

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

P. A. N.

ZENON MRÓZ

O FORMIE ZWIĄZKÓW FIZYCZNYCH
W TEORII PLASTYCZNOŚCI

Warszawa, maj 1964 r.

[Praca habilitacyjna].



~~10269~~

121 D

W s t ę p

W pracy niniejszej rozważa się zagadnienie związków fizycznych dla ciał sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem. Ograniczymy się przy tym do klasy materiałów i rodzajów obciążeń dla których można pominąć efekty czasowe i wpływ temperatury. Materiały takie przy prostym rozciąganiu charakteryzują się stale rosnącą krzywą $\sigma-\varepsilon$ /niezależną od szybkości deformacji/, zaś przy odciążeniu proces będzie przebiegał po innej krzywej, w szczególności po prostej, której tangens kąta nachylenia jest równy modułowi sprężystemu.

Do opisu deformacji takich materiałów /w pierwszym rzędzie metali/ stosuje się powszechnie dwa typy praw: teorię płynięcia będącą konsekwentnym rozwinięciem praw Lévy-Misesa i teorię deformacyjną /zaproponowaną po raz pierwszy przez Nadai'a w 1924 r./ W teorii płynięcia tensor szybkości odkształceń plastycznych określony jest przez tzw. potencjał plastyczny, który utożsamia się z funkcją płynięcia /stowarzyszone prawo płynięcia/. Geometrycznie znaczy to, że ^wprzestrzeń naprężeń wektor szybkości odkształceń plastycznych $d\varepsilon^p$ ma stały kierunek normalny do powierzchni płynięcia. Teoria płynięcia nie uzyskała jednak pełnego potwierdzenia doświadczalnego; szereg doświadczeń wykazuje odchyłki od normalności, a przede wszystkim obrót $d\varepsilon^p$ w zależności od obrotu wektora przyrostu naprężeń $d\sigma$. Ważność teorii deformacyjnej jest z kolei kwestionowana, gdyż nie spełnia ona warunku ciągłości przy przejściu ze sprężystego do plastycznego obszaru.

Proces deformacji plastycznej jest w istocie swej niejednorodny. Przy makroskopowo jednorodnym stanie naprężenia, poszczególne kryształy będą się różnie deformować i w różnym czasie przechodzić w stan plastyczny. Sytuację taką rozpatrzono w Rozdziale I, gdzie

zbadano kiedy własności lokalne takie jak ortogonalność $d\epsilon'$ i wypukłość powierzchni płynięcia implikują istnienie takich samych własności dla odkształceń i naprężeń odniesionych do makroskopowo jednorodnego elementu i przedyktowano efekty mogące prowadzić do odchylenia $d\epsilon'$ od kierunku normalnego.

Ogólną analizę praw liniowych zawiera Rozdział II.

Zajmujemy się tam m.in. zagadnieniem warunków ograniczających, jakie powinny być nałożone na prawa fizyczne. Problem ten obecnie intensywnie badany w teorii sprężystości odkształceń skończonych, nie jest również wyczerpująco przebadany w teorii plastyczności. Jest rzeczą jasną, że sformułowany związek fizyczny musi spełniać warunki wynikające z praw transformacji przy zmianie układu, uwzględniać cechy symetrii materiału, być zgodny z prawami termodynamiki. Oprócz tych naturalnych żądań, można sformułować jeszcze dalsze warunki, które w postaci pewnych nierówności ograniczałyby związki fizyczne. Warunki te formułujemy po to, aby przyjęty model matematyczny materiału posiadał pewne podstawowe własności zgodne z obserwacją doświadczalną. Nie powinny one być zbyt ograniczające tak, aby można było jeszcze kształtować związek fizyczny w celu zachowania jego zgodności z doświadczeniem.

W r. 1947 W. Prager /Rozdz. II, [3] /^{cf} podał cztery warunki, z których otrzymał postać związków fizycznych. Są to a/ warunek ciągłości przy przejściu z obszaru sprężystego do plastycznego. b/ warunek zgodności ^{żądany} żądany, aby przy obciążeniu istniało przejście z danego do sąsiedniego stanu plastycznego e/ warunek ^{znacznosci} jednoznaczności d/ warunek nieodwracalności, ^{żądający} żądający dodatniego przyrostu entropii. Opierając się na tych warunkach, W. Prager wyprowadził stowarzyszone prawo płynięcia. Inne podejście przedstawił D.C. Drucker /Rozdz. I [11] /^{cf}, który sformułował ^{mechaniczny} postulat wymagający dodatniości pracy na cyklu nałożenia i zdjęcia na dany stan

naprężenia dodatkowych obciążeń. Nierówności, wynikające z jego postulatu są następujące.

$$(A) (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p > 0, \quad (B) (d\sigma_{ij}^{(e)} - d\sigma_{ij}^{(i)}) (d\epsilon_{ij}^{(e)p} - d\epsilon_{ij}^{(i)p}) > 0$$

gdzie σ_{ij} jest stanem naprężenia na powierzchni płynięcia f a σ_{ij}^0 jest dowolnym innym stanem wewnątrz powierzchni f ; $d\sigma_{ij}^{(e)}$ i $d\sigma_{ij}^{(i)}$ są dwoma dowolnymi przyrostami z danego punktu na powierzchni f a $d\epsilon_{ij}^{(e)p}$ i $d\epsilon_{ij}^{(i)p}$ odpowiadającymi im przyrostami odkształceń plastycznych. Nierówność /A/ implikuje wypukłości f i ortogonalności $d\epsilon^p$ do f . Nierówność /B/ również wymaga ortogonalności wektora $d\epsilon^p$ do f .

W pracy naszej rozwinięto dalej koncepcję W. Pragera, przyjęto przy tym istotne założenie, że postać związku fizycznego dla ciał sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem powinna być zasadniczo różna od postaci związku dla ciał sztywno-plastycznych. Pokazano, że warunek jednoznaczności nie prowadzi wyłącznie do praw stowarzyszonych, lecz możliwe są prawa uwzględniające odchylenie $d\epsilon^p$ od kierunku normalnego; dla teorii deformacyjnej określono na tej podstawie dopuszczalną klasę trajektorii. Zbadano relacje istniejące pomiędzy warunkiem stateczności materiału, warunkiem propagacji fal w ośrodku sprężysto-plastycznym i warunkiem jednoznaczności. Pokazano, że dla praw liniowych warunek jednoznaczności zapewnia spełnienie obu pozostałych żądań.

W Rozdziale III zbadano pewną szczególną postać prawa nieliniowego. Prawa nieliniowe, do tej pory niestosowane w teorii plastyczności, mogą stać się bardzo użyteczne przy analizie wyników doświadczalnych, gdyż pozwalają na większą swobodę opisu. Ogólną koncepcję użycia praw nieliniowych wysunął już uprzednio A.A. Liuszyn /Rozdz. III [1]/ Należy zauważyć, że wszystkie postacię związków badane w naszej pracy nie spełniają nierówności /A/ i /B/ postulatu Druckera. W świetle naszych rozważań

(2) 4
można stwierdzić, że postulat ten jest zbyt ograniczający i nie ma bezpośredniego związku z takimi podstawowymi pojęciami jak jednoznaczność, stateczność, czy istnienie fal; dlatego nie wydaje się on być racjonalnym ograniczeniem dla ciał sprężysto-plastycznych.

Naodwrot dla ciał sztywno-plastycznych, lub dla ciał sprężysto-plastycznych bez wzmocnienia warunków jednoznaczności prowadzi do praw stowarzyszonych, podobnie jak nierówności /A/ i /B/.

[W pracy obok notacji tensorowej korzystamy również z wektorowego przedstawiania tensorów w przestrzeni naprężeń lub odkształceń. Pisząc np. σ rozumiemy pod tym wektor w 9-cio wymiarowej przestrzeni Euklidesowej, o składowych równych składowym tensora σ_{ij} . Iloczyn skalarny $\sigma \cdot \varepsilon$ przedstawia niezmiennik $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$, moduł σ wektora σ jest równy $(\sigma_{ij} \sigma_{ij})^{\frac{1}{2}}$, a wektor jednostkowy ρ odpowiada tensorowi ~~kierunkowemu~~ $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(\sigma_{kl} \sigma_{kl})^{\frac{1}{2}}}$ wprowadzanemu przez A. A. Illuszyna / $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(\sigma_{kl} \sigma_{kl})^{\frac{1}{2}}}$ / Użycie przedstawienia wektorowego niejednokrotnie upraszcza zapis i ułatwia rozumowanie. Takie operacje jak ~~dotowanie~~ ^{roz} ~~dotowanie~~ na ~~podprzestrzeni~~, rozkładanie w przyjętej bazie liniowej, obliczenie iloczynów ~~składowych~~ będziemy zatem przeprowadzali używając przedstawienia geometrycznego w przestrzeni wektorowej.



Model fizyczny ośrodka sprężysto-plastycznego1.1. Uwagi ogólne

Wszystkie fenomenologiczne teorie plastyczności posiadają pewną wspólną grupę założeń podstawowych. Tak więc przyjmuje się, że związki między naprężeniami i odkształceniami i ich pochodnymi czasowymi można formułować lokalnie dla danego elementu, niezależnie od przestrzennego rozkładu naprężeń. Tensor odkształcenia ϵ rozkłada się na część sprężystą ϵ^e i część plastyczną ϵ^p /to samo dla prędkości odkształceń/. Związki fizyczne formułuje się niezależnie dla członów sprężystych i plastycznych, tak że dla ciał sztywno-plastycznych prawa dla odkształceń plastycznych są jednakowe jak dla ciał sprężysto-plastycznych. W szczególnym przypadku jednorodnemu stanowi naprężeń odpowiada jednorodny stan płynięcia plastycznego. Podobne założenia były również przyjmowane w teoriach fizycznych rozważających plastyczną deformację polikrystałów. Można tu wymienić "teorię poślizgów" T.V. Batdorfa i B. Budiansky'ego [4], zmodyfikowaną przez T.H. Lina [5] oraz wcześniejsze prace J.I. Taylora [1,2] oraz J.F. Bishopa i R. Hilla [3].

Ostatnio ukazały się interesujące prace zajmujące się badaniem początkowego stadium płynięcia plastycznego w materiałach polikrystalicznych przy początkowo jednorodnym stanie naprężenia. W pracy [6] B. Budiansky, Z. Hashin i J.L. Sanders rozpatrywali idealnie plastyczne kryształy jako kuliste wtrącenia w materiale sprężystym, poddane jednorodnej, plastycznej deformacji. Podobne założenia były przyjęte w pracach [7] i [8], gdzie określono pole naprężeń w otoczeniu sześciennych kryształów odkształcających się plastycznie. W obu przypadkach założono, że przy obciążeniu wywołującym początkowo jednorodny stan naprężenia w zakresie sprężystym, w otoczeniu plastycznych kryształów powstają

lokalne koncentracje naprężeń i ich rozkład staje się coraz bardziej równomierny w miarę uplastyczniania się coraz większej ilości ziaren.

Prawa fenomenologiczne odnoszą się do elementu objętości zawierającego wystarczająco dużą ilość ziaren, tak że możemy mu przypisać cechy jednorodności i izotropowości. Opisując deformację elementu tensorem ϵ i rozbijając ten tensor na dwie części ϵ^e i ϵ^p musimy pamiętać, że ϵ^p przedstawiać będzie czysto plastyczną deformację jedynie w przypadku modelu sztywno-plastycznego. W ciele sprężysto-plastycznym człon ϵ^p , naskutek niejednorodności deformacji wewnątrz elementu, będzie wynikiem plastycznych poslizgów w kryształach i deformacji spowodowanej naprężeniami własnymi /mikronaprężeniami/. Ta niejednorodność deformacji plastycznej wewnątrz elementu jest głównym czynnikiem tłumaczącym różne cechy wzmocnienia; wpływać ona może również istotnie na postać związków między naprężeniem i odkształceniem.

1.2. Wypukłość i ortogonalność

Rozważmy ciało sprężysto-plastyczne o objętości V i powierzchni S . Oznaczmy przez σ , ϵ , u pole naprężeń, odkształceń i przemieszczeń wewnątrz ciała, na powierzchni S_T którego zadane są siły powierzchniowe $t(P)$ a na powierzchni S_u przemieszczenia $u(P)$. Po działaniu tych obciążeń, część ciała V_p jest w stanie plastycznym. Rozpatrzmy nieskończenie mały przyrost sił $dt(P)$ na S_T i oznaczmy przez $d\sigma$, $d\epsilon$, du odpowiadające tej zmianie przyrosty σ , ϵ i u zachodzące wewnątrz ciała, zakładamy przy tym, że w ogólnym przypadku nie zachodzi wszędzie odciążenie. Po powrotnej zmianie warunków brzegowych do wartości wyjściowych, w ciele pozostanie stan naprężenia resztkowego $d\sigma_r$ i odpowiadające temu pole

przyrostów odkształceń będzie $d\varepsilon^i + d\varepsilon^r$, gdzie $d\varepsilon^i$ oznacza nieodwracalną część przyrostu odkształcenia a $d\varepsilon^r$ jest związane z $d\varepsilon^r$ prawem Hooke'a. Przyjmując, że powrót odbywał się po drodze czysto sprężystej wywołującej przyrost odkształcenia $d\varepsilon^o$, wynikającego z pola przemieszczeń du^o , możemy napisać

$$d\varepsilon = d\varepsilon^o + d\varepsilon^r, \quad d\varepsilon = d\varepsilon^o + d\varepsilon^i + d\varepsilon^r$$

/1.1/

gdzie $d\varepsilon^o$ i $d\varepsilon^r$ są związane prawem Hooke'a. Identyczne związki zachodzą również dla skończonych przyrostów.

Warunek plastyczności w każdym punkcie ciała możemy przedstawić w 9-cio wymiarowej przestrzeni naprężeń jako zamknięta hiperpowierzchnię f . Warunek plastyczności dla całego ciała możemy zinterpretować w podobny sposób wprowadzając pojęcie nieskończonej wymiarowej przestrzeni funkcyjnej, w której przedstawimy siły powierzchniowe $t^{(P)}$. Wektor T w przestrzeni funkcyjnej będzie przedstawiał funkcję $t^{(P)}$ określona w każdym punkcie brzegu S_T . T będzie należeć do obszaru sprężystego w przestrzeni funkcyjnej jeśli odpowiadający stan naprężenia wewnątrz ciała nigdzie nie narusza warunku plastyczności. Powierzchnia F w przestrzeni funkcyjnej dzieląca stany sprężyste od sprężysto-plastycznych będzie uważana jako powierzchnia płynięcia dla całego ciała^{1/}.

Oznaczmy przez $du^r = du - du^o$ nieodwracalną część przyrostu przemieszczenia pozostałą po zdjęciu przyrostów $dt^{(P)}$. Funkcję $du^r(P)$ przedstawimy jako wektor dU^r w przestrzeni

^{1/} Podobne zastosowanie przestrzeni funkcyjnej można znaleźć u H. Zieglera [9, 10], który rozpatrywał ważność prawa potencjału sprężystego dla ciał sprężysto-plastycznych w przestrzeni uogólnionych naprężeń. W swych rozważaniach pominął on jednak naprężenia resztkowe i niektóre jego wnioski są słuszne.

funkcyjnej. Rozważmy następujące wyrażenie

$$\begin{aligned} /1.2/ \quad dT \cdot dU^p &= \int dt \cdot du^p dS_T = \int d\sigma \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^o) dV = \\ &= \int d\sigma \cdot d\varepsilon^i dV_p + \int d\sigma^r \cdot d\varepsilon^o dV + \int d\sigma^r \cdot d\varepsilon^r dV, \end{aligned}$$

które przekształciliśmy stosując twierdzenie Gaussa oraz wykorzystując zależności (1.1) i zasadę Bettiego $d\sigma^r \cdot d\varepsilon^o = d\sigma^o \cdot d\varepsilon^r$.

Zauważmy teraz, że druga całka we wzorze /1.2/ znika, bowiem $d\sigma^r$ jest polem naprężeń reszkowych /spełniającym warunki równowagi i zerowe warunki brzegowe na S_T / a $d\varepsilon^o$ spełnia warunki nierozdzielności. Możemy zatem napisać /1.2/ w postaci

$$/1.3/ \quad dT \cdot dU^p = \int dt \cdot du^p dS_T = \int d\sigma \cdot d\varepsilon^i dV_p + \int d\sigma^r \cdot d\varepsilon^r dV,$$

Podobnie do /1.3/, otrzymamy

$$/1.4/ \quad T \cdot dU^p = \int t \cdot du^p dS_T = \int \sigma \cdot d\varepsilon^i dV_p + \int \sigma^r \cdot d\varepsilon^r dV = \int (\sigma - \sigma^r) \cdot d\varepsilon^i dV,$$

gdzie $\sigma^r = \sigma - \sigma^o$, a σ^o jest fikcyjnym polem jakie by istniało przy zadanych warunkach brzegowych w ciele sprężystym.

Rozważmy dowolny stan T_* leżący wewnątrz powierzchni w przestrzeni funkcyjnej. Możemy wtedy napisać następującą równość

$$/1.5/ \quad (T - T_*) \cdot dU^p = \int (\sigma - \sigma_*) \cdot d\varepsilon^i dV_p + \int (\sigma^r - \sigma_*^r) \cdot d\varepsilon^r dV = \int (\sigma - \sigma_*) \cdot d\varepsilon^i dV$$

gdzie $\sigma_* = \sigma_*^r + \sigma_*^o$ jest stanem naprężenia odpowiadającym T_* .

Ponieważ T_* leży wewnątrz F , σ_* leży wewnątrz f w każdym punkcie ciała i możemy przyjąć że $\sigma_*^r = \sigma^r$ tzn. przejście od T_* do T można zrealizować na drodze czysto sprężystej. Stąd wynika zerowanie się drugiej całki we wzorze /1.5/.

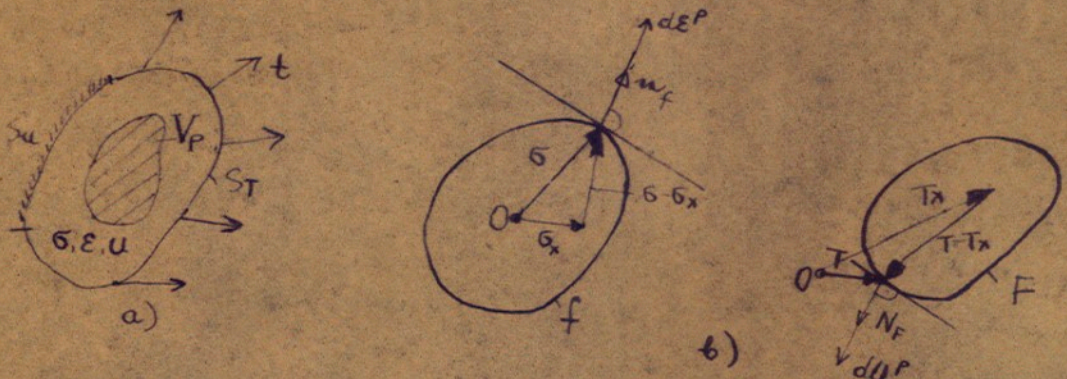
Załóżmy, że mamy przyłożone dwa różne przyrosty zewnętrznych obciążeń dT_1 i dT_2 , wywołujące w ciele dwa różne stany $d\sigma_1$, $d\varepsilon_1$, du_1 i $d\sigma_2$, $d\varepsilon_2$, du_2 . Oznaczając przez $\Delta(dT) = dT_2 - dT_1$ i podobnie przez $\Delta d\sigma$, $\Delta d\varepsilon$, Δdu różnicę

dwóch stanów, analogicznie do /1.3/ możemy wyprowadzić następujący wzór

$$\begin{aligned} /1.6/ \quad \Delta dT \cdot \Delta dU^p &= \int \Delta d\sigma \cdot \Delta d\varepsilon^i dV_p + \int \Delta d\sigma^r \cdot \Delta d\varepsilon^r dV - \\ &- \int \Delta d\sigma \cdot d\varepsilon_1^p d(V_p), \end{aligned}$$

gdzie ΔV_p oznacza tą część V_{p1} która leży na zewnątrz V_{p2} / V_{p1} i V_{p2} są objętościami plastycznymi w stanie 1 i 2/.

Wyprowadzone powyżej równości /1.2 - /1.5/ pozwalają na wyciągnięcie kilku ogólnych wniosków. Załóżmy, że nieodwracalny przyrost odkształcenia $d\epsilon^e$ pokrywa się z deformacją plastyczną $d\epsilon^p$



Rys. 11

wywołaną poślizgiem w ziarnach krystalicznych. Przyjmijmy dalej, że powierzchnia płynięcia f jest wypukła w każdym punkcie ciała i przyrost $d\epsilon^p$ jest do niej ortogonalny. Te założenia dla kryształów sztywno-plastycznych były uzasadniane wychodząc z prawa poślizgów Schmid'a przez J.P. Bishop'a i R. Hilla /3/. Warunek wypukłości i ortogonalności możemy wyrazić matematycznie przez nierówność

$$/1.7/ \quad (\sigma - \sigma_x) \cdot d\epsilon^p > 0$$

wyrażającą tzw. zasadę największej pracy plastycznej. Warunek ortogonalności wektora $d\epsilon^p$ do f możemy również zapisać następująco /patrz Rozdz. III/

$$/1.8/ \quad \Delta d\sigma \cdot \Delta d\epsilon > 0.$$

We wzorze /1.5/ σ_x oznacza dowolne naprężenie odpowiadające wnętrzu powierzchni f . Całki powierzchniowe /1.3/ - /1.6/ będziemy uważali za iloczyny skalarne odpowiednich wektorów w przestrzeni funkcyjnej /spełniają one bowiem wszystkie własności iloczynu skalarnego/. Z /1.5/ wynika ważny wniosek, że powierzchnia F jest wypukła i wektor $d\epsilon^p$ jest do niej ortogonalny.

Podobnie ortogonalność wynika z /1.6/, przy dodatkowym założeniu, że ΔV_p jest wielkością małą, w porównaniu z wielkościami V_p i V . Z /1.4/ widzimy natomiast, że przyrost pracy $T dU^p$ nie zawsze jest wielkością dodatnią: w przypadku gdy powierzchnia F wychodzi po za początek układu, przyrost pracy plastycznej dla całego ciała może być ujemny /rys.11b/.

1.3. Uwzględnienie zmian strukturalnych i geometrycznych

W p. 1.2 pokazaliśmy, że przy pewnych założeniach lokalne własności takie jak wypukłość i ortogonalność wektora zachowują ważność i dla całego ciała. Pozwoli to w szczególności na używanie naprężeń i odkształceń uogólnionych dla ciał sprężysto-plastycznych. W p. 1.2 przyjęliśmy jednak dwa istotne idealizujące założenia: a/ pominęliśmy efekt zmiany geometrii ciała a w szczególności efekt obrotu ziaren krystalicznych przy deformacji plastycznej, b/ założyliśmy że jedynym procesem nieodwracalnym jest plastyczna deformacja $d\epsilon^p$ spełniająca, /1.7/ i /1.8/. Obecnie odstępimy od tych założeń. Przyjmijmy zatem, że nieodwracalny przyrost odkształcenia $d\epsilon^i$ składa się z dwóch części $d\epsilon^p$ i $d\epsilon^s$, gdzie $d\epsilon^p$ spełnia /1.7/ i /1.8/, zaś $d\epsilon^s$ jest dodatkowym odkształceniem nieodwracalnym, wywołanym deformacją plastyczną. Ponieważ nasze rozważania dotyczą efektów niezależnych od czasu, pominiemy takie sprzężone procesy jak pełzanie czy przewodnictwo cieplne i $d\epsilon^s$ przypiszemy zmianom strukturalnym, wewnątrz deformującego się ziarna. Zmiany te makroskopowo opiszemy przyjmując, że własności sprężyste kryształów plastycznych mogą się zmieniać w trakcie deformacji. Ponieważ całkowity przyrost nieodwracalnego przyrostu odkształcenia $d\epsilon^i = d\epsilon^p + d\epsilon^s$ nie spełnia /1.7/ i /1.8/, z /1.6/ wynika, że normalność dU^p do F również w ogólnym przypadku nie zachodzi. Natomiast wypukłość powierzchni F wynika nadal z wypukłości f . Istotnie, równanie /1.5/ pozostaje w mocy dla dowolnego fikcyjnego

pola $d\epsilon^{\sim}$, które spełnia 1.7/. Zatem /1.7/ nadal implikuje wypukłość powierzchni F .

By uwzględnić efekt obrotu odniesiemy przyrosty sił powierzchniowych do wyjściowej konfiguracji ciała /będziemy je nazywać nominalnymi przyrostami sił/. Odpowiadający im tensor przyrostów nominalnych naprężeń /odniesiony do wyjściowej konfiguracji/ w układzie kartezjańskim ma postać, [12, 13].

$$/1.9/ \quad ds_{ij} = d\delta_{ij} + \delta_{ij} du_{k,k} - \delta_{jk} du_{i,k}$$

a całkowity gradient deformacji można przedstawić następująco

$$/1.10/ \quad du_{i,j} = du_{i,j}^{\circ} + du_{i,j}^{\sim} = du_{i,j}^{\circ} + d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^r + d\epsilon_{ij}^s + \omega_{ij}$$

Założmy, że w związkach fizycznych używamy przyrostu tensora naprężeń Kirchoffa $d\tilde{\tau}_{ij}$. mamy zatem, [13].

$$/1.11/ \quad d\tilde{\tau}_{ij} = d\delta_{ij} + \delta_{ij} du_{k,k} - \delta_{ik} du_{j,k} - \delta_{jk} du_{i,k}$$

W równaniach /1.9/ i /1.11/ $d\delta_{ij}$ oznacza przyrost naprężenia w danym elemencie materialnym względem stałego układu kartezjańskiego, a we wzorze (1.10) ω_{ij} jest antysymetryczną częścią tensora

$du_{i,j}^{\sim}$. Z /1.9/ i /1.11/ wynika że

$$/1.12/ \quad ds_{ij} = d\tau_{ij} + \delta_{ik} du_{j,k}$$

Rozpatrując cykl przyłożenia i zdjęcia przyrostów nominalnych sił powierzchniowych $d\tau_{ij} = ds_{ij} v_i / v_i$ - zewnętrzna normalna do elementu na brzegu S_T , możemy napisać

$$/1.13/ \quad dT \cdot dU^p = \int d\tau \cdot (du - du^{\circ}) dS_T = \int ds_{ij} [du_{j,i} - du_{j,i}^{\circ}] dW = \\ = \int d\tau_{ij} (d\epsilon_{ij}^r + d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^s) dW + \int \delta_{ij} du_{k,j} - du_{k,i} dW$$

Równanie /1.13/ odpowiada poprzednio wyprowadzonemu równaniu /1.3/. Jeśli prawo fizyczne spełnia lokalnie $d\tau_{ij} d\epsilon_{ij}^p > 0$ iloczyn skalarny $dT \cdot dU^p$ w ogólnym przypadku nie musi być dodatni. W podobny sposób możemy wyprowadzić związki odpowiadające /1.4/, /1.5/, i /1.6/. Widzimy, że cecha ortogonalności nie da się ogólnie przenieść z przestrzeni euklidesowej do przestrzeni funkcyjnej.

Powyższe rozwi~~azanie~~^{azania} można również odnieść do elementu złożonego z dużej ilości ziaren krystalicznych, tak że związki fenomenologiczne zbudowane dla uśrednionych wielkości nie będą zależały od położenia elementu w ciele; ciało takie można uważać makroskopowo za jednorodne. Oznaczmy przez $\bar{\epsilon}$, $\bar{\epsilon}$, $d\bar{\epsilon}$

$d\bar{\epsilon}$ średnie wartości naprężeń, odkształceń i ich przyrostów obliczone jako całki po objętości elementu i podzielone przez jego objętość. W ogólnym przypadku dla uśrednionych wielkości mamy

$$/1.14/ \quad \bar{\epsilon} \cdot \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon} \cdot \bar{\epsilon} + \overline{\delta\epsilon \cdot \delta\epsilon}$$

gdzie $\delta\epsilon = \epsilon - \bar{\epsilon}$, $\delta\epsilon = \epsilon - \bar{\epsilon}$. Drugi człon we wzorze /1.14/ jest pomijany przez większość autorów przy analizie statystycznie jednorodnych ośrodków /cf. np. R. Hill [15], J. Mandel i P. Dantu [14]; odwrotnie S.D. Wołkow [16] zatrzymuje ten człon/ i jego uwzględnienie prowadziłoby do konieczności wprowadzenia tensorów /wyższego rzędu/ momentów naprężeń i tensorów krzywizny. Pomijając w naszym rozumowaniu ten człon, łatwo jest poprzednio wyprowadzone związki odnieść do uśrednionych wielkości. Tak np. równanie /1.13/ możemy napisać w postaci

$$/1.15/ \quad V_0 [d\bar{\epsilon}^s \cdot d\bar{\epsilon}^p + d\bar{\epsilon}^a \cdot d\bar{\omega}^p] = \int d\mathcal{L} \cdot (d\epsilon^r + d\epsilon^p + d\epsilon^s) dV_0 + \\ + \int \sigma_{ij} \cdot d\omega_{ij} \cdot dV_0,$$

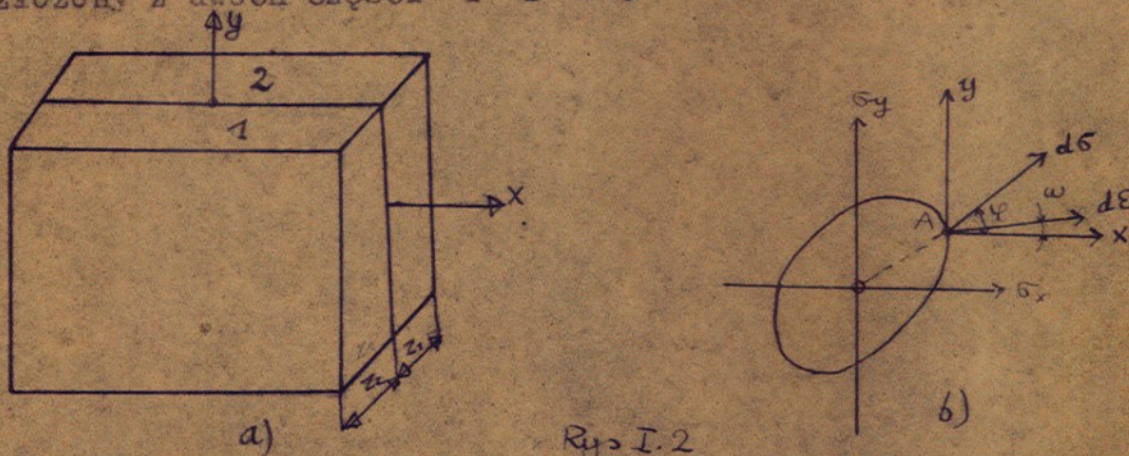
gdzie V_0 oznacza objętość elementu, a $d\bar{\epsilon}^p$ i $d\bar{\omega}^p$ są średnimi z części symetrycznej i antysymetrycznej gradientu $d\omega_{ij}$, $d\bar{\epsilon}^s$, $d\bar{\epsilon}^a$ są średnimi części symetrycznej i antysymetrycznej tensora przyrostu nominalnych naprężeń. Wa-

1/ Przy użyciu w związkach fizycznych przyrostu naprężenia odniesionego do sztywnego układu obracającego się wraz z deformującym się ośrodkiem /odpowiednik pochodnej naprężenia Zaremby-Jaumana/ wzór /1.13/ przyjmuje bardziej skomplikowaną postać. Wnioski jakościowe pozostają takie same.

runek plastyczności dla elementu można przedstawić w 9-cio wymiarowej przestrzeni średnich naprężeń $\bar{\sigma}$, otrzymany ze zrzutowania lub przecięcia powierzchni F w przestrzeni funkcyjnej. Podobnie jak dla przestrzeni funkcyjnej istnienie członu $d\bar{\epsilon}^p$ i efektu obrotu prowadzić może do odchylenia wektora $d\bar{\epsilon}^p$ od normalności do powierzchni płynięcia.

1.4. Płaski model

Rozważania p. 1.3 zilustrujemy na płaskim modelu ciała sprężysto-plastycznego. Rys. I.2 przedstawia model elementu ciała złożony z dwóch części 1 i 2.



Rys. I.2

W zakresie sprężystym cały element jest jednorodny i poddany działaniu jednorodnego płaskiego stanu naprężenia σ_x, σ_y $\sigma_{xy}=0$. Część 1 najpierw ulega uplastycznieniu gdy warunek plastyczności $f(\sigma_x, \sigma_y)=0$ jest spełniony. Część 2 pozostaje nadal sprężysta. Przyrosty naprężenia działające na cały element wynoszą $d\sigma_x$, $d\sigma_y$ i wywołują plastyczne płynięcie części 1.

Znaczymy odpowiadające temu przyrosty naprężenia w częściach 1 i 2 przez $d\sigma_x^{(1)}$, $d\sigma_y^{(1)}$, $d\sigma_x^{(2)}$, $d\sigma_y^{(2)}$. Równowaga elementu wymaga aby

$$/1.16/ \quad d\sigma_x = d\sigma_x^{(1)} z_1 + d\sigma_x^{(2)} z_2, \quad d\sigma_y = d\sigma_y^{(1)} z_1 + d\sigma_y^{(2)} z_2$$

Załóżmy, że przyrosty odkształceń plastycznych części 1 spełniają warunek normalności; całkowite przyrosty odkształcenia obu części wyrazimy następująco

$$\begin{aligned}
 /1.17/ \quad d\varepsilon_x^{(1)} &= -d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + \frac{1}{E} d\sigma_x^{(1)} - \frac{\nu}{E} d\sigma_y^{(1)} + d\varepsilon_x^{(2)} \\
 d\varepsilon_y^{(1)} &= -d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} + \frac{1}{E} d\sigma_y^{(1)} - \frac{\nu}{E} d\sigma_x^{(1)} + d\varepsilon_y^{(2)} \\
 d\varepsilon_x^{(2)} &= \frac{1}{E} d\sigma_x^{(2)} - \frac{\nu}{E} d\sigma_y^{(2)}, \quad d\varepsilon_y^{(2)} = \frac{1}{E} d\sigma_y^{(2)} - \frac{\nu}{E} d\sigma_x^{(2)}
 \end{aligned}$$

gdzie $-d\lambda$ jest dodatnim współczynnikiem, a E i ν stałymi sprężystości całego elementu. Załóżmy dalej, że $d\varepsilon_x^{(1)} = d\varepsilon_x^{(2)} = d\varepsilon_x$ i $d\varepsilon_y^{(1)} = d\varepsilon_y^{(2)} = d\varepsilon_y$. Przyrosty plastycznych odkształceń $d\varepsilon_x^p, d\varepsilon_y^p$

dla całego elementu obliczymy zakładając sprężyste zachowanie całości po zdjęciu $-d\sigma_x$ i $d\sigma_y$. Z /1.16/ i /1.17/ wynika, że

$$/1.18/ \quad d\varepsilon_x^p = z_1 \left(d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + d\varepsilon_x \right), \quad d\varepsilon_y^p = z_1 \left(d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} + d\varepsilon_y \right)$$

Zatem gdy pominiemy zmiany strukturalne części plastycznej tzn.

gdy $d\varepsilon_x^0 = d\varepsilon_y^0 = 0$, wektor $d\varepsilon^p = (d\varepsilon_x^p, d\varepsilon_y^p)$ będzie normalny do początkowej powierzchni płynięcia. Jednak gdy $d\varepsilon_x^0$ i $d\varepsilon_y^0$ dają swój wkład do nieodwracalnej deformacji, odchylenie od ortogonalności jest określone wzorem /1.18/.

Założmy, że sprężyste własności części I są funkcjami plastycznej deformacji tej części tzn. $E_1 = E_1(\varepsilon_x^{(1)p}, \varepsilon_y^{(1)p})$, $\nu_1 = \nu_1(\varepsilon_x^{(1)p}, \varepsilon_y^{(1)p})$

$$/1.19/ \quad \text{Mamy wtedy} \quad d\varepsilon_x^{(1)} = \sigma_x d(1/E) - \sigma_y d(\nu/E), \quad d\varepsilon_y^{(1)} = \sigma_y d(1/E) - \sigma_x d(\nu/E)$$

i równanie /1.18/ przyjmie postać

$$/1.20/ \quad d\varepsilon_x^p = z_1 d\lambda \left(A \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + B \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \right), \quad d\varepsilon_y^p = z_1 d\lambda \left(C \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + D \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \right),$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 /1.21/ \quad A &= 1 + \sigma_x \partial_z^x(1/E) - \sigma_y \partial_z^y(\nu/E), \quad B = \sigma_x \partial_z^y(1/E) - \sigma_y \partial_z^x(\nu/E), \\
 C &= \sigma_y \partial_z^x(1/E) - \sigma_x \partial_z^y(\nu/E), \quad D = 1 + \sigma_y \partial_z^y(1/E) - \sigma_x \partial_z^x(\nu/E), \\
 \partial_z^x &= \partial / \partial \varepsilon_x^{(1)p}, \quad \partial_z^y = \partial / \partial \varepsilon_y^{(1)p}
 \end{aligned}$$

Z równania /1.20/ widzimy, że wektor $d\varepsilon^p$ posiada stały kierunek, określony w każdym punkcie powierzchni płynięcia. Założmy obecnie, że dla aktywnego procesu mały $E_1 = E_1(\varepsilon_x^{(1)p}, \varepsilon_y^{(1)p})$,

$\nu_1 = \nu_1(\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)})$ dla $f(\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}) > 0$. Związek /1.19/ przyjmie teraz postać

$$/1.21/ \quad d\varepsilon_x^{(1)} = \frac{1}{E_x} d\sigma_x^{(1)} + \frac{1}{E_{xy}} d\sigma_y^{(1)}, \quad d\varepsilon_y^{(1)} = \frac{1}{E_{yx}} d\sigma_x^{(1)} + \frac{1}{E_y} d\sigma_y^{(1)}$$

gdzie

$$/1.23/ \quad \frac{1}{E_x} = \sigma_x \frac{\partial^x}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{E} \right) - \sigma_y \frac{\partial^y}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{E} \right), \quad \frac{1}{E_{xy}} = \sigma_x \frac{\partial^y}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{E} \right) - \sigma_y \frac{\partial^x}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{E} \right)$$

$$\frac{1}{E_{yx}} = \sigma_y \frac{\partial^x}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{E} \right) - \sigma_x \frac{\partial^y}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{E} \right), \quad \frac{1}{E_y} = \sigma_y \frac{\partial^y}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{E} \right) - \sigma_x \frac{\partial^x}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{E} \right)$$

$$\frac{\partial^x}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma_x}, \quad \frac{\partial^y}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma_y}$$

Z /1.17/ i /1.22/ wynika, że część 1 może być obecnie formalnie traktowana jako ortotropowa w czasie obciążenia $\left(\frac{1}{E_{xy}} \neq \frac{1}{E_{yx}} \right)$

Wektor $d\varepsilon^p$ będzie się obracał w zależności od obrotu wektora $d\sigma (d\sigma_x, d\sigma_y)$. Łatwo jest podać ogólny wzór wiążący obroty obu wektorów. Tak np. gdy stan naprężenia przedstawiony jest punktem A na rys. 12b / $\sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0, \quad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0$ / i przyjmując część 1 jako idealnie plastyczną spełniającą warunek Hubera-Misesa $\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 = \sigma_0^2$, po algebraicznych przekształceniach

otrzymamy [19]

$$/1.24/ \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{d\varepsilon_y^p}{d\varepsilon_x^p} = \frac{(\operatorname{tg} \varphi - \nu)(1 - z_1)(1 - \kappa)}{-(1 - z_1)(1 - \kappa) \operatorname{tg} \varphi + (1 - z_1 + z_1 \kappa - \nu^2 \kappa)}$$

gdzie $\kappa = \left(1 + \frac{E}{E_y} \right)^{-1}$, $\operatorname{tg} \varphi = d\sigma_y / d\sigma_x$ /rys. 2b/. W granicznym przypadku $\kappa = 1, \left(\frac{1}{E_y} = 0 \right)$ wektor $d\varepsilon^p$ będzie zachowywał normalność do powierzchni płynięcia; dla innych wartości wystąpi obrót^{1/}.

1/ Wpływ zmiany własności sprężystych w trakcie deformacji plastycznej na prawa płynięcia i kształt powierzchni płynięcia rozpatrywał również A.A. Iliuszyn [17] wychodząc formalnie z postulatu D.C. Druckera [11]. Podejście przedstawione w p.1.3 i 1.4 jest jednak różne a wnioski przeciwne do tych jakie są wysunięte w pracy [17]. I tak: Iliuszyn zakłada, że własności sprężyste całego elementu zmieniają się, podczas gdy w p. 1.3 założono, że zmieniają się własności sprężyste jedynie części plastycznych. W elemencie makroskopowo jednorodnym, zmiana własności w mikroobjętościach plastycznych niekoniecznie musi pociągać obserwowalną zmianę własności całego elementu, bowiem ośrodek nie zachodzi tu prawo uśrednienia [14, 15]. Dalej, wykazaliśmy /przy pominięciu efektów zmian geometrycznych/, że wypukłość powierzchni zachowuje się, podczas gdy Iliuszyn dochodzi do wniosku, że może być ona wklęsła. Wyjaśnię nam, że w [17] niesłusznie stosuje się postulat Druckera, który traci tu swą ważność.

1.5. Wnioski końcowe

Z rozważań poprzednich paragrafów wynika, że własność ortogonalności wektora przyrostu odkształceń plastycznych do lokalnej powierzchni płynięcia zachowuje się w przestrzeni funkcyjnej i w przestrzeni uśrednionych naprężeń jedynie przy istotnych założeniach upraszczających: pominięciu zmian strukturalnych i geometrycznych zachodzących w elementach plastycznych. Oba efekty /obok szeregu innych, nie rozpatrywanych w tej pracy/ są nieodłączną cechą każdej deformacji plastycznej, polegającej na poślizgu po określonych płaszczyznach krystalograficznych. Obrót siatek krystalicznych obserwuje się łatwo metodą rentgenograficzną /zjawisko asteryzmu/; zmiany strukturalne wynikają z obrotu, z grupowania się dyslokacji na pewnych płaszczyznach, polygonizacji ziaren itp. Kwestia czy efekty te mogą istotnie zaważyć na postaci praw fenomenologicznych czy też są pomijalne, jest sprawą otwartą. W niektórych przypadkach mogą one być istotne i decydować o zachowaniu się materiału. Tak np. dla metali o siatce sześciennej przestrzenie centrycznej /żelazo, tantal, molibden etc./, charakteryzujących się ograniczoną ilością mechanizmów poślizgu, efektem obrotu ziaren tłumaczy się pojawianie się odcinków niestatecznych na krzywych prostego rozciągania /cf. B. Jabul [18]. Wydaje się, że nie można opisać procesu deformacji plastycznej wszystkich metali i ich stopów prawem jednego typu, tak jak to robi się dotychczas. Dlatego celem naszych ^{dalejszych} /rozważań będzie określenie dopuszczalnych klas związków liniowych lub nieliniowych, wychodząc z pewnych podstawowych postulatów fenomenologicznych.

Bibliografia do rozdziału I

- [1]. G.I. Taylor, Plastic Strain in Metals, Inst. Metals, vol. 62, 1938, p. 307-324
- [2]. G.I. Taylor, Analysis of Plastic Strain in a Cubic Crystal, Timoshenko, Anniv. Volume, Macmillan, 1938, p. 218-224.

- [3] J.P. Bishop, P. Hill, A Theoretical Derivation of the Plastic Properties of a Polycrystalline Face-Centered Metal, Phil.Mag.Ser. 7, vol. 42, 1951, p. 1298-1307.
- [4] S.V. Batdorf, B. Budiansky, A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip, NACA, T.N. 1949, p. 1871.
- [5] T.H. Lin, A Proposed Theory of Plasticity Based on Slips, Proc. Sec. U.S. Natl. Congr. Appl. Mech. ASME, 1954
- [6] B. Budiansky, Z. Hashin, J.L. Sanders, The Stress Field of a Slipped Crystal and the Early Plastic Behaviour of Polycrystalline Materials, "Plasticity", Proc. Sec. Emp. Nav. Struct. Perg. Press, 1960, p. 239-258
- [7] T.H. Lin, S. Uchiyama, D. Martin, Stress Fields in Metals at the Initial Stage of Plastic Deformation, J. Mech. Phys. Solids, vol. 10, 1962, p. 2
- [8] T.H. Lin, S. Uchiyama, Stress field caused by a ~~slid~~ ^{slid} crystal at a free surface, Journ. Mech. Phys. Solids, vol. 11, 1963, p. 327.
- [9] H. Ziegler, Über den Zusammenhang zwischen der Fließbedingung eines elastisch-plastischen Körpers und seinem Fließgesetz, ZAMP, vol. 12, 1961, p. 53-68.
- [10] H. Ziegler, On the theory of plastic potential, Quart. Appl. Math. vol. 19, 1961, p. 39-44
- [11] D.C. Drucker, A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. First U.S. Natl. Congr. Appl. Mech. 1951, p. 487-491
- [12] P. Hill, On Uniqueness and Stability in the Theory of finite elastic strain. Journ. Mech. Phys. Solids, Vol. 5, 1957, 229-241.
- [13] W. Prager, Einführung in die Kontinuumsmechanik, Birkhäuser Verlag, 1961

- [14] J. Mandel, P. Dantu, Contribution à l'étude théorique et expérimentale du coefficient d'élasticité d'un milieu hétérogène mais statistiquement homogène. Annales de Ponts et Chaussées, No 2, 1963.
- [15] R. Hill, Elastic properties of reinforced solids; some theoretical principles, J. Mech.Phys.Solids, vol. 11, 1963, p. 357-372.
- [16] С.Д. Волков, Статистическая теория прочности, Машгиз, Москва, 1960.
- [17] А.А. Ильшин, О приращении пластической деформации и поверхности текучести, ПММ, том 24, 1960, 663-666.
- [18] B. Jaoul, Consolidation des polycristaux de fer et hypothèses sur l'origine du palier des courbes de traction, Journ. Mech.Phys.Solids, Vol. 9, 1961, p. 69-91.
- [19] W. W. W., *An unphysical model in non-associated plasticity*,
1962,
- [19] Z. Mróz, Non-associated flow laws in plasticity, Journ.de Mécanique, vol. II, No 1, 21-42

Liniowe prawa płynięcia

2.1. Ogólna forma związków liniowych

Rozważmy obecnie liniowe prawa płynięcia dla ciał sprężysto-plastycznych, których własności nie zależą od czasu; rozpatrywać będziemy przy tym izotermiczne procesy deformacji i pominiemy efekt zmiany geometrii przy odkształceniu. Założmy, że ciało zostało poddane pewnemu procesowi deformacji, określonego przez trajektorie $\delta(t)$ i $\epsilon(t)$ w każdym punkcie ciała. Powszechnie przyjmuje się, że w danej chwili $t=t_0$ w n -wymiarowej przestrzeni naprężeń istnieje hyperpowierzchnie $n-1$ wymiarowa /powierzchnia płynięcia/, która dla rozpatrywanego punktu ciała oddziela stany czysto sprężyste od stanów sprężysto-plastycznych. Dla stanów naprężenia odpowiadających wnętrzu powierzchni płynięcia zachodzą tylko zmiany sprężyste; również zmiany czysto-sprężyste zachodzą gdy stan naprężenia odpowiada powierzchni a trajektoria z tego punktu jest skierowana do wnętrza /odciążenie/. Plastyczna deformacja wystąpi, gdy stan naprężenia odpowiada powierzchni i trajektoria jest skierowana na zewnątrz /aktywne obciążenie/.

Ponieważ prawa deformacji plastycznej zależą od historii obciążenia, związki fizyczne będą zawierać szybkości naprężeń i odkształceń $\dot{\sigma}$, $\dot{\epsilon}$ /lub przyrosty $d\sigma = \dot{\sigma} dt$, $d\epsilon = \dot{\epsilon} dt$ /. Ogólna postać związku liniowego w prędkościach dla procesu aktywnego obciążenia przyjmie postać

$$/2.1/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = A_{ijkl}^{(2)} \dot{\sigma}_{kl} = A_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl} + A_{ijkl}^p \dot{\sigma}_{kl}$$

zaś dla odciążenia lub w stanie sprężystym

$$/2.2/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = A_{ijkl}^{(1)} \dot{\sigma}_{kl} = A_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl}$$

Przyjmując, że związki /2.1/ i /2.2/ są odwracalne i oznaczając przez $B_{ijkl}^{(1)}$ i $B_{ijkl}^{(2)}$ macierze odwrotne do $A_{ijkl}^{(1)}$ i $A_{ijkl}^{(2)}$, możemy odwrócone relacje /2.1/ i /2.2/ zapisać następu-

jaco:

$$12.3/ \quad \dot{\sigma}_{ij} = B_{ijke}^{(1)} \dot{\epsilon}_{ke} \quad i \quad B_{ijke}^{(2)} \dot{\epsilon}_{ke}$$

Przyjmujemy, że tensory $A_{ijke}^{(1)}$ i $B_{ijke}^{(2)}$ w ogólnym przypadku zależą od stanu naprężenia, tensora plastycznego odkształcenia oraz historii deformacji nie zawierają jednak szybkości odkształcenia ani naprężenia.

2.2. Warunki ograniczające

Powstaje teraz pytanie jakiego rodzaju dodatkowe warunki należy nałożyć na powyższe związki tak ażeby określały one proces deformacji zgodnie z prawami termodynamiki i zapewniały istnienie pewnych podstawowych cech procesu w przypadku deformacji quasi- statycznej lub dynamicznej. Te dodatkowe warunki mogą być w różny sposób formułowane i możemy otrzymywać różnego rodzaju ograniczenia na postać związków fizycznych. Powinny one wynikać z fizycznie uzasadnionych argumentów i nie krępować zbyt mocno formy związków, tak aby można je było dopasowywać do wyników doświadczalnych. Omówimy obecnie poszczególne ograniczające warunki i wskażemy na istniejące powiązania między nimi.

A/. Warunek jednoznaczności. Sformułujemy ten warunek w następujący sposób. Dla każdego programu obciążenia wyrażonego w zadanych obciążeniach brzegowych $T(t)$ na S_T i przemieszczeniach $u(t)$ na S_u , w każdym punkcie ciała sprężysto-plastycznego istnieje jednoznacznie określona trajektoria naprężeń $\sigma(t)$ i odkształceń $\epsilon(t)$. Dla ciał sztywno-plastycznych i dla ciał bez wzmocnienia warunek ten może się okazać ograniczający lub wręcz niemożliwy do spełnienia [4, 5]. Dla ciał sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem otrzymujemy jednak ważną nierówność, której konsekwencje będziemy śledzić w dalszej części pracy. Warunek jednoznaczności możemy sformułować lokalnie żądając aby na trajektorii $\sigma(t)$ i $\epsilon(t)$ nie było punktów bifurkacji dla żadnego programu

obciążenia. By wyprowadzić potrzebne kryterium założymy sytuację odwrotną: niech zadany przyrostem dT i du na brzegu S_T i S_u odpowiadają dwa rozwiązania w pewnym obszarze: oznaczmy je przez $d\sigma_1$, $d\varepsilon_1$ i $d\sigma_2$, $d\varepsilon_2$. Na podstawie zasady pracy wirtualnej możemy napisać

$$/2.4/ \quad \int (d\sigma_2 - d\sigma_1) \cdot (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) dV = \int (dT_2 - dT_1) \cdot (du_2 - du_1) dS = 0,$$

gdyż $dT_2 = dT_1 = dT$ na S_T i $du_2 = du_1 = du$ na S_u .^{1/}

Jeśli w każdym punkcie ciała mamy

$$/2.5/ \quad \Delta d\sigma \cdot \Delta d\varepsilon > 0$$

gdzie $\Delta d\sigma = d\sigma_2 - d\sigma_1$ i $\Delta d\varepsilon = d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1$, to zerowanie się całki /2.4/ będzie miało miejsce wtedy, gdy $\Delta d\sigma = 0$, lub $\Delta d\varepsilon = 0$, a także przy jednoczesnym zerowaniu się obu składników. W przypadku, gdy związki /2.1/ lub /2.3/ jednoznacznie wiążą ze sobą szybkości naprężeń i odkształceń, z warunku /2.5/ i z /2.4/ wynika, że $d\sigma_2 = d\sigma_1$ i $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_1$. Zatem nierówność /2.5/ jest warunkiem wystarczającym na to aby nie było punktów bifurkacji na trajektoriach naprężenia i odkształcenia. Później pokażemy, że w pewnych przypadkach warunek ten nie jest konieczny i jednoznaczność będzie miała miejsce przy mniej ograniczającej nierówności.

Postawienie warunku jednoznaczności jako kryterium ograniczającego związki /2.1/ nie jest oczywiście konieczne lecz dla ciał ze wzmocnieniem wydaje się ono kryterium racjonalnym. Wszystkie rozwiązania problemów brzegowych przy spełnieniu /2.5/ mają jasny sens fizyczny gdyż nie zachodzi potrzeba poszukiwania pól własnych które by mogły istnieć przy zerowych warunkach brzegowych. Warunek

1/ Całka /2.4/ zeruje się również, gdy rozpatrujemy ogólniejszy typ mieszanego problemu brzegowego, a mianowicie przy jednoczesnym zadaniu na powierzchni S składowych sił dT i przeszczeń du , tak aby $dT \cdot du = 0$ w każdym punkcie powierzchni.

ten jest istotny również dla eksperymentu gdyż pozwala na jednoznaczna interpretację otrzymanych wyników doświadczalnych. Ważny jest on przede wszystkim z punktu widzenia teoretycznego: opisując matematycznie dany ośrodek ciągły zastępujemy go zazwyczaj pewnym teoretycznym modelem uproszczonym i należy jasno zdać sprawę z konsekwencji tego modelu. Pojęcie jednoznaczności jest w sposób istotny związane z problemem istnienia rozwiązania. Jak ostatnio pokazał J. L. Ericksen [13] dla ciał liniowo sprężystych spełniających zasadę wzajemności Betti'ego, brak jednoznaczności implikuje istnienie problemów brzegowych dla których rozwiązanie nie może istnieć. Stawia to oczywiście poprawność użytego modelu pod znakiem zapytania.

B/. Warunek stateczności. Pojęcie stateczności w sposób istotny związane z pojęciem jednoznaczności przedstawia problem o wiele trudniejszy. Fakt, że na trajektoriach naprężenia i odkształcenia nie ma punktów bifurkacji dowodzi, że w okolicy danego stanu równowagi nie ma innych położenia równowagi. Zatem warunek jednoznaczności zapewnia stateczność ciała w sensie Eulerowskim. Pełniejsza jednak odpowiedź na to czy dany stan równowagi jest stateczny, czy nie uzyskamy stosując kryterium kinetyczne. Rozpatrzmy dowolny stan równowagi ciała pod działaniem zadanych obciążeń T_i , które w naszym rozumowaniu będziemy zakładali jako stałe. Jeżeli pod działaniem małych zaburzeń ciało wprawimy w ruch, równowaga będzie stateczna, jeśli amplitudy wywołanych drgań będą małe i zależne od wielkości zaburzeń. Niech stan naprężenia σ_{ij}^0 spełnia równanie równowagi statycznej. W przedziale czasu $\Delta t = t_1 - t_0$ na ciało działają zaburzenia δT_i ; odpowiadające im przyrosty przemieszczeń i odkształceń wynoszą δu_i i $\delta \varepsilon_{ij}$. Przyrost naprężenia $\delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}^0$ spełnia równanie równowagi dynamicznej $\delta \sigma_{ij,j} = \rho \delta \ddot{u}_i$, zatem możemy napisać /pomijając stałe

siły masowe, gdyż nie wnoszą one żadnych dodatkowych członów w równaniach końcowych/

$$/2.6/ \quad \int \delta T_i \delta u_i dS = \int \delta \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} \frac{dV}{4} \int \rho \delta u_i \delta u_i dV,$$

gdzie ρ jest gęstością ciała /przez zmianę jej pomijamy/ a δu_i i $\delta \dot{u}_i$ są prędkościami i przyspieszeniami własnego ruchu. Dla $t > t_1$ mamy $\delta T_i = 0$ i równanie /2.6/ przyjmie postać

$$/2.7/ \quad \frac{dK}{dt} = - \int \delta \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV.$$

Piszac /2.7/ wykorzystaliśmy fakt, że druga całka w /2.6/ przedstawia pochodną czasową energii kinetycznej

$$K = \frac{1}{2} \int \rho \delta u_i \delta u_i \quad . \quad \text{Energia kinetyczna ciała w czasie } t > t_1$$

wyniesie

$$/2.8/ \quad K(t) = \mathcal{E}(t) - \int_V \int_0^t \delta \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dt dV,$$

gdzie $\mathcal{E}(t) = \int_S \int_{t_0}^t \delta T_i \delta u_i dt dS$. Będzie ona maleć, jeśli przy ruchu zaczynającym się z położenia równowagi zachodzi w każdym punkcie nierówność

$$/2.9/ \quad S_1 = \int_0^t \delta \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dt > 0$$

ważną do chwili t_k gdy $\delta u_i = 0$ w dowolnym skończonym okresie czasu całka /2.9/ może przybierać wartości zarówno dodatnie jak i ujemne /zależnie od kierunku ruchu względem położenia równowagi/, jednak wartość ujemna całki powinna pozostać ograniczona. Mamy zatem warunek

$$/2.10/ \quad \max \left[- \int_0^{t_n} \delta \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dt \right] < \mu(\epsilon) \quad , \quad (\mu > 0) ,$$

gdzie t_n jest czasem odpowiadającym tym punktom na trajektorii ruchu, dla których /2.9/ ma ujemne wartości. Warunek /2.10/ jest zrozumiały gdyż nakłada on ograniczenie na wielkość maksymalnej energii kinetycznej. W układzie konserwatywnym jest on zbędny gdyż wartości ujemne i dodatnie całki /2.9/ są takie same.

Zamiast śledzić rzeczywisty przebieg ruchu, możemy warunek stateczności odnieść do wszystkich pól kinematycznie dopuszczalnych. Załóżmy, że na dany stan równowagi nakładamy wirtualne pole δu_{ij} znikające na S_u . Przy stałych siłach T_i , różnica pracy wykonanej przez siły wewnętrzne w ciele i pracy wykonanej przez siły zewnętrzne wyniesie

$$/2.11/ \quad \int_V \int_0^t (\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) \delta u_{ij} dt dV - \int_S \int_0^t T_i \delta u_i dt dS = \int_V \int_0^t \delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dt dV$$

Otrzymamy zatem identyczny warunek stateczności jak /2.9/, żądając aby przyrost pracy sił wewnętrznych był większy od pracy wykonanej przez siły zewnętrzne. Ten sposób rozumowania /zwany często metodą sąsiednich położeń równowagi, lub metodą energii przy układach konserwatywnych/ możemy znaleźć u wielu autorów /por. np.

s.62

R. Hill [5, 6, 10],/ nie prowadzi on jednak do kryterium /2.10/.

W ogólnym przypadku całka /2.9/ zależy od drogi przejścia od wyjściowego stanu równowagi do końcowego stanu spoczynku. Zakładając analityczności przyrostów $\delta \sigma_{ij}$ i $\delta \epsilon_{ij}$ jako funkcji czasu możemy napisać

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{ij} &= \dot{\sigma}_{ij}(0) \delta t + \frac{1}{2} \ddot{\sigma}_{ij}(0) \delta t^2 + \dots \\ \delta \epsilon_{ij} &= \delta \dot{\epsilon}_{ij}(0) \delta t + \frac{1}{2} \delta \ddot{\epsilon}_{ij}(0) \delta t^2 + \dots \end{aligned}$$

Wtedy w pierwszym przybliżeniu warunek /2.9/ wyrazimy następująco

$$/2.12/ \quad \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij} > 0 \quad \text{lub} \quad -d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} > 0.$$

Nierówność /2.12/ nakłada konkretne ograniczenie na związki /2.1/. Zapewni ona dodatniość całki /2.9/ jedynie w tym przypadku, gdy trajektorie przejścia od stanu równowagi do końcowego stanu spoczynku są liniami prostymi, tak że możemy napisać $\delta \sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}(0) d\lambda$, $\delta \epsilon_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}(0) d\lambda$, w układzie konserwatywnym, przy istnieniu potencjału dla szybkości odkształceń i naprężeń, całka /2.9/ nie zależy od drogi przejścia. Otrzymujemy wtedy klasyczne kryterium minimum całkowitej energii potencjalnej jako wystarczający warunek

stateczności^{1/}.

C/. Warunek istnienia fal przyspieszenia. Rozpatrzmy ośrodek nieskończony, będący w stanie naprężenia σ_{ij} i odkształcenia ε_{ij} . Falą przyspieszenia będziemy nazywali ruchomą powierzchnię na której szybkości naprężeń i przyspieszenia mogą się zmieniać skokowo. Ogólnie falą rzędu n nazwiemy powierzchnię nieciągłości n -tych pochodnych przemieszczeń, przy założeniu, że pochodne niższych rzędów są ciągłe. Dla $n=1$ /nieciągłość w prędkościach/ mamy do czynienia z falą uderzeniową, dla $n=2$, z falą przyspieszenia. Ogólna analiza problemu propagacji fal przyspieszenia i fal uderzeniowych można znaleźć w pracach T.Y. Thomasa [16], J.F. Graggsa [17], B. Hilla [15], J. Mandela [9]. Celem naszej analizy nie jest szczegółowe badanie propagacji nieciągłości, lecz wychodząc z warunku istnienia fal rzędu $n \geq 2$, wyprowadzić kryterium ograniczające związki /2.1/. Mówiąc krótko pytamy jakiego rodzaju powinny być związki /2.1/, aby w ośrodku mogły się propagować fale nieciągłości.

Rozważmy powierzchnię S poruszającą się w ośrodku ciągłym z prędkością Ω . Oznaczmy jednostkowy wektor normalny w danym punkcie do powierzchni przez ν . Ponieważ pomijamy zmianę konfiguracji, nie wprowadzamy rozróżnienia między współrzędnymi Lagrange'a i Eulera. Jeśli funkcja φ jest ciągła, natomiast jej pochodne mogą zmieniać się skokowo na powierzchni S , wyjdziemy z klasycznego równania kinematycznej spójności.

$$/2.13/ \quad \Omega \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = 0$$

Wprowadzając kartezjański układ odniesienia x_i i oznaczając przez ν_i cosinusy kierunkowe wektora ν , równanie /2.13/ przyjmie postać

$$/2.14/ \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] = - \frac{\nu_i}{\Omega} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]$$

1/ Ciekawą dyskusję dotyczącą wystarczalności tego warunku można znaleźć w pracy A.F. Greena i B.T. Sheldona [13].

W równaniach /2.13/ i /2.14/ nawiasy kwadratowe oznaczają skokową zmianę odpowiednich wielkości objętych nawiasem. Przyjmując, że stan naprężenia σ_{ij} i pole prędkości v_i są funkcjami ciągłymi, zaś ich pochodne mogą się zmieniać skokowo na powierzchni S , możemy napisać analogicznie do /2.14/

$$\begin{aligned} /2.15/ \quad & \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] = - \frac{v_j}{\Omega} [\dot{\sigma}_{ij}] , \\ & \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] = - \frac{v_k}{\Omega} [\dot{v}_k] , \end{aligned}$$

oraz na podstawie równania równowagi

$$/2.16/ \quad \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] = s [\dot{v}_i] .$$

Wykorzystując związek fizyczny /2.3/ tzn. pisząc $\dot{\sigma}_{ij} = B_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = B_{ijkl} \partial v_k / \partial x_l$, możemy z /2.15/ i /2.16/ otrzymać następujące podstawowe równanie fali przyspieszenia

$$/2.17/ \quad C_{ik} [\dot{v}_k] = s \Omega^2 [\dot{v}_i] ,$$

gdzie

$$/2.18/ \quad C_{ik} = B_{ijkl} v_j v_l .$$

Z /2.17/ widzimy, że zagadnienie fali przyspieszenia matematycznie sprowadza się do określenia wartości własnych $s \Omega^2$ i wektorów własnych $[\dot{v}_i]$ macierzy C_{ik} . Jeśli nie zakładamy symetrii tensora B_{ijkl} względem grup indeksów ij i kl macierz C_{ik} /zwana tensorem akustycznym ośrodka/ jest symetryczna i ogólnie wektory własne $[\dot{v}_i]$ nie są do siebie ortogonalne.

Mnożąc stronami związek /2.17/ przez $[\dot{v}_i]$ otrzymamy

$$C_{ik} [\dot{v}_i] [\dot{v}_k] = s \Omega^2 [\dot{v}_i] [\dot{v}_i] .$$

Zatem jeżeli macierz C_{ik} jest dodatnio określona, kwadraty prędkości propagacji fal Ω^2 są liczbami dodatnimi. Wychodząc z /2.18/ warunek ten możemy zapisać następująco

$$/2.19/ \quad C_{ik} \eta_i \eta_k = B_{ijk} \eta_i \eta_k v_j v_k > 0,$$

przy czym v i η mogą tu być dwoma dowolnymi wektorami. Równość /2.19/ wyraża zatem warunek eliptyczności tensora B_{ijk} . Możemy powiedzieć, że eliptyczność tensora B_{ijk} jest warunkiem koniecznym istnienia fal przyspieszenia w ośrodku. Analogiczny warunek otrzymany dla fal nieciągłości wyższego rzędu. Oczywiście, nie jest to warunek wystarczający, gdyż w ogólnym przypadku należy jeszcze zbadać czy zawsze istnieją wektory własne (\check{v}) , spełniające równanie /2.17/.

D/. Warunek dodatniej prędkości ^{produkcyj} entropii. Obecnie przedyskutujemy krótko warunek ograniczający związki /2.1/, wynikający z drugiej zasady termodynamiki. W tym celu należy wprowadzić dwie funkcje stanu: energię wewnętrzną w i entropię s , odniesione do jednostki objętości ciała w rozpatrywanej chwili. Pierwsza i druga zasada termodynamiki wyraża się w formie

$$/2.20/ \quad dw = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + dq$$

$$/2.21/ \quad T ds_i = dq - T ds > 0,$$

gdzie T jest absolutną temperaturą; /zakładamy jej istnienie jako parametru stanu dla procesów plastycznej deformacji/, a ds_i oznacza przyrost entropii wywołany nieodwracalnym procesem /produkcja entropii wewnątrz elementu/. Charakter ograniczenia nakładanego nierównością /2.21/ zależy od tego, jakiego rodzaju wielkości przyjęte są jako termodynamiczne parametry stanu.

H. Ziegler [18, 19], na przykład, przyjął, że $w = w(\sigma_{ij}, T)$, $s = s(\sigma_{ij}, T)$, co w wyniku prowadzi do wniosku, że $T ds_i = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$.

Oznacza to, że cała praca dysypowana zamienia się w ciepło. Bardziej ogólne podejście można znaleźć w pracy S.S. Grigoriana [20] a przede wszystkim u A.A. Wakulenki [11, 12], gdzie przyjmuje się, że w ogólnym przypadku

$$w = w(\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p, \lambda^{(r)}, T), \quad s = s(\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p, \lambda^{(r)}, T), \quad \text{gdzie } \begin{matrix} \text{skalarne} \\ \text{skalarne} \end{matrix}$$

parametry $\lambda^{(r)}$ ($r=1,2,\dots,n$), charakteryzują proces nieodwracalnej deformacji; można dlatego założyć, że $d\lambda^{(r)} = g_{ij}^{(r)} d\varepsilon_{ij}^P$, co oznaczać będzie przy odkształceniach sprężystych wartości tych parametrów pozostają stałe. Przez właściwy dobór $\lambda^{(r)}$ i tensorów $g_{ij}^{(r)}$ możemy opisywać różne typy ośrodków reologicznych.

Rozważmy dla przykładu proces plastycznej deformacji, który opisuje się termodynamicznie przez przyjęcie tylko jednego parametru λ , tzn. mamy $w = w(\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^P, \lambda, T)$, $s = s(\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^P, \lambda, T)$ przy czym $d\lambda = (\sigma_{ij} - s_{ij}) d\varepsilon_{ij}^P$ a tensor s_{ij} zależy od tensora odkształceń plastycznych. W przypadku deformacji izotermicznej, wygodnie jest wprowadzić funkcję $f^3 = w - Ts$ - /energii swobodnej/. Na podstawie /2.20/, możemy napisać

$$\begin{aligned} dw = df^3 + Tds + sdT &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^e} d\varepsilon_{ij}^e + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^P} d\varepsilon_{ij}^P + \\ /2.22/ &+ \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\sigma_{ij} - s_{ij}) d\varepsilon_{ij}^P + \frac{\partial f}{\partial T} dT + Tds + sdT = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + dq \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} Tds - dq &= \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) d\varepsilon_{ij}^e + \left(s + \frac{\partial f}{\partial T} \right) dT + \\ /2.23/ &+ \left[\sigma_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^P} - \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\sigma_{ij} - s_{ij}) \right] d\varepsilon_{ij}^P. \end{aligned}$$

Dla procesu odwracalnego ($d\varepsilon_{ij}^P = 0$), mamy $Tds - dq = 0$, zatem muszą zachodzić relacje

$$/2.24/ \quad \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f^3}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right)_T, \quad s = - \left(\frac{\partial f^3}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}^e}.$$

Przyjmując, że ważne są one również w zakresie plastycznym, z /2.23/ otrzymamy

$$/2.25/ \quad Tds_i = \left[\sigma_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^P} - \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\sigma_{ij} - s_{ij}) \right] d\varepsilon_{ij}^P > 0.$$

Nierówność /2.25/ przedstawia poszukiwany warunek, który powinny spełniać związki /2.1/ przy wyżej uczynionych założeniach. Gdy energia swobodna f^3 nie zależy od ε_{ij}^P i λ z /2.25/ otrzymamy $Tds_i = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P > 0$. Przypadek ten odpowis-

dać będzie ośrodkowi idealnie plastycznemu. Izotropowe wzmocnienie opiszemy przyjmując, że $f^2 = f^2(\epsilon_{ij}^e, \lambda, T)$, gdzie

$$d\lambda = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad \text{z /2.25/ otrzymamy wtedy}$$

$$\text{/2.26/} \quad T ds_i = \sigma_{ij} \left(1 - \frac{\partial f^2}{\partial \lambda}\right) d\epsilon_{ij}^p > 0,$$

co prowadzi do nierówności $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p > 0$, $0 < \frac{\partial f^2}{\partial \lambda} < 1$. Przy padek kinematycznego wzmocnienia opiszemy zakładając

$$f^2 = f^2(\epsilon_{ij}^e, \epsilon_{ij}^p, T) \quad ; \text{ wtedy z /2.25/ wynika, że}$$

$$\text{/2.27/} \quad T ds_i = \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial f^2}{\partial \epsilon_{ij}^p}\right) d\epsilon_{ij}^p > 0.$$

W ostatnim przypadku przyrost pracy dysypowanej $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p$ niekoniecznie musi być dodatni. Do identycznych wniosków doszliśmy w Rozdz. I, przy założeniu o niejednorodności deformacji plastycznej wewnątrz elementu /rys.11b/.

Na podstawie powyższych rozważań widzimy, że postać warunku ograniczającego związek /2.1/, wynikającego z drugiego prawa termodynamiki zależy w dużym stopniu od ilości i rodzaju założonych parametrów termodynamicznych. Właściwy ich wybór dla danego ośrodka reologicznego stanowi główną trudność przy opisie termodynamicznym. Dlatego w głównej mierze termodynamika nieodwracalnych procesów deformacji ciał stałych jest ciągle w stadium początkowym, i nie osiągnęła tej jasności i precyzji z jaką opisywać możemy odwracalne procesy deformacji ciał sprężystych, gdzie kwestia wyboru parametrów termodynamicznych jest rzeczą prostą: $w = w(\epsilon_{ij}^e, T)$, $\psi = \psi(\epsilon_{ij}^e, T)$ (cf np. [21]).

2.2. Postulat wypukłości transformacji

Związki /2.1/ i /2.2/ możemy ogólnie traktować jako liniowe transformacje w n -wymiarowej przestrzeni szybkości naprężeń. Na przestrzeń szybkości odkształceń, nie zachodzi tu jednak liniowość w całej przestrzeni, bowiem różne operatory liniowe działają w obszarze sprężystym i sprężysto-plastycznym. Można tu mówić o transformacji liniowej półprzestrzeni w przypadku regularnej powierzchni pęknięcia; obie półprzestrzenie są rozdzielone $n-1$

wymiarową hyperpłaszczyznę styczną w danym punkcie do powierzchni płynięcia. Wszystkie nasze dalsze rozważania będą odnosić się do regularnych powierzchni płynięcia, mających jednoznacznie określony wektor normalny w każdym punkcie na powierzchni.

Niech x będzie dowolnym punktem przestrzeni wektorowej $V_x^{(n)}$, zaś y odwzorowaniem x przy pomocy liniowego ^{nie wszędzie} operatora A , tzn. $y = Ax$, $y \in V_y^{(n)}$. Wprowadźmy obecnie ważne pojęcie wypukłej transformacji:

Definicja. Transformacja $y = Ax$ jest wypukła, jeśli dla dwóch dowolnych punktów x_2, x_1 z przestrzeni $V_x^{(n)}$ mamy

/2.28/
$$(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = (Ax_2 - Ax_1) \cdot (x_2 - x_1) > 0.$$

Z powyższej definicji wynika, że jeśli operator A jest liniowy w całej przestrzeni $V_x^{(n)}$, to transformacja jest wypukła jeśli op. A jest dodatkowo określony. Istotnie, wtedy

$$(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = A(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) > 0$$
, co jest definicją dodat^{twie} określonego operatora.

Rozpatrzmy obecnie dowolną podprzestrzeń Π_0 przestrzeni $V_x^{(n)}$. Ortogonalnym dopełnieniem Π_0 będzie podprzestrzeń Π_0^\perp , tak, że możemy napisać $V_x^{(n)} = \Pi_0 \oplus \Pi_0^\perp$. Niech w przestrzeni $V_x^{(n)}$ działają dwa operatory liniowe A_1 i A_2 . Dla każdego punktu x przestrzeni obowiązuje rozłożenie $x = x^0 + x^n$, gdzie $x^0 \in \Pi_0$, $x^n \in \Pi_0^\perp$. Założmy, że w podprzestrzeni Π_0 $A_1 = A_2$, tzn. $A_1 x^0 = A_2 x^0$. Możemy zatem napisać $A_1 x = A_1 x^0 + A_1 x^n$, $A_2 x = A_2 x^0 + A_2 x^n$

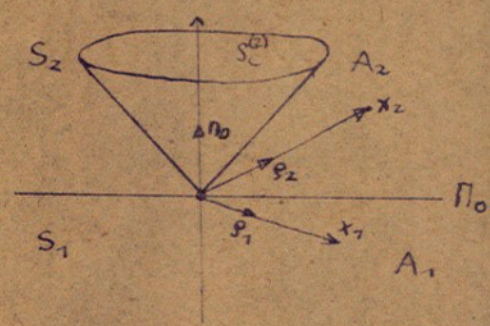
oraz

/2.29/
$$A_2 x = A_1 x + (A_2 - A_1) x^n$$

Powyższy oczywisty wniosek sformułujemy krótko w następującym lemacie.

Lemat 1. Jeśli w przestrzeni $V_x^{(n)}$ działają dwa operatory A_1 i A_2 , przy czym są one jednakowe w podprzestrzeni Π_0 , to zachodzi między nimi zależność $A_2 = A_1 + (A_2 - A_1)E$, gdzie E jest operatorem rzutowania na dopełnienie ortogonalne Π_0^\perp podprzestrzeni Π_0 .

Interesujący dla nas będzie przypadek gdy podprzestrzeń Π_0 jest $n-1$ wymiarowa, a Π_0^\perp jednowymiarowa. Wtedy w rozłożeniu $x = x^0 + x^n$, x^n jest wektorem skierowanym wzdłuż normalnej do Π_0 . Podprzestrzeń Π_0 dzieli $V_x^{(n)}$ na dwie



Rys. II.1

półprzestrzenie S_1 i S_2 . Dla $x \in S_2$ mamy $x^n = n_0 |x^n|$, dla $x \in S_1$ mamy $x^n = -n_0 |x^n|$ gdzie n_0 jest jednostkowym wektorem normalnym do Π_0 /rys. II.1/. Załóżmy, że na punkty półprzestrzeni S_2 działa operator A_2 , na punkty półprzestrzeni S_1 operator A_1 , przy czym na pod-

przestrzeni Π_0 oba operatory są identyczne, tzn. $A_2 x^0 = A_1 x^0$.

Lemat 2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym wypukłości transformacji x^j określonej przez działanie dwóch operatorów A_2 i A_1 , w półprzestrzeniach S_1 i S_2 i identycznych na $n-1$ - wymiarowej półprzestrzeni Π_0 , jest dodatnio określoność tych operatorów.

Zgodnie z definicją /2.28/, wypukłość transformacji badamy biorąc dwa dowolne punkty w przestrzeni $V_x^{(n)}$. Mamy zatem następujące możliwości:

- a) $x_1, x_2 \in S_2$, $I_a = A_2(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) > 0$;
- b) $x_1, x_2 \in S_1$, $I_a = A_1(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) > 0$;
- c) $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$, $I_a = (A_2 x_2 - A_1 x_1) \cdot (x_2 - x_1) > 0$;

/2.30/

1) $|x^n|$ oznacza moduł wektora x .

$$d) \quad x_1 \in S_2, \quad x_2 \in S_1, \quad I_d = (A_2 x_1 - A_1 x_2) \cdot (x_1 - x_2) > 0.$$

Założmy, że operatory A_1 i A_2 są dodatnio określone; zachodzi wtedy wypukłość transformacji w przypadkach a/ i b/.
By zbadać przypadek c/ skorzystamy z Lematu 1. Na podstawie wzoru /2.29/, wyrażenia I_a i I_c możemy wyrazić następująco

$$I_a = A_2(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) = A_1(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) + (A_2 - A_1)(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

$$/2.31/ \quad I_c = (A_2 x_2 - A_1 x_1) \cdot (x_2 - x_1) = A_1(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) + (A_2 - A_1)x_2 \cdot (x_2 - x_1)$$

W wyrażeniu na I_c pierwszy człon jest zawsze dodatni, drugi człon ma znak nieokreślony. Interesuje nas oczywiście tylko przypadek gdy drugi człon jest ujemny tzn. $(A_2 - A_1)x_2 \cdot (x_2 - x_1) = |x_2| (A_2 - A_1)n_0 \cdot (x_2 - x_1) < 0$, gdyż w innych przypadkach mamy na pewno $I_c > 0$.

Z /2.31/ mamy

$$/2.32/ \quad I_c - I_a = (A_2 - A_1)x_1 \cdot (x_2 - x_1) = - (A_2 - A_1)n_0 \cdot (x_2 - x_1) |x_1|$$

gdzie $x_1 = -n_0 |x_1|$. Zatem gdy drugi człon w wyrażeniu na I_c jest ujemny, z /2.32/ wynika, że $I_c - I_a > 0$, ponieważ z założenia, musi być $I_d > 0$. Przypadek d/ da się sprowadzić do przypadku c/ przez wzajemną zmianę indeksów 1 i 2. Tak więc Lemat 2 został udowodniony.

Identyczność operatorów w podprzestrzeni Π_0 zapewnia ciągłość transformacji przy przejściu z S_1 do S_2 . Można również rozpatrywać transformacje liniowe w S_1 i S_2 , które nie spełniają warunku ciągłości na Π_0 . Oczywiście Lemat 2 przestaje wtedy obowiązywać. Można łatwo wykazać, że gdy warunek ciągłości przy przejściu z S_1 do S_2 nie jest spełniony, wypukłość transformacji w całej przestrzeni nie zachodzi nawet gdy oba operatory są dodatnio określone. W tym celu rozważmy dwa blisko siebie położone punkty x_2 i x_1 w podprzestrzeni Π_0 . Warunek wypukłości możemy zapisać następująco

$$/2.33/ \quad I = (A_2 x_2 - A_1 x_1) \cdot (x_2 - x_1) = [A_2 x_2 - A_2 x_1 + (A_1 - A_2) x_1] \cdot (x_2 - x_1) = \\ = A_2 \Delta x \cdot \Delta x + (A_1 - A_2) x_1 \cdot \Delta x,$$

gdzie $\Delta x = x_2 - x_1$, idy $\Delta x \rightarrow 0$, drugi człon, liniowy względem Δx , decyduje o znaku wyrażenia na I . Człon ten możemy oczywiście uczynić ujemnym przez odpowiednie zorientowanie wektora Δx . Tak więc warunek ciągłości $A_1 x^0 = A_2 x^0$ jest warunkiem koniecznym wypukłości transformacji.

Ze wzoru /2.33/ wynika również, że w przestrzeni $V_x^{(n)}$ mogą istnieć punkty wystarczająco odległe od Π_0 , tak aby pierwszy człon zawsze przeważał i całe wyrażenie było dodatnie. Istnieć zatem może w $V_x^{(n)}$ obszar S_c , który nazwiemy obszarem wypukłości transformacji. Dla każdego punktu tego obszaru, x_1 , zachodzi nierówność $(A_2 x_2 - A_1 x_1) \cdot (x_2 - x_1) > 0$, gdzie x_2 jest dowolnym punktem przestrzeni.

Lemat 3. Jeśli $(A_1 x^0 \cdot x) > 0$ i $A_2 x^0 \cdot x > 0$ i ciągłość transformacji w podprzestrzeni Π_0 nie zachodzi ($A_1 x^0 \neq A_2 x^0$), to wypukłość transformacji może mieć miejsce jedynie dla punktów pewnego obszaru S_c .

Niech $x_2 \in S_2$ i $x_1 \in S_1$; warunek wypukłości transformacji możemy wyrazić następująco

$$/2.34/ \quad I = (A_2 x_2 - A_1 x_1) \cdot (x_2 - x_1) = |x_2|^2 A_2 \rho_2 \cdot \rho_2 - |x_2| |x_1| [A_1 \rho_1 \cdot \rho_2 - A_2 \rho_2 \cdot \rho_1] + \\ + |x_1|^2 A_1 \rho_1 \cdot \rho_1 > 0,$$

przy czym ρ_2 i ρ_1 są wektorami jednostkowymi określającymi kierunek x_2 i x_1 , tzn. $x_2 = \rho_2 |x_2|$, $x_1 = \rho_1 |x_1|$.

Wyrażenie /2.34/ przedstawia formę kwadratową względem $|x_2|$ i $|x_1|$. Będzie ona dodatnio określona jeśli

$$/2.35/ \quad A_2 \rho_2 \cdot \rho_2 > 0, \quad A_1 \rho_1 \cdot \rho_1 > 0, \quad (A_1 \rho_1 \cdot \rho_2 + A_2 \rho_2 \cdot \rho_1) < 2 (A_2 \rho_2 \cdot \rho_2)^{\frac{1}{2}} (A_1 \rho_1 \cdot \rho_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Dwa pierwsze warunki są spełnione na mocy założenia. Warunek trzeci natomiast określa dwa obszary ograniczone hyperstożkami $S_c^{(1)}$ i $S_c^{(2)}$ w półprzestrzeniach S_1 i S_2 . Rozważmy dla przykładu hyperstożek $S_c^{(2)}$. Zastąpmy w trzecim wyrażeniu /2.35/

znak nierówności znakiem równości. Dla każdego ustalonego położenia S_1 równość /2.35g/ określi nam pewną hyperpowierzchnię. Przy zmiennym położeniu S_1 otrzymamy rodzinę hyperpowierzchni; poszukiwany stożek $S_C^{(2)}$ będzie obwiednią tej rodziny. Matematycznie, równanie stożka $S_C^{(2)}$ otrzymamy, ruszając S_1 z następującego układu n równań liniowych(2)

$$/2.36/ \quad (A_1 + A_2) s_2 = 2 \left[\frac{A_2 s_2 \cdot s_2}{A_1 s_1 \cdot s_1} \right]^{\frac{1}{2}} A_1 s_1$$

otrzymaną ze zróźniczkowania /2.35g/ względem s_1 ; założyliśmy przy tym dla prostoty, że operator A_1 jest samosprężny, tzn. $A_1 s_1 \cdot s_2 = A_1 s_2 \cdot s_1$. Przyjmując, że $\det A_1 \neq 0$, układ /2.36/ pozwoli na jednoznaczne określenie wektora s_1 i w wyniku równanie /2.35g/ da nam równanie stożka $S_C^{(2)}$. W dalszej części pracy pokazemy, że ta ogólna procedura w pewnych przypadkach nie będzie konieczna. Analogicznie określić możemy hiperstożek $S_C^{(1)}$ w półprzestrzeni S_1 .

2.4. Wypukłość funkcji i wypukłość transformacji

Rozważmy funkcję f n zmiennych x_i ($i=1, 2, \dots, n$). Funkcję f nazywamy wypukłą jeśli dla dwóch dowolnych punktów x, x' zachodzi nierówność

$$/2.37/ \quad \frac{1}{2} [f(x_i) + f(x'_i)] > f\left(\frac{x_i + x'_i}{2}\right)$$

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna, to nierówność /2.37/ możemy wyrazić następująco /konwencja sumacyjna obowiązuje/.

$$/2.38/ \quad f(x'_i) - f(x_i) - (x'_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$$

Zamieniając w /2.38/ miejscami x i x' , otrzymuje się nowa nierówność, a po dodaniu stronami, mamy

$$/2.39/ \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x'_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x'_i - x_i) > 0$$

Można łatwo wykazać, że odwrotnie, nierówność /2.39/ implikuje /2.38/, jeżeli obszar określenia funkcji f jest wypukły /por. [7, 23]/. Dla dwukrotnie różniczkowalnych funkcji

kryterium /2.38/ może być wyrażone żądaniem, aby macierz $H_{ij} = \|\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j\|$ dodatnio była półokreślona w całym obszarze tzn.

$$/2.40/ \quad H_{ij} = \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\| \geq 0,$$

przy czym znak równości może zachodzić jedynie na niezgęstym zbiorze [23].

Wprowadzone poprzednio pojęcie wypukłości transformacji jest rozszerzeniem pojęcia wypukłości funkcji. Istotnie, nierówność /2.28/ przejdzie w /2.39/ przy założeniu, że istnieje funkcja $f(x)$ taka, że transformacja $y = Ax$ może być przedstawiona następująco

$$/2.41/ \quad y = \text{grad}_x f(x) \quad \text{lub} \quad y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

W większości dotychczasowych badań dotyczących równań konstytutywnych w teorii sprężystości, plastyczności i reologii operowano pojęciem wypukłości funkcji, która pełniła rolę potencjału przy ustalaniu związków fizycznych /równanie 2.41/. Potencjałem tym była energia sprężysta ~~na~~ w teorii sprężystości, funkcja płnięcia w teorii plastyczności lub też różne funkcje dysypacji w ośrodkach lepkich. W naszych rozważaniach nie będziemy zakładali istnienia potencjału, zatem opierać się będziemy na pojęciu wypukłości transformacji. Okazuje się, że wypukłość transformacji jest wystarczająca do spełnienia większości warunków wysuniętych na początku tego rozdziału, może zatem przedstawiać racjonalne kryterium ograniczające przy budowie związków fizycznych. Kryterium wypukłości transformacji zostało również ostatnio wprowadzone przez C. Truesdella i R. Tompina [7] w teorii skończonych odkształceń ośrodków sprężystych jako uogólnienie poprzednio postulowanego przez B.D. Coleman i W. Nolla [21, 22] kryterium wypukłości funkcji energii sprężystej.

Istotny sens mechaniczny pojęcia wypukłości funkcji i wypukłości transformacji wynika z następującego lematu:

Lemma 4. Niech P i R oznaczają dwa punkty w przestrzeni wektorowej $V_x^{(n)}$. Jeśli istnieją dwa potencjały $f(x)$ i $\varphi(x)$ w półprzestrzeniach S_1 i S_2 , wypukłe zgodnie z definicją /2.38/ przy czym transformacja liniowa ma postać /2.41/, to zachodzi nierówność

$$/2.42/ \quad \int_P^R (y - y_P) \cdot dx > 0,$$

przy całkowaniu po dowolnej trajektorii leżącej w jednej z półprzestrzeni i łączącej P i R . Dla ogólnej transformacji liniowej $y = Ax$ spełniającej warunek wypukłości /2.28/ całka /2.42/ jest dodatnia dla trajektorii prostoliniowej łączącej P z R .

Niech P leży w półprzestrzeni Π_0 zaś R w jednej z półprzestrzeni np. S_2 . Rozważmy dowolną trajektorię PR leżącą w S_2 i Π_0 . Możemy zatem napisać

$$/2.43/ \quad \int_P^R (y - y_P) \cdot dx = \int_P^R \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_P \right] \cdot dx = \varphi_R - \varphi_P - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_P (x_{iR} - x_{iP}) \quad (2.38) \cdot (2.42)$$

Todobnie możemy wykazać dodatniość całki /2.42/ dla trajektorii leżących w S_1 i Π_0 . Ogólnie potencjały f i φ są różnymi funkcjami spełniającymi warunek ciągłości na Π_0 :

$$\text{grad}_x \varphi(x^0) = \text{grad}_x f(x^0).$$

W przypadku ogólnej liniowej transformacji $y = Ax$ rozważamy prostoliniową trajektorię łączącą P z R . Dla dowolnego punktu x na tej trajektorii mamy

$x = x_P + \lambda(x_R - x_P)$, gdzie $0 \leq \lambda \leq 1$. Otrzymamy zatem

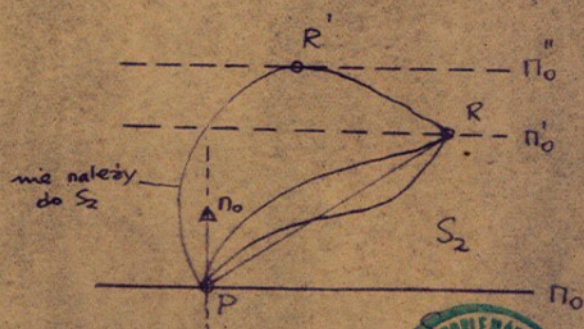
$$/2.44/ \quad \int_P^R (y - y_P) \cdot dx = \int_0^1 A(x - x_P) \cdot (x_R - x_P) d\lambda = \\ = A(x_R - x_P) \cdot (x_R - x_P) \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} (y_R - y_P) \cdot (x_R - x_P) > 0$$

Ostatnie wyrażenie /2.44/ jest dodatnie na mocy definicji

/2.28/

Całkę /2.42/ możemy mechanicznie interpretować jako pracę sił mierzonych od stanu P ; jest ona identyczna z wyrażeniem /2.9/ otrzymanym przy analizie stateczności procesu deformacji . Należy zauważyć, że odwrotne twierdzenie jest również słuszne i wychodząc z /2.42/ można wykazać istnienie wypukłego potencjału. Postulowanie dodatniości całek podobnych do /2.42/ i wywodzenie stąd istnienia potencjału dla ośrodków sprężystych w przypadku skończonych odkształceń można znaleźć ^{m.in.} w pracy L. Caprioli [25] i B.D. Colemana [24].

Przy badaniu wypukłości transformacji operatory A_1 i A_2 były jednaowo uprzywilejowane. Przy rozpatrywaniu całek typu /2.42/ wzdłuż pewnych trajektorii należy jednak w sposób wyraźny wprowadzić rozróżnienie między nieodwracalną deformacją plastyczną i odwracalną deformacją sprężystą. Niech pólprzestrzeń S_2 odpowiada odkształceniom sprężysto-plastycznym a S_1 zmianom czysto sprężystym. Oznaczmy przez n_0 jednostkowy wektor



Rys. II.2

normalny do Π_0 i skierowany do obszaru S_2 . Przesuwanie się punktu po dowolnej trajektorii w S_2 odpowiadać będzie równoległe, jednokierunkowe przemieszczenie się hyperpowierzchni Π_0 wzdłuż wektora n_0 . Możemy zatem zdefiniować klasę trajektorii całkowicie leżących w S_2 ; są to trajektorie, posiadające w każdym punkcie wektor styczny dx spełniający warunek $n_0 \cdot dx > 0$ / np. trajektoria $PR'R$ na rys. II.2 nie należy całkowicie do obszaru S_2 /. Natomiast na dowolnej trajektorii leżącej w S_1 , hyperpowierzchnia Π_0 nie doznaje żadnej zmiany, można tu zatem wyobrazić trajektorię wychodzącą i wracającą do punktu P . Powyższe uwagi odnoszą się w

szczegółności do Lematu 4.

2.5. Liniowe, niestowarzyszone prawa płynięcia

2.5.1. Ogólna forma praw niestowarzyszonych. Rozważania poprzed-

nich dwóch paragrafów odnośnie transformacji liniowych wykorzystamy obecnie do zbadania związków fizycznych /2.1/ i /2.2/ dla ośrodków sprężysto-plastycznych. Rozpatrzmy dowolny stan naprężenia przedstawiony punktem P , leżącym w przestrzeni naprężeń na aktualnej dla danego procesu deformacji powierzchni płynięcia $f=0$. Ponieważ związki /2.1/ i /2.2/ są liniowe względem prędkości odkształcenia i naprężenia /lub względem przyrostów/ obok przestrzeni naprężeń V_σ wprowadzamy dodatkowo przestrzeń szybkości naprężeń $V\dot{\sigma}$, przy czym hyperpłaszczyznę Π_σ utożsamiamy z hyperpłaszczyzną Π_f styczną w danym punkcie P do powierzchni $f=0$ a punkt zerowy przestrzeni $V\dot{\sigma}$ pokrywamy z punktem P . Podobnie, w miarę potrzeby, wprowadzać będziemy przestrzeń odkształceń $V\varepsilon$ i przestrzeń szybkości odkształceń $V\dot{\varepsilon}$. Ponieważ hyperpłaszczyzna Π_f jest $n-1$ - wymiarowa, jej ortogonalne dopełnienie jest jednowymiarowe i charakteryzuje się jednostkowym wektorem n_f , normalnym do Π_f . Jeśli $\dot{\sigma} \cdot n_f > 0$, to $\dot{\sigma}$ należy do półprzestrzeni S_2 w przestrzeni $V\dot{\sigma}$ i obowiązuje prawo /2.1/ /aktywne obciążenie/; jeśli $\dot{\sigma} \cdot n_f < 0$, $\dot{\sigma}$ należy do półprzestrzeni S_1 i obowiązuje prawo /2.2/ /odciążanie/; przy $\dot{\sigma} \cdot n_f = 0$, $\dot{\sigma}$ reprezentuje stany leżące na hyperpłaszczyźnie Π_f .

Warunek plastyczności w rozpatrywanym momencie izotermicznego procesu można przedstawić równaniem $f = f(\sigma_{ij}, q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$ reprezentującym zamkniętą hyperpowierzchnię w przestrzeni naprężeń. W ogólnym przypadku problem doboru parametrów q_1, \dots, q_n jest sprawą otwartą, podobnie jak przy wyborze parametrów termo-

-dynamicznych. W przypadku izotropowego wzmocnienia przyjmuje się

$$f = f(\sigma_{ij}, q_1) \quad , \quad \text{gdzie} \quad q_1 = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dt \quad ,$$

całka jest obliczona wzdłuż całej trajektorii odkształcenia^{1/}.

Przy wzmocnieniu kinematycznym mamy $f = f(\sigma_{ij}, -\dot{\epsilon}_{ij}^P) = 0$.

Bardziej ogólną sytuację wzmocnienia możemy opisać przyjmując

$$f = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P, q_2) = 0 \quad , \quad \text{gdzie} \quad q_2 = \int_0^t (\sigma_{ij} - s_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^P dt$$

a s_{ij} jest tensorem zależnym od ϵ_{ij}^P /fizycznie reprezentującym stan naprężenia właśnych wewnątrz elementu/. Ogólnie parametry

q_1, q_2, \dots, q_n opisują stan materiału na danym etapie

wzmocnienia. Ciekawą koncepcję wysunął ostatnio E. Kröner

[28] by wyboru parametrów wzmocnienia dokonywać na podstawie

własności mikrostruktury materiału, a więc, gęstości dyslokacji,

gęstości pętli dyslokacji, średniej wielkości ziaren itp. Stany

naprężenia odpowiadające wnętrzu powierzchni płynięcia tzn. dla

których $f < 0$, nazywać będziemy stanami sprężystymi. Stany

na powierzchni płynięcia ($f = 0$) nazywać będziemy stanami

plastycznymi.

Zbadamy obecnie jakiego rodzaju ograniczenie na związki /2.1/

i /2.2/ nakłada warunek ciągłości przy przejściu z S_1 do S_2

ponieważ mamy $A^{(2)} = A^e + A^P$, $A^{(1)} = A^e$ na podstawie Lematu 1

mamy dla $\dot{\sigma} \in S_2$

$$\dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^P = A^{(2)} \dot{\sigma} = A^{(1)} \dot{\sigma} + (A^{(2)} - A^{(1)}) \dot{\sigma} = A^e \dot{\sigma} + A^P \dot{\sigma} =$$

/2.45/

$$= A^e \dot{\sigma} + A^P n_f (\dot{\sigma} \cdot n_f) = A^e \dot{\sigma} + \frac{1}{K} n_g (\dot{\sigma} \cdot n_f),$$

gdzie $n_g = K A^P n_f$ jest jednostkowym wektorem o stałym kierunku

niezależnym od kierunku i wielkości $\dot{\sigma}$, a skalar K nie za-

leży od szybkości naprężenia. Z /2.45/ wynika, że najbardziej

ogólna postać liniowych związków /2.1/ i /2.2/ spełniających wa-

runek ciągłości jest następująca:

1/ Mogą również istnieć inne miary wzmocnienia izotropowego
 np $q = \int_0^t (\dot{\epsilon}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^e)^{1/2} dt$ /intensywność odkształceń/
 lub $q = \int_0^t (\dot{\epsilon}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^P)^{1/2} dt$. W pracy niniejszej nie będziemy się jednak zajmować problemem właściwego doboru parametrów wzmocnienia.

$$/2.46/ \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon} = A^e \dot{\sigma} + \frac{1}{k} n_g (\dot{\sigma} \cdot n_f) \quad \text{dla } \dot{\sigma} \cdot n_f > 0, f=0 \\ \dot{\epsilon} = A^e \dot{\sigma} \quad \text{dla } \dot{\sigma} \cdot n_f < 0, f=0 \text{ lub dla } f < 0. \end{array} \right. \quad 1/$$

Równanie /2.46/ możemy przedstawić w notacji tensorowej następująco

$$/2.47/ \quad \epsilon_{ij} = A_{ijkl}^e \sigma_{kl} + \frac{1}{H} g_{ij} f_{kl} \sigma_{kl} \quad \text{dla } f_{kl} \sigma_{kl} > 0, f=0$$

gdzie

$$/2.48/ \quad f_{kl} = \partial f / \partial \sigma_{kl}, \quad H = K (g_{ij} g_{ij})^{\frac{1}{2}} (f_{kl} f_{kl})^{\frac{1}{2}}.$$

Zatem w /2.1/ tensor A_{ijkl}^e wyraża się następująco

$$/2.49/ \quad A_{ijkl}^e = A_{ijkl}^e + \frac{1}{H} g_{ij} f_{kl}.$$

Jeśli istnieje funkcja $g(\sigma_{ij}, q_1, \dots, q_r)$ taka, że $g_{ij} = \partial g / \partial \sigma_{ij}$, funkcję tę nazywamy potencjałem plastycznym. W tym szczególnym przypadku związki /2.47/ są identyczne do związków zaproponowanych w 1938 r. przez E. Melana [29]. W naszych rozważaniach nie będziemy jednak wykorzystywali faktu istnienia potencjału g .

Gdy $g_{ij} = f_{ij}$, przechodzimy do stowarzyszonych praw płynięcia

$$/2.50/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = A_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{H} f_{ij} f_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad \text{dla } f_{kl} \dot{\sigma}_{kl} > 0, f=0$$

zaś zamiast /2.49/ mamy

$$/2.51/ \quad A_{ijkl}^e = A_{ijkl}^e + \frac{1}{H} f_{ij} f_{kl}.$$

Jeśli tensor g_{ij} jest tensorem izotropowym zależnym tylko od stanu naprężenia, to mamy

$$/2.52/ \quad g_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 \sigma_{ij} + \alpha_3 \sigma_{ik} \sigma_{kj},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są funkcjami zależnymi od niezmienników tensora naprężenia. Przy tej formie tensora g_{ij} , zakładając dodatkowo nieściśliwość materiałów, związki /2.47/ przechodzą w postać wyprowadzoną w r. 1947 przez G.H. Handelmaną i C.C.

1/ Postać związków pozostanie niezmienniona, jeśli odstępamy od założenia istnienia wewnątrz powierzchni płynięcia obszaru sprężystego, natomiast przyjmujemy, że powstają tam również odkształcenia plastyczne, zaś operatory w obu obszarach nie są jednakowe. Odwiodać to może sytuacji w ośrodkach spójnych, gdzie zasadniczo obszar sprężysty nie istnieje.

[30]
 Lina i W. Fragera. Oczywiście, tensor g_{ij} w sposób bardziej złożony może zależeć od historii deformacji.

W prosty sposób możemy dokonać odwrócenia związków /2.46/. Oznaczmy operator odwrotny do A^e przez B^e , tzn.

$$(A^e)^{-1} = B^e \quad \text{z /2.46a/ mamy}$$

$$\text{/2.53/} \quad \sigma = B^e (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = B^e \dot{\epsilon} - \frac{1}{K} (\dot{\sigma} \cdot n_f) B^e n_f$$

Mnożąc obustronnie przez n_f , można otrzymać wyrażenie na $\dot{\sigma} \cdot n_f$

$$\text{/2.54/} \quad \dot{\sigma} \cdot n_f = \frac{B^e \dot{\epsilon} \cdot n_f}{1 + \frac{1}{K} B^e n_f \cdot n_f}$$

i wzór /2.53/ przyjmie ostateczną postać

$$\text{/2.55/} \quad \dot{\sigma} = \left[B^e - \frac{(B^e n_f)(B^e n_f)}{K + B^e n_f \cdot n_f} \right] \dot{\epsilon} = B \dot{\epsilon} \quad \text{dla } f=0, B^e \dot{\epsilon} \cdot n_f > 0$$

przy czym wykorzystaliśmy fakt, że operator B^e jest samosprężony. W notacji tensorowej, odwrócenie związków /2.47/ wyraża się następująco:

$$\text{/2.56/} \quad \dot{\sigma}_{ij} = \left[B_{ijke}^e - \frac{(B_{ijpq}^e g_{pq})(B_{krs}^e f_{rs})}{H + B_{ijke}^e f_{ij} g_{ke}} \right] \dot{\epsilon}_{kl} = B_{ijke} \dot{\epsilon}_{kl}$$

przy $B_{ijke}^e \dot{\epsilon}_{kl} f_{ij} > 0$, $f=0$. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do badania materiałów wstępnie izotropowych, dla których

$$\text{/2.57/} \quad B_{ijke}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{ke} + \mu (\delta_{ek} \delta_{je} + \delta_{jk} \delta_{ie})$$

a λ, μ są stałymi Lamego.

Obecnie przeprowadzimy analizę niestowarzyszonego prawa /2.46/ z punktu widzenia podstawowych kryteriów przedyskutowanych na początku niniejszego rozdziału

2.5.2. Jednoznaczność. Porównując kryterium wypukłości transformacji i kryterium jednoznaczności widzimy od razu, że są one identyczne. Opierając się na Lemacie 2 wystarczy zatem ustalić warunek na dodatnią określoność operatorów A_{ijke} i A_{ijke}^e lub, co jest równoważne, operatorów B_{ijke} i B_{ijke}^e . Dla ciała sprężystego, izotropowego operator /2.57/ będzie dodatnio określony jeśli

/2.58/ $\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0$

Nierówności /2.58/ zapewniają dodatniość energii sprężystej i tym samym jednoznaczność ogólnego problemu brzegowego. Ponieważ operator B_{ijkl} nie jest symetryczny względem indeksów i, j, k , tzn. $B_{ijkl} \neq B_{klij}$, warunek dodatniej określoności przyjmie postać

/2.59/ $I = B_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl} = B_{(ij,kl)} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl} > 0$

gdzie $B_{(ij,kl)} = \frac{1}{2} (B_{ijkl} + B_{klij})$. Zatem warunek /2.59/ ogranicza jedynie część symetryczną tensora B_{ijkl} .

W przypadku ciała sprężyste izotropowego, tensor B_{ijkl} można przedstawić następująco

/2.60/ $B_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) - \delta (\lambda \dot{g} \delta_{ij} + 2\mu g_{ij}) \cdot (\lambda \dot{f} \delta_{kl} + 2\mu f_{kl})$

gdzie

/2.61/ $\delta = [H + \lambda \dot{f} \dot{g} + 2\mu f_{kl} g_{kl}]^{-2}, \quad \dot{f} = f_{kk}, \quad \dot{g} = g_{kk}$

i warunek /2.59/ przyjmie postać

/2.62/ $B_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl} = \lambda \dot{\Theta}^2 + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \delta (\lambda \dot{g} \dot{\Theta} + 2\mu g_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) (\lambda \dot{f} \dot{\Theta} + 2\mu f_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}) > 0$,

gdzie $\dot{\Theta} = \dot{\epsilon}_{ii}$. Ponieważ prawa strona /2.62/ zależy od niezmienników tensorów $\dot{\epsilon}_{ij}$, f_{ij} , g_{ij} i od niezmienników mieszanych możemy w prosty sposób przekształcić /2.62/ wprowadzając wartości główne tych tensorów. Utrzymamy w ten sposób wyrażenie typu

$C_{ij} \dot{\epsilon}_i \dot{\epsilon}_j > 0$, gdzie $\dot{\epsilon}_i, \dot{\epsilon}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) są wartościami głównymi tensora $\dot{\epsilon}_{ij}$, a macierz C_{ij} wyraża się następująco

/2.63/ $\|C_{ij}\| = \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu - 4\delta \mu^2 g_{1f_1}, & \lambda - 2\mu^2 \delta (g_{1f_2} + g_{2f_1}), & \lambda - 2\mu^2 \delta (g_{1f_3} + g_{3f_1}) \\ \lambda - 2\mu^2 \delta (g_{1f_2} + g_{2f_1}), & \lambda + 2\mu - 4\mu^2 \delta g_{2f_2}, & \lambda - 2\mu^2 \delta (g_{2f_3} + g_{3f_2}) \\ \lambda - 2\mu^2 \delta (g_{1f_3} + g_{3f_1}), & \lambda - 2\mu^2 \delta (g_{2f_3} + g_{3f_2}), & \lambda + 2\mu - 4\mu^2 \delta g_{3f_3} \end{vmatrix}$

zaś g_1, g_2, g_3 i f_1, f_2, f_3 są wartościami głównymi tensorów g_{ij} i f_{ij} . W myśl twierdzenia Sylwestra macierz

C_{ij} będzie dodatnio określona jeśli wyznaczniki wszystkich głównych minorów są dodatnie; otrzymamy zatem trzy nierówności, które

powinny być spełnione w każdym przypadku.

$$/2.64/ \quad \lambda + 2\mu - 4\delta\mu^2 g_i f_i > 0, \quad (\lambda + 2\mu - 4\delta\mu^2 g_i f_i)(\lambda + 2\mu - 4\delta\mu^2 g_i f_i) - [\lambda - 2\mu^2 \delta (g_i f_i + g_i f_i)]^2 > 0, \quad \det \| C_{ij} \| > 0.$$

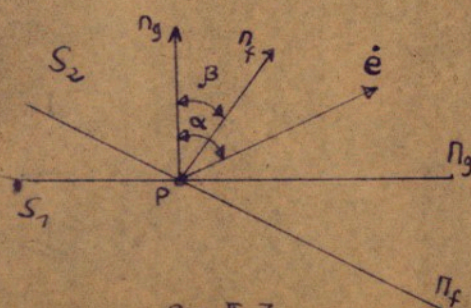
Ponieważ ogólna dyskusja nierówności /2.64/ jest trudna, w pracy niniejszej ograniczymy się do rozpatrzenia pewnych szczególnych przypadków.

a) Załóżmy, że materiał jest plastycznie nieściśliwy i warunek plastyczności nie zależy od średniego ciśnienia hydrostatycznego, a zatem $\dot{f} = \dot{g} = 0$. Prościej jest teraz skorzystać bezpośrednio z nierówności /2.62/, która przyjmuje postać

$$/2.65/ \quad I = \lambda \dot{\epsilon}^2 + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - 4\mu^2 \delta (g_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) (f_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}) = \\ = (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \dot{\epsilon}^2 + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{4\mu^2 (g_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) (f_{kl} \dot{\epsilon}_{kl})}{H + 2\mu (f_{mn} g_{mn})} = \\ = (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \dot{\epsilon}^2 + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{4\mu^2 (n_g \dot{\epsilon}) (n_f \dot{\epsilon})}{K + 2\mu (n_f \cdot n_g)} > 0.$$

gdzie $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \delta_{ij}$ jest dewiatorem szybkości odkształceń. Przy spełnieniu drugiej nierówności /2.58/ pierwszy człon w /2.65/ zawierający tensor kulisty $\dot{\epsilon}$ będzie zawsze dodatni, pozostaje zatem do dodania dodatniość I w przestrzeni dewiatorów $\dot{\epsilon}_{ij}$. Zauważmy, że przestrzeń dewiatorów i przestrzeń tensorów kulistych są do siebie ortogonalne, gdyż $\dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} = 0$.

Nierówność /2.65/ przeanalizujemy szczegółowo ujmując przedstawienia geometrycznego w przestrzeni $V_{\dot{\epsilon}}$. Rozpatrzmy dwa wektory jednostkowe n_f i n_g i normalne do nich hiperpłaszczyzny Π_f i Π_g , przy czym Π_f jest styczna do hiperpowierzchni $f=0$ /rys. II.3/. Te dwa wektory określają dwuwymiarową płaszczyznę Π_e . Z warunku aktywnego obciążenia $B^e \dot{\epsilon} \cdot n_f > 0$



Rys. II. 3

$= 2\mu \dot{\epsilon} \cdot n_f > 0$ wynika, że należy rozpatrywać wektory $\dot{\epsilon}$ należące do półprzestrzeni S_2 . Załóżmy, że $\cos \beta = n_f \cdot n_g > 0$ i funkcja wznoczenia $K > 0$, co pociąga za sobą dodatniość mianownika w wyrażeniu /2.65/. By obli-

czyli iloczyny $n_f \cdot \dot{e}$ i $n_g \cdot \dot{e}$ wystarczy rzutować wektor \dot{e} na płaszczyznę $\Pi_{\dot{e}}$, gdyż składowa tego wektora należąca do dopełnienia ortogonalnego $\Pi_{\dot{e}}$ nie daje żadnego wkładu do tych iloczynów. Mamy zatem $(n_f \cdot \dot{e})(n_g \cdot \dot{e}) = \dot{e}^2 \cos \alpha \cos(\alpha - \beta)$ gdzie \dot{e} jest rzutem \dot{e} na $\Pi_{\dot{e}}$, a kąt α jest pokazany na rys. II.3 /można uważać, że przedstawia on sytuację na płaszczyźnie $\Pi_{\dot{e}}$ /. Warunek dodatniości I w przestrzeni V_6 możemy zatem przedstawić następująco

$$/2.66/ \quad 2\mu \min \dot{e}^2 - \frac{4\mu^2}{K + 2\mu \cos \beta} \max [\dot{e}^2 \cos \alpha \cos(\alpha - \beta)] > 0$$

Pierwszy człon osiągnie minimum gdy $\dot{e} = \bar{e}$, zaś wyrażenie $\cos \alpha \cos(\alpha - \beta)$ osiąga maximum przy $\alpha = \beta/2$. W rezultacie otrzymujemy prostą nierówność

$$/2.67/ \quad K/2\mu > \sin^2 \beta/2$$

Do identycznego warunku można dojść wychodząc z układu nierówności /2.64/, jednak strona rachunkowa jest wtedy dosyć żmudna.

b) Przyjmijmy, że ośrodek jest ściśliwy i warunek plastyczności może zależeć od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia; dodatkowo założmy, że, dewiatory g_{ij}^d, f_{ij}^d tensorów g_{ij} i f_{ij} są współosiowe. Znaczy to, że w podprzestrzeni dewiatorowej mamy stowarzyszone prawo płynięcia, zaś odchylenie od prawa stowarzyszonego występują w podprzestrzeni tensorów kulist. ch. Przy padek, ten może być istotny dla mechaniki ośrodków sypkich, gdzie obserwowany wzrost objętości gruntu w stanie granicznym jest daleko mniejszy od wzrostu wynikającego z prawa stowarzyszonego.

$$\text{Pisząc } g_{ij} = g_{ij}^d + 1/3 \dot{g} \delta_{ij}, \quad f_{ij} = f_{ij}^d + 1/3 \dot{f} \delta_{ij},$$

$$g^d = g^d n, \quad f^d = f^d n, \quad \text{gdzie } n^2 = 1, \text{ nierówność}$$

/2.62/ może być przedstawiona następująco

$$/2.68/ \quad K_e (1 - K_e \delta \dot{g} \dot{f}) \dot{e}^2 - 2\mu K_e \delta (n \cdot \dot{e}) [f^d g^d + \dot{g} \dot{f}^d] \dot{e} + 2\mu [\dot{e}^2 - 2\mu \delta \dot{g} \dot{f}^d (n \cdot \dot{e})] > 0$$

gdzie $K_e = \lambda + 2/3\mu$. Ponieważ $n \cdot \dot{e} = \dot{e} \cos \alpha$, gdzie α jest kątem między \dot{e} i n , równanie /2.68/ przedstawia formę

kwadratową względem θ i ϵ . Po prostych przekształceniach możemy łatwo uzyskać warunek dodatniej określoności tej formy:

$$(2.69) \quad (f^{\circ} g^d + g^{\circ} f^d)^2 - 2 \left(\frac{K}{\mu} + 2f^d g^d \right) \left(\frac{K}{\epsilon_e} + g^{\circ} f^{\circ} \right) < 0,$$

przy czym $g^d = \frac{1}{3}(3 - g^{\circ 2})^{\frac{1}{2}}$, $f^d = \frac{1}{3}(3 - f^{\circ 2})^{\frac{1}{2}}$.

Ponieważ założenia przypadku a/ są powszechnie przyjmowane w teorii plastyczności metali, postaramy się dokładniej zbadać jakiego rodzaju ograniczenie nakłada nierówność (2.67) na funkcję wzmocnienia K . Załóżmy, że $f = f(\sigma, \epsilon^p, q_1) = 0$ gdzie σ jest dewiatorem stanu naprężenia, a $dq_1 = s d\epsilon^p$

(patrz p. 2.5.1). Ponieważ

$$(2.70) \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} d\epsilon^p + \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 = 0,$$

korzystając z równań (2.46) otrzymamy

$$(2.71) \quad K = - \frac{1}{[f]} \left[\frac{\partial f}{\partial q_1} (\sigma \cdot n_g) + \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \cdot n_g \right],$$

gdzie $[f] = [f_{kk} f_{kk}]^{\frac{1}{2}}$.

ai/ Przyjmując warunek plastyczności Hubera-Misesa i izotropowe wzmocnienie możemy napisać

$$(2.72) \quad f = \frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_0^2(q_1) = 0$$

gdzie σ_0 oznacza naprężenie uplastycznienia przy prostym rozciąganiu. W tym przypadku nierówność (2.67) możemy prosto wyrazić przez charakterystyczne wielkości krzywej rozciągania.

Mamy zatem

$$(2.73) \quad \frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial q_1} = -2 \frac{\partial \sigma_0}{\partial \epsilon^p} = -2 \left[\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right]^{-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} = 0,$$

$$[f] = \sqrt{6} \sigma_0, \quad \sigma \cdot n_g = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \cos \beta,$$

gdzie E_t oznacza moduł styczny krzywej rozciągania, a E jest sprężystym modułem Younga. Uwzględniając (2.71) i (2.73), nierówność (2.67) da się przedstawić następująco

$$(2.74) \quad \frac{E}{E_t} < 1 + \frac{E}{3\mu} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta/2}$$

[av/] Rozpatrzmy przypadek kinematycznego wzmocnienia określonego przez równanie:

$$/2.75/ \quad f = \frac{3}{2} (\sigma_{ij} - c \varepsilon_{ij}^p) (\sigma_{ij} - c \varepsilon_{ij}^p) - \sigma_0^2 = \frac{3}{2} (\sigma - c \varepsilon^p)^2 - \sigma_0^2 = 0$$

gdzie σ_0 i c są stałymi. Początkowa powierzchnia płynięcia przemieszcza się jak ciało sztywne w podprzestrzeni dewiatorowej, a wektor przemieszczenia wynosi $c \varepsilon^p$. Ponieważ mamy

$$/2.76/ \quad \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} = -c \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad c = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \neq \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0,$$

można łatwo pokazać, że /2.67/ prowadzi do nierówności /2.74/.

[az/] Rozważmy warunek plastyczności Treski i przypadek izotropowego wzmocnienia. W przestrzeni naprężeń głównych możemy napisać

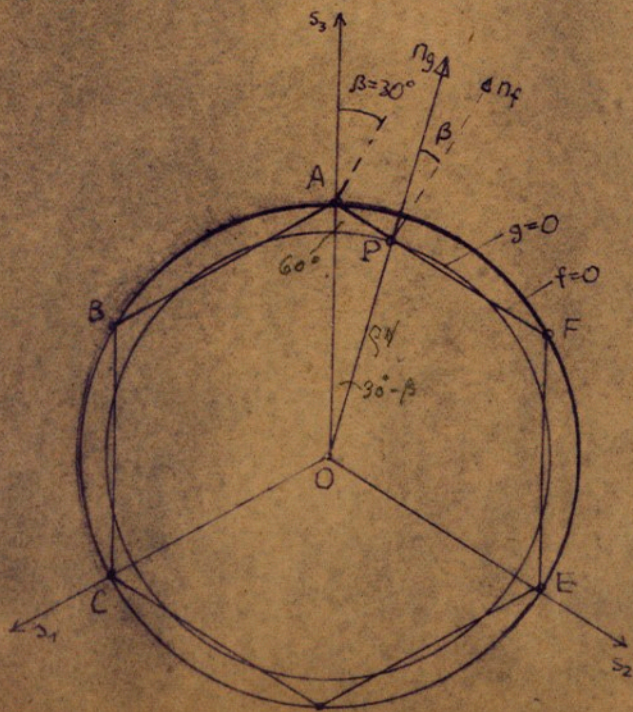
$$/2.77/ \quad f = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_0(q_1) = 0, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

gdzie σ_1 , σ_2 i σ_3 są głównymi składowymi dewiatora naprężenia. Niech plastyczny potencjał g przyjmie postać warunku Hubera-Misesa, tzn.

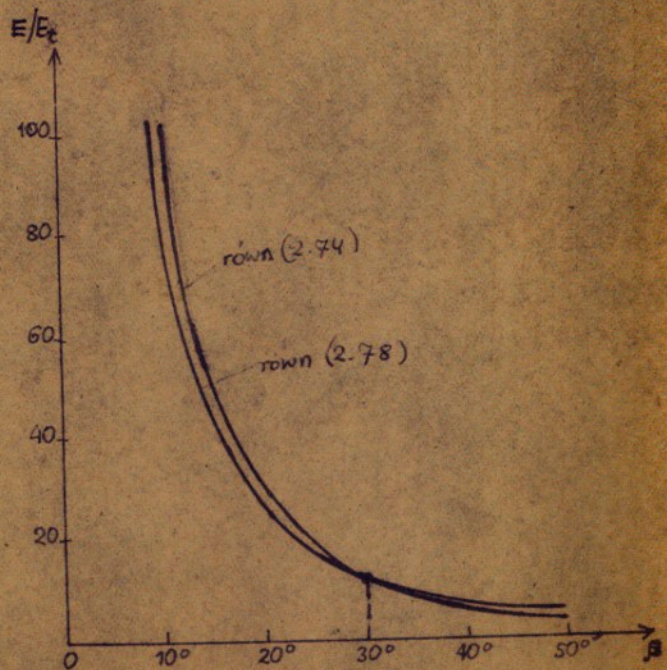
$$g = \frac{3}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \mu^2 = 0,$$

gdzie $\mu = \sigma_0 \sqrt{3} / \cos \beta$ (patrz /rys. II.4/. Po prostych przekształceniach znajdujemy

$$/2.78/ \quad E/E_t < 1 + E/4\mu \frac{1}{\sin^2 \beta / 2 \cos \beta}$$



Rys. II.4



Rys. II.5

Nierówności /2.74/ i /2.78/ są wykreślnie przedstawione na rys. II.5 dla $E/\mu = 2,7$. Widzimy, że dla $\beta = 30^\circ$ obie nierówności dają identyczne ograniczenie $E/E_t = 12,6$. Ta wartość kąta odpowiada wierzchołkom sześcioboku Treski i jest wartością maksymalną w jaką może się odchylić wektor n_g od n_f . Użycie liniowego warunku plastyczności Treski w powiązaniu z potencjałem plastycznym w formie warunku Hubera-Misesa jest czasem stosowane przy rozwiązywaniu konkretnych problemów.

Z powyższej analizy warunku jednoznaczności wynika, że stopień wzmocnienia materiału warunkuje możliwość odchylenia się wektora n_g od n_f . Dla materiałów mających krzywą wzmocnienia o ciągłym przejściu z obszaru sprężystego do sprężysto-plastycznego, nierówności /2.74/ i /2.78/ pozwala na znaczne wartości kąta β w początkowej fazie odkształceń plastycznych. Naodwrot, przy płaskiej krzywej wzmocnienia, wartości dopuszczalne kąta β będą małe, a dla materiału idealnie plastycznego warunek jednoznaczności prowadzić będzie do stowarzyszonego prawa płynięcia / $f_{ij} = g_{ij}$. Tak samo dla materiału sztywno-plastycznego warunek jednoznaczności nie pozwoli na żadne odchylenie n_g od n_f . Potwierdza to w pewnym sensie tezę wysuniętą w Rozdz. I, że związki fizyczne dla ciał sztywno plastycznych nie powinny być uzyskiwane formalnym odrzuceniem członów sprężystych w równaniach /2.1/.

2.5.3. Statyczna interpretacja warunku eliptyczności. W p. 22 pokazaliśmy, że warunkiem koniecznym istnienia fal przyspieszenia w ośrodku jest eliptyczność tensora B_{ijk} , wyrażona nierównością /2.19/. Porównując /2.62/ i /2.19/, widzimy że istnieje podobieństwo między warunkiem dodatniej określoności i warunkiem eliptyczności. Mamy mianowicie

War.dot.okr. $B_{ijk} h_{ij} h_{ka} > 0$ dla symetrycznych tensorów

War.elipt. $B_{ijk} \eta_i \eta_k \nu_j$ dla dwóch dowolnych wektorów

η, ν

Pokażemy obecnie, że obok ogólnie znanej interpretacji falowej warunku eliptyczności, istnieje interpretacja statyczna pozwalająca na bezpośrednie porównanie obu powyższych nierówności. Rozważmy zbiór tensorów C_{ij} utworzonych przez dwa wektory η i ν , tzn. $C_{ij} = \eta_i \nu_j$. Oba warunki można teraz wyrazić następująco

$$\begin{aligned} /2.79/ \quad B_{ijkl} h_{ij} h_{kl} &= B_{(ij)(kl)} h_{ij} h_{kl}, \\ B_{ijkl} C_{ij} C_{kl} &= B_{(ij)(kl)} C_{ij} C_{kl} + B_{[ij](kl)} C_{ij} C_{kl} \end{aligned}$$

gdzie (ij) oznacza symetryzację względem indeksów i, j , a $[ij]$ antysymetryzację. Zbadajmy dokładniej własności tensora C_{ij} . Możemy napisać

$$/2.80/ \quad C_{(ij)} = \frac{1}{2}(\eta_i \nu_j + \eta_j \nu_i), \quad C_{[ij]} = \frac{1}{2}[\eta_i \nu_j - \eta_j \nu_i].$$

Tensor symetryczny $C_{(ij)}$ posiada sześć składowych i jest określony przez sześć niezależnych składowych obu wektorów. Istnieją jednak dalsze istotne ograniczenia tego tensora. Układ dwóch wektorów w przestrzeni Euklidesowej posiada trzy następujące niezmienniki

$$/2.81/ \quad \eta = (\eta_i \eta_i)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu = (\nu_i \nu_i)^{\frac{1}{2}}, \quad \cos \varphi = \frac{\eta_i \nu_i}{\eta \nu}$$

zaś trzy niezmienniki tensora $C_{(ij)}$ dadzą się przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= C_{ii} = \eta \nu \cos \varphi, \\ \bar{C}_2 &= C_{(ij)} C_{(ij)} = \frac{1}{4}(\eta_i \nu_j + \eta_j \nu_i)(\eta_i \nu_j + \eta_j \nu_i) = \frac{1}{2} \eta^2 \nu^2 (1 + \cos^2 \varphi) \\ \bar{C}_3 &= C_{(kl)} C_{(ij)} C_{(ji)} = \frac{1}{4} \eta^3 \nu^3 (3 + \cos^2 \varphi) \cos \varphi, \end{aligned}$$

skąd wynika, że istnieje związek między niezmiennikami.

$$/2.82/ \quad 2\bar{C}_3 = \bar{C}_1 (3\bar{C}_2 - \bar{C}_1^2).$$

By pokazać jasno sens związku /2.82/, wprowadzimy, nowy układ niezmienników wyrażający się następująco przez wartości główne c_1 , c_2 , c_3 tensora C_{ij}

$$\tilde{C}_1 = \bar{C}_1 = c_1 + c_2 + c_3, \quad \tilde{C}_2 = c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1, \quad \tilde{C}_3 = c_1 c_2 c_3 = \det |C_{ij}|$$

Ponieważ $\bar{C}_2 = \tilde{C}_1^2 - 2\tilde{C}_2$ i $\bar{C}_3 = \tilde{C}_1^3 - 3\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + 3\tilde{C}_3$, równanie /2.82/ przyjmie następująca postać

$$/2.83/ \quad \tilde{C}_3 = 0 = c_1 c_2 c_3$$

skąd wynika, że jedna z głównych składowych musi się zerować; w ogólnym przypadku tensor $C_{(ij)}$ powinien dać się sprowadzić do postaci posiadającej jedną zerową kolumnę i rząd, zatem przedstawić on będzie stan płaski. By znaleźć drugie ważne ograniczenie rozważmy układ równań /2.80/.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \eta_1 \nu_1, & C_{(22)} &= \frac{1}{2} (\eta_1 \nu_2 + \eta_2 \nu_1), \\ C_{22} &= \eta_2 \nu_2, & C_{(23)} &= \frac{1}{2} (\eta_2 \nu_3 + \eta_3 \nu_2), \\ C_{33} &= \eta_3 \nu_3, & C_{(31)} &= \frac{1}{2} (\eta_3 \nu_1 + \eta_1 \nu_3). \end{aligned}$$

Załóżmy że $C_{11} = C_{(22)} = C_{(31)} = 0$. Pociąga to za sobą $\eta_1 = \nu_1 = 0$ gdyż w przeciwnym razie zerowałyby się wszystkie składowe tensora $C_{(ij)}$. Odnieśmy pozostałe składowe do kierunków głównych. Ponieważ wtedy $C_{(23)} = 0$, otrzymujemy

$$/2.84/ \quad c_2/c_3 = - \nu_2^2/\nu_3^2 \leq 0,$$

a zatem niezzerujące się składowe główne tensora $C_{(ij)}$ nie mogą posiadać jednakowych znaków. Część antysymetryczną $C_{[ij]}$ możemy w prosty sposób związać z tensorem symetrycznym, a mianowicie wychodząc z /2.80/, mamy

$$/2.85/ \quad C_{(22)}^2 = C_{(22)}^2 - C_{11} C_{22}, \quad C_{(23)}^2 = C_{(23)}^2 - C_{22} C_{33}, \quad C_{(31)}^2 = C_{(31)}^2 - C_{33} C_{11}$$

Używając wartości głównych, otrzymamy jedną nieznikającą składową $C_{(23)} = (C_2 C_3)^{\frac{1}{2}}$.

Powyższy wynik można również uzyskać w sposób prostszy drogą interpretacji geometrycznej. Dwa wektory η i ν określają w przestrzeni Euklidesowej płaszczyznę. Obracając układ tak, aby oś 1 była normalna do płaszczyzny, będziemy mieli w tym układzie $\eta_1 = \nu_1 = 0$ co prowadzi do płaskiego stanu. Dalej, przy pomocy koła Mohra, możemy łatwo otrzymać nierówność /2.84/.

1/ Analizę tensorów zbudowanych na dwóch wektorach można znaleźć m.in. u W.W. Nowożyłowa [41]. Wydaje się jednak, że przedstawiona powyżej pełna interpretacja warunku eliptyczności, nie była do tej pory znana /por. np. [7]/.

Jeśli będziemy utożsamiać tensor $c_{ij} = \eta_{ij}$ z tensorem opisującym stan deformacji w punkcie, wtedy $\varepsilon_{ij} = q_{ij}$ przedstawia będzie płaski stan odkształcenia, o głównych składowych posiadających przeciwne znaki, zaś $\omega_{ij} = q_{ij}$ przedstawi lokalny obrót będący średnią geometryczną głównych odkształceń. Ponieważ w naszych rozważaniach, tensor B_{ijkl} posiada następujące cechy symetrii: $B_{ijkl} = B_{jick}$, $B_{ijkl} = B_{ijck}$, obroty nie wejdą do warunku /2.79/. W tym wypadku, dodatnia określoność operatora zapewnia jego eliptyczność. Wykorzystując Lemat 4 możemy powiedzieć, że dla eliptycznych operatorów, B_{ijkl} całka /2.42/ jest dodatnia dla prostoliniowych dróg odkształceń w klasie tensorów $\varepsilon_{ij} = q_{ij}$. W przypadku dużych odkształceń, gdy nie mamy powyższej symetrii B_{ijkl} , oba człony występują w /2.79/; wtedy /2.79₁/ przestanie implikować /2.79₂/. Fakt ten został ostatnio pokazany na przykładzie przez R.A. Toupin i B. Bernsteina [32]. Należy jeszcze zauważyć, że przedstawiona przez nas analiza, pozwala na pełną interpretację statyczną war. elipt. również i dla dużych odkształceń, jako dodatnia praca /2.42/ w płaskim stanie odkształcenia, przy $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \leq 0$ i obrocie ~~elementu~~ elementu określonym przez /2.55/. Wynik ten może być ważny dla doświadczenia, gdyż w ten sposób własności falowe ośrodka mogą być weryfikowane przez doświadczeniowe statyczne.

Wychodząc z formy kwadratowej /2.62/, której współczynniki dla kierunków głównych są przedstawione w macierzy /2.63/, otrzymamy następujący układ nierówności

$$\begin{aligned} /2.86/ \quad \lambda + 2\mu - 4\delta\mu^2 g_1 f_1 > 0, \quad \lambda + 2\mu - 4\delta\mu^2 g_2 f_2 > 0, \\ 2\lambda - 4\mu^2 r (g_1 f_2 + g_2 f_1) - 2[(\lambda + 2\mu) - 4\delta\mu^2 g_1 f_1](\lambda + 2\mu - 4\delta\mu^2 g_2 f_2) < 0 \end{aligned}$$

oraz dalsze nierówności, zamieniając w /2.86/ indeksy /1,2/ przez /2,1/ i /3,1/. Dla materiału sprężystego /2.86/ daje

$$/2.87/ \quad \lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0$$

a zatem mamy słabsze nierówności niż /2.58/, które wynikały z dodatniości operatora sprężystego.

Nasze rozważanie zakończymy stwierdzeniem, że warunek wypukłości transformacji, zapewnia jednocześnie eliptyczność operatora liniowego B_{ijkl} ; spełniony jest zatem warunek konieczny możliwości, propagacji zaburzeń w ośrodku. Jak pokazał J. Mandel [9], przy niestowarzyszonym prawie płynięcia /2.47/ i przy spełnieniu nierówności /2.86/ mogą istnieć w ośrodku trzy rodzaje fal plastycznych, przy czym dla pewnych kierunków szybkość propagacji fal plastycznych może być większa od szybkości fal sprężystych. Nie stanowi to sprzeczności ani z prawami termodynamiki, ani nie wykazuje niestateczności materiału.

2.5.4. Warunek jednoznaczności dla pierwszego problemu brzegowego

Rozpatrzmy obecnie przypadek gdy na całym brzegu $S=S_u$ zadane są warunki brzegowe typu kinematycznego, tzn. $u=u(t)$ na S .

Badając jednoznaczność w przyrostach możemy uważać, że w danej chwili $t=t_0$ zadane są na S_0 szybkości przemieszczeń

$$v = \dot{u}(t_0)$$

. Zakładając myślowo, że wewnątrz ciała istnieją dwa rozwiązania, ich różnica Δv musi znikać na brzegu. Skorzystamy obecnie z twierdzenia podanego przez L. van Hove [31] w myśl którego, dla dowolnego, dwukrotnie różniczkowalnego pola wektorowego Δv , znikającego na brzegu, a nie znikającego wewnątrz obszaru, zachodzi nierówność

$$/2.89/ \quad \int_V B_{ijkl} \Delta v_{i,j} \Delta v_{k,l} dV > 0$$

Jeśli operator B_{ijkl} spełnia warunek eliptyczności /2.19/.

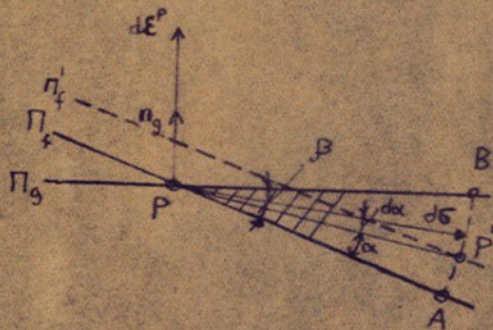
Ponieważ zgodnie z prawem /2.3/ mamy $\Delta \sigma_{ij} = B_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} =$

$$B_{ijkl} \Delta v_{k,l}, \text{ nierówność } /2.89/ \text{ można zapisać jako } \int_V \Delta \sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij} dV > 0.$$

Porównanie z warunkiem /2.4/ sprowadza nasze założenie o istnieniu dwóch pól prędkości do niedorzeczności. Zgodnie z Lematem 2 wystarczy tu założyć, że dwa rozwiązania albo odpowiadają aktywne

mu obciążeniu albo odciążeniu w tych samych częściach obszaru. W ten sposób uzyskaliśmy wynik, znany już w teorii sprężystości, że warunek eliptyczności zapewnia jednoznaczność pierwszego problemu brzegowego. Należy zauważyć, że dowód jest ważny jedynie dla ciała jednorodnego.

2.5.5. Uwagi odnośnie stateczności materiału. Podana w Lemacie 4



Rys. II.6

własność wypukłej transformacji, jest ściśle związana z kryterium stateczności bowiem całka /2.42/ może być utożsamiona z całką /2.9/. Ponieważ dla prawa niestowarzyszonego /2.46/ nie ma funkcji szybkości energii $W(\epsilon) = \int_P^P \epsilon d\epsilon$, rozpatrywać będziemy jedynie prostoliniowe trajektorie w przestrzeni szybkości odkształceń, lub naprężeń. W klasie prostoliniowych trajektorii możemy uważać, że warunek /2.9/ jest

spełniony. Pewne trudności nastrocza jednak dowód, że spełnia się również warunek /2.10/. Jak wynika z rys. II.6a, dla przyrostów naprężeń skierowanych w obszar zakreskowany mamy $d\delta d\epsilon^p < 0$ a zatem przy cyklu przyłożenia i zdjęcia przyrostu $d\delta$ całka /2.10/ będzie miała ujemną wartość. Możemy zatem wyobrazić sytuację, że w danym punkcie mamy nieskończenie wiele cykli przyłożenia i zdjęcia $d\delta$ i zachodzi pytanie, czy końcowa wartość całki będzie ograniczona; innymi słowy pytamy, czy może zaistnieć "drganiowa" utrata stateczności polegająca na ciągłym waroście amplitudy początkowo małego zaburzenia.

Załóżmy, że możliwa jest historia odkształcenia w danym punkcie taka, że cyklicznie zmieniający się wektor $d\delta$ o stałym module obraca się jednocześnie o kąt nieskończenie mały $d\alpha$ po każdym cyklu od punktu A do B w płaszczyźnie Π_ϵ określonej przez n_g i n_f . Jednocześnie przesuwają się hyperpłaszczyzna

Π_f , tak że dla $d\sigma$ skierowanego np. do punktu P' , Π_f zawiera ten punkt i pozostaje normalną do n_f . Możemy zatem napisać wyrażenie na całkowitą pracę "odebraną" z elementu cyklicznymi przyrostami przy obrocie. AB

$$dW_{AB} = \int 1/k (d\sigma \cdot n_f) (-d\sigma \cdot n_g) = -1/k d\sigma^2 \int_0^\beta \sin(\beta - \alpha) \cos \alpha d\alpha =$$

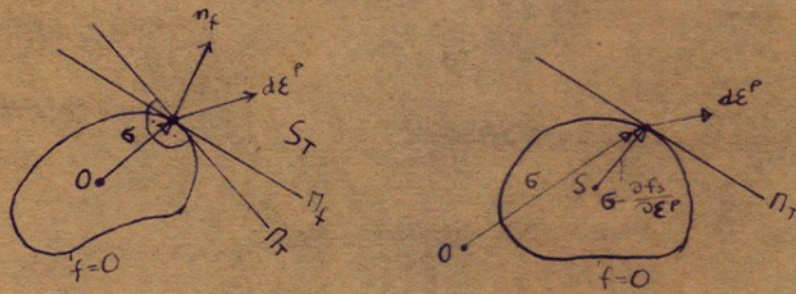
$$/2.90/ \quad = -1/k^2 d\sigma^2 \left[\frac{1}{4} \sin \beta (2\beta + \sin 2\beta) - \frac{1}{4} \cos \beta (1 - \cos 2\beta) \right]$$

Widzimy zatem, że wartość dW_{AB} jest ograniczona i dalsze cykle z punktu B zachowają tę wartość stałą lub będą ją zmniejszać. Podobny wynik uzyskamy jeśli założymy skończoną zmianę kąta α po każdym cyklu.

Powyższe rozumowanie nie przedstawia ścisłego dowodu stateczności, gdyż rozpatrując całkę /2.10/ należałoby przeprowadzić całkowanie po rzeczywistych trajektoriach ruchu. Z /2.90/ wynika jednak, że nieskończony ciąg cyklów może "odebrać" jedynie ograniczoną ilość energii, zależną od wielkości początkowego zaburzenia. Wynikałoby z tego, że "drganiowa" utrata stateczności dla materiału opisanego prawem /2.46/ nie jest możliwa. Oczywiście bardziej precyzyjna analiza problemu stateczności jest tu konieczna i dalsze badania powinny głębiej wyjaśnić tą sprawę.

2. 56. Warunek termodynamiczny. Omówimy jeszcze krótko ograniczenie wynikające z warunku dodatniej prędkości produkcji entropii. nierówność /2.26/ dla przypadku izotropowego wzmocnienia wymaga aby $\sigma \cdot d\epsilon^p > 0$. Jeśli poprowadzimy z punktu zerowego O w przestrzeni naprężeń wektor σ i normalną do niego hiperpłaszczyznę Π_t , żądanie powyższe oznaczać będzie, że wektor $d\epsilon^p$ może zajmować dowolne położenie w półprzestrzeni S_t /rys. II.7/. Podobnie, warunek /2.27/ dla wzmocnienia nieizotropowego wyraża w istocie to samo, przy czym zamiast wektora σ rozpatrujemy wektor $\sigma' = \sigma - \sigma^p / \partial \epsilon^p$, poprowadzony ze stałego punktu S

wewnątrz powierzchni płynięcia. Nie mamy tu żadnych istotnych ograniczeń odnośnie kształtu powierzchni $f=0$; jedynie konieczne jest aby punkty O i S znajdowały się we wnętrzu powierzchni płynięcia i zachodziła jej "wypukłość" względem tych punktów.^{1/} Oczywiście, powierzchnia $f=0$ może być wklęsła względem innych punktów leżących w jej wnętrzu.



Rys. II.7.

2.6. Dopuszczalne trajektorie obciążenia dla teorii deformacyjnych

Rozpatrzmy obecnie związki fizyczne wiążące bezpośrednio odkształcenie plastyczne ze stanem naprężenia i z historią deformacji. W szczególnym przypadku, jeśli założymy, że rozpatrujemy tylko aktywne procesy i postulujemy, że tensor odkształcenia plastycznego zależy od dewiatora naprężenia (wykluczając w ten sposób zależność od trajektorii deformacji^{1/}, możemy skorzystać ze wzoru /2.52/ i dla materiału izotropowego napisać /2.91/

$$\varepsilon_{ij}^p = \alpha_1 (\mathcal{J}_2', \mathcal{J}_3') \sigma_{ij} + \alpha_2 (\mathcal{J}_2', \mathcal{J}_3') \tau_{ij},$$

gdzie \mathcal{J}_2' i \mathcal{J}_3' są niezmiennikami dewiatora naprężenia τ_{ij} .

^{1/} Powierzchnia jest wypukła względem danego punktu, jeśli każdy wektor wychodzący z tego punktu przecina powierzchnię tylko raz.

$\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \alpha_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_2' \delta_{ij}$; pisząc /2.91/ spełniliśmy także warunek nieściśliwości. Związek powyższy został po raz pierwszy zaproponowany przez W. Pragera [33]. Gdy o zachowaniu się plastycznym materiału decyduje drugi niezmiennik dwiatora γ_2' , z /2.91/ otrzymamy

$$\text{/2.92/} \quad \epsilon_{ij}^p = \alpha_{ij}(\gamma_2')$$

Równanie /2.92/ jest znane pod nazwą teorii deformacyjnej Nadai'a lub Hencky-Iljuszina i jest często stosowane w praktyce ze względu na swoją prostotę. Oba związki należy uzupełnić warunkiem aktywnego obciążenia.

Różnice jakościowe między teoriami typu deformacyjnego i typu płynięcia są znaczne od dawna i były przedmiotem wielu dyskusji /por. np. [42, 43]/. Głównym zarzutem wysuniętym przeciwko teoriom deformacyjnym jest fakt, że dla neutralnego obciążenia nie spełniają one warunków ciągłości przy przejściu od sprężystego do sprężysto-plastycznego zakresu. Dalej, formy /2.91/ i /2.92/ zupełnie nie uwzględniają zależności od historii odkształcenia, gdyż o plastycznym odkształcaniu decyduje jedynie wartość końcowego naprężenia. Stwierdzono, że jedynie dla przypadku proporcjonalnego obciążenia teoria płynięcia i teoria deformacyjna prowadzą do identycznych wyników i przyjęto uważać, że jedynie dla trajektorii leżących bardzo blisko dróg prostego obciążenia można stosować teorię deformacyjną.

Zagadnieniem stosowalności tych teorii zaczęto się interesować na nowo w związku z badaniem osobliwych powierzchni płynięcia /tzw. powierzchni posiadających "ostrza" typu stożkowego lub "krawędzie" przecięcia kilku hyperpowierzchni/. J.L. Sanders [40] i W.D. Klusznikow [37-39] pokazali, że dla pewnej klasy dróg obciążenia, można scałkować związki przyrostowe i otrzyma

w ten sposób prawa wiążące odkształcenie plastyczne z naprężeniem. Prawa takie można zatem identyfikować z teorią deformacyjną. Podobny wynik uzyskali wcześniej S.B. Batdorf i B. Budianski [35], przy analizie swojej teorii poślizgów. W pracy [34] B. Budianski przyjął "postulat stateczności" D.C. Druckera [36] jako racjonalne żądanie fizycznej poprawności związków fizycznych i określił klasę dopuszczalnych trajektorii dla których zachodzi ten postulat, przyjęto przy tym, że wszystkie powierzchnie płynięcia posiadają wierzchołki przemieszczające się w przestrzeni naprężeń po trajektorii aktywnego obciążenia.

Związek /2.91/ możemy sprowadzić do postaci /2.1/ przez różniczkowanie po czasie

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p = & \alpha_1 \dot{\delta}_{ij} + \alpha_2 (-\dot{\tau}_{ik} \dot{\tau}_{kj} + \dot{\tau}_{kj} \dot{\tau}_{ik}) + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial J_2} M + \frac{\partial \alpha_1}{\partial J_3} N \right) \dot{\tau}_{ij} + \\ /2.93/ & + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial J_2} M + \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_3} N \right) \dot{\tau}_{ik} \dot{\tau}_{kj} - \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial J_2} J_2' + \alpha_2 \right) M + J_2' \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_3} N \right] \dot{\delta}_{ij} \end{aligned}$$

gdzie $M = \tau_{ik} \tau_{ik}$, $N = \tau_{ik} \tau_{kj} \dot{\epsilon}_{ij}$. Równanie /2.93/ przedstawia liniową zależność pomiędzy tensorami $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ i $\dot{\tau}_{ij}$ i ponieważ nie da się sprowadzić do postaci /2.46/, warunek ciągłości na hyperpłaszczyźnie Π_f nie będzie spełniony. Można uważać, że /2.93/ jest szczególnym przypadkiem ogólniejszej postaci związku liniowego dla izotropowych ciał hyposprężystych [26, 27], który dla ośrodka nieściśliwego przyjmie postać

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} = & h_1 \dot{\delta}_{ij} + h_2 (-\dot{\tau}_{ik} \dot{\tau}_{kj} + \dot{\tau}_{kj} \dot{\tau}_{ik}) + (h_3 M + h_4 N) \dot{\tau}_{ij} + \\ /2.94/ & + (h_5 M + h_6 N) \dot{\delta}_{ij} + (h_7 M + h_8 N) \dot{\tau}_{ik} \dot{\tau}_{kj} + \\ & + h_9 (-\dot{\tau}_{im} \dot{\tau}_{mn} \dot{\epsilon}_{nj} + \dot{\tau}_{nm} \dot{\tau}_{mj} \dot{\epsilon}_{in}) \end{aligned}$$

gdzie h_1, \dots, h_9 są funkcjami niezmienników J_2' i J_3' . Ponieważ w naszych rozważaniach nie będziemy korzystali z całkowalności formy /2.93/, ogólne wnioski odnosić się również będą do

praw typu /2.94/, a do dalszych ich uogólnień uwzględniających w sposób bardziej istotny historię odkształcenia. W przeciwieństwie do /2.96/, związki /2.93/ czy /2.94/ pozwalają na dużą swobodę opisu własności materiału przy dowolnie złożonych procesach deformacji w szczególności, uwzględnić tu możemy fakt obrotu wektora $d\epsilon^p$ przy obrocie $d\sigma$.

Zgodnie z Lematem 3, przy regularnej powierzchni płynięcia wypukłość transformacji może zachodzić jedynie w pewnych obszarach, jeśli nie jest spełniony warunek ciągłości na Π_f . W takim przypadku mamy właśnie do czynienia przy prawach /2.93/ i /2.94/. Zatem dla trajektorii obciążenia leżących wewnątrz tych obszarów, możemy spełnić warunek jednoznaczności, a także same pozostałe warunki poprzednio omówione. Szczegółową dyskusję przeprowadzimy dla najczęściej używanej teorii deformacyjnej Nadai'a przy założeniu istnienia regularnej powierzchni płynięcia. Większość badań doświadczalnych nie potwierdza bowiem istnienia punktów osobliwych na powierzchni.

2.6.1. Określenie dopuszczalnych dróg obciążenia dla teorii Nadai'a.

Funkcję $\alpha_1(\gamma_2)$ w zależności /2.92/ można określić przez dowolną krzywą prostego obciążenia. Przyjmując w tym celu krzywą skrećania, mamy

$$/2.95/ \quad \epsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G} \right) \tau_{ij},$$

gdzie G_s jest modulem siecznym a G modulem sprężystym krzywej skrećania. Założmy izotropowe wzmocnienie i warunek płynięcia Hubera-Misesa. Wtedy równanie /2.95/ powinno być uzupełnione kryterium obciążenia $d\gamma_2' = \tau_{ij} d\tau_{ij} > 0$.

Na podstawie /2.95/ otrzymamy następującą relację między przyrostami naprężeń i odkształceń plastycznych

$$/2.96/ \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G} \right) d\tau_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G} \right) \frac{\tau_{ik} d\tau_{kl}}{S_{mn} S_{mn}} \tau_{ij},$$

dla $\tau_{ik} d\tau_{kl} > 0$,

ponieważ

$$d(1/G_2) = \frac{\delta_{kl} - \delta_{kl}}{\delta_{mn} \delta_{mn}} (1/G_t - 1/G_2),$$

gdzie G_t oznacza moduł styczny krzywej $\tau - \gamma$. Z /2.96/ odrazu widzimy, że dla neutralnego obciążenia ($ds_2 = 0$) istnieje nieznikający przyrost odkształcenia plastycznego; zatem /2.96/ nie spełnia warunku ciągłości. Używając przedstawienia wektorowego, możemy /2.96/ zapisać następująco

$$/2.97/ \quad d\epsilon^P = \frac{1}{A} ds + \frac{1}{B} \frac{s ds}{s^2} s, \quad \text{dla } s ds > 0$$

gdzie

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_2} - \frac{1}{G} \right), \quad \frac{1}{B} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_2} \right).$$

Dla aktywnych procesów obciążenia mamy

$$/2.98/ \quad ds \cdot d\epsilon^P = \frac{1}{A} (ds)^2 + \frac{1}{B} \frac{(s ds)^2}{s^2},$$

$$/2.99/ \quad s d\epsilon^P = \frac{1}{A} s^2 + \frac{1}{B} s \cdot ds.$$

Zakładając, że $G > G_2 > G_t > 0$, co odpowiada rosnącej krzywej $\tau - \gamma$ zwróconej wypukłością do góry /czyli powszechnie obserwowanej krzywej wzmocnienia dla metali/, otrzymujemy $A > 0$ i $B > 0$; wtedy wyrażenia /2.98/ i /2.99/ również będą dodatnie w dowolnej fazie aktywnego procesu obciążania.

Zbadamy obecnie warunek jednoznaczności /lub co jest równoważne warunek wypukłości transformacji/. Przedstawiając /2.96/ w postaci $d\epsilon_{ij}^P = A_{ijkl}^P d\delta_{kl}$, gdzie

$$/2.100/ \quad A_{ijkl}^P = \frac{1}{2A} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \frac{1}{B} \frac{\delta_{ij} s_{kl}}{\delta_{mn} \delta_{mn}},$$

możliwymi skorzystać z ogólnej metody badania wypukłości transformacji nieciągłych podanej w Lemacie 2. Posłużymy się tu jednak prostszą metodą, badając bezpośrednio zależności geometryczne w przestrzeni wektorowej. Oznaczając jak poprzednio różnicę dwóch przypuszczalnie istniejących rozwiązań przez $\Delta d\epsilon = d\epsilon_2 - d\epsilon_1$, wywołanych przyrostami sił dI i przemieszczeń du na brzegu ciała, warunek jednoznaczności wyrazimy w postaci

/2.101/ $I = \Delta d\sigma \cdot \Delta d\varepsilon = \Delta d\sigma \cdot \Delta d\varepsilon^e + \Delta d\sigma \cdot \Delta d\varepsilon^p$

dla nie znikających tożsamościowo $\Delta d\sigma$ i $\Delta d\varepsilon$.

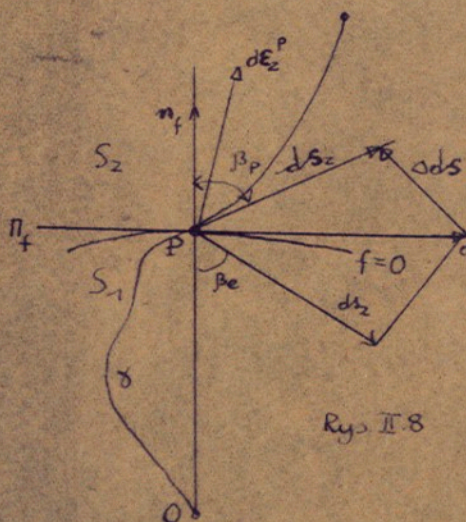
Gdy oba przyrosty $-d\sigma_1$ i $d\sigma_2$ przedstawiają aktywne obciążenie z danego punktu P na powierzchni płynięcia, warunek

/2.101/ jest zawsze spełniony; istotnie wtedy

/2.102/ $I = \Delta d\sigma \cdot \Delta d\varepsilon^e + \frac{1}{A}(\Delta ds)^2 + \frac{1}{B}(\mathfrak{s} \cdot \Delta ds)^2,$

i oczywiście $I > 0$, gdyż operator sprężysty jest dodatnio określony, $\Delta d\sigma \cdot \Delta d\varepsilon^e > 0$. Zatem nie może być punktów bifurkacji w klasie trajektorii aktywnego obciążenia. Podobnie otrzymamy $I > 0$, gdy oba przyrosty są odciążeniem sprężystym.

Rozpatrzmy obecnie przypadek, gdy $-d\sigma_2$ jest aktywnym obciążeniem tzn. $\mathfrak{s} \cdot ds_2 > 0$, a $-d\sigma_1$ jest odciążeniem lub należy do hyperpłaszczyzny stycznej Π_f , tzn. $\mathfrak{s} \cdot ds_1 \leq 0$. Wtedy I będzie dodatnie tylko dla pewnej klasy C trajektorii obciążenia należących do obszaru ograniczonego hyperstożkiem o wierzchołku w P . By określić tę klasę rozważmy dowolną



trajektorię δ przechodzącą w danej chwili przez punkt P na powierzchni $f=0$ i skierowaną do obszaru obciążenia S_2 /rys. II 8/. W przestrzeni

dekwatorowej, wektor n_f normalny do powierzchni płynięcia $f = \frac{1}{2} \mathfrak{s}_i \mathfrak{s}_j - \kappa^2 = 0$, i wektor \mathfrak{s} są współosiowe. Ponieważ przyrost $d\sigma_1$ wywołuje tylko zmiany sprężyste, wyrażenie na

I przyjmie postać

/2.103/ $I = \Delta ds \cdot d\varepsilon^p + \Delta ds \cdot \Delta d\varepsilon^e = \frac{1}{A}(\Delta ds \cdot ds_2) + \frac{1}{B}(\Delta ds \cdot \mathfrak{s}) \frac{\mathfrak{s} \cdot ds_2}{s^2} + \frac{\Delta ds^2}{2G} > 0$

Pisząc /2.103/ pominięliśmy człony kuliste tensora przyrostu naprężenia i tensora przyrostu odkształcenia sprężystego; uwzględnienie tych członów dla materiału plastycznie nieściśliwego, nie wpłynęłoby na postać nierówności, które zostaną poniżej

podane. Nasze rozważania są oczywiście ważne zarówno dla ciał sprężystość ściśliwych jak i nieściśliwych. Ponieważ $s \cdot ds_2 > 0$, mamy $s \cdot ds > 0$ i dwa ostatnie czony w /2.103/ będą dodatnie. Pierwszy człon może być jednak ujemny i oczywiście jest, że warunek $I > 0$ nie może być spełniony dla wszystkich kierunków ds_2 . Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $s \cdot ds_1 = 0$ tzn. ds_1 leży na hiperpłaszczyźnie stycznej Π_f . Po prostych obliczeniach otrzymujemy

$$/2.104/ \quad I = -ds_2^2 \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \cos^2 \beta_f + \frac{1}{2G} \right) - ds_1 ds_2 \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{G} \right) \sin^2 \beta_f + ds_1^2 \frac{1}{2G} > 0,$$

gdzie β_f oznacza kąt między ds_2 i s , tzn. $\cos \beta_f = \frac{ds_2 \cdot s}{|ds_2| |s|}$. Forma kwadratowa /2.104/ będzie dodatnio określona jeśli

$$/2.105/ \quad \sin^2 \beta_f \leq \left[\frac{2G/A + 2G/B + 1}{2G/B + (G/A + 1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{G/G_t}{G/G_t + 1/4 (G/G_s - 1)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Równanie /2.105/ określa w każdym punkcie na trajektorii aktywnego obciążenia kołowy hiperstożek, którego oś pokrywa się z kierunkiem wektora s . Wszystkie trajektorie obciążenia spełniające warunek wypukłości transformacji powinny leżeć wewnątrz tego stożka.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy $s \cdot ds_2 > 0$, $s \cdot ds_1 < 0$, tzn. ds_1 jest skierowane do obszaru odciążenia. Pokażemy, że nierówność /2.105/ jest wystarczająca by zapewnić dodatniość I w tym przypadku. Rozłożmy dowolny przyrost $-ds_1$ na dwie składowe ds_1^t i ds_1^s , gdzie ds_1^s pokrywa się z kierunkiem s a ds_1^t leży na hiperpłaszczyźnie Π_f . Wtedy, otrzymujemy

$$/2.106/ \quad I(ds_1, ds_2) = I(ds_1^t, ds_2) - \frac{1}{A} ds_1^s ds_2 - \frac{1}{B} s \cdot ds_1^s \frac{s \cdot ds_2}{|s|^2} + \frac{(ds_1^s)^2}{2G} - \frac{ds_1^s ds_2}{G}$$

Pierwszy człon wyrażenia /2.106/ jest dodatni na mocy nierówności /2.105/. Ponieważ dla $s \cdot ds_1 = s \cdot ds_1^s < 0$, mamy $ds_1^s \cdot ds_2 < 0$, wszystkie pozostałe człony /2.106/ są dodatnie. Tak więc warunek /2.105/ gwarantuje dodatniość I dla wszystkich kierunków

ds_1 . Znaleźliśmy zatem obszar wypukłej transformacji dla trajektorii obciążenia.

Rozważmy obecnie trajektorie odciążenia. Załóżmy, że ds_2 jest skierowane z punktu P do obszaru sprężystego, zaś ds_1 leży na hyperpłaszczyźnie Π_f . Rzutując wszystkie wektory na płaszczyznę określoną przez ds_2 i \rightarrow , otrzymamy analogicznie do /2.104/

$$/2.107/ \quad I = -\Delta ds_1 \cdot d\epsilon_1^P + \frac{(\Delta ds_1)^2}{2G} = \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{2G}\right) ds_1^2 - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{G}\right) \sin \beta_e ds_1 ds_2 + \frac{ds_2^2}{2G} > 0$$

gdzie β_e oznacza kąt pomiędzy ds_2 i \rightarrow /Rys. II 8/.

Z /2.107/ wynika, że w obszarze odciążenia istnieje druzi hyperstożek określony przez

$$/2.108/ \quad \sin \beta_e \leq \frac{(2G/A + 1)^{\frac{1}{2}}}{G/A + 1} = \frac{2(G/G_0)^{\frac{1}{2}}}{1 + G/G_0}$$

Dla wszystkich przyrostów ds_2 skierowanych do wnętrza tego hyperstożka, mamy $I > 0$, gdy $ds_1 \cdot \rightarrow < 0$. Istotne jest pokazać, że nierówność /2.108/ jest wystarczającą by zapewnić $I > 0$ również dla każdego przyrostu ds_1 , dla którego $ds_1 \cdot \rightarrow > 0$.

By otrzymać liczbowe wartości kątów β_p i β_e założymy krzywą τ - δ w postaci

$$/2.109/ \quad \delta = \frac{\tau}{k} + L \left(\frac{\tau}{k} - 1\right)^n \quad \text{dla } \frac{\tau}{k} > 1,$$

gdzie L , n i k są stałymi materiałowymi. Moduł stycznej i sieczny wyrażają się następująco

$$/2.110/ \quad \frac{G}{G_0} = 1 + N \frac{k}{L} \left(\frac{\tau}{k} - 1\right)^n, \quad \frac{G}{G\tau} = 1 + Nn \left(\frac{\tau}{k} - 1\right)^{n-1}$$

gdzie $N = GL/k$. Z warunków /2.105/ i /2.108/ otrzymujemy

$$/2.111/ \quad \sin \beta_p \leq \left[\frac{1 + Nn \left(\frac{\tau}{k} - 1\right)^{n-1}}{1 + Nn \left(\frac{\tau}{k} - 1\right)^{n-1} + \frac{1}{4} N^2 k^2 / L^2 \left(\frac{\tau}{k} - 1\right)^{2n}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

oraz

$$/2.112/ \quad \sin \beta_e \leq \frac{2 \left[1 + N \frac{k}{L} \left(\frac{\tau}{k} - 1\right)^n \right]^{\frac{1}{2}}}{2 + N \frac{k}{L} \left(\frac{\tau}{k} - 1\right)^n}$$

Rys. II.9a przedstawia kilka krzywych /2.110/ dla $N=3$, $L=0.01$, zaś rysunki II.9b i II.9c pokazują zmianę kątów β_p i β_c przy $n = 1, 2, 4$ i 8 w funkcji τ/k . Ze swojej maksymalnej wartości $\beta_m = 90^\circ$ odpowiadającej początkowi plastycznego płynięcia, oba kąty stopniowo maleją w miarę wzrostu odkształceń plastycznych. Interesujący jest fakt, że stożek w obszarze sprężystym jest w zasadzie mniej rozwar-ty od stożka w obszarze plastycznym.

Powyższe ogólne wyniki uzyskane w przestrzeni dziewięciowej mogą być łatwo zastosowane do dowolnego konkretnego stanu naprężenia. Rozpatrzmy dla przykładu płaski stan naprężenia i oznaczmy nieznikające składowe przez σ_x , σ_y , τ_{xy} . Obecnie powierzchnie płynięcia i hyperstożki można geometrycznie przedstawić w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń. Uży-cie jednak przestrzeni, w której wektor małby składowe σ_x , σ_y , τ_{xy} jest niewygodne gdyż otrzymalibyśmy w ogólnym przy-padku stożki niekołowe. Dlatego wprowadzimy transformowane naprężenia określone następująco

$$/2.113/ \quad \sigma'_x = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \sigma'_y = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_y - \sigma_x), \quad \tau'_{xy} = \sqrt{3}\tau_{xy}$$

Otrzymujemy wtedy

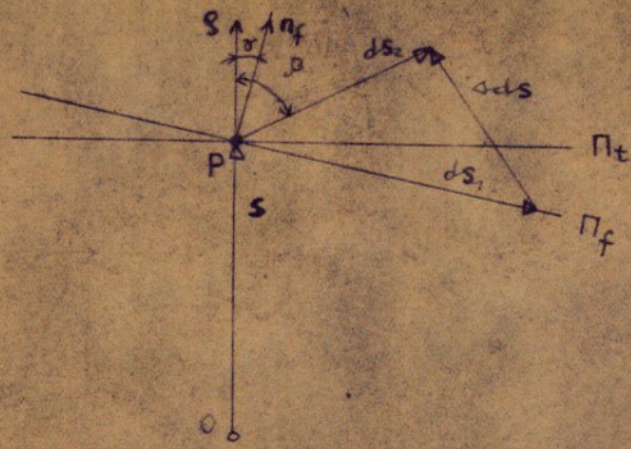
$$(2.114) \quad \begin{aligned} s^2 &= \tau_{ij}\tau_{ij} = \frac{2}{3}(\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2) = \frac{2}{3}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \tau_{xy}'^2), \\ s \cdot ds &= \tau_{ij} ds_{ij} = \frac{1}{3}[(2\sigma_x - \sigma_y) d\sigma_x + (2\sigma_y - \sigma_x) d\sigma_y + 6\tau_{xy} d\tau_{xy}] \\ &= \frac{2}{3}[\sigma'_x d\sigma'_x + \sigma'_y d\sigma'_y + \tau'_{xy} d\tau'_{xy}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds_{ij} ds_{ij} = \frac{2}{3}(d\sigma_x^2 - d\sigma_x d\sigma_y + d\sigma_y^2 + 3d\tau_{xy}^2) = \\ &= \frac{2}{3}(d\sigma_x'^2 + d\sigma_y'^2 + d\tau_{xy}'^2) \end{aligned}$$

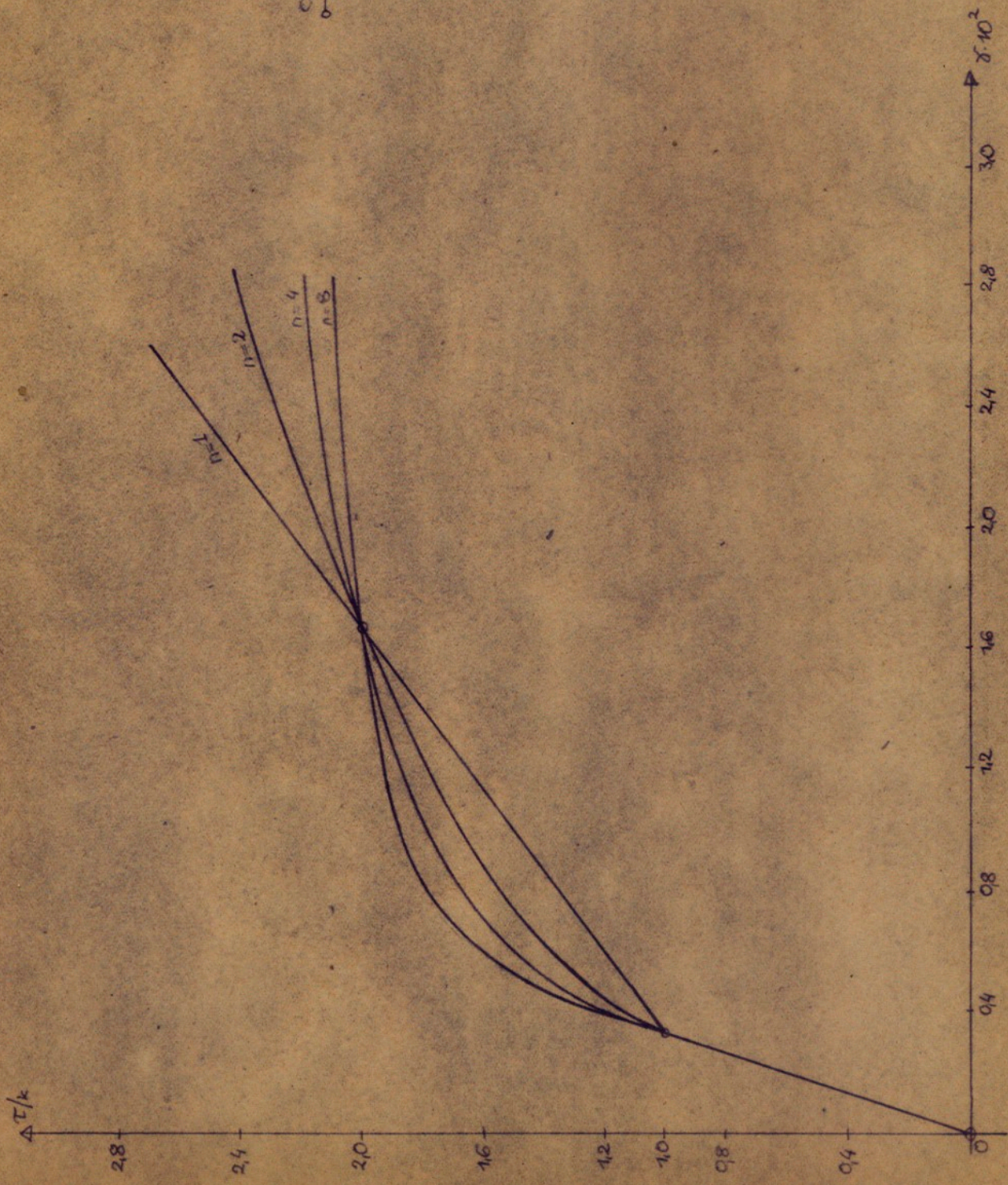
oraz

$$/2.115/ \quad \cos\beta = \frac{s ds}{s ds} = \frac{\sigma'_x d\sigma'_x + \sigma'_y d\sigma'_y + \tau'_{xy} d\tau'_{xy}}{(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \tau_{xy}'^2)^{\frac{1}{2}} (d\sigma_x'^2 + d\sigma_y'^2 + d\tau_{xy}'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma'_x d\sigma'_x}{\sigma'_x ds'}$$

Z /2.114/ i /2.115/ wynika, że wszystkie geometryczne rozważ



Rys. II. 10



Rys II 9a

nia w przestrzeni dewiatorowej można bez żadnych zmian przenieść do trójwymiarowej przestrzeni transformowanych naprężeń, gdzie wektor \mathbf{s}' jest określony przez trzy składowe σ_x' , τ_{xy}' , τ_{xy}' .

2.5.2. Uogólnienie. Przedyskutujemy obecnie krótko przypadek gdy związki /2.96/ są związane z bardziej ogólnym warunkiem płynięcia. W punkcie P na trajektorii obciążenia powierzchni płynięcia posiada jednostkowy wektor normalny n_f tworzący obecnie z wektorem naprężenia kąt δ /rys. II.10/. Taka sytuacja może zaistnieć, gdy uwzględniamy anizotropię wzmocnienia lub gdy początkowy warunek plastyczności zależy również od trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia. Ponieważ ds_2 i s określają płaszczyznę w przestrzeni dewiatorowej, przecięciem czterowymiarowego hyperstożka z tą płaszczyzną określimy przez znalezienie dwóch wartości β_1 i β_2 kąta pomiędzy ds_2 i s .

Określimy jedynie hyperstożek dla trajektorii obciążenia. Dla dowolnego ds_1 leżącego na hyperpłaszczyźnie n_f , normalnej do n_f , ($ds_1 \cdot n_f = 0$), warunek /2.101/ prowadzi do nierówności /2.115/

$$\frac{1}{A} \sin(\beta + \delta) + \frac{1}{B} \sin \delta \cos \beta + \frac{1}{G} \sin(\beta + \delta) - \frac{2}{G} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \cos \beta + \frac{1}{2G} \right) > 0$$

gdzie

$$\cos \delta = \frac{n_f \cdot s}{n_f}, \quad \cos \beta = \frac{ds_2 \cdot s}{ds_2}, \quad s = \frac{ds_2}{ds_2}, \quad n_f = \left\{ \cos^2 \beta + \frac{[ds_2 n_f - \cos \beta (ds_2 \cdot s)]^2}{[ds_2 - (ds_2 \cdot s) s]^2} \right\}^{1/2}$$

Z /2.115/ można obliczyć dwie wartości β . Rozpatrując stany odpowiadające $ds_1 \cdot n_f < 0$, okazuje się, że nierówność /2.116/ zapewnia $I > 0$ dla wszystkich ds_1 , gdy

$$\delta < \arctg \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \left(1 + \frac{G}{A+G} \right) \right]$$

Warunek /2.117/ uzyskano rozpatrując ekstremum formy kwadratowej /2.101/ względem kierunku ds_1 . Dla kątów δ większych od wartości określonych przez /2.117/, należy w nierówności

/2.116/ przy użyciu dolnych znaków na miejsce δ podstawić prawą stronę /2.117/. Widzimy, że w porównaniu do poprzedniego przypadku analiza geometryczna znacznie się komplikuje gdyż obszary wypukłej transformacji są ograniczone przez niekołowe hyperstożki.

2.6.2. Uwagi uzupełniające. W p. 2.6.1 i 2.6.2. wykazaliśmy, że istnieją dwa obszary wypukłej transformacji i trajektorie należące do tych obszarów są jednoznacznie określone przez zadane warunki brzegowe. Dla trajektorii leżących po za tymi obszarami mogą istnieć punkty bifurkacji, przy czym dwie trajektorie wychodzące z danego punktu bifurkacji nie mogą jednocześnie należeć do obszaru sprężystego lub plastycznego: rozdwojenie na trajektorii obciążenia będzie odpowiadać odciążeniu lub zmianie neutralnej, i naodwrot. Warunek ciągłości jest oczywiście spełniony przez wszystkie trajektorie leżące wewnątrz hyperstożków, gdyż przecinają one hyperpłaszczyznę Π_f jedynie w wyjściowym punkcie P . Dla materiału bez wzmocnienia i dla modelu sztywno-plastycznego hyperstożki redukują się do linii prostych, odpowiadających trajektoriom prostego obciążenia.

W przeciwieństwie do warunku jednoznaczności, warunek stateczności materiału zachodzi dla wszystkich trajektorii. Istotnie, operator A_{ijka}^P , określony przez /2.100/, jest dodatni^o określony, gdyż zachodzi /2.98/ i posiada symetrię $A_{ijka}^P = A_{kija}^P$, konieczną do tego, aby istniała funkcja szybkości energii. Nie potrzebujemy $\delta \epsilon$ zatem ograniczać do trajektorii prostoliniowych, lecz ogólnie stwierdzić, że całka /2.9/ którą po prostu można wyrazić jako iloczyn $\delta \epsilon \delta \epsilon$ jest zawsze dodatnia. Ponieważ jednocześnie $\delta \epsilon \delta \epsilon^P > 0$, warunek /2.10/ jest na pewno spełniony, gdyż na cyklicznych zmianach

przyrosty nie mogą "odbierać" pracy z układu. Mamy tu do czynienia z ciekawym faktem, podkreślonym już kilkakrotnie przez P. Hilla [6, 107], że warunek jednoznaczności $\Delta dG \Delta dE > 0$ jest silniejszym kryterium niż warunek stateczności $\delta\delta E > 0$. Znaczy to, że punkty bifurkacji mogą występować na statecznych trajektoriach obciążenia. Podobnie jak warunek stateczności, warunek eliptyczności jest również spełniony dla wszystkich trajektorii.

Z [2.99] wynika, że $dW_p = -s \cdot dE^p > 0$ dla prawa [2.96]. Przy wzmocnieniu izotropowym ta nierówność zapewne dodatnią prędkość produkcji entropii. W bardziej ogólnym przypadku, należałoby rozpatrzyć ograniczenie przedyskutowane w p. 2.56.

Teorie deformacyjne, lub ogólniej mówiąc, wszelkie związki liniowe typu [2.94] i dalsze ich uogólnienie, nie spełniają warunku ciągłości, a zatem nie mogą one być ważne dla wszystkich trajektorii obciążenia. W obszarach wypukłej transformacji, natomiast, można z powodzeniem używać tego typu równań do opisu materiału, tym bardziej, że teorie deformacyjne charakteryzują się dużą prostotą i umożliwiają najłatwiejsze znalezienie rozwiązań dla szeregu problemów brzegowych.

Bibliografia do rozdziału II

- [1] B. de Saint-Venant, C.R. Acad.Sc.vol. 70, 1870
- [2] M. Lévy, J.Math.pures et appl.vol. 16, 1871
- [3] W. Prager, Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity, J. Appl.Phys.,vol.20, 1949, p. 235-244
- [4] R. Hill, New Horizons in the Mechanics of Solids, J.Mech.Phys. Sol., vol. 5, 1956, p. 66-74
- [5] R. Hill, On the Problem of Uniqueness in the Theory of a Rigid-Plastic Solids. J.Mech.Phys.Sol.vol. 4, 1956, p. 247-255.
- [6] R. Hill, Some Basic Principles in the Mechanics of Solids Without a Natural Time, J.Mech.Phys.Sol.vol.7, 1959, 209-225
- [7] C. Truesdell, R. Toupin, Static Grounds for Inequalities in Finite Strain of Elastic Materials, Arch.Rat. Mech.Anal.vol. 12, 1963, p. 1-32
- [8] J. Mandel, Ondes Plastiques dans un Milieu Indéfini a Trois Dimensions, Journ.de Méc., vol. 1
- [9] J. Mandel, Propagation de Surfaces de Discontinuité dans un Milieu Elastoplastique, Intern.Symp.Stress. Waves in Anelastic Solids, 1963
- [10] R. Hill, A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, Journ.Mech.Phys.Solids, vol. 6, No 3, 236-249, 1958
- [11] А.А. Вакуленко, О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах, Исследования по упругости и пластичности, Сб I, Изд. ЛТУ, 1961
- [12] А.А. Вакуленко, О связях между напряжениями и деформациями в изотропных и первоначально изотропных неупругих средах, Исследования по упругости и пласт. Сб .2. Изд. Лту, 1963

- [13] J.D. Ericksen, Non-existence Theorems in Linear Elasticity Theory, Arch.Rat.Mech.Anal.vol. 14, 1963, p.180-183
- [14] R.T. Shield, A.E. Green, On Certain Methods in the Stability Theory of Continuous Systems, Arch.Rat.Mech.Anal.vol.12, 1963, 354-360.
- [15] P. Hill, Acceleration Waves in Solids. Journ.Mech.Phys.Sol. vol. 10, No 1, 1962, 1-16.
- [16] T.Y. Thomas, Plastic Flow and Fracture in Solids, Acad.Press New York, 1961
- [17] J.W. Craggs, Progress in Solid Mechanics, vol. II. Chap. IV, North-Holland Publ. Co, 1961,
- [18] H. Ziegler, Thermodynamik und rheologische Probleme, Ing.Archiv, vol. 25, 1957
- [19] H. Ziegler, An Attempt to Generalize Onsager's principle and its significance for rheological problems, ZAMP, vol. 96, 1958, 748-763.
- [20] С.С. Григорян, О некоторых специальных вопросах механики сплошных сред, ПММ, вып. 19/ 1960
- [21] B.D. Coleman, W. Noll, On the Thermo-statics of Continuous Media, Arch.Rat.Mech.Anal.vol. 4, 1959, 97-128,
- [22] B.D. Coleman, W. Noll, Material Symmetry and Thermo-static Inequalities in Finite Elastic Deformation, Arch.Rat. Mech.vol. 15, 1964, 87-111.
- [23] B. Bernstein, R.A. Toupin, Some properties of the Hessian matrix of a Strictly Convex Function. Journ.Reine Angew. Math.vol. 240, 1963, 65-72
- [24] B.D. Coleman, Work Theorems in Finite Elasticity, Arch.Rat. Mech.Anal.vol. 9, 1962, 172-186.
- [25] G. Caprioli, Su un criterio per resistenza dell'energia di deformazione, Boll.Unione Mat.Italiana III, vol. 10, 1955, 1-10.

[26] A.E. Green, Hypoelasticity and Plasticity, Proc. Roy. Soc. Lond. A vol. 234, 1956, 45-60

[27] A.E. Green, Hypo-elasticity and Plasticity, Journ. Rat. Mech. Anal. Vol. 5, 1956, 725-734

[28] E. Kröner, Dislocation: A New Concept in the Continuum Theory of Plasticity, Journ. Math. Physics, vol. 42, 1963, 27-57

[29] E. Melan, Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums, Ing. Arch. vol. 9, 1938, 116-126.

[30] G.B. Haddad, C.C. Lin, W. Prager, On the Mechanical Behaviour of Metals in the Strain Hardening Range, Quart. Appl. Math. vol. 4, 1947, 397-407

[31] L. van Hove, Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul de variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues. Konink. Nederl. Akad. Wetens. vol. 50, 1947, s. 18

[32] R.A. Toupin, B. Bernstein, Second Waves in Deformed Perfectly Elastic Material. Acousto-Elastic Effect, J. Acoust. Soc. vol. 33, 1961, s. 216

[33] W. Prager, Strain-Hardening under Combined Stress. J. Appl. Phys. vol. 16, 1945, 837-840

[34] B. Budiansky, A Reassessment of Deformation Theories of Plasticity. Journ. Appl. Mech. vol. 26, 1959, 259-264

[35] S.B. Batdorf, B. Budiansky, A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip, NACA, TN 1871, 1949

[36] D.C. Drucker, A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations, Proc. 1-st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1951, 487-491

[37] Д. Клышников, О законах пластичности для частного класса путей нагружения, Прикл. Мат. Мех. вып. 21, 1957, 533-543.

[38] В.Д. Клышников, О возможном пути построения соотношений пластичности, Прикл. Мат. Мех. вып. 28, 1959, 405-418

- [39] В.Д. Ключников, Новые представления в пластичности и деформационная теория, Прикл. Мат. Мех., vol. 23, 1959, 1030-1042.
- [40] J. L. Sanders jr., Plastic Stress-Strain Relations based on Linear Loading Functions, Proc. Sec. US Nat. Congr. Appl. Mech. ASME, 1954, 445-460
- [41] В.В. Новожилов, О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах /геометрическая сторона вопроса/ Прикл. Мат. Мех. вып. 27, 1963
- [42] P. M. Tighdi, Stress-Strain Relations in Plasticity and Thermoelasticity, in "Plasticity", Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech., 1955, 121-169.
- [43] W. Prager, The Stress-Strain Laws of the Mathematical Theory of Plasticity - a Survey of Recent Progress, Journ. Appl. Mech. vol. 15, 1948, 225-253.

R o z d z i a ł III
=====

Nieliniowe prawa płynięcia

3.1. Postać praw nieliniowych

Z rozważań Rozdziału II możemy wysnuć następujący ważny wniosek: liniowe prawa płynięcia nie dają wystarczająco dużej swobody opisu własności procesu plastycznej deformacji. Wynika to z faktu, że zarówno prawa niestowarzyszone /2.46/ jak i stowarzyszone /2.50/ określają stały kierunek wektora $d\epsilon^p$ dla wszystkich kierunków wektora $d\epsilon$. Natomiast teorie deformacyjne i związki liniowe typu /2.94/ mogą być traktowane jako wystarczająco dobre przybliżenia jedynie dla pewnej klasy trajektorii obciążenia.

Ponieważ doświadczalnie obserwuje się zmienność kierunku, powstaje pytanie, jakiego rodzaju praw należy użyć do opisu tego faktu. Można by się uciec do modeli lepko-plastycznych i opisywać proces odkształceń plastycznych z nakładającym się nań procesem reologicznym. Istnieje jednak spora grupa metali, dla których efekty lepkie są dostatecznie małe by je można było pominąć, przynajmniej dla pewnych zakresów szybkości obciążeń. Dlatego w ramach teorii nieuwzględniającej efektu czasu, odpowiedź na postawione pytanie może być tylko jedna: należy odstąpić od założenia o liniowości pomiędzy szybkościami naprężeń i odkształceń.

Możliwość zastosowania praw nieliniowych w teorii plastyczności i wynikające stąd konsekwencje nie były do tej pory wystarczająco wnikliwie przebadane. Można jedynie znaleźć u R. Hilla /3/ ogólną wzmiankę o użyciu potencjału szybkości do budowy praw nieliniowych; tak samo „postulat izotropii” A.A. Iljuszyna /1,2/ prowadzi w konsekwencji do praw nieliniowych i użyte przez niego związki dla trajektorii łamanych są nieliniowe.

07 -
 w szybkościach. Brak jednak ogólnej analizy jakościowej takich związków.

Celem naszym nie jest sformułowanie wystarczająco ogólnej postaci praw nieliniowych; do tego powinna prowadzić analiza konkretnego modelu fizycznego. Przedyskutujemy jedynie pewną szczególną postać z punktu widzenia podstawowych kryteriów podanych w Rozdz. II.

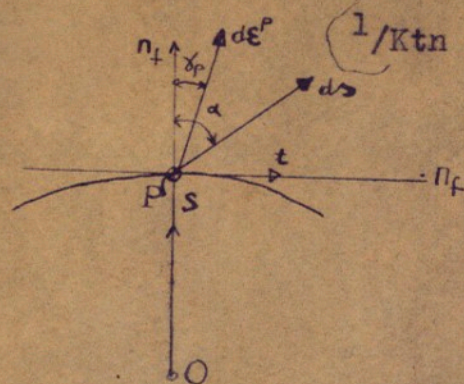
Założmy, że związek pomiędzy przyrostami plastycznych odkształceń i naprężeń zależy jedynie od lokalnych własności powierzchni płynięcia w rozpatrywanym punkcie: będą to kierunki i wartości głównych krzywizn oraz kierunek wektora normalnego do powierzchni. Własności te oczywiście będą zależały od trajektorii po której dochodzimy do danego punktu. W 5-cio wymiarowej przestrzeni dewiatorowej możemy zatem w każdym punkcie zbudować niezmienniczą bazę wyznaczoną przez normalny wektor n_f i cztery wektory w hiperpłaszczyźnie Π_f odpowiadające kierunkom głównych krzywizn. Dowolny przyrost $d\varepsilon^p$ możemy przestawić w bazie utworzonej przez tych pięć tensorów jako funkcję $d\delta$, przy czym współczynniki rozłożenia zależały od niezmienników $d\delta$, i od niezmienników mieszanych.

Rozpatrzmy sytuację bardziej prostą, gdy mamy do czynienia z ~~nie~~ ^{ku}analistą powierzchnią płynięcia, co odpowiada warunkowi Hubera-Misesa. Można wtedy przyjąć, że o kierunku $d\varepsilon^p$ decydują dwa wektory: n_f i ds . Możemy zatem napisać

$$/3.1./ \quad d\varepsilon^p = \left(\frac{1}{K_{nn}} ds_n + \frac{1}{K_{tn}} \frac{ds ds_n}{ds} \right) n_f + \left(\frac{1}{K_{nt}} ds_n + \frac{1}{K_{tt}} \frac{ds ds_n}{ds} \right) \bar{t}$$

gdzie $ds_t = ds \cdot \bar{t}$, $ds_n = ds \cdot n$, a \bar{t} jest wektorem stycznym do powierzchni płynięcia i leżącym w płaszczyźnie określonej przez n_f i ds ; współczynniki K_{nn} , K_{tn} , K_{nt} i K_{tt} mogą być w ogólnym przypadku funkcjami kąta obrotu α /rys.III.1/.

W szczególnym przypadku, gdy



$1/K_{tn} = 1/K_{nt} = 0$, otrzymamy

Rys. III.1

$$(3.2) \quad d\epsilon^P = \frac{1}{K_{nn}} ds_n n_f + \frac{1}{K_{tt}} \frac{ds_t ds_n}{s} t$$

Kąt obrotu δ_p wektora $d\epsilon^P$ określony jest przez wzór

$$/3.3/ \quad \operatorname{tg} \delta_p = \frac{1/K_{nt} + 1/K_{tn} \sin \alpha}{1/K_{nn} + 1/K_{nn} \sin \alpha}$$

Zatem dla prawa /3.2/ przy $\alpha = 0$ mamy $\delta_p = 0$.

Związek /3.2/ możemy przedstawić w nieco innej postaci. Pisząc

$$1/K_{nn} = 1/K_1 + 1/K_2 \cos \alpha, \quad 1/K_{tt} = 1/K_2, \quad \text{gdzie } K_1 \text{ i } K_2$$

są nowymi współczynnikami, związek /3.2/ przyjmie postać

$$/3.4./ \quad d\epsilon^P = \frac{1}{K_1} ds_n n_f + \frac{1}{K_2} g ds_n$$

gdzie g jest wektorem jednostkowym skierowanym wzdłuż ds .

Równanie /3.4/ przedstawia uogólnienie teorii deformacyjnej

/2.97/ i różni się od niej tym, że spełnia warunek ciągłości na Π_f .

Jakkolwiek /3.2/ i /3.4/ są jakościowo formami równoważnymi, to ilościowe różnice między nimi wystąpią gdy założymy, że K_1 i K_2 w /3.4/ oraz K_{nn} i K_{tt} w /3.2/ są współczynnikami stałymi.

Pewne porównanie nieliniowych i liniowych praw otrzymamy obliczając moduły dociążenia wychodząc z danego punktu P na powierzchni. Przy dowolnie skierowanym wektorze ds oznaczmy przez $d\epsilon_s$ składową całkowitego wektora $d\epsilon$ skierowaną wzdłuż ds .

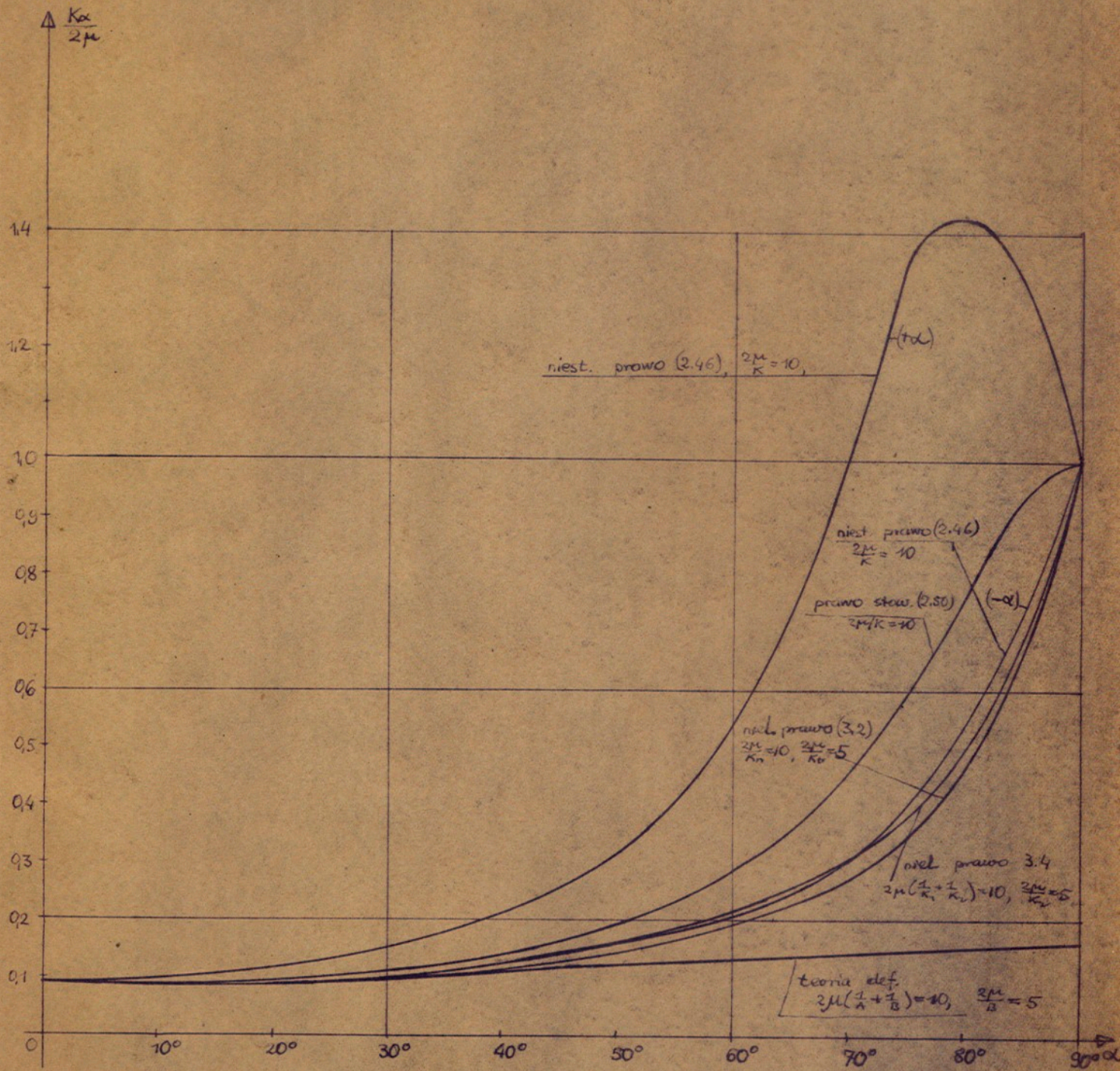
Modułem dociążenia w danym kierunku nazwiemy wielkość $K_\alpha = ds/d\epsilon_s$

Otrzymamy następujące wyrażenia na odwrotność K_α

- 1/3.5/ $1/K_{\alpha} = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{K_{nn}} \cos^2 \alpha + \frac{1}{K_{tt}} \sin^2 \alpha \cos \alpha$ - Niel.prawo /3.2/,
- 1/3.6/ $1/K_{\alpha} = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{K_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{K_2} \cos \alpha$ - Niel.prawo /3.4/,
- 1/3.7/ $1/K_{\alpha} = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \cos^2 \alpha$ - teoria defórm /2.96/,
- 1/3.8/ $1/K_{\alpha} = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{K} \cos^2 \alpha$ - stow.prawo płyn. /2.50/,
- 1/3.9/ $1/K_{\alpha} = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{K} \cos \alpha \cos(\alpha + \beta)$ - niestowarzyszone prawo

płynięcie /2.46/ przy obrocie wektora ds w płaszczyźnie nf, ng. Rysunek III.2 pokazuje zależność modułów dociążenia od kąta α wg wzorów /3.5-3.9/ przy założeniu określonych wartości współczynników wzmocnienia, przy czym przyjęto że dla $\alpha = 0$ moduły dociążenia są jednakowe dla wszystkich teorii. Należy zauważyć, że przyjęcie we wzorze /3.5/ K_{nn} i K_{tt} jako stałych jest możliwe jedynie gdy $1/K_{tt} < 1/K_{nn}$, gdyż w przeciwnym wypadku moduł K_{α} posiadałby dwa ekstrema; jedno dla $\alpha = 0$, drugie w przedziale $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Z przedstawionego wykresu wynikają jasno różnice między teoriami: dla niestowarzyszonego prawa płynięcia moduł dociążenia może być w pewnym przedziale większy od modułu sprężystego, zaś dla teorii deformacyjnej moduł dociążenia zmienia się skokowo dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$; istotne różnice między prawem nieliniowym /3.6/ i stowarzyszonym /3.8/ występują również w okolicy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, przy czym moduł dociążenia dla /3.5/ i /3.6/ leży pomiędzy wskazaniem stowarz. prawa płyn. i teorii deformacyjnej. Ponieważ z doświadczenia na jedno-osiowy stan naprężenia możemy otrzymać tylko jedną ze stałych we wzorach /3.5/ i /3.6/, drugą można dobrać tak, aby otrzymać dobrą zgodność z doświadczeniem na dociążenie.

Należy zauważyć, że nie wszystkie hipotezy wzmocnienia dadzą się połączyć z nieliniowymi prawami /3.5/ i /3.6/ przy założeniu stałości współczynników wzmocnienia. Tak np. przy izotropowym wzmocnieniu i prawie /3.4/, nie mamy wtedy niezmiennika niezależnego od drogi obciążenia który mógłby reprezentować funkcję wzmocnienia. Odwrotnie, prawo /3.2/ pozwala na taką możliwość.



Rys. III.2

Niech $f = f(s, \alpha) = 0$, będzie warunkiem plastyczności Hubera - Misesa, a $q = \int s \cdot d\varepsilon^p$. Mamy zatem

$$/3.10/ \quad \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial \alpha} s \cdot d\varepsilon^p = 0,$$

a po podstawieniu /3.2/ otrzymamy jeden ze współczynników

$$/3.11/ \quad K_{nn} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha} (s \cdot n_f)}{[f]} = - \frac{s}{[f]} \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad [f] = \left[\frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Prawo /3.4/ da się natomiast bez trudu połączyć z modelem kinematycznym wzmocnienia. Załóżmy, że $f = f(s - \alpha) = 0$, gdzie α jest punktem środkowym powierzchni; niech przemieszczenie powierzchni zachodzi dla danego stanu naprężenia wzdłuż zewnętrznej normalnej, tzn. $d\alpha = c \cdot n_f$. Mamy wtedy

$$/3.12/ \quad \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial \alpha} c n_f = 0,$$

skąd otrzymamy $c = - n_f \cdot ds$. Współczynniki K_1 i K_2 określić można z próby prostego obciążenia i próby dociążenia. W ogólnym przypadku, przyjęty model wzmocnienia będzie nakładać pewne warunki ograniczające na K_1 i K_2 .

3.2. Warunek jednoznaczności dla prawa /3.4/.

W rozdziale II pokazaliśmy, że spełnienie warunku jednoznaczności zapewnia spełnienie pozostałych kryteriów ograniczających związku fizyczne. Dla praw nieliniowych sytuacja będzie podobna; dla tego zbadamy dokładniej kwestię jednoznaczności dla związku /3.4/ uogólniającego teorię deformacyjną przy założeniu stałości

K_1 i K_2 . Jeśli $K_1 > 0$ i $K_2 > 0$ to

$$/3.13/ \quad \left(ds \cdot d\varepsilon^p = \frac{1}{K_1} ds_n^2 + \frac{1}{K_2} ds ds_n > 0, \quad (ds_n = ds \cdot n_f > 0) \right)$$

$$\left(ds \cdot d\xi = \frac{1}{\mu} d^2 + \frac{1}{K_1} ds_n^2 + \frac{1}{K_2} ds ds_n > 0 \right)$$

Pomińmy narazie przyrosty odkształceń sprężystych i rozpatrzmy transformację $d\varepsilon^p = A^p ds$.

Z nierówności /3,13₁/ wynika, że operator A^D jest dodatnio określony; nie znaczy to wcale że transformacja ta jest wypukła. Konieczny i wystarczający warunek wypukłości transformacji wynika z następującego lematu.

Lemat 5. Jeśli transformacja $d\mathcal{E}^P = A^D ds$ jest wypukła, to $d\mathcal{E}^P$ ma stały kierunek wzdłuż normalnej do hyperpłaszczyzny Π_f i zależy tylko od składowej ds_n wzdłuż tej normalnej

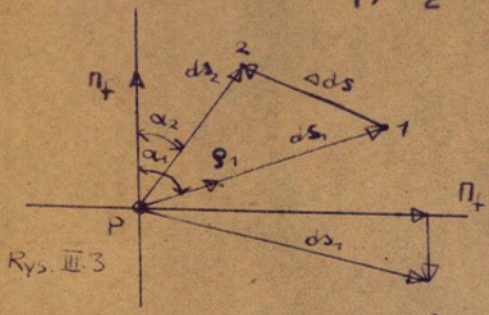
Rozpatrując warunek wypukłości $(ds_2 - ds_1) \cdot (d\mathcal{E}_2^P - d\mathcal{E}_1^P) > 0$, założmy, że $ds_2 \cdot n_f > 0$, $ds_1 \cdot n_f \leq 0$, tzn. $d\mathcal{E}_1^P = 0$. Przy stałym wektorze ds_2 , przyrost $d\mathcal{E}_2^P$ jest również stały. Wtedy w wyrażeniu $(ds_2 - ds_1) \cdot d\mathcal{E}_2^P = \Delta ds \cdot d\mathcal{E}_2^P$ wektor Δds może przyjmować wszystkie kierunki

wychodzące z danego punktu i skierowane do półprzestrzeni S_1 , $\Delta ds \cdot n_f > 0$. Oczywiście $\Delta ds \cdot d\mathcal{E}_2^P > 0$ tylko wtedy, gdy $d\mathcal{E}_2^P$ pokrywa się z wektorem n_f normalnym do Π_f .

Założmy teraz, że $d\mathcal{E}^P$ ma stały kierunek wzdłuż n_f ale zależy nie tylko od ds_n ale i od innych niezmienników ds i n_f , np. od kąta $\alpha / \cos \alpha = n_f \cdot ds / |ds|$. Wtedy zerowanie się Δds_n nie musi pociągać za sobą zerowanie się $\Delta d\mathcal{E}^P$. Rozpatrzmy sytuację, gdy Δds_n jest nieskończenie małą wielkością, zaś $\Delta d\mathcal{E}^P$ jest różnicą skończoną. Wtedy zmiana znaku $\Delta ds_n / |n_f|$ przez nieskończenie małe przesunięcie końca wektora ds_1 przy stałym ds_2 nie zmieni znaku $\Delta d\mathcal{E}^P$, w wyniku czego iloczyn $\Delta ds \cdot \Delta d\mathcal{E}^P = \Delta ds_n \cdot \Delta d\mathcal{E}^P$ może być zarówno dodatni jak i ujemny. Zatem warunek wypukłości transformacji nie tylko ogranicza kierunek $d\mathcal{E}^P$ ale i ustala jego zależność tylko od niezmiennika $ds \cdot n_f$. Należy zauważyć, że druga część Lematu 5 pokrywa się z obserwacją D.C. Druckera [4]. Ponieważ rozpatrywaliśmy tylko odkształcenie plastyczne, możemy stwierdzić, że dla ciał sztywno-plastycznych warunek wypukłości transformacji prowadzi do stowarzyszonych epraw płynięcia.

Inaczej będzie dla ciał sprężysto-plastycznych. Tu dopuszczalne będą wszystkie podane powyżej formy praw nieliniowych, zaś warunek

wypukłości transformacji należy jedynie pewne ograniczenie na współczynniki K_1, K_2 /lub ogólniej $K_{nn}, K_{tn}, K_{nt}, K_{tt}$ /.



Rys. III.3

Zbadamy obecnie prawo nieliniowe /3.4./ Rzopatrzymy dwa dowolne przyrosty ds_2 i ds_1 odpowiadające aktywnemu obciążeniu. Wektory ds_2 i ds_1 określają dwuwymiarową płaszczyznę w przestrzeni dewiatorowej, która prze-

cina się wzdłuż linii z hiperpłaszczyzną Π_P . Ponieważ wektor n_P nie leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez ds_2 i ds_1 , zagadnienie sprowadzimy do płaskiego przez zrzutowanie n_P na tą płaszczyznę /Rys. III.3 przedstawia sytuację na płaszczyźnie ds_2 i ds_1 /.

Warunek jednoznaczności wyrazić możemy następująco

$$I = (ds_2 - ds_1)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) = -ds_2^2 \left(\frac{m^2}{K_1} \cos^2 \alpha_2 + \frac{m}{K_2} \cos \alpha_2 + \frac{1}{2G} \right) - ds_1 ds_2 \left[\frac{2m^2}{K_1} \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \frac{m}{K_2} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{G} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \right] + ds_1^2 \left(\frac{m^2}{K_1} \cos^2 \alpha_1 + \frac{m}{K_2} \cos \alpha_1 + \frac{1}{2G} \right) > 0, \quad /3.14/$$

gdzie $0 \leq m \leq 1$, jest cosnusem kąta nachylenia płaszczyzny ds_2, ds_1 w stosunku do wektora n_P , zaś pozostałe wielkości geometryczne są pokazane na Rs. III.3. Forma kwadratowa /3.14/ będzie dodatnio określona jeśli

$$\delta_1 = \frac{m^2}{K_1} + \frac{m}{K_2} + \frac{1}{2G} > 0, \quad /3.15_1/$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{G^2} \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{m^2}{K_2} \left[(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)^2 \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) - (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \frac{2m}{K_2 G} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{2m^2}{K_1 G} [\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 - 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] - \frac{4m^2}{K_1 K_2} [\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) (1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2))] \right] < 0, \quad /3.15_2/$$

dla dowolnych wartości α_1, α_2 w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

i dowolnego m w przedziale $[0, 1]$. Ograniczmy się jedynie do rozpatrzenia przypadku $1/K_1 > 0$ i $1/K_2 > 0$. Wtedy pierwsza nierówność jest zawsze spekniona, Druga nierówność osiąga zerowe ekstremum dla $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ i da się przy tej wartości kątów przedstawić następująco:

$$\delta_2 = \left(\frac{m^2}{K_2} - \frac{1}{G^2} - \frac{5m^2}{K_2} \cos^2 \alpha - \frac{4m}{K_2 G} \cos \alpha - \frac{2m^2}{K_1 G} - \frac{2m^3}{K_1 K_2} \cos^3 \alpha \right) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \leq 0 \quad /3.16/$$

Z /3.16/ wynika od razu, że $\delta_2 \leq 0$ dla dowolnych wartości α i m

jeśli
/3.17/

$$0 < G/K_2 < \left(1 + 2 \frac{G}{K_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 1/K_1 > 0.$$

W ogólnym przypadku $1/K_2$ może również przybierać ujemne wartości, gdyż zakładając, że moduł styczny krzywej prostego obciążenia jest mniejszy od modułu sprężystego z /3.6/ otrzymaliśmy nierówność

$$1/K_1 + 1/K_2 > 0, \quad \text{niewymagającą dodatniości } 1/K_2. \text{ Przy } 1/K_2 < 0,$$

obrót $d\epsilon^p$ zachodziłby w przeciwną stronę do obrotu $d\epsilon$; odpowiadające temu ograniczeniu na ujemną wartość $1/K_2$ można otrzymać badając wyrażenie zawarte w nawiasie nierówności /3.16/.

Udowodnimy jeszcze, że gdy jeden z przyrostów naprężenie np. ds_1 odpowiada obciążeniu, warunek jednoznaczności jest automatycznie spełniony, jeśli zachodzi /3.14/ Dłowy wektor ds_1 dla którego

$$ds_1 \cdot n_f < 0, \text{ przedstawimy jako sumę } ds_1 = ds_1' + ds_1'', \text{ gdzie } ds_1'$$

leży w hyperpłaszczyźnie Π_f a ds_1'' jest współliniowy z n_f /rys. III.3/. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} I(ds_1, ds_2) &= \frac{1}{K_1} ds_n^{(e)} \Delta ds_n + \frac{1}{K_2} (ds_2 - ds_1) \cdot g_2 ds_n^{(e)} + \frac{\Delta ds^2}{2G} = \\ /3.18/ \quad &= I(ds_1', ds_2) + \frac{1}{K_1} ds_n^{(e)} ds_1'' - \frac{1}{K_2} ds_1'' \cdot g_2 ds_n^{(e)} + \\ &+ \frac{-ds_1''^2}{2G} - \frac{-ds_1'' \cdot (ds_2 - ds_1')}{G} \end{aligned}$$

stąd widzimy, że jeśli $I / ds_1', ds_2 / > 0$, to z pewnością $I(ds_1, ds_2) > 0$.

3.4. Odwrócenie związków /3.4./

W notacji tensorowej, prawo płynięcia /3.4./ możemy przedstawić następująco:

1/ Łatwo jest pokazać dla ujemnych K_2 , że nierówności /3.15₁/ i /3.16/ są spełnione jeśli $0 > 1/K_2 > -\frac{1}{15} \frac{1}{G}$, $\frac{1}{K_1} > \frac{1}{15} \frac{1}{G}$. Ten warunek należy traktować jako wystarczający ale niekonieczny.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s_{mn}} ds_{mn}\right) > 0$$

$$/3.19/ \quad d\epsilon_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} + \frac{1}{H_2} \frac{ds_{ij}}{(ds_{kl} ds_{kl})^{1/2}} \right] \left(\frac{\partial f}{\partial s_{mn}} ds_{mn} \right),$$

gdzie $H_1 = K_1 \left(\frac{\partial f}{\partial s_{kl}} \frac{\partial f}{\partial s_{kl}} \right), H_2 = K_2 \left(\frac{\partial f}{\partial s_{kl}} \frac{\partial f}{\partial s_{kl}} \right)^{1/2}$.

Powstaje teraz naturalne pytanie w jaki sposób uzyskać odwrócenie powyższych ~~relacji~~ ^{relacji}, gdyż częste są one wygodniejsze niż postać

/3.19/ /np. przy badaniu propagacji fal/. Odwrotnych związków do /3.4/ będziemy szukać w postaci.

$$/3.20/ \quad ds = 2G de - A r de_n - B n de_n, \text{ dla } de_n = de \cdot n > 0$$

gdzie A i B nie są już stałymi, lecz funkcjami zależnymi od kąta obrotu δ^p /rys.III.1/; r jest wektorem jednostkowym skierowanym wzdłuż de .

Funkcje A i B są w następujący sposób związane z K_1 i K_2

$$/3.21/ \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \frac{2G - A \cos \delta - B}{[(2G \tan \delta - A \sin \delta)^2 + (2G - A \sin \delta - B)^2]^{1/2}} + \frac{1}{2G} \right] &= \frac{1}{2G - A \cos \delta - B} \\ \frac{1}{K_2} \frac{2G \tan \delta - A \sin \delta}{[(2G \tan \delta - A \sin \delta)^2 + (2G - A \sin \delta - B)^2]^{1/2}} + \frac{1}{2G} \frac{2G - A \cos \delta - B}{2G \tan \delta - A \sin \delta} &= \frac{\tan \delta}{2G - A \cos \delta - B} \end{aligned} \right.$$

gdzie $\cos \delta = -de_n / de$. W notacji tensorowej prawo /3.20/ wyrazi się następująco

$$/3.22/ \quad ds_{ij} = 2G de_{ij} - \left(A' \frac{de_{ij}}{(de_{kl} de_{kl})^{1/2}} + B' \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial s_{kl}} de_{kl} \right),$$

gdzie $de_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij}$, zaś A' i B' są podobnie związane z A i B jak stałe H_1, H_2 z K_1, K_2 . Wiedźmy, zatem że problem odwracania związków nieliniowych jest o wiele bardziej złożony aniżeli w przypadku praw liniowych.

3.5. Uwagi uzupełniające

Z przeprowadzonej analizy szczególnej postaci prawa liniowego /3.4/ można wyciągnąć ogólniejszy ^{wniosek} ~~wniosek~~: prawa nieliniowe mogą być z powodzeniem użyte do opisu deformacji plastycznej.

Operując większą ilością dowolnych funkcji lub stałych, można zbudować odrębne związki fizyczne dla różnych klas metali, dla różnych rodzajów procesów deformacji. Prawa takie spełniać przy tym mogą wszystkie podstawowe kryteria sformułowane w Rozdziale II. Jakkolwiek przedyskutowaliśmy tylko warunek jednoznaczności

można ^{od razu} ~~już~~ stwierdzić, że warunek stateczności dla /3.4/ jest spełniony, jeśli nierówność /3.17/ ma miejsce. Tak samo łatwo jest spełnić wymaganie narzucone przez drugie prawo termodynamiki. Tak więc materiały charakteryzujące się rosnącą krzywą wzmocnienia przy prostym obciążeniu, opisane prawami nieliniowymi, nie będą wykazywały żadnych niepożądanych efektów /jak np. niestateczność/ w złożonych stanach naprężenia.

Zauważmy jeszcze, że postać /3.1/ jest jedynie szczególnym przypadkiem możliwych postaci praw nieliniowych przy założeniu, że $d\epsilon^p$ zależy tylko od n_p i $d\epsilon$. W przypadku materiału nie ~~elasto~~ ^{ściśnawego}, z dwóch tensorów n_{ij} i $d\epsilon_{ij}$ możemy utworzyć następującą bazę tensorową

$$n_{ij}, d\epsilon_{ij}, n_{ik}n_{kj}, d\epsilon_{ik}d\epsilon_{kj}, n_{ik}d\epsilon_{kj} + d\epsilon_{ik}n_{kj}, n_{ik}n_{kp}d\epsilon_{pj} + d\epsilon_{ik}n_{kp}n_{pj}, d\epsilon_{ik}d\epsilon_{kp}n_{pj} + n_{ik}d\epsilon_{kp}d\epsilon_{pj}$$

/3.23/

zamiast /3.1/ możemy np. napisać

$$d\epsilon^p_{ij} = (\alpha_1 n_{ij} + \alpha_2 n_{ik}n_{kj})(d\epsilon_{ik}n_{kj}) + [\alpha_3 d\epsilon_{ij} + \alpha_4 (n_{ik}d\epsilon_{kj} + d\epsilon_{ik}n_{kj}) + \alpha_5 (n_{ik}n_{kp}d\epsilon_{pj} + d\epsilon_{ik}n_{kp}n_{pj}) + \alpha_6 d\epsilon_{ik}d\epsilon_{kj} + \alpha_7 (d\epsilon_{ik}d\epsilon_{kp}n_{pj} + n_{ik}d\epsilon_{kp}d\epsilon_{pj})] \frac{d\epsilon_{ik}n_{kj}}{d\epsilon_{ik}d\epsilon_{kj}}$$

/3.24/

gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_7$ są funkcjami niezmienników mieszanych tensorów n_{ij} i $d\epsilon_{ij}$, jednorodnymi stopnia zerowego względnie $d\epsilon_{ij}$.

Przy wykorzystaniu większej ilości tensorów, np. charakteryzujących krzywizny główne powierzchni płynięcia, otrzymamy jeszcze bardziej złożone postacie praw w przeciwieństwie do praw liniowych. Mamy tu całe bogactwo możliwych form związków fizycznych.

Bibliografia

- [1] A. A. Ульришин, об основах общей математической теории пластичности, Вопр. Теории пласт. Уг. АН. Наук СССР, 1961
- [2] A. A. Ульришин, Пластичность, Уг. АН. Наук, 1963
- [3] R. Hill, Some Basic Principles in the Mechanics of Solids Without a Natural Time, Journ. Mech. Phys. Solids, vol 7, 1959, 209-225
- [4] D. C. Drucker, A Definition of Stable Inelastic Materials, Journ. Appl. Mech., vol 26, 101-106, 1959

