

B7/1

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
PAN

Piotr Perzyna



~~8692~~

32/D

WPLYW PRĘDKOŚCI ODKSZTAŁCENIA I NIEJEDNORÓDNOŚCI MATERIAŁU  
NA ROZPRZESTRZENIANIE SIĘ FAL NAPRĘŻENIA W OŚRODKACH PLASTYCZNYCH

Warszawa, wrzesień 1962 r.

## I. ZWIĄZKI FIZYKALNE DLA MATERIAŁU WRAZLIWEGO NA PRĘDKOŚĆ ODKSZTAŁCENIA

1. Omówienie dotychczasowych rezultatów. Wielu badaczy eksperymentalnych podjęło próby otrzymania danych doświadczalnych, które pozwoliłyby na określenie dynamicznych związków fizykalnych. Należy jednak podkreślić, że wiele z tych badań nie przedstawia realnej wartości ze względu na pominięcie efektu rozprzestrzeniania się fal. Zagadnienie to było dyskutowane w wielu pracach, zarówno teoretycznych, jak i doświadczalnych, między innymi w pracach D.S. Clarka [20] i J.D. Campbella i J. DUBY [14].

Rezultaty badań G.I. Taylora i A.C. Whiffina [70], [72], F.E. Duweza i D.S. Clarka [26], J.E. Johnsona, D.S. Wooda i D.S. Clarka [35] i J.D. Campbella [12], [13] pokazały, że metale potrzebują wyższego naprężenia, aby osiągnąć uplastycznienie przy nagłym obciążeniu, niż przy obciążeniu powolnym.

W wielu pracach teoretycznych i doświadczalnych zwrócono uwagę, że metale posiadające wyraźną granicę plastyczności są szczególnie wrażliwe na prędkość odkształcenia (patrz na przykład M.P. White [73] i H.G. Hopkins [33]). Bardzo dobrymi przykładami metali, które zachowują się odmiennie podczas statycznego i dynamicznego odkształcenia i które wykazują dużą wrażliwość na zmianę prędkości odkształcenia są: miękka stal i czyste żelazo.

Wpływ prędkości odkształcenia na zmianę granicy plastyczności dla miękkiej stali był zbadany szczegółowo w dwóch pracach, M.V. Manjoine [46] i D.S. Clark i P.E. Duwez [19]. Tu znów należy zwrócić uwagę na trudności jakie trzeba pokonać, aby bada-

---

\*/ Zjawisko to było również przedmiotem studiów G.I. Taylora [69].

nia miały znaczenie realne. Podczas uderzeniowego badania próbki prędkość odkształcenia wzdłuż badanej próby nie jest stała w czasie, ale zmienia się w szerokich granicach. W związku z tym badane zjawisko jest niezmiernie skomplikowane (zobacz uwagi D.S. Clarka [20]). E.H. Lee i H. Wolf [42] podkreślili, że uchwycenie wpływu prędkości odkształcenia na własności mechaniczne metalu może być poprawnie określone jedynie w takich badaniach, w których zostanie wyeliminowane zjawisko falowe, zjawisko rozprzestrzeniania się fal naprężenia (chodzi tu szczególnie o fale plastyczne).

Rezultaty D.S. Clarka i P.E. Duweza dla miękkiej stali (0,22% węgla, górna statyczna granica plastyczności  $39\ 000\ \text{lb/in}^2$  ( $2760\ \text{kg/cm}^2$ )) pokazały (patrz rys. 1), że granica proporcjonalności, która w tym przypadku może być jednocześnie traktowana jako górna granica plastyczności, wzrasta wraz z wzrastaniem prędkości odkształcenia dopóki nie połączy się z krzywą obrazującą zmianę umownej granicy wytrzymałości. Umowna granica wytrzymałości wzrasta, dopóki prędkość odkształcenia nie osiągnie wartości  $200\ \text{sek}^{-1}$ .

M.J. Manjoine badał nisko-węglową stal konstrukcyjną posiadającą dolną granicę plastyczności  $28\ 000\ \text{lb/in}^2$  ( $1980\ \text{kg/cm}^2$ ). Jego rezultaty różnią się trochę od rezultatów D.S. Clarka i P.E. Duweza.

Badania doświadczalne J.D. Campbella [13], J.D. Campbella i J. DUBY [14] i J. Hardinga, E.O. Wooda i J.D. Campbella [28] wykazały, że górna granica plastyczności w procesie dynamicznego obciążenia może osiągnąć wartość 2,5 do 3 razy większą niż w czasie próby statycznej. Z badań tych wyraźnie widać, że granica plastyczności wzrasta wraz ze wzrastaniem prędkości odkształcenia. Jednocześnie należy zwrócić uwagę na bardzo ważne zjawisko, jakim

jest wyraźne zmniejszenie efektu wzmocnienia w procesie dynamicznego obciążenia w stosunku do zaobserwowanego wzmocnienia w czasie próby statycznej. Bardzo dobrze obrazują to Rys. 2 - 4.

Odkryto również, że naprężenie większe od górnej granicy plastyczności może być przyłożone do badanej próbki na bardzo krótki okres czasu bez wywołania plastycznego płynięcia. Zjawisko to nazwano "efektem czasu opóźnienia" i zostało szczegółowo zbadane dla miękkiej stali<sup>\*/</sup> przez J.E. Johnsona, D.S. Wooda i D.S. Clarka [34]. Czasy opóźnienia zmieniające się w granicach 40<sup>μ</sup>usek do 1,5 milisek są funkcją początkowego naprężenia uderzeniowego zmieniającego się odpowiednio od 80 000 lb/in<sup>2</sup> (5650 kg/cm<sup>2</sup>) do 50 000 lb/in<sup>2</sup> (3530 kg/cm<sup>2</sup>). Wykazano również, że dla nisko węglowej stali efekt czasu opóźnienia w dynamicznej próbie ściskania ma taki sam charakter jak w dynamicznej próbie rozciągania (patrz [18], [34]).

Rezultaty badań D.S.C. Taylora [68] wskazały, że "zjawisko czasu opóźnienia" może być zaobserwowane nie tylko w metalach nieuplastycznionych ale również częściowo uplastycznionych.

Dynamiczne krzywe rozciągania były uzyskane przez J.E. Johnsona, D.S. Wooda i D.S. Clarka [35] i J.D. Campbella [11] dla aluminium i przez J.D. Campbella [13], J.D. Campbella i J. DUBY [14] dla miękkiej stali. J. Harding, E.O. Wood i J.D. Campbell [28] określili charakterystyki dynamiczne dla wielu metali, między innymi dla czystego żelaza i miękkiej stali (patrz również [17] i [62]).

Bezpośredni pomiar wpływu efektu prędkości odkształcenia na charakter krzywej  $\sigma - \epsilon$  został przeprowadzony przez T.E. Tietza i J.E. Dorna, [71], Rys. 5.

Analizę wpływu zmian temperatury na dynamiczne zachowanie się metali zajmują się prace [8], [38], [46].

<sup>\*</sup>/Podobnym zagadnieniem zajmuje się praca J.D. Campbella i J. DUBY [15].

Zgadnienie rozkładu odkształceń trwałych dla próby uderzeniowej było badane przez Campbella [13]. Przy uderzeniu próbki (o średnicy 12,7 mm i o długości 266,7 mm) z prędkością początkową 400 in/sek, (1016 cm/sek) uplastycznienie dało się zauważyć tylko w pobliżu uderzonego końca próbki i było zlokalizowane tylko na długości około 10 mm, Rys. 6. Badania te potwierdzają przypuszczenie, że odkształcenia plastyczne w próbce z miękkiej stali są bardzo zlokalizowane.

Nieliniowe związki fizyczne dla jednowymiarowych stanów naprężenia były wprowadzone przez L.E. Malverna [45], który uogólnił relacje K. Hohenemsera i W. Pragera [31]. Fizyczne prawo L.E. Malverna może być zapisane w następującej postaci

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \psi [\sigma - f(\epsilon)], & \text{jeżeli } \sigma > f(\epsilon), \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{E} \dot{\sigma}, & \text{jeżeli } \sigma \leq f(\epsilon), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Jeżeli  $\epsilon$  oznacza odkształcenie,  $\sigma$  naprężenie,  $E$  jest modułem Younga, kropka oznacza różniczkowanie względem czasu, a  $\sigma = f(\epsilon)$  jest statyczną charakterystyką materiału dla prostego rozciągania.

L.E. Malverna [45] przedyskutował dwa szczególne przypadki funkcji  $\psi$ , mianowicie funkcję wykładniczą

$$\psi = \frac{1}{b} \left\{ e^{(1/a)[\sigma - f(\epsilon)]} - 1 \right\}, \quad (2)$$

≠/ i funkcję liniową

$$\psi = c [\sigma - f(\epsilon)], \quad (3)$$

≠/ Funkcję liniową dla jednowymiarowych stanów naprężenia wprowadził wcześniej W.W. Sokołowski w pracach [64], [65].

gdzie  $a$ ,  $b$  i  $c$  są stałymi wartościami i porównaj założenia swych relacji z danymi doświadczalnymi dla miedzi.

Analizując relacje (1) dla przypadku funkcji  $\psi$  przedstawionej związkami (3), łatwo widać, że L.E. Malvern wprowadził założenie, że wzrost prędkości odkształcenia plastycznego jest proporcjonalny do różnicy między aktualnym naprężeniem a naprężeniem wyliczonym z krzywej statycznej. Różnica ta powoduje przyrost prędkości odkształcenia zgodnie z prawem lepkości. Składowa sprężysta odkształcenia jest rozważana jako niezależna od prędkości odkształcenia. Zgodnie z tymi założeniami i w odróżnieniu od wyników teorii przyjmującej jako podstawę do badań dynamicznych charakterystykę statyczną materiału, czoło fali plastycznej rozprzestrzenia się z taką samą prędkością jak czoło fali sprężystej.

Badania teoretyczne L.E. Malverna [45] pokazały, że zgodnie z teorią zależną od prędkości odkształcenia - nie ma obszaru stałego odkształcenia w pobliżu uderzonego końca próbki. Warto tu zauważyć, że w wielu badaniach doświadczalnych również nie wykazano istnienia takiego obszaru (patrz na przykład badania J.D. Campbella [13] i szczegółowa dyskusja tego zagadnienia w pracy H.G. Hopkinsa [33] oraz teoretyczne i doświadczalne badania S. Rajniaka, F.E. Hausera i J.E. Dorna [61], Rys. 7). Wydaje się jednak, że zjawisko to nie zostało jeszcze dostatecznie zbadane.

B.E.K. Alter i C.W. Curtis [1] wykonali serię prób doświadczalnych mających na celu określenie charakteru rozprzestrzeniania się impulsów powodujących odkształcenia plastyczne wzdłuż ołowianych cylindrycznych prętów. Badania te wykazały duże znaczenie wpływu prędkości odkształcania na zjawisko rozprzestrzeniania się odkształceń plastycznych. Obserwacje te jednocześnie potwierdziły zgodność założeń nieliniowej teorii L.E. Malverna.

E.J. Sternglas i D.A. Stuart [67] badając miedziane próbki wykazali, że fale naprężenia wytwarzane przez dynamiczny przyrost obciążenia, nałożony na obciążenie statyczne odpowiadające granicy plastyczności rozprzestrzeniają się z prędkością sprężystą. Podobne zjawisko zaobserwowali również B.B.K. Alter i C.W. Curtis [1] w próbkach ołowianych. Trzeba tu jednak za F.G. Hopkinsem [3] podkreślić, że warunki obciążenia w doświadczeniach E.J. Sternglasa i D.A. Stuarta [67] nie miały w pełni charakteru dynamicznego, ale były częściowo statyczne a częściowo dynamiczne.

Jednakże rezultaty te wskazują wyraźnie, że użycie statycznej krzywej rozciągania jako podstawy do opisu zjawisk dynamicznych musi prowadzić do błędnych wniosków.

Nie znaczy to, że zjawisko wpływu prędkości odkształcenia jest jednakowo decydujące dla wszystkich materiałów. Należy zauważyć, że zaobserwowano cały szereg materiałów, dla których zjawisko to jest całkowicie pomijalne i przyjęcie dla tych materiałów klasycznych założeń Donella, Karmana, Taylora i Kachmatulina jest w pełni uzasadnione. Można tu wskazać wiele badań doświadczalnych zajmujących się szczegółowo tym problemem. Wymienimy na przykład serię badań J.F. Bella [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] przeprowadzonych dla ulepszonego cieplnie aluminium. Oryginalna metoda badań oparta o wykorzystanie zjawiska dyfrakcji pokazała zgodność otrzymanych rezultatów z założeniami teorii klasycznej niezależne, od prędkości odkształcenia.

Dyskutowane relacje fizyczne (1) - (3) były wyprowadzone w sposób czysto formalny. Ciekawa będzie dyskusja tych relacji w świetle dyslokacyjnego modelu materiałów krystalicznych.

x/ Potwierdzają to również ostatnie badania przeprowadzone

dla czystego aluminium przez F.F. Hausera, J.A. Simmonsa

i J.E. Dorna [29], Rys. 8.

Postawimy pytanie jaki rodzaj związków fizykalnych mógłby być oczekiwany z punktu widzenia teorii dyslokacji. Wiele ostatnich prac teoretycznych i doświadczalnych zajmuje się szczegółowo tym zagadnieniem.

Mysł wyjaśnienia zjawiska plastycznego płynięcia metali w oparciu o badanie dyslokacji była przedstawiona przez A.M. Cottrella i E.A. Bilby [22]. Natomiast opracowanie ogólnych podstaw wyjaśnienia wielu efektów zachodzących w czasie dynamicznego obciążenia metali zostało podane w późniejszej pracy A.M. Cottrella [23]. Rozszerzając tę myśl J.D. Campbell [12], [39] pokazał, że zjawisko czasu opóźnienia przed uplastycznieniem może być dokładnie wytłumaczone przy pomocy teorii dyslokacji. Niestety jest to jedyny pełny sukces tej teorii dotyczący wytłumaczenia zjawisk dynamicznych w metalach.

Teoria dyslokacji nie jest jeszcze wystarczająco rozwinięta, aby zapewnić wyprowadzenie od podstaw relacji fizykalnych (patrz analiza tego zagadnienia w pracy J.A. Simmonsa, F. Hausera i J.E. Dorna [63]).

Obecnie można tylko postawić pytanie jak w świetle teorii dyslokacji wyglądają istniejące związki fizykalne. Zagadnieniem tym zajęła się szczegółowo praca J.A. Simmonsa, F. Hausera i J.E. Dorna [63]. Zbadanie dwóch teorii, klasycznej Donella, Karmena, Taylora i Rachmatulina i lepko-plastycznej uwzględniającej wpływ prędkości odkształcenia w świetle modelu dyslokacyjnego okazało się wyraźnie korzystne dla teorii lepko-plastycznej.

Przebiegane w tej chwili badania doświadczalne i próba wyjaśnienia ich rezultatów przy pomocy teorii dyslokacji może w przyszłości stworzyć warunki na wyprowadzenie ogólnych związków fizykalnych opisujących dynamiczne zachowanie się materiałów plastycznych (patrz prace [29], [30], [61]).



J.D. Campbell, J.A. Simmon i J.E. Dorn, [16], studiowali zachowanie się źródeł dyslokacji Franka - Reada pod wpływem naprężenia uderzeniowego. Analiza ta pokazała, że jeżeli początkowa przyspieszająca część dynamicznego zachowania się dyslokacji może być pominięta, wtedy nieliniowa teoria L.E. Malverna może być przynajmniej formalnie przyjęta jako podstawa realnego opisu zachowania się materiałów krystalicznych.

Zwróćmy tu również uwagę na pewien kierunek rozwijający się ostatnio i którego celem jest opisanie dynamicznych odkształceń belek pod wpływem obciążeń charakteru uderzeniowego lub wybuchowego. Zakładając, że w tego rodzaju problemach odkształcenia sprężyste w porównaniu z odkształceniami plastycznymi są bardzo małe P.S. Symonds, G.R. Cowper i S.R. Bodner, [9], [10], [25], wprowadzili następujące prawo fizyczne

$$\dot{\epsilon} = D \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^p, \quad (4)$$

gdzie  $\sigma_0$  oznacza granicę plastyczności dla prostego rozciągania. Stałe  $D$  i  $p$  zostały określone w oparciu o wyniki badań doświadczalnych uzyskanych przez M.J. Manjoine, [46]. Dla miękkiej stali stałe te znaleziono jako  $D = 40,4 \text{ sek}^{-1}$  i  $p = 5$ . Badania doświadczalne przeprowadzone przez S.R. Bodnera i P.S. Symonasa, [10], dotyczące odkształceń plastycznych belek wspornikowych pod wpływem obciążeń impulsowych pokazały dostateczną zgodność przyjętego prawa (4) z wynikami doświadczeń.

Należy jednak podkreślić, że w badaniach odkształceń uderzeniowych belek prędkość odkształcenia jest bardzo mała i jej znaczenie ma inny charakter niż w problemach falowych.

W dalszych naszych rozważaniach głównym celem studiów będzie wpływ prędkości odkształcenia na zjawisko falone, którym towarzyszą trójwymiarowe stany naprężenia.

Stajemy przed problemem jak wyglądają związki fizyczne dla złożonego stanu naprężenia uwzględniające wpływ prędkości odkształcenia.

Do raz pierwszy związki takie były zaproponowane przez K. Hohenemsera i W. Pragera [31], [56]; mogą one być zapisane w postaci (patrz W. Prager [58], [59])

$$2\eta \dot{\epsilon}_{ij}^P = 2k \langle F \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5)$$

gdzie

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \quad (6)$$

jest statycznym warunkiem plastyczności,  $\delta_{ij}$  oznacza składowe dwiatora naprężenia,  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  składowe plastycznego lub, bardziej ogólnie, niesprężystego tensora odkształcenia,  $\eta$  jest stałą lepkości,  $k$  oznacza granicę plastyczności przy prostym ścinaniu,  $J_2$  reprezentuje drugi niezmiennik dwiatora naprężenia. Symbol  $\langle F \rangle$  jest zdefiniowany następująco :

$$\langle F \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } F \leq 0, \\ F & \text{dla } F > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Uwzględniając składowe odkształcenia sprężystego i oznaczając przez  $e_{ij}$  składowe dwiatora odkształcenia oraz przez  $\mu$  i  $K$  stałe sprężyste, otrzymamy następujące relacje

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1 - k/\sqrt{J_2}}{2\eta} \dot{\sigma}_{ij}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} > k, \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} \leq k, \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Relacje (8) były szczegółowo badane przez A.M. Freudenthala, [37].

## 2. Nowe relacje fizyczne dla złożonego stanu naprężenia

Podstawowymi założeniami związków fizycznych (5) lub (8) są: pominięcie efektu wzmocnienia i przyjęcie liniowej formy względem funkcji  $F$ .

Pierwsze założenie w świetle badań doświadczalnych wydaje się całkowicie uzasadnione (patrz opisane wcześniej badanie J.D. Campbella, [13], J.D. Campbella i J. DUBY, [14], J. Hardinga, E.O. Wooda i J.D. Campbella, [28]), jednakże drugie budzi poważne zastrzeżenia.

Główną przyczyną wprowadzenia nowych relacji fizycznych dla złożonego stanu naprężenia opisujących zachowanie się materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia jest właśnie spostrzeżenie, że prawo liniowe (5) lub (8) (liniowe względem funkcji  $F$ ) nie może dać adekwatnego opisu zjawisk dynamicznych.

Najważniejszym zjawiskiem, które należy opisać przez nowe relacje fizyczne, jest oczywiście wpływ prędkości odkształcenia na zmianę granicy plastyczności. Relacje (5) i (8) założyły a priori, że zmiana ta ma charakter liniowy czemu wyraźnie przeczą ostatecznie badania doświadczalne (patrz prace D.S. Clarka i P.E. Duceza, [19] i M.J. Manjoine, [46]).

W celu uogólnienia relacji (5) zastąpimy  $2k \langle F \rangle$  przez  $\gamma^0 \Phi(F)$ , gdzie  $\gamma^0$  oznacza fizyczną stałą materiału,  $F$  jest nadal zdefiniowane wzorem (6), natomiast funkcja  $\Phi(F)$  spełnia warunki

$$\left. \begin{aligned} \Phi(F) = 0, & \quad \text{jeżeli} \quad F \leq 0, \\ \Phi(F) \neq 0, & \quad \text{jeżeli} \quad F > 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Po uwzględnieniu odkształceń sprężystych możemy zapisać nowe związki fizyczne w następującej postaci

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \gamma^0 \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{dla } F > 0, \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij}, & \text{dla } F \leq 0, \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

lub

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \gamma \Phi(F) \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{\sqrt{J_2}}, & \text{dla } \sqrt{J_2} > k, \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij}, & \text{dla } \sqrt{J_2} \leq k, \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

gdzie  $\gamma = \gamma_0 \sqrt{2k}$ .

Funkcja  $\Phi(F)$  powinna być dobrana tak, aby relacje (11) mogły opisywać dynamiczne zachowanie się materiału zgodnie z wynikami doświadczeń.

Analizując podstawowe założenia relacji (11) zauważamy, że w ogólności są one podobne do założeń wprowadzonych przez L.B. Malvern, [45], dla zagadnień jednowymiarowych. Jediną różnicą jest pominięcie efektu wzmocnienia, co pociąga za sobą konsekwencję, że prędkość niesprężystych składowych tensora odkształcenia jest obecnie funkcją różnicy między aktualnym stanem naprężenia a stanem odpowiadającym statycznemu warunkowi osiągnięcia uplastycznienia, przy czym jako kryterium plastyczności przyjęto warunek Hubera - Misesa.

Aby zbadać lepiej charakter wprowadzonych relacji fizycznych

i uzyskać dalsze wnioski, rozważmy tylko niesprężystą część relacji (11)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \gamma \Phi(F) \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad (12)$$

Podnosząc do kwadratu obie strony równania (12) i oznaczając przez  $I_2^P = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P$  drugi niezmiennik niesprężystego tensora prędkości odkształcenia, po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\sqrt{I_2^P} = \gamma \Phi(F) \quad (13)$$

Równanie (13) prowadzi do związku

$$\sqrt{J_2} = k \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{I_2^P}}{\gamma} \right) \right], \quad (14)$$

gdzie  $\Phi^{-1}$  oznacza odwrotną funkcję względem funkcji  $\Phi$ . Związek (14) przedstawia dynamiczny warunek plastyczności dla ciała sprężysto-lepko-plastycznego, Rys. 9.

Łatwo zauważyć, że relacje fizyczne (11) prowadzą do podobnych rezultatów, jak teoria plastyczności dla materiałów charakteryzujących się izotropowym wzmocnieniem. Jednakże w przypadku izotropowej teorii plastyczności, promień  $\bar{R}$  oktaedrycznego przekroju cylindrycznej powierzchni, przedstawiającej w przestrzeni naprężeń warunek plastyczności, zależy od odkształceń plastycznych, podczas gdy w przypadku rozpatrywanym tutaj  $\bar{R}$  zależy od prędkości odkształceń plastycznych, zgodnie z relacją

$$\bar{R} = \bar{R}_0 \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{I_2^P}}{\gamma} \right) \right], \quad (15)$$

gdzie  $\bar{R}_0 = k\sqrt{2}$  oznacza promień oktaedrycznego przekroju powierzchni przedstawiającej statyczny warunek plastyczności, Rys. 10.

W teorii plastyczności dla materiałów charakteryzujących się liniowym wzmocnieniem mamy trzy różne możliwości w zależności od tego czy  $\dot{J}_2 > 0$  (obciążenie),  $\dot{J}_2 = 0$  (neutralne obciążenie), lub  $\dot{J}_2 < 0$  (odciążenie).

Ponieważ w lepko-plastyczności  $J_2$  jest funkcją prędkości odkształcenia, plastyczne płynięcie (efekt relaksacyjny) ma miejsce, jeżeli  $J_2 > k^2$ , niezależnie od tego czy  $\dot{J}_2 > 0$ ,  $\dot{J}_2 = 0$  lub  $\dot{J}_2 < 0$ .

Zgodnie z relacjami fizykalnymi (11) materiał będzie miał własności sprężyste na drodze  $OP_0$ , ale na drodze

$P_0 P_1 P_1' P_2$  będzie zachowywał się jak sprężysto, lepko-plastyczny<sup>\*</sup>, Rys. 10.

3. Dyskusja warunków spełnionych w procesie relaksacji i całkowania równań relaksacyjnych. Aby przedyskutować proces relaksacji dla złożonego stanu naprężenia, rozważmy ciało sprężysto, lepko-plastyczne wypełniające objętość  $V$ , ograniczoną powierzchnią regularną  $S$  i zbadajmy następujący problem brzegowy. Rozważmy najpierw proces obciążania, w którym siły powierzchniowe  $T_i$  działają na części powierzchni  $S_1$ , natomiast na pozostałej części powierzchni  $S - S_1 = S_2$  siły powierzchniowe są równe zero. Po procesie obciążania następuje proces relaksacji, w którym prędkości  $v_i$  zerują się na powierzchni  $S_1$ , podczas gdy siły powierzchniowe  $T_i$  nadal są równe zero na powierzchni  $S_2$ .

W celu zapewnienia możliwości uzyskania użytecznych danych o związkach fizykalnych, doświadczalną próbę relaksacyjną przeprowadza się tak, aby stan naprężenia i stan odkształcenia były jednorodne.

<sup>\*</sup>/ Warunki obciążania i odciążania przyjęte dla ciał sprężysto, lepko-plastycznych w pracy [51] są za silne.

Proces relaksacyjny zdefiniowany powyżej nazywać będziemy procesem A.

Rozważmy obecnie tensor  $\Gamma_{ij}$  zdefiniowany następującym związkiem

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \int (T_i v_j + T_j v_i) dS \quad (16)$$

W czasie trwania procesu A tensor  $\Gamma_{ij}$  jest równy zero. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} &= \frac{1}{2} \int (T_i v_j + T_j v_i) dS = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ik} n_k v_j + \sigma_{jk} n_k v_i) dS = \\ &= \frac{1}{2} \int \partial_k (\sigma_{ik} v_j + \sigma_{jk} v_i) dV = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ik} \partial_k v_j + \sigma_{jk} \partial_k v_i) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int (\sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} + \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki}) dV = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Ponieważ z założenia w takim procesie stan naprężenia i stan odkształcenia są jednorodne, stąd

$$\frac{1}{2} (\sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} + \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki}) = 0 \quad (18)$$

Warunki te pozwalają określić stan naprężenia w procesie relaksacji jako funkcję czasu.

Zakładając obecnie, że w czasie  $t=0$  został osiągnięty pewien stan naprężenia charakteryzujący się przez  $\sigma_{ij}^{(0)}$  (lub  $\delta_{ij}^{(0)}$  i  $\sigma_{kk}^{(0)}$ ) i  $\int_2^{(0)} = 1/2 \delta_{ij}^{(0)} \delta_{ij}^{(0)} > k^2$  oraz, że w chwili  $t=0$  rozpoczyna się proces relaksacji, wtedy posługując się relacjami fizycznymi (11) i warunkami (18) otrzymamy układ sześciu nieliniowych równań różniczkowych względem  $\delta_{ij}$  i  $\sigma_{kk}$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left( \sigma_{ik} + \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ik} \right) \left[ \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{kj} + \frac{1}{9K} \dot{\sigma}_{ll} \delta_{kj} + \gamma \Phi(F) \frac{\dot{\sigma}_{kj}}{\sqrt{J_2}} \right] + \left( \dot{\sigma}_{jk} + \frac{1}{3} \dot{\sigma}_{ll} \delta_{jk} \right) \left[ \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ki} + \frac{1}{9K} \dot{\sigma}_{ll} \delta_{ki} + \gamma \Phi(F) \frac{\dot{\sigma}_{ki}}{\sqrt{J_2}} \right] \right\} = 0. \quad (19)$$

Przyjmując w warunkach (18)  $i=j$  dostajemy

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0. \quad (20)$$

Mnożąc następnie równanie tensorowe (18) przez  $\sigma_{ij}$  mamy

$$\frac{1}{2} (\sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} + \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki}) \sigma_{ij} = \sigma_{ij} \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki} = 0. \quad (21)$$

Zanalizujmy teraz prostszy problem brzegowy, w którym proces obciążenia charakteryzuje się przyłożonymi siłami powierzchniowymi  $T_i$  na całej powierzchni  $S$ , natomiast w czasie procesu relaksacyjnego na całej powierzchni  $S$  utrzymuje się prędkości  $v_i$  równe zeru.

Ten rodzaj procesu relaksacyjnego będziemy nazywać procesem B.

Ponieważ stan naprężenia i stan odkształcenia są jednorodne w badaniu relaksacyjnym, stąd dla procesu B mamy warunki

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 0. \quad (22)$$

Z relacji fizycznych /11/ i na podstawie warunków (22) otrzymujemy układ pięciu równań różniczkowych opisujących zmianę w czasie składowych dewiatora naprężenia  $\sigma_{ij}$

$$\dot{\sigma}_{ij} + 2\mu \gamma \Phi(F) \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{J_2}} = 0. \quad (23)$$

Układ równań różniczkowych (23) można łatwo sprowadzić do następującego układu równań całkowych



$$\Delta_{ij} = \Delta_{ij}^{(0)} - 2\mu\gamma \int_0^t \Phi[F(\xi)] \frac{\Delta_{ij}(\xi)}{\sqrt{J_2(\xi)}} d\xi \quad (24)$$

Zakładając, że wszystkie funkcje podcałkowe spełniają warunek Lipschitza i posługując się metodą iteracji można podać rozwiązanie układu (24) w następującej postaci

$$\Delta_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{ij}^{(n)}, \quad (25)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ij}^{(n+1)} &= \Delta_{ij}^{(0)} - 2\mu\gamma \int_0^t \Phi[F^{(n)}(\xi)] \frac{\Delta_{ij}^{(n)}(\xi)}{\sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}} d\xi, \\ F^{(n)}(\xi) &= \frac{1}{2} \Delta_{ij}^{(n)}(\xi) \Delta_{ij}^{(n)}(\xi) / k - 1, \\ J_2^{(n)}(\xi) &= \frac{1}{2} \Delta_{ij}^{(n)}(\xi) \Delta_{ij}^{(n)}(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Warunki (22) prowadzą do dwóch użytecznych warunków skalarowych

$$\Delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0, \quad (27)$$

$$\Delta_{ij} \Delta_{jk} \dot{\epsilon}_{ki} = 0. \quad (28)$$

Warto zauważyć, że warunki (27) i (28) są słuszne dla procesu A dla materiałów nieściśliwych, ponieważ wtedy

$$\dot{\epsilon}_{ii} = 0. \quad (29)$$

Warunki (27) i (28) dla procesu A przy spełnieniu warunku (29) wynikają bezpośrednio ze związków (20) i (21).

Wykorzystując warunek (27) podczas procesu A dla materiału nieściśliwego i podczas procesu B dla dowolnego materiału spełniającego związki fizyczne (11) otrzymamy następujące równanie relaksacyjne dla drugiego niezmiennika dwiatora naprężenia  $J_2$

$$\dot{J}_2 + 4\mu\gamma \Phi\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)\sqrt{J_2} = 0. \quad (30)$$

Równanie to może być zapisane jako nieliniowe równanie całkowe Volterry drugiego rodzaju

$$J_2 = J_2^{(0)} - 4\mu\gamma \int_0^t \sqrt{J_2(\xi)} \Phi\left[\frac{\sqrt{J_2(\xi)}}{k} - 1\right] d\xi. \quad (31)$$

Jeżeli wyrażenie podcałkowe  $\sqrt{J_2} \Phi(F)$  spełnia warunek Lipschitza

$$\left| \sqrt{J_2'} \Phi\left(\frac{\sqrt{J_2'}}{k} - 1\right) - \sqrt{J_2''} \Phi\left(\frac{\sqrt{J_2''}}{k} - 1\right) \right| < N_0 |J_2' - J_2''|, \quad (32)$$

gdzie  $N_0$  jest dodatnią stałą wartością, wtedy rozwiązanie równania (31) może być otrzymane przy pomocy metody iteracji, wykorzystując następujący wzór rekurencyjny:

$$J_2^{(n+1)} = J_2^{(0)} - 4\mu\gamma \int_0^t \sqrt{J_2^{(n)}(\xi)} \Phi\left[\frac{\sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}}{k} - 1\right] d\xi. \quad (33)$$

Łatwo sprawdzić, że szereg

$$J_2^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} [J_2^{(n+1)}(t) - J_2^{(n)}(t)] \quad (34)$$

jest absolutnie i jednostajnie <sup>zbieżny</sup> zblizony i jego suma

$$J_2(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_2^{(n)}(t) \quad (35)$$

jest rozwiązaniem równania całkowego (31) a stąd i równania różniczkowego (30). Oczywiście rozwiązanie (35) jest słuszne tylko w obszarze odkształceń niesprężystych, to znaczy jeżeli  $J_2 > k^2$ .

**4. Uogólnienie.** Jest oczywiste, że związki fizyczne (10) są słuszne dla dowolnej funkcji  $F$  reprezentującej statyczny warunek plastyczności przy spełnieniu założeń dotyczących materiałów idealnie plastycznych, to znaczy, że funkcja  $F$  nie zależy od odkształceń.

Na przykład, dla funkcji

$$F = \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1, \quad (36)$$

gdzie  $J_3$  jest trzecim niezmiennikiem dwiatora naprężenia, a  $c$  jest wartością stałą, równania (10) przyjmują postać

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\gamma^0}{c} \Phi \left[ \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1 \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{jeżeli } f(J_2, J_3) > c, \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij}, & \text{jeżeli } f(J_2, J_3) \leq c, \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Uwzględniając tylko część niesprężystą prędkości odkształce-  
nia zdefiniowaną relacjami (37) mamy

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \frac{\gamma^0}{c} \Phi \left[ \frac{f(j_2, j_3)}{c} - 1 \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (38)$$

Podnosząc do kwadratu obydwie strony równania (38) po pros-  
tych przekształceniach otrzymamy

$$\sqrt{I_2^P} = \frac{\gamma^0}{c} \Phi \left[ \frac{f(j_2, j_3)}{c} - 1 \right] \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{1/2} \quad (39)$$

Ostatni związek daje

$$f(j_2, j_3) = c \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \frac{c}{\gamma^0} \sqrt{I_2^P} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-1/2} \right] \right\} \quad (40)$$

Wyrażenie (40) reprezentuje dynamiczny warunek plastycz-  
ności dla materiałów sprężysto, lekko-plastycznych i opisuje  
zależność ogólnego warunku plastyczności od prędkości odkształ-  
cenia.

Jeżeli pomnożymy pierwsze równanie tensorowe (37) przez  
 $\delta_{ij}$  i uwzględnimy tożsamość

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial j_2} \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial j_3} t_{ij} \quad (41)$$

gdzie  $t_{ij} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} j_2 \delta_{ij}$ , otrzymamy

$$s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{j}_2 + 2 \frac{\gamma^0}{c} \Phi(F) \left[ \frac{\partial f}{\partial j_2} \dot{j}_2 + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial j_3} \dot{j}_3 \right] \quad (42)$$

Podobnie mnożąc pierwsze równanie (37) przez  $\delta_{jk} \delta_{ki}$  znajdujemy

$$\delta_{jk} \delta_{ki} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{J}_3 + \frac{1}{3} \frac{\gamma^0}{c} \Phi(F) \left[ \frac{\partial f}{\partial J_2} \dot{J}_3 + \frac{\partial f}{\partial J_3} g(J_2, J_3) \right], \quad (43)$$

gdzie  $g(J_2, J_3)$  jest znaną funkcją.

Rozważmy obecnie proces relaksacji dla materiału charakteryzującego się relacjami fizykalnymi (37). Założmy, że podczas procesu obciążania został osiągnięty pewien stan naprężenia

$\sigma_{ij}^{(0)}$  w czasie  $t=0$ , a następnie na miejsce proces A.

Na podstawie warunków (18) i związków (37) otrzymamy następujący układ sześciu równań różniczkowych względem  $\delta_{ij}$  i  $\sigma_{ii}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left( \delta_{ik} + \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ik} \right) \left[ \frac{1}{2\mu} \dot{\delta}_{kj} + \frac{1}{9K} \sigma_{ll} \dot{\delta}_{kj} + \frac{\gamma^0}{c} \Phi \left( \frac{f}{c} - 1 \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] + \right. \\ & \left. + \left( \delta_{jk} + \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{jk} \right) \left[ \frac{1}{2\mu} \dot{\delta}_{ki} + \frac{1}{9K} \sigma_{ll} \dot{\delta}_{ki} + \frac{\gamma^0}{c} \Phi \left( \frac{f}{c} - 1 \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ki}} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Podczas procesu B warunki (22) i relacje (37) prowadzą do następującego układu<sup>x/</sup> pięciu równań różniczkowych względem

$\delta_{ij}$ :

$$\dot{\delta}_{ij} + \frac{2\mu\gamma^0}{c} \Phi \left[ \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1 \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \quad (45)$$

W czasie trwania procesu B dla dowolnego materiału lub procesu A dla materiału nieściśliwego wydaje się celowe zbadanie zmiany niezmienników  $J_2$  i  $J_3$ .

x/ Układ równań (45) można scałkować posługując się metodą iteracji /patrz rozwiązanie na str. 15/.

Warunki (27) i (28) oraz związki (42) i (43) dają układ równań

$$\left. \begin{aligned} \dot{J}_2 + 4\mu \frac{\gamma^0}{c} \Phi(F) \left[ \frac{\partial f}{\partial J_2} J_2 + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial J_3} J_3 \right] &= 0, \\ \dot{J}_3 + 6\mu \frac{\gamma^0}{c} \Phi(F) \left[ \frac{\partial f}{\partial J_2} J_3 + \frac{\partial f}{\partial J_3} g(J_2, J_3) \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\left. \begin{aligned} \beta_1(J_2, J_3) &= 4\mu \frac{\gamma^0}{c} \Phi(F) \left[ \frac{\partial f}{\partial J_2} J_2 + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial J_3} J_3 \right], \\ \beta_2(J_2, J_3) &= 6\mu \frac{\gamma^0}{c} \Phi(F) \left[ \frac{\partial f}{\partial J_2} J_3 + \frac{\partial f}{\partial J_3} g(J_2, J_3) \right], \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

i zakładając, że funkcje  $\beta_1$  i  $\beta_2$  spełniają nierówności Lipschitza, możemy napisać

$$\left. \begin{aligned} J_2^{(n+1)} &= J_2^{(0)} - \int_0^t \beta_1 [J_2^{(n)}(\xi), J_3^{(n)}(\xi)] d\xi, \\ J_3^{(n+1)} &= J_3^{(0)} - \int_0^t \beta_2 [J_2^{(n)}(\xi), J_3^{(n)}(\xi)] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Zmiana funkcji  $f$  podczas procesu relaksacji typu B dla dowolnego materiału lub typu A dla materiału nieściśliwego jest określona relacjami

$$\left. \begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial J_2} \dot{J}_2 + \frac{\partial f}{\partial J_3} \dot{J}_3, \\ f(J_2, J_3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f [J_2^{(n)}, J_3^{(n)}]. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

5. Dyskusja doboru funkcji  $\Phi(F)$  . Załóżmy, że funkcja  $\Phi(F)$  ma następującą postać

$$\Phi(F) = F^\delta = \left( \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^\delta \quad (50)$$

Wtedy związki fizyczne (11) mogą być zapisane jako

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \gamma \left( \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^\delta \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{\sqrt{J_2}}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} > k, \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} \leq k, \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Kiedy odkształcenia sprężyste są pomijalnie małe w porównaniu z odkształceniami niesprężystymi, wtedy dla jednowymiarowych stanów naprężenia na podstawie (51) otrzymamy relację

$$\dot{\epsilon} = \gamma \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^\delta \quad (52)$$

Relacja ta jest równoważna prawu fizycznemu wprowadzonemu przez G.R. Cowpera, F.S. Symonasa i S.R. Bodnera, [9], [25], [patrz równanie (4)].

W przypadku  $\delta = 1$ , relacje fizyczne (51) są równoważne relacjom A.M. Freudenthala, [27], jeżeli przyjąć oznaczenie  $2\eta = k/\gamma$ .

Natomiast w przypadku jednowymiarowego stanu naprężenia i dla  $\delta = 1$ , związki fizyczne (51) dają relację W.W. Sokolowskiego, [24].

Na podstawie związku (14) w przypadku (5) mamy

$$\sqrt{J_2} = k \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt{I_2^P}}{\gamma} \right)^{\gamma \delta} \right] \quad (53)$$

Wykresy zależności  $\sqrt{J_2}$  od  $\sqrt{I_2^P}$  przedstawionej wzorem (53) są podane dla różnych wartości  $\delta$  i  $\gamma$  na rys. 11. Przypadek szczególny dla  $\delta=1$  jest pokazany dla różnych wartości  $\gamma$ , Rys. 12.

Równanie relaksacyjne (30) w przypadku funkcji  $\Phi(F)$  podanej wzorem (50) może być zapisane następująco

$$\dot{J}_2 + 4\mu \left( \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^{\delta} \sqrt{J_2} = 0 \quad (54)$$

Rozwiązanie równania (54) ma postać<sup>\*/</sup> (35), gdzie

$$J_2^{(n+1)} = J_2^{(0)} - 4\mu \gamma \int_0^t \sqrt{J_2^{(n)}(\xi)} \left[ \frac{\sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}}{k} - 1 \right]^{\delta} d\xi \quad (55)$$

W przypadku szczególnym  $\delta=1$ , na podstawie (54) mamy

$$\dot{J}_2 + \frac{4\mu\gamma}{k} \left( 1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}} \right) J_2 = 0 \quad (56)$$

Rozwiązanie równania (56) (patrz A.M. Freudenthal, [27]) może być wyrażone w następującej zamkniętej postaci

\*/ Na podstawie teorii Lagrange'a o wartości średniej mamy

$$\begin{aligned} & \left[ \sqrt{J_2'} \left( \frac{\sqrt{J_2'}}{k} - 1 \right)^{\delta} - \sqrt{J_2''} \left( \frac{\sqrt{J_2''}}{k} - 1 \right)^{\delta} \right] = \\ & = (J_2' - J_2'') \left\{ \frac{\partial}{\partial J_2} \left[ \sqrt{J_2} \left( \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^{\delta} \right] \right\}_{J_2 = J_2' + \theta (J_2'' - J_2')} \end{aligned}$$

dla  $0 < \theta < 1$ . Ponieważ można łatwo wykazać, że pochodna  $\frac{\partial}{\partial J_2} \left[ \sqrt{J_2} \left( \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^{\delta} \right]$  jest ograniczona, ostatni rezultat bezpośrednio daje nierówność Lipschitza.



$$\left[ \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right] = \left[ \frac{\sqrt{J_2^{(0)}}}{k} - 1 \right] e^{-t/\tau_M}, \quad (57)$$

gdzie  $\tau_M^{-1} = 2\mu\gamma/k$ .

Jako inny wybór funkcji  $\Phi(F)$  rozważmy następującą reprezentację

$$\Phi(F) = \exp F - 1 = \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right) - 1. \quad (58)$$

Relacje fizyczne (11) mogą być obecnie zapisane w postaci

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \gamma \left\{ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right) - 1 \right\} \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{J_2}}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} > k, \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} \leq k, \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Dla jednowymiarowych stanów naprężenia relacje (59) dają prawo

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma \left\{ \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) - 1 \right\}, \quad (60)$$

które, w nieco odmienną postać, było wprowadzone przez L.E. Malvern, [45], patrz wzór (2) I.

Dynamiczny warunek plastyczności (14) obecnie wygląda następująco

$$\sqrt{J_2} = k \left[ 1 + \ln\left(1 + \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma}\right) \right]. \quad (61)$$

Rezultat (61) dla różnych wartości  $\gamma$  jest przedstawiony na Rys. 13.

Równanie relaksacyjne (30) w przypadku funkcji  $\Phi(F)$  przedstawionej wzorem (58) ma postać

$$\dot{J}_2 + 4\mu\gamma \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right) - 1 \right] \sqrt{J_2} = 0, \quad (62)$$

a jego rozwiązanie jest podane<sup>x/</sup> wzorem (35), gdzie

$$J_2^{(n+1)} = J_2^{(0)} - 4\mu\gamma \int_0^t \left\{ \exp\left[\frac{\sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}}{k} - 1\right] - 1 \right\} \sqrt{J_2^{(n)}(\xi)} d\xi. \quad (63)$$

Załóżmy obecnie  $\gamma = 1$  i wprowadźmy następujące funkcje

$$\Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right], \quad (64)$$

$$\Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)^{\alpha}. \quad (65)$$

Wtedy związki fizyczne (11) mogą być zapisane

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} > k, \\ \dot{e}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} \leq k, \\ \dot{e}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{e}_{ii}, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

lub

x/ Łatwo można wykazać, że nierówność Lipschitza jest spełniona dla funkcji

$$\left\{ \sqrt{J_2} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right) - 1 \right] \right\}$$

/patrz nota na str. 23 /.

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^{\alpha} \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{J_2}}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} > k, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \delta_{ij}, & \text{jeżeli } \sqrt{J_2} \leq k, \\ e_{ii} &= \frac{1}{3K} \sigma_{ii}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Jest oczywiste, że wszystkie funkcje  $\Phi(F)$  wprowadzone poprzednio mogą być otrzymane jako szczególne przypadki (64) lub (65).

Rozwiązania równań relaksacyjnych dla funkcji (64) i (65) mają postać (35), gdzie odpowiednio

$$J_2^{(n+1)} = J_2^{(0)} - 4\mu \int_0^t \sqrt{J_2^{(n)}(\xi)} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left\{ \exp \left[ \frac{\sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}}{k} - 1 \right]^{\alpha} - 1 \right\} d\xi, \quad (68)$$

$$J_2^{(n+1)} = J_2^{(0)} - 4\mu \int_0^t \sqrt{J_2^{(n)}(\xi)} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left[ \frac{\sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}}{k} - 1 \right]^{\alpha} d\xi. \quad (69)$$

Aby określić stałe wartości  $A_{\alpha}$  i  $B_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ) posłużymy się danymi doświadczalnymi uzyskanymi przez D.S. Clarka i P.E. Duwez, [19].

5. Określenie stałych. Porównanie założeń teoretycznych z wynikami doświadczeń. Zajmiemy się obecnie szczegółową dyskusją związków fizycznych (11) przy założeniu następujących rodzajów funkcji

$$\Phi(F) = F^{\delta}, \quad (70)$$

$$\Phi(F) = F, \quad (71)$$

$$\Phi(F) = \exp F - 1, \quad (72)$$

$$\Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} [\exp F^{\alpha} - 1], \quad \text{dla } \gamma=1, \quad (73)$$

$$\Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} F^{\alpha}, \quad \text{dla } \gamma=1. \quad (74)$$

Zbadany wprowadzone wyżej funkcje  $\Phi(F)$  w świetle istniejących danych doświadczalnych.

Pierwszym zadaniem będzie określenie w oparciu o wyniki doświadczalne stałych wielkości  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $A_{\alpha}$  i  $B_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ). Wykorzystamy tu omówione wcześniej wyniki eksperymentalne D.S. Clarka i F.E. Duweza, [19]. Oczywiście celem będzie taki dobór stałych, aby w najlepszy sposób opisać zależność granicy plastyczności materiału od prędkości odkształcenia. Musimy jednak pamiętać, że prędkość odkształcenia w zagręgniach uderzeniowych, którym towarzyszy rozprzestrzenianie się fal naprężenia może się zmieniać w bardzo szerokich granicach, od zera do około  $1000 \text{ sek}^{-1}$ . Badania eksperymentalne D.S. Clarka i F.E. Duweza, [19] określiły krzywą  $\sigma - \dot{\epsilon}$  dla miękkiej stali w granicach prędkości odkształcenia od zera do  $200 \text{ sek}^{-1}$  i wskazały, że nie zaobserwowano dalszego wzrostu granicy plastyczności, kiedy prędkość odkształcenia osiąga wartość  $200 \text{ sek}^{-1}$ .

Zależność (14) w przypadku jednowymiarowego stanu naprężenia daje relację

$$\sigma = \sigma_0 \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma} \right) \right]. \quad (75)$$

Ódpowiednio do trzech pierwszych rodzajów funkcji  $\Phi(F)$  (70) - (72), i na podstawie (75) możemy napisać

$$\sigma = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma} \right)^{1/\delta} \right], \quad (76)$$

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma}\right), \quad (77)$$

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 + \ln \left(1 + \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma}\right)\right]. \quad (78)$$

Na Rys. 14 porównano wyniki doświadczalne D.S. Clarka i P.E. Duweza dla miękkiej stali z założeniami prawa potęgowego (76) dla  $\delta=5$ ,  $\gamma=40.4 \text{ sek}^{-1}$  (patrz założenie F.S. Symonds, G.R. Cowpera i S.R. Bodnera, [9], [25]);  $\delta=3$ ,  $\gamma=180 \text{ sek}^{-1}$ ;  $\delta=3$ ,  $\gamma=240 \text{ sek}^{-1}$ .

Analogiczne porównania z prawem liniowym (77) i prawem wykładniczym (78) są podane odpowiednio ~~na~~ na Rys. 15 dla  $\gamma=180-300 \text{ sek}^{-1}$  i Rys. 16 dla  $\gamma=80-240 \text{ sek}^{-1}$ .

W celu określenia stałych  $A_\alpha$  i  $B_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, N$ ) możemy uważać, że wyniki D.S. Clarka i P.E. Duweza, [19], podają  $\dot{\epsilon}$  jako funkcję  $\sigma/\sigma_0 - 1$ . Wtedy możemy napisać odpowiednio dwa układy liniowych równań algebraicznych względem stałych  $A_\alpha$  i  $B_\alpha$ .

$$\sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left[ \exp(X_i)^\alpha - 1 \right] = \dot{\epsilon}(X_i), \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (79)$$

$$\sum_{\alpha=1}^N B_\alpha [X_i]^\alpha = \dot{\epsilon}(X_i), \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (80)$$

gdzie  $X_i = \sigma_i/\sigma_0 - 1$  dla punktów  $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ , natomiast wielkości  $\dot{\epsilon}(X_i)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) są znanymi wartościami z badań doświadczalnych.

Aproksymacje krzywej doświadczalnej  $\sigma - \dot{\epsilon}$  przy pomocy funkcji (73) i (74) dla  $N=5$  są przedstawione na Rys. 17.

Stałe  $A_\alpha$  i  $B_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, 5$ ) mają następujące wartości:

$\alpha$	1	2	3	4	5
$A_\alpha$ (sek <sup>-1</sup> )	217,5615	-654,1172	874,5287	-484,1564	93,5658
$B_\alpha$ (sek <sup>-1</sup> )	337,5338	-1170,5631	3271,7171	-3339,9821	1280,0679

Zakładamy tutaj, że wpływ sprężystej części odkształcenia jest bardzo mały i że krzywa  $\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{I_2^P}$  jest taka sama jak krzywa  $\sigma - \epsilon$ .

W świetle ostatnich badań doświadczalnych pierwsze założenie wydaje się całkowicie uzasadnione. Inny charakter ma założenie drugie. Ponieważ wszystkie badania doświadczalne dotyczące dynamicznego zachowania się materiałów były przeprowadzone przy spełnieniu warunków jednowymiarowego stanu naprężenia, dlatego nie można dyskutować słuszności przyjęcia drugiego założenia, a przyjmujemy je jako podstawową hipotezę. Hipoteza ta pozwoli na wykorzystanie takich samych stałych - zagadnień trójwymiarowego stanu naprężenia opisanych związkami fizykalnymi (11), jakie zostały określone w oparciu o badanie jednowymiarowego stanu naprężenia. Teoretycznie hipoteza ta jest całkowicie uzasadniona - co widać z badania prawa fizykalnego dla problemu jednowymiarowego jako szczególnego przypadku ogólnych relacji (11).

Badania doświadczalne J.D. Campbella i J. DUBY, [14], w których stalowa próbka była poddawana uderzeniowemu obciążeniu ściskającemu, dają średnią krzywą naprężenia w funkcji czasu /Rys. 18/ oraz odpowiadającą średnią<sub>s</sub> krzywą prędkości odkształcenia w funkcji czasu.

Biorąc krzywą naprężenie - czas, Rys. 18, proponujemy wliczyć prędkość odkształcenia jako funkcję czasu zgodnie z wprowadzonymi relacjami

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^{\delta}, \quad (81)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right), \quad (82)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma \left[ \exp \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) - 1 \right], \quad (83)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right], \quad (84)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^{\alpha}. \quad (85)$$

Porównanie teoretycznych rezultatów z wynikami badań doświadczalnych jest podane na Rys. 19 dla potęgowej funkcji  $\Phi$ , (81), na Rys. 20 dla liniowej funkcji  $\Phi$ , (82), na Rys. 21 dla wykładniczej funkcji  $\Phi$ , (83) oraz na Rys. 22 dla relacji fizykalnych (84) i (85).

Wszystkie rezultaty teoretyczne pokazują, że w porównaniu z wynikami badań doświadczalnych maksymalna wartość dla prędkości odkształcenia jest przesunięta w czasie o około  $15 \mu\text{s}$ . Wydaje się prawdopodobne, że zjawisko to da się wytłumaczyć wpływem "efektu czasu opóźnienia". Tym bardziej, że przesunięcie to jest rzędu wielkości czasów opóźnienia zaobserwowanych dla miękkiej stali pod wpływem naprężenia sięgającego  $100000 \text{ lb./in}^2$  ( $7080 \text{ kg/cm}^2$ ), patrz J.E. Johnson, D.S. Wood i D.S. Clark, [34].

Rys. 22 pokazuje bardzo duże różnice pomiędzy wynikami badań doświadczalnych uzyskanymi przez J.D. Campbella i J. Du-

by, [14], i teoretycznymi rezultatami otrzymanymi na podstawie nowych relacji fizykalnych (84) i (85).

Różnice te można wytłumaczyć faktem, że stałe w relacjach fizykalnych zostały określone na podstawie wyników doświadczalnych D.S. Clarka i P.S. Duweza, [19], którzy badali miękką stal o takiej samej granicy plastyczności jak na stal w badaniach J.D. Campbella i J. DUBY, [14], ale o nieco odmiennych pozostałych fizycznych własnościach, np. zawartość węgla jest odpowiednio równa 0,22% i 0,24%.

7. Porównanie charakteru dyspersji. Rozważmy obecnie następujące zagadnienie dla późnieskończonego cienkiego pręta rozciągniętego wzdłuż dodatniej osi  $x$ . W czasie  $t=0$  koniec pręta,  $x=0$ , jest nagle wprowadzony w ruch przez rozciągające uderzenie z prędkością  $v_0$ . Zakładamy, że materiał pręta jest miękką stalą o górnej statycznej granicy plastyczności  $\sigma_0 = 39000 \text{ lb./in.}^2$  ( $2760 \text{ kg/cm}^2$ ) i o module sprężystości  $E = 30.3 \cdot 10^6 \text{ lb./in.}^2$  ( $2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ).

Zagadnienie rozprzestrzeniania się podłużnych fal plastycznych w pręcie, którego materiał charakteryzuje się związkiem fizykalnym

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma \Phi \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right), \quad (86)$$

jest opisane następującym układem równań różniczkowych

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \gamma \Phi \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial \epsilon}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość materiału.



Ze względu na warunki brzegowe czoło fali niesprężystej będzie falą nieciągłości. Biorąc pod uwagę warunki ciągłości kinematycznej i dynamicznej i relację, która powinna być spełniona wzdłuż charakterystyki  $x = a_0 t$  /gdzie  $a_0 = \sqrt{E/\rho}$  oznacza prędkość rozprzestrzenienia się fali/, otrzymamy następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\gamma}{2a_0} \Phi\left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_0} - 1\right), \quad (88)$$

z warunkiem

$$\varepsilon \Big|_{\substack{t=0, \\ x=0}} = \varepsilon_0. \quad (89)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\psi[\varepsilon(x)] = \frac{\gamma}{2a_0} \Phi\left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_0} - 1\right) \quad (90)$$

możemy sprowadzić równanie (88) z warunkiem (89) do nieliniowego równania całkowego Volterry drugiego rodzaju

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \int_0^x \psi[\varepsilon(\xi)] d\xi. \quad (91)$$

Można łatwo sprawdzić, że wszystkie funkcje  $\Phi(F)$ , (70) - (74), spełniają warunek Lipschitza. Dzięki temu rozwiązanie równania całkowego (91) można uzyskać posługując się metodą iteracji

$$\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^{(n)}, \quad (92)$$

gdzie

$$\varepsilon^{(n+1)} = \varepsilon_0 - \int_0^x \psi[\varepsilon^{(n)}(\xi)] d\xi. \quad (93)$$

Obliczając czwartą iterację dla potęgowej funkcji  $\Phi$   
 [patrz (70) dla  $\delta=3$ ] otrzymamy następujący rezultat

$$\epsilon^{(4)} = \epsilon_0 - A_1 \int_0^x [B_1 (C_1 - D_1 \xi + G_1 \xi^2 - H_1 \xi^3 + K_1 \xi^4) - 1]^3 d\xi, \quad (94)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\gamma}{2\alpha_0}, & B_1 &= \frac{E}{\sigma_0}, & C_1 &= \epsilon_0, & D_1 &= \frac{\gamma}{2\alpha_0} \left( \frac{E\epsilon_0}{\sigma_0} - 1 \right)^3, \\ G_1 &= 1,5 A_1 B_1 D_1 \left( \frac{E\epsilon_0}{\sigma_0} - 1 \right)^2, & H_1 &= A_1 B_1^2 D_1^2 \left( \frac{E\epsilon_0}{\sigma_0} - 1 \right), \\ K_1 &= 0,25 A_1 B_1^3 D_1^3. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

W przypadku liniowej funkcji  $\Phi$ , (71), rozwiązanie ma postać zamkniętą

$$\epsilon = \left\{ \epsilon_0 + \frac{\sigma_0}{E} \left[ \exp \left( \frac{E\gamma}{2\alpha_0 \sigma_0} x \right) - 1 \right] \right\} \exp \left( - \frac{E\gamma}{2\alpha_0 \sigma_0} x \right) \quad (96)$$

Czwarta iteracja dla funkcji wykładniczej  $\Phi$ , (72), daje

$$\epsilon^{(4)} = \epsilon_0 + A_2 x - B_2 \int_0^x \exp \left\{ C_2 [D_2 \exp(-G_2 \xi) + \xi] \right\} d\xi, \quad (97)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{\gamma}{2\alpha_0}, & B_2 &= A_2 e^{(E/\sigma_0)(\epsilon_0 - A_2 D_2) - 1}, & C_2 &= A_1 \frac{E}{\sigma_0}, \\ D_2 &= \frac{\sigma_0}{E} e^{(E/\sigma_0)\epsilon_0 - 1} \frac{1}{A_2} \left[ e^{(E/\sigma_0)\epsilon_0 - 1} - 1 \right]^{-1}, \\ G_2 &= \frac{E}{\sigma_0} A_1 \left[ e^{(E/\sigma_0)\epsilon_0 - 1} - 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$



Obliczając trzecie iteracje dla funkcji  $\Phi$ , (73) i (74) mamy odpowiednio

$$\varepsilon^{(3)} = \varepsilon_0 - \frac{1}{2a_0} \int_0^N A_\alpha \left\{ \exp \left[ \frac{E}{\sigma_0} (\varepsilon_0 - M_1 \xi) - 1 \right]^\alpha - 1 \right\} d\xi, \quad (99)$$

$$\varepsilon^{(3)} = \varepsilon_0 - \frac{1}{2a_0} \int_0^N B_\alpha \left[ \frac{E}{\sigma_0} (\varepsilon_0 - M_2 \xi) - 1 \right]^\alpha d\xi, \quad (100)$$

gdzie

$$M_1 = \frac{1}{2a_0} \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left[ \exp \left( \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_0 - 1 \right)^\alpha - 1 \right], \quad (101)$$

$$M_2 = \frac{1}{2a_0} \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha \left( \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_0 - 1 \right)^\alpha. \quad (102)$$

Porównanie efektów dyspersji dla trzech pierwszych funkcji  $\Phi$  [patrz rozwiązania (94), (96) i (97)] z wynikami badań doświadczalnych J.D. Campbella, [12], są przedstawione odpowiednio na Rys. 23 - 25.

Dla nowych praw fizycznych [patrz rozwiązanie (99) i (100)] takie same porównania zrobiono na Rys. 26.

Porównania te pokazują, że zgodnie z teorią zależną od prędkości odkształcenia efekt dyspersji będzie większy kiedy prędkość uderzenia  $v_0$  wzrasta.

Effekt dyspersji dla obydwóch nowych praw fizycznych jest praktycznie taki sam. Należy podkreślić, że w tym przypadku efekt dyspersji jest bardzo wrażliwy na zmianę początkowej wartości odkształcenia  $\varepsilon_0 - \varepsilon_s$  (gdzie  $\varepsilon_s = \sigma_0 / E$ ). Na przykład dla bardzo małej początkowej wartości odkształcenia  $\varepsilon_0 - \varepsilon_s = 0,001285$ , przy  $M_1 = 0,7782 \times 10^{-4}$  i  $M_2 = 0,7505 \times 10^{-4}$

\*/ Porównanie to ma tylko charakter jakościowy.

efekt dyspersji jest bardzo mały (patrz rys. 26), ale już dla  $\varepsilon_0 - \varepsilon_s = 0,001927$ , przy  $M_1 = 0,1783$  i  $M_2 = 0,9900 \times 10^{-3}$ , efekt dyspersji jest bardzo duży.

8. Dyskusja rezultatów. Wprowadzone relacje fizyczne (11) pozwoliły opisać wpływ prędkości odkształcenia na zmianę granicy plastyczności materiału. Analiza doboru różnych funkcji  $\Phi$  pokazała, że zaproponowane reprezentacje funkcji  $\Phi$  (64) i (65) spełniają to zadanie najlepiej.

Zaproponowano ogólną metodę doboru funkcji  $\Phi$  w oparciu o wyniki badań eksperymentalnych. Posługując się tą metodą można określić cały szereg innych funkcji  $\Phi$  równie dobrze opisujących rezultaty doświadczalne.

Należy jednak wyraźnie podkreślić, że przy pomocy relacji fizycznych (11) nie da się opisać wszystkich zjawisk towarzyszących problemom dynamicznym. Przykładem tego może być "efekt czasu opóźnienia". Porównania rezultatów teoretycznych z wynikami badań doświadczalnych wskazało, że relacje fizyczne (11) nie opisują "efektu czasu opóźnienia".

Analizując przeprowadzone porównanie założeń teoretycznych z wynikami badań doświadczalnych łatwo zauważyć, że dzięki wprowadzeniu nieliniowych funkcji  $\Phi$  i odpowiedniego ich doboru można lepiej opisać własności dynamiczne materiałów wraz z ich zależnościami na prędkość odkształcenia. Podobne wnioski otrzymano z porównania efektów dyspersji.

Przyjęcie hipotezy o podobieństwie krzywych  $\sqrt{I_2} - \sqrt{I_2^P}$  i  $\sigma - \dot{\varepsilon}$  umożliwiło określenie stałych fizycznych materiału w relacjach opisujących trójwymiarowe stany naprężenia w oparciu o badania doświadczalne uzyskane dla jednowymiarowego stanu naprężenia.

9. Omówienie uogólnień związków fizycznych dla ciał niejednorodnych. Wprowadzimy obecnie kartezjański układ współrzędnych

$$x = x_k \quad (k=1,2,3)$$

. Ciało niejednorodne charakteryzuje się zmianą własności fizycznych materiału od punktu do punktu.

Prostym uogólnieniem związków fizycznych (66) i (67) na ciała niejednorodne będą następujące relacje

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu(x)} \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha}(x) \left\{ \exp \left[ \frac{\sqrt{J_2}}{k(x)} - 1 \right]^{\alpha} - 1 \right\} \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{J_2}}, & \text{dla } \sqrt{J_2} > k(x), \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu(x)} \delta_{ij}, & \text{dla } \sqrt{J_2} \leq k(x), \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K(x)} \dot{\sigma}_{ii}, \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

lub

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu(x)} \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha}(x) \left[ \frac{\sqrt{J_2}}{k(x)} - 1 \right]^{\alpha} \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{J_2}}, & \text{dla } \sqrt{J_2} > k(x), \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu(x)} \delta_{ij}, & \text{dla } \sqrt{J_2} \leq k(x), \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K(x)} \dot{\sigma}_{ii}, \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

gdzie  $\mu(x)$ ,  $K(x)$ ,  $k(x)$ ,  $A_{\alpha}(x)$  i  $B_{\alpha}(x)$  ( $\alpha=1,2,\dots,N$ ) oznaczają zmienne własności materiału.

Zakładając na przykład  $N=1$ ,  $A_1 = \gamma(x)$  i  $B_1 = \gamma(x)$  otrzymamy odpowiednio relacje

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu(x)} \delta_{ij} + \gamma(x) \left\{ \exp \left[ \frac{\sqrt{J_2}}{k(x)} - 1 \right] - 1 \right\} \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \text{dla } \sqrt{J_2} > k(x), \quad (105)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu(x)} \dot{s}_{ij} + \gamma(x) \left[ \frac{\sqrt{j_2}}{k(x)} - 1 \right] \frac{\dot{s}_{ij}}{\sqrt{j_2}}, \quad \text{dla } \sqrt{j_2} > k(x). \quad (106)$$

Przyjmując dalej oznaczenia

$$\gamma(x)/k(x) = 1/2\eta(x) \quad (107)$$

można związek (106) zapisać następująco

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu(x)} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2\eta(x)} \left[ 1 - \frac{k(x)}{\sqrt{j_2}} \right] \dot{s}_{ij}, \quad \text{dla } \sqrt{j_2} > k(x). \quad (108)$$

Relacje (108) przedstawiają proste uogólnienie związków fizycznych A.M. Freudenthala [ ], na ciała niejednorodne.

Z poprzednich rozważań widać, że uogólnienie związków fizycznych dla materiałów wrażliwych na zmianę prędkości odkształcenia na ciała niejednorodne matematycznie jest proste. Powstaje jednak pytanie w jaki sposób określić praktycznie zmienność stałych dla danego ośrodka. Naturalnie problem ten jest niezmiernie złożony. Czy jest to możliwe dla związków fizycznych (103) lub (104), które posiadają kilka różnych stałych materiałowych w obszarach sprężysto-lepkoplastycznych? Wydaje się oczywiste, że odpowiedź jest negatywna. Dlatego słusznie chyba w przypadku ośrodka niejednorodnego ograniczymy się do badania materiałów, które mogą być opisane relacjami (105) lub (106).

## II. ROZWIĄZANIE PROBLEMU ROZPRZESTRZENIANIA SIĘ FAŁ NAPRĘ- ŻENIA W OŚRODKU JEDNORODNYM WRAŻLIWYM NA ZMIANĘ PRĘDKOŚ- CI ODKSZTAŁCENIA

1. Podstawowe założenia. W rozdziale tym zbadamy szczegółowo zagadnienie rozprzestrzeniania się fal naprężenia w jednorodnym materiale plastycznym wrażliwym na zmianę prędkości odkształcenia. Zanalizujemy cztery rodzaje fal, mianowicie, fale sferyczne, cylindryczne fale promieniowe, cylindryczne fale ścinania i płaskie fale w półprzestrzeni. Wykażemy, że te cztery problemy falowe mogą być sprowadzone do takiego samego zagadnienia matematycznego.

Założymy, że rozważany materiał plastyczny może być opisany związkami fizykalnymi (66) lub (67).

2. Fale sferyczne. Rozważmy nieskończony, sprężysto-lepkoplastyczny ośrodek z wpustką sferyczną o promieniu  $r_0$ . Do powierzchni wpustki sferycznej przyłożone zostaje ciśnienie  $p(t)$  rozłożone równomiernie i zależne od czasu.

Wprowadzając współrzędne sferyczne  $(r, \varphi, \theta)$  mamy

$$u_r = u(r, t), \quad u_\varphi = u_\theta = 0, \quad (109)$$

gdzie  $u_r$ ,  $u_\varphi$ ,  $u_\theta$  są sferycznymi składowymi wektora przemieszczenia.

Założenie sferycznej symetrii prowadzi do następujących składowych tensora odkształcenia

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}. \quad (110)$$

i składowych tensora naprężenia niezależnych od  $\varphi$

$$\sigma_{rr}(r,t), \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r,t) = \sigma_{\theta\theta}(r,t). \quad (111)$$

Oznaczając przez  $v = \partial u / \partial t$  prędkość promieniową i przez  $\rho$  gęstość materiału, otrzymamy następujący układ równań różniczkowych

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{3} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{k\sqrt{3}} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right], \\ &\sqrt{3} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{k\sqrt{3}} - 1 \right)^{\alpha}, \end{aligned} \right. \\ 3K \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi}). \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Charakterystyki układu (112) mają postać

$$\left. \begin{aligned} r &= \text{const}, \\ r &= r_0 \pm at + \text{const}, \quad \text{gdzie} \quad a = \sqrt{\frac{4\mu + 3K}{3\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Wzdłuż tych linii muszą być odpowiednio spełnione następujące warunki

$$\left. \begin{aligned} 3K \left\{ \sqrt{3} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{k\sqrt{3}} - 1 \right)^{\alpha} \right] + 3 \frac{v}{r} \right\} dt + \\ + \left( \frac{3K}{2\mu} - 1 \right) d\sigma_{rr} = \left( \frac{3K}{2\mu} + 2 \right) d\sigma_{\varphi\varphi}, \\ \left\{ \pm \frac{6a}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 4\sqrt{3}\mu \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{k\sqrt{3}} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{v}{r} (4\mu - 6K) \right\} dr - (4\mu + 3K) dv \pm 3a d\sigma_{rr} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (114)$$



lub

$$\begin{aligned}
 & 3K \left\{ \sqrt{3} \sum_{\alpha=1}^{\infty} B_{\alpha} \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{k\sqrt{3}} - 1 \right)^{\alpha} + 3 \frac{v}{r} \right\} dt + \\
 & + \left( \frac{3K}{2\mu} - 1 \right) d\sigma_{rr} = \left( \frac{3K}{2\mu} + 2 \right) d\sigma_{\varphi\varphi}, \\
 & \left\{ \pm \frac{6a}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 4\sqrt{3} \mu \sum_{\alpha=1}^{\infty} B_{\alpha} \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{k\sqrt{3}} - 1 \right)^{\alpha} + \right. \\
 & \left. + \frac{v}{r} (4\mu - 6K) \right\} dr - (4\mu + 3K) dv \pm 3a d\sigma_{rr} = 0.
 \end{aligned} \tag{115}$$

Jeżeli do powierzchni wpustki przyłożymy nagle ciśnienie przewyższające granicę uplastycznienia,  $p_0 > p_y$ , wtedy czoło fali  $r - r_0 - at = 0$  będzie linią silnej nieciągłości, którą nazywamy falą uderzeniową (patrz W. Prager, [57]).

Wzdłuż linii nieciągłości muszą być spełnione dodatkowe warunki, nazywane warunkami ciągłości kinematycznej i dynamicznej.

Dla sferycznej fali uderzeniowej warunki te mają odpowiednio postać (patrz na przykład: H.G. Hopkins, [32])

$$v + a \varepsilon_{rr} = 0, \tag{116}$$

$$\rho a v + \sigma_{rr} = 0. \tag{117}$$

Ponieważ prędkość odkształcenia  $\varepsilon_{rr}$  na fali uderzeniowej jest nieskończenie duża, stąd związki fizyczne dają zależność (patrz [47] i [51])

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} \left( 1 - \frac{2\mu}{\rho a^2} \right). \tag{118}$$

Wykorzystując związek, który jest spełniony wzdłuż charakterystyki  $r - r_0 - at = 0$ , i równania (116) - (118) otrzymamy

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = -\psi(r, \sigma_{rr}) \tag{119}$$

z warunkiem <sup>\*)</sup>

$$\sigma_{rr} \Big|_{\substack{r=r_0 \\ t=0}} = p_0, \quad (120)$$

gdzie

$$\psi(r, \sigma_{rr}) = \frac{1}{r} \sigma_{rr} + \frac{2\mu}{a\sqrt{3}} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{2\mu}{\sqrt{3} \varrho a^2 k} \sigma_{rr} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right], \quad (121)$$

lub

$$\psi(r, \sigma_{rr}) = \frac{1}{r} \sigma_{rr} + \frac{2\mu}{a\sqrt{3}} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{2\mu}{\sqrt{3} \varrho a^2 k} \sigma_{rr} - 1 \right)^{\alpha}. \quad (122)$$

Równanie (119) z warunkiem (120) może być sprowadzone do nieliniowego równania całkowego Volterry drugiego rodzaju

$$\sigma_{rr} = p_0 - \int_{r_0}^r \psi[\xi, \sigma_{rr}(\xi)] d\xi. \quad (123)$$

Ponieważ każda z rozważonych funkcji  $\psi$ , (121) i (122) spełnia warunek Lipschitza, rozwiązanie równania (123) możemy otrzymać posługując się metodą iteracji

$$\sigma_{rr} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{rr}^{(n)}, \quad (124)$$

gdzie

$$\sigma_{rr}^{(n+1)} = p_0 - \int_{r_0}^r \psi[\xi, \sigma_{rr}^{(n)}(\xi)] d\xi. \quad (125)$$

Obliczając trzecią iterację otrzymamy odpowiednio następujące rezultaty

x/ Dla uproszczenia wzorów celowo pominięto w warunku (120) i podobnych następnych warunkach znak minus.

$$\sigma_{rr}^{(3)} = p_0 \left[ 1 - \ln \frac{r}{r_0} \left( 1 + \frac{C_1 r_0}{p_0} - \frac{1}{2} \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{C_2}{p_0} (r - r_0) \right] -$$

$$- M \int_{r_0}^r \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left\{ \exp \left[ R \left( p_0 \left( 1 - \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - C_1 (\xi - r_0) \right) - 1 \right]^\alpha - 1 \right\} d\xi, \quad (126)$$

$$\sigma_{rr}^{(3)} = p_0 \left[ 1 - \ln \frac{r}{r_0} \left( 1 + \frac{C_2 r_0}{p_0} - \frac{1}{2} \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{C_2}{p_0} (r - r_0) \right] -$$

$$- M \int_{r_0}^r \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha \left\{ R \left[ p_0 \left( 1 - \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - C_2 (\xi - r_0) \right] - 1 \right\}^\alpha d\xi, \quad (127)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{2\mu}{a\sqrt{3}}, & R &= \frac{2\mu}{\sqrt{3} \varrho a^2 k}, \\ C_1 &= M \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left[ \exp(R p_0) - 1 \right], & C_2 &= M \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha (R p_0)^\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

$$v^{(3)} = - \frac{1}{\varrho a} \sigma_{rr}^{(3)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(3)} = \sigma_{\theta\theta}^{(3)} = \left( 1 - \frac{2\mu}{\varrho a^2} \right) \sigma_{rr}^{(3)} \quad (129)$$

Rozwiązanie podane wzorami (126), (127) i (129) jest słuszne dla  $r < r^*$ , rys. 27, gdzie  $r^*$  spełnia warunek

$$\sqrt{j_2(r^*)} = k. \quad (130)$$

Zgodnie z rozwiązaniem (126), (127) i (129) warunek ten ma odpowiednio postać

$$R p_0 \left[ 1 - \ln \frac{r^*}{r_0} \left( 1 + \frac{C_1 r_0}{p_0} - \frac{1}{2} \ln \frac{r^*}{r_0} \right) + \frac{C_1}{p_0} (r^* - r_0) \right] -$$

$$- R M \int_{r_0}^{r^*} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left\{ \exp \left[ R \left( p_0 \left( 1 - \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - C_1 (\xi - r_0) \right) - 1 \right]^{\alpha} - 1 \right\} d\xi = 1, \quad (131)$$

$$R p_0 \left[ 1 - \ln \frac{r^*}{r_0} \left( 1 + \frac{C_2 r_0}{p_0} - \frac{1}{2} \ln \frac{r^*}{r_0} \right) + \frac{C_2}{p_0} (r^* - r_0) \right] -$$

$$- R M \int_{r_0}^{r^*} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left\{ R \left[ p_0 \left( 1 - \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - C_2 (\xi - r_0) \right] - 1 \right\}^{\alpha} d\xi = 1. \quad (132)$$

Rozwiązanie na fali uderzeniowej dla  $r > r^*$   
na postać zamkniętą

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{R} \frac{r^*}{r}, \quad v = - \frac{1}{\rho a R} \frac{r^*}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \left( 1 - \frac{2\mu}{\rho a^2} \right) \frac{1}{R} \frac{r^*}{r} \quad (133)$$

Rozważmy obecnie rozwiązanie w obszarach sprężysto-lepko-  
plastycznych (obszary P na Rys. 27 i 28).

Obszar sprężysto-lepko-plastyczny P na Rys. 27 jest  
ograniczony falą nieciągłości  $r - r_0 - at = 0$

i linią prostą  $r = r_0$ . Na fali nieciągłości wielkości

$\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  i  $v$  są określone rozwiązaniem (126),  
(127) i (128), podczas gdy na prostej  $r = r_0$  wielkość  $\sigma_{rr}$   
jest znana z warunku brzegowego.

Oznaczając punkty przecięcia siatki charakterystyk jak  
pokazano na Rys. 29, możemy zastąpić warunki (114) lub  
(115) następującymi równaniami różniczkowymi

$$3K \left\{ \sqrt{3} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{k\sqrt{3}} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] + 3 \frac{v}{r} \right\}_{(l-1, m-1, n)} \Delta t +$$

$$+ \left( \frac{3K}{2\mu} - 1 \right) [\sigma_{rr}(l, m, n) - \sigma_{rr}(l-1, m-1, n)] -$$

$$- \left( \frac{3K}{2\mu} + 2 \right) [\sigma_{\varphi\varphi}(l, m, n) - \sigma_{\varphi\varphi}(l-1, m-1, n)] = 0,$$

$$\left\{ \frac{6a}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 4\sqrt{3} \mu \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{3}k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{v}{r} (4\mu - 6K) \right\}_{(l, m-1, n-1)} \Delta r - (4\mu + 3K) [v(l, m, n) - v(l, m-1, n-1)] +$$

$$+ 3a [\sigma_{rr}(l, m, n) - \sigma_{rr}(l, m-1, n-1)] = 0,$$

$$\left\{ -\frac{6a}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 4\sqrt{3} \mu \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{3}k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{v}{r} (4\mu - 6K) \right\}_{(l-1, m, n+1)} \Delta r - (4\mu + 3K) [v(l, m, n) - v(l-1, m, n+1)] -$$

$$- 3a [\sigma_{rr}(l, m, n) - \sigma_{rr}(l-1, m, n+1)] = 0,$$

lub

$$3K \left\{ \sqrt{3} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{k\sqrt{3}} - 1 \right)^{\alpha} + 3 \frac{v}{r} \right\}_{(l-1, m-1, n)} \Delta t +$$

$$+ \left( \frac{3K}{2\mu} - 1 \right) [\sigma_{rr}(l, m, n) - \sigma_{rr}(l-1, m-1, n)] -$$

$$- \left( \frac{3K}{2\mu} + 2 \right) [\sigma_{\varphi\varphi}(l, m, n) - \sigma_{\varphi\varphi}(l-1, m-1, n)] = 0,$$

$$\left\{ \frac{6\alpha}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 4\sqrt{3} \mu \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{3}K} - 1 \right)^{\alpha} + \right. \\
 \left. + \frac{v}{r} (4\mu - 6K) \right\}_{(l, m-1, n-1)} \Delta r - (4\mu + 3K) [v(l, m, n) - \\
 - v(l, m-1, n-1)] + 3\alpha [\sigma_{rr}(l, m, n) - \sigma_{rr}(l, m-1, n-1)] = 0, \quad (135)$$

$$\left\{ -\frac{6\alpha}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 4\sqrt{3} \mu \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{3}K} - 1 \right)^{\alpha} + \right. \\
 \left. + \frac{v}{r} (4\mu - 6K) \right\}_{(l-1, m, n+1)} \Delta r - (4\mu + 3K) [v(l, m, n) - \\
 - v(l-1, m, n+1)] - 3\alpha [\sigma_{rr}(l, m, n) - \sigma_{rr}(l-1, m, n+1)] = 0.$$

W każdym punkcie siatki charakterystyk mamy układ trzech liniowych równań algebraicznych względem trzech nieznanych wielkości  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  i  $v$ .

Metoda różnic skończonych może być zastępowana również do obszaru sprężysto-lepko-plastycznego w przypadku pokazanym na Rys. 28. Obecnie w punkcie  $t = t_1$  na linii  $r = r_0$  znamy wielkości  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  i  $v$  z rozwiązania sprężystego w obszarze  $E$ .

Posługując się warunkiem  $\sqrt{J_2} = k$  można określić w sposób przybliżony granicę  $\Gamma$  oddzielającą obszar sprężysto-lepko-plastyczny od obszaru sprężystego.

3. Cylindryczne fale promieniowe. Rozważmy nieskończoną wpustkę cylindryczną o promieniu  $r_0$  w nieskończonym ośrodku sprężysto-lepko-plastycznym. Powierzchnia wpustki poddana jest działaniu promieniowego ciśnienia  $p(t)$ , zmiennego w czasie, niezależnego od  $\psi$  i  $z$ .

W układzie współrzędnych cylindrycznych  $(r, \psi, z)$  mamy

$$u_r = u(r, t), \quad u_\psi = u_z = 0 \quad (136)$$

gdzie  $u_r, u_\psi, u_z$  są cylindrycznymi składowymi wektora przemieszczenia.

Składowe tensora odkształcenia i składowe tensora naprężenia są odpowiednio równe

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_{\psi\psi} = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_{zz} = 0, \quad (137)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r, t), \quad \sigma_{\psi\psi} = \sigma_{\psi\psi}(r, t), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r, t). \quad (138)$$

Oznaczając przez  $v = \partial u / \partial t$  prędkość promieniową otrzymamy następujący układ równań różniczkowych opisujących zagadnienie w obszarach niesprężystych

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\psi\psi}}{r} = \rho \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{rr} - \sigma_{\psi\psi}) + \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\psi\psi}}{\sqrt{J_2}}, \\ \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)^\alpha \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\psi\psi}}{\sqrt{J_2}}, \end{array} \right.$$

$$-\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \quad (139)$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] \frac{2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{J_2}}, \\ & \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)^{\alpha} \frac{2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{J_2}}, \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = \frac{1}{3K} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}),$$

gdzie

$$J_2 = \frac{1}{3} [(\sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2) - (\sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{rr})] \quad (140)$$

Charakterystykami układu (139) są linie

$$r = \text{const},$$

$$r = r_0 \pm at + \text{const},$$

(141)

gdzie  $r = \text{const}$  jest charakterystyką podwójną.

Wzdłuż tych linii są odpowiednio spełnione następujące warunki

$$d\sigma_{\varphi\varphi} - d\sigma_{zz} + 2\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{J_2}} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) - \frac{v}{r} \right\} dt = 0,$$

$$\left(1 - \frac{3K}{2\mu}\right) d\sigma_{rr} + \left(1 + \frac{3K}{2\mu}\right) d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{zz} -$$

$$- 3K \left\{ \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{J_2}} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] + 2\frac{v}{r} \right\} dt = 0, \quad (142)$$





oraz zależności (144) możemy sprowadzić zagadnienie do takiego samego równania całkowego jak w przypadku sferycznym patrz równanie (123), gdzie obecnie mamy odpowiednio

$$\psi(r, \sigma_{rr}) = \frac{1}{2r} \sigma_{rr} + M \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} [\exp(R \sigma_{rr} - 1)^{\alpha} - 1], \quad (145)$$

$$\psi(r, \sigma_{rr}) = \frac{1}{2r} \sigma_{rr} + M \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} (R \sigma_{rr} - 1)^{\alpha}. \quad (146)$$

Obliczając trzecią iterację dostajemy następujące rezultaty

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(3)} = p_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{r}{r_0} \left( 1 + \frac{C_1 r_0}{p_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{C_2}{2p_0} (r - r_0) \right] - \\ - M \int_{r_0}^r \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left\{ \exp \left[ R \left( p_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - C_1 (\xi - r_0) \right) - 1 \right]^{\alpha} - 1 \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (147)$$

lub

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(3)} = p_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{r}{r_0} \left( 1 + \frac{C_2 r_0}{p_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{C_2}{2p_0} (r - r_0) \right] - \\ - M \int_{r_0}^r \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left\{ R \left[ p_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - C_2 (\xi - r_0) \right] - 1 \right\}^{\alpha} d\xi, \end{aligned} \quad (148)$$

oraz

$$v^{(3)} = -\frac{1}{\rho a} \sigma_{rr}^{(3)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)} = \left( 1 - \frac{2\nu}{\rho a^2} \right) \sigma_{rr}^{(3)}. \quad (149)$$

Warunek dla  $r^*$  (patrz Rys. 27) jest

$$R p_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{r^*}{r_0} \left( 1 + \frac{C_1 r_0}{p_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{r^*}{r_0} \right) + \frac{C_2}{2 p_0} (r^* - r_0) \right] - \\ - RM \int_{r_0}^{r^*} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left\{ \exp \left[ R \left( p_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - C_1 (\xi - r_0) \right) - 1 \right]^{\alpha} - 1 \right\} d\xi = 1, \quad (150)$$

lub

$$R p_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{r^*}{r_0} \left( 1 + \frac{C_2 r_0}{p_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{r^*}{r_0} \right) + \frac{C_1}{2 p_0} (r^* - r_0) \right] - \\ - RM \int_{r_0}^{r^*} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left\{ R \left[ p_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - C_2 (\xi - r_0) \right] - 1 \right\}^{\alpha} d\xi = 1. \quad (151)$$

Rozwiązanie na cylindrycznej fali uderzeniowej dla  $r > r^*$  ma następującą postać zamkniętą

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{r^*}{r}}, \quad \sigma_{\psi\psi} = \sigma_{zz} = \left( 1 - \frac{2\mu}{\rho a^2} \right) \frac{1}{R} \sqrt{\frac{r^*}{r}}, \quad v = -\frac{1}{\rho a R} \sqrt{\frac{r^*}{r}}. \quad (152)$$

Zagędnienie w obszarach niesprężystych jest takie samo jak w przypadku sferycznym. Obecnie równania różnicowe są (patrz Rys. 29)

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \sigma_{\psi\psi} (l, m, n) - \sigma_{\psi\psi} (l-1, m-1, n) \right] - \left[ \sigma_{zz} (l, m, n) - \sigma_{zz} (l-1, m-1, n) \right] + \\ & + 2\mu \left\{ \frac{\sigma_{\psi\psi} - \sigma_{zz}}{V \sqrt{\frac{r^*}{r}}} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{V \sqrt{\frac{r^*}{r}}}{K} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] - \frac{v}{r} \right\}_{(l-1, m-1, n)} \Delta t = 0, \\ & \left( 1 - \frac{3K}{2\mu} \right) \left[ \sigma_{rr} (l, m, n) - \sigma_{rr} (l-1, m-1, n) \right] + \left( 1 + \frac{3K}{2\mu} \right) \left[ \sigma_{\psi\psi} (l, m, n) - \right. \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_{\varphi\varphi}(l-1, m-1, n) + [\sigma_{zz}(l, m, n) - \sigma_{zz}(l-1, m-1, n)] - \\
 & -3K \left\{ \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{j_2}} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{j_2}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] + 2\frac{v}{r} \right\}_{(l-1, m-1, n)} \Delta t = 0, \\
 & \left\{ \frac{2(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})}{\sqrt{j_2}} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{j_2}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] + \frac{3a}{\mu} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \right. \\
 & \left. + \frac{v}{r} \left( 2 - \frac{3K}{\mu} \right) \right\}_{(l, m-1, n-1)} \Delta r + \frac{3a}{\mu} [\sigma_{rr}(l, m, n) - \sigma_{rr}(l, m-1, n-1)] - \\
 & - \frac{4\mu + 3K}{\mu} [v(l, m, n) - v(l, m-1, n-1)] = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{2(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})}{\sqrt{j_2}} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{j_2}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] - \frac{3a}{\mu} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \right. \\
 & \left. + \frac{v}{r} \left( 2 - \frac{3K}{\mu} \right) \right\}_{(l-1, m, n+1)} \Delta r - \frac{3a}{\mu} [\sigma_{rr}(l, m, n) - \sigma_{rr}(l-1, m, n+1)] - \\
 & - \frac{4\mu + 3K}{\mu} [v(l, m, n) - v(l-1, m, n+1)] = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\sigma_{\varphi\varphi}(l, m, n) - \sigma_{\varphi\varphi}(l-1, m-1, n)] - [\sigma_{zz}(l, m, n) - \sigma_{zz}(l-1, m-1, n)] + \\
 & + 2\mu \left\{ \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{\sqrt{j_2}} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sqrt{j_2}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - \frac{v}{r} \right\}_{(l-1, m-1, n)} \Delta t = 0, \\
 & \left( 1 - \frac{3K}{2\mu} \right) [\sigma_{rr}(l, m, n) - \sigma_{rr}(l-1, m-1, n)] + \left( 1 + \frac{3K}{2\mu} \right) [\sigma_{\varphi\varphi}(l, m, n) - \\
 & - \sigma_{\varphi\varphi}(l-1, m-1, n)] + [\sigma_{zz}(l, m, n) - \sigma_{zz}(l-1, m-1, n)] - \\
 & - 3K \left\{ \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{j_2}} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sqrt{j_2}}{k} - 1 \right)^{\alpha} + 2\frac{v}{r} \right\}_{(l-1, m-1, n)} \Delta t = 0,
 \end{aligned}$$

(15)

$$\left\{ \frac{2(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})}{\sqrt{j_2}} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sqrt{j_2}}{k} - 1 \right)^{\alpha} + \frac{3a}{\mu} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \right. \\ \left. + \frac{v}{r} \left( 2 - \frac{3K}{\mu} \right) \right\}_{(l,m-1,n-1)} \Delta r + \frac{3a}{\mu} [\sigma_{rr}(l,m,n) - \sigma_{rr}(l,m-1,n-1)] - \\ - \frac{4\mu + 3K}{\mu} [v(l,m,n) - v(l,m-1,n-1)] = 0,$$

$$\left\{ \frac{2(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})}{\sqrt{j_2}} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\sqrt{j_2}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - \frac{3a}{\mu} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \right. \\ \left. + \frac{v}{r} \left( 2 - \frac{3K}{\mu} \right) \right\}_{(l-1,m,n+1)} \Delta r - \frac{3a}{\mu} [\sigma_{rr}(l,m,n) - \sigma_{rr}(l-1,m,n+1)] - \\ - \frac{4\mu + 3K}{\mu} [v(l,m,n) - v(l-1,m,n+1)] = 0.$$

(154)

**4. Cylindryczne fala ściskania.** Założmy obecnie, że powierzchniowe siły tnące  $p(t)$  są równomiernie rozłożone na powierzchni cylindrycznej wpustki o promieniu  $r_0$  w nieskończonym ośrodku sprężysto-lepko-plastycznym.

W układzie współrzędnych walcowych  $(r, \varphi, z)$  mamy

$$u_{\varphi} = u(r, t), \quad u_r = u_z = 0. \quad (155)$$

Składowa tensora naprężenia jest

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}(r, t), \quad (156)$$

podczas gdy wszystkie pozostałe składowe są równe zeru.

Oznaczając przez  $v = \partial u / \partial t$  prędkość otrzymany następujący układ równań różniczkowych

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} + \frac{2\tau_{ry}}{r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial t} + \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\tau_{ry}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right], \\ 2 \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\tau_{ry}}{k} - 1 \right)^{\alpha}. \end{array} \right. \quad (157)$$

Charakterystykami układu (157) są linie

$$r = r_0 \pm at + \text{const}, \quad \text{gdzie} \quad a = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (158)$$

wzdłuż których mamy spełnione relacje

$$\pm \frac{2a}{r\mu} \tau_{ry} dr + \frac{v}{r} dr + 2 \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\tau_{ry}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] dr -$$

$$- dv \pm \frac{d\tau_{ry}}{\mu} a = 0 \quad (159)$$

lub

$$\pm \frac{2a}{r\mu} \tau_{ry} dr + \frac{v}{r} dr + 2 \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\tau_{ry}}{k} - 1 \right)^{\alpha} dr - dv \pm \frac{d\tau_{ry}}{\mu} a = 0. \quad (160)$$

Wykorzystując warunek ciągłości dynamicznej

$$\rho v + \tau_{ry} = 0 \quad (161)$$

oraz pierwszą relację (159) lub (160) otrzymamy na ścinającej fali uderzeniowej równanie

$$\tau_{r\varphi} = p_0 - \int_{r_0}^r \psi \left[ \xi, \tau_{r\varphi}(\xi) \right] d\xi, \quad (162)$$

gdzie odpowiednio

$$\psi(r, \tau_{r\varphi}) = \frac{1}{2r} \tau_{r\varphi} + \varphi a \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\tau_{r\varphi}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right], \quad (163)$$

$$\psi(r, \tau_{r\varphi}) = \frac{1}{2r} \tau_{r\varphi} + \varphi a \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\tau_{r\varphi}}{k} - 1 \right)^{\alpha}. \quad (164)$$

Obliczając trzecią iterację dostajemy

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}^{(3)} = & p_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{r}{r_0} \left( 1 + \frac{C_1' r_0}{p_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{C_1'}{2 p_0} (r - r_0) \right] - \\ & - \varphi a \int_{r_0}^r \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left\{ \exp \left[ \frac{p_0}{k} \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - \frac{C_1'}{k} (\xi - r_0) - 1 \right]^{\alpha} - 1 \right\} d\xi \end{aligned} \quad (165)$$

lub

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}^{(3)} = & p_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{r}{r_0} \left( 1 - \frac{C_2' r_0}{p_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{C_2'}{2 p_0} (r - r_0) \right] - \\ & - \varphi a \int_{r_0}^r \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left\{ \frac{p_0}{k} \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - \frac{C_2'}{k} (\xi - r_0) - 1 \right\}^{\alpha} d\xi, \end{aligned} \quad (166)$$

gdzie

$$C_1' = \varphi a \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{p_0}{k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right], \quad C_2' = \varphi a \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{p_0}{k} - 1 \right)^{\alpha} \quad (167)$$

oraz

$$v^{(3)} = - \frac{1}{\varphi a} \tau_{r\varphi}^{(3)}. \quad (168)$$

Warunek dla  $r^*$  ma odpowiednio postać

$$\frac{p_0}{k} \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{r^*}{r_0} \left( 1 + \frac{C_1' r_0}{p_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{r^*}{r_0} \right) + \frac{C_2'}{2 p_0} (r^* - r_0) \right] -$$

$$- \rho a \int_{r_0}^{r^*} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left\{ \exp \left[ \frac{p_0}{k} \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - \frac{C_1'}{k} (\xi - r_0) - 1 \right]^{\alpha} - 1 \right\} d\xi = 1, \quad (169)$$

lub

$$\frac{p_0}{k} \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{r^*}{r_0} \left( 1 + \frac{C_1' r_0}{p_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{r^*}{r_0} \right) + \frac{C_2'}{2 p_0} (r^* - r_0) \right] -$$

$$- \rho a \int_{r_0}^{r^*} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left\{ \frac{p_0}{k} \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{r_0} \right) - \frac{C_1'}{k} (\xi - r_0) - 1 \right\}^{\alpha} d\xi = 1. \quad (170)$$

Rozwiązanie na uderzeniowej fali ścinającej dla  $r > r^*$

jest

$$\tau_{r\varphi} = k \sqrt{\frac{r^*}{r}}, \quad v = -\frac{k}{\rho a} \sqrt{\frac{r^*}{r}}. \quad (171)$$

W obszarach niesprężystych możemy zastosować metodę różnic skończonych wzdłuż charakterystyk (patrz rys. 30), wykorzystując równania różnicowe

$$\left\{ \frac{2a}{r\mu} \tau_{r\varphi} + \frac{v}{r} + 2 \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\tau_{r\varphi}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] \right\}_{(l,m-1)} \Delta r -$$

$$- [v(l,m) - v(l,m-1)] + \frac{a}{\mu} [\tau_{r\varphi}(l,m) - \tau_{r\varphi}(l,m-1)] = 0,$$

$$\left\{ -\frac{2a}{r\mu} \tau_{r\varphi} + \frac{v}{r} + 2 \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\tau_{r\varphi}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] \right\}_{(l-1,m)} \Delta r -$$

$$- [v(l,m) - v(l-1,m)] - \frac{a}{\mu} [\tau_{r\varphi}(l,m) - \tau_{r\varphi}(l-1,m)] = 0. \quad (172)$$



lub

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{2a}{r\mu} \tau_{r\varphi} + \frac{v}{r} + 2 \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\tau_{r\varphi}}{k} - 1 \right)^{\alpha} \right\}_{(l, m-1)} \Delta r - \\ & - [v(l, m) - v(l, m-1)] + \frac{a}{\mu} [\tau_{r\varphi}(l, m) - \tau_{r\varphi}(l, m-1)] = 0, \\ & \left\{ -\frac{2a}{r\mu} \tau_{r\varphi} + \frac{v}{r} + 2 \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\tau_{r\varphi}}{k} - 1 \right)^{\alpha} \right\}_{(l-1, m)} \Delta r - \\ & - [v(l, m) - v(l-1, m)] - \frac{a}{\mu} [\tau_{r\varphi}(l, m) - \tau_{r\varphi}(l-1, m)] = 0. \end{aligned} \right\} (173)$$

5. Fale płaskie w półprzestrzeni. Rozważmy w układzie współrzędnych kartezjańskich  $(x, y, z)$  ośrodek sprężysto-  
lepko-plastyczny zajmujący półprzestrzeń  $x \geq 0$ .  
Załóżmy, że płaszczyzna  $x = 0$  jest poddana działaniu  
równomiernie rozłożonego ciśnienia  $p(t)$ . Pole przemieszczenia określone jest składowymi

$$u_x = u(x, t), \quad u_y = u_z = 0. \quad (174)$$

Tensor odkształcenia ma tylko jedną składową różną od zera

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (175)$$

Naprężenia normalne są niezależne od  $y$  i  $z$

$$\sigma_{xx}(x, t), \quad \sigma_{yy}(x, t) = \sigma_{zz}(x, t), \quad (176)$$

podczas gdy naprężenia ścinające są równe zero.

W obszarach niesprężystych zagadnienie jest opisane następującym układem równań różniczkowych

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \\ \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \left\{ \begin{aligned} \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left\{ \exp \left[ \frac{3(\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx})}{2\sqrt{3}k} - 1 \right]^{\alpha} - 1 \right\}, \\ \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left\{ \frac{3(\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx})}{2\sqrt{3}k} - 1 \right\}^{\alpha}, \end{aligned} \right\} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

gdzie  $a = \sqrt{\frac{3K + 4\mu}{3\rho}}$

Charakterystyki układu (177) są określone równaniami

$$x = \text{const}, \quad x = \pm at + \text{const}, \quad (178)$$

wzdłuż których odpowiednio muszą być spełnione warunki

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] dt + d\sigma_{xx} - \rho a^2 d\varepsilon_{xx} &= 0, \\ \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right] dt + d\sigma_{xx} \mp \rho a dv &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

lub

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1 \right)^{\alpha} dt + d\sigma_{xx} - \rho a^2 d\varepsilon_{xx} &= 0, \\ \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1 \right)^{\alpha} dt + d\sigma_{xx} \mp \rho a dv &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

Biorąc pod uwagę warunek ciągłości kinematycznej

$$\varepsilon_{xx} + \frac{1}{a} v = 0, \quad (181)$$

warunk<sup>e</sup> ciągłości dynamicznej

$$\rho a v + \sigma_{xx} = 0 \quad (182)$$

i relację, która jest spełniona wzdłuż charakterystyki

$$x = at \quad \left[ \text{patrz ostatni związek (179) lub (180)} \right],$$

otrzymamy na płaskiej fali uderzeniowej następujące równanie całkowe

$$\sigma_{xx} = p_0 - \int_0^x \psi[\xi, \sigma_{xx}(\xi)] d\xi, \quad (183)$$

gdzie

$$\psi(x, \sigma_{xx}) = M^* \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp(R^* \sigma_{xx} - 1)^{\alpha} - 1 \right], \quad (184)$$

lub

$$\psi(x, \sigma_{xx}) = M^* \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} (R^* \sigma_{xx} - 1)^{\alpha} \quad (185)$$

$$M^* = \frac{2\mu\sqrt{3}}{3a}, \quad R^* = \frac{\sqrt{3}}{2k} \left( 1 - \frac{k}{\rho a^2} \right). \quad (186)$$

Posługując się metodą iteracji możemy napisać rozwiązanie równania (183) w postaci

$$\sigma_{xx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{xx}^{(n)}, \quad (187)$$

gdzie

$$\sigma_{xx}^{(n+1)} = p_0 - \int_0^{x^*} \psi \left[ \xi, \sigma_{xx}^{(n)}(\xi) \right] d\xi \quad (188)$$

Obliczając trzecią iterację otrzymamy rezultat

$$\sigma_{xx}^{(3)} = p_0 - M^* \int_0^{x^*} \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left\{ \exp \left[ R^* p_0 \left( 1 - \frac{C_1^*}{p_0} \xi \right) - 1 \right]^\alpha - 1 \right\} d\xi, \quad (189)$$

lub

$$\sigma_{xx}^{(3)} = p_0 - M^* \int_0^{x^*} \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha \left[ R^* p_0 \left( 1 - \frac{C_2^*}{p_0} \xi \right) - 1 \right]^\alpha d\xi, \quad (190)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} C_1^* &= M^* \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left[ \exp(R^* p_0 - 1)^\alpha - 1 \right], \\ C_2^* &= M^* \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha (R^* p_0 - 1)^\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

i

$$v^{(3)} = -\frac{1}{\rho a} \sigma_{xx}^{(3)}, \quad \epsilon_{xx}^{(3)} = \frac{1}{\rho a^2} \sigma_{xx}^{(3)} \quad (192)$$

Warunek dla  $x^*$  (patrz Rys. 27) ma odpowiednio postać

$$R^* \left\{ p_0 - M^* \int_0^{x^*} \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left\{ \exp \left[ R^* p_0 \left( 1 - \frac{C_1^*}{p_0} \xi \right) - 1 \right]^\alpha - 1 \right\} d\xi \right\} = 1, \quad (193)$$

lub

$$R^* \left\{ p_0 - M^* \int_0^{x^*} \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha \left[ R^* p_0 \left( 1 - \frac{C_2^*}{p_0} \xi \right) - 1 \right]^\alpha d\xi \right\} = 1. \quad (194)$$

Rozwiązanie na płaskiej fali uderzeniowej dla  $x > x^*$  jest

$$\sigma_{xx} = \frac{2k}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{K}{\varrho a^2}\right)^{-1}, \quad v = -\frac{2k}{\sqrt{3} \varrho a} \left(1 - \frac{K}{\varrho a^2}\right)^{-1}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{2k}{\sqrt{3} \varrho a^2} \left(1 - \frac{K}{\varrho a^2}\right)^{-1}. \quad (195)$$

Oznaczając punkty przecięcia siatki charakterystyk, jak pokazano na Rys. 29, możemy napisać równania różnicowe

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] \right\}_{(l, m-1, n-1)} \Delta t + \\ & + [\sigma_{xx}(l, m, n) - \sigma_{xx}(l, m-1, n-1)] - \varrho a [v(l, m, n) - v(l, m-1, n-1)] = 0, \\ & \left\{ \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] \right\}_{(l-1, m, n+1)} \Delta t + \\ & + [\sigma_{xx}(l, m, n) - \sigma_{xx}(l-1, m, n+1)] + \varrho a [v(l, m, n) - v(l-1, m, n+1)] = 0, \\ & \left\{ \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1\right)^{\alpha} - 1 \right] \right\}_{(l-1, m-1, n)} \Delta t + \\ & + [\sigma_{xx}(l, m, n) - \sigma_{xx}(l-1, m-1, n)] - \varrho a^2 [\varepsilon_{xx}(l, m, n) - \varepsilon_{xx}(l-1, m-1, n)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

lub

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1 \right)^{\alpha} \right\}_{(l, m-1, n-1)} \Delta t + \\ & + [\sigma_{xx}(l, m, n) - \sigma_{xx}(l, m-1, n-1)] - \varrho a [v(l, m, n) - v(l, m-1, n-1)] = 0, \\ & \left\{ \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1 \right)^{\alpha} \right\}_{(l-1, m, n+1)} \Delta t + \end{aligned} \right\}$$

$$+ [\sigma_{xx}(l, m, n) - \sigma_{xx}(l-1, m, n+1)] + \rho a [v(l, m, n) - v(l-1, m, n+1)] = 0,$$

$$\left\{ \frac{4\mu\sqrt{3}}{3} \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left( \frac{\beta}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_{xx} - K\varepsilon_{xx}}{k} - 1 \right)^{\alpha} \right\}_{(l-1, m-1, n)} \Delta t +$$

$$+ [\sigma_{xx}(l, m, n) - \sigma_{xx}(l-1, m-1, n)] - \rho a^2 [\varepsilon_{xx}(l, m, n) - \varepsilon_{xx}(l-1, m-1, n)] = 0.$$

} (197)

**6. Rozwiązanie w obszarach sprężystych.** Przez wprowadzenie nowych współrzędnych

$$\xi - 1 = \frac{a}{2r_0} \left( t + \frac{r-r_0}{a} \right),$$

$$\eta = \frac{a}{2r_0} \left( t - \frac{r-r_0}{a} \right)$$

} (198)

dla fal sferycznych, cylindrycznych fal promieniowych i cylindrycznych fal ścinania oraz nowych współrzędnych

$$\xi - \frac{2x_0}{a} = t + \frac{x}{a},$$

$$\eta = t - \frac{x}{a}$$

} (199)

(gdzie  $x_0 = \text{const}$ ) dla fal płaskich, równanie ruchu w obszarach sprężystych można zapisać w postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\Delta}{\xi - \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\delta}{(\xi - \eta)^2} u.$$

(200)

Rozważane obszary sprężyste są pokazane w płaszczyźnie  $(\xi, \eta)$  na Rys. 31. Równanie (200) jest słuszne w obszarach  $E'_1$  i  $E'_2$ .

Zanalizujemy najpierw zagadnienie dla obszaru  $E'_1$ .

Obszar ten jest ograniczony charakterystyką  $\eta = 0$  i krzywą  $\xi = \psi(\eta)$ . Na charakterystyce  $\eta = 0$  mamy warunek  $u = 0$ , podczas gdy na krzywej  $\xi = \psi(\eta)$  w przypadku fal sferycznych, cylindrycznych fal ścinania i fal płaskich musi być spełniony warunek

$$c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + c_2 u = c_3. \quad (201)$$

W przypadku cylindrycznych fal promieniowych warunek na krzywej  $\xi = \psi(\eta)$  jest nieliniowy.

Stąd widać, że dla fal sferycznych, fal ścinania i fal płaskich problem w obszarze  $E'_1$  został sprowadzony do uogólnionego zagadnienia Picarda (patrz G. Majcher, [44]).

Rozwiązanie uogólnionego zagadnienia Picarda dla obszaru  $E'_1$  można wyrazić w postaci

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\eta R(\xi, \eta; \xi_0, z) \Omega(z) dz, \quad (202)$$

gdzie  $R(\xi, \eta; \xi_0, z)$  oznacza funkcję Riemanna dla równania (200) i  $\xi_0 = \text{const}$ .

Jest oczywiste, że rozwiązanie (202) spełnia warunek  $u = 0$  na charakterystyce  $\eta = 0$ . Funkcję  $\Omega(z)$  należy określić tak aby był spełniony warunek (201), co prowadzi do równania Volterry drugiego rodzaju

$$\Omega(\eta) = \int_0^\eta N(\eta, z) \Omega(z) dz + K(\eta), \quad (203)$$

gdzie

$$N(\eta, z) = \frac{R'_z[\psi(\eta), \eta; \xi_0, z] - R'_\eta[\psi(\eta), \eta; \xi_0, z] - \frac{c_2}{c_1} R[\psi(\eta), \eta; \xi_0, z]}{R[\psi(\eta), \eta; \xi_0, \eta]},$$

$$K(\eta) = - \frac{c_3/c_1}{R[\psi(\eta), \eta; \xi_0, \eta]}.$$

Rozwiązanie równania całkowego (203) może być zapisane następująco

$$\Omega(\eta) = \int_0^\eta \mathcal{R}(\eta, z) K(z) dz + K(\eta),$$

gdzie  $\mathcal{R}(\eta, z)$  jest jądrem rozwiązującym dla równania (203) i jest sumą szeregu

$$\mathcal{R}(\eta, z) = N(\eta, z) + \sum_{n=1}^{\infty} N_n(\eta, z).$$

Funkcja Riemanna dla równania (200) ma postać zamkniętą (patrz R. Courant, [24] i E.T. Copson, [21])

$$R(\xi, \eta; \alpha, z) = (\xi - \eta)^\omega (\alpha - \eta)^\beta (\xi - z)^\beta F(-\beta, -\beta; 1, \xi),$$

gdzie  $F(-\beta, -\beta; 1, \xi)$  jest funkcją hipergeometryczną i wyrażona jest wzorem



$$F(-\beta, -\beta; 1, \xi) = 1 + \beta^2 \xi + \frac{\beta^2(1-\beta)^2}{2 \cdot 2!} \xi^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(-\beta+n) \Gamma(-\beta+n)}{n! n!} \xi^n, \quad (208)$$

i

$$\xi = \frac{(\xi-\delta)(\eta-z)}{(\xi-z)(\eta-\delta)}. \quad (209)$$

Stałe  $\Delta, \delta, \omega$  i  $\beta$  i współczynniki  $c_1, c_2, c_3$  mają wartości <sup>\*/</sup>

Rodzaj fali	$\Delta$	$\delta$	$\omega$	$\beta$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
Fala sferyczna	1	-2	-1	-2	$\frac{E}{2r_0(1+\nu)\sqrt{3}}$	$\frac{E}{r_0(1+\nu)\sqrt{3}}$ $\frac{1}{\psi(\eta)-\eta}$	k
Fala ściska- nia	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{\mu}{2r_0}$	$\frac{\mu}{r_0}$ $\frac{1}{\psi(\eta)-\eta}$	k
Fala płaska	0	0	0	0	$\frac{2\mu}{a\sqrt{3}}$	0	k

Zagadnienie fali płaskiej może być rozważane oddzielnie, w tym przypadku funkcja Riemanna  $R(\xi, \eta; \delta, z) = 1$  i rozwiązanie jest trywialne.

Natomiast przypadek cylindrycznej fali promieniowej w obszarze  $E'_1$  może być rozwiązany metodą różnic skończonych wzdłuż charakterystyk.

W obszarze  $E'_2$  (rys. 31) problem dla wszystkich czterech rodzajów fal może być sprowadzony do podobnego uogólnionego zagadnienia Picarda. Jednak w tym obszarze wygodniej

\*/ Można łatwo wykazać, że współczynniki  $c_1, c_2$  i  $c_3$  są ciągłymi funkcjami w rozważanej dziedzinie zmiennej  $\eta$ .

jest posłużyć się dobrze znanymi metodami transformacji Fouriera (patrz na przykład A. Kromm, [40], i H.G. Hopkins, [33]).

7. Przykłady liczbowe. Zbadamy charakter zmiany krzywych  $\sqrt{j_2}/k - r/r_0$  na czole fali sferycznej dla różnych początkowych wartości ciśnienia  $p_0$  i dla różnych funkcji  $\Phi(F)$ , (64) i (65).

Przyjmijmy następujące dane dla miękkiej stali:

Górna granica plast. $\sigma_0$	Moduł Younga $E$	Współczynnik Poissona $\nu$	Gęstość materiału $\rho$
2760 $\text{kg/cm}^2$	$2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$	0,29	$7,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg cm}^{-4} \cdot \text{sec}^2$

Stałe  $A_\alpha$  i  $B_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ ) były określone poprzednio (patrz Rozdz. I str. 29)

Krzywe  $\sqrt{j_2}/k - r/r_0$  dla funkcji  $\Phi(F)$  danej wzorem (64) są przedstawione na Rys. 32, a dla funkcji  $\Phi(F)$  danej wzorem (65) na Rys. 33.

Wykorzystując warunki (131) i (132) możemy narysować dwie różne krzywe  $r^*/r_0 - p_0/p_y$ , Rys. 34.

Rezultaty przedstawione na Rys. 32 - 34 pokazują, że kiedy  $p_0/p_y$  osiąga wartość 2,25, efekt dyspersji staje się bardzo duży i począwszy od tej wartości  $r^*/r_0$  jest funkcją malejącą dla rosnących wartości  $p_0/p_y$ .

Zjawisko to wskazuje, że granica zniszczenia materiału znajduje się w pobliżu wartości  $p_0/p_y = 2,25$ . Zgadza się to również z badaniami doświadczalnymi D.S. Clarka i P.E. Duwez, [19], którzy wykazali, że począwszy od pewnej wartości prędkości odkształcenia dwie krzywe obrazujące zmianę górnej

granicy plastyczności i zmianę umownej granicy wytrzymałości łączą się z sobą ( patrz Rys. 1 ).

Warto podkreślić, że poniżej granicy zniszczenia materiału dwie funkcje  $\bar{\Phi}(F)$  , (64) i (65), dają praktycznie identyczne rezultaty ( patrz Rys. 34 ).

### III. ROZWIĄZANIE PROBLEMU ROZPRZESTRZENIANIA SIĘ FAL NAPRĘŻENIA W OŚRODKU NIEJEDNORODNYM

1. Wstępne założenia. Podobnie jak dla ośrodka jednorodnego zanalizujemy szczegółowo cztery rodzaje fal, mianowicie fale sferyczne, cylindryczne fale promieniowe, cylindryczne fale ścinania i płaskie fale w półprzestrzeni<sup>\*/</sup>. W każdym z rozważanych przypadków przyjmujemy pewną określoną symetrię niejednorodności ośrodka. Analizując pierwsze trzy rodzaje fal założymy, że wszystkie funkcje opisujące własności mechaniczne materiału zmieniają się tylko wraz z promieniem  $r$ , a są niezależne od pozostałych dwóch współrzędnych, natomiast w przypadku fal płaskich własności materiału zależne będą tylko od zmiennej  $x$ .

Jest oczywiste, że sposób i metoda postępowania przy rozwiązywaniu problemów rozprzestrzeniania się fal w ośrodku niejednorodnym będą całkowicie podobne do zaproponowanych wcześniej dla ośrodka jednorodnego.

Ze względu na możliwość praktycznych zastosowań ograniczymy się do materiałów, które mogą być opisane relacjami fizycznymi (108). Trzeba jednak tu podkreślić, że analiza problemów falowych dla materiałów opisanych relacjami (103) lub (104) przebiegałaby całkowicie analogicznie do przedstawionej w rozdziale poprzednim.

2. Rozwiązanie w obszarach sprężystych. Analizując zagadnienie w płaszczyźnie  $(r, t)$  lub  $(x, t)$ , Rys. 35 i 36, łatwo widzieć, że zagadnienie dla obszaru  $E_2$  na Rys. 35 jest takie samo jak dla obszaru  $E_0$  na Rys. 36. Natomiast zagadnienie  $E_1$  jest analogiczne do analizowanego wcześniej dla ośrodka jednorodnego.

<sup>\*/</sup> Fale podłużne w niejednorodnym, sprężysto-lepko-plastycznym pręcie były tematem pracy [41].

Zajmiemy się obecnie rozwiązaniem problemu w obszarze  $E_0$ .

W celu jednoczesnego opisanie zagaźnienia rozprzestrzenia-  
nia się czterech rodzajów fal wprowadzimy nowe zmienne  $\xi$   
i  $\eta$ . Zmienne te dla trzech pierwszych rodzajów fal określo-  
no są następująco

$$\xi = t + \int_{r_0}^r \frac{dr}{a(r)}, \quad \eta = t - \int_{r_0}^r \frac{dr}{a(r)}, \quad (210)$$

natomiast w przypadku fal płaskich

$$\xi = t + \int_0^x \frac{dx}{a(x)}, \quad \eta = t - \int_0^x \frac{dx}{a(x)}. \quad (211)$$

Obszar sprężysty  $E'_0$  w płaszczyźnie  $(\xi, \eta)$  pokazany  
jest na Ry. s. 37. Jest on ograniczony charakterystyką  $\eta = 0$   
i linią prostą, nie będącą charakterystyką,  $\xi = \eta$ .

Dla każdego rodzaju fal problem sprowadza się do rozwiąza-  
nia w obszarze  $E'_0$  równania różniczkowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = B(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + C(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + D(\xi, \eta) u, \quad (212)$$

przy spełnieniu warunku

$$u(\xi, 0) = 0$$

na charakterystyce  $\eta = 0$  oraz warunku

$$b(\eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + c(\eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + d(\eta) u = g(\eta) \quad (214)$$

na linii prostej  $\xi = \eta$ .

Współczynniki  $B(\xi, \eta)$ ,  $C(\xi, \eta)$  i  $D(\xi, \eta)$  są określone  
dla każdego rodzaju fali z transformacji odpowiedniego równania  
ruchu do postaci kanonicznej, a współczynniki  $b(\eta)$ ,  $c(\eta)$ ,  $d(\eta)$

$i g(\eta)$  są zdeterminowane warunkami brzegowymi dla odpowiedniego rodzaju fali.

Problem został sprowadzony <sup>\*/</sup> do rozwiązania uogólnionego zagadnienia Ricarda (patrz G. Majcher, [44]).

Zakładając, że funkcje  $B(\xi, \eta)$ ,  $C(\xi, \eta)$ ,  $D(\xi, \eta)$ ,  $b(\eta)$ ,  $c(\eta)$ ,  $d(\eta)$  i  $g(\eta)$  są klasy  $C^0$  w rozważanej dziedzinie zmiennych  $\xi$  i  $\eta$ , można napisać rozwiązanie powyższego zagadnienia w postaci

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\eta R(\xi, \eta; \xi_0, z) \theta(z) dz, \quad (215)$$

gdzie  $R(\xi, \eta; \alpha, z)$  jest funkcją Riemanna dla równania (212).

Rozwiązanie (215) spełnia warunek (213). Spełniając warunek (214) i zakładając, że wyrażenie  $c(\eta) R(\eta, \eta; \xi_0, \eta)$  nie jest tożsamościowo równe zero, otrzymamy dla funkcji  $\theta(\eta)$  następujące równanie całkowe Volterry drugiego rodzaju

$$\theta(\eta) = \int_0^\eta \bar{N}(\eta, z) \theta(z) dz + \bar{M}(\eta), \quad (216)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}(\eta, z) &= - \frac{b(\eta) R'_\xi(\eta, \eta; \xi_0, z) + c(\eta) R'_\eta(\eta, \eta; \xi_0, z) + d(\eta) R(\eta, \eta; \xi_0, z)}{c(\eta) R(\eta, \eta; \xi_0, \eta)}, \\ \bar{M}(\eta) &= \frac{g(\eta)}{c(\eta) R(\eta, \eta; \xi_0, \eta)} \end{aligned} \right\} (217)$$

\*/ Do takiego samego zagadnienia w pracy [50] został sprowadzony problem rozprzestrzenienia się płaskich fal sprężysto-plastycznych w ośrodku niejednorodnym, wykazującym

Rozwiązanie równania (216) można napisać w postaci

$$\theta(\eta) = \int_0^\eta \mathcal{R}(\eta, z) \bar{M}(z) dz + \bar{M}(\eta), \quad (218)$$

gdzie  $\mathcal{R}(\eta, z)$  jest jądrem rozwiązującym równania (216) i określone jest sumą

$$\mathcal{R}(\eta, z) = \bar{N}(\eta, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{N}_n(\eta, z). \quad (219)$$

Funkcję Riemanna określimy rozwiązując przy pomocy metody iteracji zagadnienie Darboux dla równania różniczkowego (212). Daje to następujący rezultat

$$R(\xi, \eta; \sigma, z) = R_0(\xi, \eta; \sigma, z) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\xi, \eta; \sigma, z), \quad (220)$$

gdzie

$$R_0(\xi, \eta; \sigma, z) = 1 + \exp\left[\int_z^\eta B(\sigma, v) dv\right] + \exp\left[\int_z^\xi C(v, z) dv\right], \quad (221)$$

$$R_n(\xi, \eta; \sigma, z) = \iint_{\substack{\xi \\ z}}^{\eta} \left[ B(v, \omega) \frac{\partial R_{n-1}(v, \omega; \sigma, z)}{\partial v} + C(v, \omega) \frac{\partial R_{n-1}(v, \omega; \sigma, z)}{\partial \omega} + D(v, \omega) R_{n-1}(v, \omega; \sigma, z) \right] dv d\omega. \quad (222)$$

Przy przyjętych założeniach można łatwo wykazać jednostajną zbieżność szeregów (219) i (220).

Współczynniki dla poszczególnych rodzajów fal mają postać:

Fala sferyczna.

c.d. ze str. poprzedniej

liniowe wzmocnienie. Pewne ogólne uwagi na temat wprowadzenia rozwiązań zagadnień dynamicznych w teorii sprężystości do równań całkowych typu Volterry podaje praca S. Kaliskiego, [36].

$$B(\xi, \eta) = -C(\xi, \eta) = \left[ \frac{a(r)}{4\lambda(r)} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{2a(r)\varrho(r)} \left( \frac{d\mu}{dr} - \frac{\mu(r)}{\lambda(r)} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{a(r)}{2r} \right) \right]_{r=f^{-1}\left[\frac{1}{2}(\xi-\eta)\right]}$$

$$D(\xi, \eta) = \left\{ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{2\varrho(r)} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{a^2(r)}{2r} \right] \right\}_{r=f^{-1}\left[\frac{1}{2}(\xi-\eta)\right]}$$

$$a(r) = \left[ \frac{\lambda(r) + 2\mu(r)}{\varrho(r)} \right]^{1/2} = \left[ \frac{3K(r) + 4\mu(r)}{3\varrho(r)} \right]^{1/2}$$

$$f(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{a(r)}, \quad b(\eta) = -c(\eta) = \frac{\lambda(r_0) + 2\mu(r_0)}{a(r_0)}$$

$$d(\eta) = \frac{2\lambda(r_0)}{r_0}, \quad g(\eta) = p(\eta)$$

(223)

Cylindryczna fala promieniowa

$$B(\xi, \eta) = -C(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\varrho(r)a(r)} \left( \frac{d\lambda}{dr} + 2 \frac{d\mu}{dr} \right) + \frac{a(r)}{r} \right]_{r=f^{-1}\left[\frac{1}{2}(\xi-\eta)\right]}$$

$$D(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{r\varrho(r)} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{a^2(r)}{r^2} \right]_{r=f^{-1}\left[\frac{1}{2}(\xi-\eta)\right]}$$

$$a(r) = \left[ \frac{\lambda(r) + 2\mu(r)}{\varrho(r)} \right]^{1/2}, \quad f(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{a(r)}$$

$$b(\eta) = -c(\eta) = \frac{\lambda(r_0) + 2\mu(r_0)}{a(r_0)}, \quad d(\eta) = \frac{\lambda(r_0)}{r_0}, \quad g(\eta) = p(\eta)$$

(224)

Cylindryczna fala scinania

$$B(\xi, \eta) = -C(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left[ \frac{a(r)}{r} \left( 1 + \frac{r}{\mu(r)} \frac{d\mu}{dr} \right) \right]_{r=f^{-1}\left[\frac{1}{2}(\xi-\eta)\right]}$$

$$D(\xi, \eta) = - \left\{ \left[ \frac{a(r)}{2r} \right]^2 \left[ 1 + \frac{r}{\mu(r)} \frac{d\mu}{dr} \right] \right\}_{r=f^{-1}\left[\frac{1}{2}(\xi-\eta)\right]}$$

$$a(r) = \left[ \frac{\mu(r)}{\varrho(r)} \right]^{1/2}, \quad f(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{a(r)}$$

$$b(\eta) = -c(\eta) = \frac{\mu(r_0)}{a(r_0)}, \quad d(\eta) = -\frac{\mu(r_0)}{r_0}, \quad g(\eta) = p(\eta)$$

(225)



Płaska fala w półprzestrzeni.

$$\left. \begin{aligned} B(\xi, \eta) = -C(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\rho(x)\alpha(x)} \left( \frac{d\lambda}{dx} + 2 \frac{d\mu}{dx} \right) \right]_{x=f^{-1}[\frac{1}{2}(\xi-\eta)]}, \\ D(\xi, \eta) &= 0, \quad \alpha(x) = \left[ \frac{\lambda(x) + 2\mu(x)}{\rho(x)} \right]^{1/2}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{dx}{\alpha(x)}, \\ b(\eta) = -c(\eta) &= \frac{\lambda(0) + 2\mu(0)}{\alpha(0)}, \quad d(\eta) = 0, \quad g(\eta) = p(\eta). \end{aligned} \right\} (226)$$

Założenie, że wszystkie obliczone wyżej współczynniki dla czterech rodzajów fal są funkcjami ciągłymi (klasy  $C^0$ ) determinuje warunek, aby funkcje opisujące własności sprężyste materiału  $\mu, \lambda$  i  $K$  były klasy  $C^1$ .

Rozwiązanie w obszarze  $E_1$ , Rys. 35, może być w podobny sposób sprowadzone do uogólnionego zagadnienia Picarda, jak to zostało pokazane dla ośrodka jednorodnego. Jest to możliwe dla fali sferycznej, fali ścinania i dla fali płaskiej. Oczywiście w przypadku ogólnego ośrodka niejednorodnego funkcją Riemanna nie będzie miała postaci zamkniętej.

Dla cylindrycznej fali promieniowej zagadnienie w obszarze  $E_1$  może być rozwiązane metodą różnic skończonych.

3. Analiza rozwiązania na fali uderzeniowej. Postępując podobnie jak dla ośrodka jednorodnego, w każdym z rozważanych rodzajów fali można zagadnienie sprowadzić do rozwiązania równania różniczkowego określającego  $\sigma_{rr}$  w przypadku fali sferycznej lub cylindrycznej fali promieniowej,  $\tau_{r\varphi}$  w przypadku fali ścinania i  $\sigma_{xx}$  w przypadku fali płaskiej. Równanie to ma postać

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = -\alpha(r)\sigma_{rr} + \beta(r). \quad (227)$$

Rozwiązanie równania (227) po uwzględnieniu warunków początkowych można zapisać następująco

$$\sigma_{rr} = \left\{ p_0 + \int_{r_0}^r \beta(\xi) \exp \left[ \int_{r_0}^{\xi} \alpha(\eta) d\eta \right] d\xi \right\} \exp \left[ - \int_{r_0}^r \alpha(\xi) d\xi \right]. \quad (228)$$

Punkt  $r = r^*$ , od którego fala uderzeniowa staje się falą sprężystą, można określić z warunku

$$\sqrt{J_2(r^*)} = k(r^*). \quad (229)$$

Dla  $r > r^*$  równanie różniczkowe (227) przyjmie postać

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = -\omega(r)\sigma_{rr}, \quad (230)$$

którego rozwiązanie jest

$$\sigma_{rr} = D \exp \left[ - \int_{r^*}^r \omega(\xi) d\xi \right], \quad (231)$$

gdzie stała  $D$  może być dla każdego rodzaju fali określona z warunku (229).

Obliczając kolejno współczynniki i stałe wielkości dla poszczególnych rodzajów fal, otrzymamy:

Fala sferyczna.

$$\left. \begin{aligned} \alpha(r) &= \frac{1}{r} + \frac{2\mu^2(r)}{3\eta(r)a^3(r)\varrho(r)} - \frac{1}{2\varrho(r)a(r)} \frac{d}{dr} [\varrho(r)a(r)], \\ \beta(r) &= \frac{k(r)\mu(r)}{\sqrt{3}a(r)\eta(r)}, & \omega(r) &= \frac{1}{r} - \frac{1}{2\varrho(r)a(r)} \frac{d}{dr} [\varrho(r)a(r)], \\ D &= \frac{\sqrt{3}\varrho(r^*)k(r^*)a^2(r^*)}{2\mu(r^*)}. \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

Cylindryczna fala promieniowa.

$$\alpha(r) = \frac{1}{2r} + \frac{2\mu^2(r)}{3\eta(r)\varrho(r)a^3(r)} - \frac{1}{2a(r)\varrho(r)} \frac{d}{dr} [\varrho(r)a(r)],$$

$$\beta(r) = \frac{k(r)\mu(r)}{\sqrt{3}a(r)\eta(r)}, \quad \omega(r) = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2a(r)\varrho(r)} \frac{d}{dr} [\varrho(r)a(r)],$$

$$D = \frac{\sqrt{3}\varrho(r^*)k(r^*)a^2(r^*)}{2\mu(r^*)}$$

Cylindryczna fala ścinania:

$$\alpha(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} + \frac{\mu(r)}{\eta(r)a(r)} - \frac{1}{\varrho(r)a(r)} \frac{d}{dr} (\varrho(r)a(r)) \right],$$

$$\beta(r) = \frac{k(r)\mu(r)}{2a(r)\eta(r)}, \quad \omega(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho(r)a(r)} \frac{d}{dr} (\varrho(r)a(r)) \right],$$

$$D = k(r^*)$$

Płaska fala w półprzestrzeni.

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu(x)}{\eta(x)a(x)} - \frac{\mu(x)k(x)}{\eta(x)\varrho(x)a^3(x)} - \frac{1}{\varrho(x)a(x)} \frac{d}{dx} (\varrho(x)a(x)) \right],$$

$$\beta(x) = \frac{2\sqrt{3}\mu(x)k(x)}{3\eta(x)a(x)}, \quad \omega(x) = -\frac{1}{\varrho(x)a(x)} \frac{d}{dx} [\varrho(x)a(x)],$$

$$D = \frac{\sqrt{3}\varrho(x^*)k(x^*)a^2(x^*)}{2\mu(x^*)}$$

Otrzymane rozwiązania na czole fali (228) i (230) pozwalają przeprowadzić analizę wpływu niejednorodności ośrodka na dyspersję fal naprężenia. Dyspersja na czole fali jest zdeterminowana dla każdego rodzaju fali współczynnikami  $\alpha(r)$ .

$\beta(r)$  i  $\omega(r)$ . Zagadnienie to będzie szczegółowo przedyskutowane dla określonego rodzaju niejednorodności ośrodka, kiedy wszystkie funkcje opisujące własności sprężyste, lepkie i plastyczne materiału będą wyraźnie sprecyzowane.

Uzyskane rozwiązania w postaci całek (228) i (230) wymagają, aby funkcje opisujące własności sprężyste materiału  $\lambda(r)$ ,  $\mu(r)$ ,  $K(r)$  i  $\varrho(r)$  były klasy  $C^1$ , podczas gdy funkcje opisujące własności lepkie i plastyczne  $\eta(r)$  i  $k(r)$  mogą być klasy  $C^0$ .

Inne niewiadome wielkości na fali uderzeniowej mogą być dla każdego rodzaju fali określone przy pomocy tych samych wzorów jak dla ośrodka jednorodnego.

4. Rozwiązanie w obszarach niesprężystych. Analizując problem w płaszczyźnie  $rt$  (lub dla fali płaskiej w płaszczyźnie  $xt$ ) otrzymamy obraz przedstawiony na Rys. 35. Obszar niesprężysty  $P$  jest ograniczony falą uderzeniową, na której znane jest rozwiązanie, a na prostej  $r=r_0$  (lub  $x=0$ ) dane są warunki brzegowe. Pokrywając obszar  $P$  siatką charakterystyk możemy zastosować metodę różnic skończonych.

Linie  $\Pi$  oddzielającą obszar niesprężysty od sprężystego określić można z warunku  $\sqrt{J_2} = k(r)$ .

Siatka charakterystyk i relacje wzdłuż charakterystyk dla każdego rodzaju fali będą miały postać:

Fala sferyczna.

$$r = \text{const},$$

$$t = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{a(r)} + \text{const},$$

(236)

$$\begin{aligned}
 & 3K(r) \left[ \frac{1}{2\eta(r)} \left( 1 - \frac{k(r)}{\sqrt{3}2} \right) (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 3\frac{v}{r} \right] dt + \left[ \frac{3K(r)}{2\mu(r)} - 1 \right] d\sigma_{rr} = \left[ \frac{3K(r)}{2\mu(r)} + 2 \right] d\sigma_{\varphi\varphi}, \\
 & \left\{ \pm \frac{6a(r)}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{2\mu(r)}{\eta(r)} \left( 1 - \frac{k(r)}{\sqrt{3}2} \right) (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{v}{r} [4\mu(r) - \right. \\
 & \quad \left. - 6K(r)] \right\} dr - [4\mu(r) + 3K(r)] dv \pm 3a(r) d\sigma_{rr} = 0.
 \end{aligned} \tag{237}$$

**Cylindryczna fala promieniowa.**

$$n = \text{const},$$

$$t = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{a(r)} + \text{const},$$

$$d\sigma_{\varphi\varphi} - d\sigma_{zz} + 2\mu(r) \left[ \frac{1}{2\eta(r)} \left( 1 - \frac{k(r)}{\sqrt{3}2} \right) (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) - \frac{v}{r} \right] dt = 0,$$

$$\left[ 1 - \frac{3K(r)}{2\mu(r)} \right] d\sigma_{rr} + \left[ 1 + \frac{3K(r)}{2\mu(r)} \right] d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{zz} -$$

$$- 3K(r) \left[ \frac{1}{2\eta(r)} \left( 1 - \frac{k(r)}{\sqrt{3}2} \right) (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 2\frac{v}{r} \right] dt = 0,$$

$$\left\{ \frac{1}{\eta(r)} \left( 1 - \frac{k(r)}{\sqrt{3}2} \right) [2\sigma_{rr} - (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})] \pm \frac{3a(r)}{\mu(r)} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \right.$$

$$\left. + \frac{v}{r} \left[ 2 - \frac{3K(r)}{\mu(r)} \right] \right\} dr \pm \frac{3a(r)}{\mu(r)} d\sigma_{rr} - \frac{4\mu(r) + 3K(r)}{\mu(r)} dv = 0.$$

**Cylindryczna fala ścinania.**

$$t = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{a(r)} + \text{const},$$

$$\pm \frac{2a(r)}{r\mu(r)} \tau_{r\varphi} dr + \frac{v}{r} dr + \frac{\tau_{r\varphi} - k(r)}{\eta(r)} dr - dv \pm \frac{d\tau_{r\varphi} a(r)}{\mu(r)} = 0. \tag{241}$$

Płaska fala w półprzestrzeni.

$$x = \text{const},$$

$$t = \pm \int_0^x \frac{dx}{a(x)} + \text{const},$$

(242)

$$\frac{u(x)}{\eta(x)} \left[ \sigma_{xx} - \frac{2\sqrt{3}}{3} k(x) - K(x) \varepsilon_{xx} \right] dt + d\sigma_{xx} - \frac{4\mu(x) + 3K(x)}{3} d\varepsilon_{xx} = 0,$$

(243)

$$\frac{u(x)}{\eta(x)} \left[ \sigma_{xx} - \frac{2\sqrt{3}}{3} k(x) - K(x) \varepsilon_{xx} \right] dt + d\sigma_{xx} \pm \varrho(x) a(x) dv = 0$$

5. Szczególny rodzaj niejednorodności. Założymy, że w przypadku fal sferycznych, cylindrycznych fal promieniowych i cylindrycznych fal ścinania rozważany ośrodek charakteryzuje się następującymi własnościami mechanicznymi

$$\lambda = \lambda_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\alpha, \quad \eta = \eta_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\nu, \quad \mu = \mu_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\alpha,$$

(244)

$$k = k_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\nu, \quad \varrho = \text{const}$$

Natomiast w przypadku płaskich fal w półprzestrzeni własności te przyjęte będą w postaci

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 + \frac{x}{x_0} \right)^\alpha, \quad \mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{x}{x_0} \right)^\alpha, \quad \eta = \eta_0 \left( 1 + \frac{x}{x_0} \right)^\nu,$$

(245)

$$k = k_0 \left( 1 + \frac{x}{x_0} \right)^\nu, \quad \varrho = \text{const}.$$

Wprowadzając nowe zmienne kanoniczne

$$\bar{\xi} = a_1 \xi + b_1,$$

$$\bar{\eta} = a_1 \eta,$$

(246)

na podstawie równania (212) dla wszystkich czterech rodzajów fal otrzymamy w obzazrze  $\bar{E}'_0$  (patrz Rys. 38)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\eta}} = \frac{\Delta}{\bar{\xi} - \bar{\eta}} \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{\eta}} \right) + \frac{\delta}{(\bar{\xi} - \bar{\eta})^2} u, \quad (247)$$

gdzie  $\Delta$  i  $\delta$  są określonymi stałymi. Równanie (247) ma taką samą postać jak w przypadku jednorodnym [ patrz równanie (200) ].

Obszar  $\bar{E}'_0$  jest ograniczony charakterystyką  $\bar{\eta} = 0$ , na której

$$u(\bar{\xi}, 0) = 0$$

i linią  $\bar{\eta} = \bar{\xi} - (b_1/a_1)$ , na której powinien być spełniony warunek

$$\bar{b}(\bar{\eta}) \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}} + \bar{c}(\bar{\eta}) \frac{\partial u}{\partial \bar{\eta}} + \bar{d}(\bar{\eta}) u = \bar{g}(\bar{\eta}). \quad (249)$$

Mamy dla obszaru  $\bar{E}'_0$  uogólnione zagadnienie Picarda, którego rozwiązanie ma postać

$$u(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \int_0^{\bar{\eta}} R(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \bar{\xi}_0, \bar{z}) \bar{\Theta}(\bar{z}) d\bar{z}. \quad (250)$$

Funkcja Riemanna  $\bar{R}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \bar{\sigma}, \bar{z})$  jest określona w postaci zamkniętej

$$\bar{R}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \bar{\sigma}, \bar{z}) = (\bar{\xi} - \bar{\eta})^\omega (\bar{\sigma} - \bar{\eta})^\beta (\bar{\xi} - \bar{z})^\beta F(-\beta, -\beta; 1, \bar{\xi}), \quad (251)$$

gdzie  $F$  jest funkcją hipergeometryczną [ patrz definicja (208) ] i

$$\bar{\xi} = \frac{(\bar{\xi} - \bar{\sigma})(\bar{\eta} - \bar{z})}{(\bar{\xi} - \bar{z})(\bar{\eta} - \bar{\sigma})}. \quad (252)$$

Dla funkcji  $\bar{\theta}(\eta)$  mamy następujące równanie całkowe

$$\bar{\theta}(\eta) = \int_0^{\eta} \bar{N}^*(\eta, \bar{z}) \bar{\theta}(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{M}^*(\eta), \quad (253)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}^*(\eta, \bar{z}) &= \frac{\bar{b}(\eta) \bar{R}'_{\bar{z}}(\eta + \frac{b_1}{a_1}, \eta; \bar{\xi}_0, \bar{z}) + \bar{c}(\eta) \bar{R}'_{\eta}(\eta + \frac{b_1}{a_1}, \eta; \bar{\xi}_0, \bar{z}) + \bar{d}(\eta) \bar{R}(\eta + \frac{b_1}{a_1}, \eta; \bar{\xi}_0, \bar{z})}{\bar{c}(\eta) \bar{R}(\eta + \frac{b_1}{a_1}, \eta; \bar{\xi}_0, \eta + \frac{b_1}{a_1})} \\ \bar{M}^*(\eta) &= \frac{\bar{\theta}(\eta)}{\bar{c}(\eta) \bar{R}(\eta + \frac{b_1}{a_1}, \eta; \bar{\xi}_0, \eta + \frac{b_1}{a_1})} \end{aligned} \right\} (254)$$

Rozwiązanie równania całkowego (253) ma postać

$$\bar{\theta}(\eta) = \int_0^{\eta} \bar{\mathcal{R}}(\eta, \bar{z}) \bar{M}^*(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{M}^*(\eta), \quad (255)$$

gdzie jądro rozwiązujące  $\bar{\mathcal{R}}(\eta, \bar{z})$  określone jest sumą

$$\bar{\mathcal{R}}(\eta, \bar{z}) = \bar{N}^*(\eta, \bar{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{N}_n^*(\eta, \bar{z}). \quad (256)$$

Ponieważ funkcja Riemanna określona jest obecnie w postaci zamkniętej, rozwiązanie problemu w obszarach sprężystych dla wszystkich rodzajów fal sprowadza się do obliczenia sumy (256)

Podamy obecnie postać odpowiednich współczynników dla poszczególnych rodzajów fal.

Fala sferyczna.



$$a_1 = \frac{a_0}{2r_0} \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right), \quad b_1 = 1, \quad \Delta = \frac{2+\kappa}{2-\kappa}, \quad \delta = \frac{\rho \left(\frac{\lambda_0 \kappa}{\epsilon a_0^2} - 1\right)}{(2-\kappa)^2},$$

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm \left[ (2+3\kappa)^2 - 32 \left( \frac{\lambda_0 \kappa}{\epsilon a_0^2} - 1 \right) \right]^{1/2} - (2+3\kappa)}{2(2-\kappa)},$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\pm \left[ (2+3\kappa)^2 - 32 \left( \frac{\lambda_0 \kappa}{\epsilon a_0^2} - 1 \right) \right]^{1/2} + (2-\kappa)}{2(2-\kappa)},$$

$$\bar{b}(\bar{\eta}) = -\bar{c}(\bar{\eta}) = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{2r_0} \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right),$$

$$\bar{d}(\bar{\eta}) = \frac{2\lambda_0}{r_0}, \quad \bar{g}(\bar{\eta}) = \rho \left[ \frac{2\bar{\eta}}{a_0 \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)} \right].$$

(257)

**Cylindryczna fala promieniowa.**

$$a_1 = \frac{a_0}{2r_0} \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right), \quad b_1 = 1, \quad \Delta = \frac{1+\kappa}{2-\kappa}, \quad \delta = \frac{4 \left( \frac{\lambda_0 \kappa}{\epsilon a_0^2} - 1 \right)}{(2-\kappa)^2},$$

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm \left[ 9\kappa^2 - \frac{16\lambda_0}{\epsilon a_0^2} \kappa + 16 \right]^{1/2} - 3\kappa}{2(2-\kappa)}, \quad \beta_{1,2} = \frac{\pm \left[ 9\kappa^2 - \frac{16\lambda_0}{\epsilon a_0^2} \kappa + 16 \right]^{1/2} - (\kappa-2)}{2(2-\kappa)},$$

$$\bar{b}(\bar{\eta}) = -\bar{c}(\bar{\eta}) = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{2r_0} \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right), \quad \bar{d}(\bar{\eta}) = \frac{\lambda_0}{r_0}, \quad \bar{g}(\bar{\eta}) = \rho \left[ \frac{2\bar{\eta}}{a_0 \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)} \right].$$

(258)

**Cylindryczna fala ścinania.**

$$a_1 = \frac{a_0}{2r_0} \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right), \quad b_1 = 1, \quad \Delta = \frac{1+\kappa}{2-\kappa}, \quad \delta = \frac{4(1+\kappa)}{(2-\kappa)^2},$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2(2-\kappa)} \left\{ -3\kappa \pm \left[ 9\kappa^2 + 16\kappa + 16 \right]^{1/2} \right\},$$

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2(2-\kappa)} \left\{ 2-\kappa \pm \left[ 9\kappa^2 + 16\kappa + 16 \right]^{1/2} \right\},$$

$$\bar{b}(\bar{\eta}) = -\bar{c}(\bar{\eta}) = \frac{\mu_0}{2r_0} \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right), \quad \bar{d}(\bar{\eta}) = \frac{\mu_0}{r_0}, \quad \bar{g}(\bar{\eta}) = \rho \left[ \frac{2\bar{\eta}}{a_0 \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)} \right].$$

(259)

Płaska fala w półprzestrzeni.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = 1, \quad b_1 = \frac{4\lambda_0}{a_0(2-\kappa)}, \quad \delta = 0, \quad \Delta = \frac{\kappa}{2-\kappa}, \quad \omega = 0, \\ \beta = \Delta, \quad \bar{b}(\bar{\eta}) = -\bar{c}(\bar{\eta}) = b(\eta), \quad \bar{d}(\bar{\eta}) = d(\eta), \quad \bar{g}(\bar{\eta}) = g(\eta). \end{aligned} \right\} (260)$$

Obliczone współczynniki  $\alpha_1$  i  $b_1$  transformacji (246) dla wszystkich czterech rodzajów fal wskazują, że transformacja ta ma określony sens, jeżeli  $\kappa \neq 2$ . W przypadku  $\kappa = 2$  podana analiza ogólna nie prowadzi do celu, gdyż wszystkie otrzymane równania dla  $\kappa = 2$  mają osobliwości. Dlatego przypadek  $\kappa = 2$  zanalizujemy oddzielnie.

Dla fal sferycznych, cylindrycznych fal promieniowych i cylindrycznych fal ścinania wprowadzając nowe zmiennne bezwymiarowe

$$z = \frac{r}{r_0}, \quad \tau = \frac{a_0 t}{r_0} \quad (261)$$

otrzymamy odpowiednio następujące równania opisujące zagędnienie

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4z \frac{\partial u}{\partial z} + 2 \left( \frac{\lambda_0}{\varphi a_0^2} - 1 \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (262)$$

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 3z \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\lambda_0}{\varphi a_0^2} - 1 \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (263)$$

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 3z \frac{\partial u}{\partial z} - 3u = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \quad (264)$$

Natomiast w przypadku płaskich fal w półprzestrzeni wprowadzając zmiennne bezwymiarowe

$$z = 1 + \frac{x}{x_0}, \quad \tau = \frac{t a_0}{x_0}, \quad (265)$$

otrzymano równanie

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \quad (266)$$

Do rozwiązania powyższych równań zastosujemy metody transformacji Laplace'a.

Równanie opisujące cylindryczne fale ścinania (264) było szczegółowo analizowane przez H. Sternberga i J.G. Chakravorty'ego w pracy [66].

Przyjmujemy następujące oznaczenie transformacji Laplace'a

$$\tilde{u}(z) = \int_0^{\infty} u(z, \tau) e^{-\tau z} d\tau. \quad (267)$$

Wszystkie równania (262) - (264) i (266) po transformacji prowadzą do równania Eulera

$$z^2 \frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2} + z \tilde{a}_1 \frac{d\tilde{u}}{dz} + \tilde{a}_2 \tilde{u} = 0, \quad (268)$$

gdzie  $\tilde{a}_1$  i  $\tilde{a}_2$  są współczynnikami odpowiednio różnymi dla każdego rodzaju fali.

Rozwiązanie równania Eulera (268) ma postać

$$\tilde{u} = \tilde{C}_1 z^{\alpha_1} + \tilde{C}_2 z^{\alpha_2}, \quad (269)$$

w którym wykładniki  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  określone są wzorem

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 - \tilde{a}_1}{2} \pm \frac{1}{2} \left[ (\tilde{a}_1 - 1)^2 - 4\tilde{a}_2 \right]^{1/2}. \quad (270)$$

Kolejno dla poszczególnych rodzajów fal mamy następujące wielkości:

Fala sferyczna.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= 4, & \tilde{\alpha}_2 &= 2 \left( \frac{\lambda_0}{\rho a_0^2} - 1 \right) - \gamma^2, \\ \Delta_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \left( 17 - \frac{8\lambda_0}{\rho a_0^2} + 4\gamma^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= 4, \\ \tilde{\alpha}_2 &= 2 \left( \frac{\lambda_0}{\rho a_0^2} - 1 \right) - \gamma^2, \\ \Delta_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \left( 17 - \frac{8\lambda_0}{\rho a_0^2} + 4\gamma^2 \right)^{1/2} \end{aligned}} \right\} (271)$$

**Cylindryczna fala promieniowa.**

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= 3, & \tilde{\alpha}_2 &= \frac{\lambda_0}{\rho a^2} - \gamma^2 - 1, \\ \Delta_{1,2} &= -1 \pm \left( 2 - \frac{\lambda_0}{\rho a_0^2} + \gamma^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= 3, \\ \tilde{\alpha}_2 &= \frac{\lambda_0}{\rho a^2} - \gamma^2 - 1, \\ \Delta_{1,2} &= -1 \pm \left( 2 - \frac{\lambda_0}{\rho a_0^2} + \gamma^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}} \right\} (272)$$

**Cylindryczna fala ścinania.**

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= 3, & \tilde{\alpha}_2 &= -3 - \gamma^2, \\ \Delta_{1,2} &= -1 \pm (4 + \gamma^2)^{1/2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= 3, \\ \tilde{\alpha}_2 &= -3 - \gamma^2, \\ \Delta_{1,2} &= -1 \pm (4 + \gamma^2)^{1/2} \end{aligned}} \right\} (273)$$

**Płaska fala w półprzestrzeni.**

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= 2, & \tilde{\alpha}_2 &= -\gamma^2, \\ \Delta_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (1 + 4\gamma^2)^{1/2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= 2, \\ \tilde{\alpha}_2 &= -\gamma^2, \\ \Delta_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (1 + 4\gamma^2)^{1/2} \end{aligned}} \right\} (274)$$

W przypadku cylindrycznej fali ścinania autorzy pracy [66] podali transformację odwrotną uzyskując wyniki w postaci zamkniętej. Jest to możliwe również w każdym z trzech pozostałych przypadków dla następujących warunków brzegowych.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ \sigma_{xx} \end{array} \right|_{z=1} = H(\tau) p_0, \quad (275)$$

gdzie  $p_0$  jest stałą wartością, a  $H(\tau)$  jest funkcją Heaviside'a zdefiniowaną następująco:

$$H(\tau) = 1 \quad \text{dla } \tau > 0, \quad H(\tau) = 0 \quad \text{dla } \tau < 0. \quad (276)$$

Spełniając warunki regularności otrzymujemy <sup>wzorce</sup> we (269)  $\tilde{C}_1 = 0$ . Drugą stałą  $\tilde{C}_2$  można obliczyć z warunków brzegowych (275) i w podobny sposób jak to pokazane jest w pracy [66] uzyskać transformacje odwrotne.

W przypadku ogólnym, kiedy warunki brzegowe mają postać:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{rr} \\ \tau_{rz} \\ \sigma_{xx} \end{array} \right|_{z=1} = p(t), \quad (277)$$

uzyskanie transformacji odwrotnych jest możliwe tylko przy pomocy metod przybliżonych.

Na czole wszystkich czterech rodzajów fal, w oparciu o wzory (228) - (231), rozwiązanie jest określone w postaci zamkniętej.

Fala sferyczna.

$$\left. \begin{aligned} \alpha(r) &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{2\mu_0}{3\eta_0 a_0^3 \varrho} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) + m \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu}, \\ \beta(r) &= \frac{k_0 \mu_0}{\sqrt{3} a_0 \eta_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu+(\alpha/2)-\nu} = n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu+(\alpha/2)-\nu}, \\ \omega(r) &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right), \quad \bar{n} = n r_0 \exp\left(-\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1}\right). \end{aligned} \right\} (278)$$

Rozwiązanie na czole fali dla  $r < r^*$  będzie

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left\{ p_0 + \bar{n} \int_0^{r/r_0} \xi^{\nu+(\alpha/4)-\nu+1} \exp\left(\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \xi^{(\alpha/2)-\nu+1}\right) d\xi \right\} \times \\ &\quad \times \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-(\alpha/4)} \exp\left\{ \frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \left[ 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu+1} \right] \right\}, \\ \sigma_{rz} &= \left(1 - \frac{2\mu_0}{\varrho a_0^2}\right) \sigma_{rr}, \quad \nu = -\frac{1}{\varrho a_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} \sigma_{rr}. \end{aligned} \right\} (279)$$

Równanie określające  $r^*$  ma postać

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\mu_0}{\varrho a_0^2} \left\{ p_0 + \bar{n} \int_1^{r^*/r_0} \xi^{\nu+(\alpha/4)-\nu+1} \exp\left(\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \xi^{(\alpha/2)-\nu+1}\right) d\xi \right\} \times \\ \times \left(\frac{r_0}{r^*}\right)^{1-(\alpha/4)} \exp\left\{ \frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \left[ 1 - \left(\frac{r^*}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu+1} \right] \right\} = k_0 \left(\frac{r^*}{r_0}\right)^{\nu}. \end{aligned} \right\} (280)$$

Rozwiązanie na czole fali dla  $r > r^*$  będzie

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sqrt{3} \varrho a_0^2 k_0}{2\mu_0} \left(\frac{r^*}{r_0}\right)^{\nu} \left(\frac{r^*}{r}\right)^{1-(\alpha/4)}, & \nu &= -\frac{1}{\varrho a_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} \sigma_{rr}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \left(1 - \frac{2\mu_0}{\varrho a_0^2}\right) \sigma_{rr}. \end{aligned} \right\} (281)$$

Cylindryczna fala promieniowa.

$$\left. \begin{aligned} \alpha(r) &= \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2\mu_0^2}{3\eta_0 \varrho a_0^3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu} = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + m \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu}, \\ \beta(r) &= \frac{k_0 \mu_0}{\sqrt{3} a_0 \eta_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu+(\alpha/2)-\nu} = n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu+(\alpha/2)-\nu}, \\ \omega(r) &= \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), & \bar{n} &= n r_0 \exp\left(-\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1}\right). \end{aligned} \right\} (282)$$

Rozwiązanie na czole fali dla  $r < r^*$  będzie

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left\{ p_0 + \bar{n} \int_1^{r/r_0} \xi^{\nu+(\alpha/4)-\nu+(1/2)} \exp\left(\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \xi^{(\alpha/2)-\nu+1}\right) d\xi \right\} \times \\ &\times \left(\frac{r_0}{r}\right)^{(1/2)[1-(\alpha/2)]} \exp\left\{\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu+1}\right]\right\}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{zz} = \left(1 - \frac{2\mu_0}{\varrho a_0^2}\right) \sigma_{rr}, & \nu &= -\frac{1}{\varrho a_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} \sigma_{rr}. \end{aligned} \right\} (283)$$

Równanie określające  $r^*$  ma postać

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\mu_0}{\sqrt{3} \varrho a_0^2} \left\{ p_0 + \bar{n} \int_1^{r^*/r_0} \xi^{\nu+(\alpha/4)-\nu+(1/2)} \exp\left(\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \xi^{(\alpha/2)-\nu+1}\right) d\xi \right\} \times \\ \times \left(\frac{r_0}{r^*}\right)^{(1/2)[1-(\alpha/2)]} \exp\left\{\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \left[1 - \left(\frac{r^*}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu+1}\right]\right\} = k_0 \left(\frac{r^*}{r_0}\right)^{\nu}, \end{aligned} \right\} (284)$$

Rozwiązanie na czole fali dla  $r > r^*$  będzie

$$\left. \sigma_{rr} = \frac{\sqrt{3} \varrho a_0^2 k_0}{2\mu_0} \left(\frac{r^*}{r_0}\right)^{\nu} \left(\frac{r^*}{r}\right)^{(1/2)[1-(\alpha/2)]}, \right\}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \left(1 - \frac{2\mu_0}{\rho a_0^2}\right) \sigma_{rr}, \quad (285)$$

$$v = -\frac{1}{\rho a_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} \sigma_{rr}.$$

**Cylindryczna fala ścinania**

$$\alpha(r) = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\mu_0}{2\eta_0 a_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu} = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + m \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu},$$

$$\beta(r) = \frac{k_0 \mu_0}{2a_0 \eta_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu+(\alpha/2)-\nu} = n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu+(\alpha/2)-\nu},$$

$$\omega(r) = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \quad \bar{n} = n r_0 \exp\left(-\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1}\right).$$

Rozwiązanie na czole fali dla  $r < r^*$  będzie

$$\tau_{r\varphi} = \left\{ p_0 + \bar{n} \int_1^{r/r_0} \xi^{\nu+(\alpha/4)-\nu+(1/2)} \exp\left(\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \xi^{(\alpha/2)-\nu+1}\right) d\xi \right\} \times$$

$$\times \left(\frac{r_0}{r}\right)^{(1/2)[1-(\alpha/2)]} \exp\left\{\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu+1}\right]\right\},$$

$$v = -\frac{1}{\rho a_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} \tau_{r\varphi}.$$

Równanie określające  $r^*$  ma postać

$$\left\{ p_0 + \bar{n} \int_1^{r^*/r_0} \xi^{\nu+(\alpha/4)-\nu+(1/2)} \exp\left(\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \xi^{(\alpha/2)-\nu+1}\right) d\xi \right\} \times$$

$$\times \left(\frac{r_0}{r^*}\right)^{(1/2)[1-(\alpha/2)]} \exp\left\{\frac{m r_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \left[1 - \left(\frac{r^*}{r_0}\right)^{(\alpha/2)-\nu+1}\right]\right\} = k_0 \left(\frac{r^*}{r_0}\right)^{\nu}. \quad (288)$$

Rozwiązanie na czole fali dla  $r > r^*$  będzie

$$\tau_{r\varphi} = k_0 \left(\frac{r^*}{r_0}\right)^{\nu} \left(\frac{r^*}{r}\right)^{(\nu/2)[1-(\alpha/2)]},$$

$$v = -\frac{1}{\rho a_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} \tau_{r\varphi}$$

(289)

Płaska fala w półprzestrzeni.

$$\alpha(x) = \frac{\mu_0}{2\eta_0 a_0} \left(1 - \frac{K_0}{\rho a_0^2}\right) \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{(\alpha/2) - \nu} - \frac{\alpha}{4} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{-1} =$$

$$= m \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{(\alpha/2) - \nu} - \frac{\alpha}{4} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{-1},$$

$$\beta(x) = \frac{2\mu_0 k_0}{\sqrt{3}\eta_0 a_0} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\nu + (\alpha/2) - \nu} = \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\nu + (\alpha/2) - \nu},$$

$$\omega(x) = -\frac{\alpha}{4} \frac{1}{1 + \frac{x}{x_0}}, \quad \bar{n} = n \left[ x_0 \exp\left(-\frac{m x_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1}\right) \right].$$

(290)

Rozwiązanie na czole fali dla  $x < x^*$  będzie

$$\sigma_{xx} = \left\{ p_0 + \bar{n} \int_0^{x/x_0} \left(1 + \xi\right)^{\nu + (\alpha/4) - \nu} \exp\left[\frac{m x_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \left(1 + \xi\right)^{(\alpha/2) - \nu + 1}\right] d\xi \right\} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha/4} \exp\left\{\frac{m x_0}{\frac{\alpha}{2} - \nu + 1} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{(\alpha/2) - \nu + 1}\right]\right\},$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{1}{2} \left(\frac{3K_0}{\rho a_0^2} - 1\right) \sigma_{xx},$$

$$v = -\frac{1}{\rho a_0} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha/2} \sigma_{xx}.$$



Równanie określające  $x^*$  ma postać

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(1 - \frac{3K_0}{\rho a_0^2}\right) \left\{ \rho_0 + \bar{n} \int_0^{x^*/x_0} (1+\xi)^{\nu+(x/4)-\nu} \exp \left[ \frac{mx_0}{\frac{x}{2}-\nu+1} (1+\xi)^{(x/2)-\nu+1} \right] d\xi \right\} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{x^*}{x_0}\right) \exp \left\{ \frac{mx_0}{\frac{x}{2}-\nu+1} \left[ 1 - \left(1 + \frac{x^*}{x_0}\right)^{(x/2)-\nu+1} \right] \right\} = K_0 \left(1 + \frac{x^*}{x_0}\right)^{\nu} \quad (292)$$

Rozwiązanie na czole fali dla  $x > x^*$  będzie

$$\sigma_{xx} = \frac{\sqrt{3} \rho k_0 a_0^2}{2 \mu_0} \left(1 + \frac{x^*}{x_0}\right)^{\nu} \left(\frac{x_0 + x}{x_0 + x^*}\right)^{x/4}, \quad \nu = -\frac{1}{\rho a_0} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{-x/2} \sigma_{xx},$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{1}{2} \left(\frac{3K_0}{\rho a_0^2} - 1\right) \sigma_{xx} \quad (293)$$

Obsze ry niesprężyste dla poszczególnych rodzajów fal można pokryć siatką charakterystyk, wzdłuż której spełnione są odpowiednie relacje różniczkowe, które można zastąpić relacjami różnicowymi.

Fala sferyczna.

Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{r}{r_0} = \text{const},$$

$$t = \pm \left[ \frac{2r_0}{a_0(2-x)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-(x/2)} - \frac{2r_0}{a_0(2-x)} \right] + \text{const} \quad (294)$$

Wzdłuż tych linii spełnione są relacje

$$\begin{aligned}
 & 3K_0 \left[ \frac{1}{2\eta_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\alpha-\nu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{\sqrt{3}k_0}{2\eta_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\beta+\alpha-\nu} + 3\frac{\nu}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\alpha} \right] dt + \\
 & + \left( \frac{3K_0}{2\mu_0} - 1 \right) d\sigma_{rr} - \left( \frac{3K_0}{2\mu_0} + 2 \right) d\sigma_{\varphi\varphi} = 0, \\
 & \left\{ \pm \frac{6a_0}{r} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\alpha/2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{2\mu_0}{\eta_0} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\nu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{2\sqrt{3}\mu_0 k_0}{\eta_0} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\nu-\beta} + \right. \\
 & \left. + \frac{\nu}{r} (4\mu_0 - 6K_0) \right\} dr - (4\mu_0 + 3K_0) dv \pm 3a_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\alpha/2} = 0.
 \end{aligned} \tag{295}$$

Cylindryczna fala promieniowa.

Równania charakterystyk mają taką samą postać jak dla fali sferycznej, z tą różnicą, że obecnie pierwsze równanie (294) jest charakterystyką podwójną. Odpowiednie relacje wzdłuż charakterystyk będą

$$\begin{aligned}
 & -d\sigma_{\varphi\varphi} - d\sigma_{zz} + \left[ \frac{\mu_0}{\eta_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\alpha-\nu} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) - \frac{\mu_0 k_0}{\eta_0 \sqrt{j_2}} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\beta+\alpha-\nu} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) - \right. \\
 & \left. - 2\mu_0 \frac{\nu}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\alpha} \right] dt = 0, \\
 & \left( 1 - \frac{3K_0}{2\mu_0} \right) d\sigma_{rr} + \left( 1 + \frac{3K_0}{2\mu_0} \right) d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{zz} - 3K_0 \left[ \frac{1}{2\eta_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\alpha-\nu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \right. \\
 & \left. - \frac{k_0}{2\eta \sqrt{j_2}} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\beta+\alpha-\nu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 2\frac{\nu}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\alpha} \right] dt = 0, \\
 & \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\nu} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) - \frac{k_0}{\eta_0 \sqrt{j_2}} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\nu-\beta} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) \pm \right.
 \end{aligned} \tag{296}$$

$$\pm \frac{3a_0}{\mu_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{v}{r} \left(2 - \frac{3K_0}{\mu_0}\right) \left. \right\} dr \pm \frac{3a_0}{\mu_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} - \frac{3\varrho a^2}{\mu_0} dv = 0.$$

**Cylindryczna fala ścinania.**

Równania charakterystyk mają postać

$$t = \pm \left[ \frac{2r_0}{a_0(2-\alpha)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-(\alpha/2)} - \frac{2r_0}{a_0(2-\alpha)} \right] + \text{const}, \quad (297)$$

wzdłuż których spełnione są relacje

$$\left[ \pm \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} - \frac{a_0}{\mu_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} + \frac{v}{r} + \frac{\tau_{r\varphi}}{\eta_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^v - \frac{k_0}{\eta_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{v-\beta} \right] dr -$$

$$- dv \pm \frac{a_0}{\mu_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha/2} d\tau_{r\varphi} = 0. \quad (298)$$

**Płaska fala w półprzestrzeni.**

Równanie charakterystyk są następujące

$$\frac{x}{x_0} = \text{const},$$

$$t = \pm \left[ \frac{2x_0}{a_0(2-\alpha)} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{1-(\alpha/2)} - \frac{2x_0}{a_0(2-\alpha)} \right] + \text{const}, \quad (299)$$

wzdłuż których są spełnione związki

$$\frac{\mu_0}{\eta_0} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha-v} \left[ \sigma_{xx} - \frac{2\sqrt{3}}{3} k_0 \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\beta} - K_0 \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha} \varepsilon_{xx} \right] dt +$$

$$+ d\sigma_{xx} - \frac{4\mu_0 + 3K_0}{3} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha} d\varepsilon_{xx} = 0,$$

$$\frac{\mu_0}{\eta_0} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha-1} \left[ \sigma_{xx} - \frac{2\sqrt{3}}{3} K_0 \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\alpha}{2}} - K_0 \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha} \varepsilon_{xx} \right] dt + \left. \begin{aligned} &+ d\sigma_{xx} \pm \rho_0 \alpha \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha/2} dv = 0. \end{aligned} \right\} (300)$$

W obszarach sprężystych charakterystyki wyrażone są tymi samymi równaniami. Natomiast relacje wzdłuż charakterystyk w obszarach sprężystych otrzymamy zakładając w związkach (295) (296), (298) i (300)  $\eta_0 \rightarrow \infty$ .

Należy jeszcze zanalizować jedną możliwość, która może wystąpić dla pewnego doboru zmienności własności lepkich, sprężystych i plastycznych.

Ponieważ wzrost parametru  $\alpha$  powoduje wzrost stanu naprężenia w głąb materiału sprężystego, możliwe jest dla pewnych wartości parametrów  $\nu$  i  $\nu$  powstanie wewnątrz ośrodka obszarów plastycznych, mimo że ciśnienie na powierzchni  $r = r_0$  lub  $x = 0$  nie przekracza wartości ciśnienia uplastycznienia  $p_y$ .

Jest to szczególnie ważne dla fali płaskiej, która nie ma dyspersji powodowanej wzrastaniem powierzchni fali, co ma miejsce dla fali sferycznej i dla fal cylindrycznych.

Przypadek ten zanalizujemy w płaszczyźnie  $x-t$ , Rys. 59. Stan naprężenia na czole fali, która jest sprężystą falą uderzeniową może być określony na podstawie rozwiązania (231) co daje

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= p_0 \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha/4}, & v &= -\frac{1}{\rho_0 \alpha} \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha/2} \sigma_{xx}, \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{3K_0}{\rho_0 \alpha^2} - 1 \right) \sigma_{xx}. \end{aligned} \right\} (301)$$

W obszarze sprężystym  $E$  można określić stan naprężenia rozwiązując uogólnione zagadnienia Picarda. Następnie z warunku

$$\sqrt{J_2} = k_0 \left(1 + \frac{\bar{x}}{x_0}\right)^{n_2} \quad (302)$$

można wyliczyć  $\bar{x}$ , od którego fala uderzeniowa staje się falą sprężysto-lepko-plastyczną. Z podobnego warunku można określić linię  $\Gamma$  oddzielającą obszar sprężysty  $E$  od obszaru sprężysto-lepko-plastycznego  $P$ .

W obszarze niesprężystym  $P$  można zastosować metodę różnic skończonych wzdłuż charakterystyk, posługując się równaniami (299) i (300).

6. Przykłady liczbowe i dyskusja wyników. Głównym celem prze-liczonych przykładów liczbowych jest pokazanie jak wpływa określony rodzaj niejednorodności materiału na dyspersję fal naprężenia oraz porównanie z wynikami uzyskanymi w przypadku ośrodka jednorodnego.

Ponieważ w założonym rodzaju niejednorodności przyjęto zmienność wszystkich stałych mechanicznych materiału z wyjątkiem gęstości  $\rho$ , można będzie przeprowadzić oddzielną analizę wpływu poszczególnych własności materiału. Przyjmując  $\alpha$  i  $n$  jako dwa stałe parametry, a uzmienniając parametr  $\nu$  charakteryzujący zmianę własności lepkich materiału, pokazemy wpływ tych zmian na dyspersję fal naprężenia. Przeprowadzając kolejno podobną analizę przy zmiennym  $\alpha$  i  $n$  określimy wpływ własności sprężystych i plastycznych.

Tu jednocześnie należy wskazać na powstawanie pewnych osobliwości, wynikających z odpowiedniego doboru wykładników  $\alpha$ ,  $\nu$  i  $n$ , co wskazuje, że nie każda dowolna trójka wielkości  $\alpha$ ,  $\nu$  i  $n$  ma sens fizyczny.

Całą analizę starano się ograniczyć do wartości liczbowych wykładników  $\alpha$ ,  $\nu$  i  $\nu$ , mających znaczenie praktyczne.

Obliczenia liczbowe przeprowadzono dla stali stopowej, przyjmując następujące dane

$$g = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ kG} \cdot \text{cm}^{-4} \cdot \text{sek}^2,$$

$$\mu_0 = 0,81 \cdot 10^6 \text{ kG} \cdot \text{cm}^{-2},$$

$$E_0 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG} \cdot \text{cm}^{-2},$$

$$\eta_0 = 0,8 \text{ kG} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sek},$$

$$\sigma_0 = 10000 \text{ kG} \cdot \text{cm}^{-2},$$

$$k_0 = 5774 \text{ kG} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

$$\lambda_0 = 1,124 \cdot 10^6 \text{ kG} \cdot \text{cm}^{-2},$$

Na rys. 40 pokazano jest porównanie dyspersji na czole fali sferycznej dla ośrodka niejednorodnego i jednorodnego. Linia ciągła pokazuje maleńcie intensywności naprężenia na czole fali w ośrodku niejednorodnym, dla  $\alpha = 1/2$ ,  $\nu = 1/4$  i  $\nu = 1/8$ . Linia przerywana pokazuje zachowanie się intensywności naprężenia na czole fali w ośrodku jednorodnym, to znaczy dla  $\alpha = 0$ ,  $\nu = 0$  i  $\nu = 0$ . Punkty przecięcia się funkcji przedstawiającej pierwiastek kwadratowy z intensywności naprężenia z odpowiednią funkcją przedstawiającą granicę plastyczności dają  $r^*/r_0 = 1,650$  dla ośrodka niejednorodnego i  $r^*/r_0 = 1,645$  dla ośrodka jednorodnego.

Na Rys. 41 przedstawione są rezultaty pokazujące wpływ lepkości. Zanalizowano falę płaską obliczając intensywność w punkcie  $x_1/x_0 = 1,2$ , dla różnych wielkości wykładnika  $\nu$ , przy założeniu, że  $\alpha = \nu = 1/4$  i  $\rho_0 = 4\sigma_0$ . Przeprowadzone przeliczenia mają sens tylko wtedy, jeżeli w punkcie  $x_1/x_0 = 1,2$  intensywność spełnia warunek

$$\sqrt{J_2} \geq k_0 \left(1 + \frac{x_1}{x_0}\right)^{1/4} = 1,218 k_0 \quad (303)$$

Punkt, w którym linia przedstawiająca pierwiastek kwadratowy z intensywności naprężenia przecina prostą  $\sqrt{J_2} = 1,218 k_0$  odpowiada punktowi  $x_1 = x^*$  dla określonej wartości  $\nu$ , w naszym przypadku dla  $\nu = 0,228$ .

Wyniki przedstawione na Rys. 41 pokazują, że wraz ze wzrostem  $\nu$  intensywność czoła fali w punkcie  $x_1/x_0 = 1,2$  wzrasta. Wzrost  $\nu$  powoduje zwiększenie czasu relaksacji  $\tau_M = \eta/\mu$ , a więc zmniejszenie tłumienia.

Punkt odpowiadający  $\nu = 1,125$  jest punktem osobliwym, co jest oczywiste bezpośrednio ze wzorów (291). W punkcie tym intensywność naprężenia jest nieokreślona, ale posiada równe obie granice, lewostronną i prawostronną.

Rys. 42 przedstawia wpływ zmienności granicy plastyczności przy założeniu, że  $\alpha = \nu = 1/4$  i  $p_0 = 4\sigma_0$ .

Intensywność naprężenia na fali uderzeniowej jest funkcją malejącą wykładnika  $\nu$ , natomiast granica plastyczności jest funkcją rosnącą wykładnika  $\nu$ . Przecięcie się tych dwóch funkcji odpowiada punktowi  $x_1 = x^*$ , co w przeliczonym przykładzie ma miejsce dla  $\nu = 0,261$ . Obliczenia mają sens, jeżeli spełniony jest warunek

$$\sqrt{J_2} \geq k_0 (2,2)^{\nu} \quad (304)$$

Rys. 43 obrazuje wpływ zmian własności sprężystych materiału na dyspersję fali uderzeniowej, przy  $\nu = \alpha = 1/4$  i  $p_0 = 4\sigma_0$ . Podobnie jak poprzednio obliczenia są słuszne, jeżeli

$$\sqrt{J_2} \geq 1,218 k_0 \quad (305)$$

Intensywność naprężenia na fali uderzeniowej jest funkcją rosnącą wykładnika  $\alpha$ , ale tylko w pewnych granicach jego zmienności. Dla  $\alpha = 0,7$  intensywność naprężenia osiąga wartość maksymalną i staje się ze wzrostem  $\alpha$  funkcją

malejącą. Można to łatwo wyjaśnić analizując zmianę czasu relaksacji  $\tau_M = \eta / \mu$ . W rozważanym przykładzie  $\eta = \text{const}$ , natomiast ze wzrostem wykładnika  $\alpha$  wielkość  $\mu$  rośnie powodując malenie czasu relaksacji. Przy stałym  $\eta$  wzrost  $\mu$  daje wzrost tłumienia. W materiale sprężystym wzrost parametru  $\alpha$  powoduje wzrost intensywności naprężenia na czole fali. W rozważanym przez nas materiale sprężysto-lepko-plastycznym wzrost parametru  $\alpha$  powoduje w pierwszej fazie swej zmienności wzrastanie intensywności, czego przyczyną są własności sprężyste materiału, natomiast w drugiej fazie zmienności dominują własności lepkie, które powoduje<sup>2</sup> malenie intensywności naprężenia. Dla  $\alpha = -0,29$  i  $\alpha = 1,31$   $x_1 = x^*$ .



Bibliografia

- [1] B.E.K. Alter and C.W. Curtis, Effects of strain rate on the propagation of a plastic strain pulse along a lead bar, *J. Appl. Phys.*; 27 (1956), 1079.
- [2] J.F. Bell, Diffraction grating strain gauge, *Proc. Soc. Experimental Stress Analysis*, 17 (1960), 51.
- [3] J.F. Bell, Propagation of large amplitude waves in annealed aluminum, *J. Appl. Phys.*, 31 (1960), 277.
- [4] J.F. Bell, Study of initial conditions in constant velocity impact, *J. Appl. Phys.*, 31 (1960), 2188.
- [5] J.F. Bell, Experimental study of the interrelation between the theory of dislocations in polycrystalline media and finite amplitude wave propagation in solids, *J. Appl. Phys.* 32 (1961), 1982.
- [6] J.F. Bell, An experimental study of the unloading phenomenon in constant velocity impact, *J. Mech. Phys. Solids*, 9 (1961), 1.
- [7] J.F. Bell, Further experimental study of the unloading phenomenon in constant velocity impact, *J. Mech. Phys. Solids*, 9 (1961), 261.
- [8] J.F. Bell, Experimental study of dynamic plasticity at elevated temperatures, *Experimental Mechanics*, June (1962), 1.
- [9] S.R. Bodner and P.S. Symonds, Plastic deformations in impact and impulsive loading of beams, "Plasticity", /Ed. by E.H. Lee and P.S. Symonds/, Pergamon Press, New York, Oxford, London and Paris, 1960, 488.

- [10] S.R. Bodner and P.S. Symonds, Experimental and theoretical investigation of the plastic deformation of cantilever beams subjected to impulsive loading, Technical Report No 71, Brown University, July 1961.
- [11] J.D. Campbell, An investigation of the plastic behavior of metal rods subjected to longitudinal impact, *J. Mech. Phys.Solids*, 1 (1953), 113.
- [12] J.D. Campbell, The dynamic yielding of mild steel, *Acta Metallurgica*, 1 (1953), 706.
- [13] J.D. Campbell, The yield of mild steel under impact loading, *J. Mech.Phys.Solids*, 3 (1954) , 54.
- [14] J.D. Campbell and J. Doby, The yield behavior of mild steel in dynamic compression, *Proc.Royal Soc.* 236A (1956), 24
- [15] J.D. Campbell and J. Doby, Delayed yield and other dynamic loading phenomena in a medium - carbon steel, *Proc.of the Conference on "The Properties of Materials at High Rates of Strain"*, London 1957, 214
- [16] J.D. Campbell, J.A. Simmons and J.E. Dorn, On the dynamic behavior of a Frank - Read source, *J. Appl.Mech.*, 28 (1961), 447.
- [17] W.R. Campbell, Determination of dynamic stress-strain curves from strain waves in long bars, *Proc.Soc. Experimental Stress Analysis*, 10 (1952), 113.
- [18] D.S. Clark and D.S. Wood, The time delay for the initiation of plastic deformation at rapidly applied constant stress, *Proc.Amer.Soc.Testing Materials*, 49 (1949), 717.

- [19] D.S. Clark and P.E. Duwez, The influence of strain rate on some tensile properties of steel, Proc. Amer. Soc. Testing Materials, 50 (1950), 560.
- [20] D.S. Clark, The behavior of metals under dynamic loading, Trans. Amer. Soc. Metals, 46 (1954), 34.
- [21] E.T. Copson, On the Riemann - Green Function, Arch. Rational Mech. Anal., 1 (1958), 324.
- [22] A.H. Cottrell and B.A. Bilby, Dislocation theory of yielding and strain ageing of iron, Proc. Phys. Soc., 62A, (1949), 49.
- [23] A.H. Cottrell, Deformation of solids at high rates of strain, Proc. of the Conference on "The Properties of Materials at High Rates of Strain", London 1957, 1.
- [24] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. 2, Partial Differential Equations by R. Courant, Interscience Publishers, New York, London 1962.
- [25] G.R. Cowper and P.S. Symonds, Strain hardening and strain rate effects in the impact loading cantilever beams, Technical Report No 28, Brown University, Sept. 1957.
- [26] P.E. Duwez and D.S. Clark, An experimental study of the propagation of plastic deformation under conditions of longitudinal impact, Proc. Amer. Soc. Testing Materials, 47 (1947), 502.
- [27] A.M. Freudenthal, H. Geiringer, The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum, Encyclopedia of Physics, vol. VI, Elasticity and Plasticity, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958, 229.

- [28] J. Harding, B.O. Wood, and J.D. Campbell, Tensile testing of materials at impact rates of strain, *J. Mech. Engrg. Sci.*, 2 (1960), 88.
- [29] F.B. Hauser, J.A. Simmons, and J.E. Dorr, Strain rate effects in plastic wave propagation, Technical Report No 3, University of California, June 1960.
- [30] F.B. Hauser and C.A. Winter, An experimental method for determining stress-strain relations at high strain-rates, Technical Report No 4, University of California, December 1960.
- [31] K. Hohenemser and W. Prager, Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua, *ZAMM*, 12 (1932), 216.
- [32] H.C. Hopkins, Dynamic expansion of spherical cavities in metals, *Progress in Solid Mechanics*, vol. 1 (1960), 85.
- [33] H.C. Hopkins, Dynamic anelastic deformations of metals, *Appl. Mech. Rev.*, 14 (1961), 447.
- [34] J.E. Johnson, D.S. Wood and D.S. Clark, Delayed yielding in annealed low-carbon steel under compression impact, *Proc. Amer. Soc. Testing Materials* 53 (1953), 755.
- [35] J.E. Johnson, D.S. Wood and D.S. Clark, Dynamic stress-strain relation for annealed 20 aluminium under compression impact, *J. Appl. Mech.*, 20 (1953), 525.
- [36] S. Kaliski, An operational method for reducing partial differential equations with variable coefficients to integral equation in problems of wave propagation, *Proc. Vibr. Probl.*, 2 (1961), 3.

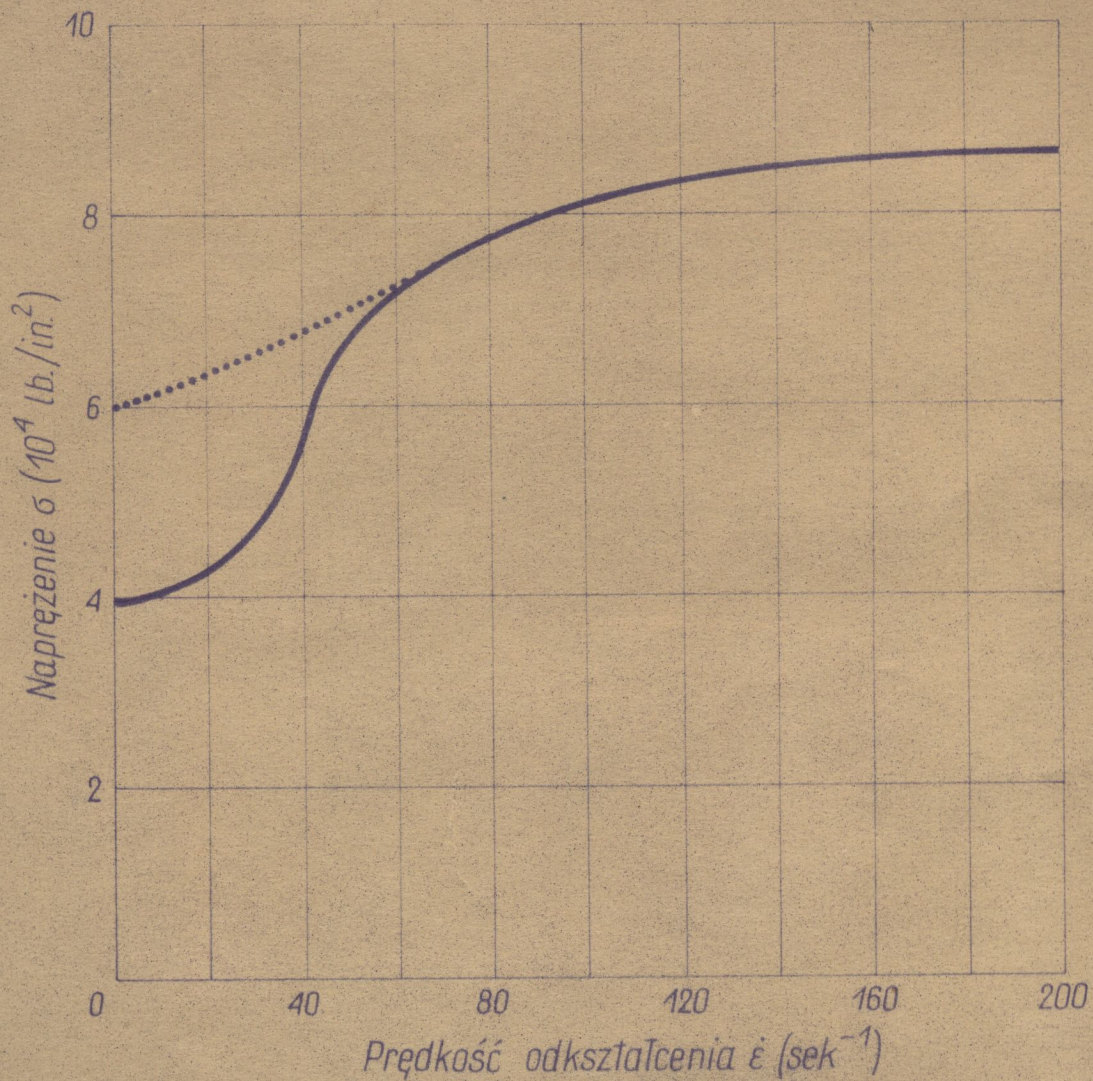
- [37] T. Von Kármán and P. Duwez, The propagation of plastic deformation in solids, 6th International Congress for Applied Mech., Paris 1946, and J. Appl. Phys., 21 (1950), 987.
- [38] J.M. Krafft, A. M. Sullivan and C.F. Tipper, The effect of static and dynamic loading and temperature on the yield stress of iron and mild steel in compression, Proc. Royal Soc., 221A (1954), 114.
- [39] J.M. Krafft and A.M. Sullivan, Effects of grain size and carbon content on the yield delay-time of mild steel, Trans.Amer.Soc.Metals, 51 (1959), 643, and discussion to this paper by J.D. Campbell, 659.
- [40] A. Kromm, Zur Ausbreitung von Stosswellen in Kreislochscheiben, ZAMM, 28 (1948), 104 und 297.
- [41] В.Н. Кукуджанов, Л.В. Никитин, Распространение волн в стержнях из неоднородного упруго-пластического материала, Изв.Акад.Наук СССР, Отд.Техн.Наук, Механика и Машиностроение, 4 (1960), 53.
- [42] E.H. Lee and H. Wolf, Plastic-wave propagation effects in high-speed testing, J. Appl.Mech., 18 (1951), 379.
- [43] E.H. Lee, Wave propagation in anelastic materials, Deformation and Flow of Solids, Colloquium Madrid 1955, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956, 129.
- [44] S. Majcher, Sur un problème mixte pour l'équation du type hyperbolique, Ann. Polon.Math., 2 (1958), 121.
- [45] L.E. Malvern, The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect, J. Appl.Mech., 18 (1951), 203.

- [46] M.J. Manjoine, Influence of rate of strain and temperature on yield stresses in mild steel, J. Appl. Mech., 11 (1944), 211.
- [47] Л.В. Никитин, Распространение упруго-вязко-пластических волн в толстостенной трубе, Изв. ВУЗов, Машиностроение, 3 (1958), 14.
- [48] W. Olzrak, P. Perzyna, Propagation of spherical waves in a non-homogeneous elastic-visco-plastic medium, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 9 (1961), 509.
- [49] P. Perzyna, Stress waves in a homogeneous elastic-visco-plastic medium, Arch. Mech. Stos., 11 (1959), 441.
- [50] P. Perzyna, Analysis of propagation of plane elastic-plastic waves in a non-homogeneous medium, I, Finite strains; II, Infinitesimal Strains; Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 8 (1960), 485.
- [51] P. Perzyna, Propagation of shock waves in non-homogeneous elastic-visco-plastic bodies, Arch. Mech. Stos., 13, (1961), 851.
- [52] P. Perzyna, Propagation of shock waves in an elastic-visco-plastic medium of a definite non-homogeneity type, Arch. Mech. Stos., 14 (1962), 93.
- [53] P. Perzyna, The constitutive equations for rate sensitive plastic materials, Technical Report No 76, Brown University, April 1962; praca będzie publikowana w Quarterly of Applied Mathematics.
- [54] P. Perzyna, The study of the dynamic behavior of rate sensitive plastic materials, Technical Report No 77, Brown University, May 1962; praca będzie publikowana w Archiwum Mechaniki Stosowanej.

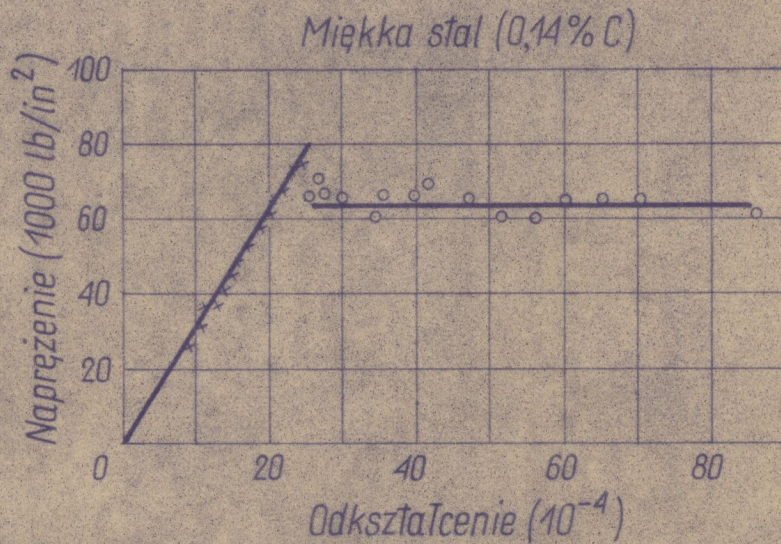
- [55] P. Perzyna, On the propagation of stress waves in a rate sensitive plastic medium, Technical Report No 81, Brown University, June 1962; praca będzie publikowana w ZAMP.
- [56] W. Prager, Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique, *Mémorial Sci., Math.* 87, Paris, (1957).
- [57] W. Prager, Discontinuous fields of plastic stress and flow, *Proc. of the Second U.S. National Congress of Applied Mechanics*, (1954), 21.
- [58] W. Prager, Linearization in visco-plasticity *Oesterreichisches Int. - Arch.*, (1961), 152.
- [59] W. Prager, *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Company, Boston, 1961.
- [60] К.А. Размазулин и Г.С. Шапиро, Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде, *Изв.Акад.Наук СССР, отд.мех.наук*, 2 (1955), 68.
- [61] S. Rajmak, F. E. Hauser and J. E. Dorn, Theoretical prediction of strain distribution under impact loading Technical Report No 1, University of California, June 1961.
- [62] C. Riparbelli, On the relation among stress, strain and strain rate in copper wires submitted to longitudinal impact, *Proc. Soc. Experimental Stress Analysis*, 14 (1956), 55.
- [63] J. A. Simmons, F. Hauser and J. E. Dorn, Mathematical theories of plastic deformation under impulsive loading, University of California, *Publications in Engineering*, vol. 5, No 7, pp. 177-230, Berkeley and <sup>Los</sup> Angeles, 1962.

- [64] В.В. Соколовский, Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях, Докл.АН СССР, 60 (1948), 775.
- [65] В.В. Соколовский, Распространение цилиндрических волн сдвига в упруго-вязко-пластической среде, Докл.АН СССР, 60 (1948), 1325.
- [66] E. Sternberg and J.G. Chakravorty, On the propagation of shock waves in a non-homogeneous elastic medium, J. Appl. Mech., 26 (1959), 528.
- [67] E.J. Sternglass and D.A. Stuart, An experimental study of the propagation of transient longitudinal deformations in elastoplastic media, J. Appl. Mech., 20 (1953), 427.
- [68] D.B.C. Taylor, The dynamic straining of metals having definite yield points, J. Mech. Phys. Solids, 3 (1954), 38.
- [69] G.I. Taylor, The testing of materials at high rates of loading, J. Institution of Civil Engineers, 8 (1945-46), 485.
- [70] G.I. Taylor, The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, I. Theoretical considerations, Proc. Royal Soc., 194 A (1948), 289.
- [71] T.B. Flitz and J.E. Dorn, The effect of strain histories on the work hardening of metals, Trans. Amer. Soc. for Metals, 41A (1949), 163.
- [72] A.C. Whiffin, The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, II. Tests on various metallic materials, Proc. Royal Soc., 194A (1948), 300.
- [73] M.P. White, On the impact behavior of a material with a yield point, J. Appl. Mech., 16 (1949), 52.

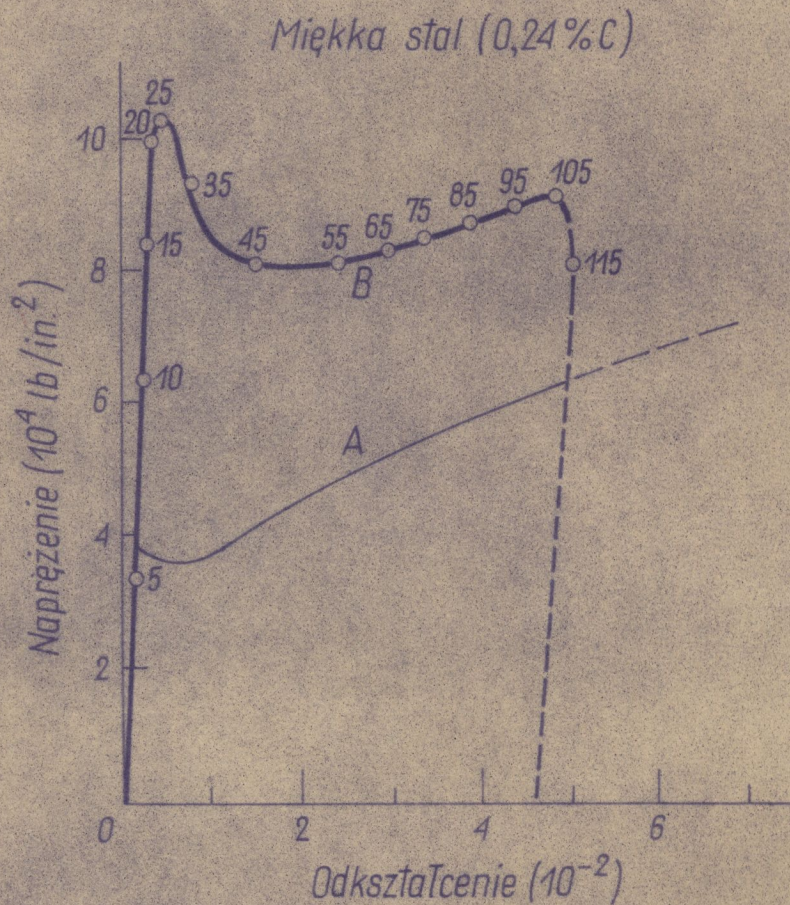




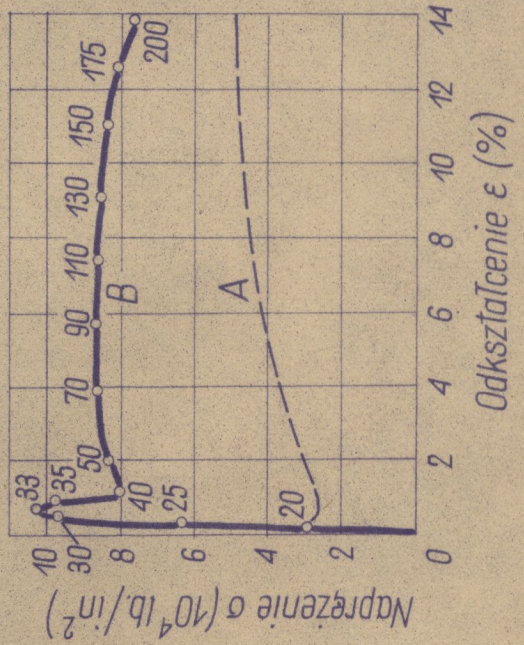
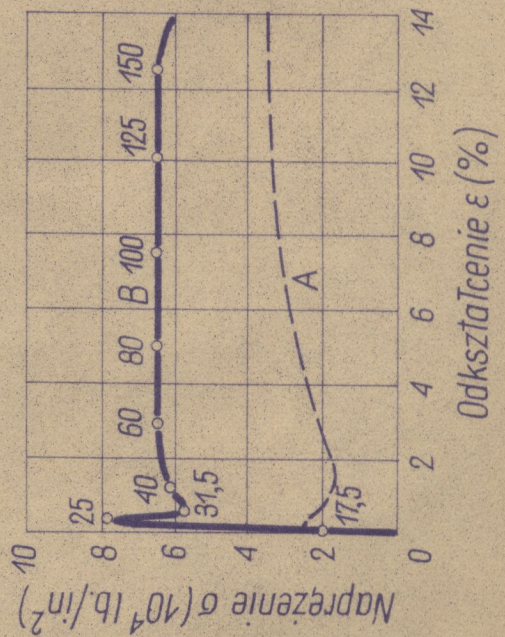
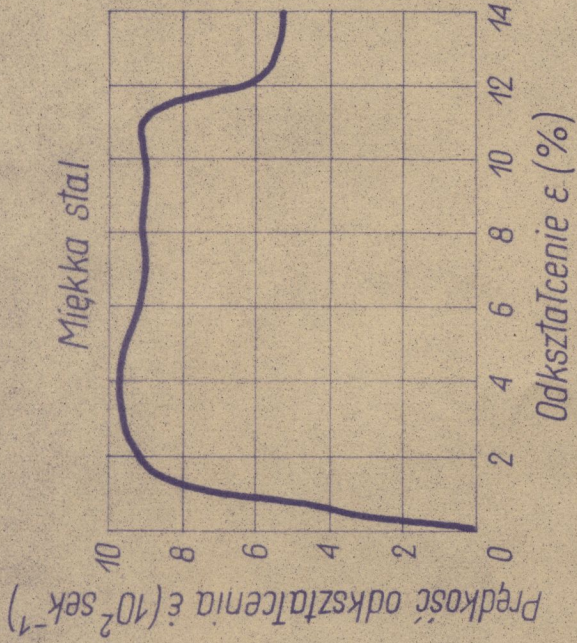
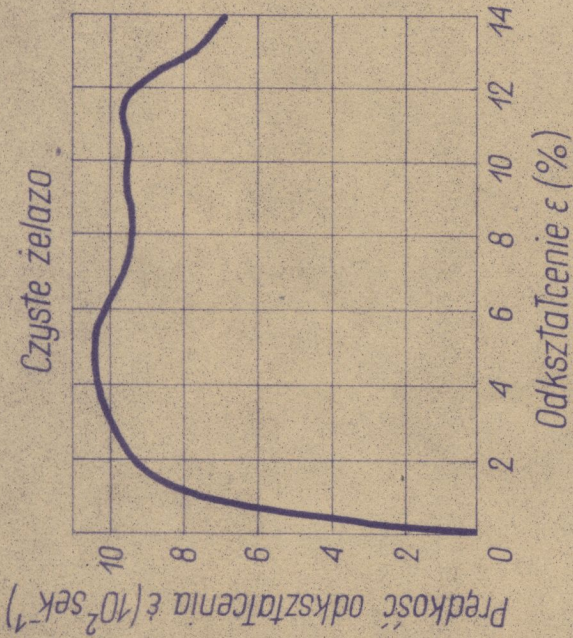
Rys. 1. Umowna granica wytrzymałości (.....) i granica proporcjonalności (—) jako funkcje  $\dot{\epsilon}$ . (D.S. Clark i R.E. Duwez [19]).



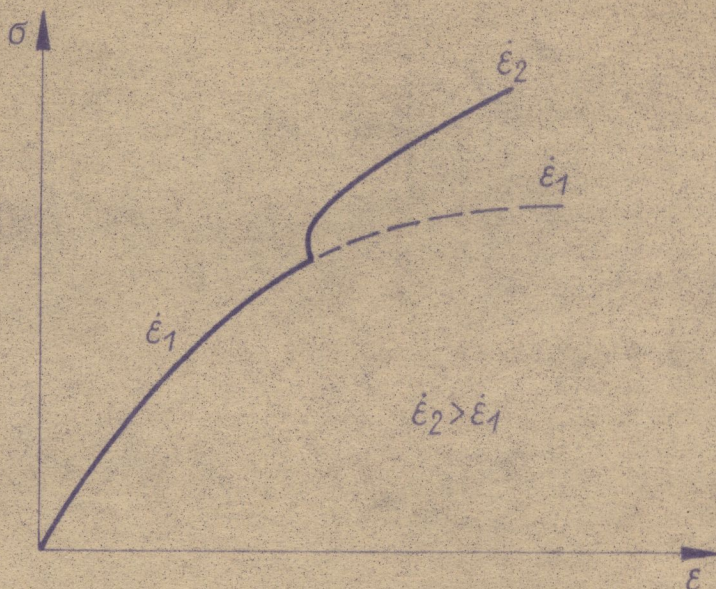
Rys. 2. Dynamiczna zależność  $\sigma-\epsilon$ .  
(J. D. Campbell [13])



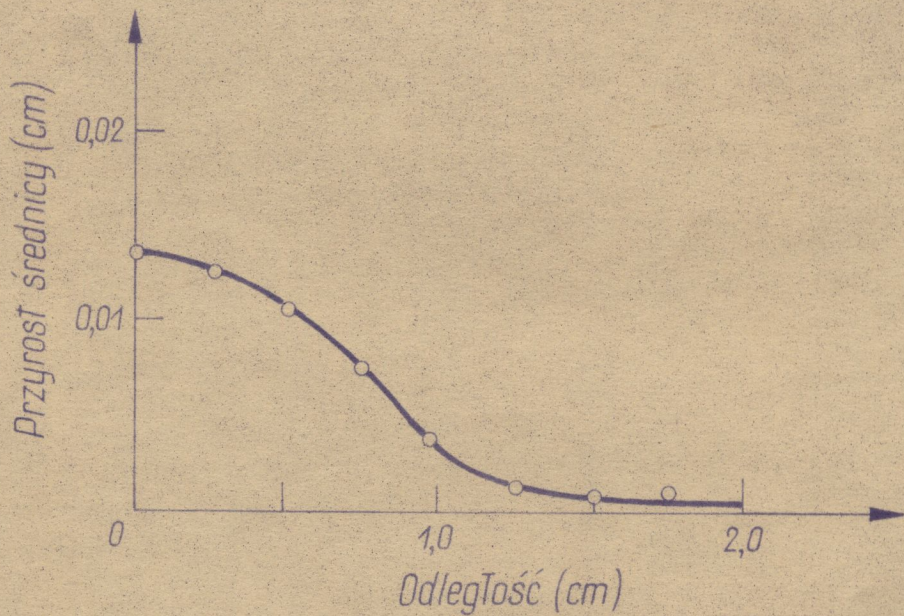
Rys. 3. Krzywe  $\sigma-\epsilon$ , A - statyczna, B - dynamiczna (J. D. Campbell i J. D. Doby [14]).



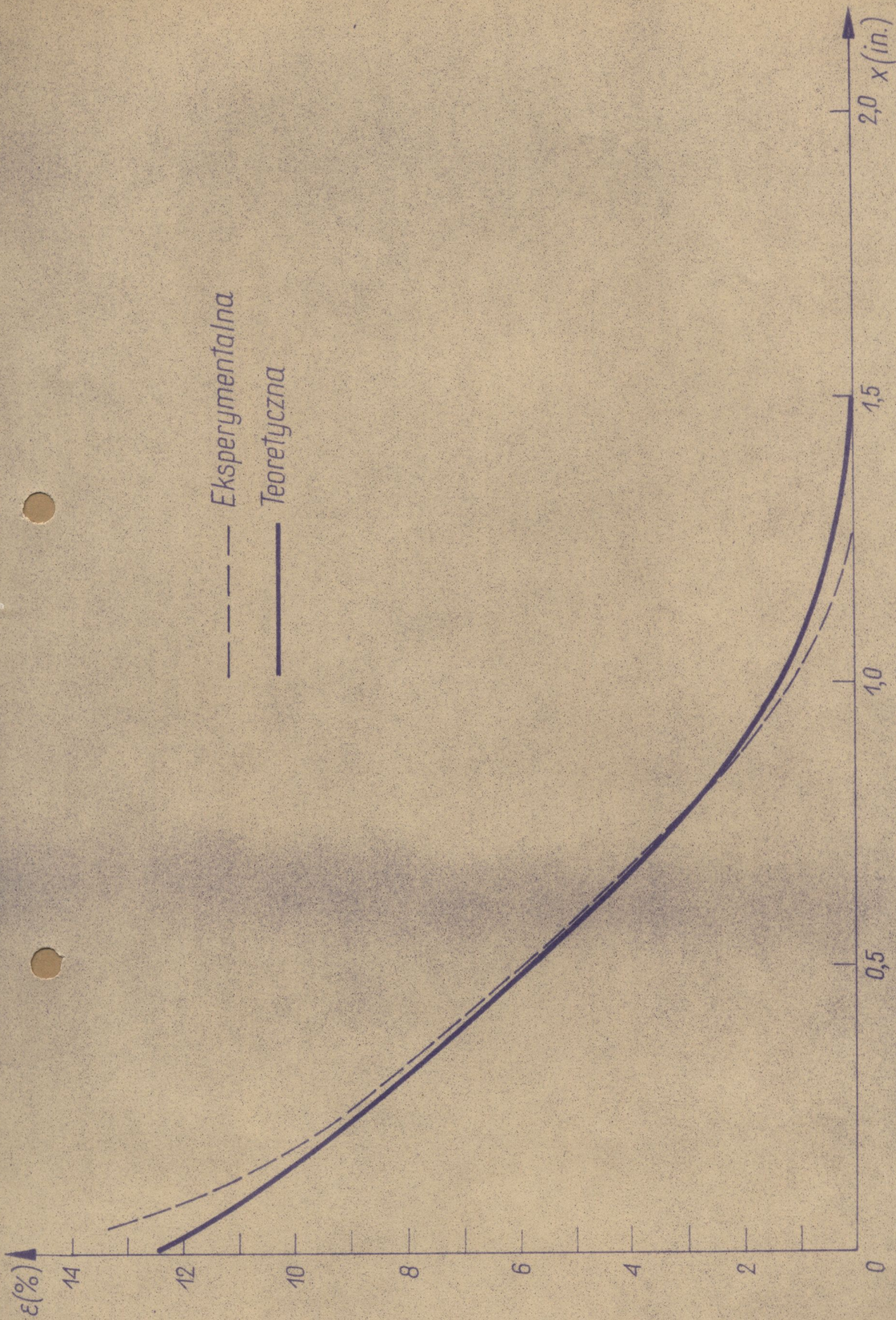
Rys.4. (J. Harding, E.O. Wood i J.D. Campbell [28]).



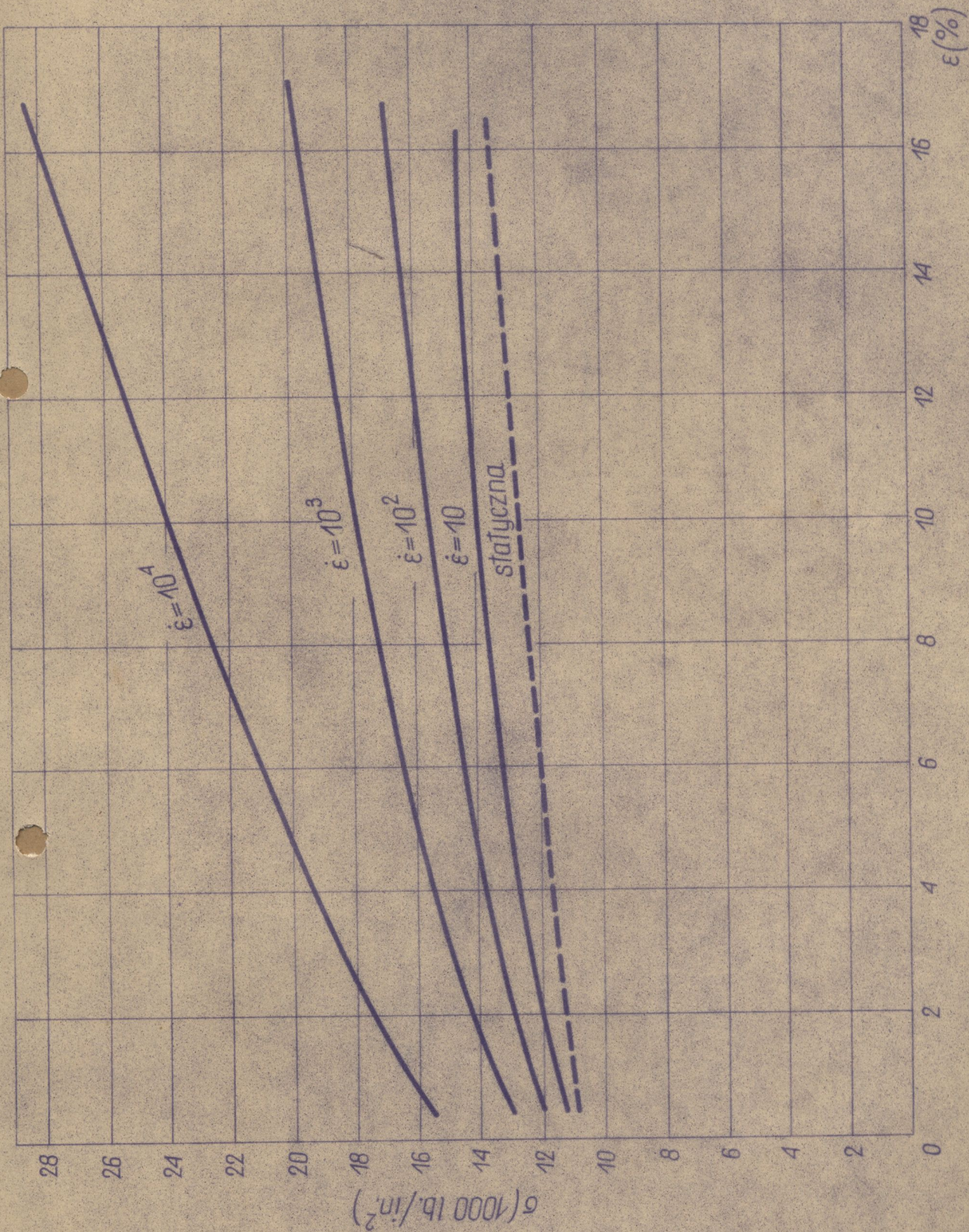
Rys. 5. Wpływ prędkości odkształcenia na krzywą  $\sigma$ - $\epsilon$  dla aluminium (T.E. Tietz i J.E. Dorn [71])



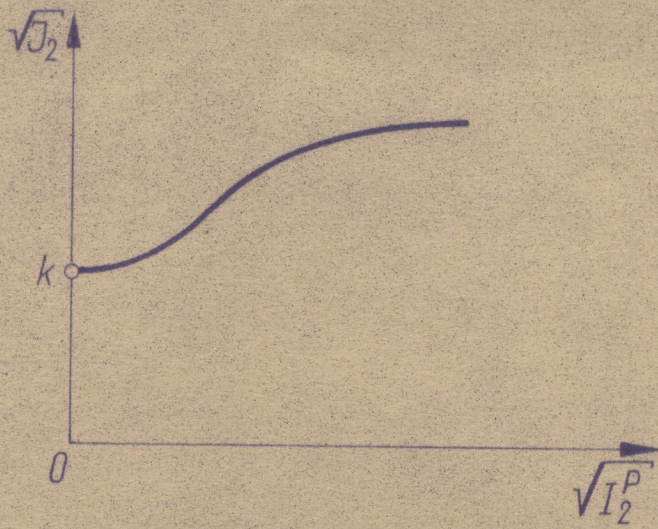
Rys. 6. Rozkład odkształceń trwałych (J.D. Campbell [13])



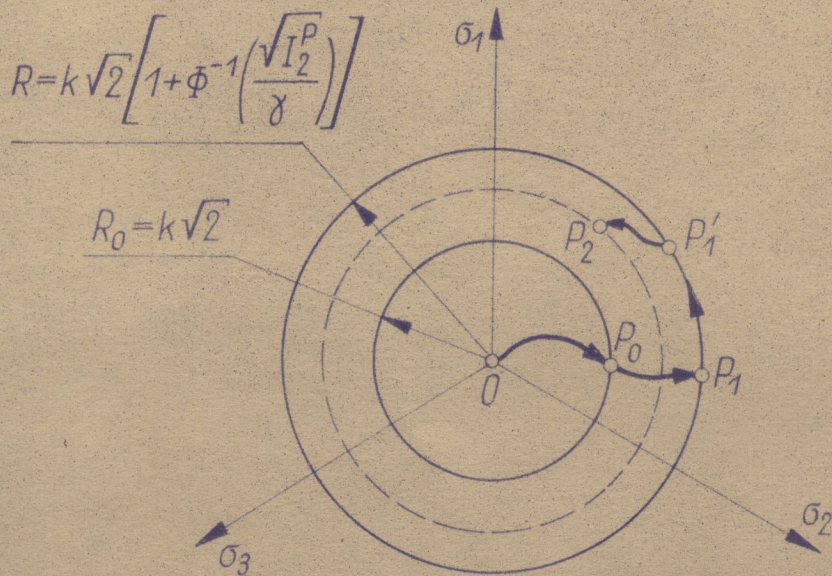
Rys. 7. Końcowy rozkład odkształceń w długim pręcie (czyste aluminium).  
(S. Rajnak, F.E. Hauser i J.E. Dorn [61]).



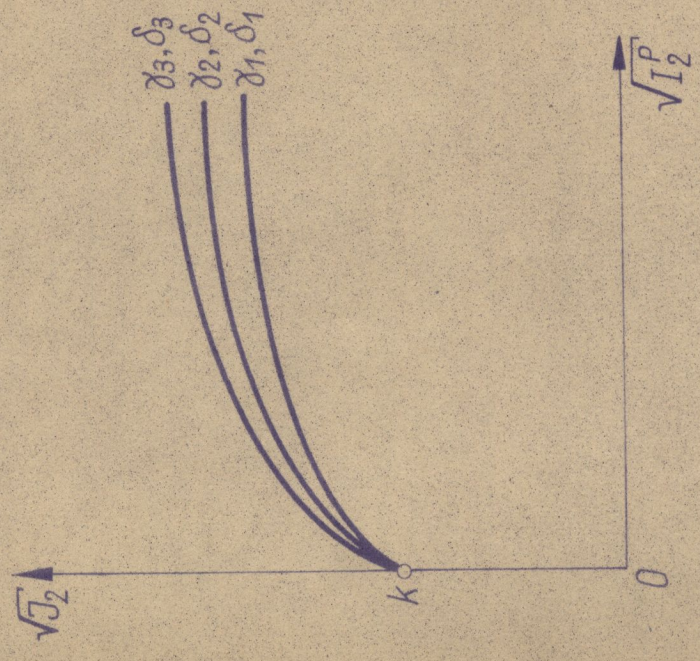
Rys. 8. Krzywe  $\sigma - \epsilon$  dla czystego aluminium przy  $\dot{\epsilon} = \text{const}$ .  
(F.E. Hauser, J.A. Simmons i J.E. Dorn [29]).



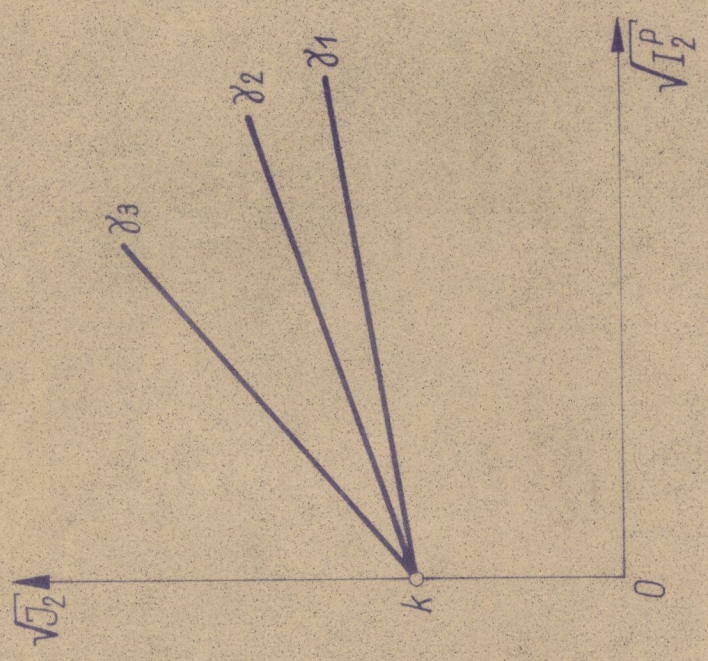
Rys. 9



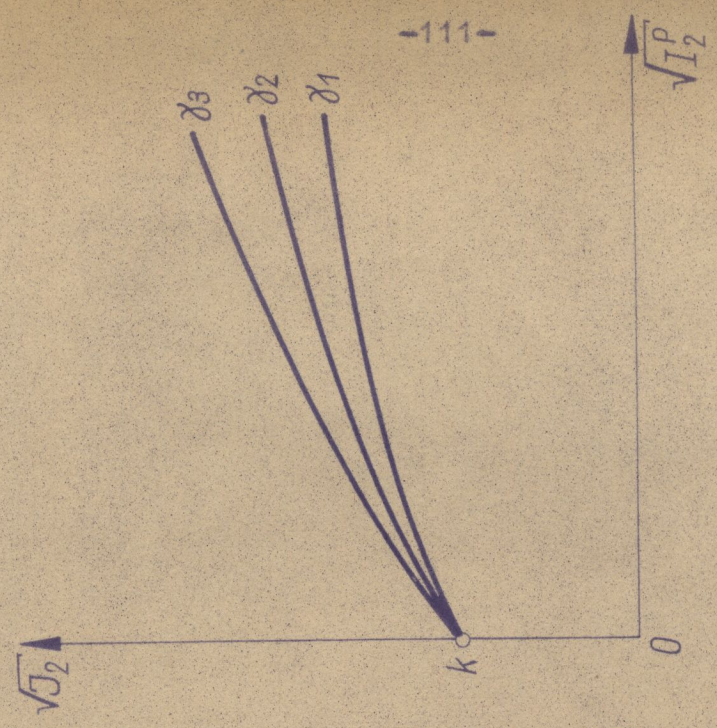
Rys. 10



Rys. 11

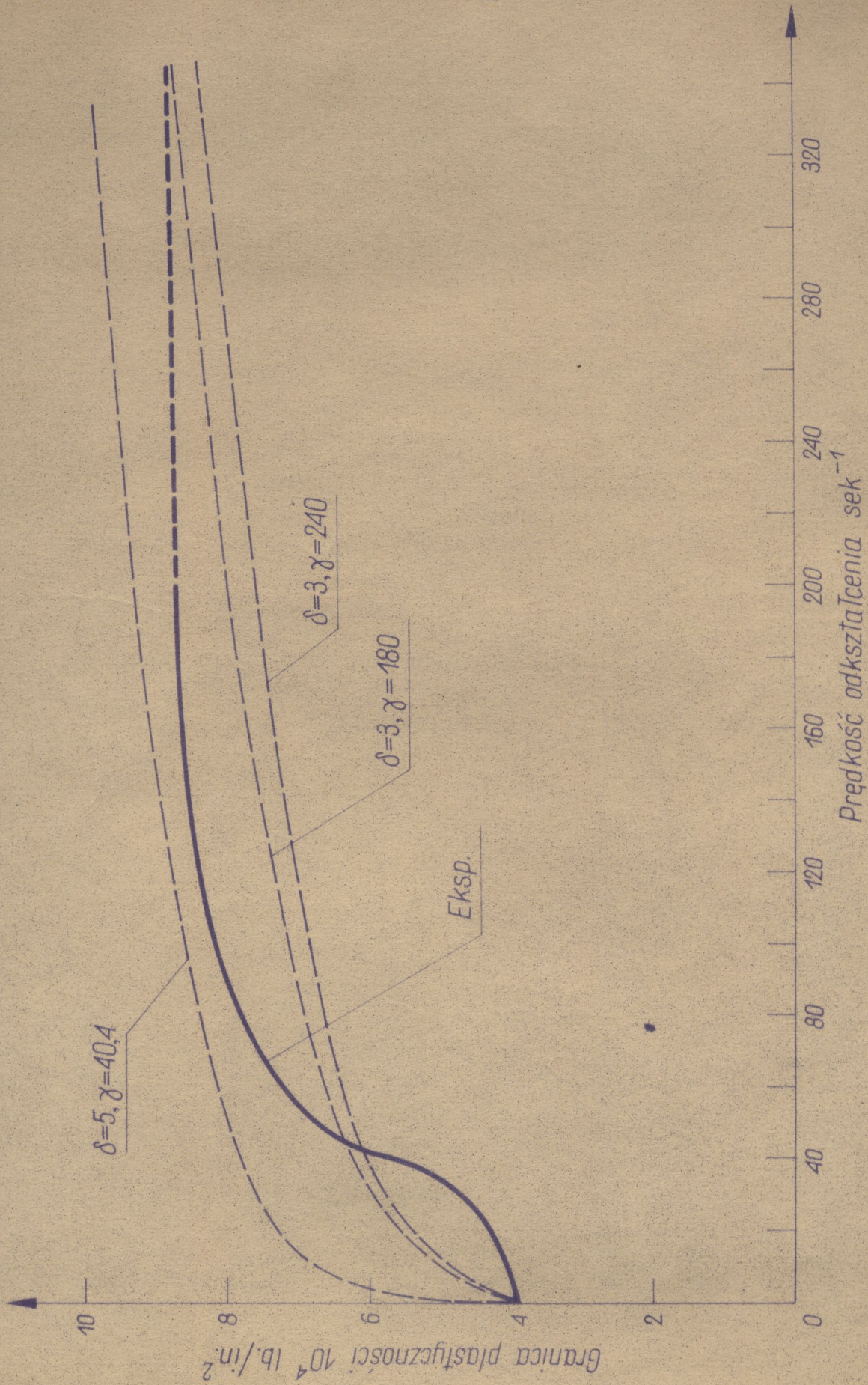


Rys. 12

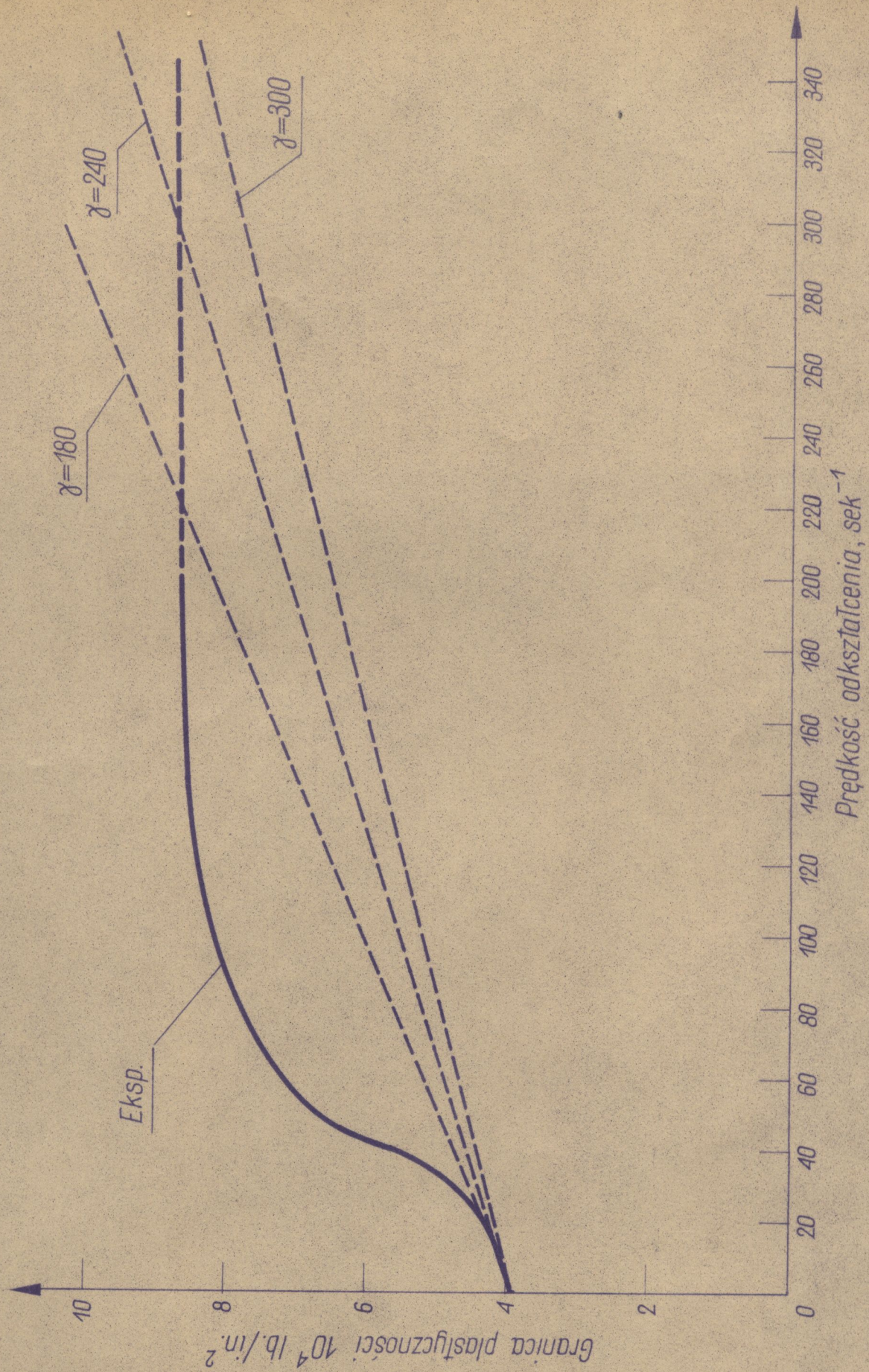


Rys. 13

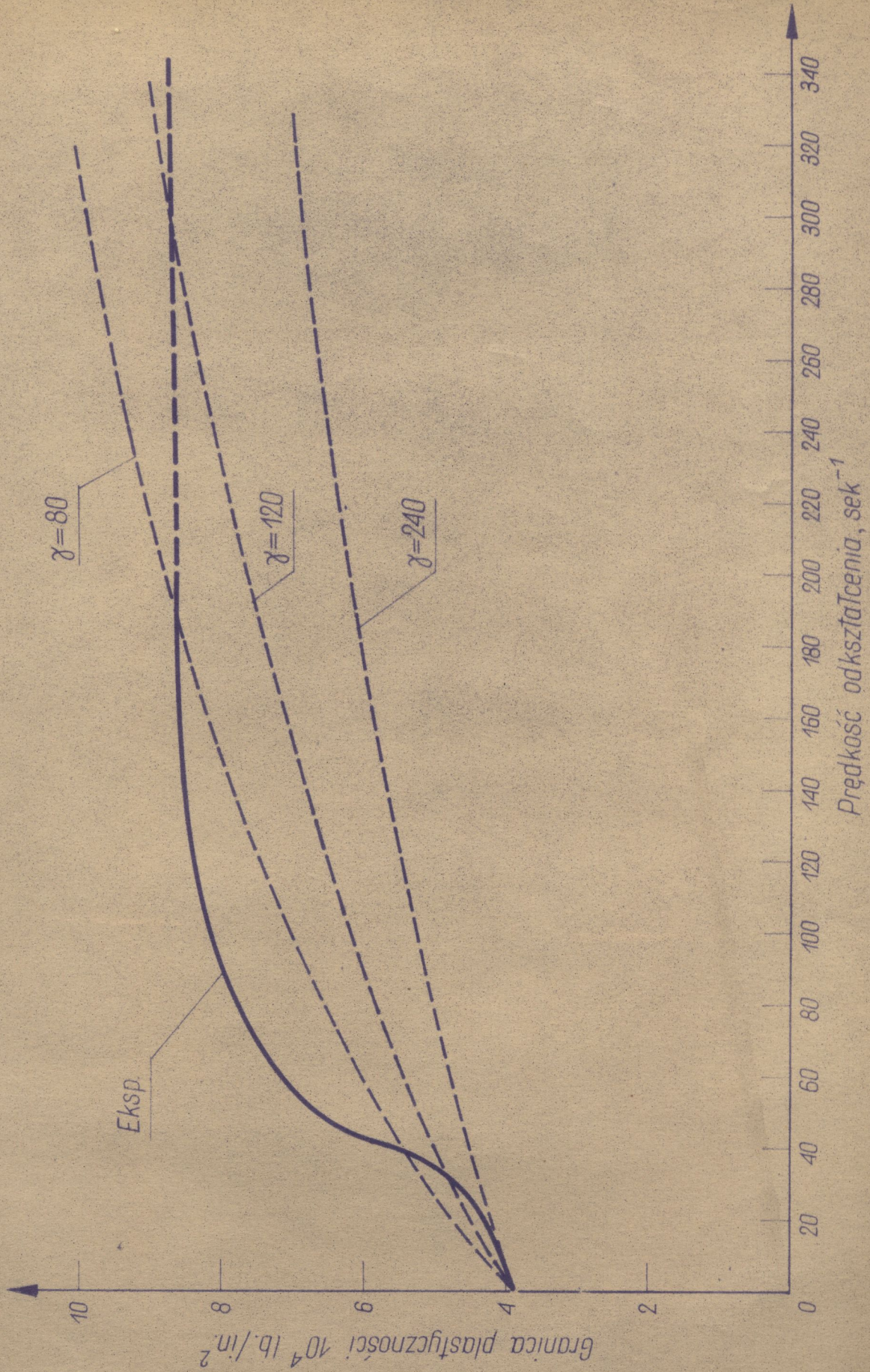




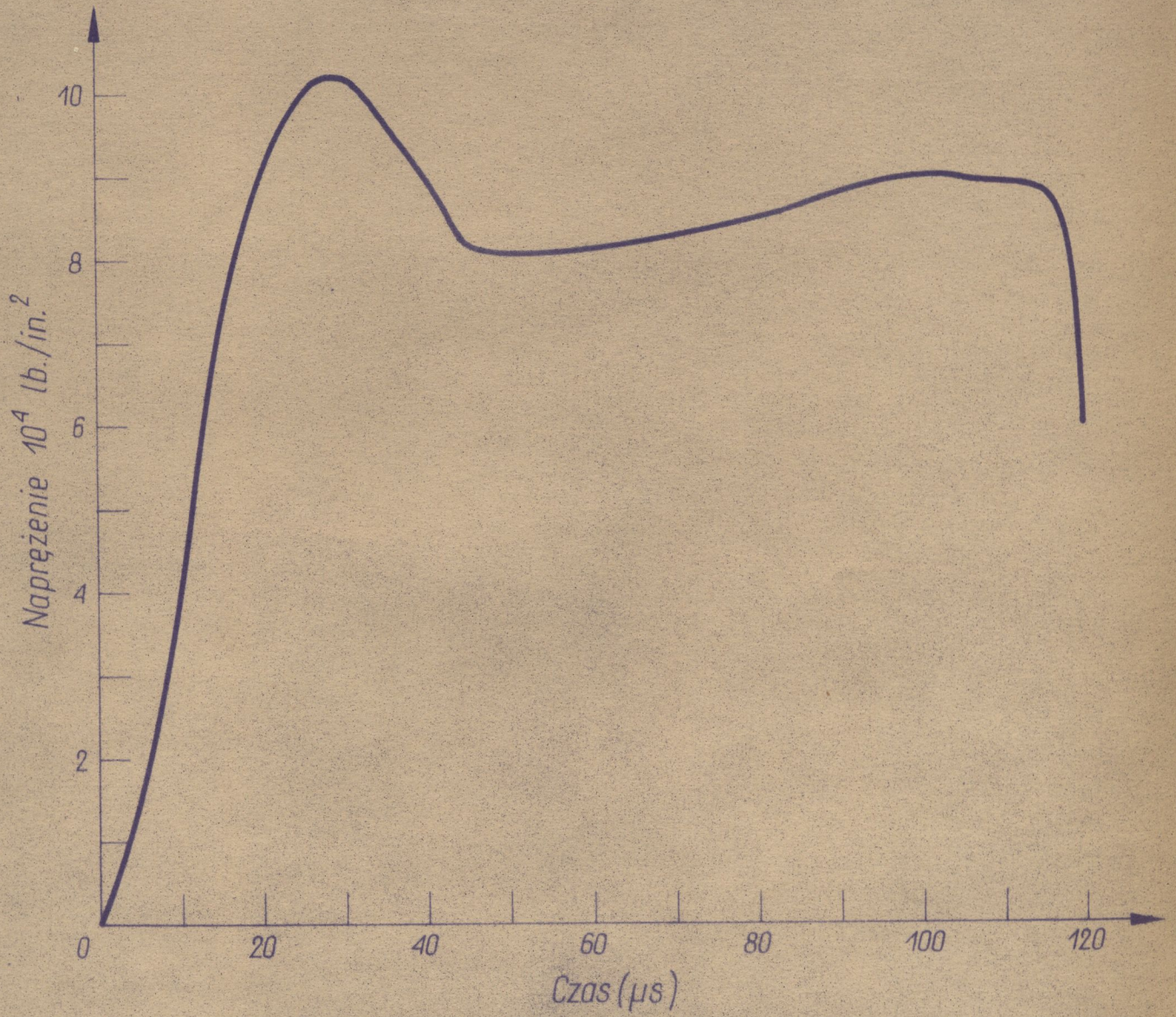
Rys. 14



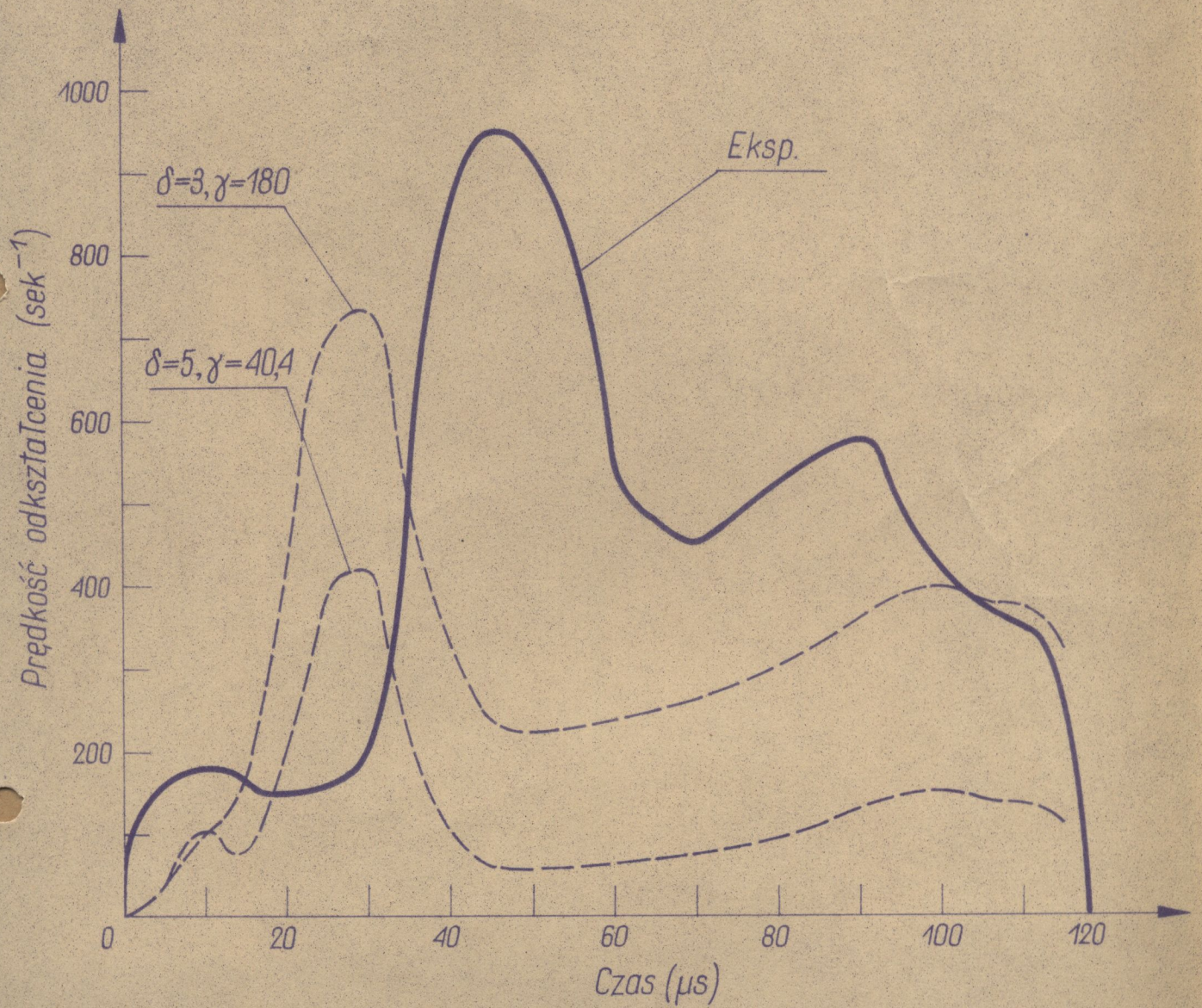
Rys. 15



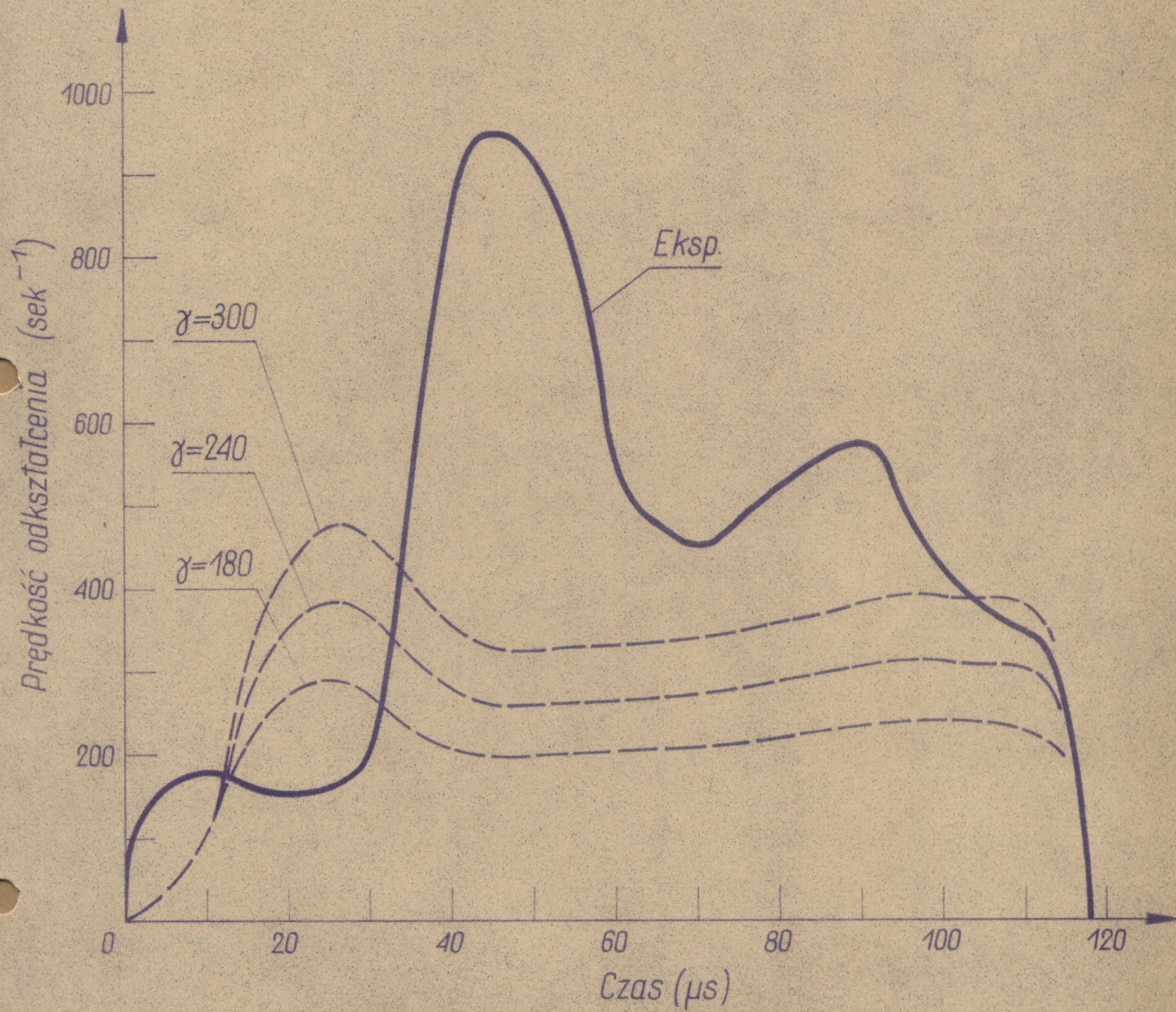
Rys. 16



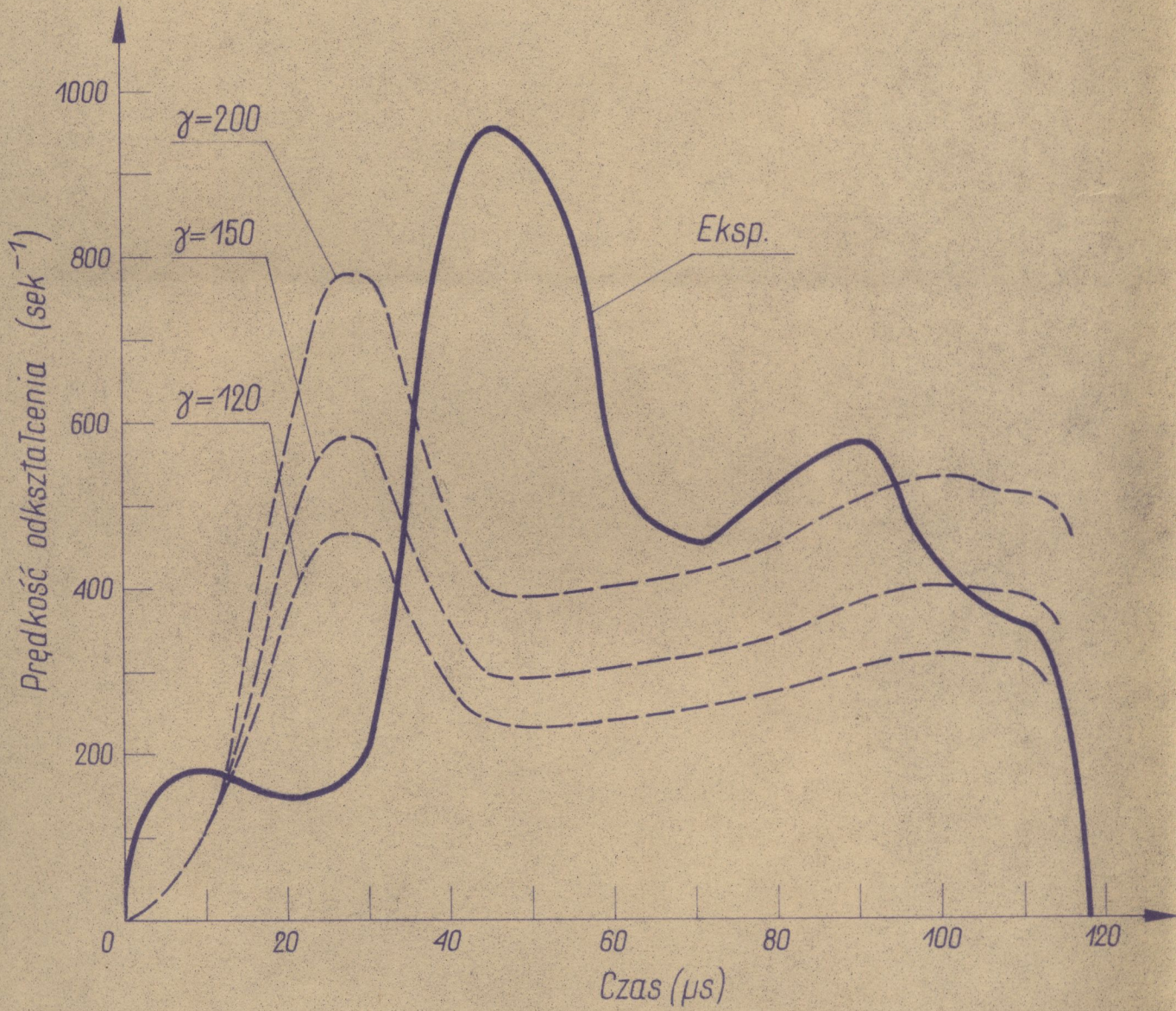
Rys. 18



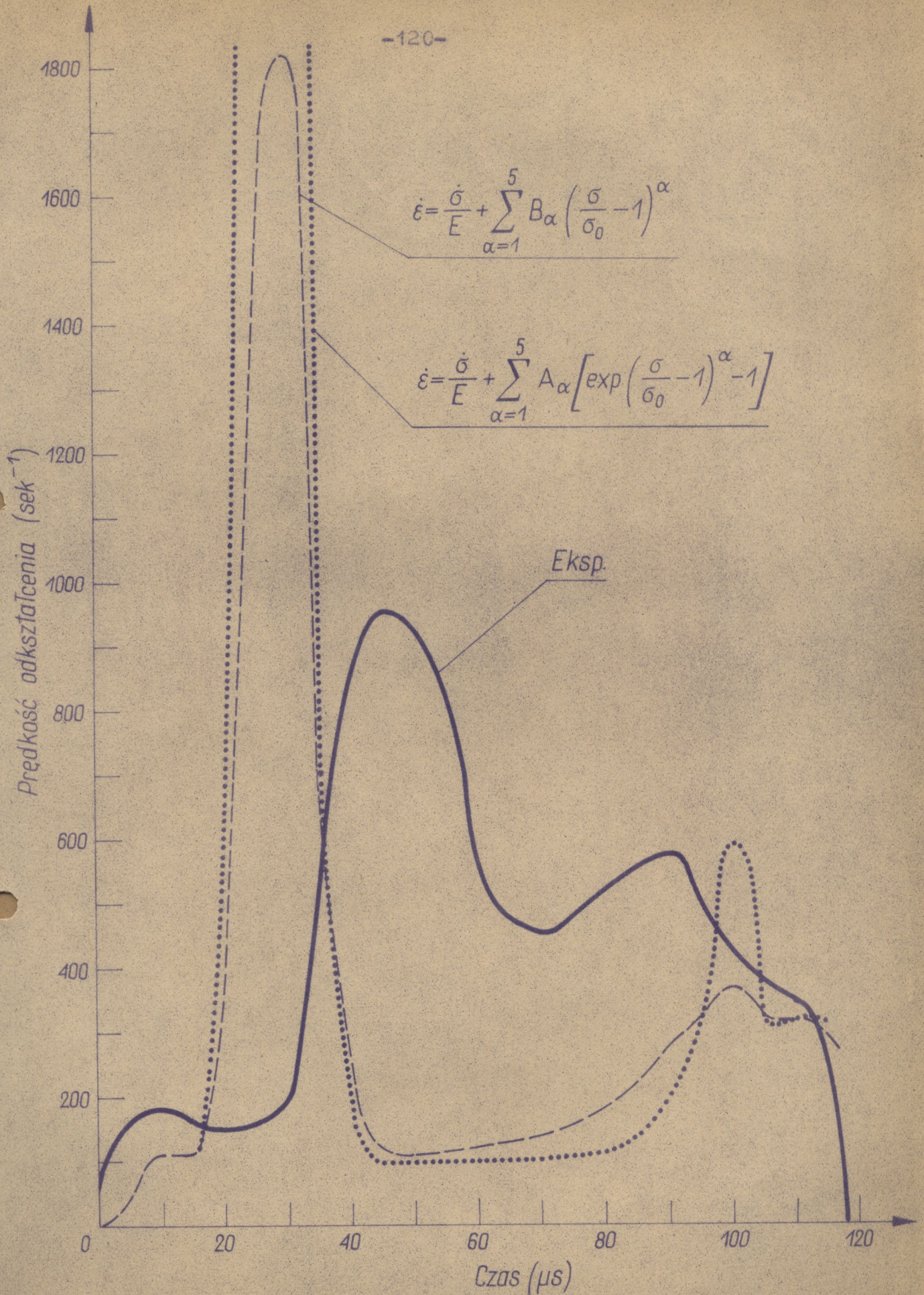
Rys. 19



Rys. 20

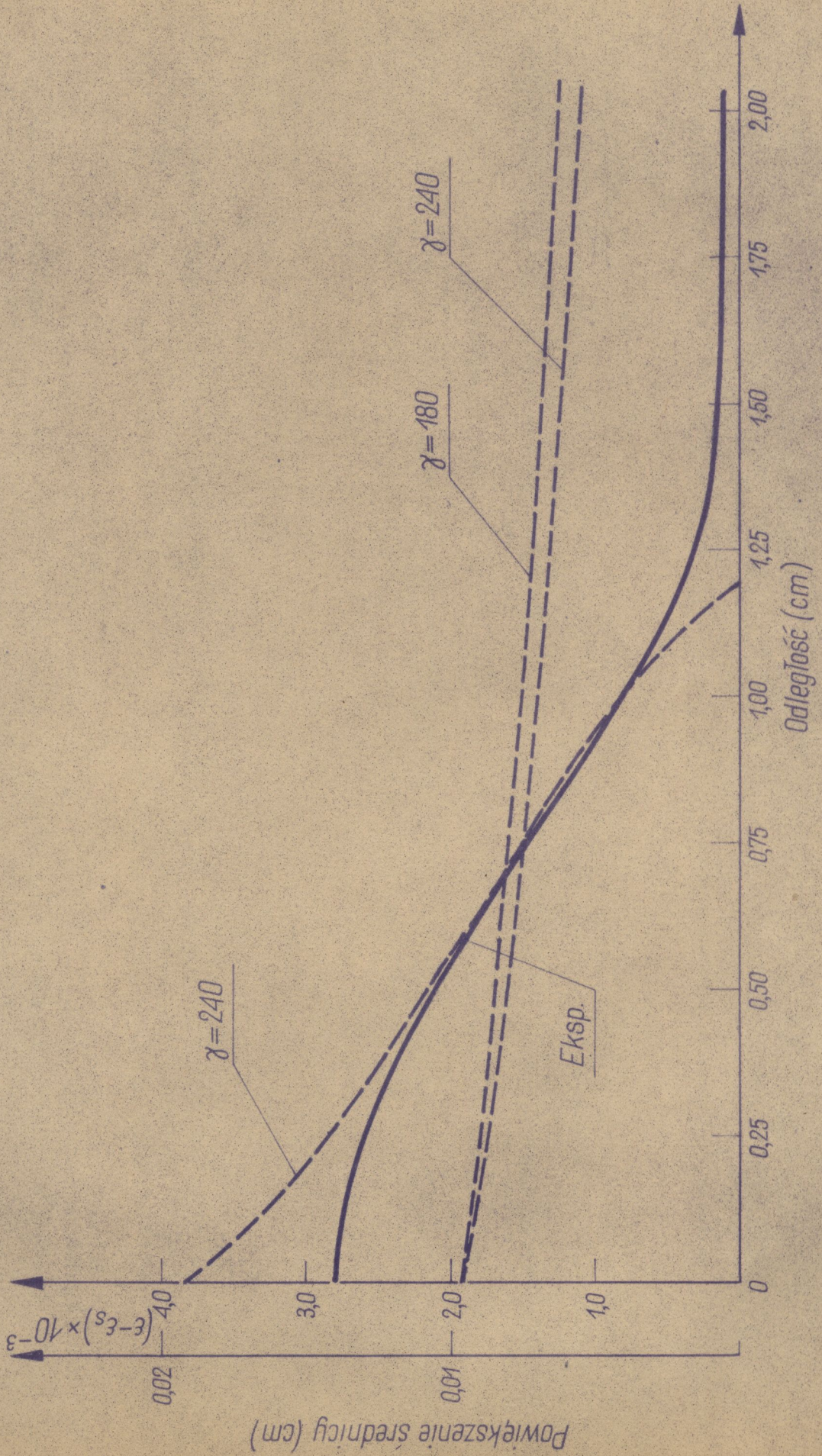


Rys. 21

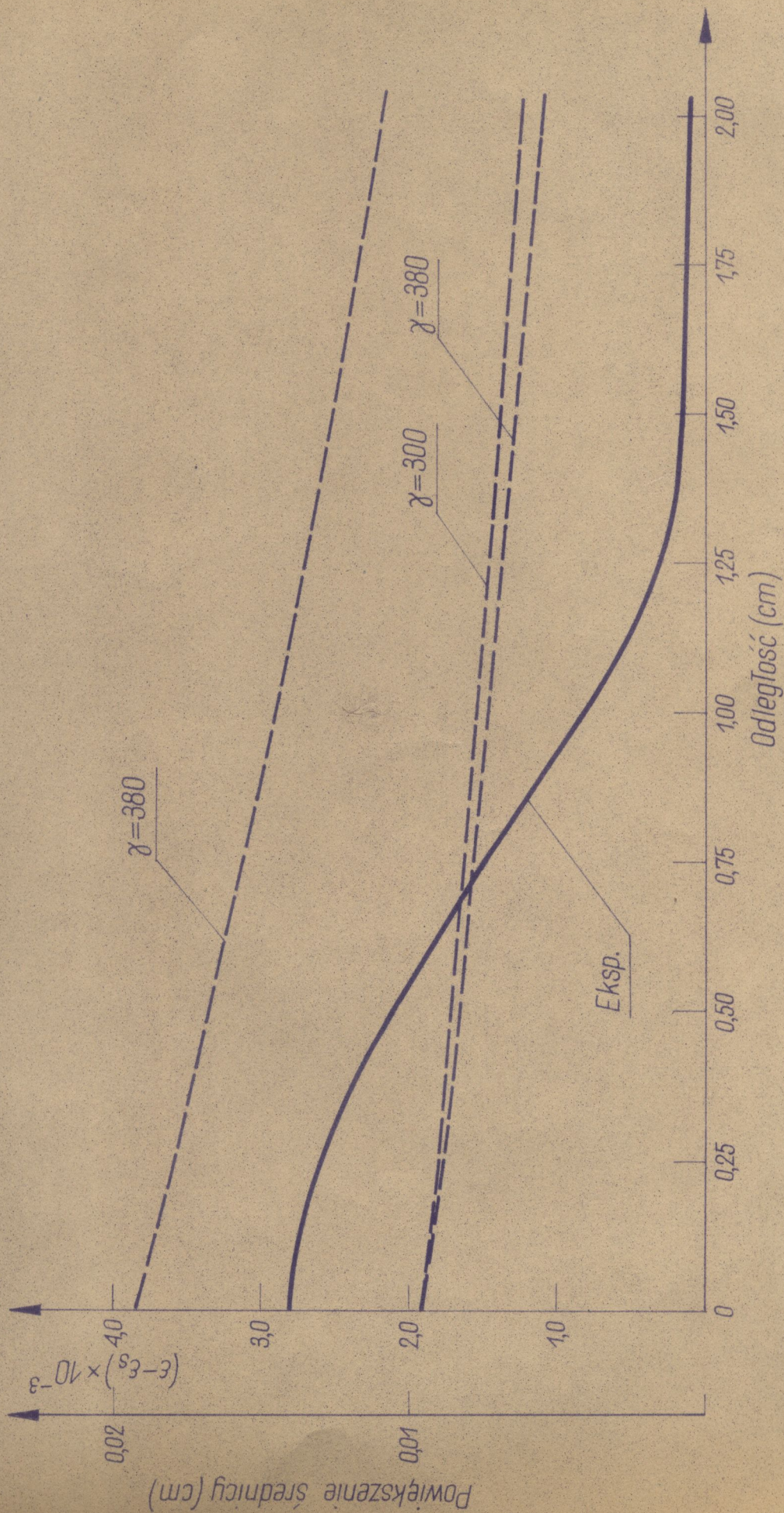


Rys. 22

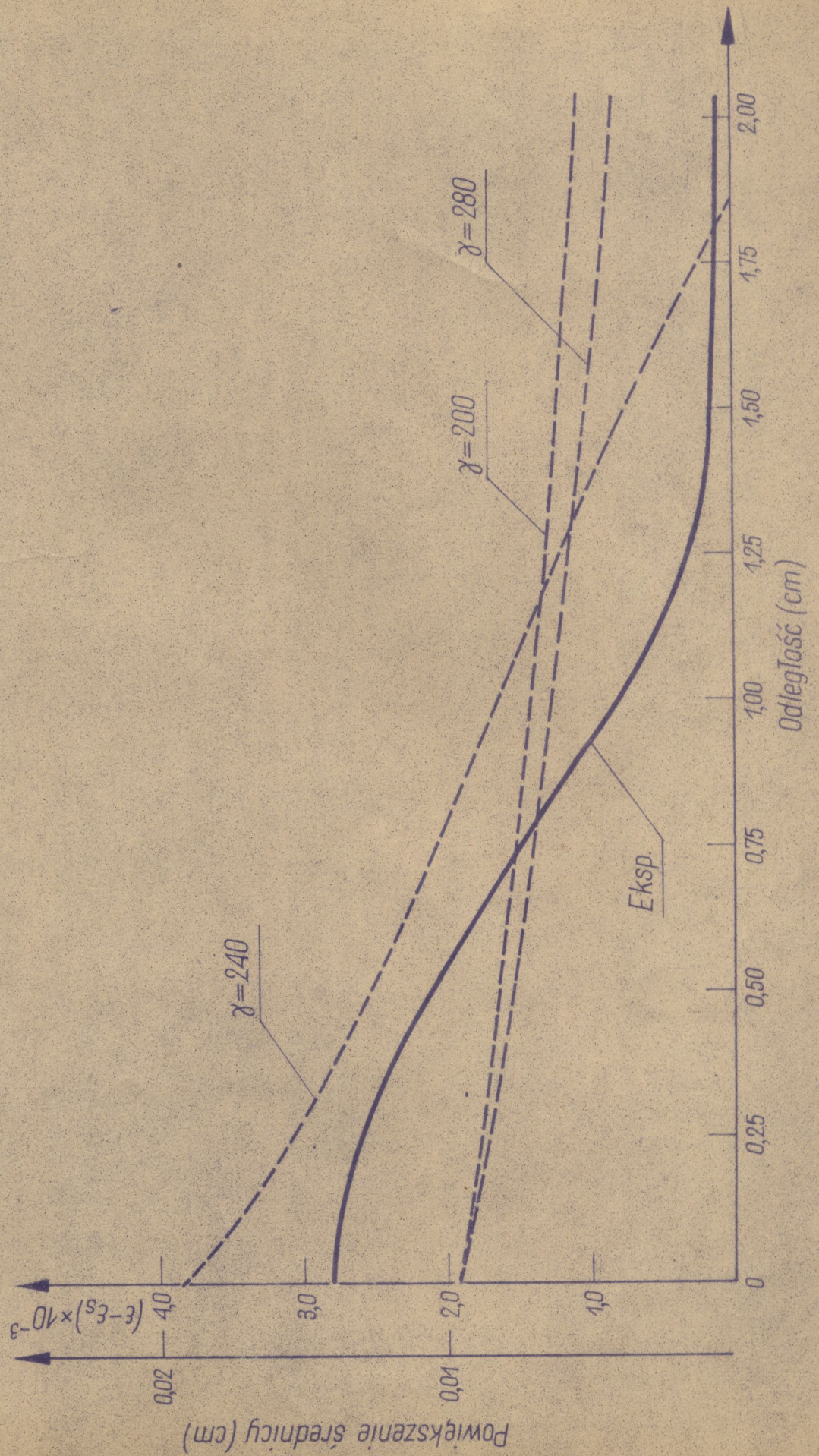




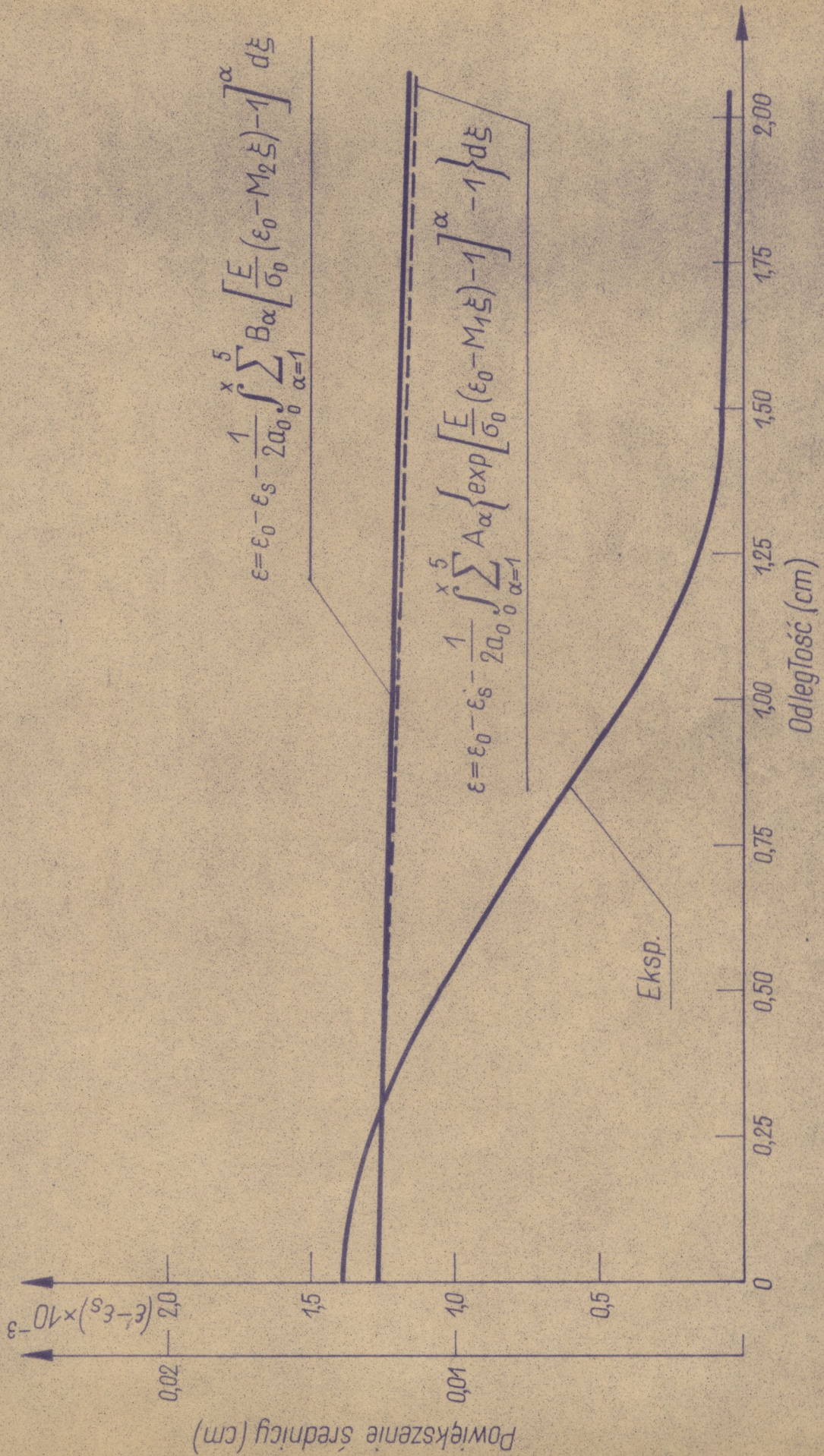
Rys. 23



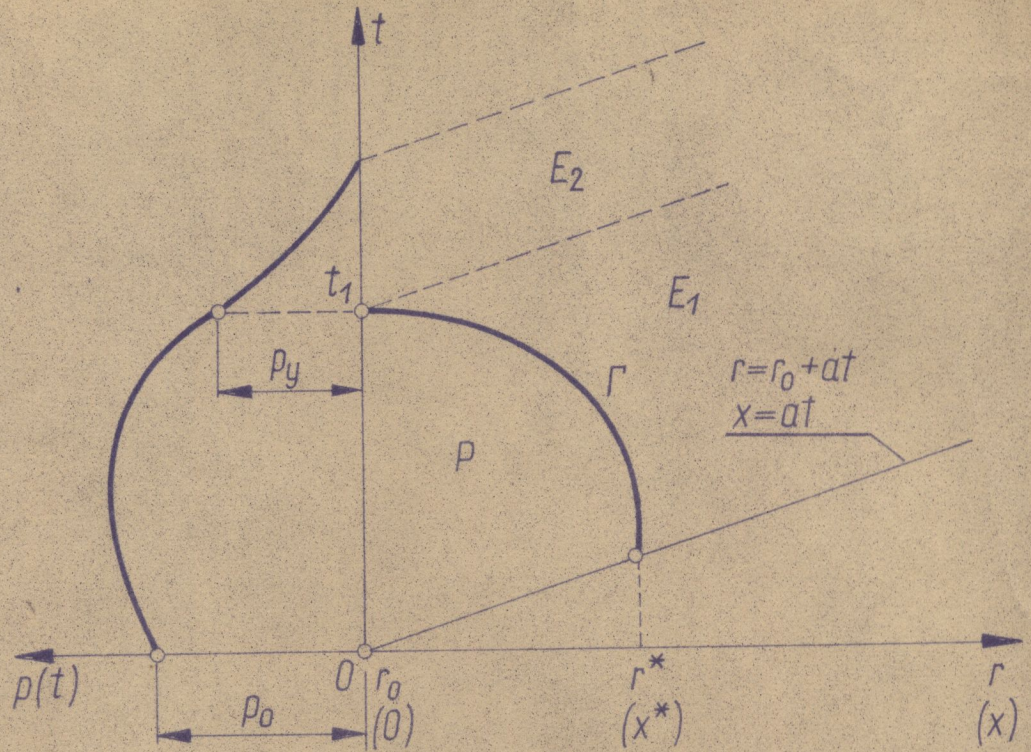
Rys. 24



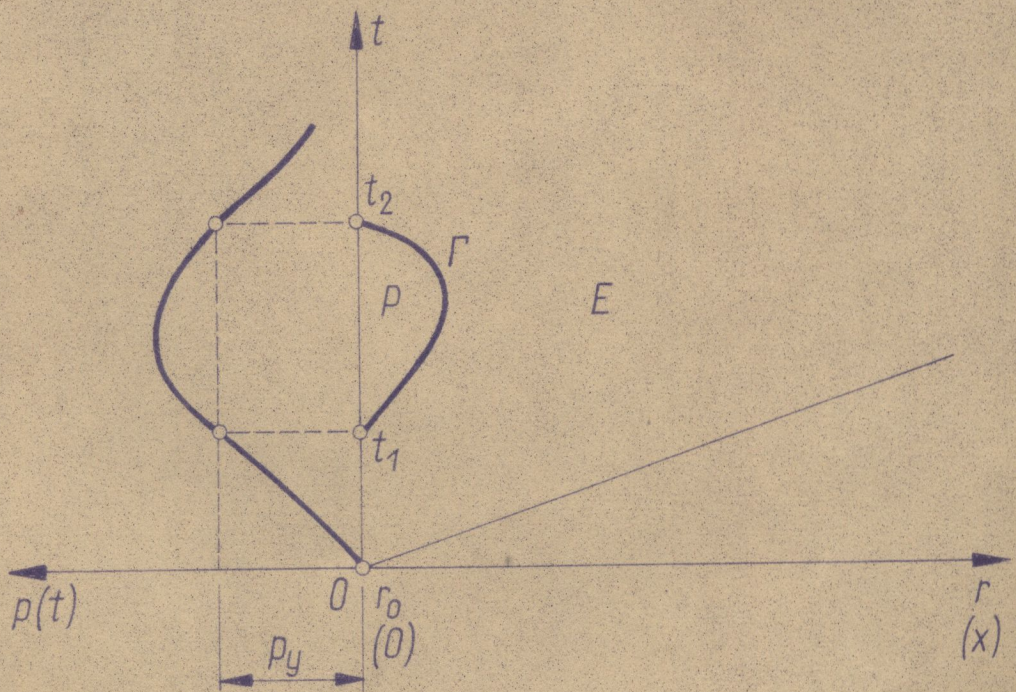
Rys. 25



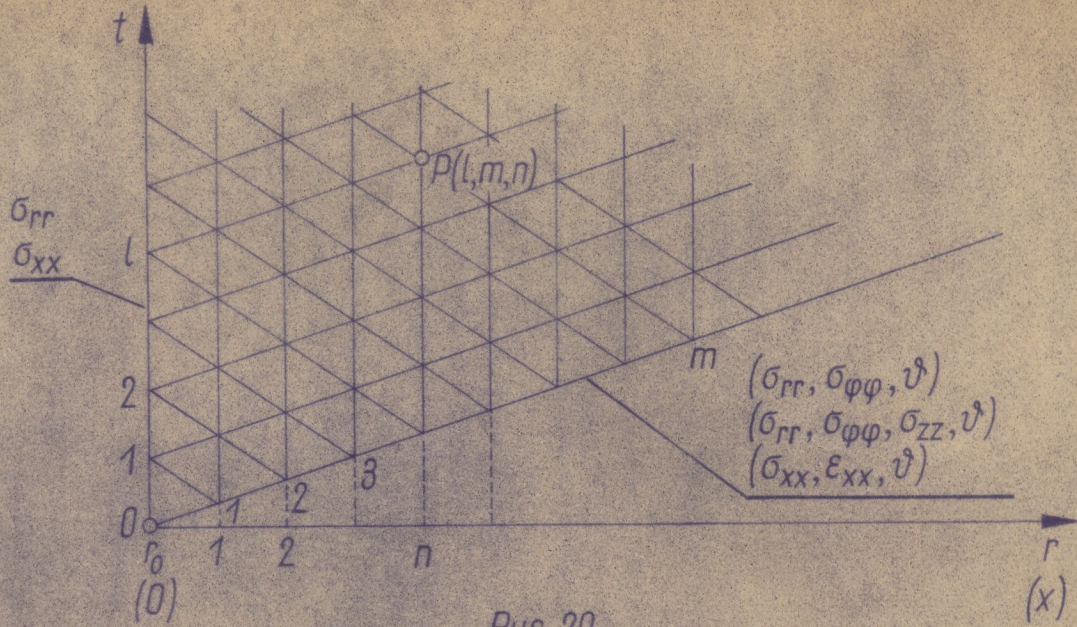
Rys. 26



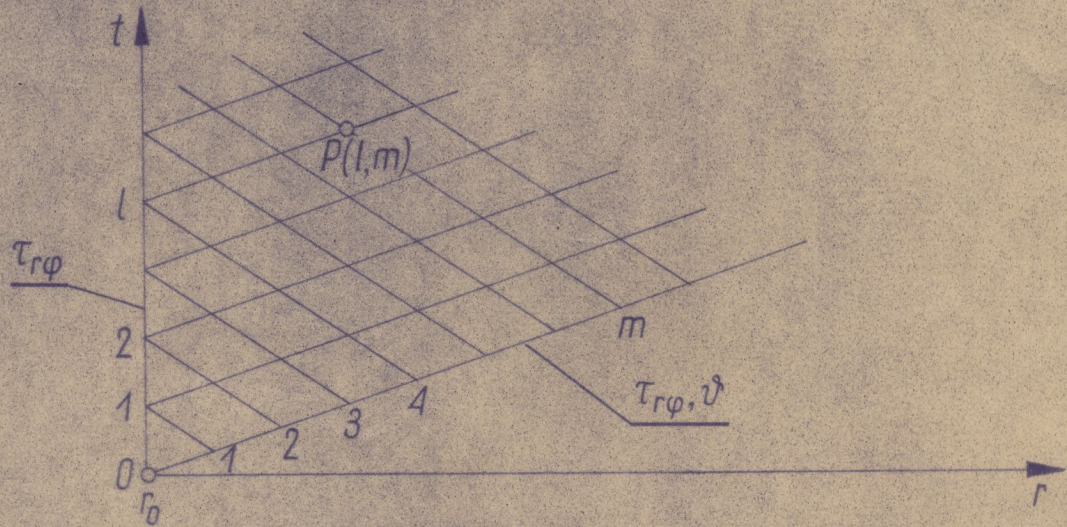
Rys. 27



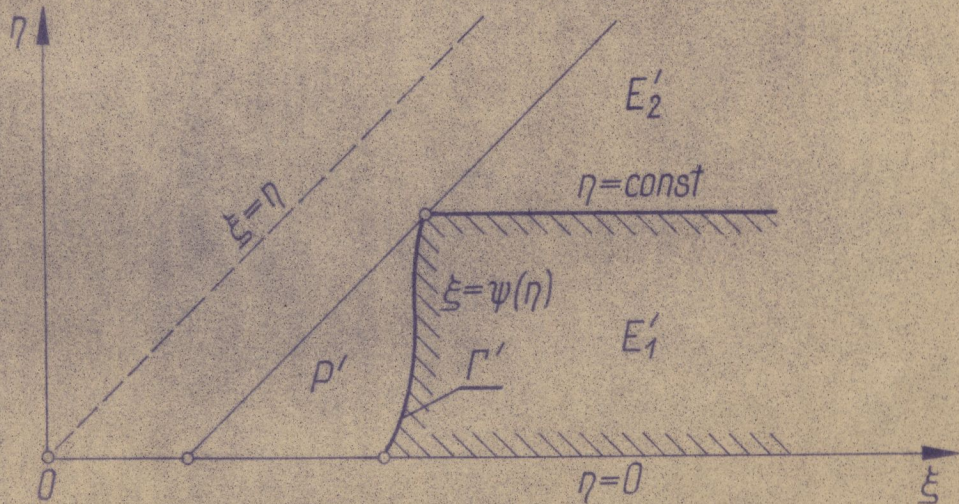
Rys. 28



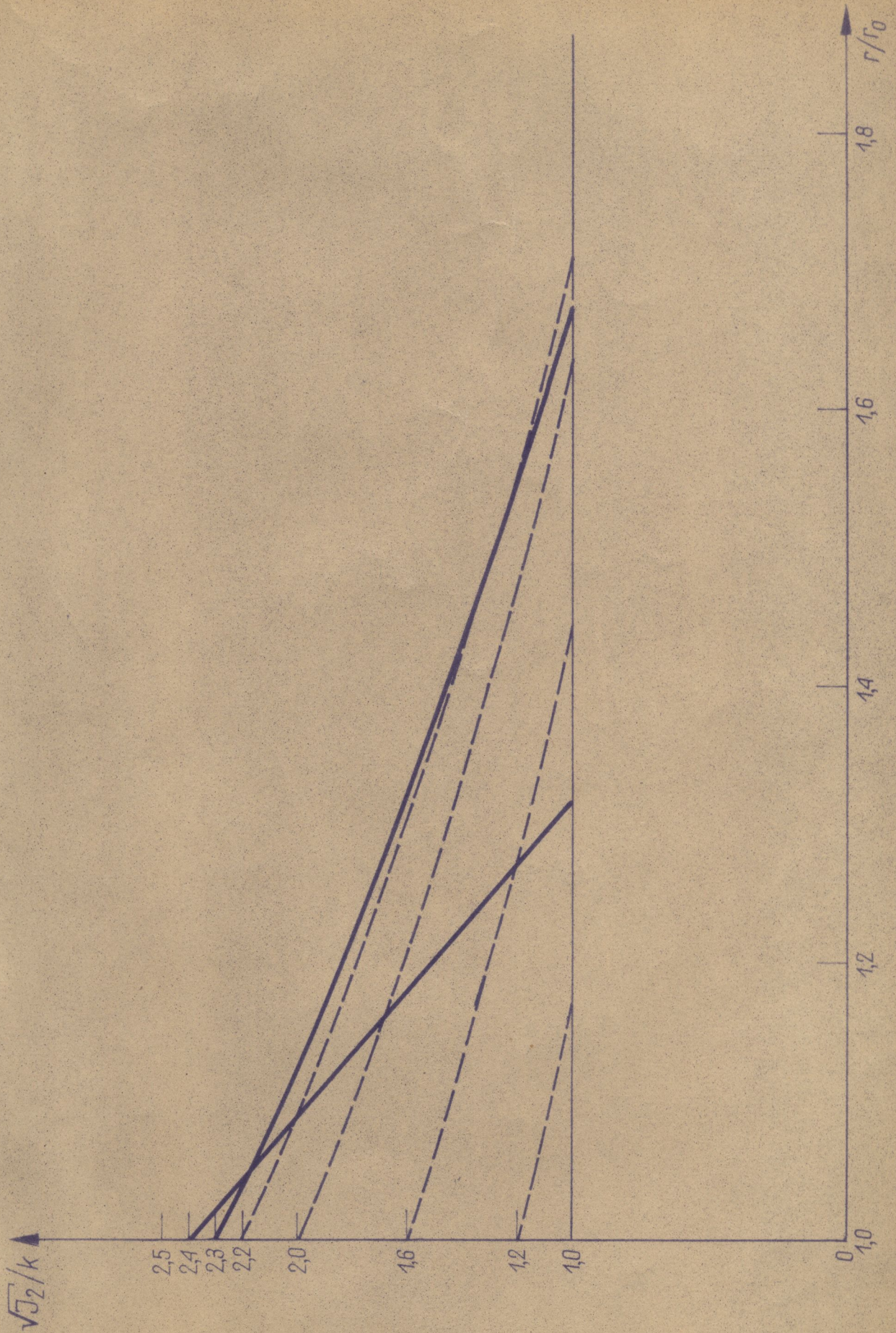
Rys. 29



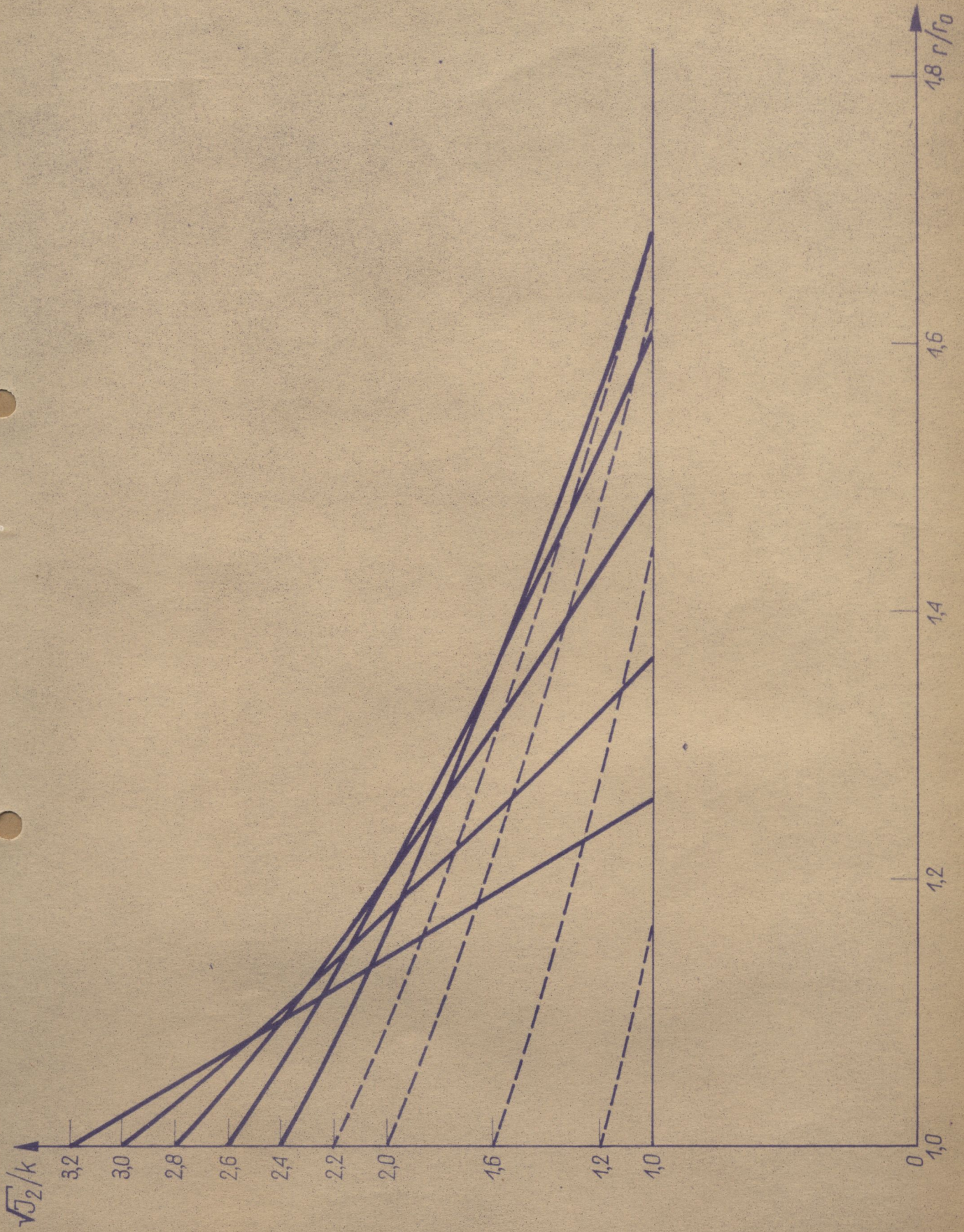
Rys. 30



Rys. 31



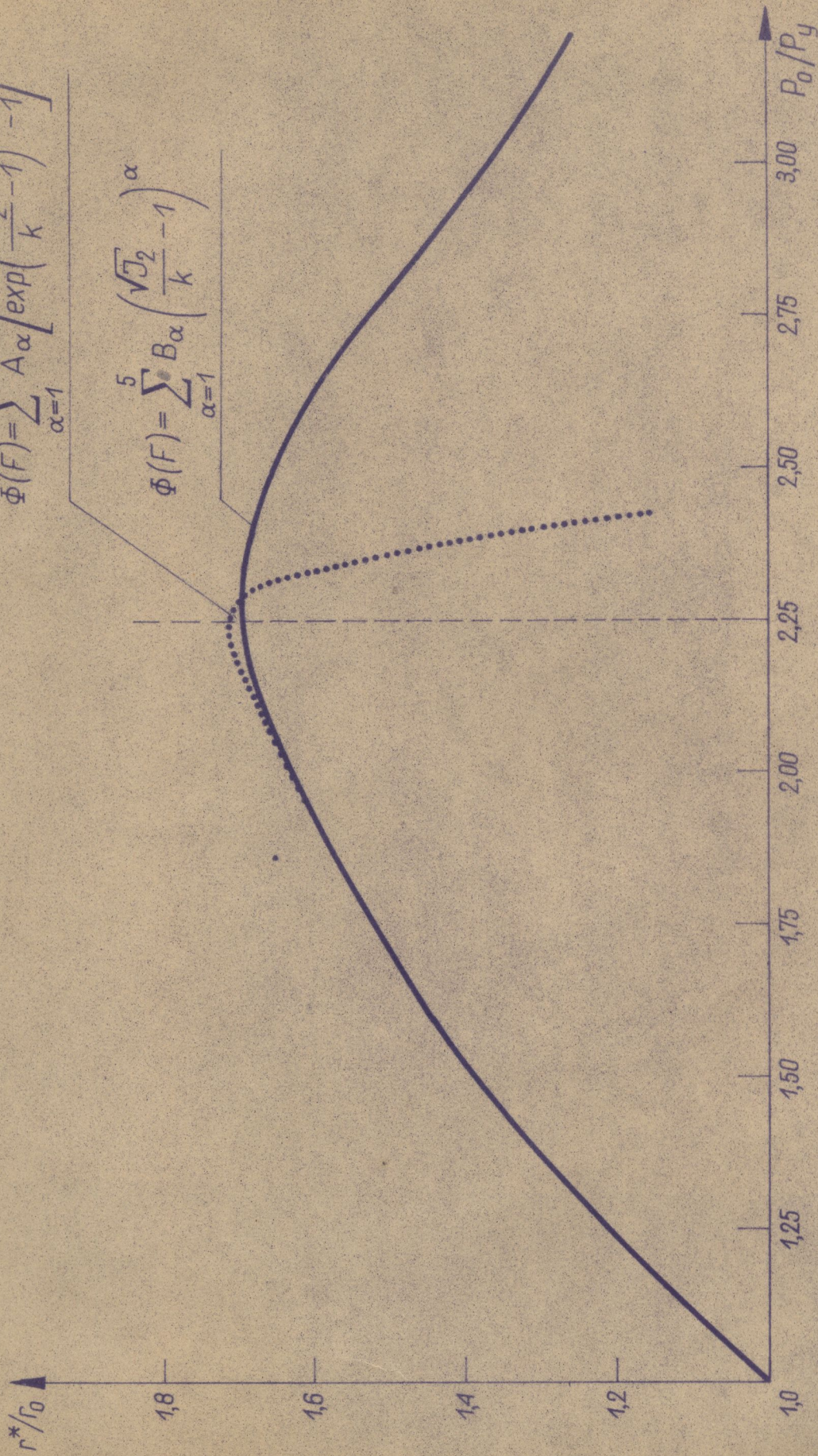
Rys. 32



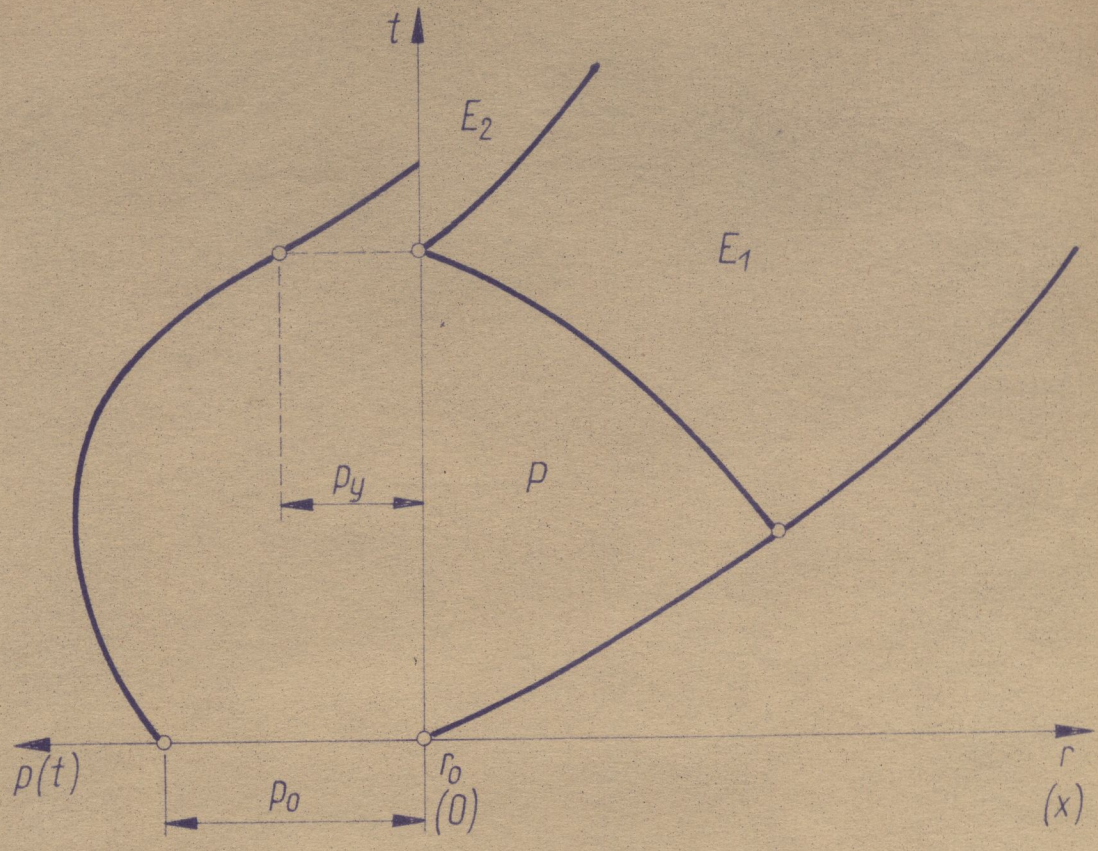


$$\Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^5 A_{\alpha} \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right]$$

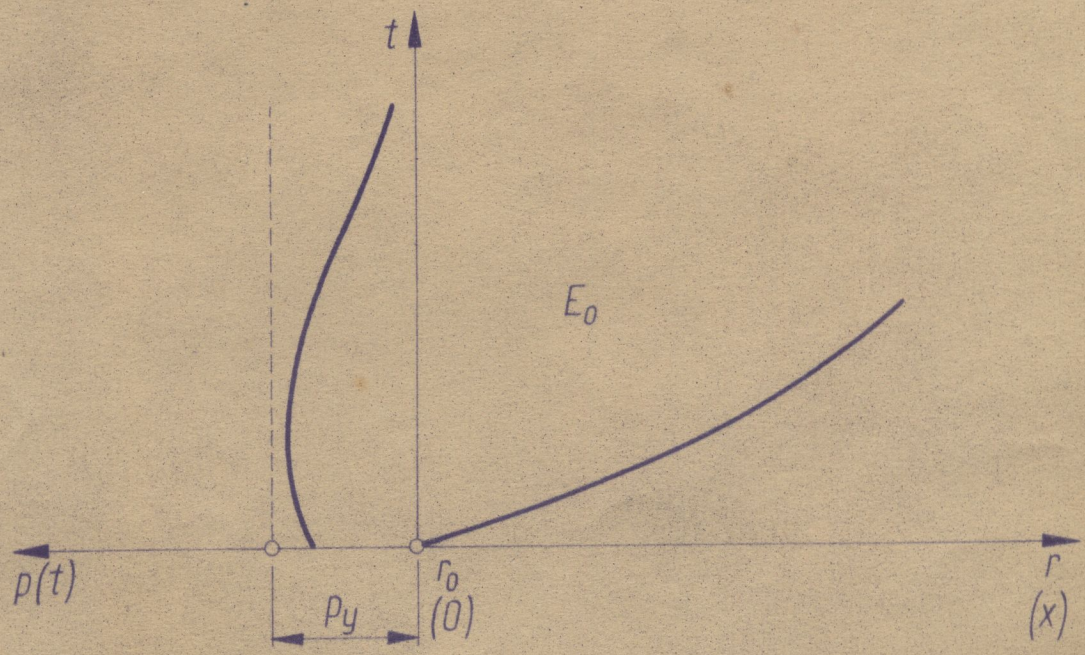
$$\Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^5 B_{\alpha} \left( \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^{\alpha}$$



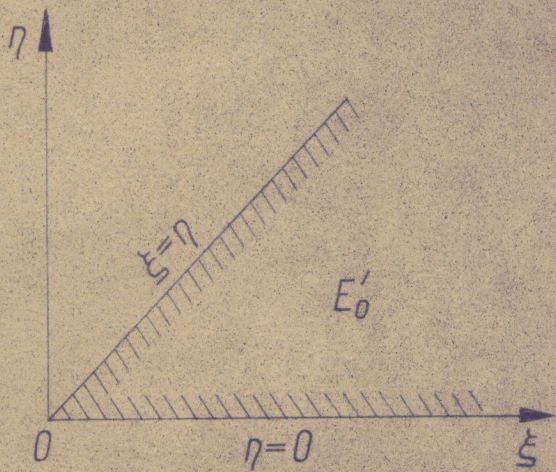
Rys. 34



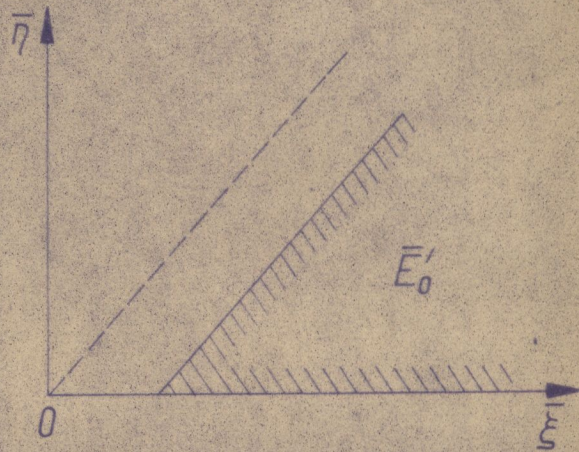
Rys. 35



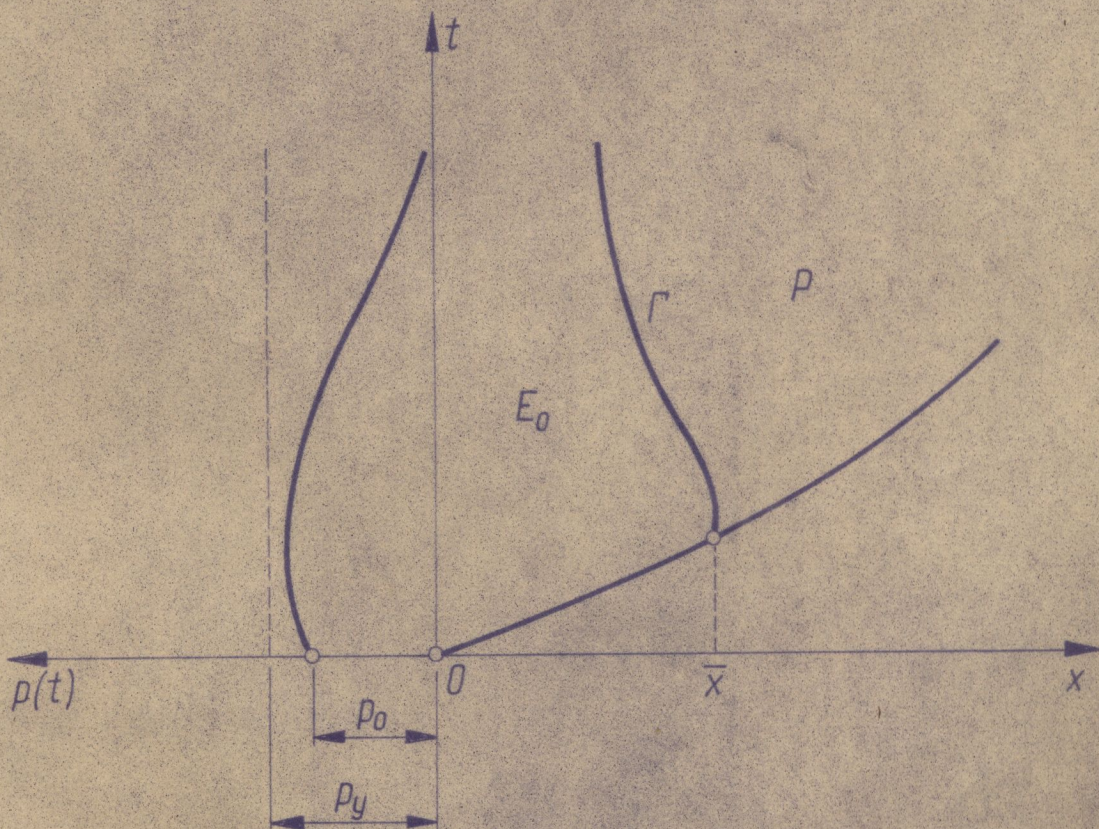
Rys. 36



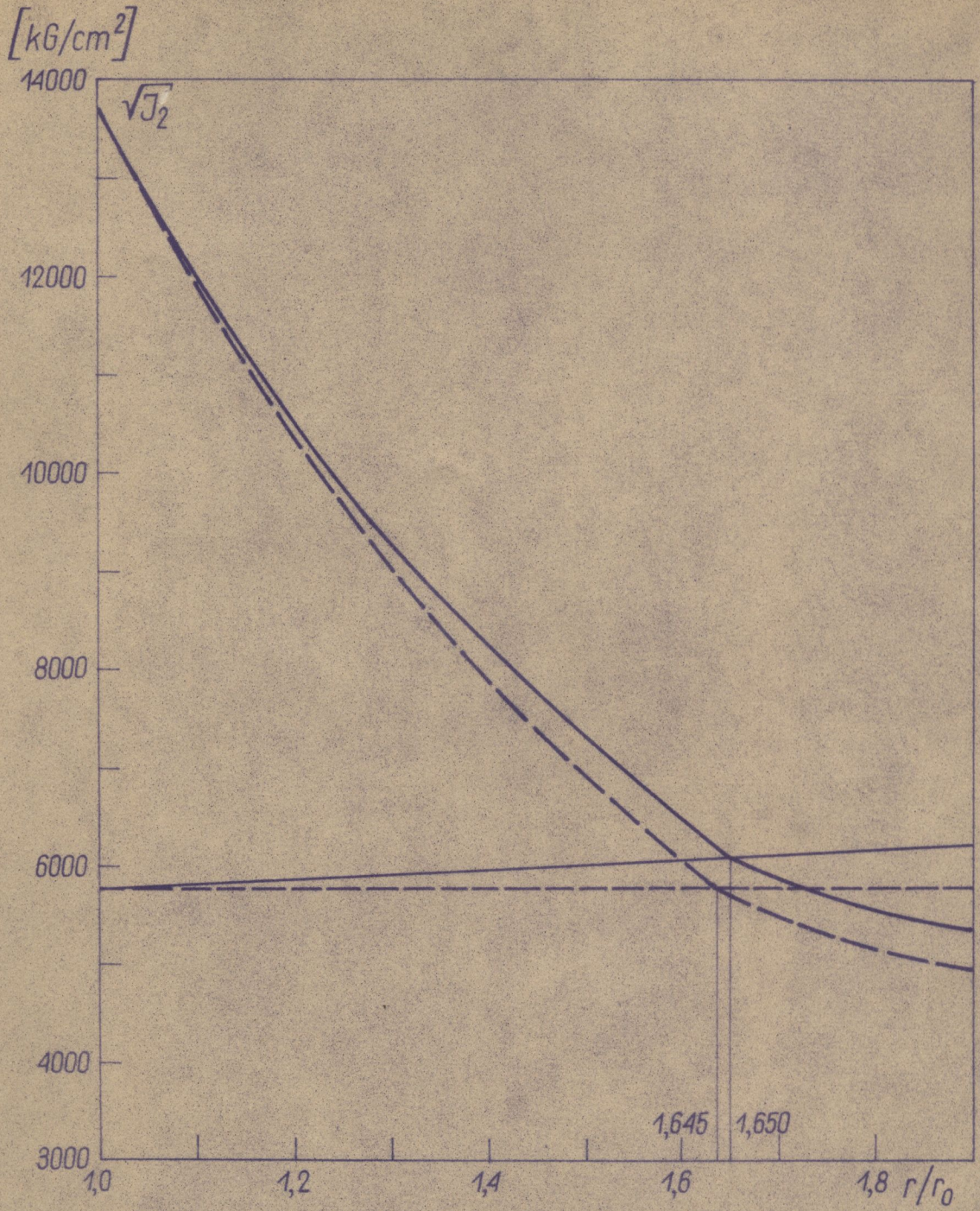
Rys. 37



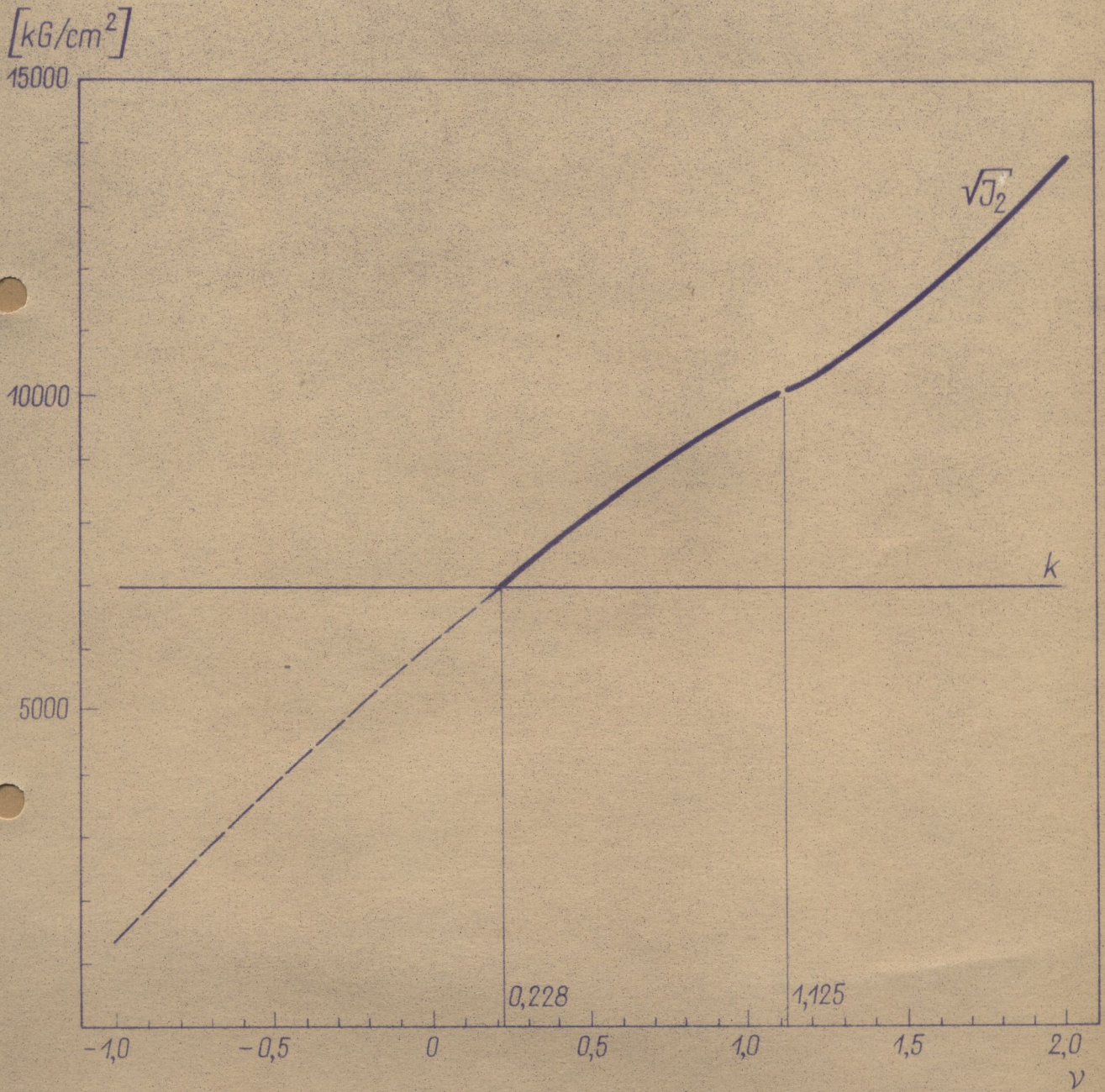
Rys. 38



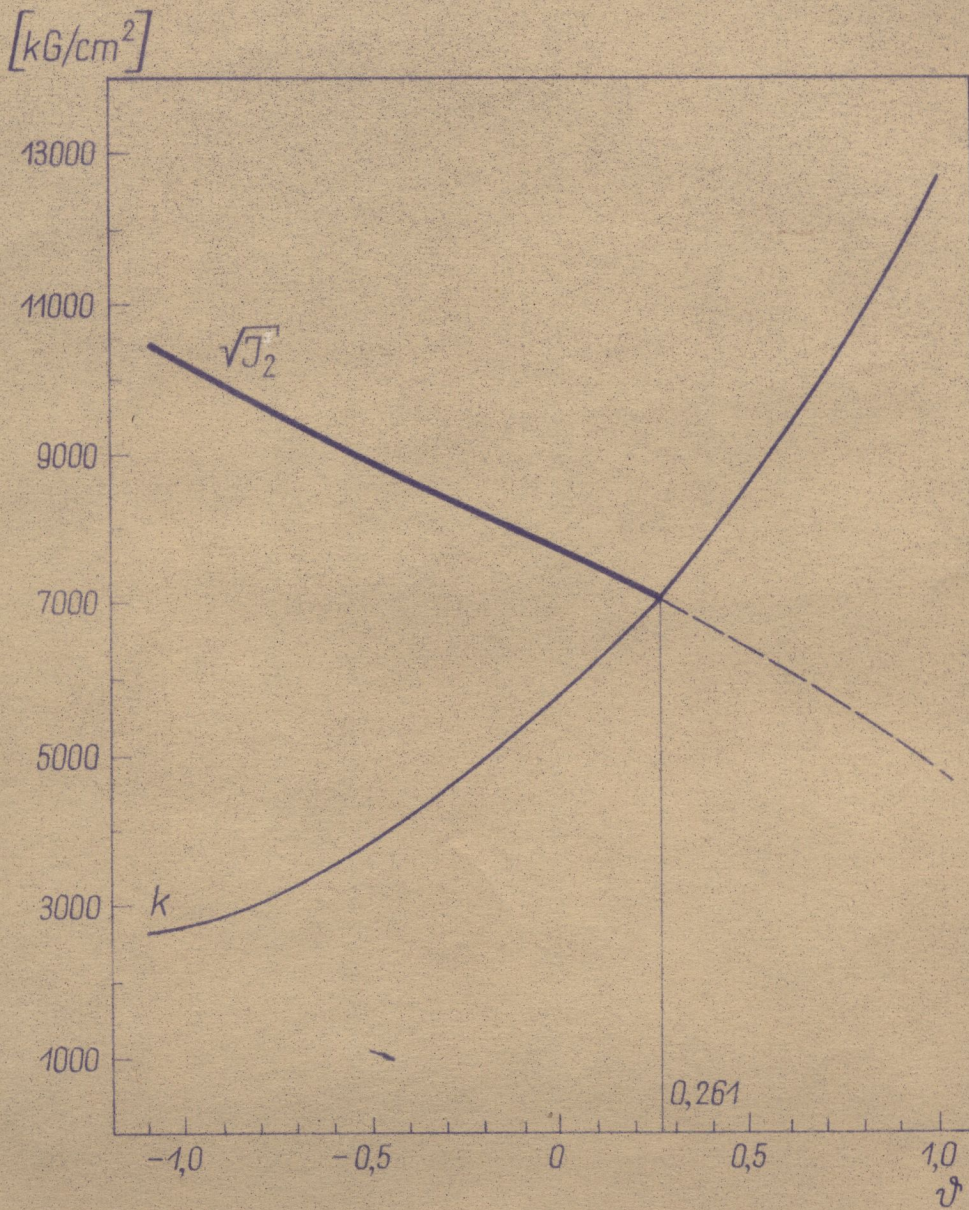
Rys. 39



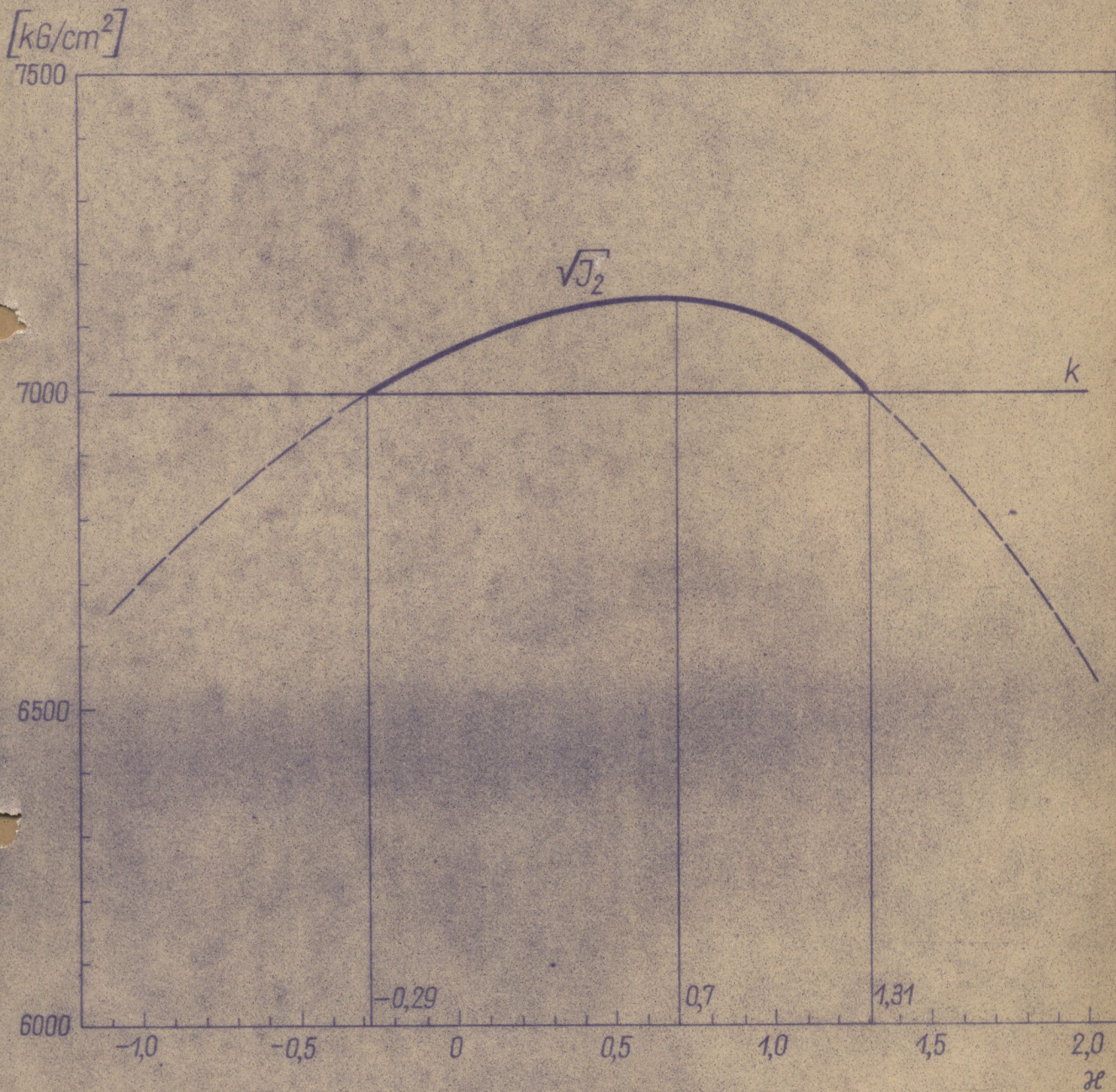
Rys. 40



Rys. 41



Rys. 42



Rys. 43

