

PRACOWNIA REOLOGII

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

INSTYTUT

PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

44/4

L5/2

METODY DYNAMIKI

POWOLNYCH DYSSYPATYWNYCH

PRZEPŁYWÓW GAZU W. PRZEWODACH

W OBECNOŚCI WYMIANY CIEPŁA

Praca habilitacyjna

dr inż. Jacek Mączyński

Kraków, lipiec 1962.



~~14517~~

73/D

1. WSTĘP.

Obliczanie i to obliczanie w sposób szybki i dostatecznie pewny rozprywu prądów powietrza w kopalni jest obecnie uznawane za konieczne dla prowadzenia ruchu w kopalni.

Wynika to z rozmiarów kopalń współczesnych, z ich zwiększającej się głębokości, wzrastającej roli przewietrzania, które w coraz większym stopniu staje się jednym z czynników decydujących o sprawnej eksploatacji kopalni, a nawet czynnikiem zasadniczo określającym bezpieczeństwo pracy w warunkach dołowych.

O rozmiarach zjawiska przewietrzania niech świadczy fakt, że w nowoczesnej kopalni masa przepływającego powietrza przewyższa często masę eksploatowanego węgla przeszło dwukrotnie. Masa ta napotyka w swym ruchu przez sieć wentylacyjną na opory, które pokonuje się działaniem wentylatora o różnicy ciśnień wynoszącej dwieście i więcej metrów słupa powietrza.

Zużycie energii osiąga na dobę kilka tysięcy kilowatogodzin, co jest porównywalne z energią zużytą na transport szybowy. Z tych względów dbałość o właściwy rozpryw powietrza w kopalni jest w pełni uzasadniona zarówno technicznie jak ekonomicznie.

Oczywiście korzyści wynikające z właściwej wentylacji znacznie przekraczają wydatki z wentylacją związane. Korzyści te wynikają z wydajności pracy, ciągłości produkcji, wreszcie z tego kompleksu zjawisk psychologicznych, który daje dbałość o bezpieczeństwo załogi.

Poza celami praktycznymi wentylacja kopalń jest też interesująca teoretycznie, gdyż angażuje wiele zjawisk fizycznych i stanowi dziedzinę zastosowań mechaniki teoretycznej. Poważną trudność przedstawia rozległość istniejących sieci i

wielość występujących elementów. Trudno się więc dziwić, że w tak wąskiej stosunkowo dziedzinie ukazuje się dość dużo prac, także w latach ostatnich. Wśród prac dotyczących obliczeń wentylacyjnych można wyróżnić kilka grup. Oto one :

a/ obliczenia stanów ustalonych /numeryczne, wykreślne, analogowe/,

b/ obliczenia i teoria stanów nieustalonych,

c/ obliczenia i analizy statystyczne.

Niniejsza praca nie może obejmować pełnego przeglądu ponieważ jest jedynie zbiorczym ujęciem wyników autora. prac we wszystkich trzech podanych powyżej problemach, Istnieją już prace /Litwiniszyn/ referujące stan aktualny metod statystycznych. Zestawiono je w dołączonym wykazie literatury przy niniejszej pracy. Na tle dotychczasowych osiągnięć praca niniejsza zmierza natomiast do syntezy problematyki obliczeń w dwu pierwszych grupach zagadnień o charakterze deterministycznym. Praca wprowadza porównania między metodami analogowymi i cyfrowymi, wykorzystując ogólne prawa rządzące przepływem płynów w sieciach /równania energii, ruchu, ciągłości, przewodnictwa cieplnego/, prawa Kirchhoffa i twierdzenie Tegele-
na/, metody zapisu kierunków przepływu, sposoby programowania obliczeń. Praca wprowadza dwa aspekty problematyki stanów nieustalonych, które można scharakteryzować słabą i silną zmiennością temperatury powietrza w sieci. Pierwszy z tych przypadków dotyczy normalnego przewietrzania z wymianą ciepła z otaczającymi skałami, drugi zaś zjawisk w obecności pożaru w sieci kopalnianej.

Celem niniejszej pracy jest powiązanie dwu odległych biegunów problematyki obliczeń wentylacyjnych, którymi są z jednej strony problemy teoretyczne mechaniki płynów i termo-

dynamiki, a z drugiej aktualne możliwości techniki obliczeniowej.

Od strony teoretycznej pomocne nam będą prace Litwini-szyna /1951/, Mączyńskiego /1959/. Technikę obliczeniową re-prezentują prace Kochmańskiego /1954/, Krona /1949/, Mączyń-skiego /1961/. Książka Krona wprowadza metody rachunku tenso-rowego, a raczej macierzowego, które znalazły zastosowanie w obliczeniach sieci i układów elektrycznych.

Strona eksperymentalna problematyki stanów nieustalonych reprezentowana jest pracą Hunsley i Jonesa /1960/.

Tam gdzie obliczenia stają się zbyt skomplikowane można używać analogii elektrycznej dającej szybkie odpowiedzi na poszczególne problemy dotyczące rozważanej sieci.

Możnaby uważać za celowe sporządzenie układów analogowych opartych na rozważaniach niniejszej pracy oraz prowadzenie dal-szych badań w tej dziedzinie. Szeroka dziedzina analogii elek-trycznej jest w pracy poruszona tylko o tyle, o ile jest ona przydatna dla pojęciowego ujęcia obliczeń wentylacyjnych, bez analizy technicznych osiągnięć w tej dziedzinie. /por. Feith (1957)/. Problem zmienności prędkości przepływu w sieciach wentylacyjnych kopalń wywołanej różnymi przyczynami stanowi przedmiot zainte-resowania inżyniera górniczego, zadaniem teoretyka jest więc danie mu takiego opisu teoretycznego, na którym mógłby polegać i którym mógłby następnie się posługiwać.

Przedmiotem naszego zainteresowania jest tu poznanie przebiegu tych zjawisk w czasie, a więc uzyskanie obrazu zachowania sieci wentylacyjnej przy zmianach w działaniu wentylatora /włączanie, wyłączanie, zmiany kierunku biegu itp/, a także przy zmianach w innych źródłach energii takich jak np. zjawiska termiczne.

Niewiele jeszcze opublikowano na ten temat, niewiele ponad intuicyjne wyobrażenia, trochę doświadczeń i parę rozwiązań teoretycznych dla przypadków szczególnych. Celem więc tej pracy jest stworzenie syntetycznego ujęcia zjawisk z punktu widzenia dynamiki gazów.

Ponieważ nie byłoby celowym wprowadzenie od razu całej sieci wentylacyjnej do rozważań, więc w problemie stanów nieustalonych zastępujemy kopalnię równoważnym przewodem o zmiennym przekroju. Problem sieci staje się wtedy następnym uogólnieniem.

Specjalną uwagę zwracamy na przypadek, gdy działanie wentylatora można traktować jako natychmiastowe, a odpowiedź sieci opóźnia się w stosunku do działania wentylatora, Odwrotne zagadnienie, tj. takie gdzie odpowiedź sieci jest bardzo szybka w porównaniu z odpowiedzią wentylatora należy do dynamiki wentylatorów i dlatego wykracza poza ramy tej pracy.

Jak zauważymy w dalszym ciągu, ważnym praktycznie wynikiem tej pracy jest między innymi to, że funkcja opisująca zjawiska cieplne zależy od całki czasowej z natężenia przepływu /przemieszczenie objętości lub masy/ a nie tylko od samego natężenia przepływu. Ten fakt wynika ze zjawisk cieplnych i pojemności cieplnej zarówno samych mas powietrza jak i skał otaczających.

W pracy wykorzystano szereg założeń upraszczających w dążeniu do znalezienia rozwiązań przybliżonych. Do założeń tych należy założenie Litwiniszyna /1951/ w postaci uogólnionej /zależności wydatku masowego przy stanie nieustalonym jedynie od czasu, a niezależność od współrzędnej przestrzennej/ oraz kilka innych, przy czym starano się uzyskać dyskusję popełnianego każdorazowo błędu, tam gdzie to było możliwe.

Zakładamy między innymi, że proces włączania wentylatora jest natychmiastowy, kiedy go porównamy z odpowiedzią sieci. W tym celu różnicę ciśnień na wentylatorze jako funkcję czasu zapisujemy w postaci : $\Delta p = \Delta p_0 \mathbb{1}(t)$ gdzie

Δp_0 jest ustaloną depresją wentylatora w mm słupa wody,
a symbol $\mathbb{1}(t)$ oznacza jednostkową funkcję skokową Heaviside'a.

Istnieje opinia różnych specjalistów górniczych, że przebiegi nieustalone mas powietrza są pomijalne w porównaniu z czasem potrzebnym na wyłączenie i przełączenie wielkiego wentylatora mechanicznego. Jest to w pewnej mierze prawda, jeżeli chodzi o wentylatory mechaniczne. Sytuacja jest jednak zupełnie odmienna, gdy stan nieustalony powstaje w wyniku wybuchu pożaru podziemnego, stanowiącego źródło energii zdolne do zaburzenia istniejącego rozplywu prądów powietrza, albo gdy zmiany dokonujemy przez szybką manipulację zasuwą lub tamą. W tej pracy nie możemy podać w całości rozwiązania bardziej złożonego problemu tego typu, pokazuje on jednak metodę dającą się zastosować do szeregu różnorodnych przypadków praktycznych.

2. POJECIE DEPRESJI I ANALOGIA ELEKTRYCZNA

SIECI WENTYLACYJNYCH.

Od czasów Atkinsona stwierdza się często, że poza biernym spadkiem naporu przepływ powietrza w kopalniach pozostaje jeszcze pod wpływem dalszych czynników.

Słowo depresja jest używane szeroko przez inżynierów górniczych dla określenia różnicy ciśnień po obu stronach pracującego wentylatora, podobnie spadek naporu lub spadek depresji oznacza zjawisko strat energii przy przepływie przez wyrobisko. Byłoby rzeczą naturalną traktować kopalnianą sieć wen-

tylacyjną jako układ bierny rozpraszający energię doprowadzoną z zewnątrz przez wentylator. Takie uproszczone podejście jest jednak nie do przyjęcia, ponieważ można czasem wykrywać przepływ powietrza przy wyłączonym wentylatorze, wynikający z efektu ciągu kominowego będącego zjawiskiem obserwowanym i wykorzystywanym w wentylacji kopalń.

Aby podać interpretację takiego zjawiska przyjmuje się zwykle, że w sieci występuje dodatkowo "depresja naturalna" albo "depresja cieplna". Ta depresja naturalna była traktowana jako rodzaj dodatkowego wentylatora w odpowiednim miejscu w sieci. /Budryk 1953 /

Niniejszy rozdział stanowi próbę dokładniejszej interpretacji pojęcia depresji w teorii wentylacji kopalń, ponieważ zagadnienie to jest interesujące zarówno z punktu widzenia praktyki jak i teorii. Problem teoretyczny należy do teorii przepływu płynu ściśliwego przy bardzo małych prędkościach i dużych efektach grawitacyjnych. Strona praktyczna wynika w znacznej mierze z aktualnego rozwoju techniki pomiarowej i obliczeniowej, pozwalającego na regulowanie przepływu powietrza w kopalniach w granicach znacznie węższych niż to było możliwe dawniej. Dokładne dane o właściwościach sieci są obecnie łatwiej dostępne pomiarowi i dlatego dokładniej można przewidywać zachowanie sieci w różnych warunkach pracy.

Istnieją powody dla przypuszczeń, że pojęcie depresji zostało stworzone w wyniku mechanicznego przeniesienia metod hydrauliki lub hydromechaniki płynu nieściśliwego na przepływy powietrza w kopalniach, a także z tendencji poszukiwania analogii między sieciami wentylacyjnymi i obwodami elektrycznymi. Pewną różnicę stanowi tu wyraźna nieliniowość elementów

sieci wentylacyjnych /prawo Darcy'ego zastępuje tu prawo Ohma/. Depresja w tym sensie jest używana jako ekwiwalent różnicy potencjałów pomiędzy końcówkami elementu sieci elektrycznej.

Ze względu na łatwość z jaką można posługiwać się obwodami elektrycznymi, analogie tego typu jak wspomniana są bardzo owocne i stanowią podstawę dla budowy analogów sieci wentylacyjnych w kilku krajach. /por. Feith /1957/, Friedrichs/1957/, Scott /1952, 1953 itd/.

Mimo wszystko występuje jednak pewne pomieszanie pojęć, ponieważ depresja definiowana jest niejednoznacznie i różne pojęcia nazywane są depresją, często nawet w jednym podręczniku.

Depresję definiuje się czasem jako spadek ciśnienia zredukowany do wspólnego poziomu porównawczego przy uwzględnieniu efektów przyciągania ziemskiego. Znajdujemy jednak /por. Budryk 1929/ szerokie zastosowanie pojęcia depresji dla całek krzywoliniowych po zamkniętym oczku typu :

$$2/1/ \quad \oint p \, dV$$

rozciągniętych na wszystkie wartości ciśnienia p i objętości właściwej V = objętość na jednostkę ciężaru/ zamkniętego oczka wybranego wewnątrz sieci. Aby to wyjaśnić przypomnijmy, że zwykła metoda obliczania wartości takiej całki polega na naniesieniu na wykres p, V wartości ciśnienia i objętości właściwej pomierzonych wzdłuż ciągu wyrobisk /chodników frontów eksploatacyjnych, przekopów, szybów itp/, a następnie planimetrowaniu pola powstałej w ten sposób krzywej.

Łatwo zauważyć, że wyrażenia

$$2/2a/ \quad (p_2 - p_1) / V, \text{ oraz}$$

$$2/2b/ \quad \int_1^2 V \cdot dp$$

/gdzie całka rozciągnięta jest na drogę pomiędzy dwoma punktami końcowymi 1 i 2/ niewiele odbiegają od siebie, jeżeli rozważamy przewód lub ciąg przewodów w których ciśnienie zmienia się monotonicznie lub jest z dostatecznym przybliżeniem zmienne monotonicznie. W takim przypadku subtelna różnica pomiędzy $/2a/$ i $/2b/$ może być nieuchwytna dla mniej dokładnego pomiaru. Wyraźna rozbieżność między wyrażeniami $/2a/$ i $/2b/$ może się pojawić podczas pożarów kopalnianych, kiedy mogą wystąpić znaczniejsze wzrosty temperatury. Poza tym jeżeli ciąg przewodów jest zamknięty wyrażenie $/2a/$ znika, podczas gdy $/2b/$ może być wyraźnie różne od zera.

Jak to już napomknęliśmy powyżej potrzebna jest taka definicja depresji, która byłaby użyteczna w budowie maszyn analogowych /symulatorów/ oraz w technice obliczeniowej. Można tu twierdzić, że każda wielkość przypominająca swym zachowaniem potencjał elektryczny w sieci przewodów stanowi tu właściwy wybór. Niestety jak to zaraz zobaczymy można tu podać więcej niż jedną definicję i trzeba zdecydować, która z cech analogii jest najważniejsza dla naszych celów. Oczywiście jest to w dużej mierze kwestia opinii. Jednakże interesujemy się następującymi podstawowymi własnościami potencjału elektrycznego :

1. Potencjał spełnia drugie Prawo Kirchhoffa w sieci, tzn. dla dowolnego zamkniętego oczka suma spadków potencjału spełnia równanie :

2/3/

$$\sum U = 0$$

2. Chwilowa moc przekazywana przez dwubiegunowe wejście do sieci lub jej części równa jest iloczynowi prądu i różnicy potencjału na zaciskach.

Okazuje się, że jest niemożliwym znalezienie jednej wielkości w sieci wentylacyjnej kopalni, która spełniałaby w sposób ścisły oba powyższe warunki.

Pierwszą własność posiada ciśnienie i logarytm ciśnienia bezwzględnego.

Ażeby natomiast zanalizować drugą z podanych cech potencjału napiszmy moc doprowadzoną do przewodu w postaci całki :

$$P = W \int_{p_1}^{p_2} V dp$$

którą otrzymujemy rozważając element przewodu o nieskończenie małej długości, w którym panuje różnica ciśnień dp , przy przepływie prądu powietrza /o objętości właściwej V / z wydatkiem ciężarowym W .

Wyrażenie dla mocy ma postać iloczynu dwu wielkości. Jedną z nich: W jest analogią prądu elektrycznego ponieważ spełnia ona pierwsze prawo Kirchhoffa $\sum W = 0$ dla dowolnego punktu węzłowego. Drugą z nich: $\int V dp$ nie jest potencjałem, ponieważ nie spełnia ona w ogólności drugiego prawa Kirchhoffa. Wnioskujemy stąd, że nie można spodziewać się kompletnej analogii pomiędzy ~~sietkami~~^{sieciami} elektrycznymi, a ~~sietkami~~^{sieciami} wentylacyjnymi. Poza własnościami podanymi powyżej istnieje jeszcze jedna ważna własność potencjału w sieciach elektrycznych, a mianowicie łatwość, z którą wprowadza się skupione źródła sił elektromotorycznych. Wtedy różnicę potencjału pomiędzy dwoma

punktami sieci można przedstawić jako sumę wyrazu biernego wywołanego rozproszeniem energii oraz wyrazu aktywnego stanowiącego siłę elektromotoryczną. Takie "prawo addytywne" nie jest, jak to wykazemy w dalszym ciągu, spełnione przez ciśnienie i dlatego skupimy uwagę na własnościach $\ln (p/p_1)$ w powolnym przepływie o dużych różnicach gęstości i wysokości niwelacyjnej. ✕

✎. ANALIZA RÓWNAŃ RUCHU.

Wykorzystując równanie powolnego /"aninerojalnego" tj. $w_{dw} / ds = 0$ / przepływu jednowymiarowego z dyssypacją energii /por. Maćczyński 1960/, gdzie z , ρ , p , s , I oznaczają odpowiednio wysokość niwelacyjną, gęstość, ciśnienie, współrzędną odległościową i spadek hydrauliczny :

$$2/4/ \quad dz + \frac{1}{\rho} dp + I ds = 0$$

możemy utworzyć następujący związek :

$$2/5/ \quad \int_1^2 \frac{I ds}{RT} + \ln \frac{p_2}{p_1} + \int_1^2 \frac{dz}{RT} = 0$$

Pierwszy człon oznacza bezwymiarowy, wewnętrzny przyrost entropii wywołany przez nieodwracalny proces dyssypacji energii w przepływie. Dyssypację energii charakteryzuje tu spadek hydrauliczny I , który możemy wyznaczyć posługując się dla danej drogi powietrza równaniem /8/ podanym poniżej.

Trzeci wyraz zależy wyłącznie od rozkładu temperatury i wysokości niwelacyjnej wzdłuż przewodu. Można go określić ponieważ rozkład temperatury wzdłuż drogi powietrza można dość dokładnie przewidzieć, a wysokość niwelacyjna jest podana na

mapach kopalnianych. Widzimy więc, że wyraz $\ln(p_2/p_1)$ można przy pomocy równania /5/ określić z danych, które są w znacznym stopniu dostępne. Dalsze subtelniejsze efekty jak np. zmienność składu chemicznego powietrza można uwzględnić bez zasadniczych trudności używając w miejsce prawdziwej temperatury gazu tzw. temperaturę wirtualną.

Wyrażenie dla pracy właściwej podane powyżej można przepisać jako :

$$2/6/ \quad \int_1^2 V dp = \int_1^2 \frac{RT}{p} dp = \int_1^2 RT d / \ln \frac{p}{p_1} /$$

wykorzystując równanie stanu Clapeyrona. Postać ta wskazuje, że może być wskazane wykorzystanie wykresu RT i $\ln \frac{p_2}{p_1}$ dla przedstawiania termodynamicznych przemian w sieci kopalnianej. Temperatura i ciśnienie bezwzględne są to bowiem wielkości podległe bezpośredniemu pomiarowi.

4. ROZWIĄZANIA OGÓLNE.

Jasny obraz zachowania $\ln p_2/p_1$ otrzymujemy całkując równanie ruchu w ogólnym przypadku przepływu aninercyjnego dyssypatywnego. Wprowadzamy w tym celu następujące oznaczenia /Maczyński 1960/ :

$$2/7/ \quad \beta_d = \frac{p}{p_1} ; \quad \xi = \frac{z}{RT_1} ; \quad S = \frac{dz}{ds} ; \quad \tau = \frac{T}{T_1} ;$$

$$\sigma_1 = \frac{s}{RT_1} ; \quad v = \frac{V}{V_1}$$

oraz β dla oznaczenia wartości β_d w nieobecności dyssypacji.

Spadek hydrauliczny dany jest prawem Darcy'ego. Gdy posu-

wamy się w kierunku przepływu ma on wartość dodatnią. Piszemy więc

$$\begin{aligned} 2/8/ \quad I &= \lambda \frac{|W| W}{2Dg} = \lambda(\sigma) \frac{|W| W v_1^2}{\pi^2 D^5(\sigma) g} v^2 = \\ &= I_1(\sigma) v^2 = |W| W \Lambda(\sigma) v^2 \end{aligned}$$

W powyższym wzorze wprowadziliśmy oznaczenie :

$$2/9/ \quad \Lambda(\sigma) = \lambda(\sigma) \frac{v_1^2}{\pi^2 D^5(\sigma) g}$$

oraz I_1 uwzględnia zmienność współczynnika oporu λ , średnicy hydraulicznej D oraz wydatku ciężarowego W wzdłuż rozważanej drogi powietrza.

Równanie stosuje się więc do dowolnej drogi powietrza w sieci wentylacyjnej.

Ciężarowy wydatek przepływu W jest w przybliżeniu / z pominięciem przemian chemicznych i wydzielania gazów/ stały pomiędzy dwoma węzłami sieci. Naogół zmienia się on przy przekroczeniu węzła sieci. Możemy w dalszym ciągu przekształcić ogólne rozwiązanie dla β_d /Maczyński 1960/ :

$$2/10/ \quad \beta_d = \beta (1 - 2J)^{1/2}$$

które zachowuje się jak $\beta(1-J)$ dla małych wartości J . ($J < 1$)

Oznaczenia β i J stanowią wyrażenia :

$$2/11/ \quad \beta = \exp \left[- \int_0^{\xi} d\xi / \tau(\xi) \right]$$

$$\begin{aligned} 2/12/ \quad J &= \int_0^{\xi} I_1(\sigma) \tau \beta^{-2} d\sigma = |W| W \int_0^{\xi} \Lambda \tau \beta^{-2} d\sigma \\ &= M |W| W . \end{aligned}$$

Wprowadzamy tu opór typu oporu atkinsonowskiego M . Ten opór nie jest prawdziwą stałą lecz podlega małym zmianom. Można go jednak określić dokładnie jeżeli dane są rozkłady parametrów przewodu oraz temperatury.

Opór M można wyrazić posługując się równaniami /12/ i /19/ w postaci :

$$M = \int_0^{\sigma} \lambda(\sigma) \frac{v_1^2 \tau(\sigma) [\beta(\sigma)]^{-2}}{\pi^2 D^5(\sigma) \varepsilon} d\sigma$$

Ponieważ współczynnik oporu jest w przybliżeniu stały wzdłuż odcinka przewodu o stałym przekroju i zmienia się przy przechodzeniu do drugiego odcinka i to samo jest spełnione dla średnicy hydraulicznej D , więc opór M można zapisać w postaci sumy /tam gdzie $W = \text{const.}/$.

Całka $\int \tau \beta^{-2} d\sigma$ zachowuje się w przybliżeniu jak lub s/RT_1 z powodu powolnej zmienności τ i β . Dla znanego τ , a więc i β można całkę obliczyć. Wartość tej całki dla liniowego rozkładu temperatury /przepływ ekwitermalny/ można określić z wykresu /Maczyński 1960/. Zmiany dochodzące do kilku % mogą wystąpić przy dłuższych przewodach z wyraźną zmiennością temperatury.

Bezpośrednim wnioskiem z podanych rozważań jest to, że doświadczalny pomiar współczynnika oporu winien uwzględniać pomiar temperatury i ciśnienia bezwzględnego oraz odpowiednią poprawkę, jeżeli chcemy powiększyć dokładność pomiaru. Równania /10/ i /11/ można też zapisać w postaci :

$$\begin{aligned} 2/13/ \quad \ln \beta_d &= - \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\tau} + \frac{1}{2} \ln /1 - 2J/ \\ \text{albo} \end{aligned}$$

$$2/14/ \quad d/\ln \beta_d/ = - d\xi/\tau - dJ/(1 - 2J)$$

Praca właściwa /6/ przybiera więc postać :

$$2/15/ \quad \int_1^2 RT d(\ln p) = -RT_1(\xi_1 - \xi_2) - RT \int_1^2 \frac{\tau dJ}{1 - 2J}$$

To wyrażenie wiąże pracę właściwą $\int V dp$ z rozkładem τ , I_1 oraz $S^{\frac{1}{2}}$ wzdłuż drogi całkowania przyjętej w sieci.

Nietrudno stwierdzić, że pierwszy człon jest związany z pracą wykonaną przy podnoszeniu powietrza poruszającego się we wznoszącym się przewodzie / $S > 0$ /, podczas gdy drugi człon stanowi pracę wykonaną przeciw siłom tarcia.

Przy całce po zamkniętej drodze np. po oczku^w sieci pierwszy z członów znika, ponieważ wtedy $\xi_1 = \xi_2$ i pozostaje wyrażenie, które można zapisać jako sumę udziałów poszczególnych odcinków między węzłami :

$$\oint RT d(\ln p) = \sum_k RT_1 \int_k^{k+1} \frac{\tau dJ}{1 - 2J}$$

Równanie /13/ wskazuje, że $\ln \beta_d$ można wyrazić jako sumę dwu członów : członu zależnego od rozkładu temperatury

$-\int_0^{\xi} d\xi/\tau$ oraz członu oporowego $\frac{1}{2} \ln /1 - 2J/$, który zresztą można uprościć do $-J$ z dokładnością 0,1 % jeżeli $|J| < 0,045$.

Zauważmy, że zarówno τ jak β są bliskie jedności.

Rozważmy przypadek, gdy są one równe jeden. Wtedy J zachowuje się tak jak $\int I d\sigma$, lub $\Delta H/RT$, gdzie ΔH oznacza spadek depresji w przewodzie wyrażony w wysokości słupa powietrza. Ponieważ spadek tego rodzaju rzadko przekracza dwieście lub trzysta metrów, a RT_1 jest rzędu 8000 metrów więc z dużym prawdopodobieństwem możemy się spodziewać, że J znajduje się poniżej 0,045.

Z tych względów uproszczona postać równania /13/ :

$$2/16/ \quad \ln \beta_d = - \int \frac{S d\delta}{\tau} - J = - \int \frac{S d\delta}{\tau} - M/W/W$$

zachowuje słuszość za wyjątkiem przypadków krańcowe wielkiej zmienności gęstości.

Z większą ostrożnością należy postępować przy obliczaniu całki po zamkniętym oczku, wynikającej z równania /15/ ponieważ temperatura stosunkowa τ może być do tego stopnia obciążona zmiennością J , że rachunek pomijający $2J$ w mianowniku mógłby dać fałszywy obraz.

Z naszych rozważań wynikają uwagi dotyczące tzw. wykres potencjalnego spadków naporu. /por. Budryk 1961/ Wykres potencjalny stanowi graficzną interpretację sytuacji w sieci wentylacyjnej uzyskaną przez naniesienie kolejnych spadków naporu jako odcinków linii prostych połączonych jedna za drugą. Równoległe drogi powietrza występują wtedy na wykresie jako równoległe ciągi odcinków.

Nasze rozważania prowadzą do wniosku, że należy zastąpić spadki naporu w wykresie potencjalnym, przez logarytmy ciśnienia bezwzględnego, z pewnymi zmianami jak np. redukcja członów termicznych przez odjęcie $S\delta/\tau_1$ ażeby uniknąć zbyt długich znoszących się nawzajem odcinków.

Stan wentylacji można przedstawić również na wykresie $/RT, \ln p/$. Wykres ten posiada tę samą właściwość co wykres p, V ponieważ praca techniczna na tym wykresie również jest przedstawiona polem wewnątrz zamkniętej krzywej, a poza tym linie stałego ciśnienia i stałej temperatury są prostymi. Potrzebna jest tu tylko podziałka pół-logarytmiczna w odpowiednim zakresie wartości. Zakres ten zależy od głębokości kopalni, jednakże nie można spodziewać się przyrostu ciśnienia ponad 15 % ciśnienia atmosferycznego w kopalniach euro-

pejskich. 25 % to już górna granica dla kopaliń ~~obecnych~~ ^{współczesnych} w całym świecie. Ta informacja pozwala nam na skonstruowanie odpowiedniej podziałki. Ze względu na zakres zmienności ciśnienia normalne wykresy meteorologiczne nie są tu użyteczne. W każdej kreslarni można jednak łatwo sporządzić odpowiednią podziałkę półlogarytmiczną np. przy pomocy tablic logarytmów naturalnych.

Istnieje wyraźna analogia pomiędzy równaniem /16/ /równanie /13/ jest tu mniej przydatne/ oraz równaniem teorii obwodów elektrycznych:

$$2/17/ \quad V = E - I R$$

gdzie V stanowi różnicę potencjałów pomiędzy dwoma punktami, E jest siłą elektromotoryczną, a I, R jest linowym członem oporowym. Wyraz $\ln \beta_d$ stanowi więc bezpośrednią analogię różnicy potencjałów, $-\int_1^2 d\xi/\tau$ jest analogią siły elektromotorycznej, a człon oporowy J jest proporcjonalny do kwadratu wydatku przepływu.

Wzory tu podane pozwalają na określenie zakresu stosowalności analogów elektrycznej sieci wentylacyjnej. Analog elektryczny stanowi sieć o oporach typu $1/i$ z możliwością dołączenia sił elektromotorycznych.

Jest rzeczą dość dziwną, że nie było do tej pory jasnym, że różnice ciśnień w sieci kopalnianej powstające wskutek oporu aerodynamicznego oraz zjawisk cieplnych nie podlegają prostemu prawu superpozycji.

Tutaj wykazaliśmy, że takie prawo superpozycji istnieje dla logarytmu ciśnienia bezwzględnego.

Poza tym dana tu interpretacja pozwala przewidywać siły motoryczne /analogie sił elektromotorycznych/, które powstają przy określonym rozkładzie temperatury i nachylenia przewodu.

Elementy sieci wentylacyjnych

Sieci wentylacyjne składają się z elementów zwanych w praktyce wentylacyjnej bocznicami. Dzielimy je na 1^o bierne, tj. rozpraszające energię mechaniczną np. według prawa M./W/.W. oraz 2^o czynne tj. takie, w których energia mechaniczna jest dostarczana do przepływu kosztem innych form energii. Są to więc bocznice, w których występuje siła motoryczna f . Bocznice bierne mają charakter przewodów długich lub też oporów miejscowych. Jest to odpowiednik elementów o stałych skupionych i o stałych rozłożonych, rozróżnianych w teorii obwodów elektrycznych. Różnica polega tu na odmiennym zachowaniu przy stanach nieustalonych, co wyraża się obecnością mas powietrza w przewodach długich. Przy oporach miejscowych bezwładność nie odgrywa roli. Bezwładność przejawia się jako opóźnienie czasowe, reakcji przepływu na zmiany w sieci np. zmiany depresji wentylatora.

Bocznice czynne zawierają zwykle albo wentylator zasilany z zewnątrz /skupiona siła motoryczna " f " / albo też są to bocznice, w których energia cieplna doprowadzona do przepływu może zamieniać się na energię mechaniczną / " f " rozłożone/. Jest to jak wiemy możliwe w bocznicach nachylonych do poziomu w obecności zewnętrznych źródeł ciepła. Te źródła cieplne mogą być "słabe" wtedy, gdy stanowią tylko przejaw ochładzania skorupy ziemskiej, albo "silne" gdy występuje jako źródło pożar kopalniany.

Poniżej zestawiono cztery najczęściej spotykane typy bocznice kopalnianych.

1/ Bocznice bierne

1a. Przewód poziomy /wyrobisko chodnikowe, przekop/ o równaniu charakterystycznym

$$2/18/ \quad h = M \left| W \right| W + L \frac{dW}{dt}$$

1b. Opór lokalny /tępa wentylacyjna, kolano itp/ o równaniu

$$2/19/ \quad h = M \left| W \right| W$$

2/ Bocznice czynne

2a. Wentylator o sztywnych obrotach wirnika

$$2/20/ \quad f = f(W)$$

2b. Przewód nachylony lub pionowy /upadowa, wyrobisko ścianowe, szyb, szybk/ :

$$2/21/ \quad h = L \frac{dW}{dt} + M \left| W \right| W + f$$

Przy powolnych stanach nieustalonych można rozważać stan quasi - ustalony. Pomijamy wtedy bezwładność, lecz uwzględniamy zmienność depresji w czasie.

3. Współpraca bocznie w sieci wentylacyjnej

Elementy sieci opisane w poprzednim rozdziale powiązane są w sieci i współpracują ze sobą. Z ogólnej teorii sieci wynikają warunki jakie postają przez połączenie bocznie w sieć. Wykorzystanie tych warunków celem syntetycznego ujęcia metody obliczania numerycznego sieci dającej możliwość automatyzacji rachunku jest przedmiotem niniejszego rozdziału.

Dokładne referowanie teorii sieci przekraczałoby ramy niniejszej pracy. Można tu jednak wykorzystać w szerokim zakresie metodykę teorii sieci elektrycznych uwzględniając dodatkowo nieliniowość.

Poza omawianym przykładem sieci wentylacyjnych, sieci nieliniowe występują w szeregu technicznych zastosowań. Nale-

zą tu sieci ogrzewcze wielkich budynków, sieci wodociągowe, a także sieci elektryczne zawierające elementy nieliniowe.

Z tego powodu pewne wstępne uwagi o możliwości wykonywania takich zresztą bardzo skomplikowanych obliczeń na cyfrowych maszynach elektronowych stanowią integralną część niniejszej pracy. Ponieważ jak dotychczas brak jest ogólnej teorii układów nieliniowych równań algebraicznych, próby rozwiązania stanowią za każdym razem "eksperyment matematyczny".

Zwykle w sieciach zawierających przepływ płynu nieliniowość ma charakter "prawa kwadratowego". Wyrażenie to może być nieco mylące, ponieważ słowo "kwadratowy" nasuwa od razu możliwość niejednoznaczności rozwiązań takich sieci nieliniowych. Prawo kwadratowe jest tu jednak "quasi-liniowym" prawem typu $|W|$. W raczej niż typowym prawem kwadratowym.

Intuicyjnie sugeruje to jednoznaczność rozwiązania dla systemu równań "quasi-liniowych", w których wszystkie człony są monotoniczne, a rozwiązania wielokrotne pozostawałyby tylko w przypadkach niemonotonicznych członów w równaniach /np. niektóre wentylatory mechaniczne, pompy itp. wykazują zachowanie niemonotoniczne/. Nie istnieje jeszcze ogólny dowód takiego twierdzenia, byłoby jednak prawdopodobnie bardzo trudno udowodnić twierdzenie odwrotne, a doświadczenie z istniejącymi sieciami podtrzymuje pogląd, że układy równań algebraicznych zawierające człony $M |W|$. W /lub stałe/, a więc układy "quasi-liniowe" jednorodne lub nie/ posiadają jednoznaczne rozwiązania

Do dyspozycji mamy kilka zależności podstawowych.

Rozpoczynamy od twierdzenia Tegelena /por. Newstead 1959

3/1/ $h_i W_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$ /Sumowanie einsteinowskie po wszystkich wartościach wskaźnika i ! /, gdzie h_i jest "depresją" lub różnicą potencjałów pomiędzy końcami bocznic ^{*)} /np. zdefiniowaną w pracy Mączyński 1961 b /, a W_i jest wydatkiem masowym /natężeniem przepływu, o którym można mówić krótko jako o "prądzie". n stanowi całkowitą liczbę bocznic.

Poza tym mamy do dyspozycji równanie charakterystyki bocznic /interpretację górnictwiczną znajdziemy w pracy Mączyński 1961 b / (por. wzór 2/16/)

$$3/2/ \quad h_j = f_j + W_i Z_{ij}$$

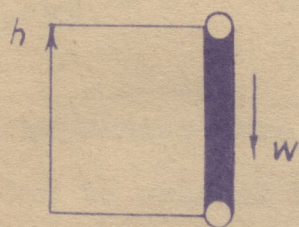
gdzie f_j stanowi siłę motoryczną, a Z_{ij} jest impedancją /w ogólności zmienną/ danej bocznic. Sumowanie zaznaczone dwukrotnym występowaniem wskaźnika "i" w równaniu /2/ jest tu na razie czysto formalne, ponieważ w rozważanej sieci przewodów impedancja zależy od oporu Atkinsona M_k oraz modułu W_i

$$3/3/ \quad Z_{ij} = \delta_{ij} M_{(i)} \cdot |W_{(i)}| \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Impedancja Z_{ij} jest więc zmienną wielkością macierzową posiadającą tylko przekątne elementy / /i/ - nawias oznacza brak sumowania ! /. Inne prawa poza prawem kwadratowym danym równaniem /3/ można również użyć w naszych rozważaniach, z małymi tylko zmianami.

Dodatkowo wiemy, że każda bocznic jest połączona z kilkoma innymi w punktach węzłowych. Daje to I prawo Kirchhoffa w postaci :

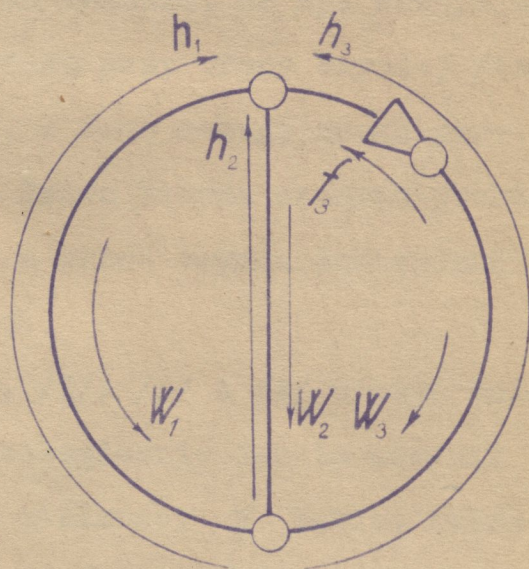
$$*) \quad h_i = - \ln \beta_{ol}$$



Rys. 1

$$\begin{aligned}
 & W'_\alpha \\
 & \downarrow \\
 & C_{i\alpha} \rightarrow W'_i = C_{\alpha i} W'_\alpha \\
 & \downarrow \\
 & |W'_i| \\
 & \downarrow \\
 & M_i \rightarrow Z'_{ij} = \delta_{ij} M_{(i)} |W'_{(i)}| \\
 & \downarrow \\
 & C_{i\alpha} \rightarrow Z'_{\alpha\beta} = C_{i\alpha} Z'_{ij} C_{j\beta} \\
 & \downarrow \\
 & f_\beta = C_{\beta j} f_j \quad f'_\beta \\
 & \downarrow \\
 & f^\lambda_\beta = \frac{f_\beta + \lambda f'_\beta}{1 + \lambda} \\
 & \downarrow \\
 & -Z_{\alpha\beta} W''_\alpha \\
 & \downarrow \\
 & W''_\alpha
 \end{aligned}$$

Rys. 2



ys. 3

$$3/4/ \sum_i (W_i e) (W_i^{nk}) = 0 \quad / \text{Sumowanie po wszystkich boczni-} \\ \text{cach w węźle } k /.$$

Warto tu wspomnieć parę słów o konwencji znaku wielkości W i h . Jak to wskazał Fryze /1925/ konwencja znaku obrona raz w danej sieci winna być utrzymywana w ciągu całego toku obliczeń. Dobrą konwencją znaku dla naszych rozważań jest konwencja bierna, którą ilustrują strzałki na rys. 1. Czysto dyssypatywne bocznicie / $f = 0$ / mają dodatnie wartości W i h wtedy gdy są one skierowane tak jak na rysunku. Rzut oka na rysunek 2 prowadzi do wniosku, że np. wentylator będzie miał W i h różnego znaku przy pracy czynnej /tzw. 1 i 3 ćwiartka charakterystyki/, a tego samego znaku przy pracy biernej /ćwiartka 2 i 4/. Praca bierna oznacza pochłanianie energii od reszty sieci, a praca czynna dostarczanie jej od innych źródeł zewnętrznych.

Zapisany układ równań /1/, /2/, /3/ i /4/ wymaga dalszych manipulacji. Postępując analogicznie jak to uczynił G.Kron /1939/ wybieramy spośród wielkości W takie, które są niezależne ze względu na pierwsze prawo Kirchhoffa. Taki zbiór wielkości może być wybrany na wiele sposobów, ale zawsze ich jest tyle, ile oczek sieci /np. M /, a więc mniej niż wszystkich bocznic. Pozostałe W można wtedy zapisać jako kombinacje liniowe niezależnych W ze współczynnikami $+1$, -1 i 0 . Współczynniki te tworzą macierz prostokątną $C_{i\alpha}$.

Posługując się łacińskimi wskaźnikami dla wszystkich W a greckimi dla niezależnych, możemy zapisać I prawo Kirchhoffa /4/ w postaci macierzowej :

$$3/5/ W_i = C_{i\alpha} W \quad i = 1, 2, 3, \dots, n ; \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, M.$$

Korzystamy tu z konwencji /por. Mączyński 1961 a/, że wskaźnik pozorny przesuwamy na pierwsze miejsce pomiędzy innymi wskaźnikami towarzyszącymi literze rdzeniowej. To postępowanie sprowadza się do automatycznego uzyskiwania właściwej transpozycji macierzy.

Równanie charakterystyczne /2/ mnożymy następnie przez $C_{j\beta}$ oraz podstawiamy $C_{\alpha i} W_{\alpha}$ zamiast W_i posługując się równaniem /5/ :

$$h_j C_{j\beta} = f_j C_{j\beta} + C_{\alpha i} W_{\alpha} Z_{ij} C_{j\beta}$$

Wprowadzając w dalszym ciągu oznaczenie $Z_{\alpha\beta} = Z_{ij} C_{i\alpha} C_{j\beta}$ otrzymujemy następującą zależność :

$$h_j C_{j\beta} = f_{\beta} + Z_{\alpha\beta} W_{\alpha}$$

Twierdzenie Tegelena stwierdza, że ponieważ W_{β} stanowią zbiór wielkości niezależnych, więc :

$$h_j W_j = h_j C_{j\beta} W_{\beta} = W_{\beta} (h_j C_{j\beta}) = 0 \text{ albo } h_j C_{j\beta} = 0$$

W rezultacie otrzymuje następującą prostą zależność macierzową:

3/6/

$$f_{\beta} = - Z_{\alpha\beta} W_{\alpha}$$

Równanie to łączy f_{β} z $Z_{\alpha\beta}$ oraz W_{α} . Jest to równanie dla naszej analizy podstawowe.

Używając powyżej podanych wzorów można napisać program obliczeniowy dla obliczeń stanów ustalonych w sieciach nieliniowych przy użyciu maszyny cyfrowej.

Jeden przebieg takiego programu pokazany jest schematycznie na rys.3. Przebieg ten zaczyna się od wyboru zbioru składowych zupełnie dowolnych wartości W_{α} , które oznaczamy przez W'_{α} . Wartości te wykorzystuje się następnie do obliczenia W'_i oraz macierzy impedancji Z'_{ij} przez wymnożenie modułów W'_i przez "opory atkinsonowskie" M_i . Macierz połą-

zeń C_1 służy następnie do stransformowania Z_{1j} w $Z'_{\alpha\beta}$, którą wykorzystujemy następnie dla obliczenia sił motorycznych f'_β , które odpowiadają przyjętym /dowolnym/ wartościom W'_α . Ten zbiór wartości f'_β nie pokrywa się z danym zbiorem f_β . Z tego powodu tworzymy ważoną średnią f^λ_β z obu zbiorów przez wprowadzenie "współczynnika tłumienia" λ . Parametr ten pozwala na stabilizowanie procesu iteracyjnego jak wynika z prostego przykładu podanego poniżej.

f^λ_β dają następnie nowe rozwiązanie W''_α układu liniowego, w którym impedancje $Z'_{\alpha\beta}$ są stałe w ciągu jednego przebiegu. Rozwiązanie to służy w dalszym ciągu dla powtórzenia całego przebiegu ponownie celem uzyskania lepszego przybliżenia. Można by się zastanawiać, czy można uzyskać jakiś pogląd o zbieżności całego procesu. Wskutek bardzo złożonego charakteru sieci, występujących np. w praktyce górniczej, byłoby rzeczą bardzo trudną dostarczenie ogólnych warunków zbieżności. Intuicyjnie jednak można się spodziewać, że przez dobór dostatecznie małej wartości parametru λ /por. rys.2/ można postąpić w jednym przebiegu tylko o mały krok od początkowo przyjętych wartości W'_α oraz f'_β . Ten krok czynimy jednak we właściwym kierunku, gdyż w następnym przebiegu otrzymujemy f''_β które są nieco bliższe do wartości zadanych, choć być może jeszcze bardzo mało.

Powiększanie parametru λ umożliwia w granicach stabilności na zmniejszenie ilości potrzebnych przebiegów. Za wielkie λ powoduje oscylacje iteracyjne. Umiejętność operatora maszyny cyfrowej polega na doborze właściwej wartości λ . Można tego dokonać doświadczalnie w kilku przebiegach próbnych.

Przykład :

Uwaga : symbolika strzałkowa tablic dwukierunkowych /płaskich/ /por. Mączyński 1961 z/ została użyta w poniższym przykładzie dla ułatwienia rozpoznawania elementów tabel i zautomatyzowania rachunku.

Sieć rozważana pokazana jest na rysunku 4. Strzałki oznaczają dodatni kierunek przepływu zgodnie z "bierną" konwencją znaku W i h wprowadzoną zgodnie z rysunkiem 3. Siły motoryczne w sieci zadane są jako następny zbiór : $f = 0; 0; 2$ "Opory atkinsonowskie" są $M_1 = 4; 1; 2$; Zagadnienie polega na znalezieniu wielkości W w poszczególnych bocznicach. Rozwiązanie problemu zgodnie z programem przebiega następująco: sieć składa się z 3-ech bocznic tworzących 2 oczka, pozostaje więc jedno niezależne równanie dla I prawa Kirchhoffa, czyli : $W_1 + W_2 + W_3 = 0$. Macierz połączeń C_1 określona jest w pierwszym rzędzie przez wybór niezależnych prądów np. W_1 i W_2 . Wtedy możemy napisać :

$$\begin{matrix} \xrightarrow{i} \\ W_1 ; W_2 ; W_3 \end{matrix} = \begin{matrix} \xrightarrow{i} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \downarrow \alpha \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} W_1' \\ W_2' \end{bmatrix} \\ \downarrow \alpha \end{matrix} \quad \text{lub } W_1 = C_{1i} W_\alpha$$

Ponieważ C_1 zależy od naszego wyboru prądów niezależnych, a przede wszystkim od sposobu, w jaki te gałęzie są ze sobą połączone, więc byłoby celowym przechowywanie tej macierzy do ewentualnego późniejszego użytku jako pewnego rodzaju metryki sieci.

W dalszym ciągu rozwiązując układ równań wg podanego programu otrzymujemy :

$$W''_\alpha = \begin{matrix} \downarrow 23/24 \\ \downarrow 7/3 \\ \alpha \end{matrix} = \begin{matrix} \downarrow 0,96 \\ \downarrow 2,333 \\ \alpha \end{matrix}$$

Z podobnego obliczenia wykonanego ze współczynnikiem tłumienia $\lambda = \infty$ tj. przy $f_{\beta}^{\lambda} = f_{\beta}$ uzyskujemy wychodząc z $W_{\alpha} = 1; 1$ rozwiązanie $W''_{\alpha} = 11/12; 11/3$, a następnie $W'''_{\alpha} = 1; 1$, a więc występuje tu pełny cykl oscylacji iteracyjnej. Prawidłowa odpowiedź wynosi $W_{\alpha} = 1; 2$ jak można wykazać przez proste podstawienie albo przez wykonanie rachunku zgodnie z podanym programem. Przy skończonej wartości λ całe postępowanie jest znacznie szybciej zbieżne, ponieważ otrzymujemy maksymalną rozbieżność nie przekraczającą 14 % w jednym przebiegu. Parametr λ możemy więc słusznie nazywać współczynnikiem tłumienia iteracji.

4. OGÓLNE RÓWNANIA DYNAMIKI SIECI WENTYLACYJNYCH.

W tym rozdziale stawiamy sobie zadanie napisania możliwie najogólniejszych równań przepływu powietrza z wymianą ciepła w wyrobiskach górniczych, zasadniczo stale traktując bocznice jako przewód o przepływie jednowymiarowym.

Ogólne równania dynamiki sieci wentylacyjnej składają się ze zbioru równań ułożonych dla każdej bocznicy z osobna oraz warunków współpracy bocznic między sobą ~~maszyn~~ danych bilansem masy i energii w węzłach.

Niech wskaźnik "i" przebiega kolejno poszczególne bocznicę. Przy takim oznaczeniu możemy napisać formalnie równania energii ruchu, stanu i ciągłości dla całego zbioru bocznic nie zawierających wentylatorów mechanicznych. ("i" nie sumować!)

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial H_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} + q_i \quad /4.1/$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial s_i} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial s_i} + \frac{f_i}{2D_i} |u_i| u_i + g \frac{dz_i}{ds_i} = 0 \quad /4.2./$$

$$p_i / \rho_i = gRT_i \quad /4.3/$$

$$\frac{\partial \rho_1 A_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1 A_1}{\partial s_1} = 0 \quad /4.4/$$

W powyższych równaniach t oznacza czas, s współrzędną, $T_1 = T_1(s, t)$ temperaturę bezwzględną powietrza, $p_1 = p_1(s, t)$ ciśnienie bezwzględne, $\rho = \rho(s, t)$ gęstość gazu, $A_1 = A_1(s)$ przekrój przewodu, $u_1 = u_1(s, t)$ prędkość przepływu, $f_1 = f_1(s)$ współczynnik oporu przewodu, $D_1 = D_1(s)$ średnicę równoważną przewodu, dz_1/ds_1 nachylenie przewodu, g natężenie pola grawitacji, $q_1 = q_1(s, t)$ funkcję cieplną /ilość ciepła doprowadzoną lub wymienioną ze ścianami przewodu przypadającą na jednostkę czasu i jednostkę masy płynu/, $H_1 = H_1(s, t)$ entalpię całkowitą daną przez :

$$H_1 = \frac{u_1^2}{2} + g z_1 + g c_p T_1 \sim g z_1 + g c_p T_1 \quad /4.5/$$

gdzie c_p jest ciepłem właściwym powietrza przy stałym ciśnieniu, a naogół człon kinetyczny $u^2/2$ jest pomijalny.

Równania te uzupełnione są równaniem przewodnictwa cieplnego w górotworze :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_s \rho_s} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial s^2} \right) = \chi^2 \Delta \theta_1 \quad /4.6/$$

gdzie θ_1 jest temperaturą w głębi górotworu w otoczeniu i -tej boczniczy, a c_s, λ i ρ_s odnoszą się do skał.

Warunki zgodności w węzłach, a więc współpracy bocznic w sieci wymagają nieco zastanowienia. Pewną wskazówką mogą służyć nam tu I równania Kirchhoffa. Obowiązują one dla poszczególnych węzłów i zawierają tyle członów ile bocznic zbiega się w węźle, a także podają one kierunki przepływu dzięki znakom przed poszczególnymi członami.

Np. jeżeli w jakimś węźle zbiegają się bocznicę nr.4, 7 i 9, przy czym bocznicą 4 powietrze dopływa, a bocznicami 7 i 9 odpływa, wtedy równanie Kirchhoffa dla tego węzła ma postać :

$$W_4 - W_7 - W_9 = 0$$

Jeżeli węzłów, jak to zwykle bywa, jest więcej, to wtedy można ogólnie napisać wyrażenie macierzowe :

$$B_{i\gamma} W_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad \gamma = 1, \dots, N./4.7$$

gdzie $B_{i\gamma}$ jest macierzową prostokątną o elementach +1, 0, -1, a dwukrotne powtórzenie wskaźnika "i" oznacza sumowanie.

Posługując się powyższym związkiem będącym skróconym zapisem układu liniowych równań algebraicznych wyrażamy N wartości W w funkcji odpowiedniej liczby $M / n - N /$ wielkości W , przyjętych jako znane, otrzymując wkład o tej samej liczbie równań co niewiadomych.

W tym miejscu należy zaznaczyć, że macierz $B_{i\gamma}$ jest bezpośrednio związana z macierzą $C_{i\alpha}$ rozdziału 3 w ten sposób, że $C_{i\alpha}$ jest nieosobliwą macierzą kwadratową wybraną z macierzy prostokątnej $B_{i\gamma}$.

Istotne jest tu to, że $B_{i\gamma}$ zawiera zasadniczą informację o kierunkach przepływu i sposobie połączenia sieci w całość. Macierz ta pozwala również na zbilansowanie energii cieplnej w poszczególnych węzłach :

$$B_{i(\gamma)} H_{i(\gamma)} W_i = 0 \quad /4.8/$$

Wskaźnik γ /ujęty w nawias - brak sumowania/ uwzględnia fakt, że musimy brać wartości w węzłach, które mogą być i najczęściej są różne od wartości zmiennych przyjmowanych wzdłuż danej bocznicy.

Warunek zgodności ciśnienia ma w tej symbolice postać:

$$p_{i\gamma} = p_{\gamma} \quad /4.9/$$

Wentylator mechaniczny.

Osobny typ bocznicy stanowi wentylator mechaniczny. Zachowanie takiej bocznicy przy napędzie o stałych obrotach polega na wytwarzaniu na końcach bocznicy pewnej różnicy ciśnień Δp będącej funkcją przepływającego wydatku przepływu, a także gęstości powietrza. Przy stałym natężeniu przepływu W różnica ciśnień Δp zależy jeszcze od gęstości powietrza. Jest to zależność uwarunkowana mechaniką przepływu w samym wentylatorze i występują tu dwa efekty przeciwstawne wynikające z wzrostu prędkości przepływu przy spadku gęstości. Równanie ilości ruchu daje wtedy wzrost idealnej różnicy ciśnień /bez oporów przepływu/, równocześnie mogą wzrastać opory przepływu. Omawiane zagadnienie wykracza poza ramy niniejszej pracy i może stanowić samo w sobie temat oddzielnych badań.

Jakościowo rzecz biorąc procentowa zmiana idealnej różnicy ciśnień odpowiada wprost procentowej zmianie gęstości, podobnie jak procentowa zmiana oporów przepływu. Dlatego też przy wzroście temperatury można spodziewać się /stałe przy zachowaniu warunku stałego wydatku masowego i stałych obrotów/ pewnego wzrostu Δp w okolicy punktu optymalnego dopasowania charakterystyki wentylatora, a spadek Δp tam, gdzie opory przepływu są przeważające.

Ta pobieżna analiza prowadzi do przypuszczenia, że istnieje strefa charakterystyki wentylatora, w której zależność charakterystyki od temperatury jest nieznaczna i pomijalna.

Jest to strefa, gdzie oba efekty z grubsza się wzajemnie kompensują.

Inny problem to zachowanie wentylatora przy jego rozruchu lub hamowaniu, a więc przy zmiennych obrotach wirnika. W takim typie stanu nieustalonego w grę wchodzi bezwładność mas wirujących i zależność statycznych charakterystyk od prędkości kątowej.

W związku z tym równanie ruchu wentylatora można zapisać w postaci :

$$J \frac{d\omega}{dt} + M_T - M_S + \frac{\Delta p(W, \omega) \cdot W}{\rho \eta \omega} = 0 \quad /4.10/$$

gdzie J jest momentem bezwładności wentylatora i silnika,

ω jest prędkością kątową, t czasem, M_S jest momentem silnika, M_T to moment tarcia w łożyskach $\Delta p \cdot W / \rho$ stanowi skuteczną moc wentylatora, η sprawność wentylatora, $\Delta p(W, \omega)$ jest funkcją natężenia przepływu przez wentylator, którą można w przybliżeniu wyznaczyć ze statycznych charakterystyk wentylatora.

To równanie w przypadku całkowicie ogólnym winno być dołączone do układu równań /4.1/ - /4.4/. W określonych wypadkach możliwe jest pominięcie bezwładności mas wirujących i przyjęcie, że po załączeniu wentylator uzyskuje natychmiast pełne obroty.

Warunki przejmowania ciepła.

Przejmowanie ciepła od przepływającego powietrza w kierunku do ociosu lub odwrotnym polega na turbulentnej wymianie. Rozważając dla uproszczenia ogrzewanie powietrza przez ocios zauważamy, że w przewodzie powstanie rozkład temperatury z bardzo płaskim minimum w pobliżu osi, a maksimum przy samej

ścianie. To maksimum w warstwie przysciennej równe jest w przybliżeniu powierzchniowej temperaturze ociosu. Problem turbulentnego przenoszenia ciepła od ociosu ku osi przewodu jest tu w pewnym sensie uproszczony silną turbulizacją przepływu wskutek istnienia obudowy i nierówności ociosu, gdyż polega na przenoszeniu działaniem wielkich wirów.

Całkowita ilość energii niesiona przez powietrze zależy od średniej temperatury powietrza w przekroju :

$$H = - \frac{Cp}{A} \int T dA + z \quad /4.11/$$

Ilość ciepła przenoszona od ociosu jest z grubsza proporcjonalna do różnicy temperatur między ociosem a obszarem przyosiowym. Równocześnie średnia temperatura jest proporcjonalna do tejże różnicy z pewnym stałym współczynnikiem, jeżeli kształt profilu temperatur nie zmieni się zbyt z prędkością przepływu i intensywnością wymiany ciepła.

Turbulentne przenoszenie ciepła, dzięki mechanizmowi wielkich wirów pobudzonych między innymi przez nierówności ociosu i obudowy, ma charakter integralny, a nie lokalny, jak to ma miejsce przy przenoszeniu ciepła w ciałach stałych czy cieczach o laminarnym przepływie.

Z tych względów można sądzić, że ilość ciepła wymieniana między przepływającym gazem i ścianami jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą ściany / θ_K - "K" - kontur !/, a średnią temperaturą przepływającego gazu :

$$\varphi A q = - k P [T(s,t) - \theta_K(s,t)] \quad /4.12/$$

/q > 0 gdy płyn otrzymuje ciepło !/ P - obwód konturu K.

Istniejące wzory empiryczne dają zależność współczynnika k od prędkości przepływu w postaci wzorów bezwymiarowych.

Ogólnie, wzory te mają postać : /Mac Adams 1954/

$$kD/\lambda_g = \psi \left(DW/A\mu ; c_p \mu / \lambda_g ; L/D \right) \quad /4.13/$$

gdzie D jest wymiarem charakterystycznym przewodu /np. średnicą zastępczą/, k współczynnikiem przejmowania ciepła,

λ_g - współczynnikiem przewodnictwa gazu przy temperaturze średniej, μ lepkością dynamiczną, L jest długością przewodu.

Funkcja ψ określona jest dla szeregu przypadków doświadczalnie i dalsza analiza wymagać będzie wyspecyfikowania jej postaci, jednakże już nie w ramach niniejszej pracy.

Analizując proces wymiany ciepła od strony mas skalnych zauważamy, że ściany mogą odebrać tylko tyle ciepła, na ile pozwala powstający gradient temperatury /normalny do powierzchni ścian/ oraz przewodność skał, toteż :

$$qAq = P \lambda (\text{grad}_n \theta)_K \quad /4.14/$$

Ta zależność /4.14/ w połączeniu z /4.12/ daje warunek brzegowy problemu przewodnictwa cieplnego :

$$-\frac{\lambda}{k} (\text{grad}_n \theta)_K + \theta_K (s,t) = T (s,t) \quad /4.15/$$

wiązący temperaturę gazu z gradientem i samą wartością temperatury skał na powierzchni odsłoniętej.

Rozwiązanie podanego systemu równań i warunków zgodności jest oczywiście poza zakresem możliwości rachunkowych. Nie byłoby też być może celowym poszukiwanie rozwiązań na drodze rachunków numerycznych, gdyż z konieczności dotyczyłyby one tylko przypadków szczególnych. Trzeba więc możliwie daleko

uproszczyć zagadnienie korzystając z wzajemnych różnic wielkości poszczególnych członów równań.

Analiza teoretyczna sieci wentylacyjnych musi rezygnować z pełnej ogólności. Trudno wyobrazić sobie pełną analizę tego typu ze względu na ogromną liczbę równań i zmiennych. Znajomość praw ogólnych rządzących przepływami powietrza i ciepła w sieciach pozwala na zrozumienie sensu uproszczeń czynionych przy próbach takiej analizy teoretycznej.

5. ANALIZA RZĘDU WIELKOŚCI

Rząd wielkości poszczególnych członów w układzie równań /4.1. - 6/ nie jest jednakowy i dlatego determinuje sposób przybliżonego ich rozwiązania.

W sieciach wentylacyjnych może występować szereg typów zjawisk nieustalonych, z których jednak, jako zasadnicze, wyodrębniamy zjawisko zatrzymania lub odwrócenia przepływu w przewodzie pojedynczym, ze względu na pewną większą regularność przebiegu zjawiska w tym przypadku, w przeciwieństwie do złożonego obrazu przebiegów nieustalonych w skomplikowanej sieci.

W takiej uproszczonej sytuacji analizujemy kolejno zachowanie takich wielkości jak ciśnienie i gęstość, a następnie rząd wielkości poszczególnych członów w równaniach ciągłości, ruchu, energii, przewodnictwa cieplnego, za każdym razem w dwu przypadkach : dla słabych i silnych źródeł ciepła w przewodzie, tzn. dla stanu przewietrzania normalnego i warunków pożarowych.

Ciśnienie p można zapisać jako wyrażenie :

$$p = p_0 + 0(g \varrho \delta z) + 0(hs/L) \quad /5.1./$$

gdzie δz jest skalą wysokości niwelacyjnej /np. 10^3 m/,

h skalą depresji /różnicy ciśnień/ wentylatora /np. 10^2 kg/m^2 /,

a L jest skalą długości całej sieci wentylacyjnej $/np \cdot 10^3 \text{ m}/$. Człon $p_0 \sim 10^4 \text{ kg/m}^2$ stanowiący ciśnienie atmosferyczne jest zwykle do dziesięciu razy większy niż człon grawitacyjny, a człon wynikający z pracy wentylatora jest znów wielokrotnie mniejszy od członu grawitacyjnego.

Temperatura bezwzględna powietrza w warunkach normalnego przewietrzania zmienia się o ok. 10 %, a jedynie w warunkach rozwiniętego pożaru może zmieniać się lokalnie w ograniczonym obszarze 2-u lub 3-krotnie, a gęstość powietrza wyraża się w postaci :

$$\rho = \sigma (p_0 / gRT) + \sigma / \rho \sigma' z / RT + \sigma / h_s / LgRT / \quad /5.2./$$

Wynika stąd wniosek, że w pierwszym przybliżeniu gęstość można traktować jako wielkość $\propto T^{-1}$, drugi człon daje już dobre przybliżenie, a trzeci jest już często w warunkach technicznych zbyteczny.

W warunkach stanów nieustalonych wentylacji kopalń zmiany ciśnienia przejawiają się przede wszystkim w członie trzecim, w członie drugim zaś wpływ jest mniejszy, najmniejszy w członie pierwszym, ponieważ ciśnienie atmosferyczne zmienia się bardzo powoli. W czasie trwania stanu nieustalonego można je uważać za stałe z dokładnością do członów rzędu $/10^{-2} //$.

Celem zbadania masowego natężenia przepływu /wydatku masowego/ $W = \rho uA$ zapiszemy równanie ciągłości w postaci różniczkowo całkowej :

$$W/t, U / = W/t, 0 / - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^U \rho dU \quad /5.3./$$

gdzie U jest objętością odciętą rozważanym bieżącym przekrojem od początku przewodu $\int_0^S A ds$.



Ta postać równania ciągłości daje nam możliwość oszacowania drugiego członu równania /5.3./, a więc błąd popełniany przez przyjęcie $W \sim W/t, 0/$.

W tym celu przyjmijmy przypadek skrajny, gdy w obszarze sieci o skali długości L_p /np. 10^2 m/ rozwija się pożar z prędkością o skali U_p /np. 10^0 m/sek/ i skali temperatury T_p /np. średnio 10^2 ponad temperaturę normalną/. Wtedy dla zmienności gęstości ważny jest tylko obszar samego pożaru, toteż możemy napisać, że rząd wielkości członu drugiego jest proporcjonalny do $(T_p - T_0)$ oraz objętości $L_p A$, a odwrotnie proporcjonalny do skali czasowej rozwoju pożaru L_p/U_p . Po ułożeniu wyrażenia i uproszczeniu, pamiętając, że W ma rząd wielkości $\sigma/\rho_0 U A$, gdzie U jest skalą prędkości przepływu /np. 10^1 m/ otrzymujemy wyrażenie :

$$W = W(t, 0) \left[1 \pm \sigma (U_p (T_p - T_0) / U T_0) \right] \quad /5.4./$$

Płynie stąd wniosek, że drugi człon może być bardzo istotny w warunkach pożaru o wysokiej temperaturze spalin T_p oraz dużej szybkości rozwoju U_p . Drugi człon jest wtedy rzędu $\sigma/10^0/$.

Ten fakt był już doceniany przez specjalistów górniczych, którzy starali się opisać to zjawisko przy pomocy pojęcia "dopływu bocznego" w miejscu powstania pożaru. /Barczyk, 1957/

Natomiast w przypadku normalnego stanu termicznego skał, albo też nawet w obecności pożaru o małej prędkości rozwoju U_p w porównaniu z prędkością powietrza oraz małej nadwyżce temperatury spalin $(T_p - T_0)$ można przyjąć $W \sim W/t, 0/$ z błędem danym powyższym grubym oszacowaniem.

Równanie ruchu dla pojedynczego przewodu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{f}{2D} |u| u + g \frac{dz}{ds} = 0 \quad /5.5./$$

dzielimy przez RT i całkujemy po s w granicach $/s_1, s_2/$ otrzymując :

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s} + \frac{f}{2D} |u| u \right) \frac{ds}{RT} + g \ln p_2/p_1 + \int_{s_1}^{s_2} g \frac{dz}{RT} = 0 \quad /5.6./$$

Porównując rząd wielkości członów w nawiasie otrzymujemy :

$$\int \frac{f |u| u}{2DRT} \left(\frac{t_{ch}}{t_1} + \frac{D}{fL} + 1 \right) ds$$

gdzie $t_{ch} = 2D/Uf$, jest to czas charakterystyczny przewodu, t_1 to czas przebiegu występującej zmiany, D/fL charakteryzuje wpływ zmienności przekroju w porównaniu z wpływem oporów przepływu. W warunkach normalnego przewietrzania $t_{ch} \sim t_1$, a $D/fL < 1$, toteż p ile można pominąć człon przyspieszenia konwekcyjnego, o tyle należy pozostawić człon przyspieszenia lokalnego $\partial u / \partial t$. W warunkach pożarowych natomiast oba człony przyspieszeniowe są naogół pomijalne wskutek dość powolnego rozwoju pożaru w porównaniu z czasami nieustalonymi wynikającymi z bezwładności powietrza.

W drodze analogicznego rozumowania równanie energii /4.1./ można zapisać w postaci :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \left(\frac{hs}{\rho_0 L t_1} \right) + 0 \left(\frac{(T_2 - T_1) c_p U}{L} \right) \quad /5.7/$$

W normalnym stanie wentylacji poszczególne wielkości mają następujący rząd wielkości : $c_p \sim 10^3 \text{ m}^2/\text{°C sek}^2$, $/T_2 - T_1/ \sim \text{ok. } 10^1 \text{ °C}$, $U \sim 10^0 \text{ m/sek}$, $dz \cdot 1 \text{ } L \sim 10^3 \text{ m}$, a podobnie

$h \sim 10^2 \text{ kg/m}^2$, $t_{ch} \sim 10^2 \text{ sek}$, $\rho \sim 10^{-1} \text{ kg/sek}^2/\text{m}^4$,
 $s/L \sim 1$, wtedy $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \sim 10^1$ oraz $q \sim 10^1$, są to więc wiel-
kości tego samego rzędu.

Zmiana entalpii całkowitej w sieci wentylacyjnej wynosi
w stanie normalnym

$$H = \sigma (U^2/2) + \sigma (g \delta z) + \sigma (c_p T) = (10^9) + (10^4) + (10^4)$$

Dochodzimy więc do wniosku, że człon kinetyczny jest w normal-
nych warunkach zupełnie pomijalny, natomiast oba pozostałe
są tego samego rzędu.

W stanie pożarowym natomiast, gdy $T_p - T_o \sim 10^2$, $L_p \sim 10^2$
 $\delta H = (10^5)$, a więc znacznie więcej.

$$\frac{\delta H}{\delta t} = \sigma \left(\frac{\delta H}{t_{ch}} \right) = \sigma (10^3)$$

$$u \frac{\delta H}{\delta s} = \sigma \left(U \frac{\delta H}{L_p} \right) = \sigma (10^3)$$

/5.8./

$$q = \sigma \left(\frac{c_p (T_1 - T_o) U}{L_p} \right) = \sigma (10^3)$$

człon zawierający lokalną pochodną ciśnienia jest wtedy pomi-
jalny jako $\sigma(10^1)$.

Równanie przewodnictwa cieplnego /4.6./ zawiera człony
o niejednakowym znaczeniu. Pisząc dla ułatwienia dyskusji
równanie w układzie walcowym :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \right)$$

/5.9./

otrzymujemy równanie dla rzędów wielkości :

$$\sigma \left(\frac{\theta}{t_1} \right) = \kappa^2 \sigma \left(\frac{\theta}{s^2} \right) + \kappa^2 \sigma \left(\frac{\theta}{s \cdot r} \right) + \kappa^2 \sigma \left(\frac{\theta}{L^2} \right) /5.10./$$

gdzie δ oznacza skalę grubości skał wokół przewodu objętych wymianą ciepła, D to skala wymiaru poprzecznego przewodu.

Warunki fizyczne narzucają nierówność :

$$\sigma (\Theta/L^2) \ll \sigma (\Theta/D\delta) \ll \sigma (\Theta/\delta^2) \quad /5.10/$$

Toteż w przybliżeniu :

$$\sigma (\delta^2) = 0 (\kappa^2 t_1) \quad /5.11/$$

skąd przy $\kappa^2 = \sigma (10^{-6})$; $t_1 = \sigma (10^2)$ otrzymujemy $\delta = 0 (10^{-2})$, a więc rzędu pojedynczych centymetrów przy krótkich /minutowych/ czasach przebiegów. Dlatego też możemy posługiwać się równaniem :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \quad /5.12/$$

Traktujemy więc skalę otaczającą przewód jako nieskończony półpręt ogrzewany na jednym końcu, tj. dla $r = 0$.

6. DYNAMIKA POJEDYŃCZEGO PRZEWODU PRZY NORMALNYM STANIE TERMICZNYM

Nieustalone jednowymiarowe zjawiska przepływu gazu w pojedynczym przewodzie są opisane równaniami energii, ruchu, stanu i ciągłości :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + q$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{f}{2D} |u| u + gS = 0$$

$$p/\rho = gRT$$

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uA)}{\partial s} = 0$$

gdzie t oznacza czas, s współrzędną, $T = T/s, t$ temperaturę bezwzględną, $p = p/s, t$ ciśnienie bezwzględne, $\rho = \rho/s, t$ gęstość gazu, $A = A/s$ przekrój przewodu, $u = u/s, t$ prędkość przepływu, $f = f/s$ współczynnik oporu przewodu, $D = D/s$ średnicę równoważną przewodu, $S = dz/ds$ nachylenie przewodu, g natężenie pola grawitacji, $q = q/s, t$ funkcję cieplną /ilość ciepła doprowadzoną lub wymienioną ze ścianami przewodu przypadającą na jednostkę czasu i jednostkę masy pływ-
nu/, $H = H/s, t$ entalpię całkowitą daną przez = :

$$H = u^2/2 + gz + c_p T \sim gz + c_p T \quad /6.5/$$

gdzie c_p jest ciepłem właściwym gazu przy stałym ciśnieniu, a zwykle człon kinetyczny $u^2/2$ jest pomijalny.

Z języka zmiennych niezależnych s, t układ równań /6.1./ - /6.5./ można przetłumaczyć na język następujących zmiennych niezależnych :

$$M(s) = \int_0^s \rho_0(\bar{s}) A(\bar{s}) d\bar{s} \quad /6.6/$$

$$N(t) = \int_0^t W(\bar{t}) d\bar{t} \quad /6.7/$$

gdzie $\rho_0(s)$ jest przybliżonym rozkładem gęstości np. rozkładem początkowym, a o natężeniu przepływu W zakładamy /zmodyfikowane założenie Litwiniszyna/, że zależy ono jedynie od czasu :

$$W(t,s) \sim W(t,0) = \rho_0(s) A(s) u(s,t) \quad /6.8/$$

Równanie energii /6.1/ przybiera ze względu na związki /6.6/ i /6.7/ następującą postać w języku /M,N/ :

$$\frac{\partial H}{\partial N} + \frac{\partial H}{\partial M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial N} + \frac{q}{W} \quad /6.9/$$

W przypadku gdy prawa strona znika tzn. pomijamy wymianę ciepła ze ściankami oraz zjawisko lokalnego rozprężenia gazu otrzymujemy prostą całkę tego równania $H = H_0(M - N)$ gdzie $H_0(M)$ dane jest dla $t = 0$ $N = 0$. Jest to przypadek przepływu adiabatycznego. Wtedy dla rozkładu temperatury otrzymujemy związek $c_p T = H_0(M - N) - gZ(M)$

Jeżeli zaś przepływ jest tak powolny, że gaz przejmuje temperaturę ścian przewodu, to temperatura dana jest związkiem $T = T_0 M$ odpowiadającym początkowej temperaturze ścian przewodu. W rzeczywistości mamy stan pośredni pomiędzy tymi dwoma skrajnymi przypadkami, a temperatura gazu jest funkcją zarówno M jak N.

Wykorzystując związki /6.6/ i /6.8/ piszemy $u = W ds/dM$ i po wykonaniu różniczkowań wyrażamy równanie ruchu z W jako zmienną zależną eliminując zmienną przestrzenną s przez zmienną M :

$$\begin{aligned} \frac{dWds}{dt dM} + W^2 \left(\frac{d^2 s}{dM^2} + \frac{f}{2D} \left(\frac{ds}{dM} \right)^2 \operatorname{sgn} W \right) + \\ + \frac{\partial p}{\partial M} \cdot \frac{dM}{ds} + gS(M) = 0 \end{aligned} \quad /6.10/$$

Celem wykonania całkowania względem M od 0 do M_2 mnożymy powyższe równanie przez wyrażenie wynikające z równania stanu /6.3/ :

$$\frac{ds}{dM} \frac{1}{gRT} = \frac{e}{p} \frac{ds}{dM}$$

i wprowadzamy oznaczenia :

$$L = L(N) = \int_0^{M_2} \left(\frac{ds}{dM} \right)^2 \frac{dM}{gRT} \quad /6.11/$$

$$K = K(N) = \int_0^{M_2} \left[\frac{d^2s}{dM^2} + \frac{f}{2D} \left(\frac{ds}{dM} \right)^2 \operatorname{sgn} W \right] \frac{ds}{dM} \frac{dM}{gRT} \quad /6.12/$$

$$F = F(N) = \int_0^{M_2} \frac{S(M)}{RT} \frac{ds}{dM} dM = - \int_0^Z \frac{dz}{RT} \quad /6.13/$$

$$h = - \ln p_2/p_1 \quad /6.14/$$

Tak wprowadzone wielkości przedstawiają kolejno : L współczynnik bezwładności, K uogólniony współczynnik Atkinsona, F siłę motoryczną, h bezwymiarową różnicę potencjałów na końcach przewodu.

Przy tych oznaczeniach i dodatkowo pomijając zmienności przekroju zapisujemy równanie ruchu w postaci :

$$h = L \frac{dW}{dt} + K |W| W - F = L \frac{d^2N}{dt^2} + K \left(\frac{dN}{dt} \right)^2 - F \quad /6.15/$$

Równanie powyższe opisuje zachowanie układu przy przyłożeniu pewnej różnicy potencjałów h na końcach przewodu. Przypadek najprostszyszy otrzymujemy wtedy, gdy przyłożona różnica potencjałów h jest tzw. funkcją skokową czasu t a więc także

i zmiennej N . Wtedy drogą podstawienia $d^2N/dt^2 = WdW/dN$ otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu dla zależności W^2 od N :

$$\frac{L}{2} \frac{dW^2}{dN} + K |W|W - F - h = 0 \quad /6.16/$$

Ogólne rozwiązanie opublikowane w pracy /Mączyński 1959/ daje się zapisać przez zastosowanie metody wariacji stałej /tzw. metody Lagrange'a/ przy pomocy dwu kwadratur. Szczegółową dyskusję rozwiązania można jednak przeprowadzić zwracając uwagę na zachowanie współczynników tego równania i wyrazów wolnych.

Współczynniki funkcyjne K i L są w normalnym stanie przewietrzania o bardzo ograniczonej zmienności wynikającej jedynie ze zmiany temperatury T . Zmienność tę można oszacować, ponieważ jeżeli temperatura zmienia się w granicach T_I T T_{II} to np. L zawarte jest w przedziale:

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^{M_2} \left(\frac{ds}{dM} \right)^2 \frac{dM}{gRT_{II}} < L < \int_0^{M_2} \left(\frac{ds}{dM} \right)^2 \frac{dM}{gRT_I} = \\ = \frac{T_{II}}{T_I} \int_0^{M_2} \left(\frac{ds}{dM} \right)^2 \frac{dM}{gRT_{II}} \end{aligned} \quad /6.17/$$

Zakres zmienności L i analogicznie K jest więc taki sam jak zakres zmienności T , a więc kilka procent. Inaczej przedstawia się sprawa ze zmiennością F . Znakozmienność S powoduje zmienność F o oszacowaniu:

$$-\frac{s_2}{RT_I} = - \int_0^{S_2} \frac{ds}{RT_I} < F < \int_0^{S_2} \frac{ds}{RT_{II}} \quad /6.18/$$

Z tych względów przyjęcie dla dalszej dyskusji współczynników K i L jako stałych jest uzasadnione w przypadku słabych źródeł ciepła, natomiast zmienność F ma charakter zasadniczy dla przebiegu stanu nieustalonego.

Rozkład temperatury powietrza ma na ogół przebieg regularny, często monotoniczny, dający się opisać funkcją liniową M lub zbliżoną do liniowej funkcją z małym członem kwadratowym. W czasie przebiegu nieustalonego następuje przemieszczanie się mas powietrza określone przemieszczoną masą N zawartą w przedziale $0, M_2$. Możemy więc napisać oszacowanie przybliżone dla przewodu o stałym nachyleniu

$$F = - S \int_0^{M_2} \frac{ds}{dM} \frac{dM}{R(T_1 + \delta T)} - RT_1 \int_0^{M_2} \left(1 - \frac{\delta T}{T_1}\right) \frac{S ds}{dM} dM$$

$$= - \frac{z - z_1}{RT_1} + \int_0^{M_2} \frac{S \delta T}{RT_1^2} \frac{ds}{dM} dM$$

Gdy przyrost δT jest zmienny w przybliżeniu liniowo z M i N otrzymujemy po wykonaniu całkowania F zmienne w przybliżeniu liniowo z N w zakresie $0 < N < M_2$, a więc w zakresie wartości N odpowiadających przejściu frontu masy powietrza odcinka od 0 do M_2 .

Celem rozwiązania równania /6.16/ ze stałymi K i L piszemy $KW^2 \operatorname{sgn} W = K|W|W = y$ oraz $2KN/L = x$, skąd po podstawieniu do równania /6.16/ :

$$\frac{d|y|}{dx} + y = F + h \quad /6.16a/$$

Równanie powyższe rozwiązujemy z warunkiem $y = F_0 > 0$ dla $x = 0$.

Nietrudno wykazać, że jeżeli $h + F > 0$, y jest stale dodatnie. Można wtedy pominąć znak bezwzględnej wartości w pierwszym członie równania /6.16a/. Natomiast jeżeli $h + F < 0$ występuje wtedy zakres dodatni i ujemny opisany rozwiązaniami :

$$y = e^{-x} \int_0^x (F + h) e^{x'} dx' + F_0 e^{-x} \quad \text{dla } y > 0$$

oraz

$$y = -e^x \int_{x_m}^x (F + h) e^{-x'} dx \quad \text{dla } y < 0 \quad /6.17/$$

gdzie x_m jest miejscem zerowym rozwiązania dla $y > 0$.

Przykład 1.

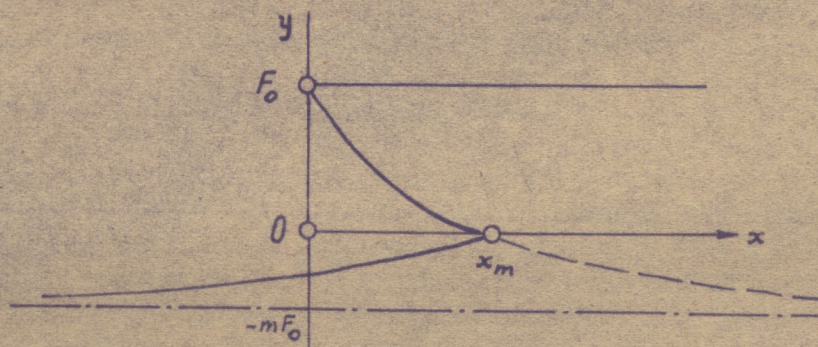
$F = F_0 = \text{const.}$ oraz $h + F_0 < 0$ np. $h = -(1 + m) F_0$.

Wtedy rozwiązania przybierają postać :

$$F_0 (e^{-x} - m (1 - e^{-x})) , \quad \text{gdy } y > 0 \quad 0 < x < \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$-mF_0 \left(1 - \frac{m}{1+m} e^x\right) , \quad \text{gdy } y < 0 , \quad -\infty < x < \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

Rozwiązania te przedstawia szkic na rysunku /6-1/



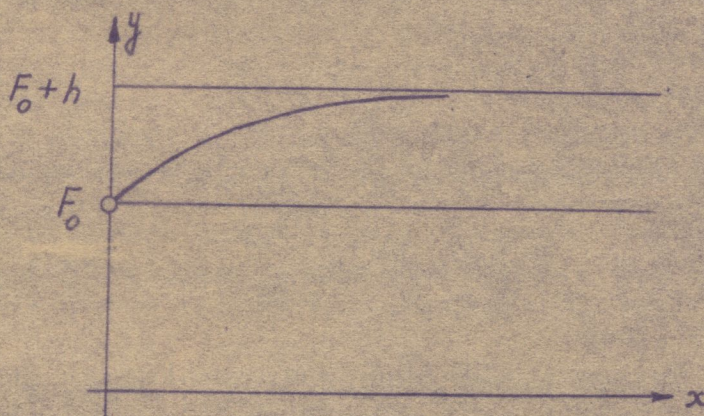
Rys./6 - 1/

Gałąź krzywej po stronie ujemnej stanowi tu lustrzane odbicie przedłużenia /kropkowane/ górnej gałęzi rozwiązania.

Przykład 2.

Niech $h > -F_0$; $F = F_0 > 0$, wtedy $y > 0$ stale, a rozwiązanie ma postać :

$$y = F_0 + h - he^{-x}$$



Rys. /6-2/

Rysunek przedstawia wykres y dla $h > 0$ /przyspieszanie przepływu/. Przy $h < 0$ występuje odpowiednio zwolnienie przepływu.

Ogólne /także przy zmiennym F / rozwiązanie /6.17/ pozwala na określenie zmienności N /a więc również x / w czasie. W tym celu trzeba rozwiązać dodatkowo równanie $W = dN/dt$. Po podstawieniu zmiennych x , y i nowej zmiennej $v = 2K^{1/2}L^{-1}t$ otrzymujemy równanie

$$\frac{dv}{dx} = \left| y(x) \right|^{-1/2} \operatorname{sgny} \quad \text{z warunkiem początkowym}$$

$$v = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0.$$

Przykład 3.

Wyznaczymy zależność v od x dla przykładu 2

$$\frac{dv}{dx} = \left| F_0 + h - h e^{-x} \right|^{-1/2}$$

Stąd po zcałkowaniu

$$v = (F_0 + h)^{-1/2} \left[x + 2 \ln \frac{(F_0 + h)^{1/2} + (F_0 + h - h e^{-x})^{1/2}}{(F_0 + h)^{1/2} + F_0^{1/2}} \right]$$

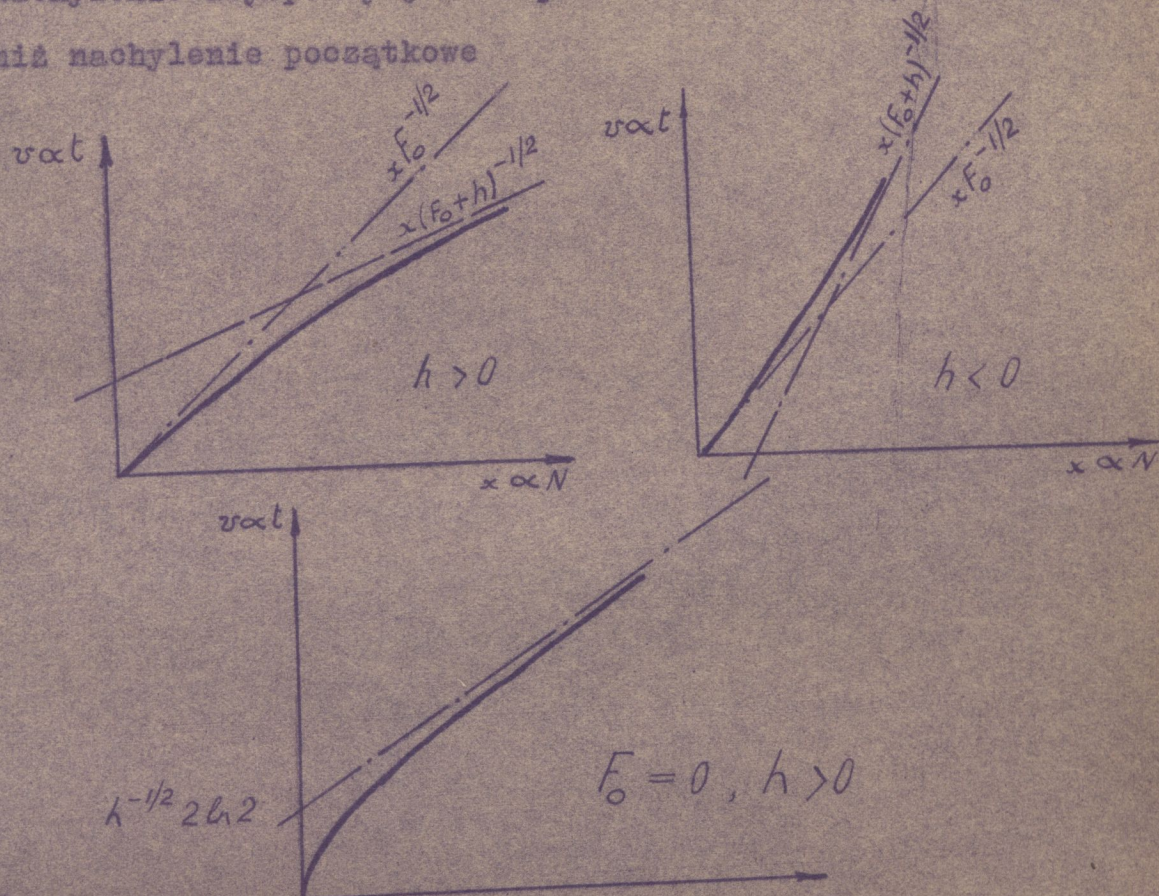
Rozwiązanie to zachowuje się następująco gdy $x \rightarrow \infty$

$$v \sim (F_0 + h)^{-1/2} (x + 2 \ln \{ 2 (F_0 + h)^{1/2} [(F_0 + h)^{1/2} + F_0^{1/2}] \})$$

gdy $x \rightarrow 0$ $v \sim F_0^{-1/2} \cdot x$, natomiast gdy

$$F_0 = 0; \quad v \sim h^{-1/2} \{ 2x^{1/2} + x \} \sim 2h^{-1/2} x^{1/2}$$

Położenie asymptoty zależy od znaku członu dodatkowego dla $x \rightarrow \infty$, jest on dodatni przy $h > 0$ i ujemny przy $h < 0$. Nachylenie asymptoty jest odpowiednio mniejsze, lub większe niż nachylenie początkowe



Przykład 4.

Również dla danych według przykładu 1 można obliczyć przebieg zależności v od x .

W zakresie $0 < x < x_m$ przy $y > 0$

$$v = -2 (mF)^{-1/2} \operatorname{ars} h \left[m^{-1/2} (e^{-x} (1+m) - m)^{1/2} \right]$$

natomiast w zakresie, gdzie $y = 0$

$$v = (mF_0)^{-1/2} \left[2 \operatorname{ars} h m^{-1/2} + \ln \frac{1 + \left(1 - \frac{m}{1+m} e^x\right)^{1/2}}{1 - \left(1 - \frac{m}{1+m} e^x\right)^{1/2}} \right]$$

$$v \sim (mF_0)^{-1/2} \left(-x + 2 \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right) + 2 \operatorname{ars} h m^{-1/2} \right)$$

gdy $x \rightarrow -\infty$

Przed nagłym przyłożeniem zewnętrznej różnicy potencjałów h istniał w sieci ustalony stan termiczny, przy którym występowała siła motoryczna F_0 i istniał przepływ. Z chwilą, gdy przyłożono różnicę potencjałów nastąpiło naruszenie poprzedniego stanu wskutek szybszego przemieszczania mas powietrza oraz zmian w przejmowaniu ciepła.

Dla krótkotrwałego stanu nieustalonego możemy tu ograniczyć się do rozważenia skutków przemieszczania mas powietrza / x / w czasie trwania stanu nieustalonego. Dla $F = F/x$ np. $F = F_0 + a_1 x + \text{ew. } a_2 x^2$ gdzie $a_1 = 0$ przy przyspieszaniu wentylacji /przedstawianie się większych ilości ciepłego powietrza do szybu wydechowego/, a ujemny przy zwalnianiu. Osobny problem stanowi odwracanie wentylacji, gdzie po pewnym czasie F zmienia znak.

Ogólna zamknięta postać całkowa /6.17/ pozwala na dyskusję zachowania wentylacji przy F zmiennym zależnym od x , a więc przy sile motorycznej uwarunkowanej przemieszczaniem mas powietrza.

$$\begin{aligned} \text{Np. dla } F \sim F_0 + a_1 x + a_2 x^2 \text{ otrzymujemy wtedy} \\ y \sim F_0 + h(1 - e^{-x}) + a_1(x - 1) + a_2(x^2 - 2x + 2) + \\ + e^{-x}(a_1 - 2a_2) \end{aligned} \quad /6.18/$$

Rozwiązanie to interesuje nas tylko w ograniczonym zakresie x tzn. od 0 do $x_2 = 2KM_2/L$, gdyż następnie cały przewód jest już przemyty przez przepływające powietrze i można się spodziewać ustalenia nowej równowagi termicznej.

Korzystając ze związków /6.11/ i /6.12/ można oszacować $x_2 = 2KM_2/L$ dla przewodu o stałym przekroju. Otrzymujemy wtedy $x_2 \sim fs_2/D$ tzn. że np. dla odcinka o długości $s_2=100D$ i $f = 0,01$, $x_2 = 1$. Należy się więc liczyć z wartościami x_2 rzędu 1 do 5-u, a rzadziej i więcej przy wyrobiskach długich. Ten fakt wskazuje, że ponieważ $e^{-1} = 0,368$, a $e^{-5} = 0,00674$, więc człony z e^{-x} są istotne dla zachowania rozwiązania w zakresie praktycznie ważnym.

Interesującym punktem przy odwracaniu wentylacji jest położenie zera funkcji y . Jest to chwila zatrzymania przepływu $dx/dv = 0$. Można spodziewać się, że prawo zmienności funkcji F po odwróceniu wentylacji jest inne niż przed odwróceniem, gdyż upłynął już wtedy pewien czas i mogła zajść wymiana ciepła między powietrzem i ścianami przewodu.

Zero funkcji y można przy znanym jej przebiegu obliczyć drogą iteracji, wykreślnie lub metodą Newtona.

Przykład 5.

Niech funkcja F będzie dana jako $F = F_0 + a_1 x$, wtedy
 ∇ hamowanie wentylacji następuje przez przyłożenie różnicy
 potencjałów równej : $h = - (1 + m) F_0$ wtedy

$$y = F_0 - (1 + m) F_0 (1 - e^{-x}) - a_1 (x - 1 + e^{-x})$$

Pierwsze przybliżenia dla x_m wynosi jak w przykładzie 1 :

$$x_m = \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) \sim \frac{1}{m} \quad \text{dla } m \text{ dużego.}$$

Metodą Newtona otrzymujemy kolejno :

$$y(x_m) = -a_1 \left(x_m - \frac{1}{1 + m} \right)$$

$$y'(x_m) = -mF_0 - a_1 / (m + 1)$$

Stąd skorygowana wartość x_m :

$$x'_m = x_m - a_1 \left(mF_0 + \frac{a}{m + 1} \right) \left[\ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) - \frac{1}{1 + m} \right]$$

Ponieważ a_1 jest przy hamowaniu ujemne, więc występuje prze-
 dłużenie hamowania wskutek zmian temperatury przepływającego
 powietrza przy naruszeniu równowagi termicznej.

Rozważmy następnie przypadek $h > 0$ czyli przyspie-
 szanie przepływu działaniem przyłożonego h , a także przyj-
 miemy, że w zakresie interesującym $P(x) < F_0$. Funkcję po-
 całkową można wtedy rozwinąć na szereg w otoczeniu rozwiąza-
 nia dla bardzo wielkich x tzn. :

$$f(x) = [A + P(x)]^{-1/2} + \frac{(2k-1)!}{2^{2k-1} k! (k-1)!} B^k e^{-kx} (A + P(x))^{-k-1/2}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia $A = F_0 + h - a_1 + 2a_2$;

$B = h - a_1 + 2a_2$ oraz wielomian stopnia drugiego $P(x) =$
 $= (a_1 - 2a_2) x + a_2 x^2$.

Całkę $\int_0^x f(x)dx$ obliczamy następnie całkując otrzymany szereg funkcyjny wyraz po wyrazie, co jest dopuszczalne ze względu na jego jednostajną zbieżność w całym przedziale $0 < x < \infty$

Całki tego typu spełniają nierówność :

$$0 < \int_0^x e^{-kx} (F_0 + B + P(x))^{-k-1/2} dx < \int_0^x e^{-kx} A^{-k-1/2} dx = \\ = A^{-k-1/2} \frac{1}{k} (1 - e^{-kx})$$

Obecność wielomianu $P_2(x)$ przyspiesza zbieżność do zera funkcji podcałkowej, gdy $x \rightarrow \infty$. Fizycznie oznacza to skracanie czasu, w którym odbywa się przebieg, co jest łatwe do zrozumienia intuicyjnie.

Dobłą aproksymację tych całek można otrzymać całkując kolejno przez części, ponieważ wtedy otrzymuje się szybkie narastanie wyrażeń w mianowniku.

Ze związku dla $G_k(x)$ rosnącego wolniej niż e^{kx} wynika :

$$\int_0^x e^{-kx} G_k(x) dx = \int_0^\infty e^{-kx} G_k(x) dx - \int_x^\infty e^{-kx} G_k(x) dx \sim \\ \frac{1}{k} \left[\sum_{i=0}^n \frac{1}{k^i} G_k^{(i)}(0) - e^{-kx} \sum_{i=0}^n \frac{1}{k^i} G_k^{(i)}(x) \right]$$

Sumy po prawej stronie mają charakter asymptotyczny i są dobrymi przybliżeniami tylko dla określonych n .

Wtedy całka ma postać:

$$\int_0^x f(x) dx \sim \int_0^x (A + P_2(x))^{-1/2} dx + \dots \quad (\text{nast. str.})$$

$$+ A^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)! (B/A)^k}{2^{2k-1} k! (k-1)!} \frac{1}{k!} \left[\sum_{i=0}^n \frac{1}{k!} G_k^{(i)}(0) - e^{-kx} \sum_{i=0}^n \frac{1}{k!} G_k^{(i)}(x) \right] <$$

$$< (A + P(x))^{-1/2} dx + A^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)! (B/A)^k (1 - e^{-kx})}{2^{2k-1} k! (k-1)! k}$$

gdzie $G_k^{(i)}$ są kolejnymi i -tymi pochodnymi wyrażenia :

$$\left[1 + P_2(x)/A \right]^{-k-1/2}$$

Szereg otrzymany jest ograniczony majorantą po prawej stronie. Pierwszy wyraz aproksymacji tym szeregiem ma postać :

$$v = \int_0^x f(x) dx \sim \int_0^x [A + P_2(x)]^{-1/2} dx + \frac{BG_1}{2} - \frac{B}{2} e^{-x} G_1(x) =$$

~~XXXXXXXXXX~~

Otrzymujemy, więc przesunięcie czasowe względem rozwiązania dla wielkich x , pozostające przy $x \rightarrow \infty$. Ponieważ zaś $G_1(0) = A^{-3/2}$, stąd przesunięcie dla v ma postać $A^{-3/2} B/2$. Tego rodzaju postać pierwszego wyrazu szeregu sugeruje możliwość zastosowania przybliżenia funkcją prostszą, lecz zachowującą się w przybliżeniu tak, jak podany szereg dla wartości $x \geq 0$.

Przykładowo można podać wyrażenie typu :

$$f \sim ae^{-mx} + (A + P_2(x))^{-1/2}$$

a więc

$$v = \frac{a}{m} (1 - e^{-mx}) + \int_0^x [A + P_2(x)]^{-1/2} dx$$

Wyrażenie to znajduje się blisko rozwiązania dla $x \rightarrow \infty$, ale odchyła się od niego przy małych wartościach x tak, że jego wartość i wartość pochodnej może dla $x = 0$ być równa żądanej wartości dla funkcji f . Współczynniki a i m otrzymujemy wtedy ze związków przybliżonych dla funkcji i jej pochodnej w otoczeniu zera.

Mamy wtedy

$$a = (A - B)^{-1/2} - A^{-1/2}$$

$$m = \frac{1}{2} B \frac{(A-B)^{-3/2}}{(A-B)^{-1/2} - A^{-1/2}} + \frac{1}{2} P'(0) \frac{(A-B)^{-3/2} - A^{-3/2}}{(A-B)^{-1/2} - A^{-1/2}}$$

Tak otrzymane rozwiązanie przybliżone psuje się wtedy, gdy $F_0 = KW_0^2$ jest bliskie zera /rozruch od zera - por. Przykład 3/. Wtedy zmienia się ogólny charakter zachowania v w okolicy zera. Zamiast, żeby wtedy $v \propto x$, co uzyskujemy przez całkowanie w otoczeniu zera wyrażenia bliskiego stałej, mamy na analogicznej drodze $v \propto x^{1/2}$. Ten skok wykładnika nie może być uchwycony w powyższym rozwiązaniu przybliżonym. Funkcja podcałkowa $f(x)$ zaczyna się wtedy od nieskończoności, jednakże opada dostatecznie szybko, aby v było skończone. Przy x dążącym do nieskończoności f zachowuje się jednak tak samo niezależnie od wartości B .

Dlatego też dla $A = B$ nasuwa się następująca aproksymacja :

$$f(x) \sim [A + P'(0)]^{-1/2} x^{-1/2} e^{-mx} + (A + P(x))^{-1/2} - A^{-1/2} e^{-mx}$$

gdzie m winno zapewnić dostatecznie szybkie zniżanie do zera pierwszego i trzeciego członu.

Całkując otrzymujemy

$$v \cong (A + P'(0))^{-1/2} 2^{1/2} m^{-1/2} \left[\varphi((2mx)^{1/2}) - 1/2 \right] + \\ + \int_0^x (A + P(x))^{-1/2} dx$$

gdzie $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy$

Pierwszy człon po prawej stronie stanowi opóźnienie, które zbliża się asymptotycznie do wartości stałej :

$$(2m)^{-1/2} \left[A + P_2(0) \right]^{-1/2} + \frac{A}{m}^{-1/2}$$

Występuje więc podobnie jak przy $A \neq B$ opóźnienie czasowe w porównaniu z rozwiązaniem dla wielkich x .

Rozdział 7. ZACHOWANIE WENTYLACJI W OBECNOŚCI POŻARU -

- PROBA ANALIZY

Zagadnienie zachowania wentylacji kopalni w obecności pożaru podziemnego było przedmiotem szeregu rozważań o charakterze jakościowym lub opisowym. Jak każdy trudny problem techniczny czy naukowy tak i problem pożarów podziemnych doczekał się bardzo obszernej kazuistyki. Nie próbujemy tutaj referować licznych prac analizujących przypadki pożarów podziemnych w kopalniach czy instalacjach przemysłowych odsyłając do podręcznika W. Budryka /„Pożary podziemne“/ jako źródła informacji o współczesnym stanie wiedzy górniczej w dziedzinie powstawania pożarów i ich przebiegu w kopalniach.

Tutaj zainteresujemy się węższym zagadnieniem mianowicie współdziałaniem między przepływającym gazem o zmiennej temperaturze, a otaczającymi skałami przejmującymi ciepło, stale w obecności pola grawitacyjnego pozwalającego na dokonywanie przemiany energii cieplnej w mechaniczną.

Jak w dalszym ciągu wykażemy, nagle^{mu} powstania^u, w chwili $t = 0$ w punkcie $s = s_p$ przewodu, punkтового źródła ciepła o stałej wydajności w czasie towarzyszy, następnie szereg zjawisk kolejno po sobie następujących.

Początkowo powstaje w ten sposób "korek" gorącego powietrza o rosnącej długości, który ulega schładzaniu w miarę posuwania się jego frontu wzdłuż przewodów / korytarzy, "wyróbisk" / kopalni. Przyjmując dla uproszczenia, że kopalnia składa się z odcinka poziomego połączonego z powierzchnią dwoma szybami pionowymi, a źródło ciepła powstało w odcinku poziomym, stwierdzamy, że w okresie wstępnym korek gorącego powietrza narasta wzdłuż odcinka poziomego, aby następnie przeniknąć do szybu

pionowego.

Z chwilą penetracji do tego odcinka pionowego następuje wpływ nagrzania powietrza na prędkość przepływu, gdyż dopiero wtedy w sposób istotny zostaje naruszony rozkład ciśnień wewnątrz rozważanego układu przewodów i powstaje siła motoryczna zwana "depresją cieplną".

Coprawda już od samego początku występuje pewne naruszenie bilansu przepływającej ilości powietrza, co przy stałej różnicy ciśnień wytwarzanej przez wentylator musi zaznaczyć się zmianą prędkości przepływu zgodnie z równaniem ruchu, jednakże analizę tego zjawiska potraktujemy tu tylko szkicowo w ramach przykładu 7.1. Natomiast fakt, że występuje silne schładzanie powietrza przy narastaniu "korka" musi zmniejszyć znacznie tę zmianę prędkości przepływu, która skądinąd powoduje wydłużenie czasów charakterystycznych poszczególnych przebiegów w porównaniu z oszacowaniami podanymi tutaj.

Wobec tego słusznym się wydaje potraktowanie początkowego okresu narastania korka powietrza gorącego jako przypadku przepływu o stałej prędkości i skoncentrowanie uwagi na procesie wymiany ciepła między powietrzem a otaczającymi skałami. Następnie omówimy dwa problemy: próbę ilościowego uchwycenia narastania w czasie siły potorycznej / tzw. "depresji cieplnej" po rozpoczęciu penetracji "korka" do odcinka pionowego, oraz jako drugi problem analizę zachowania przepływu w modelu laboratoryjnym w którym powolnemu przepływowi powietrza towarzyszą zjawiska wymiany ciepła i różnic gęstości.

/1/ Równania podstawowe.

Powtarzając wprowadzone uprzednio równania bez zmieniania ich numeracji piszemy kolejno:

Równanie ruchu:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{f}{2D} |u| u \frac{ds}{RT} + g \ln p_2/p_1 + g \int_{s_1}^{s_2} \frac{dz}{RT} \right] = 0 \quad /5.3/$$

Równanie ciągłości:

$$W = \rho u A = \rho_0 u_0 A_0 - \frac{\partial}{\partial t} \int_{s_1}^{s_2} \rho A ds \quad /5.5/$$

Równanie przewodnictwa cieplnego w warstwie powierzchniowej ściany:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \quad /5.13/$$

Równanie energii przepływającego gazu:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial s} = q + q_p \delta(s - s_p) 1 (t - t_0) \quad /6.1/$$

Równanie stanu:

$$p/\rho = gRT$$

Równanie oddawania ciepła przez gaz:

$$\rho A q = -kP \left[T(s, t) - \theta_K(s, t) \right] \quad /4.13/$$

Równanie odwodzenia ciepła przez skały:

$$\rho A q = P \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_K \quad /4.14/$$

Przykład 7.1.

Rozważmy niesłychanie daleko uproszczony przypadek przepływu w poziomym izolowanym adiabatycznie przewodzie o

stałym przekroju, o długości L przy pełnym pominięciu bezwładności powietrza oraz jego przewodności cieplnej, w warunkach, gdy przepływ zapewniony jest wentylatorom o stałej "depresji" /różnicy potencjałów/, a do przepływu w punkcie $s = s_p$ doprowadzamy począwszy od chwili $t = 0$ ciepło w ilości tak ~~dużej~~ ^{dobranej}, że występuje skok temperatury powietrza w tym przekroju z T_0 na $T_0 + T_1$. Z upływem czasu tworzy się "korek" gorącego powietrza o rosnącej długości. Front tego "korka" posuwa się z prędkością V równą prędkości powietrza w dole przepływu. Natomiast w górze przepływu aż do punktu $s = s_p$ prędkość przepływu wynosi U .

Obowiązują tu dwa równania: pierwsze z nich, równanie ruchu /5.3/ redukuje się do postaci:

$$\int_0^L (u^2/T) ds = \#h = \text{const.}$$

gdzie: $u = U$, $T = T_0$, $\rho = \rho_0$ w przedziale $0 \leq s \leq s_p$

$$u = V, T = T_0 + T_1, \rho = \rho_0 T_0 / (T_0 + T_1), \quad \text{gdy } s_p > s > s_p + \int V dt$$

$$u = V, T = T_0, \rho = \rho_0 \text{ dalej aż do } s = L.$$

Drugim równaniem jest równanie ciągłości /5.5/ przy $A = \text{const.}$

$$\rho_0 V = \rho_0 U - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \rho ds$$

Rozbijając odpowiednie całki w przedziale $0, L$ na trzy całki o podanych powyżej przedziałach i podstawiając odpowiednie wartości temperatury prędkości oraz gęstości otrzymujemy związek

$$V = U \left(1 + T_1/T_0 \right) \text{ oraz}$$

$$\frac{U^2 L}{T_0} \left(1 + \frac{\int U dt}{L} \frac{T_1}{T_0} \left(1 + \frac{T_1}{T_0} \right) \right) = \text{const.}$$

Otrzymane równanie wykazuje, że U winno maleć z czasem w miarę narastania "korka". Nic nie stoi na przeszkodzie aby wykazać, że dzieje się to z potęgą $-1/3$ wyrażenia liniowego zależnego od czasu.

Oczywiście pominięcie wymiany ciepła i wynikający stąd obraz korka gorącego powietrza, podobnie jak pominięcie bezwładności stanowi daleko idącą schematyzację, podobnie zresztą jak stałość μ

Gdyby próbować uwalniać się od uproszczeń, zauważymy, że wymiana ciepła zmniejsza zastępczą / w sensie całki $\int \rho ds$ / długość "korka" gorącego powietrza, a wzrost μ przy malejącym V również działa osłabiająco na efekt.

/ii/ Proces narastania siły motorycznej

Celem uchwycenia zjawiska narastania siły motorycznej rozważmy równanie energii i przewodnictwa cieplnego, a następnie równanie ruchu wprowadzając w toku rozumowania pewne założenia upraszczające, których błąd będziemy się starali za każdym razem z grubsza oszacować.

Siła motoryczna dana ostatnim członem równania /5.3/ wynika z chwilowego rozkładu temperatury w sieci. Ten z kolei określony jest procesem schładzania powietrza przepływającego przez korytarz podziemny. Procesem schładzania rządzi równanie energii /6.1/ łącznie z prawem wymiany ciepła /4.12/ zawierające temperaturę powierzchni ścian, która określona jest procesem przewodnictwa cieplnego w otaczających skałach.

Mamy tu do czynienia z układem równań różniczkowych, którego ścisłe rozwiązanie byłoby zapewne wysoce kłopotliwe, aczkolwiek fizycznie rzecz biorąc układ winien rozwiązanie posiadać. Celowość wpasowywania jedną z metod przybliżonych lepszych przybliżeń niż te, które tu podamy jest jednak wysoce problematyczna, gdyż może ważniejsza jest tu przejrzystość i prostota obrazu niż dokładność rozwiązań, nierealna wobec nikłej dokładności danych wyjściowych.

Pozostaniemy tu więc przy uproszczonym opisie procesu ewolucji w czasie poszczególnych wielkości pozostawiając dokładniejsze rozwiązania przyszłości, gdy być może znajomość danych pomiarowych będzie znacznie większa.

Naszym celem jest więc obecnie uzyskanie prostego opisu zjawiska, pomijającego subtelniejsze szczegóły jego przebiegu.

Analizę rozpoczniemy od problemu przewodnictwa cieplnego:

Jako wniosek z /4.12/ i /4.14/ otrzymujemy na konturze K warunek brzegowy równania przewodnictwa cieplnego /5.13/ w postaci /4.15/ $k\theta - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} = kT$.

Wykorzystując wyniki podane przez Boussinesqa /Théorie Analytique de la Chaleur T.2 §§ 161-195/ można napisać dla równania /5.13/ z warunkiem brzegowym /4.15/ formalne rozwiązanie dla temperatury ściany θ_K przy zmiennej temperaturze T /s,t/ przepływającego gazu:

$$\theta_K = \frac{2k}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-k\zeta/\lambda} \left[\int_{\frac{\zeta}{2\lambda\sqrt{t}}}^{\infty} T(s,t - \frac{\zeta^2}{4\lambda^2 w^2}) e^{-w^2} dw \right] d\zeta \quad /7/$$

Przykład 7.2.

Znaleźć temperaturę powierzchni ściany θ_K jeżeli w chwili $t = 0$ ścianę omywa gaz o stałej temperaturze T takiej, że nadwyżka ponad temperaturę początkową ściany T_0 wynosi $T - T_0 = T_1$.

Korzystamy z zależności /7.1/ stąd przy $T = \text{const.}$ otrzymujemy przez dwukrotne całkowanie

$$\theta_K = T_1 \left(1 - e^{k^2 x^2 t / \lambda^2} \operatorname{erf} \left(k x t^{1/2} / \lambda \right) \right) + T_0$$

Otrzymana zależność prowadzi do wniosku, że dla małych t /początek ogrzewania/

$$\theta_K \sim \frac{2k \kappa}{\sqrt{\pi} \lambda} t^{1/2} T_1 + T_0$$

Natomiast dla wielkich t /koniec nagrzewania /:

$$\theta_K \sim T_1 \left(1 - \frac{\lambda}{k \kappa \pi^{1/2} t^{1/2}} \right)$$

Przebieg temperatury powierzchniowej scharakteryzowany jest więc szybkim narastaniem na początku procesu nagrzewania jak $t^{1/2}$ /styczna pionowa/ i zdążaniem do asymptoty jak $t^{-1/2}$.

Równanie energii /6.1/ jako równanie pierwszego rzędu posiada jedną rodzinę charakterystyk o równaniu $ds/dt = u(s, t)$, gdzie u jest prędkością przepływu, którą zresztą tu przyjmujemy za stałą. Ta rodzina charakterystyk ma prostą interpretację fizyczną. Jest to poprostu zależność $s = s(t)$ dla poszczególnych płynnych elementów wędrujących wzdłuż przewodu. Ta interpretacja wskazuje, że jeżeli pożar wybuchł w punkcie $s = s_p$ w chwili $t = t_0$ i dostarcza stałej ilości ciepła q_p skoncentrowanej w s_p stanowi więc trwałe źródło punktowe ciepła zaistniałe w chwili t_0 , to masy powietrza przepływające przez taki punktowy pożar uzyskują skok temperatury o wartość q_p / c_p i

istnieje front ciepłych mas powietrza posuwający się wzdłuż charakterystyki przechodzącej przez punkt s_p, t_0 schładzający się zgodnie z równaniem

$$\circ \frac{dT}{pdt} = - \frac{kP}{\xi A} (T - T_0)$$

ponieważ front gorącego powietrza natrafia na swej drodze nienagrane ściany przewodu o temperaturze $\Theta_K = T_0$

Powyższe równanie rozwiązujemy pamiętając, że $\rho \propto T^{-1}$, a k przyjmujemy jako stałe. Wtedy otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

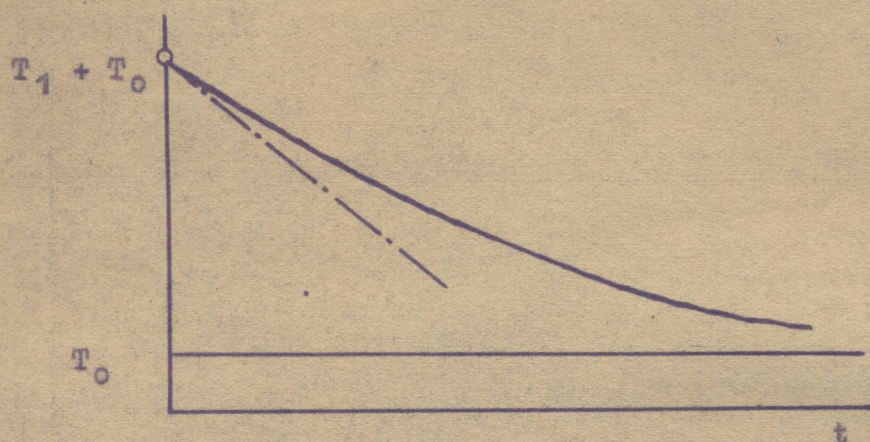
$$T = \frac{T_0}{1 - \frac{T_1}{T_1 + T_0} \exp(-kPt/c_p \xi_0 A)}$$

Dla takich t różnica temperatur $T - T_0$ maleje wykładniczo

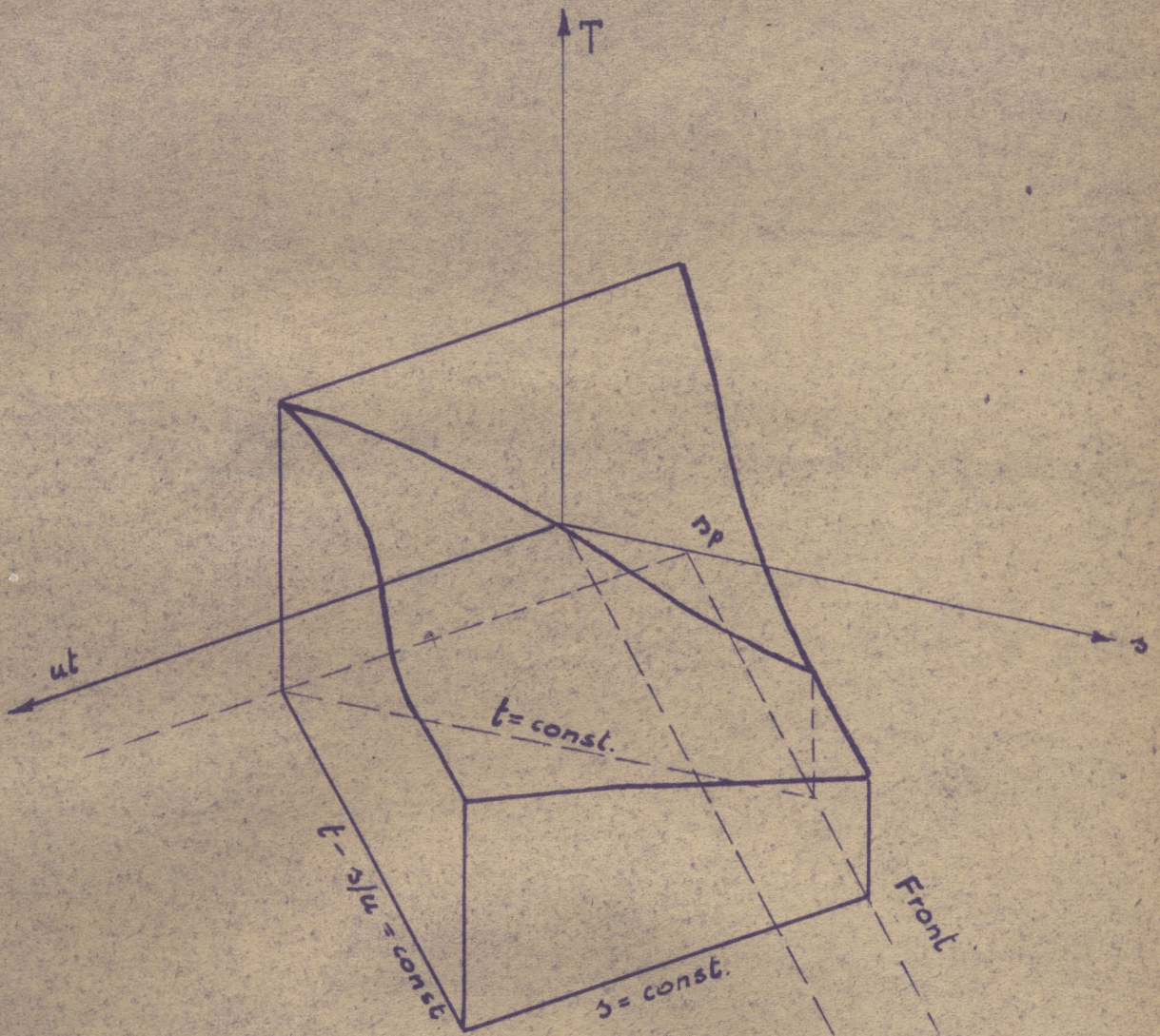
jak $\frac{T_1 T_0}{T_1 + T_0} \exp(-kPt/c_p \xi_0 A)$, natomiast dla małych czasów

nachylenie stycznej wynosi $-T_1 kP (1 + T_1/T_0)/c_p \xi_0 A$.

Wykres zależności jest więc następujący:



Znając zachowanie temperatury wzdłuż jednej /granicznej/ charakterystyki równania energii, możemy przeanalizować jakościowo zachowanie temperatury w stałym punkcie przewodu z upływem czasu



wtedy gdy prędkość przepływu jest stała. Czas przebywania określonego punktu przewodu w obrębie powietrza gorącego wynosi $t = (s - s_p) / U$.

Przebieg frontu temperatury jest stromy, a za frontem występuje już powolna zmienność temperatury powietrza toteż korzystając z rozwiązania dla małych czasów przy skoku temperatury w chwili $t = (s - s_p) / U$ możemy napisać przybliżony wzór / por. przykład 7.2 /, dla temperatury ściany za frontem gorącym:

$$\theta_K \sim T_0 + \bar{k} (T - T_0) \sqrt{t - (s - s_p) / U}$$

gdzie przez $\bar{k}$ oznaczyliśmy dla krótkości współczynnik $2k\kappa / \lambda \sqrt{\pi}$. Równanie energii napisane dla charakterystyki " tuż za frontem " ma wtedy postać:

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{kP}{A \rho c_p} (T - T_0) / 1 - \bar{k} \sqrt{(s_p - a) / U} /$$

gdzie zamiast $s - Ut$ piszemy a , współrzędną lagranżowską rozważanego elementu powietrza. Otrzymane równanie sugeruje więc, że wpływ ścian w chwilach bezpośrednio następujących po przejściu frontu jest równoważny zmianie podziałki na osi czasu t . Przebieg temperatury powietrza jest " zwolniony w czasie " w stosunku $1 - \bar{k} \left(\frac{s_p - a}{U} \right)^{1/2}$

Taki obraz zachowania temperatury w okresie początkowym daje nam pogląd na zachowanie " siły motorycznej " $(g \frac{dz}{RT})$ powstającej w przewodzie o zmiennym nachyleniu.

Przykład 7.3.

Rozważmy przepływ w przewodzie imitującym kopalnię mającym dla uproszczenia rozważań stały przekrój F , długość całkowitą L , i składający się z odcinka poziomego zakończonych po obu stronach odcinkami pionowymi /"szybami"/ o wysokości H . W takim przewodzie działaniem wentylatora wytwarzany jest przepływ o prędkości U . W środku poziomej części przyjmujemy zaistnienie w chwili $t = 0$ trwałego źródła ciepła i obserwujemy w takim pomysłanym eksperymencie ruch " korka gorącego powietrza " wzdłuż przewodu. Przy takiej aproksymacji front gorący posuwa się do chwili $(L - 2H) / 2U$ ze stałą prędkością wzdłuż odcinka poziomego następnie wpływa do odcinka pionowego. W tym momencie zaczyna się przejawiać siła motoryczna $-\int dz/RT$, której wartość sprowadza się do całki w granicach od 0 do Z gdzie Z stanowi chwilowe położenie frontu gorącego w przewodzie pionowym liczone do góry:

$$\int_0^Z dz/RT - Z/RT_0$$

Wartość tej całki obliczamy w pierwszym przybliżeniu pomijając zmianę prędkości przepływu oraz przyrost temperatury powietrza za frontem, pisząc $L_0 = c_p \varrho_0 AU/kP$

$$-\int \frac{dz}{RT} = + \frac{1}{RT_0} \frac{T_1}{T_1 + T_0} \cdot L_0 e^{-(L-2H)/2L_0} (1 - e^{-Z/L_0})$$

Mimo elementarnego wyprowadzenia wzór tego typu nadaje się do oszacowania siły motorycznej wywołanej źródłem ciepła oraz zachowania tej siły motorycznej z upływem czasu. Zauważamy, że siła motoryczna określona jest nagrzaniem dawanym przez źródło

/ stosunek $T_1 / (T_1 + T_0)$ / oraz " wstępnym schłodzeniem " danym członem $\exp \left[- (L - 2H) / 2L_0 \right]$ wreszcie głębokością penetracji Z korka gorącego powietrza wgląd odcinka pionowego. Charakterystyczne jest tu istnienie nieprzekraczalnej asymptotycznej wartości siły motorycznej gdy $Z \rightarrow \infty$ a więc dla nieskończenie długiego odcinka pionowego co oczywiście jest uzasadnione przyjętym przybliżeniem przede wszystkim wskutek pominięcia wzrostu lokalnej temperatury powietrza, z upływem czasu.

Interesujące jest zachowanie siły motorycznej w samym początku penetracji, gdyż wtedy:

$$- \frac{Z}{RT} \frac{T_1}{T_1 + T_2} \exp \left[- (L - 2H) / 2L_0 \right]$$

Otrzymane rozwiązanie podaje przebieg narastania siły motorycznej w początkowym okresie tego procesu. Po upływie pewnego czasu zacznie dawać znać o sobie proces przewodnictwa cieplnego w skałach, albo mówiąc inaczej niedoskonałość przewodnictwa skał. Zauważmy, że współczynnik przy czasie t w wyrażeniu podanym w przykładzie 7.2 stanowi odwrotność czasu charakterystycznego przebiegu narastania temperatury ściany korytarza. W normalnych warunkach przyjmowania ciepła mamy następujące szacunkowe wartości występujących współczynników: $k \approx 10 \text{ kkal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$, $\lambda \approx 1 \text{ kkal/mh}^\circ\text{C}$, $\alpha^2 \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$. daje to dla skał typu piaskowiec czas charakterystyczny wynoszący około 5 godzin. Przebieg nagrzewania ścian jest więc zjawiskiem znacznie powolniejszym niż wędrówka i narastanie korka gorącego powietrza. Te względy wskazują, że celowym jest przyjęcie jako pierwszego przybliżenia stałej temperatury ścian przewodu.

/iii/ Model przepływów z wymianą ciepła

Autor zbudował w Zakładzie Hydromechaniki Górniczej A model przewodu dla badań nad przepływami z wymianą ciepła i oddziaływaniem zmian w rozkładzie temperatury na dynamikę przepływu. Model ten jest złożony z dwu pionowych rur cienkościennych o średnicy $\varnothing$ 50 mm i grubości ścianki 1,5 mm o długości 24 m każda, złożonych z segmentów o długości ok. 3 m skrzepionych ze sobą. Transformator grzewczy oraz szyna zbiorcza aluminiowa o przekroju ok. 40 mm² pozwala na przepuszczenie przezabrany odcinek rury prądu elektrycznego o częstotliwości sieci o natężeniu dochodzącym do 360 A. przy napięciu od 4 do 15 V. Jedna z rur została następnie wyposażona w wentylator ssący u góry, a po zatkaniu dolnego trójnika otrzymaliśmy w ten sposób U-rurkę znacznych rozmiarów.

Pomiary wykonywane następnie przez aspiranta p. Jan-Cz. Mina pod kierownictwem autora wykazały, że przy ogrzewaniu odcinka 6-metrowego prądem 367 A otrzymujemy nagrzewanie odcinka rury do około asymptotycznej wartości 100°C w ciągu okresu ponad 10 minut. Ciepło wyzwalane przez przepływ prądu elektrycznego jest gromadzone w pojemności cieplnej rury, a pozatym odprowadzane na zewnątrz działaniem konwekcji i promieniowania. Krzywa narastania temperatury ściany rury w czasie wykazuje narastanie bardzo zbliżone do przebiegu krzywej $T_1 (1 - e^{-t/t_1})$ gdzie t_1 jest stałą czasową tego przebiegu.

Przepływ w tak zestawionym układzie rur stanowi z pewnym przybliżeniem model zachowania się wentylacji kopalni pod działaniem zjawisk cieplnych.

Jest tu więc na miejscu przeprowadzenie porównania opisu matematycznego zachowania się przepływu w takim modelu oraz przepływu w układzie przewodów zbliżonym do rzeczywistej kopalni.

Nie byłoby może celowym rozważanie na modelu nagłego wystąpienia trwałego źródła ciepła ponieważ krótkość zarówno stałych czasowych samego przepływu jak też i czasu przepływu przez sam model / kilkanaście do kilkudziesięciu sekund / zmuszałoby do bardzo wielkiego skrócenia stałej czasowej samego grzejnika co przy dość dużej mocy potrzebnej byłoby nie praktyczne.

Dlatego też przeprowadzimy tu porównanie zachowania w przypadku szczególnym, a więc wtedy, gdy przepływ jest o stałej prędkości a interesujemy się przebiegiem temperatury w czasie wzdłuż przewodu, przy temperaturze wlotowej narastającej jak

$$T_1 \left(1 - e^{-t/t_1} \right), \text{ lub ogólnie } T_1(t).$$

Zasadniczą różnicę pomiędzy modelem, a przewodami /"wyrobiskami"/ rzeczywistej kopalni stanowi grubość chłodnych ścian przejmujących ciepło. Jest ona bardzo mała na modelu, natomiast w górnictwie mamy grubości warstw skalnych bardzo wielkie w porównaniu z wielkością samych przewodów.

Ta ostatnia różnica polega na odmiennej postaci równania przewodnictwa cieplnego dla obu porównywanych sytuacji. Inny jest bowiem mechanizm odprowadzania ciepła przez dobrze przewodzącą cienką ścianę chłodzoną z zewnątrz przez powietrze i otoczenie o niższej temperaturze, a inny jest mechanizm przewodzenia ciepła w warstwie górotworu o nieskończonej grubości.

Dla przeprowadzenia porównania przedyskutujemy model matematyczny, w którym zrezygnujemy z uwzględnienia zmienności gęstości powietrza z temperaturą. Będzie to więc model dla bardzo małych zmian temperatury co w dalszym ciągu będzie również

usprawiedliwić przyjęcie, że ilość ciepła oddawana przez promieniowanie jest proporcjonalna do różnicy temperatur, co zresztą jest tradycyjne w tego typu problemach.

Rozważając jak poprzednio model przejmowania ciepła przez powietrze przy stałym współczynniku przejmowania ciepła k zaczniemy od porównania ważnej dla problemu współdziałania z przepływającym powietrzem temperatury powierzchni ściany jako "odpowiedzi" przewodu na temperaturę /średnią/ przepływającego medium.

Dla rury cienkościennej z liniowym odprowadzeniem ciepła mamy wtedy zależność operatorową /wyprowadzenie w przypisach/

$$\bar{\theta} = \bar{T} \left(pCR + 1 + R/R_b \right)^{-1}$$

Natomiast dla otoczenia typu górotwór / półprzestrzeń przewodząca / zachodzi związek operatorowy por.przypis

$$\bar{\theta} = \bar{T} \left(1 + \beta p^{1/2} \right)^{-1}$$

Jeżeli przez $\bar{\theta}/\bar{T}$ będziemy rozumieć rodzaj transmitancji układu / termin z teorii obwodów elektrycznych i regulacji automatycznej / to istotna różnica w zachowaniu obu porównywanych układów nie będzie już zależeć od postaci przyłożonej funkcji $\bar{T}$, lecz od samej postaci transmitancji.

Istotna różnica polega tu przede wszystkim na obecności członu proporcjonalnego albo do p albo do $p^{1/2}$. Transmitancja jest transformatą odpowiedzi na impuls jednostkowy /inaczej "funkcja Diraka" / toteż napiszemy tę odpowiedź:

$$\text{dla rury cienkościennej: typ } \frac{1}{CR} e^{-At} \quad \text{gdzie } A = \frac{1 + R/R_b}{CR}$$

dla górotworu:

$$-\frac{k}{\beta} \left[(\pi t)^{-1/2} - \frac{1}{\beta} e^{-t/\beta^2} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{t}{\beta}} \right]$$

Interpretacja fizyczna obu odpowiedzi staje się jasna, gdy zdamy sobie sprawę z tego, że układ o stałych skupionych złożonych z pojedynczego kondensatora ładuje się przez dzielnik oporowy impulsem jednostkowym od razu do skończonego napięcia, natomiast układ o stałych rozłożonych, którym jest półprzestrzeń przewodząca ładuje się powierzchniowo do napięcia nieskończonego.

Z tego powodu szybkość początkowa nagrzewania powierzchni ściany grubej przy zetknięciu z gorącym powietrzem wypada typu $\propto t^{1/2}$, a więc pochodnej nieskończonej, podczas gdy szybkość wzrostu temperatury nagrzewania cienkiej ściany nieotulonej jest początkowo $\propto t$ mamy tu więc skończoną pochodną. To odmienne zachowanie ma oczywiście znaczenie dla konstrukcji rozwiązania metodą charakterystyk. Różny będzie bowiem wtedy kształt powierzchni w sąsiedztwie charakterystyki a = s_p czyli frontu powietrza gorącego.

Jednakże tak długo jak przyrost temperatury ściany θ_K jest mały ponad T_0 , "porównania" z nadwyżką temperatury $T - T_0$, oba typy sytuacji różnią się bardzo nieznacznie. Dotyczy to więc wstępnego okresu ruchu " korka gorącego powietrza ".

Gdy źródło ciepła utrzymuje się przez dłuższy czas, nagrzanie ścian winno się przejawiać. Jeżeli nadal przyjąć, że za frontem temperatura powietrza zmienia się bardzo powoli, to możemy zastosować rozwiązanie z przykładu 7.1. Wtedy można wyznaczyć czas potrzebny dla ogrzania ścian przez gorące powietrze. Czas ten jest stosunkowo długi.

Wyznaczmy dla omawianej ściany cienkiej stałą czasową C.R.

$$CR = \frac{P \cdot \rho_{Fe} \delta C_{Fe}}{A c_p} \cdot \frac{\rho_{Fe} A c_p}{kP} = \frac{\rho_{Fe} \delta C_{Fe}}{k}$$

$$\rho_{Fe} C_{Fe} = 7800 \cdot 0.115 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3 \text{ } ^\circ\text{C}} = 897 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

$$k = 10 \left[\text{kcal} / \text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C h} \right]$$

$$\delta = 10^{-3} [\text{m}]$$

$$CR = \frac{897 \cdot 10^{-3}}{10} = 0.0897 [\text{h}]$$

czyli 322,92 sek

323 sek $\approx$ 5 minut a więc czas porównywalny z czasem 10 minut, charakterystycznym dla przyłożonej funkcji wymuszającej, a więc narastania temperatury powietrza dopływającego.

Poza odmiennym zachowaniem dla małych czasów ważną i bardziej istotną różnicę stanowi krótkość czasu charakterystycznego nagrzewania ścian. Czas ten wynosi mianowicie $CR = \frac{\rho_{Fe} \delta C_{Fe}}{K}$, a więc przy grubości ściany 1 mm i przybliżonym współczynniku wymiany ciepła rzędu 10 otrzymamy $CR \approx 10^{-2} k$ czyli rzędu 6 minut co jest porównywalne z stałą czasową narastania temperatury źródła ciepła na modelu.

Tymczasem dla odnośnego czasu charakterystycznego dla górotworu otrzymaliśmy ok. 60 razy więcej.

Oznacza to, że z punktu widzenia przejmowania ciepła występuje na modelu / z grubsza / 60-krotne skrócenie czasów przebiegu w porównaniu z ścianą wentylacyjną kopalni.

W świetle tego nagrzewanie odcinka rury w okresie 10 minut odpowiada 6-u godzinom narastania pożaru co oczywiście jest

czasem zbyt długim.

Przebiegi na modelu różnią się więc pod względem oddziaływania ścian od przebiegów w warunkach górotworu i wyrobisk kopalnianych.

Innym układem zbliżonym bardziej do warunków kopalnianych jest tzw. Górniczy Kanał wentylacyjny, który po przebudowie, będzie obejmował obieg zamknięty o kilku rozgałęzieniach oraz komin pionowy o wysokości 24 m.

Grubość betonowych ścian tunelu / ok. 10 cm / rokuje nadzieję, że można będzie przy pomocy tego urządzenia dokonać obserwacji nad procesem nieustalonego przejmowania ciepła przez ściany grube.

/iv/ Uwagi końcowe

Jak to wykazaliśmy problem przepływu powietrza w kopalni z równoczesną wymianą ciepła z otaczającymi skałami mimo swej złożoności pozwala na wysunięcie szeregu prostych wniosków. Można oszacować wzajemną wagę poszczególnych problemów, szybkość zmiany poszczególnych wielkości i wyprowadzić związki mimo iż uproszczone, ale obarczone błędem dającym się oszacować.

Na pytanie jak daleko warto jest posunąć się tworząc rozwiązania o coraz dalszym stopniu przybliżenia można odpowiedzieć, że dalszy postęp musi być uzależniony od rozwoju doświadczeń w tej dziedzinie.

Nie jest tu rzeczą bez znaczenia, przebudowa istniejącego w Akademii Górniczo-Hutniczej kanału wentylacyjnego celem dostosowania go do badań nad nieustalonymi procesami przejmowania ciepła przez ściany grube.

W obecnym stadium zapewne wszelkie próby wysubtelnienia opisu teoretycznego byłyby tu chyba przedwczesne, ponieważ zbyt mało jeszcze wiemy o procesie nieustalonego przejmowania ciepła przez ściany przy małych prędkościach.

P R Z Y P I S Y

1. Wyprowadzenie rozwiązań przy ścianach grubych

Pewną klasę przybliżonych rozwiązań podanego na początek rozdziału 7. układu równań otrzymujemy drogą rachunku operatorowego wtedy, gdy $u = \text{const.}$ i $\varphi = \text{const.}$, a więc równanie energii jest liniowe ze stałymi współczynnikami. Przypadek ten ma znaczenie ze względu na korzyści jakie daje rachunek operatorowy, a także dlatego, że w ten sposób uzyskujemy jakościowy obraz zmienności temperatury z możliwością uogólnienia na różne typy zachowania się źródła ciepła / emisja ciągła wg. zadanej funkcji itp. /.

Równanie energii /6.1/ po wyrażeniu H przez temperaturę jako $H = c_p T$ zapisujemy w postaci operatorowej:

$$p\bar{T} - T_0 + u \frac{d\bar{T}}{ds} = - \frac{k p}{\varphi A c_p} (\bar{T} - \bar{\theta}_K) \quad /1./$$

gdź dla $t = 0$, $T = T_0$ / przy $s > 0$ /. $\bar{\theta}_K$ jest temperaturą powierzchni ściany uzyskaną z rozwiązania równania operatorowego

$$p\bar{\theta} - T_0 = \kappa^2 \frac{d^2 \bar{\theta}}{dr^2} \quad /2./$$

otrzymanego z równania przewodnictwa cieplnego /5.13/ przy wykorzystaniu warunku, że $\theta = T_0$ dla $t = 0$. Jako warunek dla $r = 0$ występuje wtedy operator transformacji warunku /4.15/ w postaci:

$$k\bar{\theta}_K - \lambda \frac{d\bar{\theta}}{dr} = k\bar{T} \quad \theta = \theta_K \text{ dla } r = 0 \quad /3./$$

Rozwiązanie równania przewodnictwa /2/ z podanym warunkiem brzegowym ma wtedy, przy zachowaniu istnienia transformaty w nieskończoności, postać:

$$\bar{\theta} = \frac{T_0}{p} + \frac{k (\bar{T} - T_0/p)}{k + \lambda p^{1/2}/\kappa} \exp(-rp^{1/2}/\kappa) \quad /4./$$

Wartość $\bar{\theta}_K$ otrzymujemy podstawiając $r = 0$.

Równanie energii przybiera wtedy postać jednorodnego równania liniowego zwyczajnego dla $Y = \bar{T} - T_0/p$:

$$\frac{dY}{ds} + BY = 0 \quad /5./$$

gdzie:

$$B = \left(p + \frac{\lambda p^{1/2} / \kappa k}{1 + \lambda p^{1/2} / \kappa k} \cdot \frac{kP}{Ac_p} \right) / u \quad /6./$$

Mnożąc równanie /6/ przez $\exp /bs/$ i całkując obustronnie otrzymujemy po uporządkowaniu i wyrażeniu stałej całkowania z warunków dla $s = 0$, $\bar{T} = \frac{1}{p} (T_1 + T_0)$, rozwiązanie:

$$\bar{T} = T_0/p + (1/p) T_1 \exp (-Bs) \quad /7./$$

Celowym jest zapisać otrzymaną transformatę w postaci:

$$\bar{T} = T_0/p + T_1 e^{-ps/u} (1/p) \exp \left(- \frac{kP}{Ac_p} \frac{s}{u} \frac{\lambda p^{1/2} / \kappa k}{1 + \lambda p^{1/2} / \kappa k} \right) \quad /8./$$

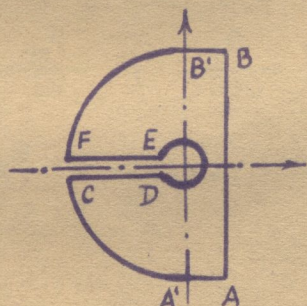
Ponieważ obecność czynnika $\exp (-ps/u)$ wskazuje tylko na opóźnienie czasowe poszczególnych przebiegów w miarę jak posuwamy się wzdłuż współrzędnej s , więc pamiętając fakt tego opóźnienia czasowego koncentrujemy uwagę na drugim czynniku drugiego członu transformaty i oznaczając odnośne współczynniki w tym wyrażeniu przez m i β , poszukujemy funkcji oryginalnej w postaci całki w płaszczyźnie zespolonej, postaci

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \exp \left[-m \frac{\beta p^{1/2}}{1 + \beta p^{1/2}} \right] \frac{dp}{p} \quad /9./$$

Drogę całkowania położoną "trochę na prawo od osi urojonej i równoległą do niej" zastępujemy konturem złożonym z dwu łuków koła wielkiego, dwu odcinków prostej równoległych o ujemnej

części osi rzeczywistej, małego koła wokół punktu rozgałęzienia i bieguna w początku układu oraz całki po wielkich kołach zeraują się, gdy ich promień rośnie nieograniczenie, gdyż spełniony jest warunek lemmatu Jordana, aby funkcja po całkowna podzielona przez e^{pt} zdążała do zera, gdy moduł zmiennej niezależnej p zdąża do nieskończoności.

Całkowanie po konturze wg podanego rysunku / zmieniając kierunek obiegu dla wygodnego wyznaczenia poszukiwanej całki wzdłuż AB /,



przeprowadzamy kolejno podstawiając dla odcinków EF i CD odpowiednio $p = u^2 e \pm \pi i / \beta^2$ i po uporządkowaniu otrzymujemy wzdłuż FE i odpowiednio CD wyrażenie dla funkcji podcałkowej:

$$- 2 e^{-u^2 t / \beta^2} \exp \left(- m \frac{u^2}{1+u^2} \right) \left\{ \cos \left(- m \frac{u}{1+u^2} \right) + i \sin \left(m \frac{u}{1+u^2} \right) \right\} \frac{du}{u}$$

Suma całek w granicach od 0 do $-\infty$ wzdłuż EF oraz od $-\infty$ do 0 wzdłuż CD stanowi sumę części urojonych otrzymanych wyrażeń.

Dzieląc następnie przez $2\pi i$ otrzymujemy następującą postać

$$F(t/\beta^2, m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 t / \beta^2} \exp \left(- m \frac{u^2}{1+u^2} \right) \sin \left(m \frac{u}{1+u^2} \right) \frac{du}{u}$$

Od małego kółka wokół punktu rozgałęzienia w początku układu występuje dodatkowo przyczynik $2\pi i / 2\pi i$ czyli 1.

Celem obliczenia tej całki, a raczej znalezienia jej zachowania dla wielkich t zastosujemy nadający się tutaj lemat Watsona. W tym celu obliczamy współczynniki rozwinięcia na szereg funkcji

$$1/u \sin \left(\frac{mu}{1 + u^2} \right) \text{ oraz } \exp \left(- \frac{mu^2}{1 + u^2} \right)$$

otrzymując kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \sin \frac{mu}{1 + u^2} &= m - m \left(1 + \frac{m^2}{6} \right) u^2 + m \left(1 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{m^4}{120} \right) u^4 \\ &- m \left(1 + m^2 + \frac{m^4}{24} + \frac{m^6}{5040} \right) u^6 + m \left(1 + \frac{5}{3} m^2 + \frac{m^4}{8} + \frac{m^6}{720} + \right. \\ &\left. + \frac{m^8}{362880} \right) m^8 - + \dots \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned} \exp - \frac{mu^2}{1 + u^2} &= 1 - mu^2 + \left(\frac{m^2}{2} + m \right) u^4 - \left(\frac{m^3}{6} + m^2 + \right. \\ &\left. + m \right) u^6 + \left(\frac{m^4}{24} + \frac{m^3}{2} + \frac{3}{2} m^2 + m \right) u^8 + \dots \end{aligned}$$

Stąd korzystając z lematu Watsona w postaci

$$F(x) \sim \sum_n \frac{a_n}{2} \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) (x)^{-(n+1)/2}$$

piszemy rozwiązanie asymptotyczne dla rozważanej całki:

$$\begin{aligned} F(t/\beta^2) &\sim \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\beta}{\sqrt{t}} - \frac{m(1+m^2/6)}{4} \sqrt{\pi} \frac{\beta^3}{t\sqrt{t}} + \\ &+ \frac{m(1+2m+m^2+m^3/8+m^4/120)}{3} \sqrt{\pi} \frac{\beta^5}{t^2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Uzyskane wyrażenie daje nam zachowanie poszukiwanej funkcji dla wielkich wartości t/β^2 oraz małych wartości m , a więc

Rozszyfrowując znaczenie wprowadzonych parametrów i m i wykonując pierwszy wyraz rozwinięcia asymptotycznego otrzymujemy wyrażenie:

$$F(t/\beta^2) = +1 - \frac{\sqrt{\pi} \lambda_P}{2 \rho_{Ac_p}} \frac{s}{\kappa u \sqrt{t}}$$

Można pozwolić sobie w tym miejscu na dygresję, że uzyskane rozwiązanie asymptotyczne wskazuje na celowość posługiwania się wyrażeniami $s/\kappa t^{1/2}$ oraz $\lambda P/\varrho A c_p u$ jako zmiennymi bezwymiarowymi w problemach przewodnictwa cieplnego połączonego z przepływem i z wymianą ciepła między przepływającym medium, a otaczającymi ścianami. Są to oczywiście pewne modyfikacje liczb bezwymiarowych FOURIERA i PÉCLETA.

Przybliżone zachowanie funkcji F można tylko otrzymać jeżeli ograniczyć się do pierwszego członu rozwinięcia na szereg względem $(1 + u^2)^{-1}$ funkcji $(1/u) \sin(mu/(1 + u^2))$: oraz ~~$\exp(-mu^2/(1 + u^2))$~~ czyli: $\exp(-mu^2/(1 + u^2))$, czyli:

$$F(t/\beta^2) = 1 - \int_0^{\infty} e^{-u^2 t/\beta^2} e^{-m} \frac{m}{1+u^2} du = 1 - \frac{\pi}{2} m e^{-m} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{t}/\beta\right) \right] e^{t/\beta^2}$$

gdyż otrzymujemy wtedy całą Nielsena /Nielsen Niels, Theorie des
Integrallogarithmus und Verwandter Transzendenten, Leipzig 1906 /
Jest rzeczą charakterystyczną, że odnajdujemy tu ponownie mimo
modyfikacji poczynionych założeń upraszczających ten sam typ
zachowania asymptotycznego temperatury powietrza a mianowicie
 $\propto t^{-1/2}$.

Wracając do wyjściowej postaci transformaty /7.8/ możemy napisać
najpierw ogólne rozwiązanie w postaci zamkniętej, podane bez
wyprowadzenia przez Jaegera

$$T = T_0 + T_1 \left(t - \frac{s}{u} \right) \left[1 - \frac{2}{\pi} e^{-u^2 (t - u/s)/\beta^2} \exp \left(\frac{mu^2}{1+u^2} \right) \sin \left(\frac{mu}{1+u^2} \right) \frac{du}{u} \right]$$

oraz odpowiednie rozwinięcie asymptotyczne dla wszelkich $\left(t - \frac{s}{u} \right)$, a więc daleko za frontem przesuwanego się korka powietrznego.

$$T = T_0 + T_1 \left(t - \frac{s}{v} \right) \left[1 - \frac{\lambda_P}{\sqrt{\pi} \rho_{Ac_p}} \frac{s}{\kappa u \sqrt{t - s/u}} \right]$$

Przepływ z wymianą ciepła w rurze cienkościennej

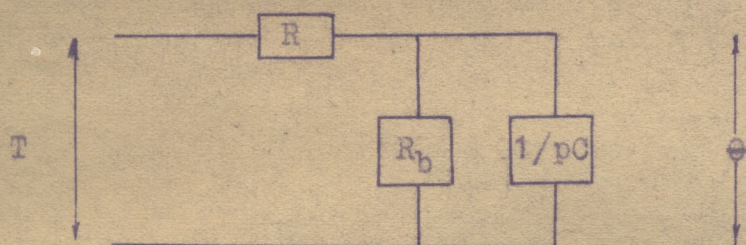
Nieotulona rura do której wpływa gaz o zmiennej w czasie temperaturze jest równoważna układowi złożonemu z pojemności cieplnej oraz oporu przejścia ciepła od gazu do rury jako oporu szeregowego, wreszcie upływności cieplnej na zewnątrz jako oporu bocznikującego pojemności cieplnej.

Oznaczając przez δ grubość ścianki rury zapisujemy opory R i R_b oraz pojemność C w postaci:

$$1/R = kP/\rho A c_p ; 1/R_b = k_2 P/\rho A c_p ; \delta \rho c_{Fe} A_{Fe}/\rho A c_p = C$$

Poza zwykłymi oznaczeniami wprowadzonymi w rozdziale 7 i poprzednich oznaczyliśmy tu przez k_2 globalny współczynnik przejmowania ciepła na zewnątrz, a wskaźnik Fe dotyczy metalu rury.

Omawiany układ przedstawia rysunek:



Jeżeli do takiego układu przyłożymy na wejściu temperaturę T to na pojemności cieplnej (ściance rury) pojawi się temperatura Θ dana zależnością operatorową:

$$\bar{\Theta}/\bar{T} = (pCR + 1 + R/R_b)^{-1} \quad (1)$$

Ilość ciepła przenoszona od powietrza do ścianek rury wynosi zgodnie z definicją oporu cieplnego $(T - \Theta)/R$. Równanie energii zapisujemy więc w postaci:

$$p\bar{T} + u \frac{d\bar{T}}{ds} = - (\bar{T} - \bar{\Theta})/R = \bar{T}/R(pCR + 1 + R/R_b) - \bar{T}/R \quad (2)$$

Otrzymujemy więc równanie różniczkowe liniowe na $\bar{T}$ z warunkiem brzegowym dla $s = 0$: $\bar{T} = T_1/p - T_1/(p+a)$ oznaczającym narastanie temperatury od umownego zera do wartości asymptotycznej $T = T_1$.

Rozwiązując równanie (2) otrzymujemy wyrażenie dla operatora trans

$$T = T_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} \right) \exp(-ps/u) \exp(-s/uR) \exp \frac{s/uR}{pCR + 1 + R/R_b} \quad (3)$$

Istotna osobliwość zawrata w powyższej transformacie wymaga następującego postępowania: zapamiętujemy najpierw przesunięcie czasowe spowodowane czynnikiem $\exp(-ps/u)$ i przekształcamy transformatę wykorzystując tożsamość:

$$1/p - 1/(p+a) = ap^{-1}(p+a)^{-1},$$

następnie dążąc do zastosowania twierdzenia o splocie piszemy dwa czynniki: (oznaczenia X i E wyjaśniają się przez porównanie z równ. (3))

$$\frac{a}{p(p+a)} \exp \frac{X}{E+p} = \frac{a}{p+a} \cdot \frac{1}{p} \exp \frac{X}{E+p},$$

Znamy skądinąd (Carslaw, Jaeger 1959 str 394 wzór 15) transformatę:

$$\frac{1}{p} \exp(X/(E+p)) = L \left\{ e^{X/E} - \frac{1}{E} e^{X/E} - Et \int_0^X e^{-x/E} I_0(2(xt)^{1/2}) dx \right\}$$

oraz klasyczną zależność:

$$a/(p+a) = L \left\{ ae^{-at} \right\}$$

Spłot obu funkcji stanowi wyrażenie:

$$ae^{-at} \int_0^t e^{az} \exp \frac{X}{E} \left[1 - e^{-Ez} \int_0^X e^{-x/E} I_0(2(\frac{x}{E}Ez)^{1/2}) \frac{dx}{E} dz \right]$$

Następnie wprowadzamy za Goldsteinem funkcję $J(x,y)$:

$$J(x,y) = 1 - e^{-y} \int_0^x e^{-\phi} I_0(2(\phi y)^{1/2}) d\phi$$

gdzie wystarczy podstawić $y = Ez$, $x = X/E$, $\phi = \lambda/E$ i po wykorzystaniu faktu przesunięcia czasowego zapisać rozwiązanie:

$$T = T_1 e^{-s/uR} a e^{X/E} - a(t - s/u) \int_0^{t-s/u} e^{ay/E} J(X/E, y) d(y/E)$$

Następnie, przywracając pierwotne oznaczenia w miejsce X i E otrzymujemy

$$T = T_1 e^{-s/uR_b(1+R/R_b)} e^{-a(t-s/u)} a \int_0^{t-s/u} e^{az} J\left(\frac{s/uR}{1+R/R_b}; z\left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R_bC}\right)\right) dz$$

L i t e r a t u r a

Bagrinowski, L., D., (1961), Neustanovivshiesya dvizheniya vozdukh v gornikh virabotkakh, Nauchnie Soobshch. Inst. Gorn. Dela A.N. SSSR, t. 4 str 62-66.

Barczyk, S., (1954), Odwracanie się głównego prądu powietrza przy pożarach we wznoszącym prądzie, Archiwum Górnictwa, Nr. 4.

Beck, K., Friedrichs, K.H. (1958), Erfahrungen mit dem elektrischen Analogierechner für die Wasserrohrnetzberechnung, Das Gas- u. Wasserfach t. 99.

Boldizsar, T., (1958) Warming up of mine air in general considering rock heat and linear caloric effects, Acta Technica Ac. Sc. Hung. t. 12. z. 1-2, str. 61-65.

Budryk, W., (1929) Depresja cieplna, Przegląd Górniczo-Hutniczy.

Budryk W., (1930), Naukowe zasady prowadzenia akcji przeciwpożarowej na kopalniach, Przegląd Górniczo-Hutniczy.

Budryk, W., (1947), Odwracanie się prądów powietrza w czasie pożarów podziemnych, Podziemne pożary (praca zbiorowa), Katowice.

Budryk, W., (1953), Depresja pożaru podziemnego i miejsce jej występowania, Arch. Górn.Hutn. I, Nr. 3-4, str 239-255.

Budryk, W., (1954) Odwracanie się prądów powietrznych w czasie pożarów i sposoby zapobiegania., Arch. Górn. i Hutn. T. 2, nr. 2 str. 125-170.

Budryk, W., (1956). Pożary podziemne, Wydawnictwo Górniczo-Hutnicze, Katowice.

Budryk, W., (1961), Wentylacja kopalń, Katowice.

Bystron, H. Graficzne kryteria kierunków prądów w kopalnianych sieciach wentylacyjnych. Prace G.I.G. komunikat nr. 196.

Carlsaw, H.S. and Jaeger J.C. (1959) Conduction of Heat in Solids,

2nd ed. Oxford at the Clarendon Press.

Czeozot, H., (1929) Niebezpieczeństwo wentylatorów podziemnych, Przegląd Górniczo-Hutniczy.

Feith, E., (1957) Elektrische Netzmodelle für Bewetterungsaufgaben, Arch. f. Techn. Messen, Lief. 252, s. R1 bis R5.

Friedrichs, K.H. (1957) Analogie-Rechenanlage für Verbundnetze, Das Gas u. Wasserfach, 98, H. 44.

Hinsley, F.B. & Scott, D.R., (1951) Ventilation Network Theory, Coll. Engng. t. 28 (324), str. 67-71.

Hinsley, F.B., Jones, J.D., (1960), Flow phenomena associated with the stopping of mine fans. The Midland Counties Institution of Engineers, 16 March 1960.

Kochmański, T., (1954), Zastosowanie krakowianów do obliczania wentylacji kopalń i problemu odwracania prądów. Zesz. nauk. AGH nr. 2 Górnictwo, zesz. 2, str. (59-80).

Kron, G., (1949), Tensor Analysis of Networks, Wiley.

Liwiniszyn, J., (1951) Z zagadnień dynamiki przepływu powietrza w kopalnianych sieciach wentylacyjnych, Przegląd Górniczy Nr. 7-8

Litwiniszyn, J., (1952) Problem of Dynamics of Flows in Conduit Networks Bull.Acad.Pol. Sci. Lettr. vol. 1, nr.3 str. 325 - 339.

Litwiniszyn, J., (1959) Flow Stability in Pipe Networks. Bull.Acad. Pol. Sc.Ser.Techn., t. 7, nr. 10.

Litwiniszyn, J., (1959) Flows in Pipe Networks from the Point of View of the Theory of Random Processes. Arch. Mech. Stos. t. II, z. 4, str. 421-440.

Maczyński, J., (1959), Transient Response of Mine ventilation Networks During Fan Reversal. Bull. Ac. Pol. Sc. Ser. Sc. techn. t. VII, nr.6.

Maczyński, J., (1961), Solving non-linear stationary Networks of Ducts on Digital Computers. Bull. Acad. Pol. Sc. Ser. Sc.techn t.IX

nr. 10.

Scott, D.R., Hudson, R.F., (1953), An Automatic analogue computer for the solution of Mine Ventilation Networks, J. Sci. Instr. t.30 str. 185-188.

Scott, D.R. Hudson, R.F. (1952). Solving ventilation network problems by machine Colliery Engng t. 29 str. 410-413.

Scott, D.R. (1955), Solving pipe flow problems by machine. Nottingham Mining Soc. Mag. t. 7, s. 75-83.

Scott, D.R., (1955), Solving compressible flow problems by machine. Colliery Engineering nr. 32 str. 323 -326.

Scott, D.R., Hinsley, F.B., 1960 The Solution of ventilation network problems, Trans. Instn. Min. Engrs., t.3, str. 348-371.

Scott, D.R., Hudson, R.F. Hinsley, F.B., A ventilation calculator, Colliery Guardian, 186 (4809) str. 553-556.

Skochinsky, A.A. (1904), Rudnichniy vozdukh i osnovniy zakon ego dvizheniya po rudnim virabotkam, Gorniy Zhurnal.

Maczyński., J(1960). A method of computing the pressure distribution in a slow flow of a homogeneous gas in ducts, Arch. Górń. t.5, nr. 2 s. 147.

Maczyński., J. Równania przepływu ośrodka ściśnialwego z wymianą ciepła we współrzędnych krzywoliniowych (1959), Przegląd naukowo-techniczny Akademii Górniczo-Hutniczej seria "G" z. 4

MINE VENTILATION

An analogy between ventilation networks and electrical circuits

BY J. MACZYŃSKI*

EVER SINCE ATKINSON'S form of Darcy's law was introduced in the computation of mining ventilation systems it was found that some further effect besides passive, square law loss of head influences the flow of air through underground galleries.

The word "head" is used extensively by mining engineers to denote the pressure difference between the two sides of a working fan, and similarly a "head loss" is the effect of energy loss in flow through a gallery. It would have been natural to think of the mining network as a passive element capable of dissipating the energy put into it by an active element, namely the fan. This simplified approach was very soon found to be inadmissible since air flow can sometimes be detected with the fan switched off, due to the "chimney draught," a phenomenon observed and used in mine ventilation.

To give an interpretation rather than an explanation, it was assumed that an additional "natural" or "thermal" head was present in the network. This natural head was considered as a kind of additional fan at an appropriate place in the network.

This paper is an attempt to provide a more accurate interpretation of the concept of head in mine ventilation, since this problem is interesting from both theoretical and practical points of view. The theoretical problem belongs to the theory of compressible flow for very small velocities and large gravity effects.

The practical aspect follows from the recent development of the computing and measuring technique that makes it possible to adjust the air flow in mines to within much narrower limits than was possible previously. Accurate information about the properties of a network are now easier to obtain, and more important conclusions about the behaviour of the network under various conditions may be inferred.

There are grounds for supposing that the term "head" (instead of pressure) originated from the use of simple incompressible flow theory (hydraulics) and also from a tendency to find an analogy between

ventilation networks and electrical circuits with an allowance for the marked non-linearity of the pressure-flow relation (Darcy's Law replacing Ohm's Law). "Head" in this sense is used as an equivalent of electric potential difference across the terminals of a circuit element.

Because of the ease with which electric circuits can be handled and the extensive development of circuit theory, analogies of this kind have proved very fruitful and served as a basis for the construction of electric ventilation simulators in several countries.

Nevertheless there is some confusion arising from the fact that no single exact definition of head is accepted widely enough or even usually kept to in a single textbook.

Definitions of head

Head is defined sometimes as the pressure drop reduced to a common reference level, allowance being made for gravitation. We find, however, (cf. Budryk, 1954) extensive use of that word for a closed-mesh integral of the form:

$$(1) \quad \oint p \, dV$$

extended over all the pressure (p) and specific volume (V =volume per unit weight) values in a closed mesh. To be more explicit, the usual way of evaluating this integral consists in plotting on a p, V graph the values of pressure and specific volume measured along a sequence of galleries, roadways, shafts, etc., and evaluating the area enclosed by the curve so formed.

It is easy to see that the expressions:

$$(2a) \quad (p_2 - p_1) V$$

$$\text{and } (2b) \quad \int_1^2 V \, dp$$

(where the integral is extended over a path between two terminals 1 and 2) are close to each other when the variation of density (i.e., mass per unit volume), is small and we consider a duct or sequence of ducts where pressure varies monotonously, or approximately so. In this case the subtle difference between

*Member of the staff of the Rheology Laboratory, Polish Academy of Sciences, Krakow.

(2a) and (2b) may evade cruder measurement. Important discrepancy between (2a) and (2b) can occur during mine fires when high temperatures may occur, and also, when the duct sequence is a closed one, (2a) obviously vanishes, whereas (2b) may be significantly different from zero.

Requirements for correct simulation

As we have said before, a definition of head is needed which would be useful in building simulators and in computation technique. It may be claimed that any quantity bearing a close resemblance in behaviour to the electric potential is the right choice. Unfortunately, as we see, more than one definition is possible and we have to decide what kind of resemblance or analogy we find most suitable for our purpose. This is, of course, a matter of opinion. The important properties of electric potential we might be concerned with are:

1. It satisfies the Second Law of Kirchhoff in a network, i.e., for any closed mesh the sum of potential differences:

$$\sum U = 0$$

2. Instantaneous power transmitted through a two terminal output of a whole or part of a network is equal to the product of the current and the difference of potential across the terminals.

It appears that it is not feasible to find a single quantity in a mine ventilation network which would exactly possess both properties listed above.

The first of the listed properties is readily satisfied in ventilation networks by pressure and the logarithm of the absolute pressure.

To discuss the second property of the potential we write the expression for the power input into a duct:

$$P = W \int_{p_1}^{p_2} V dp$$

which is readily obtained when we think of a duct of infinitesimal length with pressure difference dp across it, while we have a stream of gas with weight rate of flow W and specific volume V through it.

The expression for power has the form of a product of two quantities. One of them, W , is an analogy of electric current, since it satisfies the First Law of Kirchhoff $\sum W = 0$ for any nodal point. The other one $\int V dp$ is not a potential since it manifestly does not satisfy the Second Law of Kirchhoff. We conclude that it is impossible to have a complete analogy between electric and ventilation networks. Furthermore, there is another property of potential in electrical networks which must be borne in mind, namely the ease with which ideal sources of electromotive forces are introduced, and a potential difference across a two-terminal network is split into a passive term due to a resistance and an active electromotive force. This type of additive law does not hold for pressure, as we shall demonstrate, and therefore we shall concentrate on the properties of $\ln(p/p_1)$ in a slow flow with large density and altitude differences.

Brief discussion of the equation of motion

By taking the equation of slow ("aninertial," i.e., $w dw/ds \sim 0$), one-dimensional flow with energy dissipation (cf. Maczynski 1960) where z , ρ , p , s , I denote the altitude, density, pressure, distance coordinate and hydraulic gradient respectively:

$$(4) \quad dz + \frac{1}{\rho} dp + I ds = 0$$

we may form the following relation:

$$(5) \quad \int_1^2 \frac{I ds}{RT} + \ln \frac{p_2}{p_1} + \int_1^2 \frac{dz}{RT} = 0$$

The first term denotes the dimensionless, internal, entropy increase produced by the irreversible process of energy dissipation in flow. This energy dissipation is characterized here by the hydraulic gradient I which may be computed for a given roadway from eq. (8) below.

The third term depends solely on temperature and altitude distribution along the duct. It can be evaluated since temperature distribution along a roadway can be predicted with a fair accuracy, and altitude is given on mine maps. We see thus that the $\ln p_2/p_1$ term is readily obtainable from available data with help of eq. (5). Further refinements, such as an allowance for the variation of chemical composition, can be introduced without great difficulty by using the virtual temperature of a gas mixture instead of the real temperature. Inspecting the integral expression for specific work we find that it may be written as:

$$(6) \quad \int_1^2 V dp = \int_1^2 \frac{RT}{p} dp = \int_1^2 RT d \left(\ln \frac{p}{p_1} \right)$$

by use of the Clapeyron equation of state. This form suggests that the use of the $RT, \ln \frac{p_2}{p_1}$ diagram may be advisable for representation of the thermodynamic situation of a ventilation system. Temperature and pressure are those quantities which are subject to immediate measurement.

General solutions

To obtain a clear picture of the behaviour of $\ln \frac{p_2}{p_1}$ we may further solve the equation of motion in the general case of aninertial dissipative flow. We introduce the following notation (cf. Maczynski 1960):

$$(7) \quad \beta_a = \frac{p}{p_1}; \xi = \frac{z}{RT_1}; S = \frac{dz}{ds}; \tau = \frac{T}{T_1};$$

$$\sigma = \frac{s}{RT_1}; v = \frac{V}{V_1}$$

and β to denote the value of β_a in absence of dissipation.

The hydraulic gradient is given by Darcy's Law. It is positive when we proceed in the direction of flow. Therefore we write:

$$(8) \quad I = \lambda \frac{|w| w}{2Dg} = \lambda(\sigma) \frac{|W| W V_1^2}{\pi^2 D^5(\sigma) g} \cdot v^2$$

$$= I_1(\sigma) \cdot v^2 = W |W| \Lambda(\sigma) v^2$$

where we put

$$(9) \quad \Lambda(\sigma) = \lambda(\sigma) \frac{V_1^2}{\pi^2 D^5(\sigma) g}$$

where w denotes velocity, I takes account of variations of the resistance coefficient λ , of the hydraulic diameter D , and of the weight rate of flow along the path considered.

We can thus apply our equation to any path in a network. The weight rate of flow $W(\sigma)$ is constant between two nodal points; it varies, however, when we go across a nodal point to a different roadway or duct. We can further manipulate the general solution for β_a (cf. Maczynski 1960):

$$(10) \quad \beta_a = \beta(1 - 2\mathcal{J})^{\frac{1}{2}}$$

which behaves like $\beta(1 - \mathcal{J})$ for small $\mathcal{J}$ values. β and $\mathcal{J}$ stand for:

$$(11) \quad \beta = \exp \left[- \int_0^{\xi} d\xi / \tau(\xi) \right]$$

$$(12) \quad \mathcal{J} = \int_0^{\sigma} I_1(\sigma) \tau \beta^{-2} d\sigma$$

$$= W | W | \int_0^{\sigma} \Lambda(\sigma) \tau \beta^{-2} d\sigma = M | W | W$$

We use W defined by equation (8) and introduce a quasi-Atkinsonian resistance M . This resistance is not a true constant but is subject to slight variation, nevertheless for known temperature distribution and duct parameters it can be computed.

The quasi-Atkinsonian resistance M may be expressed as:

$$M = \int_0^{\sigma_1} \lambda(\sigma) \frac{V_1^2 \tau(\sigma) \beta^{-2}(\sigma)}{\pi^2 D^5(\sigma) g}$$

as follows from eq. (12) and (9).

Since the resistance coefficient λ is approximately constant over a length of a duct of constant cross-section, and changes when going over to another duct, and since the same holds for the hydraulic diameter D , we may write M as the sum:

$$M = \Sigma \left(\frac{\lambda(\sigma) V_1^2}{\pi^2 D^5 g} \int \tau \beta^{-2} d\sigma \right)$$

The integral $\int \tau \beta^{-2} d\sigma$ behaves very much like σ or s/RT_1 , due to the slow variation of τ and β . For known distributions of temperature this integral may be computed.

Values of this integral for linear temperature distribution (equithermal flow) can be obtained from a graph (Maczynski, 1960). Variation of a few per cent. may be expected in longer ducts with substantial temperature variation.

An immediate consequence of the argument given here is that experimental measurement of the resistance coefficient must include measurement of temperature and absolute pressure and proper correction if the temperature is to be increased. We have thus approximately from (10) and (11):

$$(13) \quad \ln \beta_a = - \int_0^{\xi} d\xi / \tau + \frac{1}{2} \ln(1 - 2\mathcal{J})$$

or

$$(14) \quad d(\ln \beta_a) = - d\xi / \tau - d\mathcal{J} / (1 - 2\mathcal{J})$$

We may write therefore, for specific work (eqn. 6.):

$$(15) \quad \int_1^2 RT d(\ln p) = - RT_1 (\xi_2 - \xi_1) - RT_1 \int_1^2 \tau d\mathcal{J} / (1 - 2\mathcal{J}).$$

This expression relates the specific work integral $\int V dp$ to the distribution of τ , I_1 and S along the path of integration in the network. It is easy to see that the first term is related to the work done when lifting the air moving in an ascending duct, whereas the second term is the work done against friction.

In a closed-path integral taken over a closed mesh, the first term vanishes because $\xi_1 = \xi_2$, and we are left with an expression which can be readily written as a sum of the individual contributions by the segments between nodal points.

$$\oint RT d(\ln p) = - \sum_k RT_1 \int_k^{k+1} \frac{\tau d\mathcal{J}}{1 - 2\mathcal{J}}$$

Equation (13) shows that $\ln \beta_a$ can be expressed as a sum of two terms: a term dependent on the temperature distribution $-\int d\xi / \tau$, and a resistance term $\frac{1}{2} \ln(1 - 2\mathcal{J})$, which can be simplified to $-\mathcal{J}$ with an accuracy of 0.1 per cent. when $\mathcal{J} < 0.045$.

We may notice that both τ and β are very close to unity. Let us therefore discuss the case when they are equal to one. In this case $\mathcal{J}$ behaves exactly like $\int Id\sigma$, or $\Delta H / RT_1$, if ΔH denotes the loss of head in the duct expressed in height of an air column. Since head rarely exceeds two or three hundred metres and RT_1 is of the order of 8,000 metres we are more likely than not to have $\mathcal{J}$ within the 0.045 limit. The simple form of equation (13):

$$(16) \quad \ln \beta_a = - \int \frac{S d\sigma}{\tau(\sigma)} - \mathcal{J} = - \int \frac{S d\sigma}{\tau(\sigma)} - M | W | W$$

may therefore be used everywhere except in really extreme cases of density variation.

More caution is needed with the closed-mesh work integral from (15) since the temperature ratio τ may be sufficiently weighted by the presence of the variable denominator to make computation omitting the $2\mathcal{J}$ term completely wrong.

Some suggestions concerning the so-called "potential diagram" for mining ventilation (cf. Budryk 1954) follow from our considerations. The "potential diagram" is a graphic representation of steady state pressure relations in the network obtained by plotting consecutive losses of head as segments of straight lines joined one after another. Parallel ducts will show on this graph as parallel sequences of segments.

Our analysis suggests replacing the losses of head in the potential diagram by logarithms of absolute pressures with some modifications, such as reducing the temperature terms by subtraction of $S\sigma/\tau_1$ to avoid excessively long invariable parts of the segments.

The state of ventilation is shown very well on the $(RT, \ln p)$ diagram; it combines the properties of

the p, V diagram in that the work integral is represented by the area enclosed by a curve and at the same time lines of constant temperature and pressure are straight. A log/linear scale in the appropriate range is needed only. This range depends on the depth of the mine but pressures cannot be expected to increase beyond 15 per cent. of the mean atmospheric value in European mines and probably 25 per cent. is the limit elsewhere. This gives a hint as to the type of graph to be used. Because of the expected range, standard meteorological charts are not suitable, but a graph of this kind may be quickly constructed in any design office with the help of tables of natural logarithms.

There is marked analogy between equation (16) (equation (13) being less convenient) and the electric circuit theory equation:

$$U = E - I.R$$

where U is the potential difference between two terminals, E is the active electromotive force and $I.R$ is a linear resistance term.

Our $\ln \beta_a$ term is thus a direct analogy of the

potential difference, $-\int_1^2 \frac{d\xi}{\tau}$ is analogous to electromotive force, and our resistance term $\mathcal{F}$ is quadratic in the rate of flow.

The formulae given here allow us to understand the limitations and possibilities of electric analogy simulation of ventilation networks. These simulators form an electric network of square law resistances and electromotive forces.

Oddly enough it has not been realized that no simple additive law is accurate enough for differences of pressure arising from resistance and thermal effects. We show here that such a law is in fact accurate for the logarithms of pressure.

The interpretation given here allows us to predict the electromotive forces which are likely to occur by a relatively simple consideration of the expected temperature distributions and duct slopes.

Using some theoretical temperature distributions obtained from heat conduction arguments it is possible to provide a programme for a digital computer which would comprise the heat conduction part, and the network interconnexion (or "topology") and as a result provide the expected "characteristic curve" of the ventilation as seen by the fan. The possibility of rapid computation allows a number of parameters to be made variable, thus providing a family of curves for a set of variable conditions.

Effect of mine fires on the ventilation could be traced in that way and appropriate safety measures devised and stored for reference in case of an emergency. Beside those practical applications the given analysis has some theoretical relevance in gas dynamics. We deal here with compressible gas flow with negligible steady state inertia and important dissipative and body forces. Another variable is the heat addition which does not follow any simple law. It is doubtful whether a single type of "line" could be devised for mine ventilation, as was

successfully done by Fanno for high-speed pipe flow. The number of degrees of freedom is just one too many for that. Nevertheless, for isolated problems like shaft flow, which is nearly adiabatic, it is fully feasible to provide charts of $\ln \beta$ as a function of dimensionless "depth" and a resistance parameter. Similarly heat addition at constant height can be reduced to a particular case of existing solutions.

Another approach is to use the equithermal approximation where the actual temperature distribution is approximated by a broken line of straight segments. The resulting computations are however rather bulky. Therefore a standard although flexible programme for a digital computer seems to be the easiest and quickest solution.

Conclusions

1. The conventional notion of "head" of incompressible fluid flow is unsuitable for mining ventilation because of compressibility effects.

2. It is suggested that another quantity, namely the logarithm of absolute pressure (or pressure ratio) is to be used instead of the incompressible head.

3. It is found that no exact analogy exists between the non-linear (square-law) electric networks and ventilation networks of mines if both generalized Ohm's law (Darcy's Law) and power relations are to be simulated accurately.

4. There is an analogy between the mass (or weight) rates of flow and electric current and between the logarithm of absolute pressure and electric potential.

5. When this analogy is assumed, power is not simulated properly since it depends on an additional flow property which is the temperature distribution along the ducts forming the network. Therefore if this temperature distribution is unknown the power consumed in the network cannot be computed accurately. This objection does not impair the use of analogue computers, but shows their limitations.

Acknowledgments

This paper represents a part of the work carried out under a part-time research scholarship of the Institute of the Basic Technical Problems of the Polish Academy of Science. The Author wishes to express his gratitude for this scholarship.

Further gratitude is due to the Safety in Mines Research Establishment, Sheffield, where the author has been acting as a vacation consultant, for suggestions as to the publication of the work.

REFERENCES

- Budryk, W., (1954) Mining Ventilation (in Polish), a textbook, Katowice.
- Litwiniszyn J., Maczynski, J., Ryncar, T., (1952) Electrical Simulation of Mine Ventilation Networks, (in Polish), Zesz. Akad. Gorn. Hutn.
- Maczynski, J. (1958), Warmeeffekte in Grubenbewetterungsnetzen, Freiburger Forschungshäfte, A84, Freiberg.
- Maczynski, J. (1960). A method of computing the pressure distribution in a slow flow of a homogeneous gas in ducts, Arch. Gorn. No. 2 1960, vol. 5 p.147.
- Scott, D. R., Hinsley, F. B. Ventilation Network Theory, COLLIERY ENGINEERING, vol. 28, p. 67 (1951).



Solving Non-linear Stationary Networks of Ducts on Digital Computers

by

J. MAĆCZYŃSKI

Presented by J. LITWINISZYN on July 17, 1961

Non-linear networks present some technical interest. Here are a few examples: mining ventilation, central heating of large buildings, water pipe-lines etc. Electric networks comprising non-linear elements gain in popularity. Therefore some preliminary suggestions as to how the behaviour of these networks may be calculated on a digital computer are given in this paper. Since there is no general theory of systems of algebraic non-linear equations, attempts to solve such systems present a "mathematical experiment", every time an attempt is made to solve a new system.

Usually in networks comprising flow of a medium the non-linearity is very close to a "square law". This may be somewhat misleading since "square" immediately suggests possible lack of uniqueness of the solution. The square law is, however, a "quasi-linear" $|W| \cdot W$ law rather than W^2 .

This intuitively suggests a unique solution for a system of "quasi-linear" equations where all terms are monotonous reserving multiple solutions to cases of non-monotonous terms in the equation (e.g. some mechanical fans show a non-monotonous behaviour). No general proof exists, but it would be rather difficult to prove the contrary and experience of actual networks gives a strong support to the belief that systems of algebraic equations containing $|W| \cdot W$ (or constant) terms only ("quasi-linear" systems) have a unique solution.

We have a few basic relations at our disposal.

We start with the Tegelen theorem (cf. [5])

$$(1) \quad h_i W_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(Einstein summation over all i 's!), where h_i is the "head" or potential difference across a branch as defined in [4] and W_i is the mass rate of flow referred to in this paper as "current", n is the total number of branches.

We have further the characteristic equation of a branch (for mining interpretation see [4]):

$$(2) \quad h_j = f_j + W_i Z_{ij},$$

where f_j is the motive force and Z_{ij} —the impedance of the branch. The summation suggested is purely formal for this particular equation, since in the network considered the impedance depends on an "Atkinsonian resistance" M_i and modulus of W_i :

$$(3) \quad Z_{ij} = \delta_{ij} M_{(i)} |W_{(i)}|, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Impedance Z_{ij} is thus a variable matrix quantity possessing only diagonal non-zero elements $[(i) - \text{"no summation"}]$. Some other laws besides (3) can be suggested here and used without difficulty. We know further that every branch is connected with a few others in a junction or nodal point. This yields the I Kirchhoff Law in the form:

$$(4) \quad \sum_l W_{l(\text{at } k)} = 0 \quad (\text{Summation over all branches } l \text{ at junction } k).$$

As pointed out in [1] a sign convention of W 's and h 's in a network, once chosen, needs to be kept to in the whole computation. A good sign convention here is the passive convention as shown by arrows in Fig. 1. Purely dissipative ("zero- f ") branches have positive W 's and h 's when they are pointed as shown in the Figure.

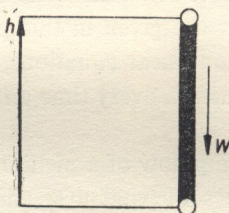


Fig. 1

So far the network equations (1), (2), (3) and (4) form a system which needs further manipulation. Following a similar procedure in [2] we inspect the I Kirchhoff Law and choose a set of independent W 's, whose number is equal to the number of meshes M in the network studied. Any of the n W 's may thus be written as a linear combination of the independent W 's with coefficients $+1$, 0 and -1 . These coefficients form a rectangular ($M < n$) matrix $C_{i\alpha}$ (connexion matrix).

Using Latin indices for the original W 's and Greek for the independent ones, we may write the I Kirchhoff Law (4) in the form:

$$(5) \quad W_i = C_{\alpha i} W_{\alpha}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, M.$$

We follow the convention (cf. [3]) that the dummy index of summation is shifted to the first place among other indices of a kernel letter. This procedure boils down to a correct transpose of the matrix.

The characteristic Eq. (2) is next multiplied by $C_{j\beta}$, and $C_{\alpha i} W_{\alpha}$ is put for W_i from Eq. (5)

$$h_j C_{j\beta} = f_j C_{j\beta} + C_{\alpha i} W_{\alpha} Z_{ij} C_{j\beta}.$$

Writing further $Z_{\alpha\beta} = Z_{ij} C_{i\alpha} C_{j\beta}$ and $f_\beta = f_j C_{j\beta}$, the following relation is obtained

$$h_j C_{j\beta} = f_\beta + Z_{\alpha\beta} W_\alpha.$$

The Tegelen theorem suggests that because W_β 's are independent we have:

$$h_j W_j = h_j C_{j\beta} W_\beta = W_\beta (h_j C_{j\beta}) = 0 \quad \text{or} \quad h_j C_{j\beta} = 0.$$

Finally, the following simple matrix relation is obtained

$$(6) \quad f_\beta = -Z_{\alpha\beta} W_\alpha.$$

This equation relates f_β 's to $Z_{\alpha\beta}$ and W_α . It is a fundamental relation of our analysis.

Using the formulae given above it is possible to write a computation programme for steady state computations of non-linear networks by means of a digital computer.

A single run of this programme is shown diagrammatically in Fig. 2.

This run starts with a set of arbitrary values of W_α which we denote by W'_α . These are used next to compute W'_k and the impedance matrix Z'_{ij} , by combining

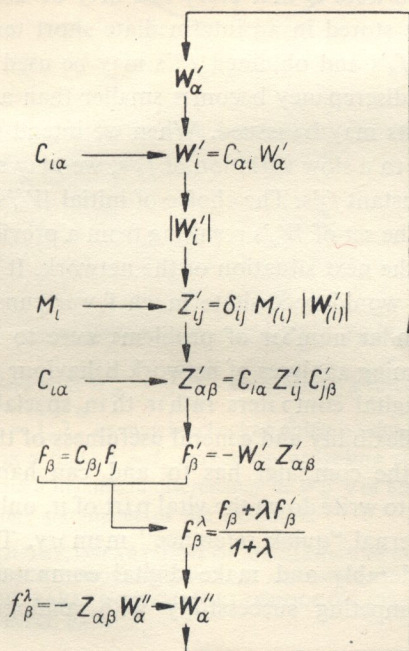


Fig. 2

moduli of W'_k with the Atkinsonian resistances M_k . The connexion matrix $C_{i\alpha}$ serves to transform Z_{ij} into $Z'_{\alpha\beta}$, which is used next to compute a set of mesh motive forces f'_β , which correspond to the assumed W'_α values. This set of f'_β 's does not coincide with the given imposed set of f_β 's. Therefore a weighed mean value f^λ_β

is built of f_β 's by introducing a "damping" parameter λ . This parameter enables us to make the iteration procedure stable as follows from a simple example given later on.

f_β^λ 's yield next a solution W_α'' of the linear system of equations with $Z'_{\alpha\beta}$ assumed to be fixed during a single run. This solution W_α'' is further used to repeat the whole run over again in order to obtain a closer approximation. One might wonder whether it is possible to have an idea of the general convergence of the procedure. Due to the very complex character of networks as they appear, e.g. in mining practice, it should be very difficult indeed to give general conditions of convergence. It appears, however, intuitively that by choosing a very small parameter λ (Fig. 2) it should be possible to move in one run just a little bit from the assumed W_α' and f_β' . This step is taken in the right direction, since in another run f_β'' 's result from W_α'' 's which are closer to the true values, however, slightly. Increasing λ makes it possible to reach the correct values in a lower number of runs. Too large λ can render the iteration unstable as is shown in a very primitive numerical example below. The skill of the operator consists in choosing the right value of λ . This may be done experimentally in a few trial runs.

The important point to note is that every run may be done automatically and the resulting data may be stored in an intermediate short term memory. The difference between imposed f_β 's and obtained f_β'' 's may be used as a command to go on computing. When the discrepancy becomes smaller than a certain value a command to write down results may be issued. When we intend to compute the behaviour of the network, due to a slow variation of f_β 's, we may split this variation into a set of situations with constant f_β 's. The choice of initial W_α' 's for the next situation is greatly simplified since the set of W_α' 's resulting from a previous situation provides a good guess for W_α' 's of the next situation of the network. It is most probable that this kind of computation would necessitate much fewer runs for a large number of situations than if a similar number of problems were to be solved separately. This would suggest performing analyses of network behaviour under slowly variable conditions, using rapid digital computers rather than specially designed analogue computers which lack the flexibility and general usefulness of the former. We should remember that although the computer has to and can handle a large quantity of data, it can be arranged to write down the vital part of it, only the rest being stored for short times in the internal "quick reference" memory. This may increase the computation speed considerably and make digital computation of networks an economic proposition competing successfully with analogue computers.

Example

A network is shown in Fig. 3. The arrows denote positive directions of W 's and h 's according to the "passive" branch sign convention of Fig. 1. The motive forces in the network are given as the following set: $f_\beta = 0; 0; 22$. The Atkinsonian resistances are: $M_k = 4; 1; 2$. The problem consists in finding the W 's. We proceed to solve the problem in the following way: The network consists of 3 branches forming 2 meshes and there is one independent equation for the Kirchoff

I Law, namely $W_1 + W_2 + W_3 = 0$. The connexion matrix C_{ia} is determined in the first step by choosing W_1 and W_2 as the independent currents. Therefore:

$$\overline{W_1; W_2; W_3}^i = \overline{\begin{vmatrix} 1; 0; -1 \\ 0; 1; -1 \end{vmatrix}}^i_\alpha \begin{vmatrix} W'_1 \\ W'_2 \end{vmatrix} \quad \text{or} \quad W_i = C_{ai} W'_a.$$

Since C_{ai} depends on our choice of the independent currents and, most of all, on the way the branches are connected with each other, it is a network characteristic and it is advisable to store it together with the set of M 's on tapes or cards for subsequent use.

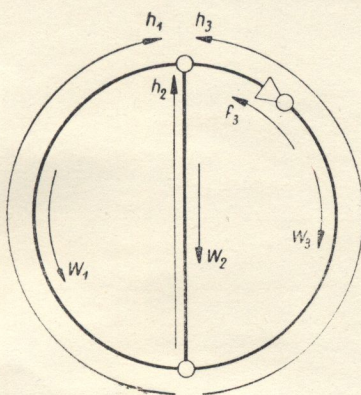


Fig. 3

We proceed further following the outlined programme: W'_a are assumed tentatively as $\overline{1; 1}^\alpha$, and we obtain in a single run of the iteration with $\lambda = 1$.

By solving

$$\overline{W''_a}^\alpha = \overline{\begin{vmatrix} 23/14 \\ 7/3 \end{vmatrix}}^\alpha = \overline{\begin{vmatrix} 0.96 \\ 2.333 \end{vmatrix}}^\alpha.$$

It follows from a similar computation for $\lambda = \infty$, i.e. $f^\lambda_\beta = f'_\beta$ that starting with $W'_a = \overline{1; 1}^\alpha$ we get $W''_a = \overline{11/12; 11/3}^\alpha$ and next $W'''_a = \overline{1; 1}^\alpha$ which shows a full cycle of an iterative oscillation.

The correct answer is $W_a = \overline{1; 2}^\alpha$ as may be checked either by simple substitution or by following our programme. Assuming a finite $\lambda = 1$, makes the procedure converge more rapidly towards the solution, since we obtain a maximum discrepancy in W''_a 's of approx. 14% in a single run. This parameter is the "damping" parameter of the iteration.

LABORATORY OF RHEOLOGY, DEPARTMENT OF MECHANICS OF CONTINUOUS MEDIA, INSTITUTE OF FUNDAMENTAL TECHNICAL PROBLEMS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(PRACOWNIA REOLOGII, ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH, INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI, PAN)

REFERENCES

- [1] Fryze, *Przegląd Elektrotechn.*, (1925).
- [2] G. Kron, *Tensor analysis of networks*, Wiley, 1939.
- [3] J. Mączyński, *Tabular representation of geometrical objects and computation programming*, Trans. of Symp. on Geod. Comp., Cracow, 1959 [in press].
- [4] — *On the electrical analogy of mine ventilation networks*, Colliery Engineering [in press].
- [5] G. Newstead, *General circuit theory*, Methuen, 1959.

Transient Response of Mine Ventilation Networks During Fan Reversal

by
J. MACZYŃSKI

Presented by J. LITWINISZYN on April 27, 1959

Non-stationary (transient) one-dimensional gas flow phenomena are determined by the differential equations of motion, the energy equation, the equation of state and the continuity equation (cf. [2]):

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{f(\eta)}{2D(\eta)} w^2 \operatorname{sgn} w + g \frac{dz}{d\eta} = 0,$$

$$(2) \quad \varrho \frac{DH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \varrho q,$$

$$(3) \quad \frac{p}{\varrho} = gRT,$$

$$(4) \quad \frac{\partial \varrho F}{\partial t} + \frac{\partial \varrho w F}{\partial \eta} = 0,$$

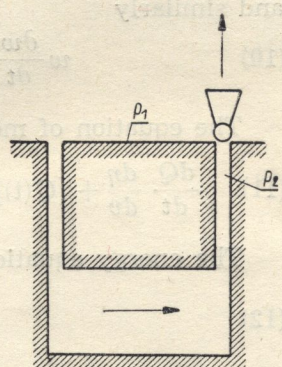


Fig. 1

where T denotes absolute temperature, p — pressure, d — density, t — time, η — the co-ordinate, F — the cross-section, w — velocity, f — the coefficient of duct resistance, D — the hydraulic diameter, z — the elevation, g — the acceleration of gravity, q — the thermal function*), H — the total (generalized) enthalpy given by

$$(5) \quad H = \frac{w^2}{2g} + z + c_p T.$$

Since we are interested in the external behaviour of the network, we replace the actual network of branches by a single duct with variable cross-section and variable resistance coefficient neglecting the intricate character of an actual flow (e. g. Fig. 1).

*) I. e. heat exchanged with duct walls per unit time and unit mass.

From the "language" of variables η, t , the above equations can be translated into the following variables (volumes):

$$(6) \quad \Omega = \int_0^t Q(\bar{t}) d\bar{t},$$

$$(7) \quad v = \int_0^\eta F(\bar{\eta}) d\bar{\eta},$$

where we assume that the rate of volume flow Q depends on time only (cf. [1]).

We may thus write

$$(8) \quad w = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{Q(t)}{F(\eta)} = \frac{Q(t)}{\frac{dv}{d\eta}} = \frac{d\eta}{dv} Q(t),$$

since v is our new space variable.

Further,

$$(9) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{d\eta}{dv} \frac{dQ}{dt},$$

and similarly

$$(10) \quad w \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{d\eta}{dv} [Q(t)]^2 \frac{d^2 \eta}{dv^2} \frac{dv}{d\eta} = [Q(t)]^2 \frac{d^2 \eta}{dv^2}.$$

The equation of motion becomes

$$(11) \quad \frac{dQ}{dt} \frac{d\eta}{dv} + [Q(t)]^2 \left[\frac{d^2 \eta}{dv^2} + \frac{f}{2D} \left(\frac{d\eta}{dv} \right)^2 \operatorname{sgn} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v} \frac{dv}{d\eta} + g \frac{dz}{dv} \frac{dv}{d\eta} = 0.$$

The energy equation may be written as:

$$(12) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + w \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + q,$$

or, because of Eq. (8), as

$$(13) \quad \frac{\partial H}{\partial \Omega} + \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \Omega} + \frac{q}{Q}.$$

We consider two limiting cases: 1° when the right side of Eq. (13) vanishes, and we may write the solution

$$(14) \quad H = f(v - \Omega),$$

where function f is obtained from the initial distribution

$$H = H(v).$$

From the definition of H in Eq. (5) and neglecting the kinetic terms, we write our "limiting" solution in the form

$$(15) \quad T = \frac{z(v)}{c_p} + \frac{1}{c_p} f(v - \Omega)$$

or, putting $\Delta T = T - T_1$ (where T_1 is the inlet temperature), we have

$$(16) \quad T = \bar{\Delta T}(v) + \Delta T^*(v - \Omega).$$

Another limiting case appears when the transient is slow enough for the air to assume the temperature of the duct walls as it moves along the mine.

ΔT is a function of v only in this case, i. e.:

$$(17) \quad \Delta T = \Delta T(v).$$

The real transient is intermediate between both limiting cases.

The equation of continuity may be written with the help of our variables and Eq. (8) in the form

$$(18) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial \Omega} + \frac{\partial \varrho}{\partial v} = 0,$$

or by solving

$$(19) \quad \varrho = \varrho(v - \Omega).$$

This form of continuity equation may be used together with Eq. (13) to check the accuracy of assumption (8).

We see that assumption (8) implies an approximate solution of the system (1)–(4), the inaccuracy appearing in the equation of continuity and to some extent in the energy equation.

The equation of motion (11) is solved by multiplying by the equation of state in the form of the identity

$$(20) \quad \frac{1}{RT} \frac{d\eta}{dv} = \frac{\varrho}{p} \frac{d\eta}{dv}.$$

We integrate further Eq. (11) with respect to v from 0 to v_2 , where v_2 is the whole volume of the mine, and put

$$(21) \quad \begin{cases} \psi_1(\Omega) = \int_0^{v_2} \left(\frac{d\eta}{dv} \right)^2 \frac{dv}{RT}, \\ \psi_2(\Omega) = \int_0^{v_2} \left[\frac{d^2 \eta}{dv^2} \frac{d\eta}{dv} + \frac{f(v)}{2D(v)} \left(\frac{d\eta}{dv} \right)^3 \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right] \frac{dv}{RT}, \\ \psi_3(\Omega) = g \int_0^{v_2} \frac{S(v)}{RT} \frac{d\eta}{dv} dv. \end{cases}$$

We thus obtain after dividing by ψ_1 :

$$(22) \quad \frac{dQ}{dt} + \frac{\psi_2(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} Q^2 + \frac{\ln(p_2/p_1)}{\psi_1(\Omega)} + \frac{\psi_3(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} = 0.$$

The $\ln(p_2/p_1)$ term is constant when it is possible to assume that the fan is started instantly (a gate is opened very quickly). Otherwise it is a function of t , and Q .

Our main concern at present being the network response, we assume that the pressure sets in instantly, the fan properties being thus left out for the moment.

We may write from (6):

$$(23) \quad Q = \frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{dQ}{dt} = Q \frac{dQ}{d\Omega}.$$

We thus obtain the following linear ordinary differential equation for Q^2 , with Ω as the independent variable:

$$(24) \quad \frac{1}{2} \frac{d(Q^2)}{d\Omega} + \frac{\psi_2(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} Q^2 + \frac{\ln(p_2/p_1)}{\psi_1(\Omega)} + \frac{\psi_3(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} = 0.$$

This equation may be solved together with relation (23), and we obtain the solution $Q = Q(t)$ in the form of two equations with Ω as parameter:

$$(25) \quad Q^2 = \exp \left[-2 \int_0^{\Omega} \frac{\psi_2(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} d\Omega \right] \times \\ \times \left\{ Q_1^2 - 2 \int_0^{\Omega} \frac{\psi_3(\bar{\Omega}) + \ln(p_2/p_1)}{\psi_1(\bar{\Omega})} \exp \left[2 \int_0^{\bar{\Omega}} \frac{\psi_2(\Omega')}{\psi_1(\Omega')} d\Omega' \right] d\bar{\Omega} \right\},$$

$$(26) \quad t = \int_0^{\Omega} \frac{d\Omega''}{\exp \left[-\int_0^{\Omega''} \frac{\psi_2}{\psi_1} d\Omega \right] \sqrt{Q_1^2 - 2 \int_0^{\Omega''} \frac{\psi_3 + \ln(p_2/p_1)}{\psi_1} \exp \left[2 \int_0^{\Omega} \frac{\psi_2}{\psi_1} d\Omega \right] d\Omega}},$$

where Q_1 is the initial rate of flow for $t=0$.

The expression $\text{sgn}(\partial\eta/\partial t)$ occurring in the function ψ_2 necessitates splitting the response into the following stages:

1. the braking of the ventilation when Q varies from Q_1 to 0 with Q_1 as the initial value.

2. the proper reversal, when $Q_1=0$, $Q<0$, and the ψ_2 must be computed for $\text{sgn}(\partial\eta/\partial t) = -1$.

The second stage, as may be proved, is identical with starting of the ventilation.

By way of example let us compute the braking time from Q_1 to 0 in the simple case of a horizontal duct with constant cross-section.

We may write in this case $\psi_1 = \text{const.}$, $\psi_2 = \text{const.}$, $\psi_3 = 0$; we have for the stationary state

$$Q_1^2 = - \frac{\ln(p_2/p_1)}{\psi_2},$$

since $p_2 < p_1$, to make flow possible in our case. For the braking period the fan is reversed to yield p'_2 , and we may put:

$$\ln \frac{p'_2}{p_1} = -\alpha^2 \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

The coefficient α is thus the ratio of the stationary rates of flow before and after reversal (cf. Figs. 2 and 3).

Substituting the above values of Q_1 , of the pressure term and of the functions ψ_1 and ψ_2 into Eqs. (25) and (26), we obtain the relation

$$t_h \sqrt{\frac{-\ln(p_2/p_1)}{\psi_1^2}} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}$$

for braking time t_h (cf. Fig. 3).

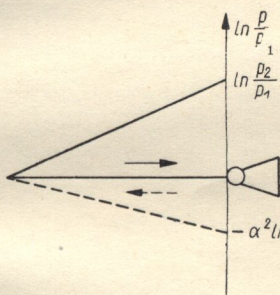


Fig. 2

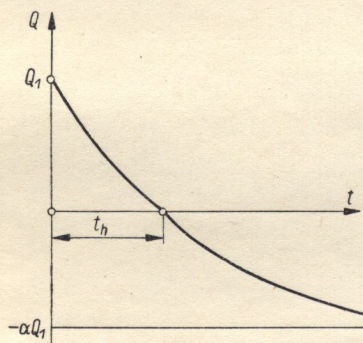


Fig. 3

Eqs. (25) and (26) may be used to solve more complicated problems by means of series development of the coefficients ψ_1 , ψ_2 and ψ_3 and, however great the bulk of computations, the transient response of the network can be obtained for each individual case. We may show further the effect of non-uniform temperature distribution acting as an additional fan as may be seen from the expression for the function ψ_3 and Eq. (22).

DEPARTMENT OF MECHANICS OF CONTINUOUS MEDIA, INSTITUTE OF BASIC TECHNICAL PROBLEMS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH, INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN)

REFERENCES

- [1] J. Litwiniszyn, *A problem of the dynamics of flows in conduit networks*, Kraków, Biul. PAU, 1 (1951), No. 3.
- [2] J. Mączyński, *Równania przepływów ośrodka ściśliwego we współrzędnych krzywoliniowych*, Przegl. Nauk.-Techn. AGH, No. 6, Seria Górnicza (1959), No. 4 (in press).

TRANSIENT RESPONSE OF MINE VENTILATION

(GENERAL SURVEY)

Jacek Mączyński

1. Introduction

The problem of variation of air flow through a mine ventilation network due to a number of causes, is of interest to the mining engineer and it is the task of the theoretician to provide him with a reliable mathematical description.

It is interesting to know how these effects take place or, as we should say, what is the response of the ventilation networks to changes in fan operation (switching on or off, reversing etc.) as well as to various other sources of energy as, for instance, the thermal effects.

Very little is known at present about these effects, little more than the intuitive imagination, a few experiments [4] and some theoretical results for particular cases. The purpose of this work is to give a description of these effects from the point of view of gas dynamics.

The actual mining ventilating network in all its complexity cannot be studied in this preliminary analysis and therefore we imagine the mine to be replaced by an equivalent channel of variable cross-section (fig. 1).

Special attention is paid to the case when the fan action can be considered instantaneous and the response of the network lags behind it. The problem when network response is very quick, when compared with the fan behaviour, is a problem concerning response and transient behaviour of the fan, rather than the network behaviour.

The equation of motion of an actual fan should be written as:

$$J \frac{d\omega}{dt} + M_T - M_e + \frac{\Delta p(Q) \cdot Q}{\eta \cdot \omega} = 0 \quad (1)$$

where J is the inertia of the fan and driving engine, ω is the angular velocity, t is the time, M_e is the torque supplied by the motor, M_T is the torque of bearing friction, $\Delta p \cdot Q$ is the effective fan power and η is the fan efficiency. $\Delta p(Q)$ is a function of the rate of air flow through the fan which can be obtained approximately from static characteristic curves.

The equation of motion of a fan is given here to show exactly what the limitations of this paper are.

We assume namely that the fan switching process is instantaneous, when compared with mine network response. We put therefore for the applied fan pressure difference:

$$\Delta p = \Delta p(\bar{O}) \mathbf{1}(\Omega) \quad (2)$$

where we use the volume of the channel $\bar{O}$ as the space variable and Ω (the volume displacement of the moving air)* instead of time. $\mathbf{1}(\Omega)$ stands for the Heaviside step-function.

It is the opinion of some of the ventilation specialists in various countries that ventilation transients are unimportant since the switching on or off of a fan takes more time than the time for the ventilation to become steady. It is to some extent the case with deliberately performed operations of switching on or off of a mechanical fan. Another point is when the transient results from the outbreak of an underground fire which forms a source of energy underground capable of interfering with the existing distribution of air currents.

This paper cannot show in full a solution of a more complex problem of this kind. It does however tend to show the method of approach which can further be extended to cover a large variety of particular practical cases.

Where computations become too complicated to be easily handled, electric analogy may be used with success, yielding quick answers to the individual problems concerning a network under inspection. Suggestions arise as to the necessity of sponsoring the construction of network analogues based on the present work and on further research in this field. As we shall see further it seems to be an important practical result that the thermal effect function (or thermal depression) depends on the time integral of the rate of flow (the volume displacement) and not only on the rate of flow itself. This result obtained from the energy equation, together with a method of integrating the equation of motion with a functional factor forms a kind of a stepping stone towards fuller theoretical understanding of the relationships governing one-dimensional flows in mining ventilation roadways and channels.

2. General Equations and Solutions

Non-stationary (transient) one-dimensional gas flow phenomena are determined by the differential equations of motion, the energy equation, the equation of state and the continuity equation (Cf. [2]):

*) As defined later on by eq. eq. (8) and (9).

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{f(\eta)}{2D(\eta)} w^2 \operatorname{sgn} w + g \frac{dz}{d\eta} = 0 \quad (3)$$

$$\rho \frac{DH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho q \quad (4)$$

$$\frac{p}{\rho} = gRT \quad (5)$$

$$\frac{\partial (\rho F)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w F)}{\partial \eta} = 0 \quad (6)$$

where T — denotes absolute temperature, p — pressure, ρ — density, t — time, η — the coordinate, F the cross-section, w — velocity, f — the coefficient of duct resistance, D — the hydraulic diameter, z — the altitude above a level of reference, g — the acceleration of gravity, q — the thermal function (heat exchanged per unit mass and unit time), H — the total (generalized) enthalpy given by:

$$H = \frac{w^2}{2} + gz + c_p T. \quad (7)$$

Since we are interested in the external behaviour of the network, as seen from the shaft outlet, we replace at this stage the actual network of branches by a single channel with variable cross-section and variable resistance coefficient neglecting the intricate character of an actual flow (fig. 1).

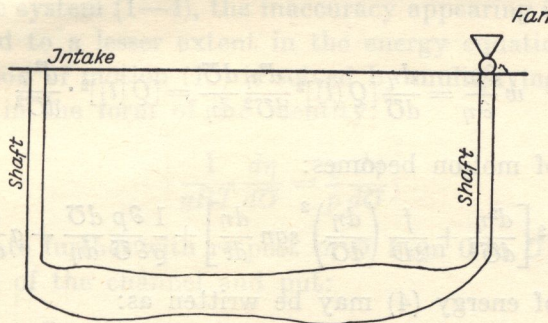


Fig. 1.

From the language of variables η, t the above equations can be translated to the following variables (volume displacement Ω , and volume $\bar{\sigma}^*$) (Cf. fig. 2):

$$\Omega = \int_0^t Q(\bar{t}) d\bar{t} \quad (8)$$

$$\bar{\sigma} = \int_0^\eta F(\bar{\eta}) d\bar{\eta}, \quad (9)$$

(9)* $\bar{\sigma}$ should be pronounced "agemo" meaning "guide" in an ancient Greek dialect.

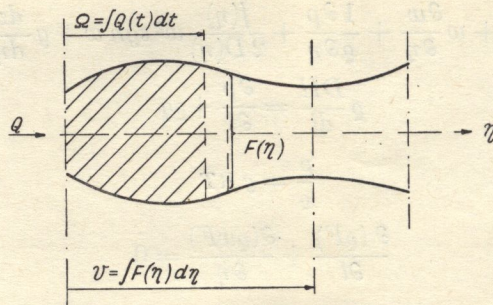


Fig. 2.

where we assume that the rate of volume flow Q depends on time only (cf. [1]) (Litwiniszyn's assumption).

We may write thus (from eq. (9)):

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{Q(t)}{F(\eta)} = \frac{Q(t)}{\frac{d\eta}{d\bar{\sigma}}} = \frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} Q(t) \quad (10)$$

as $\bar{\sigma}$ is our new space variable. Furthermore:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} \frac{dQ}{dt}; \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = Q(t) \frac{d^2 \eta}{d\bar{\sigma}^2} \frac{d\bar{\sigma}}{d\eta} \quad (11)$$

and similarly:

$$w \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} [Q(t)]^2 \frac{d^2 \eta}{d\bar{\sigma}^2} \frac{d\bar{\sigma}}{d\eta} = [Q(t)]^2 \cdot \frac{d^2 \eta}{d\bar{\sigma}^2} \quad (12)$$

The equation of motion becomes:

$$\frac{dQ}{dt} \frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} + [Q(t)]^2 \left[\frac{d^2 \eta}{d\bar{\sigma}^2} + \frac{f}{2D} \left(\frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} \right)^2 \operatorname{sgn} \frac{d\eta}{dt} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\eta} + g \frac{dz}{d\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\eta} = 0 \quad (13)$$

The equation of energy (4) may be written as:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + w \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + q \quad (14)$$

or because of eq. (10)

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{q}{Q} \quad (15)$$

We consider the limiting case when the right hand side of eq. (15) vanishes and we may write the solution

$$H = f(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0) \quad (16)$$

Where the function f is obtained from the initial distribution

$$H = H_1(\bar{\sigma})$$

or putting $\Delta T = T - T_1$ (where T_1 is the surface temperature) we have:

$$\Delta T = \overline{\Delta T}(\bar{\sigma}) + \Delta T^*(\bar{\sigma} - \Omega). \quad (17)$$

Another limiting case appears when the transient is slow enough for the air to assume the temperature of the duct walls as it moves along the mine, ΔT is a function of $\bar{\sigma}$ only in this case i. e.

$$T = T(\bar{\sigma}). \quad (18)$$

The real transient is an intermediate one between both limiting cases.

The equation of continuity may be written with help of our variables and eq. (10) in the form:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \Omega} + \frac{\partial \varrho}{\partial \bar{\sigma}} = 0 \quad (19)$$

or by solving it:

$$\varrho = \varrho(\bar{\sigma} - \Omega). \quad (20)$$

This form of the continuity equation may be used together with eq. (13) to check the accuracy of assumption (10).

We see that the assumption (10) implies an inaccurate, approximate solution of the system (1—4), the inaccuracy appearing in the equation of continuity and to a lesser extent in the energy equation as well.

The equation of motion (13) is solved by multiplying it by the equation of state in the form of the identity:

$$\frac{1}{gRT} \frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} = \frac{\varrho}{p} \frac{d\eta}{d\bar{\sigma}}. \quad (21)$$

We integrate further with respect to $\bar{\sigma}$ from 0 to $\bar{\sigma}_2$ where $\bar{\sigma}_2$ is the whole volume of the channel and put:

$$\begin{aligned} \psi_1(\Omega) &= \int_0^{\bar{\sigma}_2} \left(\frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{d\bar{\sigma}}{gRT} \\ \psi_2(\Omega) &= \int_0^{\bar{\sigma}_2} \left[\frac{d^2\eta}{d\bar{\sigma}^2} \frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} + \frac{f(\bar{\sigma})}{2D(\bar{\sigma})} \left(\frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} \right)^3 \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \frac{d\bar{\sigma}}{gRT} \right. \\ \psi_3(\Omega) &= \int_0^{\bar{\sigma}_2} \frac{S(\bar{\sigma})}{RT} \frac{d\eta}{d\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} \text{ where } S = \frac{dz}{d\eta} \end{aligned} \quad (22)$$

We obtain thus after dividing the equation by $\psi_1(\Omega)$:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{\psi_2(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} Q^2 + \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{\psi_1(\Omega)} + \frac{\psi_3(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} = 0 \quad (23)$$

The $\ln(p_2/p_1)$ term is constant when we assume that the fan is started instantly or a gate is opened very quickly. Otherwise it is a function of t and Q .

Our main concern at present being the network response we assume that the pressure sets on instantly, the fan properties being thus left out of the consideration for the time being.

We may write from (8):

$$Q = \frac{d\Omega}{dt} \quad (24)$$

$$\frac{dQ}{dt} = Q \frac{dQ}{d\Omega}$$

We obtain thus the following linear ordinary differential equation for Q^2 with Ω as the independent variable

$$\frac{1}{2} \frac{d(Q^2)}{d\Omega} + \frac{\psi_2(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} Q^2 + \frac{\ln p_2/p_1}{\psi_1(\Omega)} + \frac{\psi_3(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} = 0. \quad (25)$$

This equation may be solved together with the relation (24) and we obtain the solution $Q=Q(t)$ in the form of two equations with Ω as a common parameter:

$$Q^2 = \exp \left[-2 \int_0^{\Omega} \frac{\psi_2(\Omega)}{\psi_1(\Omega)} d\Omega \right] \left\{ Q_1^2 - \right.$$

$$\left. -2 \int_0^{\Omega} \frac{\psi_3(\bar{\Omega}) + \ln p_2/p_1}{\psi_1(\bar{\Omega})} \exp \left[2 \int_0^{\bar{\Omega}} \frac{\psi_2(\Omega^1)}{\psi_1(\Omega^1)} d\Omega^1 \right] d\bar{\Omega} \right\} \quad (26)$$

$$t = \int_0^{\Omega} \frac{d\Omega''}{\exp \left[-\int_0^{\Omega''} \frac{\psi_2}{\psi_1} d\Omega \right] \sqrt{Q_1^2 - 2 \int_0^{\Omega''} \frac{\psi_3 + \ln p_2/p_1}{\psi_1} \exp \left[2 \int_0^{\Omega} \frac{\psi_2}{\psi_1} d\Omega \right] d\Omega}}.$$

Q_1 stands for the initial rate of flow for $t=0$.

The expression $\operatorname{sgn} \frac{\partial \eta}{\partial t}$ occurring in the function necessitates splitting the response into stages as for instance:

1. the braking of the ventilation when Q varies from Q_1 to 0 with Q_1 as the initial value,
2. the proper reversal, when $Q_1=0, Q < 0$ and the ψ_2 must be computed for $\operatorname{sgn} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -1$.

The second stage may for constant ψ_1 , and ψ_2 be identical to starting ventilation from rest.

3. Relations for a simple duct

Considering a horizontal constant cross-section duct and isothermal flow we may write for the characteristic functions:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \int_0^{\sigma_2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 \frac{d\sigma}{gRT} = \frac{\sigma_2}{gF^2RT} [\operatorname{sek}^2 \operatorname{m}^{-3}] \\ \psi_2 &= \int_0^{\sigma_2} \left[\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{f}{2D} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^3 \operatorname{sgn} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] \frac{d\sigma}{gRT} = f \frac{\sigma_2}{2DF^3gRT} \dots [\operatorname{sek}^2 \operatorname{m}^{-6}] \quad (27) \\ \psi_3 &= \int_0^{\sigma_2} S \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{RT} = 0\end{aligned}$$

We have thus chosen a duct of very simple form to fix ideas.

We introduce further, the following notation:

Q_1 steady state initial value of Q (absolute value)

Q'_1 steady state reversed value of Q (absolute value)

ψ_2 value of the coefficient for the braking period (deceleration)

ψ'_2 value of the coefficient for the reversed (acceleration) period

$p_2 < p_1$ pressure at the duct — fan junction during initial steady state

$p'_2 < p_1$ pressure at the duct — fan junction during braking and reversal.

We write

$$\ln p'_2/p_1 = -\alpha^2 \ln p_2/p_1. \quad (28)$$

We have the following relationships for the steady state before and after reversal:

$$\begin{aligned}\psi_2 Q_1^2 &= -\ln p_2/p_1 \text{ for initial steady state} \\ \psi'_2 Q_1'^2 &= -\ln p'_2/p_1 \text{ for reversed steady state}\end{aligned} \quad (29)$$

since $\psi'_2 = -\psi_2$ (for constant cross-section duct flow) we may write:

$$\ln p'_2/p_1 = \psi_2 Q_1'^2$$

Further from eq. (28) where α^2 is a coefficient of fan pressure difference in reversed conditions we have:

$$\psi_2 Q_1'^2 = -\alpha^2 \ln p_2/p_1 = \alpha^2 \psi_2 Q_1^2$$

or

$$Q_1' = \alpha Q_1$$

since absolute values are considered here.

Putting further $Q = \xi \cdot Q_1'$ i. e. expressing the volume rate of flow in terms of the reversed steady state we may write (for the braking period):

$$\psi_1 Q_1' \frac{d\xi}{dt} + \psi_2 Q_1'^2 \xi^2 + \psi_2 Q_1'^2 = 0 \quad (30)$$

or dividing by $\psi_2 Q_1'^2$ we obtain:

$$\frac{\psi_1}{\psi_2 Q_1'} \frac{d\xi}{dt} + \xi^2 + 1 = 0$$

if we further put $\vartheta = \psi_2 \frac{Q_1'}{\psi_1} t$ we have a simple differential equation (valid for the braking period only):

$$\frac{d\xi}{d\vartheta} + \xi^2 + 1 = 0 \quad (31)$$

with the initial condition: $\vartheta=0$, $\xi = \frac{Q_1}{Q_1'} = \frac{1}{\alpha}$

For reversed flow our equation becomes:

$$\psi_1 \frac{dQ}{dt} + \psi'_2 Q^2 + \ln p'_2/p_1 = 0$$

or

$$\psi_1 Q_1' \frac{d\xi}{dt} + \psi'_2 Q_1'^2 \xi^2 + \psi_2 Q_1'^2 = 0$$

since $\psi'_2 = -\psi_2$ we can write:

$$\frac{\psi_1}{\psi_2 Q_1'} \frac{d\xi}{dt} - \xi^2 + 1 = 0$$

Using again ϑ for the variable we have:

$$\frac{d\xi}{d\vartheta} - \xi^2 + 1 = 0. \quad (32)$$

This equation of reversed acceleration is solved with initial conditions following from the solution of eq. (31) for the braking period.

Solving the equation for the braking period first we obtain

$$\frac{d\xi}{\xi^2+1} = -d\vartheta \quad \text{and} \quad \text{arctg } \xi = C - \vartheta$$

Making use of the initial condition $\xi=1/\alpha$ for $\vartheta=0$ we obtain:

$C = \text{arctg } \frac{1}{\alpha}$ and $\vartheta = \text{arctg } \frac{1}{\alpha} - \text{arctg } \xi$. For $\xi=0$ we have $\vartheta=\vartheta_h$ i. e.

$\vartheta_h = \text{arctg } \frac{1}{\alpha}$ (dimensionless braking time).

The actual braking time (in seconds) is given by

$$t_h = \frac{\psi_1}{\psi_2 Q_1} \vartheta_h \quad (33)$$

$$t_h = \frac{\psi_1}{\psi_2 Q_1} \frac{1}{\alpha} \text{arctg } \frac{1}{\alpha}.$$

Putting in the values for ψ_1 and ψ_2 we obtain:

$$t_h = \frac{2DF_1}{fQ_1} \frac{1}{\alpha} \text{arctg } \frac{1}{\alpha} = \frac{2D}{fw_1} \frac{1}{\alpha} \text{arctg } \frac{1}{\alpha} = t_{ch} \frac{1}{\alpha} \text{arctg } \frac{1}{\alpha} \dots \quad (34)$$

where the symbols are given at the beginning of this paper, w_1 denoting mean velocity before reversal for steady state. A graph is given for the $\frac{1}{\alpha} \text{arctg } \frac{1}{\alpha}$ function (fig. 3).

The expression $\psi_1/\psi_2 Q_1 = 2 DF/fQ_1 = \frac{2D}{fw_1} = t_{ch}$ is the „characteristic time“ of the ventilation.

Numerical examples

1. Air is driven at 10 m/sec (600 m/min.) through a duct. The friction coefficient of the duct is $f=0,03$, its hydraulic diameter D is 10 m. The fan is instantaneously reversed to yield in the reversed steady state 79,4% of the previous rate of flow. What is the braking time to standstill?

We have $\alpha=0,794$; $\frac{1}{\alpha}=1,259$; $\frac{1}{\alpha} \text{arctg } \frac{1}{\alpha} = 1,259 \cdot 0,90 = 1,14$ and our braking time to standstill is:

$$t_h = \frac{2D}{fw_1} \frac{1}{\alpha} \text{arctg } \frac{1}{\alpha} = \frac{2 \cdot 10}{10 \cdot 0,03} 1,14 = 76 \text{ sec.}$$

2. A vacuum cleaner capable of driving air at 30 m/sec is reversed to yield 79,4% of its capacity. The duct hydraulic diameter is 0,025 m and the resistance coefficient $f=0,03$. We have

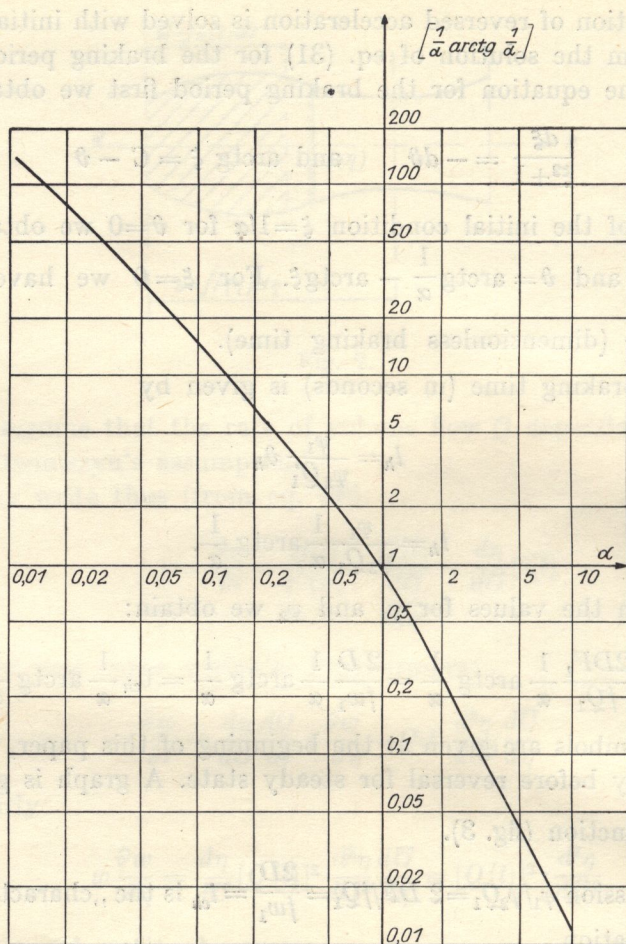


Fig. 3.

$$t_h = \frac{2 \cdot 0,025}{0,03 \cdot 30} \cdot 1,14 = 0,063 \text{ sec.}$$

We see from the above examples that the braking time can vary in large limits. It depends on the initial velocity, duct characteristics and the reversal ratio α . It is ostensibly independent of the length of the duct, since the effect of making the duct longer is fully compensated by the need of a greater fan in direct proportion to the increase, if the steady state velocity is to remain unaltered.

Following similar lines we can obtain a formula for the characteristic time of a duct consisting of series connected ducts of different cross-sections. The flow is considered isothermal, initially at least.

Putting $T = \text{const}$ in the general formulae for ψ_1 and ψ_2 and bearing

in mind that for every segment the integration can be performed we obtain the following formula for the characteristic time t_{ch}

$$t_{ch} = \frac{\psi_1}{\psi_2 Q_1} = \frac{\sum L_i / F_i}{\sum f_i w_i L_i / 2 D_i F_i} = \frac{\sum L_i / F_i}{\sum L_i / F_i t_i}$$

We denote by L_i the lengths of the segments and by t_i the characteristic times for each segment taken individually.

The formula obtained can be written as

$$1/t_{ch} = \sum L_i / t_i F_i \Big/ \sum L_i / F_i$$

The reciprocal of the characteristic time represents thus a "weighted mean" of the reciprocals of the individual characteristic times.

Notice: The system considered is still described by a single equation of motion. Therefore in the isothermal case the shape of the transient response curve remains unaltered although the scaling of the time and flow rate coordinates has to be chosen according to the conditions.

4. Steps for improving the simple solution

1. We introduce a simplified solution*) for our duct denoting the approximate rate of flow and the approximate volume displacement by Q^* and $\bar{O}^*$. We use this simplified solution as an independent variable instead of the time by writing the equation of motion (23) twice. We do it once for the simplified form (constant coefficients ψ_{10} , ψ_{20} and constant thermal effect ψ_{30} and next in the general form. We replace however the variable $\bar{O}$ by its counterpart in the simplified approach i. e. by $\bar{O}^*$. Eliminating further dt from both equations we obtain thus the following equation:

$$\frac{\psi_1(\Omega^*)}{\psi_{10}} \frac{dQ}{dQ^*} = \frac{Q^2 \psi_2(\Omega^*) + \psi_3(\Omega^*) + \ln p_2/p_1}{Q^{*2} \psi_{20} + \psi_{30} + \ln p_2/p_1} \quad (35)$$

This equation can be used to obtain Q in terms of Q^* and thus obtain a better approximation. It is particularly suitable to use Q^* as the independent variable since we obtain a finite interval of variation of the independent variable in a vast majority of cases. This is not the case with time as independent variable and therefore numerical computations exclude the use of time as a variable in all but initial intervals. We may rewrite eq. (35) in the form

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x) \quad (36)$$

*) E. g. the solution following from the argument in § 3.

when we express the coefficients ψ_1, ψ_2, ψ_3 as functions of $Q^{*2}=x$ and not Ω^* . This can of course be done since Q^* is a function of Ω^* , and a relatively simple one. Since it is supposed that Q does not deviate too strongly from Q^* , we may expect to obtain a close approximation to the actual situation by using equation (36).

It is more convenient usually to use series expansion in cases when the solution is known to be of bounded variation and the independent variable is enclosed in a finite interval. Series development fails when we have to deal with functions showing asymptotic behaviour. It can be done in some intervals, in the neighbourhood of selected points but a general expression usually cannot be given in series form. We are however inclined to prefer a solution covering the whole interval of variation of the variable, although less accurate perhaps.

The equation (35) developed above shows actually the dependence of the rate of flow for variable coefficients on the rate of flow which would occur if the coefficients were constant.

Solving this equation numerically is far simpler than using the general solution given in closed form with multiple integrations. The integral form of the general solution makes it very difficult to use power series expansions. The sense of the procedure proposed is to obviate to those difficulties with a small defect of accuracy. This defect in accuracy may in many cases be precarious since the procedure is far simpler and involves far less numerical operations than the exact solution and what is a great advantage, it does not involve subtraction or division of quantities deviating in order of magnitude from the result, which situation is usually the source of large errors.

2. Iteration process

Our approximate procedure can be further simplified in a number of cases when we put $Q=Q^*$ on the right hand side of the equation. We obtain Q as function of Q^* by a single integration of the right hand side expanded into a power series.

If the accuracy is not satisfactory the procedure may be repeated but rarely, as it seems, more than one repetition may be necessary.

5. The $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \Omega}$ term in the energy equation

It is not always safe to assume that the $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \Omega}$ term is negligible.

Usually when dealing with specific work terms in mechanics of fluids we cannot neglect the variation of density. Density variations however small, are of primary importance in closed cycle processes, as the integration

follows a closed path in this case and neglecting density variations would make the integral vanish altogether.

This is not the case with an open cycle process, where the integral is taken along a regular monotonous curve. Neglecting density variations is now possible and the error can be easily evaluated.

For a single duct provided with a fan at one end we may write

$$\varrho = \varrho_1 \quad p = p_1 - \Delta p(\zeta) \mathbf{1}(\Omega)$$

where p_1 is the intake pressure, $\Delta p(\zeta)$ is the difference of pressures before and after the fan is started (a function of the space coordinate) and $\mathbf{1}(\Omega)$ is the Heaviside step-function showing that the fan is started instantly and simultaneous pressure propagation is assumed.

Our specific work derivative term is written in this case:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \Omega} = \frac{1}{\varrho_1} \Delta p(\zeta) \delta(\Omega) \quad (37)$$

since $\delta(\Omega)$ (Dirac function) is obtained by suitably defined formal differentiation of the step function.

The value of $\frac{1}{\varrho} \Delta p(\zeta)$ expressed in $[\text{m}^2/\text{sec}^2]$ is of the order of say 2000, Further the specific heat of air is $c_p = 1,004$ Joule/g $^{\circ}\text{C}$ or 1004 m^2/sec^2 $^{\circ}\text{C}$. We see that the variation of temperature caused by sudden application of pressure does not exceed $\frac{\Delta p(\zeta)}{c_p \varrho_1}$ or 2°C for 200 mm W. G. (8" W. G.) Δp value. This value may be greater by 40% if we consider the expansion being adiabatic.

It seems interesting to point out that the well known value of adiabatic gradient of air i. e. $185 \text{ ft}/^{\circ}\text{F}$ or $100 \text{ m}/^{\circ}\text{C}$ is a form of expression of the specific heat of air in a technical system of units of force, length and time.

The effect of instantaneous pressure application can be demonstrated by inspection of the linear partial differential equation of the first order (energy equation (15)):

$$\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial H}{\partial \Omega} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \Omega} = \frac{1}{\varrho_1} \Delta p(\zeta) \delta(\zeta) \quad (38)$$

which along the characteristic lines:

$$\frac{d\zeta}{d\Omega} = 1 \quad \text{or} \quad \zeta = \Omega + C_1$$

assumes the form

$$\frac{dH}{d\Omega} = \frac{1}{\varrho_1} \Delta p(C_1 - \Omega) \delta(\Omega)$$

or by integration yields:

$$H = \frac{1}{\varrho_1} \int_0^{\Omega} \Delta p(C_1 - \Omega) \delta(\Omega) d\Omega + C_2(C_1). \quad (39)$$

We have further by the well known theorem

$$\int_0^x f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

The solution can be further written as:

$$H = \frac{1}{\varrho_1} \Delta p(C_1) + C_2(C_1) - \frac{1}{\varrho_1} \Delta p(\bar{\Omega} - \Omega) + C_2(\bar{\Omega} - \Omega)$$

where C_2 is a function of $\bar{\Omega} - \Omega$ to be determined from:

$$H = H(\bar{\Omega}) = f_1(\bar{\Omega})$$

given initially (i. e. at $\Omega = 0$).

We have in this way:

$$H = \frac{1}{\varrho_1} \Delta p(\bar{\Omega} - \Omega) + f_1(\bar{\Omega} - \Omega).$$

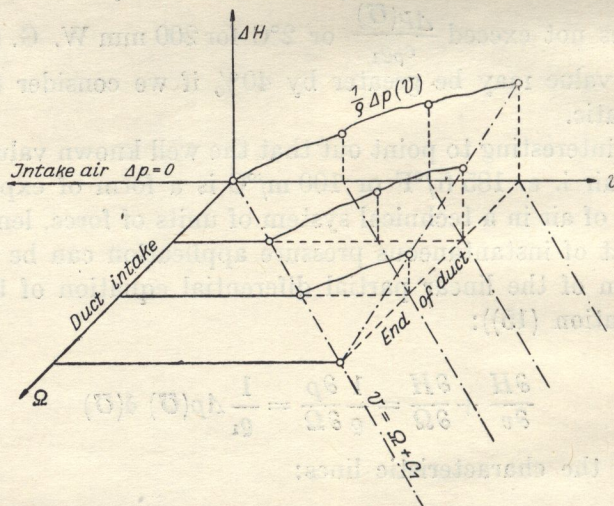


Fig. 4.

A picture of this effect is shown on Fig. 4 for $f(\bar{\Omega}) = 0$ which is no limitation in view of the linearity of our differential equation. We see that the effect on the H -function and consequently on the temperature resulting from instantaneous starting of a fan is gradually swept off as the channel

is filled with intake air. When the steady state is approached we have (for $q=0$) $H=\text{const.}$ and this is a result which follows from the steady state energy equation for adiabatic conditions. (Cf. eq. 4).

6. Experimental conclusions

As a conclusion from the above theoretical considerations we see that the effect of starting a fan on air temperature should be measurable and it should be possible to obtain an experimental confirmation by means of a system consisting of a vacuum cleaner connected to a long tube and a resistance thermometer gauge (specially wound) for temperature measurement.

This long tube can by no means be replaced by a throttling valve since throttling is an isenthalpic process whereas acceleration of air is not, and should rather be considered adiabatic.

The length of the tube should be such as to provoke a steady state pressure drop of say 3" to 4" W. G. We obtain thus a sufficient pressure drop to have a measurable temperature drop due to acceleration (of the order of a degree $^{\circ}\text{C}$).

As the flow is stabilized the additional temperature drop due to acceleration is effaced and swept away by the flowing air.

We can similarly observe the time curve of increase in the velocity of flow when the fan is started but the time interval being very short a special apparatus would need to be devised for the purpose.

7. Use of electric analogues

Electric and electronic analogue computers are now more and more in use and their advantages: relative low cost and straightforwardness in the programming operations as well as the clear principle of functioning outweigh the drawback of limited accuracy.

Inspection of the equation of motion (23) in the (Q, t) language of variables shows that if we introduce the following analogy relations:

$Q \doteq i$ (rate of flow $\doteq$ current)

$\ln p_2/p_1 \doteq u$ (logarithmic pressure $\doteq$ voltage drop)

$\psi_3 \doteq e$ (thermal effect $\doteq$ e. m. f.)*

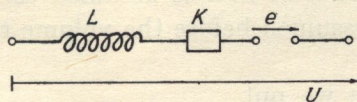


Fig. 5.

*) Electromotive force — e. m. f.

we can write for constant ψ_1 and ψ_2 :

$$L \frac{di}{dt} + Ki^2 \operatorname{sgn} i - c = u \quad (44)$$

This equation can be used for analogue computer design (cf. fig. 5).

The constants $L \doteq \psi_1$, $K \doteq \psi_2$ are introduced, the former as a self-inductance, the latter as a special circuit approximating the square law curve form.

e. m. f. can be made to depend on $\int i dt$ by means of integrating D. C. amplifiers. The appropriate curve form is obtainable in principle with help of feed-back control systems.

Thus the problem of making an analogue computer of ventilation networks, capable to show the various complicated transients arising from all the energy sources appearing in the network, seems resolved in principle.

The problem of accuracy and cost is a matter of design and demand rather than of principle of operation.

We can expect that an analogue computer could make it possible to obtain a clear picture of the effects which may result from an outburst of an underground fire.

Experiments on an analogue computer would help to answer the vital questions whether and to what extent the inertia (inductance) term can be neglected and the network behaviour regarded as a sequence of steady states.

Even if this is so it seems reasonable to make the active electromotive forces depend on the integrals of currents (electric charge being an analogue of volume displacement).

3. Different language of variables

In order to increase accuracy we can modify the language of variables used i. e. the volume rate of flow Q for the dependent variable and Ω , $\bar{Q}$ for the resp. volumes. We can use mass instead of the volume rate of flow and write:

$W(t)$ for the mass rate of flow. This is a modification of Litwiniszyn's assumption since mass rate of flow is assumed to be a function of time only and not as it was assumed before the volume rate of flow is endowed with this property.

Proceeding as before we put

$$w(\eta, t) = \frac{W(t)}{\varrho_0(\eta) (F(\eta))} \quad (45)$$

where $\varrho_0(\eta)$ is a certain density distribution e. g. the initial density distribution along the duct.

This modification allows to take roughly into account the variation of pressure resulting from altitude variation of the duct centre line. This is an approximation only but the variation in the density with time for any given point of the duct is not very great and it does not deviate from its initial value more than by a few % under the influence of temperature variation and variation of pressure.

The variation of the mass rate of flow may be further taken into account by putting:

$$w(\eta, t) = \frac{W(t)}{\varrho_0(\eta) F(\eta)} (1 + r(\eta, t)) \quad (46)$$

where r takes into account the variation of pressure and density so that w is a correct (in the one-dimensional sense of the word) value of velocity.

We may proceed as follows:

1° we solve a simplified problem by writing

$$w^* = \frac{W(t)}{\varrho_0(\eta) F(\eta)}.$$

We solve the resulting equation of motion:

$$\frac{dW}{dt} \varphi_1(N) + W^2 \varphi_2(N) + \varphi_3(N) + \ln \frac{p_2}{p_1} = 0 \quad (47)$$

where φ_1, φ_2 and φ_3 stand for similar expressions as ψ_1, ψ_2, ψ_3 with the modification that M, N are defined by the formulae

$$M(\eta) = \int_0^\eta \varrho_0(\eta) F(\eta) d\eta \quad (48)$$

$$N(t) = \int_0^t W(t) dt \quad (48a)$$

and used throughout instead of $\bar{O}$ and $\bar{\Omega}$.

Thus volumes $\bar{O}$ and $\bar{\Omega}$ are replaced by masses M and N with greater accuracy and hardly any increase in complexity of the computations.

The approximate equation of motion yields in this case for a step function pressure change the W function as function of N and consequently of time t . The procedure is equivalent to that applied when volumes were used as variables.

We obtain thus an approximate picture of the flow which can be further refined by computing the additional r -function. The essential idea consists in using the approximate solution as a background for computation subtler flow variations.

We could say in a more picturesque daily life way that we can describe the movement of a passenger in a moving train by first describing the movement of the train as a whole and next independently describe the motion of the passenger inside the train. This splitting of the flow into two motions seems to provide means for investigation of flows of air in ducts with a considerably increased accuracy. The aforesaid is to stress the point that the approximation attained by the use of simplifying assumptions is not considered to be a final result but solely a step forward in our understanding of the transient phenomena. Although useful results are obtained they may be further improved by computing correction terms (e. g. r).

Putting v for the ratio ϱ_0/ϱ we may write the equation of continuity in the form:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{v} \right)}{\partial N} + \frac{\partial \left(\frac{1}{v} \right)}{\partial M} = - \frac{\partial r}{\partial M} \quad (49)$$

This equation shows that the r -function is apparently a density of instantaneous local additional rates of flow (relative and non-dimensional) which should be maintained if the assumption $W=W(t)$ should correspond to a real flow of gas with the equation of continuity satisfied accurately.

Actually r is a measure of the error committed and may be evaluated by an iterative procedure first by computing density distributions from the distributions of pressure and temperature and next finding r from the continuity equation. This equation yields:

$$\frac{\partial r}{\partial M} = f(N_1, M) \text{ (a known function)}$$

or

$$r = \int_0^M f(N, M) dM + f_2(N)$$

The $f_2(N)$ function is seen to depend on N only. This function is to be evaluated from the equation of motion, because it represents the relative deviation of the mass rate of flow at inlet from its approximate value $W(t)$. By writing the correction term r in the form:

$$r = \frac{1}{v} + \int_0^M \frac{\partial \left(\frac{1}{v} \right)}{\partial N} dM \quad (50)$$

we see that for $M=0$ (inlet) $r=1$, since the inlet density does not vary with time and $\varrho_0=\varrho$.

The value of r obtained thus can be used further to obtain a more

accurate pressure distribution from the equation of motion. The procedure may be repeated and more accurate values obtained.

9. The linear resistance problem

Since the problem investigated above deals with square law resistance it seems suitable to analyze the linear resistance problem as well, as in order to obtain a simpler problem for comparison and obtain a hint as to the effect of the nonlinearity.

We may write the equation of motion for the linear resistance case:

$$\frac{dQ}{dt} + AQ + B + D = 0 \quad (51)$$

where A and B are functions of $\Omega = \int Q dt$ (we are using the Ω , $\mathcal{O}$ language here but the M , N language might be used as well).

The forcing term D is a function of time.

Using Ω as independent variable we obtain:

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + A(\Omega) \frac{d\Omega}{dt} + B(\Omega) + D(t) = 0 \quad (52)$$

This is a quasi-linear equation which may be solved by numerical approximation only. When A and B are constant or A is a constant and B is a linear function of Ω we obtain the well known equation of damped harmonic motion with a forcing function depending on time

$$\ddot{\Omega} + A\dot{\Omega} + B_1\Omega + B_0 + D(t) = 0 \quad (53)$$

The coefficients A and B_1 are responsible for the behaviour of the system. There are as usual three possible types of behaviour: oscillatory, critically damped and with over-critical damping.

These types of behaviour are however not pronounced since the linear expansion of the B term holds for a restrained range of Ω values only. We have a problem of starting a system from rest, rather than it being brought near an equilibrium position.

The asymptotic value of Ω (equilibrium value) lies usually outside of the range of our expansion.

10. The significance of the ψ_3 term

The ψ_3 term has a physical significance worth showing. Taking its definition:

$$\psi_3(\Omega) = \int_0^{\sigma_2} \frac{S(\mathcal{O}) \left(\frac{d\eta}{d\mathcal{O}} \right) d\mathcal{O}}{RT} = \int_0^{z_2} \frac{dz}{RT} \quad (54)$$

since $S = \frac{dz}{d\eta}$. We may attempt to find a thermodynamic interpretation of this term.

Let us investigate the steady conditions. We see that the equations of energy and motion:

$$\frac{wdw}{g} + dz + \frac{c_p}{Ag} dT = \frac{dC}{Ap_1\gamma_1 w_1} \quad (55)$$

$$\frac{wdw}{g} + dz + I d\eta + \frac{1}{\gamma} dp = 0 \quad (56)$$

yield when subtracted (because $c_p - c_v = AR$):

$$\frac{c_v}{Ag} dT - p dV = \frac{dC}{Ap_1\gamma_1 w_1} - I d\eta \quad (57)$$

which in another form of the First Law of Thermodynamics. The hydraulic gradient I coincides in this one-dimensional case with the amount of mechanical energy transformed into heat irreversibly, whereas the first thermal term on the righthand side is the heat exchanged with the outside (i. e. walls and the surrounding rocks).

This thermodynamic interpretation of the hydraulic gradient may be used to analyze the physical significance of the $\int dz/RT$ term. To do so we need to multiply the equation of motion and the First Law equation by a factor of $1/T$ or $1/RT$. (The gas constant R can be used even when the gas composition varies since an equivalent temperature is introduced).

This yields the following expressions for the equation of motion and for the First Law equation:

$$\frac{wdw}{gRT} + \frac{dz}{RT} + \frac{Id\eta}{RT} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{c_v dT}{AgRT} - \frac{dv}{V} = \frac{dC}{Ap_1\gamma_1 w_1 RT} - \frac{Id\eta}{RT} \quad (59)$$

Our equation of motion shows that when the inertia term wdw is negligible we obtain on integration along a closed path:

$$\oint \frac{dz}{RT} = - \oint \frac{Id\eta}{RT} \quad (60)$$

We see further from the equation of the First Law that the $\int Id\eta/RT$ term is proportional to the irreversible (or internal) entropy change of the system. The dz/RT term has thus the significance of an entropy change

associated with the expansion or compression of air when moving in inclined channels.

This suggests that a name should be given to this term which would tend to stress its relation to the entropy and altitude. Hypsotropy would be a suggestion.

The hypsotropy term ψ_3 is thus a measure of the thermal effects caused by non-uniform heating of the air. To obtain a value of the hypsotropy we need to know the distribution of temperature along the channel.

It should be emphasized that it is far easier to know beforehand the distribution of temperature along a channel than to know both the distribution of pressure and density as we have to when trying to evaluate the

$$\oint \frac{dp}{\gamma}$$

integral usually used to explain the thermal effect.

The hypsotropy is a non-dimensional parameter which can also be looked upon as a non-dimensional difference of altitude if we need another physical interpretation.

11. Conclusions

1. The thermal effects and to a lesser degree the resistances in a mining ventilation network depend on the time integral of the rate of flow as defined by eq. (8) and not only on the rate of flow itself.

2. General equations serve to formulate the problem of network behaviour under transient conditions and may be used to solve a variety of particular problems.

3. Approximation procedures and analogue computations may prove useful when accuracy has to be increased or quick answers obtained.

4. The hypothesis used may be modified if needed and by a similar argument a solution is obtained which may prove to fit better in some cases.

5. The thermal effect term is proved to be the integral of reciprocal of absolute temperature over the altitude difference.

I am very obliged to Professor J. Litwiniszyn, Head of the Rheology Laboratory for his calling my attention to the importance of the problem and for his kind encouragement during work on it.

RHEOLOGY LABORATORY
DEPARTMENT OF CONTINUOUS MEDIA
INSTITUTE OF THE BASIC TECHNICAL PROBLEMS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

STRESZCZENIE

Zachowanie wentylacji kopalń w stanach nieustalonych

J. Mączyński

Wychodząc z podstawowych równań mechaniki płynów ściśliwych (3—6) wprowadza się równanie ruchu dla masy powietrza w przewodzie o zmiennym przekroju i zmiennej wysokości niwelacyjnej. Jako założenie upraszczające przyjmuje się powolność przepływu oraz za Litwiniszynem uproszczone równanie ciągłości (równ. 8). Celem ujęcia wpływu czynników cieplnych rozważa się dwa skrajne przypadki, tj. taki, gdy temperatura zależy tylko od miejsca, a więc podąża za temperaturą ociosu oraz taki, gdy poruszające się masy powietrza zachowują swoją entalpię uogólnioną, nie ma więc wymiany ciepła z otoczeniem.

Celem skupienie uwagi na zachowaniu się samych mas powietrza rozważa się następnie przypadek wentylatora pozbawionego bezwładności otrzymując rozwiązanie równania ruchu w całkowitej postaci zamkniętej. Jako przypadek szczególny rozważa się w dalszym ciągu przykład rozruchu i hamowania powietrza w prostoliniowym przewodzie o stałym przekroju.

Przedmiotem osobnej dyskusji jest wpływ dokonanych uproszczeń na uzyskane wyniki, a także podano metody prowadzące do dalszego powiększania dokładności wyników. Osobna analiza poświęcona jest stosowalności modeli elektrycznych dla szybkiego uzyskania obrazu zachowania sieci, w szczególności w przypadku wybuchu pożaru.

РЕЗЮМЕ

Поведение вентиляции шахт в переходных состояниях

И. Мончинский

Исходя из основных уравнений механики сжимаемых жидкостей (3—6), выводится уравнение движения для массы воздуха в проводе с переменным сечением и переменной нивеляционной высотой. В качестве упрощающего предположения принята медленность течения, а также, за Литвинишиным, упрощенное уравнение непрерывности (уравн. 8). Для определения влияния тепловых факторов рассмотрены два крайних случая, а именно такой, когда температура зависит лишь от места, т.е. следует за температурой стен провода и такой, когда движущиеся массы воздуха сохраняют свою общую энтальпию и когда нет теплообмена со средой.

Для того, чтобы сосредоточить внимание на поведении самых масс воздуха, рассмотрен случай вентилятора лишённого инерции, получая при этом решение уравнения движения в интегральном замкнутом виде. В дальнейшем рассмотрен, как частный случай, пример пуска и торможения воздуха в прямолинейном проводе с постоянным сечением. Объектом отдельной дискуссии является влияние введенных упрощений на полученные результаты, причем даны методы, ведущие к дальнейшему уточнению результатов. Особый анализ посвящен применимости электрических моделей для скоростного получения образа поведения сети, особенно, в случае возникновения пожара.

REFERENCES

- [1] Litwiniszyn J., A Problem of the Dynamics of Flows in Conduit Networks. Kraków. Biuletyn P.A.U. Vol. I, nr 3, 1951.
- [2] Maczyński J., Equations of Flow of Compressible Media in Curvilinear Coordinates. Przegl. Naukowo-Techniczny AGH, nr 6, Seria Górnicza, nr 4, 1959 (in Polish).
- [3] Maczyński J., Transient Response of Mine Ventilation networks during Fan Reversal, Bull. Polish Acad. Science, 1959.
- [4] Hinsley F. B., Jones J. D., Flow Phenomena associated with stopping of Mine Fans. Trans. of the Midland Counties Institution of Engineers. 16th March 1960.

Wpłynęło 13 IV 1961r.

