda S}(w))^{-1} \underline{h} + \frac{1}{\lambda} (C_{\lambda S}(w))^{-1} A_3(w) \underline{\tau} \in \mathcal{H}_{n,m}^2$$

$$\underline{r} = \frac{1}{\lambda} \underline{\tau} \in \mathcal{H}_{n,p+1}^1. \quad \square$$

WNIOSEK. Przy postawionych założeniach A_1 i A_2 jest spełniony warunek (11) założeń twierdzenia H-K-M, tzn. - $A(w)$ jest infinitesimalnym generatorem quasi-związującej półgrupy typu β i klasy C^0 w $\tilde{Z}_{N(w)}$ dla każdego $w \in \tilde{W}$.

Dowód. Aby to wykazać należy skorzystać z twierdzenia Hilla-Phillipsa-Yosidy (por. sformułowanie w książce Yosidy [1980, s.249]), które wymaga by gęsto zdefiniowany liniowy operator $-A(w)$ posiadał rezolwentę dla wszystkich $\lambda > \beta$, tzn. by obraz $\lambda I + A(w)$ był gęsty w $N(w)$ i odwrotny operator $(\lambda I + A(w))^{-1}$ był ciągły. Z Lematu 3 natomiast wynika, że rezolwenta generatora $-A(w)$ o dziedzinie $\text{Dom}(A(w)) := \mathcal{H}_{n,m}^2 \times \mathcal{H}_{n,m}^1 \times \mathcal{H}_{n,p+1}^1$, która jest gęsta w $\tilde{\mathcal{Z}} := \mathcal{H}_{n,m}^1 \times \mathcal{H}_{n,m}^0 \times \mathcal{H}_{n,p+1}^0$ (a tym samym w $\tilde{\mathcal{Z}}_{N(w)}$) istnieje dla $\lambda > \beta$. Dziedziną rezolwenty-gęstą w $\tilde{\mathcal{Z}}_{N(w)}$ jest przestrzeń $\mathcal{H}_{n,m}^1 \times \mathcal{H}_{n,m}^0 \times \mathcal{H}_{n,p+1}^1$. Z tego faktu wynika, że dla każdego $w \in \tilde{W}$ ma miejsce relacja

$$\| \exp(-\tau A(w))z \| \leq e^{\beta \tau} \| z \|$$

dla wszystkich $\tau \in \mathbb{R}^+$ oraz $z \in \tilde{\mathcal{Z}}$. Ciągłość $(A(w) + \lambda I)^{-1}$ jest widoczna nierównością Lematu 3. \square

Przejdźmy do warunku (11) założenia twierdzenia H-K-M i zdefiniujmy operatory $\mathcal{L} := (1-\Delta)^{s/2}$ i $\mathcal{L}^{-1} := (1-\Delta)^{-s/2}$ oraz

$$\mathcal{S} := \begin{bmatrix} \mathcal{L} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix}.$$

Wtedy $\mathcal{S}: \tilde{\mathcal{Y}} := \mathcal{H}_{n,m}^{s+1} \times \mathcal{H}_{n,m}^s \times \mathcal{H}_{n,p+1}^s \rightarrow \tilde{\mathcal{Z}} := \mathcal{H}_{n,m}^1 \times \mathcal{H}_{n,m}^0 \times \mathcal{H}_{n,p+1}^0$ jest izomorfizmem między $\tilde{\mathcal{Y}}$ oraz $\tilde{\mathcal{Z}}$. Niech dla $w \in \tilde{W}$ będzie zdefiniowany operator liniowy

$$E(w) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ [\mathcal{L}, A_1] \mathcal{L}^{-1} & 0 & [\mathcal{L}, A_3] \mathcal{L}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $A_1(w) := -\int_0^{-1} \sum_{k,l=1}^n a^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}$, $A_3(w) := -\int_0^{-1} \sum_{k=1}^n a^k \frac{\partial}{\partial x^k}$,

oraz $[\cdot, \cdot]$ oznacza komutator. Przy tak wprowadzonych wielkościach formułujemy

LEMAT 4. Przy postawionych założeniach A_1 i A_2 warunki (iii) oraz (iv) twierdzenia H-K-M są spełnione.

Dowód. Warunek (iii) jest spełniony bezpośrednio z definicji operatora \mathfrak{S} . Bezpośrednie wyliczenie, wykorzystujące transformacje Fouriera, pozwala sprawdzić, że $\mathfrak{S}A(\omega)\mathfrak{S}^{-1} = A(\omega) + E(\omega)$.

Z postaci operatora widać, że $E(\omega): \tilde{Z} \rightarrow \tilde{Z}$ jest liniowy. Jego ograniczoność dowodzi się w identyczny sposób jak w twierdzeniu H-K-M [1977, s.288], jeśli zauważy się, że

$$\|E(\omega) \begin{bmatrix} u \\ v \\ \eta \end{bmatrix}\|_{\tilde{Z}} = \left\| [\mathcal{L}, A_1] \mathcal{L}^{-1} u + [\mathcal{L}, A_3] \mathcal{L}^{-1} \eta \right\|_0.$$

Pierwszy człon prawej strony jest identyczny z odpowiednim we wspomnianej pracy, natomiast szacowanie drugiego członu przebiega w identyczny sposób. Dla zasygnalizowania metody dowodu tam użytej podamy szacowanie drugiego członu.

Korzystając z transformacji Fouriera możemy napisać

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}, A_3] \mathcal{L}^{-1} \eta &= - \sum_{k=1}^n [(1-\Delta)^{\frac{s_2}{2}}, \mathfrak{S}_0^{-1} a^k \frac{\partial}{\partial x^k}] (1-\Delta)^{-\frac{s_2}{2}} \eta = \\ &= \sum_{k=1}^n [(1-\Delta)^{\frac{s_2}{2}}, \mathfrak{S}_0^{-1} a^k] (1-\Delta)^{-\frac{s-1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^k} (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \eta. \end{aligned}$$

Dla ostatniej grupy czynników, dokonując transformacji Fouriera, mamy

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x^k} (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \eta \right\|_0 &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x^k} (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \eta \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial x^k} (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \eta} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} i \xi^k (1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \overline{i \xi^k (1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{\eta} \cdot \hat{\eta}} dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\xi^k)^2}{1+\xi^2} \hat{\eta} \cdot \hat{\eta} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\eta} \cdot \hat{\eta} dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \|\eta\|_0. \end{aligned}$$

Komutator \mathcal{L} z operatorem mnożenia w \mathcal{H}^0 , może być oszacowany następująco

$$(*) \left\| [(\mathbb{1}-\Delta)^{\frac{s}{2}}, \rho_0^{-1} a^k] (\mathbb{1}-\Delta)^{-\frac{(s-1)}{2}} \right\|_{\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^2} \leq C_7 \left\| \text{grad } \rho_0^{-1} a^k \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}}$$

jeśli skorzysta się Lemma A2 w wykładach Kato [1975, s.66]. Wykorzystując własności przestrzeni Sobolewa oraz własności F funkcji gładkich na przestrzeniach Sobolewa, po zastosowaniu prawa różniczkowania złożonego oraz faktu, że a^k zależy od w a ten z kolei jest elementem skończonej kuli \tilde{W} , stwierdzamy, że prawa strona (*) jest jednostajnie ograniczona.

Ten fakt wraz z poprzednim oszacowaniem zawierającym normę \mathcal{L}^2 wektora $\underline{\eta}$ kończy ten etap dowodu; z niego wynika istnienie stałej dodatniej λ_E spełniającej nierówność

$$\|E(w)u\|_{\tilde{Z}} \leq \lambda_E \|u\|_{\tilde{Z}}.$$

Sprawdzenie, że funkcja operatorowa $E(w)$ spełnia warunek Lipschitza przebiega identycznie jak w dowodzie twierdzenia H-K-M. Wykorzystuje się tutaj powtórnie oszacowanie dla komutatora \mathcal{L} z operatorami mnożenia $\rho_0^{-1}(a^{k_b} - a'^{k_b})$ oraz $\rho_0^{-1}(a^k - a'^k)$, gdzie $a^{k_b} = a^{k_b}(w)$ zaś $a'^{k_b} = a^{k_b}(w')$ i $a^k = a^k(w)$, a także już wykazywane nierówności z Lematu 1; w szczególności dwie pierwsze dla $r = s$

$$\left\| \rho_0^{-1} a^{k_b} - \rho_0^{-1} a'^{k_b} \right\|_{\mathcal{H}^s} \leq C_4 \|w - w'\|_{\mathcal{H}^{s+1} \times \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^s}$$

$$\left\| \rho_0^{-1} a^k - \rho_0^{-1} a'^k \right\|_{\mathcal{H}^s} \leq C_4 \|w - w'\|_{\mathcal{H}^{s+1} \times \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^s}$$

Stąd

$$\begin{aligned} & \left\| [(\mathbb{1}-\Delta)^{\frac{s}{2}}, \rho_0^{-1} a^{k_b} - \rho_0^{-1} a'^{k_b}] (\mathbb{1}-\Delta)^{-\frac{s-1}{2}} \right\|_{\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^2} \leq \\ & \leq C_7 \left\| \text{grad } (\rho_0^{-1} a^{k_b} - \rho_0^{-1} a'^{k_b}) \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}} \leq C_7 \left\| \rho_0^{-1} a^{k_b} - \rho_0^{-1} a'^{k_b} \right\|_{\mathcal{H}^s} \leq C_7 C_4 \|w - w'\|_{\tilde{Z}} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} & \left\| \left[(1-\Delta)^{s/2}, \varrho_0^{-1} a^k - \varrho_0^{-1} a'^k \right] (1-\Delta)^{-\frac{s-1}{2}} \right\|_{L^2, L^2} \leq \\ & \leq C_7 \left\| \text{grad } \varrho_0^{-1} a^k - \varrho_0^{-1} a'^k \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}} \leq C_7' \left\| \varrho_0^{-1} (a^k - a'^k) \right\|_{\mathcal{H}^s} \\ & \leq C_7' C_4' \|w - w'\|_{\tilde{\mathcal{Y}}}. \end{aligned}$$

W końcu otrzymujemy

$$\| (E(w) - E(w')) \mathcal{U} \|_{\tilde{\mathcal{Z}}} \leq \lambda_E C_7' C_4' \|w - w'\|_{\tilde{\mathcal{Y}}} \| \mathcal{U} \|_{\tilde{\mathcal{Z}}},$$

co kończy dowód nierówności $\|E(w) - E(w')\|_{\tilde{\mathcal{Z}}, \tilde{\mathcal{Z}}} \leq \mu_E \|w - w'\|_{\tilde{\mathcal{Y}}}$.

Przejdźmy do zbadania regularności funkcji $f: [0, T] \times \tilde{\mathcal{W}} \rightarrow \tilde{\mathcal{Z}}$ oraz funkcji operatorowej $A(\cdot): \tilde{\mathcal{W}} \rightarrow \text{lin}(\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{Z}})$ by wykazać spełnienie pozostałych trzech warunków twierdzenia H-K-M. Wpierw zdefiniujmy zbiór

$$\tilde{\mathcal{W}}_g := \tilde{\mathcal{W}} \cap \mathcal{H}_{n,m}^{s+2} \times \mathcal{H}_{n,m}^{s+1} \times \mathcal{H}_{n,p+1}^{s+1},$$

który jest gęstym podzbiorem kuli $\tilde{\mathcal{W}}$.

LEMAT 5. Istnieją stałe dodatnie λ_A oraz μ_A takie, że dla wszystkich $w', w \in \tilde{\mathcal{W}}$

$$\|A(w)\|_{\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{Z}}} \leq \lambda_A, \quad \|A(w) - A(w')\|_{\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{Z}}} \leq \mu_A \|w' - w\|_{\tilde{\mathcal{Z}}}$$

oraz dla każdego $u_0 \in \tilde{\mathcal{W}}_g$ istnieje stała $\lambda'_A > 0$ taka, że dla wszystkich $w \in \tilde{\mathcal{W}}$

$$\|A(w)u_0\|_{\tilde{\mathcal{Y}}} \leq \lambda'_A.$$

Dowód. Przyjęte założenia regularności A_1 , własności przestrzeni Sobolewa oraz punkt a/ własności F funkcji gładkich określonych na przestrzeni Sobolewa sprawiają, że współczynniki funkcyjne $\varrho_0^{-1} a^{kl}$ oraz $\varrho_0^{-1} a^k$ są jednostajnie ograniczone odpowiednio w $\mathcal{H}_{n,m}^{s, \text{ul}}$ i $\mathcal{H}_{n,m}^{s, \text{ul}}$ dla wszystkich $w \in \tilde{\mathcal{W}}$. Wykorzystując w poniższych oszacowaniach fakt, że punktowe

mnożenie jest ciągłe w sensie $\mathcal{H}_u^s \cdot \mathcal{H}^{s-1} \subset \mathcal{H}^{s-1}$ dla $s > \frac{n}{2}$ możemy wprowadzić następujący ciąg oszacowań, gdy $u \in \tilde{\mathcal{Y}}$,

$$\begin{aligned} \left\| A(w) \begin{bmatrix} \frac{u}{v} \\ \eta \end{bmatrix} \right\|_{\tilde{\mathcal{X}}} &= \left\| \left[-v, -\sum_{K,L} \rho_0^{-1} a^{KL} \frac{\partial^2 u}{\partial x^K \partial x^L} - \sum_{K=1}^m \rho_0^{-1} a^K \frac{\partial \eta}{\partial x^K}, 0 \right] \right\|_{\tilde{\mathcal{X}}} \leq \\ &\leq \|v\|_{\mathcal{H}^s} + \sum_{K,L} \left\| \rho_0^{-1} a^{KL} \frac{\partial^2 u}{\partial x^K \partial x^L} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}} + \sum_{K=1}^m \left\| \rho_0^{-1} a^K \frac{\partial \eta}{\partial x^K} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}} \leq \\ &\leq \|v\|_{\mathcal{H}^s} + c_B \left\{ \sum_{K,L=1}^m \left\| \rho_0^{-1} a^{KL} \right\|_{\mathcal{H}_{ul}^s} \|u\|_{\mathcal{H}^{s+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{K=1}^m \left\| \rho_0^{-1} a^K \right\|_{\mathcal{H}_{ul}^s} \|\eta\|_{\mathcal{H}^s} \right\} \leq \lambda_A \|u\|_{\tilde{\mathcal{Y}}}, \end{aligned}$$

gdzie stała $\lambda_A := 2 \max \{1, 3c_B c_B m\}$ zaś c_B jest stałą ograniczającą każdy z wyrazów $\left\| \rho_0^{-1} a^{KL} \right\|_{\mathcal{H}_{ul}^s}$, $\left\| \rho_0^{-1} a^K \right\|_{\mathcal{H}_{ul}^s}$, $K, L = 1, \dots, m$.

Niech teraz $\psi \in \tilde{\mathcal{W}}_g$, powtarzając poprzednie rozumowanie, otrzymamy

$$\begin{aligned} \left\| A(w) \begin{bmatrix} \frac{\psi}{v} \\ \eta \end{bmatrix} \right\|_{\tilde{\mathcal{Y}}} &= \left\| \left[-v, -\sum_{K,L} \rho_0^{-1} a^{KL} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^K \partial x^L} - \sum_{K=1}^m \rho_0^{-1} a^K \frac{\partial \eta}{\partial x^K}, 0 \right] \right\|_{\tilde{\mathcal{Y}}} \\ &\leq \|v\|_{\mathcal{H}^{s+1}} + \sum_{K,L=1}^m \left\| \rho_0^{-1} a^{KL} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^K \partial x^L} \right\|_{\mathcal{H}^s} + \sum_{K=1}^m \left\| \rho_0^{-1} a^K \frac{\partial \eta}{\partial x^K} \right\|_{\mathcal{H}^s} \\ &\leq \|v\|_{\mathcal{H}^{s+1}} + c_B' \left\{ \sum_{K,L=1}^m \left\| \rho_0^{-1} a^{KL} \right\|_{\mathcal{H}_{ul}^s} \|\psi\|_{\mathcal{H}^{s+2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{K=1}^m \left\| \rho_0^{-1} a^K \right\|_{\mathcal{H}_{ul}^s} \|\eta\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \right\} \\ &\leq \max \{1, 3c_B' c_B' m\} \left(\|v\|_{\mathcal{H}^{s+1}} + \|\psi\|_{\mathcal{H}^{s+2}} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \right) \\ &=: \lambda'_A. \end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić ciągłość w sensie Lipschitza funkcji operatorowej $A(\cdot): \tilde{W} \rightarrow \text{lin}(\tilde{Y}, \tilde{X})$. Dla dowolnej pary $w, w' \in \tilde{W}$ oraz $u \in \tilde{Y}$ można wyprowadzić oszacowanie, korzystając z ciągłości $\mathcal{H}^{s-1} \cdot \mathcal{H}^{s-1} \subset \mathcal{H}^{s-1}$,

$$\begin{aligned} \|(A(w) - A(w'))u\|_{\tilde{X}} &= \left\| \sum_{k,l=1}^m \rho_0^{-1} (a^{kl} - a'^{kl}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^m \rho_0^{-1} (a^k - a'^k) \frac{\partial u}{\partial x^k} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1} \times \mathcal{H}^{s-1}} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq C_{10} \left\{ \sum_{k,l=1}^m \|\rho_0^{-1} a^{kl} - \rho_0^{-1} a'^{kl}\|_{\mathcal{H}^{s-1}} \|u\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^m \|\rho_0^{-1} a^k - \rho_0^{-1} a'^k\|_{\mathcal{H}^{s-1}} \|u\|_{\mathcal{H}^s} \right\} \end{aligned}$$

$$\leq 2C_4 C_{10} \|w - w'\|_{\mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^{s-1} \times \mathcal{H}^{s-1}} (\|u\|_{\tilde{Y}})$$

To kończy dowód spełnienia przez A warunku Lipschitza. \square

WNIOSEK. Przy postawionych założeniach A_1 i A_2 warunki (v) - (vii) założeń twierdzenia H-K-M są spełnione.

Dowód. Ostatnio udowodniony lemat zapewnia spełnienie warunków (v) i (vi) odnoszących się do funkcji operatorowej $A(\cdot)$. Dowód ograniczonosci i ciągłości w sensie Lipschitza funkcji $f: [0, T] \times \tilde{W} \rightarrow \tilde{Y}$ przebiega w sposób podobny. W istocie, punkt o/ Własności F funkcji gładkich na przestrzeni Sobolewa wraz z przyjętymi założeniami regularności A_1 , daje $f(t, w) \in \tilde{Y}$ dla wszystkich $w \in \tilde{W}$. Jeśli tak, to punkt o/ Własności F oraz ciągłe zanurzenie $\mathcal{H}^s \subset \mathcal{H}^s_w$ zabezpieczają jednostajne ograniczenie $b(t, x, \nabla_1 w)$ oraz $a^{-1}_{\rho_0}(k)(t, x, \nabla w)$ w \mathcal{H}^s dla $t \in [0, T]$ i $w \in \tilde{W}$. Stąd $f(t, w)$ jest jednostajnie ograniczony w \tilde{Y} . Dowód spełnienia warunku Lipschitza przez f bezpośrednio wykorzystuje punkt b/ Własności F (por. Lemat 1). Ciągłość funkcji $f(\cdot, w): [0, T] \rightarrow \tilde{Z}$ wynika z przyjętej ciągłości w zmiennej t funkcji b i r_2 . \square

W ten sposób wyczerpaliśmy listę niezbędnych założeń, których spełnienie jest warunkiem wystarczającym słuszności następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE. Przy przyjętych założeniach A_1 i A_2 niech stan U_0 jest taki, że $\nabla_1 U_0(x) \in \Omega$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^m$. Wtedy dla dowolnej trójki warunków początkowych $(\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{\eta}_0) \in \mathcal{H}^{s+1} \times \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^s$ przy $s > 2,5$ istnieje niezerowy przedział czasu $[0, T'] \subset \mathbb{R}^+$ oraz otoczenie $\mathcal{V} \ni (\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{\eta}_0)$ takie, że przy każdych warunkach początkowych leżących w zbiorze \mathcal{V} problem początkowy (18.3) (por. (18.1) i (18.5)) ma jednoznaczne rozwiązanie $U(t, \cdot)$ dla $t \in [0, T']$ spełniające warunki $\underline{u}(t, \cdot) \in \mathcal{H}_{n,m}^{s+1}$, $\underline{v}(t, \cdot) \in \mathcal{H}_{n,m}^s$, $\underline{\eta}(t, \cdot) \in \mathcal{H}_{n,p+1}^s$ i $U(t, \cdot) \in \tilde{W}$, w szczególności $\nabla_1 U(t, x) \in \Omega$ dla każdego $(t, x) \in [0, T'] \times \mathbb{R}^m$, a ponadto $u \in C^r([0, T'], \mathcal{H}_{n,m}^{s+1-r})$ dla $0 \leq r \leq s-1$, $\underline{\eta} \in C^2([0, T'], \mathcal{H}_{n,p+1}^{s-2})$. Ponadto rozwiązanie jest ciągłą funkcją w $\mathcal{H}^{s+1} \times \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^s$ swojego warunku początkowego, tzn. jeśli $\hat{e}_t: \mathcal{V} \rightarrow \tilde{W}$ jest odwzorowaniem przyporządkowującym wartości początkowej (powiedzmy $(\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{\eta}_0)$) odpowiadające jej rozwiązanie (powiedzmy $(\underline{u}(t, \cdot), \underline{v}(t, \cdot), \underline{\eta}(t, \cdot)) = \hat{e}_t(\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{\eta}_0)$), to \hat{e}_t jest ciągle w topologii $\tilde{Y} := \mathcal{H}^{s+1} \times \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^s$ jednostajnie w $t \in [0, T']$. \square

Uzyskane powyżej twierdzenie o istnieniu rozwiązania i jego ciągłej zależności od warunków początkowych wymaga, w porównaniu z twierdzeniem o jednoznaczności i stabilności (por. [Kosiński [1981]_A oraz rozdział 4 tej pracy) rozwiązania problemu początkowo-brzegowego w przemieszczeniach dodatkowego założenia obok ścisłej eliptyczności A_2 . Jest nim założenie o regularności funkcji konstytutywnych i prawej strony układu równań sformułowane warunkiem A_1 .

IV. Stabilność rozwiązania problemu początkowo - brzegowego z dyssypacją

W tym rozdziale naszą uwagę skoncentrujemy na analizie układu równań teorii termodynamicznej, które mogą być zapisane w postaci równań bilansu.

20. Układ równań bilansu

Nasuwa się pytanie o warunki wystarczające, które pozwalają układ równań bilansu wraz z równaniem ewolucji zapisać w wymaganej postaci.

Przeanalizujemy ten problem na przykładzie równań lokalnej teorii z wewnętrznymi zmiennymi stanu z lepkością różniczkową. Równania tego typu pojawiają się w literaturze, a ich rzecznikiem jest Morro^{x/} [1980]. W przypadku zlokalizowanym do umiejscowienia początkowego μ_{τ_0} , równanie ewolucji dla zmiennych ω , dla nieprzewodnika ciepła, może być zapisane w postaci

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = H_2(F, \eta, \omega) \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right] + H_1(F, \eta, \omega) \frac{\partial \eta}{\partial t} + H_0(F, \eta, \omega)_{\mu_{\tau_0}}$$

gdzie wartości funkcji konstytutywnych H_2 oraz H_1 działają liniowo na odpowiednie pochodne. Aby powyższa postać mogła być zapisana w postaci zredukowanego (ze względu na brak pochodnych przestrzennych) równania bilansu wystarczy, że istnieje zmienna c będąca funkcją F i η , tzn. $c = c_{\mu}^*(F, \eta)$ taka, że

$$H_2 \equiv \frac{\partial c_{\mu}^*}{\partial F} \quad ; \quad H_1 \equiv \frac{\partial c_{\mu}^*}{\partial \eta}$$

x/ Morro pokazał, że uwzględnienie liniowej zależności prawej strony równań ewolucji od tensora D (por. (4.4)) oraz gradientu temperatury przy liniowych związkach konstytutywnych dla naprężenia i strumienia ciepła, w granicznym stanie stacjonarym ($D(t) = \text{const}$ i $\nabla \psi(t) = \text{const}$) prowadzi do równań lepkiej cieczy Newtona z prawem Fouriera przewodnictwa ciepła. Stan niestacjonarny z kolei opisuje efekt drugiego dźwięku.

Wtedy pierwsze równanie może być zapisane w postaci

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = H_{\mu_{T_0}}^{\bar{F}}(F, \eta, \bar{\omega}), \quad \text{gdzie } \bar{\omega} := \omega - c$$

oraz

$$H_{\mu_{T_0}}^{\bar{F}}(F, \eta, \bar{\omega}) := H_{\mu_{T_0}}(F, \eta, c^*(F, \eta) + \bar{\omega}),$$

Jeśli spojrzymy teraz na równania bilansu (16.12), to stwierdzimy, że ich postać jest konsekwencją zlokalizowanego prawa bilansu. Rzeczywiście, nieskomplikowana analiza wyprowadzonych w p.9 równań bilansu w umiejscowieniu aktualnym $\mu_T(\mathcal{B})$ wraz prawami przejścia (16.9) - (16.11), prowadzi do praw bilansu

$$(20.1) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mu_{T_0}(\mathcal{B}) \setminus \hat{u}_t^{-1}(\mathcal{A}_{\mu_T}^0)} \rho_0 v \, dv = \int \bar{\pi} \bar{n} \, da + \int \rho_0 b \, dv,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mu_{T_0}(\mathcal{B}) \setminus \hat{u}_t^{-1}(\mathcal{A}_{\mu_T}^0)} \rho_0 \left(\mathcal{E} + \frac{1}{2} v \cdot v \right) dv = \int (v \bar{\pi} - \bar{q}) \cdot \bar{n} \, da + \int \rho_0 (v \cdot b + \tau e) \, dv,$$

gdzie \bar{n} oznacza normalną zewnętrzną do $\partial \mu_{T_0}(\mathcal{B})$ i $t = T - T_0$. Stąd uzyskujemy równania (16.12) przy założeniu, że nie ma produkcji pędu ani energii w podobszarach (tj. obrazach podciał pod działaniem μ_{T_0}) obszaru $\mu_{T_0}(\mathcal{B}) \setminus \hat{u}_t^{-1}(\mathcal{A}_{\mu_T}^0)$, a same funkcje występujące pod całkami są prawie wszędzie różniczkowalne. Dokładniej pole prędkości v winno być klasy L w czasie na $[0, \sigma]$, wraz z energią wewnętrzną \mathcal{E} , natomiast pola: naprężenia $\bar{\pi}$, strumienia ciepła \bar{q} oraz strumienia energii mechanicznej $v \bar{\pi}$ winny być klasy L w x na $\mu_{T_0}(\mathcal{B}) \setminus \hat{u}_t^{-1}(\mathcal{A}_{\mu_T}^0)$.

Jeśli występuje powierzchnia osobliwości $\mathcal{A}_{\mu_T}^0 \subset \mu_T(\mathcal{B})$, której obrazem w μ_{T_0} jest $\hat{u}_{T-T_0}^{-1}(\mathcal{A}_{\mu_T}^0)$ to nawet zakładając, że $\mathcal{A}_{\mu_T}^0$ jest nieważka, tzn. $\rho_{\mathcal{A}_{\mu_T}^0} = 0$, nie możemy się ustrzec przed osobliwościami wynikającymi z nieciągłości pól na $\hat{u}_t^{-1}(\mathcal{A}_{\mu_T}^0)$ oraz z ewentualną produkcją entropii (por. (9.49) i komentarz w p. 9.5).

Przeanalizujemy tę sytuację dokładniej. W tym celu wprowadźmy "wektor" zmiennych poszukiwanych U , który będzie się składał

z gęstości pędu $\rho_0 v$, gęstości całkowitej energii $E := \rho_0(\epsilon + \frac{1}{2}v \cdot v)$ oraz pozostałych zmiennych pochodzących ze stanu σ , których istnienie nie było uwzględnione w występujących równaniach bilansu (20.1). Wtedy ograniczając się do równań ewolucji, które w tych zmiennych przyjmują postać równań bilansu $x/$, możemy zapisać pełen układ w postaci prawa bilansu

$$(20.1)' \quad \int_{\alpha(B)} \mathcal{U} \Big|_0^\tau d\sigma + \int_0^\tau \int_{\partial \alpha(B)} f \cdot \bar{n} da dt = \int_0^\tau \int_{\alpha(B)} B dv dt.$$

Celowo zastąpiliśmy postać różniczkowo - całkową, dotąd stosowaną, postacią całkową. Dzięki niej nie musimy wykluczać obszaru całkowania powierzchni osobliwości.

Ponadto przyjęliśmy $\alpha := \mu_{\tau_0}$.

Ograniczając naszą uwagę do sytuacji w której nie ma koncentracji masy na powierzchni ani produkcji pędu i energii w całym obszarze, dopuszczamy istnienie powierzchni nieciągłości czasowych przebiegów pola \mathcal{U} . To oznacza, że uwzględniamy istnienie hiperpowierzchni $\mathcal{S} \subset \alpha(B) \times [0, \tau] :=: \mathcal{D}$, która jest nośnikiem nieciągłości pola \mathcal{U} .

W tym miejscu dla zachowania odpowiedniej ścisłości warto wrócić do klasy $BV(\mathbb{R}^4)$ i od razu postawić problem ogólniej i założyć, że \mathcal{U} jest elementem tej klasy.

Tak też zrobimy lecz za chwilę. Przedtem przeprowadźmy dyskusję ograniczeń termodynamicznych nakładanych przez nierówność produkcji entropii na każde rozwiązanie układu (20.1)'.

20.1 Równanie bilansu entropii jako konsekwencja drugiego prawa termodynamiki

Nierówność (9.44) (bądź (9.45)) przeniesiona do umiejscowienia początkowego $\alpha = \mu_{\tau_0}$ i zapisana w postaci globalnej, przyjmie

x/ Przypadek ten obejmuje cząstkowe równanie różniczkowe dla zmiennych wewnętrznych (16.19), w którym $\mathcal{L}_\tau(F, \mathcal{D}, \omega) := \text{Div } f_\omega(F, \mathcal{D}, \omega)$.

formę

$$(20.2) \quad \int_{\alpha(B)} \varrho_0 \eta \Big|_0^T dv \geq \int_0^T \int_{\partial \alpha(B)} \bar{k} \cdot \bar{n} da dt + \int_0^T \int_{\alpha(B)} \varrho_0 \frac{\sigma_e}{v} dv dt,$$

gdzie $\bar{k}(x,t) := \int_t^T k_{\mu_{T_0+t}}(\mu_{T_0+t}(X)) F_{(x,t)}^T dx$ jest przeniesionym strumieniem entropii do μ_{T_0} przy pomocy procesu przemieszczania (16.7), którego F jest tensorem, zaś $x = \mu_{T_0}(X)$ (por. (16.14)). Przyjeliśmy też naturalne żądanie w postaci (9.43). Jest oczywiste, że zgodnie z dyskusją prowadzoną w p. 9.5, żądamy spełnienia warunków (9.43) między strumieniami entropii i ciepła na brzegu ciała.

Zgodnie z zamierzeniem przyjmujemy, że układ (20.1)' lokalnie jest układem równań różniczkowych pierwszego rzędu, dla którego człon β częściowo reprezentujący działanie zewnątrz, może być dodatkowo funkcją x oraz t . W myśl nomenklatury rozdziału 2 oznacza, to że przez odpowiedni dobór zmiennych morfizm materialny \bar{S} , przypisujący reakcję materiału po ewolucji stanu, może być zlokalizowany, tak jak w (16.21). Podobne założenie czynimy o strumieniu \bar{k} . Człon $\varrho_0 \sigma_e / v$ może oczywiście zależeć nie tylko od U ale i od zmiennych t oraz x .

Przy ciągłości Lipschitza morfizmów f oraz \bar{k} w zmiennej U oraz zakładając, że mamy do czynienia z $U: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^M$ ciągłym w sensie Lipschitza, zlokalizowane prawo bilansu (20.1)' oraz nierówność (20.2) prowadzą do układu równań bilansu

$$(20.3) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \text{Div } f(U) = \beta(U; t, x) \quad H_4\text{-p.w. na } \mathcal{D},$$

oraz nierówności różniczkowej

$$(20.4) \quad \frac{\partial \varrho_0 \eta}{\partial t} - \text{Div } \bar{k}(U) \geq \varrho_0 \frac{\sigma_e}{v} \quad H_4\text{-p.w. na } \mathcal{D}.$$

Wracając do interpretacji nierówności (20.4) z rozdziału 2 p. 17, mamy:

SPOSTRZEŻENIE 13. Każde ciągle w sensie Lipschitza rozwiązanie

układu (20.3) spełnia nierówność (20.4) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(20.5) \quad \nabla_u \eta^* \nabla_u f = - \nabla_u k^*$$

oraz

$$(20.6) \quad \nabla_u \eta^* \cdot B(u; t, x) - \frac{\rho_0 \tau_e}{\Omega} \geq 0 \quad ; \quad H_4\text{-p.w. na } \mathcal{D},$$

gdzie

$$\rho_0 \eta = \eta^*(u) \quad , \quad \bar{k} = k^*(u).$$

Dowód. Warunek wystarczający jest oczywisty. Aby wykazać warunek konieczny przyjmijmy, że $\nabla_u \eta^* \nabla_u f + \nabla_u k^* \neq 0$. Wtedy biorąc dowolne gładkie rozwiązanie \bar{u} układu (20.3), spełnienie nierówności (20.4) jest równoważne wypełnieniu warunku różniczkowego

$$(20.7) \quad (\nabla_u \eta^* \nabla_u f + \nabla_u k^*) \cdot \text{Grad } \bar{u} \leq - \frac{\rho_0 \tau_e}{\Omega} + \nabla_u \eta^* \cdot B(\bar{u}; t, x).$$

Skoro wyraz w nawiasie nie znika tożsamościowo możemy dobrać lokalną wartość $\text{Grad } \bar{u}$ niezależnie ^{x/} od wartości \bar{u} tak, że cała nierówność (20.7) nie będzie spełniona, dla tego konkretnego rozwiązania. Stąd jako warunek konieczny otrzymujemy tożsamościowe znikanie wyrazu w nawiasie w (20.7) a tym samym (20.5), a to już pociąga nierówność (20.6). \square

WNIOSEK. Układ równań bilansu (20.3) ograniczony nierównościami produkcji entropii, tj. jednostronnymi więzami różniczkowymi (20.4), jest wzbogacony skalarnym równaniem bilansu entropii

$$(20.8) \quad \frac{\partial \eta^*}{\partial t} - \text{Div } k^* = \nabla_u \eta^*(u) \cdot B(u, t, x) \quad , \quad H^4\text{-p.w. na } \mathcal{D},$$

^{x/} W szczególności nierówność (20.7) można zaburzyć dowolnym gradientem wartości początkowej rozwiązania \bar{u} .

tzn. każde ciągle w sensie Lipschitza rozwiązanie układu (20.3) spełnia (20.8) i jedynym ograniczeniem na rozwiązanie jest nierówność (20.6) . \square

Jeśli na konkretnym przykładzie układu równań dyskutowanym w poprzednim rozdziale zechcielibyśmy prześledzić warunek (20.5), to okaże się, że sprowadza się do związków potencjalnych między naprężeniem, temperaturą a pochodnymi energii wewnętrznej zaś nierówności (20.6) odpowiada warunek

$$-\frac{\partial \hat{E}}{\partial \omega} \cdot l_0 \geq 0,$$

gdzie $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \hat{l}_0(F, \eta, \omega)$. Wtedy równanie bilansu entropii (20.8) przedstawia się (por. p.19, powyżej układu (19.3)) w postaci

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{v}} \frac{\partial \hat{E}}{\partial \omega} \cdot \hat{l}_0 + \frac{1}{\bar{v}} r_e.$$

Zauważmy, że w tym przykładzie $\bar{k} = \bar{q} \equiv 0$ i dostarczenie entropii z zewnątrz odbywa się w sposób objętościowy dzięki objętościowym źródłom ciepła.

Wróćmy do sytuacji ogólnej. Ze względu na równanie bilansu entropii (20.8) oraz dwie postacie nierówności produkcji entropii (20.4) (dla układu (20.3)) oraz (20.6), przy czym tę ostatnią należy interpretować jako nierówność produkcji entropii dla układu (20.3), różnica

$$(20.9) \quad \nabla_{\mu} \eta^* \cdot B(\mu; t, x) - s_0 \frac{r_e}{\bar{v}} =: p_{\eta}$$

jest gęstością produkcji entropii w układzie w procesie gładkim, tzn. ciągłym w sensie Lipschitza.

Stąd naturalnie narzucająca się myśl określenia układów, dla których p_{η} określone przez (20.9) znika H_{μ} -p.w. w D jako nie-dyssypatywnych.

W przykładzie powyżej rozpatrzonym odpowiada to warunkowi

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial \omega} \cdot l_0 = 0.$$

20.2 Produkcja entropii na powierzchni nieciągłości

Całkując (20.9) po objętości po czasie, otrzymamy całkowitą produkcję entropii w ciele B w przedziale czasu $[0, \tau]$, na którym proces termodynamiczny reprezentowany przez rozwiązanie U jest badany.

Dla każdego podobszaru $D_t := \alpha(P) \times [0, t[$, $P \in \mathcal{S}$ produkcja entropii $P_\eta(D_t)$ będzie równa

$$(20.9) \quad P_\eta(D_t) := \int_0^t \int_{\alpha(P)} p_\eta dv dt.$$

I tak jest przy założeniu, że proces jest gładki. Jeśli proces nie jest gładki, i występuje w D hiperpowierzchnia nieciągłości \mathcal{S} , to zlokalizowana nierówność produkcji entropii rozбивa się na dwie nierówności: przytaczaną już (20.4) ale słuszną teraz tylko w $D \setminus \mathcal{S}$ oraz

$$(20.10) \quad \bar{\sigma} \bar{u}_n [\eta] + [\bar{k}] \cdot \bar{n}_t \geq 0 \quad H_3\text{-p.w. na } \mathcal{S},$$

gdzie $\bar{u}_n := u_n - v \cdot \bar{n}_t / |\bar{P}^T n_t|_{H_3}$, o ile proces (rozwiązanie) U jest ciągle w sensie Lipschitza wszędzie w D z wyjątkiem powierzchni \mathcal{S} , na której doznaje nieciągłości skokowej. Wyrażenie występujące po lewej stronie (20.10) jest niczym innym jak gestością powierzchniowej produkcji entropii, oznaczanej przez $p_{S\eta}$.

Tak więc, gdy proces jest obszarami gładki i jego dziedzina określoności zawiera powierzchnię osobliwości, to istnieje wkład prawej strony (20.9) pochodzący od $p_{S\eta}$ i równy

$$\int\int_{D_t \cap \mathcal{S}} p_{S\eta} dv dt.$$

Jak ta dodatkowa produkcja rzutuje^{na} bilansu entropii (20.8) ?

Równanie bilansu (20.8) jest teraz słusne tylko w obszarze $D \setminus \mathcal{S}$. W związku z tym na wielkość

$$\int_{\alpha(B)} \eta \Big|_0^\tau dv - \int_0^\tau \int_{\alpha(B)} \bar{k} da dt$$

będzie się składała suma dwóch wyrażeń, jedno reprezentujące

rozkład z obszaru gładkości rozwiązania, tzn. z $D \setminus \mathcal{S}$, i drugie-
z powierzchni nieciągłości \mathcal{S} , tzn.

$$\int_{\alpha(\mathcal{B})} \eta^* \Big|_0^{\tau} dv - \int_0^{\tau} \int_{\partial \alpha(\mathcal{B})} \bar{k} \cdot \bar{n} dH_3 = \iint_{D \setminus \mathcal{S}} \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial t} - \text{Div} \bar{k} \right) dv dt + \int_{\mathcal{S}} [\rho_0 u_n [\eta]] + [[\bar{k}] \cdot \bar{n}] dH_3.$$

Ale pierwszy człon jest równy $\iint_{D \setminus \mathcal{S}} \nabla_u \eta^*(u) \cdot \mathcal{B}(u; t, x) dv dt$,

zaś drugi, na podstawie (20.10), jest nieujemny, stąd całkowo, w
miejsce równania bilansu entropii (20.8), otrzymujemy

$$(20.11) \quad \int_{\alpha(\mathcal{B})} \eta^* \Big|_0^{\tau} dv - \int_0^{\tau} \int_{\partial \alpha(\mathcal{B})} \bar{k} \cdot \bar{n} dH_3 \geq \int_0^{\tau} \int_{\alpha(\mathcal{B})} \nabla_u \eta^*(u) \cdot \mathcal{B}(u; t, x) dv dt.$$

Z przeprowadzonej analizy wynika, że obszar całkowania może
być zastąpiony dowolnym innym obszarem, dla którego można zasto-
sować formułę Greena-Gaussa. Stąd otrzymujemy dowód następującego
spostreżenia:

LEMAT. Jeśli rozwiązanie układu (20.3) ograniczonego zlokalizo-
waną nierównością (20.2), tzn. warunkiem, by

$$(20.12) \quad \int_{\alpha(\mathcal{P})} \eta^* \Big|_{t_1}^{t_2} dv \geq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \alpha(\mathcal{P})} \bar{k} \cdot \bar{n} da dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\alpha(\mathcal{P})} \frac{\rho_0}{a^2} dv dt$$

była spełniona dla każdego podciała $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ oraz $]t_1, t_2[\subset]0, \tau]$, jest
ciągle w sensie Lipschitza w D z wyjątkiem hiperpowierzchni
osobliwości \mathcal{S} , na której doznaje nieciągłości skokowej, to nier-
ówność

$$(20.13) \quad \int_{\alpha(\mathcal{P})} \eta^* \Big|_{t_1}^{t_2} dv - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \alpha(\mathcal{P})} \bar{k} \cdot \bar{n} da dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\alpha(\mathcal{P})} \nabla_u \eta^*(u) \cdot \mathcal{B}(u; t, x) dv dt$$

musi być spełniona dla każdego $\mathcal{P} \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ oraz $]t_1, t_2[\subset]0, \tau]$. \square

Uzyskany wynik będzie podstawą przy formułowaniu warunku
dopuszczalności rozwiązań słabych,

21. Stabilność rozwiązania klasycznego w klasie BV.

Nieliniowy i na ogół hiperboliczny charakter równań występujących w dynamice ciał odkształcalnych a szczególnie tych o postaci (20.3) sprawia, że początkowo ich gładkie rozwiązania z upływem czasu tracą nawet ciągłość i rozwijają się osobliwości w postaci fal uderzeniowych, tak że klasa gładkich funkcji (np. klasy L) jest za wąska do badania dużej liczby procesów o fizycznym znaczeniu.

Stosunkowo głęboka i wszechstronna analiza oraz istniejące dowody istnienia rozwiązań słabych (por. Conway i Smoller [1966] oraz Glimm [1965]) wykazały, że rozwiązania z nieciągłościami powinny być definiowane w klasie BV. Ale to jest możliwe tylko wtedy, gdy układ ma postać równań bilansu. Niestety tracimy zazwyczaj jednoznaczność rozwiązania, gdy poszerzamy klasę funkcji, do której rozwiązanie może należeć. Stąd pojawia się potrzeba sformułowania odpowiednich kryteriów dopuszczalności i ujednoznacznienia.

Interesującą dyskusję i porównanie różnych metod badania rozwiązań słabych i postulowanych kryteriów dopuszczalności można znaleźć w pracach Di Perna [1977], Dafermosa [1973, 1981, 1982], Friedrichsa i Laxa [1971] oraz Laxa [1971].

Większość autorów kryteriów dopuszczalności wychodzi przy ich formułowaniu z przesłanek fizycznych (por. Lin [1976], Dafermos [1974]). Podobną drogą pójdziemy tutaj a drogowskazem będzie dla nas ostatni lemat.

21.1 Własności funkcji z klasy BV

Przy sformułowaniu głównych wyników tego rozdziału wykorzystujemy własności klasy BV (\mathbb{R}^4). O części z nich mówiliśmy w p.8 przy definicji podciała. Z pozostałych własności nam potrzebnych przytoczymy kilka.

Jeśli $U \in BV(A)$, gdzie A jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n , to dziedzinę A zawsze można rozbić na trzy składowe

$$(21.1) \quad A = A(U) \cup \mathcal{I}(U) \cup R(U),$$

tak, że na zbiorze $A(U)$ funkcja U jest ciągła aproksymatywnie ^{x/}, na zbiorze $\mathcal{G}(U)$ funkcja doznaje aproksymatywnych nieciągłości skokowych, zaś $\mathcal{R}(U)$ jest zbiorem punktów nieregularnych funkcji U , tzn. punktów, w których funkcja nie posiada granic aproksymatywnych. Istotne w tym rozbięciu są miary zbioru $\mathcal{G}(U)$ i $\mathcal{R}(U)$

$$H_m(\mathcal{G}(U)) = 0, \quad H_{n-1}(\mathcal{R}(U)) = 0.$$

Ponadto w prawie każdym (H_{n-1} -p.w.) punkcie zbioru $\mathcal{G}(U)$ jest jednoznacznie określony (z dokładnością do zwrotu) wektor N , który jest wektorem normalnym do $\mathcal{G}(U)$ w tym punkcie i wyznacza kierunek nieciągłości funkcji w tym punkcie.

W tym obrazie fale uderzeniowe niesione są przez zbiór $\mathcal{G}(U)$, zaś punkty ewentualnych oddziaływań różnych fal są w zbiorze $\mathcal{R}(U)$.

Druga podstawowa własność funkcji klasy BV, to istnienie śladu. Jeśli $U \in BV(\mathbb{R}^n)$, zaś $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem o skończonym perimetrze, to wtedy istnieje H_{n-1} -p.w. ślad wewnętrzny U^+ oraz zewnętrzny U^- na istotnym ^{x/} brzegu $\partial^* A$ zbioru A . Jeśli dodatkowo $U^+ \in L^1(\partial^* A)$, to zachodzi wzór Greena-Gausa

$$(21.2) \quad \int_{A_*} \text{Grad } U \, dx = \int_{\partial^* A} U^+ N \, dH_{n-1},$$

gdzie A_* jest zbiorem punktów gęstości A zaś N jest wektorem normalnym zewnętrznym do $\partial^* A$ w sensie Federera [1945].

Tutaj $\text{Grad } U$ oznacza wektorową miarę Radona reprezentującą pochodną dystrybucyjną (dokładniej gradient dystrybucyjny) funkcji U (por. (8.1) i komentarz po nim).

Warto też wiedzieć, że dla każdego mierzalnego $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ ma miejsce następująca formuła

$$(21.3) \quad \int_{\mathcal{G}(U) \cap \mathcal{C}} \text{Grad } U = \int_{\mathcal{G}(U) \cap \mathcal{C}} (U_N(x) - U_{-N}(x)) \otimes N \, dH_{n-1}(x)$$

^{x/} Por. Łojasiewicz [1973, s. 256]

^{xx/} Jest to zbiór tych punktów z \mathbb{R}^n , które nie są ani punktami gęstości ani punktami rozrzedzenia zbioru A .

gdzie $U_N(x)$ oznacza aproksymatywną granicę funkcji U w punkcie x względem półprzestrzeni wyznaczonej przez wektor normalny N .

Kończąc przegląd podstawowych własności funkcji klasy BV (szczegółowy wykład znajdzie Czytelnik w pracach Volperta [1967], Volperta i Čudajeva [1975] oraz Federera [1969]), zwróćmy uwagę, że dla elementów z klasy BV nie zachodzi znane prawo różniczkowania iloczynu, tzn. reguła Leibniza, oraz prawo różnikowania superpozycji. Na szczęście, jeśli jeden z elementów iloczynu jest funkcją klasy L , tzn. ciągłą w sensie Lipschitza a drugi funkcją z klasy BV, to reguła Leibniza obowiązuje w sensie miar. Dla tego przypadku, a także dla przejrzystości późniejszych wyprowadzeń przypomnijmy, że przez iloczyn funkcji U i miary Radona ν rozumiemy miarę Radona $\lambda := U\nu$ równą całce

$$(21.5) \quad \lambda(c) = \int_c U(x) d\nu(x)$$

dla każdego zbioru borelowskiego $c \subset \mathbb{R}^n$.

21.2 Kryterium dopuszczalności

Aby określić słabe i dopuszczalne rozwiązanie układu (20.3) w obszarze ograniczonym D o skończonym perimetrze potrzebne są warunki graniczne: początkowo-brzegowe. Przedstawmy dwa typy:

Jeśli poszukujemy rozwiązania $U: \alpha(\mathcal{B}) \times [0, \sigma] =: \mathcal{D} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N$, to stawiamy warunki brzegowe

B_1 . $U(x, t) \in \mathcal{N}(x, t)$ dla $(x, t) \in \partial\alpha(\mathcal{B}) \times [0, \sigma]$, gdzie \mathcal{N} jest podprzestrzenią \mathbb{R}^N gładko zmieniającą się w x i t , albo

B_2 . $\mathcal{G}(U(x, t), t, x) = 0$ dla $(x, t) \in \partial\alpha(\mathcal{B}) \times [0, \sigma]$, gdzie $\mathcal{G}(\cdot, \cdot, \cdot): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ jest na ogół nieliniową transformacją na \mathbb{R}^N gładką w t i x .

Oczywiście, że warunek B_2 zawiera, jako szczególny warunek liniowy:

$$\mathbb{L}(t, x) u(x, t) = g(x, t) \quad , \quad \mathbb{L}(t, x) \in \text{lin}(\mathbb{R}^N),$$

zaś g jest daną funkcją.

Warunki początkowe, to dla $u_0: \overline{\alpha(\mathcal{B})} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N$ żądanie, by

$$(P) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dla} \quad x \in \overline{\alpha(\mathcal{B})}.$$

DEFINICJA 7. Przez ślabe rozwiązanie układu (20.3) ograniczonego przez (20.4) z warunkami brzegowymi \mathcal{B}_i , gdzie $i = 1$ lub 2 , oraz początkowymi (P) rozumiemy funkcję $u \in BV(\mathbb{R}^4)$ taką, że

i) $u = 0$ na $\mathbb{R}^4 \setminus \overline{\mathcal{D}}$,

ii) dla każdego $t \in [0, \tau]$ ślad wewnętrzny zawężenia $u|_{\mathcal{D}^+ t}$ należy do $\mathcal{L}^1(\partial^* \mathcal{D}^+ t)$, gdzie $\mathcal{D}^+ t := \alpha(\mathcal{B}) \times [0, t]$,

iii) spełnia (20.3) w sensie miar z dystrybucyjnymi pochodnymi

$$\partial u / \partial t + \text{Div} f(u),$$

iv) wewnętrzny ślad u^+ zawężenia $u|_{\overline{\mathcal{D}}}$ spełnia warunek brzegowy \mathcal{B}_i , H_2 -p.w. oraz $u^+(x, 0) = u_0(x)|_{\overline{\mathcal{D}}}$, H_2 -p.w. na $\overline{\alpha(\mathcal{B})}$. \square

Rozwiązania klasy L są definiowane identycznie bez uciekania się do śladów.

Skoro dla funkcji klasy BV żądamy spełnienia równania (20.3) w sensie miar, to nierówność termodynamiczna (20.4) też musi być rozumiana w sensie miar. Zgodnie z definicją pochodnej dystrybucyjnej, przyjmujemy, że każde rozwiązanie słabe winno spełniać nierówności

$$(21.6) \quad \int_{\mathcal{D}} \left\{ \rho_0 \eta \frac{\partial \psi}{\partial t} - \bar{k} \text{Grad} \psi + \rho_0 \frac{\tau_0}{\Omega} \psi \right\} dv dt \leq 0$$

dla każdego $\psi \in C^1_0(\mathcal{D})$ i $\psi \geq 0$.

W klasie BV nie jesteśmy w stanie odtworzyć wyników p.20 dotyczących dodatkowego prawa bilansu entropii. Skoro analiza rozwiązania, które jest klasy L, z wyjątkiem powierzchni jego nieciągłości \mathcal{S} , doprowadziła nas do nierówności (20.12), (którą musi cno spełniać), naturalnym się wydaje zażądać aby była spełniona przez każde rozwiązanie słabe x' .

x' Jest oczywiste, że każde rozwiązanie, które jest klasy L na \mathcal{D} z wyjątkiem punktów jego powierzchni nieciągłości jest rozwiązaniem słabym.

Kryterium dopuszczalności. Rozwiązanie słabe, spełniające nierówności (20.4) i

$$(21.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi \circ \eta - \text{Div } \bar{k} \geq \nabla_u \eta^*(u) \cdot B(u, t, x)$$

w sensie miar, są dopuszczalne.

Zauważmy, że rozwiązania klasy L są dopuszczalne, bo spełniają (21.7) jako równość (por. (20.8)).

21.3 Nierówność ewolucyjna i twierdzenie o stabilności

Od teraz będziemy rozpatrywać parę (u, \bar{u}) rozwiązań problemu mieszanego (20.3), B_i i (P) , gdzie \bar{u} jest klasy L, zaś u jest dopuszczalnym rozwiązaniem słabym, przy czym nie żądamy, by spełniały te same warunki początkowe i brzegowe.

Adaptując metodę Di Per-na'y [1979] z powodzeniem zastosowaną do termosprężystości przez Dafermosa [1979] oraz przez Kosińskiego [1980], w teorii z wewnętrznymi zmiennymi stanu, określimy dwie funkcje

$$(21.8) \quad \begin{aligned} -\alpha(u, \bar{u}) &:= \eta^*(u) - \eta^*(\bar{u}) - \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (u - \bar{u}), \\ \beta(u, \bar{u}) &:= \bar{k}(u) - \bar{k}(\bar{u}) + \nabla_u \eta^*(\bar{u}) (f(u) - f(\bar{u})) \end{aligned}$$

i policzymy jej 4-wymiarową (dystrybucyjną) dywergencję χ . Dla uproszczenia zapisu wstawmy

$$\pi(u) := -\nabla_u \eta^*(u) \cdot B(u, t, x).$$

Wtedy otrzymamy ^{x/}, przy wykorzystaniu obowiązujących oba rozwiązania równościach oraz nierównościach,

$$\chi := \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, \bar{u}) + \text{Div } \beta(u, \bar{u}) =$$

x/ Por. pracę Dafermosa i Kosińskiego [1982].

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \eta^*(u) - \frac{\partial}{\partial t} \eta^*(\bar{u}) - \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} u - \frac{\partial}{\partial t} \bar{u} \right) - \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \otimes (u - \bar{u}) \right) + \text{Div } \bar{k}(u) - \text{Div } \bar{k}(\bar{u}) + \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (\text{Div } f(u) - f(\bar{u})) \cdot \\
 &\quad + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (f(u) - f(\bar{u})) (\text{Grad } \bar{u})^T \leq \tau(u) - \tau(\bar{u}) + \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (B(u) - B(\bar{u})) \\
 &\quad + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot \{ (B(\bar{u}) - \text{Div } f(\bar{u})) \otimes (u - \bar{u}) \} + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (f(u) - f(\bar{u})) \\
 &\quad (\text{Grad } \bar{u})^T = \tau(u) - \tau(\bar{u}) - \nabla_u \tau(\bar{u}) \cdot (u - \bar{u}) + \nabla_u \tau(\bar{u}) \cdot (u - \bar{u}) + \\
 &\quad + \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (B(u) - B(\bar{u})) + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (B(\bar{u}) \otimes (u - \bar{u})) + \\
 &\quad - \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot ((\nabla_u f(\bar{u}) [\text{Grad } \bar{u}]) \otimes (u - \bar{u})) + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (f(u) - f(\bar{u})) \\
 &\quad (\text{Grad } \bar{u})^T = \tau(u) - \tau(\bar{u}) - \nabla_u \tau(\bar{u}) \cdot (u - \bar{u}) - \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (B(\bar{u}) \otimes (u - \bar{u})) \\
 &\quad - \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot \nabla_u B(\bar{u})(u - \bar{u}) + \nabla \eta^*(\bar{u}) \cdot (B(u) - B(\bar{u})) + \\
 &\quad + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (B(\bar{u}) \otimes (u - \bar{u})) + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \{ f(u) - f(\bar{u}) - \nabla_u f(\bar{u})(u - \bar{u}) \} \\
 &\quad \cdot \text{Grad } \bar{u}.
 \end{aligned}$$

▲ stąd już końcową nierówność x/

$$\begin{aligned}
 (21.9) \quad \delta \leq & \tau(u) - \tau(\bar{u}) - \nabla_u \tau(\bar{u}) \cdot (u - \bar{u}) + \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot \{ B(u) - B(\bar{u}) - \nabla_u B(\bar{u})(u - \bar{u}) \} \\
 & + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \{ f(u) - f(\bar{u}) - \nabla_u f(\bar{u})(u - \bar{u}) \} \cdot \text{Grad } \bar{u}.
 \end{aligned}$$

W wyprowadzeniu założyliśmy niezbędną gładkość funkcji w zmiennej u .

TWIERDZENIE 3. Niech Ω będzie otwartym wypukłym podzbiorem \mathbb{R}^N , na którym entropia jest ściśle wypukła, zaś $\mathcal{D} = \alpha(B) \times [0, \tau]$ jest zbiorem o skończonym perimetrze.

Niech \bar{u} będzie rozwiązaniem klasy L układu (20.3) z warunkami B_i oraz (P), takim, że $\bar{u}(x, t) \in \Omega$ dla $(x, t) \in \mathcal{D}$. Wtedy istnieją dodatnie stałe M, δ, ν o następujących własnościach: Jeśli u jest jakimkolwiek dopuszczalnym rozwiązaniem słabym układu (20.3) takim, że $u \in L^\infty(\bar{\mathcal{D}})$ oraz

x/ W wyprowadzeniu istotną rolę gra symetria $\nabla_u \nabla_u \eta^* \nabla_u f$, która jest konsekwencją warunku (20,5).

$$(21.10) \quad |u(x,t) - \bar{u}(x,t)|_{\mathbb{R}^N} < \delta \quad \text{dla } (x,t) \in \bar{D},$$

przy czym warunki początkowe i brzegowe B_i i (P) , są takie, że

$$(21.11) \quad \{ \bar{k}(u) - \bar{k}(\bar{u}) + \nabla_u \eta^*(\bar{u}) (f(u) - f(\bar{u})) \} \cdot \bar{n} \geq 0 \quad \text{na } \frac{\partial \alpha(B)}{\partial x} \Big|_{[0, \tau]},$$

to

$$(21.12) \quad \| (u - \bar{u})(\cdot, \cdot) \|_{\alpha(B)_*} \leq M e^{\nu s} \| (u_0 - \bar{u}_0)(\cdot) \|_{\alpha(B)_*},$$

gdzie \bar{n} jest rzutem na $\mathcal{T}(\partial \alpha(B))$ wektora zewnętrznego normalnego do $\partial^* D$.

Dowód. Jeśli \bar{u} jest w obszarze wypukłości funkcji $-\eta^*(u)$, to istnieją dwie dodatnie stałe δ i c_0 takie, że gdy (21.10) jest spełnione, to

$$(21.13) \quad \alpha(u(x,t), \bar{u}(x,t)) \geq c_0 \| u(x,t) - \bar{u}(x,t) \|_{\mathbb{R}^N}^2 \quad \text{dla } (x,t) \in D$$

Jeśli ustalimy $\epsilon \in [0, \tau]$ i obliczymy χ -miarę zbioru D_*^ϵ , to otrzymamy

$$(21.14) \quad \int_{D_*^\epsilon} \chi \, d\nu dt = \int_{\partial^* D^\epsilon} (\alpha, \beta)^\dagger \cdot N \, dH_3 = \int_0^\epsilon \left(\int_{\partial^* \alpha(B)} \beta^\dagger \cdot \bar{n} \, dH_2 \right) dt + \int_{\alpha(B)_*} \alpha \Big|_0^\epsilon \, d\nu$$

Wykorzystując (21.11) i obserwację, że prawa strona (21.9) jest wielkością kwadratową w zmiennej $u - \bar{u}$, uzyskamy

$$c_0 \int_{\alpha(B)_*} \| (u - \bar{u})(x, \epsilon) \|_{\mathbb{R}^N}^2 \, d\nu - \int_{\alpha(B)_*} \alpha(u_0(x), \bar{u}_0(x)) \, d\nu \leq \int_{D_*^\epsilon} \chi \, d\nu dt \leq c_1 \int_{\alpha(B)_*} \| (u - \bar{u})(x, t) \|_{\mathbb{R}^N}^2 \, d\nu dt$$

W końcu dostajemy

$$c_0 \int_{\alpha(B)_*} \| (u - \bar{u})(x, \epsilon) \|_{\mathbb{R}^N}^2 \, d\nu \leq c_1 \int_{\alpha(B)_*} \| (u - \bar{u})(x, t) \|_{\mathbb{R}^N}^2 \, d\nu dt + \bar{c}_1 \int_{\alpha(B)_*} \| (u_0 - \bar{u}_0)(x) \|_{\mathbb{R}^N}^2 \, d\nu$$

z pewną stałą C_1 zależną od $\sup_D |\bar{u}|_{\mathbb{R}^N}$ i $\sup_D |\text{Grad} \bar{u}|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^3}$ oraz $\bar{c}_1 = \text{Lip}(\nabla_u \eta^*(u))$. Stąd już otrzymujemy nierówność typu Gronwalla

$$y^2(s) \leq M^2 y^2(0) + 2\nu \int_0^s y^2(t) dt \quad \text{z} \quad y^2(s) := \int_{\alpha(B)_x} |u - \bar{u}|(x, s) \Big|_{\mathbb{R}^N} dv,$$

która prowadzi do poszukiwanej (21.12). \square

Zauważmy, że gdy oba rozwiązania u i \bar{u} leżą w obszarze wypukłości funkcji $-\eta^*$ dla każdego $(x, t) \in D$, nie jest wymagany warunek (21.10). Warunek (21.11) można interpretować jako żądanie by "obciążenia" na brzegu miały charakter dyssypacyjny.

Udowodnione twierdzenie prowadzi do jednoznaczności rozwiązania klasycznego, tj. z klasy L , w klasie dopuszczalnych rozwiązań słabych.

Następny wynik jest ogólniejszy, gdyż mówi o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych i prawej strony równania (20.3)

Rozpatrzmy dwa rozwiązania: jedno klasyczne \bar{u} odpowiadające układowi (20.3) z prawą stroną

$$\bar{B}(\bar{u}; t, x) := \bar{B}_1(x, t) \bar{u} + \bar{B}_0(x, t) + B_2(\bar{u}; t, x),$$

oraz słabe, dopuszczalne dla układu (20.3) z prawą stroną

$$B(u; t, x) := B_1(x, t) u + B_0(x, t) + B_2(u; t, x).$$

Zauważmy, że prawe strony obu układów różnią się członem liniowym. Wtedy w miejsce nierówności (21.9) otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta &\leq \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot \bar{B}(\bar{u}) - \nabla_u \eta^*(u) \cdot B(u) + \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (B(u) - \bar{B}(\bar{u})) + \\ &\quad + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (B(\bar{u}) - \text{Div} f(\bar{u})) \otimes (u - \bar{u}) + \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \cdot (f(u) - f(\bar{u})) \text{Grad} \bar{u}^T \\ &\leq \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u}) \{ f(u) - f(\bar{u}) - \nabla_u f(\bar{u})(u - \bar{u}) \} \cdot \text{Grad} \bar{u} + \\ &\quad - (\nabla_u \eta^*(u) - \nabla_u \eta^*(\bar{u})) \cdot (B(u) - \bar{B}(\bar{u})) - \{ \nabla_u \eta^*(u) - \nabla_u \eta^*(\bar{u}) - \nabla_u \nabla_u \eta^*(\bar{u})(u - \bar{u}) \} \bar{B}(\bar{u}). \end{aligned}$$

Drugi wyraz w ostatnim wierszu może być oszacowany przez

$$\begin{aligned} (\nabla_u \eta^*(\bar{u}) - \nabla_u \eta^*(u)) \cdot (B(u) - \bar{B}(\bar{u})) &\leq (\nabla_u \eta^*(\bar{u}) - \nabla_u \eta^*(u)) \cdot \{ B_1(u - \bar{u}) + B_1 - \bar{B}_1 \} \bar{u} \\ &\quad + B_0 - \bar{B}_0 + B_2(u) - B_2(\bar{u}) \Big|_f. \end{aligned}$$

przy założeniu, że B_2 jest klasy L w U . Stąd dla każdego γ -mierzalnego zbioru $D^c \subset D$ otrzymamy

$$\gamma(D^c) \leq K_1 \int_{D^c} |U - \bar{U}|(x, t)|^2 dx dt + K_2 \int_{D^c} \left(|U - \bar{U}|(x, t) \left(\|B_1 - \bar{B}_1\|_{\mathbb{R}^N} + \|B_0 - \bar{B}_0\|_{\mathbb{R}^{N^2}} \right) \right)$$

gdzie stałe K_1 oraz K_2 zależą od $\sup_D |U|_{\mathbb{R}^N}$, $\sup_D \|B_1\|_{\mathbb{R}^N}$ oraz $Lip(B_2)$.

Dzięki temu oszacowaniu powtarzając mutatis mutandis dowód poprzedniego twierdzenia uzyskujemy nierówność

$$(21.15) \quad \begin{aligned} \|(U - \bar{U})(s, \cdot)\|_{L^2(\alpha(B)_s)} &\leq M e^{\nu s} \|(U_0 - \bar{U}_0)(\cdot)\|_{L^2(\alpha(B)_0)} \\ &+ N e^{\nu s} \left\| \int_0^s (B_1 - \bar{B}_1, B_0 - \bar{B}_0)(t, \cdot) dt \right\|_{L^2(\alpha(B)_s)} \end{aligned}$$

dla każdego $s \in [0, \tau]$. I w tym przypadku potrzebne są założenia (21.10) oraz (21.11) wraz z odpowiednimi warunkami całkowalności funkcji $\bar{B}_0, \bar{B}_1, B_0$.

21.4. Uwagi końcowe

Dyskusję stabilności nie można zakończyć bez zwrócenia uwagi na warunki, przy których uzyskaliśmy stabilność i jednoznaczność rozwiązania klasycznego w szerszej klasie dopuszczalnych rozwiązań słabych (klasy BV).

Pierwszy warunek, to istnienie dodatkowego skalarnego równania bilansu (20.8). Ten matematyczny warunek - jak się okazuje z przeprowadzonej analizy - jest bezpośrednią konsekwencją nierówności produkcji entropii. To oznacza, że jego pojawienie się nie jest założeniem natury matematycznej lecz jawną ingerencją praw fizyki w modelowaniu konstytutywnym.

Inaczej ma się sprawa z warunkiem wypukłości narzuconym funkcji - entropii.

Jak łatwo wykazać własność wypukłości nie jest niezmiennicza

przy zmianie zmiennych stanu, w szczególności przy zmianie miar odkształcenia. Ten fakt wraz z obserwacją Balla [1977 s.338]. dowodzą, że wypukłość nie może być własnością materialną, tzn. własnością przypisaną morfizmowi materialnemu; może natomiast być własnością reprezentacji morfizmu w pewnym umiejscowieniu.

Trzecią niepokojącą komplikacją jest potencjalna niezgodność założenia o globalnej ^{x/} wypukłości funkcji entropii i zasady niezależności własności materialnych od nałożonego sztywnego obrotu ciała. Często udaje się ominąć tę niezgodność żądając, tak jak w rozpatrywanym przypadku, lokalną wypukłość w pewnym zakresie zmiennych.

Te trzy fakty dotyczące warunku wypukłości skłaniają nas do stwierdzenia, że potrzebne są dalsze badania w tym kierunku, aby wyrugować wypukłość. Drogowskazem tu dla nas może być warunek bądź quasi - wypukłości (por. Ball [1977]) bądź wypukłości względnej (Raniecki [1983]). Ten drugi warunek w zastosowaniu do ciał niesprężystych rokuje duże nadzieje na sukces.

Zamykając ten rozdział zwróćmy uwagę na jeszcze jeden wynik, jaki uzyskamy przy warunku ściślejszej wypukłości (lokalnej) funkcji entropii. Bez trudu, powołując się na wyprowadzenia Ruggeriego i Strumia [1981], wykazuje się, że wyjściowy układ (20.3) jest równoważny symetrycznemu ^{xx/} hiperbolicznemu układowi równań zapisywanych w postaci praw bilansu w nowej zmiennej zależnej

$$u^t = -\nabla_u \eta^*(u), \text{ tzn.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{u'} \eta'(u')) - \text{Div} \nabla_{u'} k'(u) = B(u, t, x),$$

gdzie $\eta'(u') = \eta^*(u) + u \cdot u'$ zaś $k'(u') = \bar{k}(u) + u' f(u)$ są transformacjami Legendre'a funkcji $-\eta^*$ oraz $-\bar{k}$. Ścisła wypukłość ingeruje w dowodzie, że macierz stojąca przy pochodnej $\partial u' / \partial t$ jest symetryczna i dodatnio określona. Symetria członu z pochodną przestrzenną jest bezpośrednią konsekwencją istnienia dodatkowego równania bilansu.

x/ Tzn. dla wszystkich wartości zmiennych stanu a nie tylko dla tych ograniczonych do zbioru Ω .

xx/ W sensie Friedrichsa.

Jeśli układ jest symetryczny, to stosując twierdzenie Kato [1975], czy adaptując dowód twierdzenia H-K-M (por. rozdział III), uzyskujemy, że problem początkowy dla układu (20.3) jest dobrze postawiany w przestrzeni \mathcal{H}^s , gdzie $s > \frac{n}{2} + 1$. Oczywiście wymagane tutaj są pewne warunki regularności odnośnie funkcji f, \bar{k}, η^* oraz B, podobne do tych jak w twierdzeniu poprzedniego rozdziału.

Warunek symetryczności przybliży perspektywę wykazania istnienia rozwiązania problemu początkowo-brzegowego dla układu (20.3) (Zajączkowski [1983]), jednak ta kwestia wraz z problemem osłabienia warunku wypukłości i uzyskania stabilności i jednoznaczności rozwiązań słabych będzie tematem przyszłych publikacji i badań.

BIBLIOGRAFIA

- Alexiewicz, A. [1969] Analiza funkcjonalna, PWN, Warszawa
- Ball, J.M., [1977] , Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, Arch.Rational Mech.Anal., 62, 337-403
- Banfi, C., Fabrizio M., [1981], Global theory for thermodynamic behaviour of a continuous medium, Ann.Univ. Ferrara, Sez.VII Sc. Mat., 27, 181-199
- Barański, W., [1974] Oddziaływania w ośrodku ciągłym, Praca habilitacyjna, Prace IPPT Nr 36, Warszawa
- Bowen, R.M., Wang, C.C., [1971] On displacement derivatives, Quart. Appl. Math., 29, 29-39
- Bree, J., Beevers, C.E., [1979] Non-equilibrium thermodynamics of continuous media, J.Non-Equil.Thermol., 4, 159-192
- Bland, D.R., [1970] Nonlinear dynamic elasticity, Ginn /Blaisdell/ Boston, Massachusetts
- Courant, R., Friedrichs, K.O., [1948] Supersonic flow and shock waves, Interscience Publishers, New York
- Coleman, B.D., Owen, D.R., [1974] A mathematical foundation of thermodynamics, Arch. Rational Mech. Anal., 54, 1-104
- Coleman, B.D., Owen, D.R., Serrin, J., [1981] The second law of thermodynamics for systems with approximate cycles, Arch. Rational Mech. Anal., 77, 103-142
- Conway, E., Smoller, J.A., [1966] Global solutions of the Cauchy problem for quasi-linear first-order equations in several variables, Comm. Pure Appl. Math., 19, 95-105
- Day, W.A., [1972] A condition equivalent to the existence of entropy in classical thermodynamics, Arch.Rat., Mech. Anal., 49, (2) 159-171
- Dafermos, C.M., [1974] The entropy rate admissibility criterion in thermo-elasticity, Rend.Accad. Naz. Lincei, Ser.VIII, 57, 113-119
- Dafermos, C.M., [1979] The second law of thermodynamics and stability, Arch. Rational Mech.Anal., 70 (3), 167-179
- Dafermos, C.M., [1981] The equations of elasticity are special, Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, vol.III, ed. R.J.Knops, Pitman, Boston, Melbourne, 96-103
- Dafermos, C.M., [1982] Dissipation stabilization and the second law of thermodynamics, Lecture Notes, CIME Course, Noto, Sicilia

- Dafermos, C.M., Kosiński, W., [1983] Continuous dependence of solutions within the class BV to quasi-linear hyperbolic systems with convex entropy, w druku
- Del Piero, G., [1975] On the elastic-plastic material element, Arch.Rational Mech.Anal., 52, 111-129
- Di Perna, R.J., [1977] Decay of solutions of hyperbolic systems of conservation laws with a convex extension, Arch. Rational Mech. Anal., 64 (1) 1-46
- Di Perna, R.J., [1979] Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws, Indiana U.Math.J., 28 (1), 137-188
- Edelen, D.G.B., [1976] Nonlocal Field Theories, w Continuum Physics, vol.IV, ed. A.C. Eringen, Academic Press, New York, San Francisco, London, s. 75-204
- Edelen, D.G.B., Mc Lennan, J.A., 1973 Material indifference: a principle or a convenience, Int. J.Engng.Sci., 11 813-817
- Engelking, R., [1976] Topologia ogólna, PWN, Warszawa
- Fabrizio, M., [1982] Lecture notes on thermodynamics, Univ. Ferrara
- Federer, H., [1945] The Gauss-Green theorem, Trans.Amer.Math. Soc., 59, 44-76
- Federer, H., [1969] Geometric measure theory, Springer, Berlin Heidelberg, New York
- Fichera, C., [1972] Existence theorems in elasticity, w Handbuch der Physik, t.IVa/2, Springer, Berlin Heidelberg, New York, 347-424
- Friedrichs, K.O., Lax, P.D., [1971] Systems of conservation laws with a convex extension, Proc.Natl. Acad. Sci. USA, 68, 1685-1688
- Frischmuth, K., [1982] Zagadnienia modelowania konstytutywnego i stabilności ciał dyssypatywnych, Praca doktorska, IPPT-PAN
- Frischmuth, K., Kosiński, W. [1982] The asymptotic rest property for materials with memory, Arch. Mech. 34, 515-521
- Frischmuth, K., Perzyna P., [1982] Thermodynamics of the modified structure with internal state variables, Arch. Mech., 34,
- Glimm, J., [1969] Solution in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Comm. Pure Appl. Math., 18, 697-715
- Green, A.E., Naghdi, P.M. [1977] On thermodynamics and the nature of the second law, Proc. Roy. Soc. Lond. A. 357, 253-270

- Green, A.E., Rivlin, R.S., [1964] On Cauchy's equations of motion, ZAMP, 15, 290-292
- Gurtin, M.E., Martins, L.C. [1976] Cauchy's theorem in classical physics, Arch.Rat.Mech.Anal., 60 (4), 305-324
- Gurtin, M.E., Mizel, V.J., Williams, W.O., [1968] A note on Cauchy's stress theorem, J.Math.Anal.Appl. 22, 398-401
- Gurtin, M.E., Williams, W.O., [1967] An axiomatic foundation for continuum thermodynamics, Arch. Rat. Mech.Anal., 26, (2) 83-117
- Halphen, B., Quoc Son Nguyen [1975], Sur les materiaux standard generalises, J.Mec. 14, 36-63
- Hughes, T.J.R., Kato, T., Marsden, J.E., [1977] Well-posed quasi-linear second-order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity, Arch. Rational Mech. Anal., 63 (3) 273-294
- Ingarden, R.S., A.Jamiołkowski, [1980] Mechanika klasyczna, PWN, Warszawa, Poznań
- Isbell, J.R., [1964] Uniform spaces, Amer.Math.Soc.Surveys, 12, Providence
- Kato, T., [1970] Linear evolution equations of "hyperbolic" type J.Fac.Sci. Univ. Tokyo 17, 241-258
- Kato, T., [1973] Linear evolution equations of "hyperbolic" type II, J.Math. Soc.Japan, 25, 648-666
- Kato, T. [1975] The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Arch.Rational Mech. Anal., 58, 181-205
- Kato, T. [1975] A Quasi-linear Equations of Evolutions, with Applications to Partial Differential Equations, Springer Lecture Notes, 448, 25-70
- Kirszbraun, M.D., [1934] Über die zusammenziehenden und Lipschitzchen Transformationen, Fund.Math., 22 77-108
- Kopczyński, W., Trautman A., [1981] Czasoprzestrzeń i grawitacja, PWN, Warszawa
- Kosiński, W. [1976] Intrinsic time in unique material structures, Division Mater. Eng. University of Iowa, Report G-123 DME-76-009, Iowa City
- Kosiński, W., [1980] On weak solutions, stability and uniqueness in dynamics of dissipative bodies, Abstracts Amer. Math.Soc. 1, 80T-B138, także w Arch.Mech. 33 (2), 319-323

- Kosiński, W., [1981] Wstęp do teorii osobliwości pola i analizy fal, PWN, Warszawa-Poznań
- Kosiński, W., [1981] A Uniqueness theorems in dynamics of dissipative bodies with nonlinear material structures, Trends in Application of Pure Mathematics to Mechanics, vol.III. ed. R.J.Knops, Pitman, Boston, London, Melbourne, s.163-178
- Kosiński, W., [1982] A note on stability of dissipative bodies, Arch. Mech., 34 (3) 401-407
- Kosiński, W., [1983] A On global evolution of states of deformable bodies, w Global Analysis-Analysis on Manifolds, ed. T.M. Rassias, Treubner Texte zur Mathematik, w druku
- Kosiński, W., Valamis, K.C., [1983] Temporal memory as a constitutive principle and its limitations Arch.Mech., 35 (4)
- Kosiński, W., [1983] B O prawach bilansu, w przygotowaniu
- Kružkov, S.N. [1970] Quasi-liniowe równania pierwszego rzędu w wielu zmiennych niezależnych /ros./ Mat.Sbornik, AN ZSRR, 81 (123) 228-255
- Lang, S., [1972] Differential manifolds, Addison-Wesley Reading, London,
- Lax, P.D. [1971] Shock waves and entropy, w Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. A.Zarantonello, Academic Press, New York, London, s. 603-634
- Liu, T.-P., [1976] The entropy condition and the admissibility of shocks, J.Math. Anal., Appl., 57, 78-88
- Łojasiewicz, St., [1973] Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych PWN, Warszawa
- Martin, R.H., [1975] Nonlinear operator and differential equations in Banach spaces, John Wiley and Sons, New York
- Mesarović, M.D., Takahara, Y., [1973] General system theory; Mathematical Foundation, Academic Press, New York
- Moeckel, G.P., [1974] Thermodynamics of an interface, Arch. Rational Mech. Anal. 57, (3) 255-280
- Morgan, A.J.A., [1975] Spatially cognitive media. I. Constitutive theory, Arch. Mech., 27 (2) , 343-356
- Morrey, C.B., [1966] Multiple Integrals in the Calculus of Variations; Springer, Berlin-Heidelberg-New York
- Morro, A., [1980] A wave propagation in thermo-viscous materials with hidden variables, Arch.Mech., 32, 145-161

- Murdoch, A.I. [1982] On material frame-indifference, Proc. Roy. Soc. Lond., A 330, 417-426
- Murdoch, A.I. [1983] On material frame-indifference and constitutive relations motivated by the kinetic theory of gases w druku
- Müller, I., [1972] On the frame dependence of stress and heat flux, Arch. Rational Mech. Anal., 45, 241-250
- Noll, W., [1955] On the continuity of the solid and fluid states, J. Rational, Mech. Anal., 4 (1) 3-81
- Noll, W., [1959] La mécanique classique, basée sur un axiome d'objectivité, Coll. Int. Méth. Axiom. Méc. Class. at Nouvelles, s.47-56, Paris
- Noll, W., [1972] A new mathematical theory of simple materials, Arch. Rational Mech. Anal., 48 (1) 1-50
- Noll, W., [1973] Lectures on the foundations of continuum mechanics and thermodynamics, Arch. Rational Mech. Anal. 52 (1) 62-92
- Noll, W., [1978] A general framework for problems in the statics of finite elasticity, w Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, eds. G.M. de La Penha, L.A. Medeiros, North-Holland
- Ościłk, J., [1979] Adsorpcja, PWN, wyd. II, Warszawa
- Perzyna, P., [1971] A gradient theory of rheological materials with internal structural changes, Arch. Mech., 23 (6) 845-850
- Perzyna, P., [1978] Termodynamika materiałów niesprężystych, PWN, Warszawa
- Perzyna, P., [1980] Stability phenomena of dissipative solids with internal defects and imperfections, w XV-th IUTAM Congress, Toronto, Proc.: Theoretical and Applied Mechanics eds. F.P.J. Rinrott, B. Tabarrok, North Holland, s.369-376
- Perzyna, P., Kosiński, W., [1973] A mathematical theory of materials, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., 21 (12) 647-654
- Rademacher, H. [1919] Über partielle und totale Differenzierbarkeit I. Math. Ann. 79, 340-359
- Raniecki, B., [1983] Informacja niepublikowana
- Ruggeri, T., Strumia, A. [1981] Main field and convex covariant density for quasi-linear hyperbolic systems. Relativistic fluid dynamics, Ann. Inst. H. Poincaré, 34, 65-84

- Rychlewski, J., [1970-71] Nieliniowa mechanika kontinuum
Wykłady, IPPT, PAN
- Rychlewski, J., [1974] Insensitivity of materials to the
exchange of deformation path, Arch., Mech., 26, 119-174
- Sawczuk, A. [1974] Problems of Plasticity, Foundation of
Plasticity, Noordhoof, Leyden
- Scriven, L.E., [1960] Dynamics of a fluid interface, Chem.
Engng. Sci., 12, 98-108
- Semadeni, Z., [1971] Banach Spaces of Continuous Functions I,
PWN, Warszawa
- Semadeni, Z., Wiweger, A., [1978] Wstęp do teorii kategorii
i funktorów, PWN, Warszawa
- Slattery, J.C. [1967] General balance equation for a phase
interface, Ind.Engng. Chem., Fundamentals 6 (1), 108-115
- Söderholm, L.H., [1976] The principle of material frame-indi-
fference and material equations of gases, Int.J.Engng. Sci.
14, 523-528
- Söderholm, L.H., [1981] On the range of validity of the
principle of material frame-indifference, Arch.Mech., 33 (6)
961-965
- Spanier, E.H., [1966] Algebraic topology Mc Graw-Hill, New
York, jest polskie tłumaczenie
- Steenrod, N., [1951] The Topology of Fibre Bundles, D.Van
Nostrand, Princeton, N.Y.
- Suquet, P.M., [1981] Evolution problems for a class of
dissipative materials, Quart.Appl. Math., 38, 391-414
- Šilhavy, M., [1980] On measures, convex cones and foundations
of thermodynamics, Części I i II, Czech.J.Phys., B 30
841-861, 961-991
- Šilhavy, M., Kratochvíl, J., [1977] A theory of inelastic
behaviour of materials, Part I. Ideal inelastic materials,
Arch. Rational Mech., Anal., 65, 97-129
- Thomas, T.Y. [1957] Extended compatibility conditions for
the study of surfaces of discontinuity in continuum
mechanics, J.Math.Mech. 6, 311-322, 907-908
- Truesdell, C., Toupin, R.A., [1960] The classical field
theories, w Handbuch der Physik, t.III/1, s.226-793,
Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg
- Truesdell, C., Noll, W., [1965] The non-linear field theories
of mechanics, w Handbuch der Physik, t.III/3, s.1-602,
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York

- Wilmański, K., [1974] Podstawy termodynamiki fenomenologicznej, PWN, Warszawa
- Wilmański, K., [1977] On the Galilean invariance of balance equation for a singular surface in continuum, Arch. Mech. 29 (3) 459-475
- Woźniak, Cz., [1974] O niektórych zastosowaniach wiązek włókniстых w mechanice, w Geometria różniczkowa i ośrodki ciągłe, Praca zbiorowa pod red. H. Zorskiego, PAN, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław
- Volpert, A.I., [1967] Przestrzeń BV i równania quasi-liniowe /ros./ Matem.Sbornik, AN ZSRR 73 (115) 255-303
- Volpert, A.I., Čudajev, S.I. 1975 Analiza w klasie funkcji nieciągłych i równania fizyki matematycznej /ros./ Wydawnictwo "Nauka", Moskwa
- Wang, C.-C., Truesdell, C., [1973] Introduction to rational elasticity, Noordhoff International Publishing, Leyden
- Willems, J.C., [1972] Dissipative dynamical systems, I., Arch. Rational Mech. Anal., 45, 322-351
- Woods, L.C., [1973] Beware of axiomatics in applied mathematics, Inst. Math. Appl., 40-44
- Woods, L.C., [1981] The bogus axioms of continuum mechanics, Inst.Math. Appl., 17, 98-102
- Yosida, K., [1980] Functional Analysis, 6-th edition, Springer, Berlin Fleidelberg-New York
- Zajączkowski, W. [1983] Informacja niepublikowana
- Zalewski, K. [1978] Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej, PWN, Warszawa

SPIS TREŚCI

| | | |
|-----|--|-----|
| I | Ciało odkształcalne i jego ruch | 7 |
| | 1. Ośrodek ciągły | 7 |
| | 2. Czasoprzestrzeń | 10 |
| | 3. Ruch ośrodka | 15 |
| | 4. Deformacja | 21 |
| | 5. Niezależność od układu odniesienia | 27 |
| | 6. Zasada bezwładności | 30 |
| | 7. Czasoprzestrzeń Galileusza czy Newtona ? | 38 |
| | 8. Brzeg ciała i jego podciała | 41 |
| | 9. Prawa bilansu | 45 |
| | 9.1. Bilans masy | 45 |
| | 9.2. Bilans pędu i momentu pędów | 57 |
| | 9.3. Warunki spełnienia zasady względności Galileusza | 63 |
| | 9.4. Bilans energii | 67 |
| | 9.5. Nierówność produkcji entropii | 70 |
| | 9.6. Komentarz do rozdziału | 78 |
| II | Materiał ciała | 84 |
| | 10. Ciało sprężyste | 84 |
| | 11. Morfizm materialny | 89 |
| | 12. Modelowanie konstytutywne | 93 |
| | 13. Rozmaitość procesów | 95 |
| | 14. Przestrzeń stanów | 102 |
| | 15. Wyprowadzenie równania ewolucji | 112 |
| | 16. Komentarz i przykłady | 124 |
| | 17. Defekty modelowania konstytutywnego | 133 |
| III | Istnienie i ciągła zależność rozwiązania problemu Cauchy'ego w termo - niesprężystości | 137 |
| | 18. Problem Cauchy'ego dla quasi-liniowego abstrakcyjnego równania ewolucji | 138 |
| | 18.1. Problem Cauchy'ego w termo-niesprężystości bez przewodnictwa ciepła z wewnętrznymi zmiennymi stanu | 141 |

| | |
|--|-----|
| 18.2. Wybór przestrzeni rozwiązań i założenia regularności | 145 |
| 19. Dowód twierdzenia | 149 |
| IV. Stabilność rozwiązania problemu początkowo-brzegowego z dyssypacją | 164 |
| 20. Układ równań bilansu | 164 |
| 20.1. Równanie bilansu entropii jako konsekwencja drugiego prawa termodynamiki | 166 |
| 20.2. Produkcja entropii na powierzchni nieciągłości | 170 |
| 21. Stabilność rozwiązania klasycznego w klasie EV | 172 |
| 21.1. Własności funkcji z klasy EV | 172 |
| 21.2. Kryterium dopuszczalności | 174 |
| 21.3. Nierówność ewolucyjna i twierdzenie o stabilności | 176 |
| 21.4. Uwagi końcowe | 180 |
| Bibliografia | 183 |

S u m m a r y

Evolution equations of dissipative bodies

Global and intrinsic formulation of the thermodynamics of deformable bodies with singularities is given. The structure of the space-time is precisely discussed together with the inertial principle. Under a localization principle the forms of local balance laws are derived from their integral counterparts. Galilean invariance of these laws leads to interesting conclusions as far as the form of source terms is concerned. The system theory approach is adopted in the formulation of the foundations of constitutive modelling. The precise definition of the state space for a deformable body is given. The step-by-step derivation of the evolution equation in the state space is performed. The most general form of this equation is obtained. Some of its particular cases are discussed together with defects of the constitutive modelling. The well-posedness of the Cauchy problem in thermo-inelasticity is established using the extended version of the Hille-Phillips-Yosida theorem. The stability of the classical solution to the initial-boundary value problem with dissipation is also discussed in the larger class of weak solutions of class BV. The role of the entropy production inequality as an admissibility criterion is demonstrated. The evolutionary inequality is derived which is crucial in the proof that the classical solution is stable and consequently unique in the class of weak admissible solutions.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH
PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

BIBLIOTEKA



Wa727041756