

Instytut Podstawowych Problemów Techniki

Polska Akademia Nauk



Tomasz Michałek

**Metoda oceny wiarygodności symulacji numerycznych
przepływów lepkich i termicznych**

Praca doktorska pod kierunkiem

doc. dr hab. Tomasza A. Kowalewskiego

Warszawa 2005

Spis zawartości

Strona tytułowa	
Spis zawartości	I-II
Wykaz ważniejszych oznaczeń	III-IV
1. Wstęp	1
1.1. Motywacja	1
1.2. Definicja weryfikacji i walidacji	5
1.2.1. Terminologia	5
1.2.2. Metody weryfikacji	10
Metoda sztucznych rozwiązań	11
Wzorce analityczne	11
Wzorce numeryczne	12
Metoda określania zbieżności na podstawie ekstrapolacji Richardsona	12
Indeks zbieżności siatki (GCI)	14
Metoda określania zbieżności procedur iteracyjnych	14
Inne metody estymacji błędów dyskretyzacji	15
1.2.3. Metody walidacji	15
1.3. Przegląd literatury	18
1.4. Zakres i cel pracy	21
2. Weryfikacja symulacji numerycznych przepływów lepkich i termicznych	23
2.1. Matematyczne sformułowanie problemu	23
2.2. Metoda różnic skończonych (SOLVSTR)	25
2.2.1. Opis metody	25
2.2.2. Weryfikacja programu SOLVSTR	29
2.3. Metoda bezsiatkowa (SOLVMEF)	38
2.3.1. Opis metody	38
2.3.2. Weryfikacja programu SOLVMEF	39
2.4. Wzorzec numeryczny dla przepływów lepkich i termicznych	43
2.4.1. Definicja wzorca	43
2.4.2. Procedura weryfikacyjna	44
2.4.3. Definicja rozwiązania wzorcowego	47
3. Metoda oceny wiarygodności symulacji numerycznych	53
3.1. Opis metody	53
3.2. Przykład zastosowania metody oceny wiarygodności	56
3.2.1. Sformułowanie problemu	56
3.2.2. Analiza wrażliwości	57
3.2.3. Wnioski	62

4. Badania eksperymentalne	64
4.1. Opis konfiguracji	64
4.2. Układ pomiarowy i system akwizycji danych	66
4.3. Metody pomiarowe	68
4.3.1. Cyfrowa anemometria obrazowa (PIV)	68
4.3.2. Cyfrowa termometria obrazowa (PIT)	69
4.3.3. Wizualizacja struktur przepływu	73
4.3.4. Punktowe pomiary temperatury	74
4.4. Przebieg eksperymentów	74
4.5. Wyniki badań eksperymentalnych	75
4.5.1. Wyniki badań dla $\Delta T < 14^{\circ}\text{C}$	77
4.5.2. Wyniki badań dla $\Delta T \in (14^{\circ}\text{C}, 25^{\circ}\text{C})$	81
4.5.3. Wyniki badań dla $\Delta T > 25^{\circ}\text{C}$	85
4.6. Definicja wzorca eksperymentalnego	89
4.7. Analiza zerwania stacjonarności przepływu	92
5. Walidacja symulacji numerycznych	107
5.1. Procedura walidacji	107
5.2. Przykłady walidacji obliczeń numerycznych	108
5.2.1. Wzorzec numeryczny	108
5.2.2. Wyższe liczby Rayleigh	120
5.2.3. Konfiguracja z pionowym gradientem temperatury	131
6. Podsumowanie i wnioski	135
7. Bibliografia	140
8. Dodatek	148

Lista ważniejszych oznaczeń:

α	(W m ⁻² K ⁻¹)	współczynnik przejmowania ciepła
β	(K ⁻¹)	współczynnik rozszerzalności cieplnej
ε		oszacowanie błędu numerycznego
κ	(W m ⁻¹ K ⁻¹)	współczynnik przewodnictwa cieplnego
μ	(kg/ms)	lepkość dynamiczna
ρ	(kg m ⁻³)	gęstość cieczy modelowej (wody)
σ_N		estymator odchylenia standardowego
θ		temperatura bezwymiarowa
ω	(1/s)	wirowość dla przepływu płaskiego
Ψ	(m ² /s)	funkcja prądu
c_p	(J kg ⁻¹ K ⁻¹)	ciepło właściwe cieczy modelowej przy stałym ciśnieniu
g	(m s ⁻²)	przyspieszenie ziemskie
h		rozmiar komórki obliczeniowej
p	(N m ⁻²)	ciśnienie
q, Q	(Wm ⁻²)	strumień ciepła przez ściankę
s_σ		estymator dyspersji wartości średniej
t	(s)	czas
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (u, v, w)$	(m s ⁻¹)	składowe prędkości
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$	(m)	współrzędne układu kartezjańskiego
D		wartość pomiaru w eksperymencie
E		błąd porównania
I		intensywność fluktuacji (turbulencji)
K_N		estymator kurtozy
L	(m)	wymiar charakterystyczny, wewnętrzny wymiar naczynia
P		rzeczywisty rząd zbieżności schematu numerycznego
S		wartość otrzymana w symulacji numerycznej
S_N		estymator skośności
T_{ext}	(K)	temperatura zewnętrzna
T	(K)	temperatura
T_c	(K)	temperatura zimnej ścianki
T_h	(K)	temperatura ciepłej ścianki
T_0	(K)	temperatura początkowa
U_E		niepewność w pomiarach eksperymentalnych
U_S		niepewność w symulacji komputerowej
U_{SN}		niepewność obliczeń numerycznych w symulacji komputerowej
U_{SPD}		niepewność danych wejściowych dla symulacji komputerowej
U_{SM}		niepewność założeń modelu w symulacji komputerowej
U_V		metryka walidacji procesu

<i>U, V, W</i>	bezwymiarowe składowe prędkości
<i>X, Y, Z</i>	bezwymiarowe współrzędne układu kartezjańskiego
<i>Ra</i>	liczba Rayleigha
<i>Re</i>	liczba Reynoldsa
<i>Pr</i>	liczba Prandtla
<i>Nu</i>	liczba Nusselta

1. Wstęp

1.1. Motywacja

Numeryczna mechanika płynów (*ang. Computational Fluid Dynamics*) obecnie jest jedną z najpopularniejszych metod rozwiązywania problemów z mechaniki i fizyki płynów. Metody numerycznej mechaniki płynów znajdują zastosowanie zarówno przy rozwiązywaniu problemów inżynierskich, jak i w badaniach naukowych. Na podstawie rozwiązań będących wynikiem jedynie symulacji numerycznej projektuje się urządzenia przemysłowe oraz optymalizuje procesy produkcyjne. Również w badaniach naukowych co raz częściej wiodącym narzędziem analizy staje się modelowanie numeryczne, przy pomocy którego potwierdza się słuszność zapostulowanych modeli teoretycznych. Stało się to możliwe dzięki bardzo szybkiemu rozwojowi technik komputerowych, w tym algorytmów obliczeniowych, języków programowania oraz architektury komputerów i infrastruktury sieciowej. Powszechność modelowania numerycznego powoduje, iż często zastępuje się nimi badania eksperymentalne, które wymagają dużych nakładów finansowych na aparaturę doświadczalną oraz są czasochłonne.

Można stwierdzić, iż symulacje komputerowe stały się nieodzownym narzędziem przy prowadzeniu badań naukowych, jak i przy projektowaniu i optymalizacji procesów technologicznych. Do tradycyjnego podziału mechaniki płynów na teoretyczną i eksperymentalną dołączyć należy mechanikę obliczeniową (numeryczną) jako oddzielną dyscyplinę. Istotne zatem jest pytanie o dokładność, jakość i wiarygodność wykonywanych obliczeń numerycznych, które są wykorzystywane do opisu zjawisk fizycznych. Jest to szczególnie ważne w świetle faktu, iż w oparciu o uzyskiwane rezultaty będące wynikiem symulacji numerycznej często wyjaśnia się zjawiska fizyczne i postuluje się nowe modele służące do ich opisu. W celu oceny dokładności i poziomu wiarygodności symulacji numerycznych przeprowadza się ich **weryfikację** i **walidację**. Precyzyjna definicja obu pojęć zostanie podana w następnym rozdziale, teraz jedynie w celu przedstawienia motywacji niniejszej pracy nakreślimy zwięzłą definicję, która została zaproponowana przez Boehma [1] oraz Blottnera[2], a później została zaadaptowana przez Roache [3]. Określili oni weryfikację jako proces, który ma za zadanie odpowiedzieć na pytanie **czy poprawnie zostały rozwiązane równania** opisujące badany model (*ang. verification ~ solving the equations right*), natomiast walidację jako proces, który odpowiada na pytanie **czy odpowiednie równania zostały rozwiązane** w celu zamodelowania procesu fizycznego (*ang. validation ~ solving the right equations*). Ta najzwięźlejsza definicja dwóch procedur służących do oceny wiarygodności (uwiarygodnienia) symulacji numerycznych wyróżnia dwa istotne etapy. Pierwszy, dotyczący sprawdzenia i oszacowania błędów wynikających z wykorzystania procedur numerycznych wykonywanych przy pomocy maszyn cyfrowych do rozwiązania równań modelu, drugi dotyczy poprawności modelu w świetle badań eksperymentalnych. Podział ten jest ściśle związany z procesem numerycznego rozwiązywania problemów z zakresu mechaniki płynów.

Ogólnie proces numerycznego rozwiązywania zadań z mechaniki płynów można podzielić na trzy etapy: (i) sformułowanie problemu w języku pojęć fizycznych (przyjęcie założeń dotyczących modelowanego procesu, zagadnienia, rodzaju płynu i charakteru przepływu np. płyn lepki - nielepki, newtonowski – nienewtonowski, ściśliwy - nieściśliwy, problem jedno - dwu - trój wymiarowy, stacjonarny – niestacjonarny, turbulentny – laminarny, izotermiczny - nieizotermiczny). (ii) matematyczne sformułowanie problemu (zazwyczaj w formie zestawu równań różniczkowych cząstkowych, definicji obszaru obliczeniowego, warunków brzegowych i początkowych) (iii) rozwiązanie numeryczne (metody dyskretyzacji obszaru, równań, algorytmy rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych oraz inne algorytmy numeryczne). Taki schemat postępowania przy rozwiązywaniu numerycznym wyjaśnia podział uwiarygodnienia na weryfikację i walidację. Walidacja dotyczy pierwszego etapu, natomiast weryfikacja dotyczy drugiego i trzeciego etapu. Etapy te są oddzielne i mają za zadanie sprawdzić poprawność kolejnych etapów procesu składającego się na poprawne rozwiązywanie problemu. Ogólnie przyjętą i zalecaną zasadą jest, aby weryfikacja poprzedzała walidację [3]. Dzięki temu

uwiarygodnienie modelu fizycznego (walidacja) nie jest obarczone błędami pochodzącymi z symulacji numerycznej (tj. błędami z poprzedniego etapu).

Każdy z etapów pociąga za sobą przyjęcie wielu założeń i uproszczeń. Jednakże kluczowe założenia dotyczące problemu, który chcemy zamodelować, są definiowane w pierwszym etapie. Efektem tych założeń jest opis problemu w formie równań różniczkowych cząstkowych wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi oraz określenie niewiadomych tak, aby było możliwe rozwiązanie postulowanego układu równań. Stąd liczba parametrów opisujących proces lub zagadnienie jest zminimalizowana do kilku funkcji określających przepływ (np. składowe prędkości, ciśnienie, temperatura). Pozostałe parametry zazwyczaj przyjmuje się jako znane lub wyznacza się z empirycznych zależności. Mimo to ocena uzyskanych rezultatów tylko pod względem nieodłącznych błędów numerycznych nastęrcza wiele problemów, głównie ze względu na ogromną ilość danych wynikowych. Na przykład gdy rozważamy przepływ w obszarze o geometrii sześcienniej, dla którego wygenerowano siatkę obliczeniową liczącą 20 x 20 x 20 węzłów, a poszukiwanymi niewiadomymi jest pięć podstawowych funkcji (trzy składowe prędkości, ciśnienie i temperatura) to w rezultacie obliczeń otrzymujemy wartości tych pięciu niewiadomych w 8000 punktach obszaru obliczeniowego w kolejnych krokach czasowych. Czyli otrzymamy około 40000 liczb pomnożone przez ilość kroków czasowych obejmujących symulację. Tak ogromna ilość danych sprawia, że weryfikacja jest procesem żmudnym i czasochłonnym, nawet w przypadku znajomości analitycznej rozwiązania. W praktyce zazwyczaj brak jest rozwiązań analitycznych, a częstą praktyką jest ograniczenie porównywania wyników tylko dla stanów stacjonarnych, o ile takie istnieją.

Jedną z standardowych metod weryfikacji obliczeń przy braku referencyjnych rozwiązań analitycznych stało się definiowanie **wzorców numerycznych** (*ang. benchmark solutions*), pozwalających na ocenę rezultatów symulacji numerycznej i określenie ich błędów. Dokładny przegląd opublikowanych dotychczas w literaturze numerycznych rozwiązań wzorcowych dotyczących omawianej w niniejszej pracy klasie przepływów jest przedstawiony w rozdziale 1.2.1 i 1.3. Ponadto tworzone są bazy danych zawierające rozwiązania wzorcowe dla przepływów należących do określonych klas przepływów [4] tak, aby móc bez trudu porównywać rozwiązania wykonane przy użyciu różnych metod, algorytmów numerycznych lub różnych schematów dyskretyzacyjnych. Również tego typu weryfikacjom poświęcone są seminaria i sympozja naukowe takie, jak: AGARD[5], CFD Triatlons [6], Ercoftag Meetings[7], Eurotherm Seminars[8]. Podczas tych spotkań definiowane są zadania problemowe, stanowiące definicje wzorców numerycznych, a następnie przedstawiane są rozwiązania wykonane niezależnie przez grupy naukowców z różnych zespołów badawczych. Celem takich porównań jest chęć określenia optymalnych schematów i algorytmów numerycznych pod względem kosztów i trudności w osiągnięciu zadanej dokładności, jak i ogólne określenie przydatności metod lub schematów do konkretnych problemów.

Powyżej opisane wzorce numeryczne dotyczą jedynie **weryfikacji programów** służących do symulacji numerycznych. Dzięki takim porównaniom jesteśmy w stanie sprawdzić czy nowo stworzony program rozwiązuje poprawnie przykładowe zadania należące do konkretnej klasy przepływów. Drugim etapem weryfikacji jest **weryfikacja konkretnego obliczenia**, dla którego zazwyczaj nie dysponujemy danymi wzorcowymi. Ten etap wykonuje się po to by oszacować margines błędu numerycznego dla konkretnego rezultatu symulacji numerycznej, przy użyciu metod takich, jak: ekstrapolacja Richardsona, test wrażliwości siatki, i inne, które zostały opisane dokładnie w rozdz. 1.2.2.

Drugi etap uwiarygodnienia – walidacja, jak do tej pory nie doczekał się standaryzacji ani nawet ogólnej akceptacji co do metod jej przeprowadzania tak jak ma to miejsce w przypadku weryfikacji. Ze względu na to, iż walidacją określa zgodność obliczeń numerycznych z fizycznym modelem wykonuje się ją przy użyciu dostępnych danych eksperymentalnych. Definiowane są **wzorce eksperymentalne** (*ang. experimental benchmarks*), na podstawie których możliwe jest dokonania porównanie pomiędzy wynikami numerycznymi i eksperymentalnymi. Tworzy się również bazy danych zawierające wyniki pomiarów eksperymentalnych wraz z dokładnym opisem przebiegu doświadczeń [9]. Jednakże, takie porównania określają tylko czy symulacja numeryczna

poprawnie odtworzyła parametry fizyczne dla jednego modelowego przykładu, i jest odpowiednikiem pierwszego etapu weryfikacji (weryfikacji programu). Natomiast drugi etap walidacji, odpowiadający za walidację konkretnego problemu fizycznego (odpowiednik weryfikacji konkretnego obliczenia), zazwyczaj nie jest przeprowadzany, ze względu na brak odpowiednich metod. Jest to głównie spowodowane tym, iż nie możliwe jest przewidzenie *a priori* marginesu błędu dla wyników doświadczenia w przypadku gdy zostanie zmieniony czy pominięty jeden z parametrów fizycznego opisu analizowanego układu. Z drugiej strony, ze względu na ogromną ilość możliwych do uwzględnienia parametrów zjawiska fizycznego, trudno byłoby zamieszczać wyniki eksperymentalne rejestrując wszystkie dopuszczalne wartości zmian parametrów. Niniejsza praca ma za zadanie wypełnić tę lukę i przedstawić metodę, dzięki której na podstawie obliczeń numerycznych będzie można określić istotne parametry fizyczne przepływu, czyli takie, które decydują o charakterze przepływu, oraz podać dokładność z jaką należy wykonać pomiar tych parametrów w celu wykonania pełnej walidacji. Korzyści z takiej metody są dwojakie: po pierwsze w wyniku jedynie obliczeń numerycznych można określić z jaką dokładnością należy kontrolować parametry układu eksperymentalnego aby móc przeprowadzić pełną walidację. Jest to bardzo istotna informacja dla eksperymentatorów. Po drugie, w przypadku gdy walidacja nie będzie przeprowadzana na podstawie analizy wrażliwości parametrów układu, można będzie wnioskować, które z obliczeń numerycznych ma wyższy poziom wiarygodności. Model numeryczny charakteryzujący się mniejszą wrażliwością na zmianę parametrów będzie określany jako bardziej wiarygodny w porównaniu z tym, który wykazuje dużą wrażliwość.

Zaproponowana metoda oczywiście nie zastąpi walidacji, która zawsze będzie polegała na porównaniu rezultatów symulacji numerycznych z wynikami eksperymentalnymi. Metoda ta ma usprawnić ten proces, tak aby porównywać te parametry, które są istotne dla przepływu oraz wyodrębnić optymalny układ do badań eksperymentalnych. W ten sposób ilość konfiguracji eksperymentalnych jest ograniczana do niezbędnego minimum podczas procesu uwiarygodnienia oprogramowania stworzonego w celu symulacji numerycznych pewnej klasy przepływów (tzw. procesu atestacji). Postępowanie takie ma szczególne znaczenie w przypadku, gdy modeluje się co raz bardziej skomplikowane przepływy wraz z modelowaniem dodatkowych zjawisk takich, jak przepływy wielofazowe, przepływy ze swobodną powierzchnią, przepływy z transportem ciepła i/lub masy, przepływy w obecności krzepnięcia. Ilość parametrów w tego rodzaju zagadnieniach, które mogą wpływać na końcowy rezultat wyników numerycznych i eksperymentalnych, rośnie bardzo szybko co utrudnia analizę uzyskanych wyników. Dlatego wyodrębnienie najistotniejszych parametrów staje się kluczowe, a niejednokrotnie umożliwia jakiegokolwiek ilościowe porównanie pomiędzy wynikami numerycznymi i eksperymentalnymi.

Kolejnym aspektem przemawiającym na korzyść proponowanej metody walidacji jest to, iż znaczna część obliczeń numerycznych jest obecnie wykonywana przy pomocy programów komercyjnych lub bibliotek oprogramowania bez dostępu do kodów źródłowych. Nawet korzystając z profesjonalnego oprogramowania, które przeszło pierwszy etap weryfikacji (porównanie z wzorcami numerycznymi) oraz być może pierwszy etap walidacji (porównanie z wzorcami eksperymentalnymi), nie można pominąć drugiego etapu weryfikacji czyli oszacowania błędu otrzymanego rezultatu [3]. Natomiast drugi etap walidacji, zaproponowany w niniejszej pracy, oczywiście nie jest wymagany lecz mamy nadzieję, że może stać się obowiązującym standardem. Został on tak zaprojektowany aby użytkownicy zarówno programów komercyjnych, jak i autorzy własnych programów mogli go wykorzystać. Cała procedura wymaga przetwarzanie tylko rezultatów obliczeń numerycznych podobnie, jak procedury weryfikacyjne służące do określenia błędów numerycznych w przeprowadzonych obliczeniach, czyli jest analizą *a posteriori*.

Mimo gwałtownego rozwoju metod numerycznych, w tym powstania nowych schematów służących do dyskretyzacji przestrzennej jak i czasowej, a także nowych metod numerycznych do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, nie ma ogólnie przyjętych standardów służących do weryfikacji i walidacji oprogramowania, podobnych do tych jakich doczekały się metody eksperymentalne [10]. Lawina rozwiązań numerycznych, bez oszacowania błędów numerycznych lub z zastosowaniem nieodpowiednich schematów dyskretnych spowodowała na

łamach czasopism naukowych dyskusję na temat kryteriów akceptacji manuskryptów zawierających obliczenia numeryczne. W wyniku tej dyskusji większość czasopism naukowych dotyczących numerycznej mechaniki płynów opublikowało zalecenia (*ang. editorial statements*) dotyczące zasad powoływania się na obliczenia numeryczne i opisywania rozwiązań numerycznych. Jednym z pierwszych był *Journal of Fluid Engineering*, który w 1993 roku podał dziesięć zasad dotyczących wymagań dotyczących rozwiązań numerycznych publikowanych na łamach tego czasopisma [11]. Zawierają one następujące wymagania: (i) podstawowe cechy metody muszą być opisane, (ii) aproksymacja przestrzenna musi być co najmniej drugiego rzędu (iii) lepkość numeryczna właściwa dla konkretnej metody powinna być oceniona i zminimalizowana, (iv) niezależność rozwiązania od siatki obliczeniowej oraz zbieżność na siatce powinna być przedstawiona, (v) zbieżność iteracyjna powinna być osiągnięta jeśli zachodzi taka potrzeba, (vi) dla obliczeń niestacjonarnych błąd fazowy musi zostać oceniony i zminimalizowany, (vii) dokładność i implementacja warunków brzegowych i początkowych powinna być objaśniona, (viii) istniejące oprogramowanie powinno być w pełni zacytowane, (ix) rozwiązania wzorcowe mogą być wykorzystane do weryfikacji konkretnych przepływów, (x) wiarygodne dane eksperymentalne mogą zostać wykorzystane do walidacji rozwiązania. Zestaw powyższych zasad jest na tyle ogólny, że nakłada tylko obowiązki na autora publikacji, a nie konkretyzuje metod, którymi należy się posłużyć. Dzięki czemu otwarta jest droga dla nowych metod weryfikacji, jak i walidacji. Podobne oświadczenia edytorskie opublikowały inne czasopisma naukowe dotyczące numerycznej mechaniki płynów [12,13,14]. Dowolność w wyborze metody uwiarygodnienia obliczeń numerycznych jest cechą wspólną tego typu zaleceń i umożliwia zaproponowanie nowych metod, na przykład niniejszej metody oceny wiarygodności.

W celu zademonstrowania proponowanej metody walidacji, opartej na badaniu wrażliwości parametrów i dokonaniem na tej podstawie wyborze optymalnej konfiguracji do przeprowadzenia pełnej walidacji przy użyciu danych eksperymentalnych, wybrano klasę przepływów lepkich wywołanych gradientem temperatur, znanych jako konwekcja naturalna. Dla tej klasy przepływów zdefiniowany zostanie wzorzec eksperymentalny oraz zostaną wykonane pomiary, które będą źródłem jakościowych i ilościowych danych do porównań. Wzorzec ten obejmuje przepływ wody w różnicowo grzanej szóstokątnej komórce o zadanej różnicy temperatur pomiędzy dwoma przeciwległymi ścianami sześcienu. Wybrano tę konfigurację z kilku względów. Konfiguracja ta była często opisywana w literaturze, zarówno w pracach o charakterze teoretycznym, obliczeniowym, jak i eksperymentalnym. Najbardziej rozpowszechniony wzorzec numeryczny dla tej klasy przepływów dotyczący tej konfiguracji został zdefiniowany już w 1983 roku przez Grahama de Vahl Davisa [15]. Dotyczył on przepływu powietrza, co oczywiście z obliczeniowego punktu widzenia nie ma wielkiego znaczenia. W naszym przypadku jako substancja robocza została wykorzystana woda ze względu na możliwość przeprowadzenia dokładnych pomiarów eksperymentalnych z wykorzystaniem cyfrowej anemometrii obrazowej (PIV) oraz cyfrowej termometrii obrazowej (PIT). Dzięki tym metodom zamierza się dostarczyć ilościowych i jakościowych danych o charakterze przepływu w całym dwuwymiarowym centralnym przekroju przez sześcienu. Metody te są intensywnie rozwijane w Zakładzie Mechaniki i Fizyki Płynów od około dziesięciu lat, a co za tym idzie wykorzystano istniejące zasoby sprzętowe, zebrane doświadczenie oraz wytworzone oprogramowanie do zdefiniowania wzorca eksperymentalnego. Po trzecie wzorzec ten będzie uzupełniony o rozwiązania numeryczne, które będą stanowiły wraz z danymi eksperymentalnymi pełen zestaw do walidacji tej klasy przepływów.

Podstawowymi parametrami bezwymiarowymi charakterystycznymi dla zaproponowanego wzorca eksperymentalnego oraz opisującymi zjawiska przepływowe konwekcji naturalnej wody są liczba Rayleigha Ra , (efekty wypornościowe) i liczba Prandtla Pr , charakteryzująca własności termofizyczne cieczy. Przy małych liczbach Rayleigha przepływ jest laminarny i daje się odwzorować przy pomocy symulacji numerycznej. Wzorzec numeryczny Grahama de Vahl Davisa dotyczył właśnie liczb Rayleigha w zakresie od 10^3 do 10^6 . Dla wyższych liczb Rayleigha, kilkanaście lat później w 1999 roku, Patrik Le Quere opublikował numeryczne rozwiązanie wzorcowe dla liczb Rayleigha w zakresie $10^6 - 10^8$ [16], określając granice zerwania stacjonarności

przepływu dla $Ra = 2.1 \times 10^8$ [17]. Obydwa rozwiązania numeryczne dotyczyły przepływu powietrza ($Pr = 0.71$) w różnicowo grzonym kanale (problem dwuwymiarowy) przy założeniu tzw. modelu Bousinesq.

Badanie zerwania stacjonarności przepływu i pojawienia się oscylacji termicznych wiąże się z koniecznością znacznego zwiększania liczby Rayleigha powyżej 10^8 . Dla wybranej konfiguracji eksperymentalnej jest to stosunkowo łatwe do zrealizowania przez zmianę skali długości (wymiaru naczynia), oraz poprzez zwiększanie różnicy temperatur. Znajomość wartości krytycznych liczb Rayleigha dla danej geometrii ma istotne znaczenie dla określenia zakresu stosowalności danego modelu i wyznaczania reżimów przejściowych dla badanego zjawiska. Wyznaczenie wartości kryterialnych dla tego przejścia jest jednym z celów tej pracy. Porównanie wyników numerycznych oraz określenie ich dokładności i zakresu stosowalności wykorzystanych metod zostanie wykonane przy wykorzystaniu opracowanej metody oceny wiarygodności. Dzięki temu zaprezentowana zostanie zasadność metody i przeprowadzona zostanie pełna walidacja stworzonego oprogramowania. Wybór konfiguracji jest o tyle korzystny dla przeprowadzenia tego typu porównań, gdyż wraz z wzrostem liczby Rayleigha, problem staje się co raz trudniejszy do symulacji numerycznej, rosną zarówno błędy numeryczne (problem staje się co raz gorzej uwarunkowany) i następuje zerwanie stacjonarności przepływu. Istotne jest więc znalezienie odpowiedzi na pytanie, czy model numeryczny jest w takim zakresie wciąż poprawny (tzn. czy pozwala na symulację przepływu turbulentnego). Dla niższych liczb Rayleigha oraz temperatur płynu w granicach od 0°C do 10°C podstawowa struktura przepływu w wybranej konfiguracji znacznie odbiega od klasycznego „benchmarku de Vahl Davis’a” [15]. Z powodu anomalnej zależności gęstość wody od temperatury przepływ rozdziela się na dwa przeciwbieżne cyrkulacje. Jedna z nich, dla temperatur płynu powyżej 4°C , transportuje płyn od ścianki cieplej do zimnej, druga dla niższych temperatur płynu w przeciwnym kierunku. Taka konfiguracja jest bardzo wrażliwa na zmiany warunków brzegowych i niedokładności numeryczne, co dodatkowo predysponuje ją jako wzorzec numeryczny i eksperymentalny.

1.2. Definicja weryfikacji i walidacji

Ze względu na to iż nie ma ogólnie przyjętego standardu dotyczącego definicji procedur weryfikacji i walidacji dla celów numerycznej mechaniki płynów poniżej zostały zamieszczone definicje, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy. Ponadto w kolejnych podrozdziałach zostały opisane metody weryfikacji i walidacji, które są wykorzystywane w dalszej części pracy. Definicje w tym rozdziale oparte są na literaturze naukowej, w tym sensie jest to część przeglądu literatury, jednakże została tu wydzielona w celu usystematyzowania pojęć.

1.2.1 Terminologia

Pojęcia weryfikacji i walidacji pojawiły się zarówno jako pojęcia z zakresu inżynierii oprogramowania, dotyczące określania poprawności oprogramowania tworzonego przez programistów, jak i pojęcia w badaniach naukowych (w szczególności technicznych) określające potwierdzenie prawdziwości czy zakresu stosowalności modeli teoretycznych w świetle badań eksperymentalnych. Toteż w numerycznej mechanice płynów ze względu na to, iż polega ona na rozwiązywaniu problemów mechaniki płynów przy użyciu narzędzi informatycznych (języków programowania, kompilatorów) widoczne są dwa nurty w definicji tych pojęć. Pierwszy informatyczny, związany z inżynierią oprogramowania i badaniami operacyjnymi oraz drugi związany z mechaniką płynów w oparciu głównie o badania eksperymentalne.

Jedną z pierwszych definicji weryfikacji i walidacji była definicja związana z pierwszym nurtem i została opublikowana w 1984 roku przez Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) [18,19]. Określała ona weryfikację jako proces oceniający etap tworzenia oprogramowania (*ang. software development*) pozwalający uzyskać pewność, że spełnia on wymagania zdefiniowane

w etapie poprzedzającym czyli etapie projektowania. Natomiast definicję walidacji określono jako proces testowania programu komputerowego i oceny jego rezultatów w celu zapewnienia zgodności z wymaganiami, które zostały mu postawione na etapie jego specyfikacji (analiza). Podobne definicje obu terminów zostały przyjęte przez International Organization for Standardization (ISO) [20].

Ze względu na specyfikę oprogramowania komputerowego z zakresu mechaniki płynów komitet do spraw standardów American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) zdecydował się na uszczegółowienie tych pojęć i zaadaptowanie ich dla potrzeb numerycznej mechaniki płynów. W wyniku pracy zespołu nad opracowaniem standardów w terminologii i metodologii weryfikacji i walidacji powstał w 1998 roku specjalny przewodnik (*ang. Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics*) [21]. Zdefiniowano w nim weryfikację jako proces określający czy implementacja modelu dokładnie reprezentuje konceptualny opis modelu i jego rozwiązanie. Natomiast walidacja została zdefiniowana jako proces określenia do jakiego stopnia model jest dokładną reprezentacją rzeczywistości z perspektywy określonego wykorzystania modelu.

Nie do pominięcia jest również wkład pojedynczych naukowców, którzy zauważyli brak zrozumienia w środowisku naukowym przy definiowaniu pojęć dotyczących uwiarygodnienia problemu i wnieśli istotny wkład w tę dziedzinę. Przede wszystkim cytowany wcześniej już Patrick J. Roache, który opublikował szereg artykułów [3,22] na ten temat oraz przeglądową książkę (*ang. Verification and Validation in Computational Science and Engineering*, [23]), która stała się niemal podręcznikiem w tej dziedzinie. Autor w tej książce bardzo zwięźle traktuje sprawy terminologii i jak sam pisze „interesują go praktyczne definicje i metody niż bezwartościowa semantyka i efektywne filozofowanie”. Toteż zaadoptował on, wspomniane już we wstępie, najprostsze pojęcia do określenia weryfikacji, którą zdefiniował jako poprawne rozwiązanie równań modelu, a walidację jako określenie czy poprawne równania są rozwiązywane dla konkretnego fizycznego modelu. Zwrócił uwagę na to iż weryfikacja jest w głównej mierze oparta i ściślej związana z matematyką, a walidacja z nauką, a w szczególności jej gałęziami takimi, jak: fizyka, chemia czy mechanika.

Roache nie podał ściśle obowiązującej i jedynie trafnej definicji weryfikacji czy walidacji lecz w zamian za to skupił się na podaniu konkretnych przykładów dotyczących różnicy w obu pojęciach. Dodatkowo opisał inne pojęcia, które często pojawiają się w literaturze takie, jak: certyfikacja, zapewnianie jakości oprogramowania, atestacja, dokładność, niezawodność, które są często mylone z pojęciem weryfikacji i walidacji. Roache zacytował cztery kategorie błędów za Oberkampferem [24], które określił jako „sensowne i odpowiednie”, gdyż źródła ich są wyraźnie rozdzielone. Są to błędy w modelowaniu fizycznym (*ang. physical modeling errors*), błędy dyskretyzacji (*ang. discretization errors*), błędy, pomyłki w kodzie programu (*ang. programming mistakes*) i błędy zaokrągleń (*ang. round-off errors*). W książce swej przedstawił też własną rozszerzoną klasyfikację, w której znalazło się sześć kategorii. Powyższe cztery uzupełnione o błędy występujące w parametrach fizycznych modelu oraz błędy występujące w parametrach numerycznych. Przyporządkował też, że weryfikacja zajmuje się oszacowaniem lub oceną błędów dyskretyzacji, pomyłek programistycznych, błędów zaokrągleń oraz błędów w parametrach numerycznych, natomiast walidacja – błędów w modelowaniu fizycznym oraz błędów w parametrach fizycznych.

Ponadto Roache wyraźnie podzielił weryfikację na dwa podprocesy: **weryfikację kodu numerycznego** oraz **weryfikację konkretnego obliczenia**. Określił, że weryfikacja kodu numerycznego stworzonego dla konkretnej klasy przepływów musi zawierać ocenę błędu dla znanego *a priori* rozwiązania, natomiast weryfikacja konkretnego obliczenia musi zawierać estymację błędu lub jego oszacowanie i jest zawsze wykonywana na podstawie konkretnych obliczeń, czyli *a posteriori*. Metody weryfikacji kodu numerycznego oraz weryfikacji konkretnego obliczenia zostaną podane w rozdziale 1.2.2.

Walidacja natomiast, dla Roache, jest ściśle związana z badaniami eksperymentalnymi i z dziedziną nauki, której dotyczy. Toteż stwierdził, iż jedynie ogólne uwagi oraz zalecenia są możliwe dotyczącego tego procesu. Stoi on również na stanowisku, że proces weryfikacji powinien

poprzedzić proces walidacji aby odpowiednio zinterpretować wyniki obliczeń numerycznych w świetle badań eksperymentalnych.

Odmienne stanowisko dotyczące terminologii zostało zaprezentowane na łamach Journal of Fluids Engineering przez Freda Sterna, Roberta Wilsona, Hugh Colemana oraz Erica Patersona. W ich artykule pod tytułem “Comprehensive Approach to Verification and Validation of CFD” [25] podali oni konkretne i ścisłe definicje procesów weryfikacji i walidacji. Weryfikację zdefiniowali jako proces oceny niepewności symulacji numerycznych (*ang. uncertainty of numerical simulations*) oraz, o ile jest to możliwe, estymacji znaku i wartości błędu numerycznego i niepewności w jego estymacji. Walidacja została przez nich zdefiniowana jako proces oceny niepewności modelu przy wykorzystaniu danych z wzorców eksperymentalnych oraz, o ile jest to możliwe, estymacji znaku i wartości błędu modelowania. Podejście to bierze pod uwagę niepewność zarówno w danych eksperymentalnych jak i symulacji numerycznej w celu oceny poziomu walidacji. Obie definicje są definicjami procesów, które aplikuje się do uwierzytelnienia istniejącego kodu numerycznego, bez potrzeby ingerencji czy znajomości jego budowy. U podstaw tych definicji leży konieczność oszacowania błędów oraz ich niepewności podobnie jak to ma miejsc w eksperymentalnej mechanice płynów.

Z tego powodu błąd δ_S definiują oni jako różnicę pomiędzy symulowaną wartością pewnej wielkości, a jej prawdziwą wartością, natomiast niepewność U jest oszacowaniem błędu, takim że przedział $[\delta_S - U; \delta_S + U]$ zawiera wartość prawdziwą błędu δ z prawdopodobieństwem 0.95. Przy tak przyjętej definicji błędu można określić, że dokładność wzrasta wtedy gdy błąd zmierza do zera. Zdefiniowane zostały dwa różne rodzaje błędów: modelowania δ_{SM} i symulacji δ_{SN} . Błędy modelowania δ_{SM} są związane z założeniami, uproszczeniami, aproksymacjami występującymi w matematycznej reprezentacji fizycznego układu (np. geometria, równania matematyczne, warunki brzegowe, modele turbulencji), a także wykorzystaniu danych wejściowych, takich jak dane materiałowe. Błędy numeryczne δ_{SN} natomiast są błędami związanymi z procedurą rozwiązywania równań (np. dyskretyzacją, brakiem zbieżności iteracyjnej, brakiem zachowawczości w rozwiązaniu, błędami zaokrągleń, itp.). Istotnym założeniem, które zostało przyjęte przez Sterna i współautorów [25] jest to, iż nie istnieją żadne korelacje pomiędzy błędami. Przyjmują oni, że błędy symulacji numerycznej, z jednej z strony równe są różnicy wartości otrzymanej w symulacji i wartości prawdziwej ($\delta_S = S - T$), a z drugiej strony błędy te są sumą błędów w modelowaniu i błędów symulacji numerycznej ($\delta_S = \delta_{SM} + \delta_{SN}$). Przy tak przyjętych formułach dla błędów została zdefiniowana również niepewność symulacji numerycznej, o której mowa w definicji weryfikacji:

$$U_S^2 = U_{SM}^2 + U_{SN}^2 \quad (1.1)$$

Zdefiniowano ją jako sumę niepewności w oszacowaniu błędów modelowania i błędów symulacji numerycznej. W przypadku kiedy błędy symulacji numerycznej δ_{SN} da się estymować, czyli zachodzi równość

$$\delta_{SN} = \delta_{SN}^* + \varepsilon_{SN} \quad (1.2)$$

(δ_{SN}^* - estymator δ_{SN} , ε_{SN} - błąd estymacji δ_{SN}^*), można skorygować otrzymaną wartość symulacji numerycznej S uwzględniając estymator błędu δ_{SN}^* w tej symulacji. Otrzymuje się wtedy wartość skorygowaną

$$S_C = S - \delta_{SN}^* \quad (1.3)$$

z błędem

$$\delta_{Sc} = S_C - T = \delta_{SM} + \varepsilon_{SN} \quad (1.4)$$

oraz z niepewnością tego wyniku

$$U_{Sc}^2 = U_{SM}^2 + U_{ScN}^2 \quad (1.5)$$

gdzie U_{ScN}^2 jest niepewnością w estymacji ε_{SN} . Powyższe wyprowadzenie wzorów dla korekty wartości symulacji numerycznej S_C wraz z oszacowaniem dla niej błędu δ_{Sc} oraz niepewności U_{Sc} zostało wyprowadzone przez Sterna i współautorów przy założeniu, że błędy w symulacji numerycznej δ_{SN} mają charakter deterministyczny. Zastosowane podejście jest analogiczne do tego stosowanego w eksperymentalnej mechanice płynów przez Colemana i Steele [10].

Przyjęta powyżej terminologia definiuje weryfikację jako proces oceny niepewności w symulacji numerycznej U_{SN} i, o ile to możliwe, estymacje wartości i znaku błędu w symulacji numerycznej δ_{SN}^* wraz z niepewnością w tym oszacowaniu. W błędach w symulacji numerycznej δ_{SN} zostały wskazane następujące źródła błędów: niepełna iteracja, rozmiar siatki, krok czasowy oraz inne parametry numeryczne. Co pozwoliło zapisać δ_{SN} jako sumę $\delta_I, \delta_G, \delta_T, \delta_P$ oraz analogicznie U_{SN} i δ_{SN}^* , jako odpowiednie sumy U_I, U_G, U_T, U_P oraz $\delta_I^*, \delta_G^*, \delta_T^*, \delta_P^*$. Metody wyznaczania powyższych estymatorów zostaną podane w następnym rozdziale.

Walidacja w świetle powyżej przyjętej terminologii to proces oceny niepewności modelowania U_{SM} przy pomocy danych z wzorców eksperymentalnych oraz, o ile to możliwe, estymacja znaku i wartości błędu modelowania δ_{SM} . Definicja ta wymaga niezależnego oszacowania błędów i niepewności zarówno danych eksperymentalnych, jak i błędów w symulacji numerycznej i jej niepewności. Do oszacowania błędów eksperymentalnych i niepewności pomiarowej autorzy zalecają procedury zaproponowane przez Colemana i Steele [10]. Porównanie pomiędzy wynikami eksperymentalnymi, a wynikami symulacji numerycznej dokonuje się analizując tzw. błąd porównania E oraz jego niepewność U_E . Błąd porównania E jest zdefiniowany jako różnica wartości otrzymanej w eksperymencie D i wartości otrzymanej w symulacji numerycznej S . Przyjmując, że

$$D - \delta_D = S - \delta_S \quad (1.6)$$

gdzie δ_D błąd eksperymentalny, a δ_S błąd symulacji numerycznej. Można wyrazić błąd porównania E jako różnicę błędu eksperymentalnego i błędu symulacji.

$$E = D - S = \delta_D - \delta_S \quad (1.7)$$

Walidacja symulacji numerycznej jest osiągnięta jeśli wartość błędu porównania E jest mniejsza niż jego niepewność U_E . W celu wyliczenia wartości błędu porównania E błędy symulacji zostały podzielone na błędy wynikające z symulacji numerycznej δ_{SN} , błędy wynikające z wykorzystania danych wejściowych (np. dane materiałowe) δ_{SPD} oraz błędy wynikające z założeń w modelu δ_{SMA} . Ten podział pozwala wyliczać E jako

$$E = \delta_D - (\delta_{SMA} + \delta_{SPD} + \delta_{SN}) \quad (1.8)$$

oraz niepewność tego błędu jako

$$U_E^2 = U_D^2 + U_{SMA}^2 + U_{SPD}^2 + U_{SN}^2 \quad (1.9)$$

Ze względu na to, jak autorzy sami przyznają, w praktyce nie ma możliwości wyestymować wartości U_{SMA} , a co za tym idzie U_E zaproponowali oni badanie wartości niepewności walidacji U_V zdefiniowanej jako

$$U_V^2 = U_E^2 - U_{SMA}^2 = U_D^2 + U_{SPD}^2 + U_{SN}^2 \quad (1.10)$$

i określili ją jako kluczową **metrykę walidacji procesu**¹. Jako kryterium poprawnej walidacji symulacji numerycznej przyjęli warunek

$$|E| < U_V \quad (1.11)$$

Powyższa definicja walidacji spotkała się z krytyką ze strony Roache [26,27], jak i Oberkampfa i Trucano [28], którzy zauważyli że przyjęcie warunku (1.11) oznacza, że tym łatwiej zwalidować symulacje numeryczne im większa niepewność U_D , która oznacza mniej dokładne pomiary eksperymentalne. Autorzy definicji odparli bezwątpienia słuszny zarzut [29] tym, iż walidacji nie można osiągnąć jeśli niepewność walidacji U_V nie jest mniejsza niż założony z góry pewien poziom niepewności U_{reqd} na etapie projektowania symulacji numerycznej. Ponadto U_V określa poziom z jaką możliwe jest przeprowadzenie procedury walidacyjnej z wykorzystaniem danych D . Sposób interpretacji błędu porównania E , metryki walidacyjnej U_V zostaną podane w rozdziale 1.2.3.

Oberkampff i Trucano [28], jako definicję weryfikacji i walidacji przyjęli tę zaproponowaną przez AIAA w [21] przy czym uściślili czego wymagają procesy weryfikacji i walidacji. Określili, że podstawowym celem weryfikacji jest identyfikacja, oszacowanie ilościowe (*ang. quantification*) i redukcja błędów modelu numerycznego i jego rozwiązania. Niezbędne do przeprowadzenia

¹ (*ang. key validation metric*) nazwa ta to bezpośrednie tłumaczenie z języka angielskiego i nie odpowiada definicji metryki w sensie matematycznym.

oszacowania ilościowego błędu symulacji numerycznej, a co za tym idzie weryfikacji symulacji numerycznej, jest istnienie bardzo dokładnych i wiarygodnych wzorców numerycznych. Tego typu wzorce mogą być rozwiązaniami analitycznymi lub bardzo dokładnymi rozwiązaniami numerycznymi (*ang. benchmark solutions*). Dzięki takim rozwiązaniom weryfikacja ma za zadanie dostarczyć dowodu, że model (w przypadku mechaniki płynów zestaw równań różniczkowych cząstkowych + warunki brzegowe + warunki początkowe) został poprawnie rozwiązany poprzez zawarte w programie komputerowym algorytmy. Autorzy zwracają uwagę, że weryfikacja oprogramowania powinna być każdorazowo powtarzana, gdy zmieniana jest choćby część kodu. Błędy, które należy zidentyfikować oraz oszacować ilościowo na etapie weryfikacji zostały podzielone na pięć kategorii: (i) błędy wynikające z nie osiągnięcia wystarczającej zbieżności dyskretyzacji przestrzennej, (ii) błędy wynikające z nie osiągnięcia wystarczającej zbieżności dyskretyzacji czasowej (iii) niewystarczająca zbieżność procedur iteracyjnych, (iv) błędy zaokrąglenia oraz (v) pomyłki programistyczne. Dodatkowym zadaniem weryfikacji jest wykazanie stabilności, zgodności i wydajności schematów dyskretyzacyjnych. Pierwsze trzy kategorie błędów autorzy określili jako charakterystyczne dla numerycznej mechaniki płynów, wynikające z modelu w formie równań różniczkowych cząstkowych i przytoczyli metody ich estymacji, które zostaną podane w następnym rozdziale. Błędy zaokrąglenia według autorów rzadko są oddzielnie traktowane i zazwyczaj zakłada się że są mniejsze w stosunku do tych z kategorii (i)-(iii), jednakże ich oszacowanie ilościowe też jest celem weryfikacji. Natomiast pomyłki programistyczne występujące w programach komputerowych uznali, że należy eliminować przy pomocy narzędzi z inżynierii oprogramowania, a mianowicie przy pomocy narzędzi do zapewniania jakości oprogramowania.

Definicja walidacji podana przez AIAA została zaadaptowana przez Oberkampfa i Trucano jako procedura której celem jest ocena na ile dokładnie model odwzorowuje (reprezentuje) rzeczywistość z perspektywy zaplanowanego wykorzystania praktycznego modelu [30]. Uszczegółowili oni dodatkowo, że walidacja ma na celu ocenę porównania pomiędzy wystarczająco dokładnymi wynikami symulacji numerycznej i wynikami doświadczalnymi. Walidacja, według nich nie określa jak model numeryczny powinien zostać zmieniony aby polepszyć zgodność pomiędzy porównywanymi wynikami. Walidacja natomiast wymaga identyfikacji, ilościowego oszacowania konceptualnych błędów i niepewności modelu, ilościowego oszacowania błędu numerycznego w rozwiązaniu numerycznym, estymacji niepewności pomiarowej danych doświadczalnych, i w końcu porównania wyników symulacji numerycznej z danymi doświadczalnymi. Dokładność jest mierzona w relacji do wyników eksperymentalnych, które są według autorów najlepszą miarą rzeczywistości. Strategia przyjęta nie zakłada, że wyniki eksperymentalne są bardziej dokładne w porównaniu z wynikami obliczeń numerycznych lecz zdecydowanie zakłada, że wyniki eksperymentalne w sposób najbardziej wiarygodny odzwierciedlają rzeczywistość. Ze względu na brak możliwości lub niepraktyczność przeprowadzania eksperymentów dla bardzo skomplikowanych modeli, rekomendowane przez autorów jest podejście blokowe (*ang. building-block approach*). Ideą tego typu walidacji, jest podział skomplikowanego modelu fizycznego na trzy lub cztery warstwy, które zawierają uproszczone modele. I tak cały model jest dzielony na podsystemy (*ang. subsystem cases*), następnie te podsystemy dzielone są na wzorce (*ang. benchmark cases*), które z kolei mogą jeszcze zostać podzielone na problemy jednostkowe (*ang. unit problems*). U przyczyn takiego podziału leży to, iż w ten sposób można podzielić cały skomplikowany, rzeczywisty układ na kilka prostszych podukładów oraz to, iż tylko dla prostszych przypadków jesteśmy w stanie dostarczyć wiarygodne dane eksperymentalne, niezbędne w procesie walidacji. Autorzy podali również zestaw wskazówek, które powinny zostać uwzględnione podczas eksperymentów których celem jest dostarczenie wiarygodnych danych eksperymentalnych. Wskazówki te zostaną zacytowane w następnym rozdziale.

Podsumowując przytoczone definicje pochodzące z różnych źródeł można wyróżnić kilka elementów wspólnych dla tych definicji:

- weryfikacja jak i walidacja definiowane są jako **procesy**
- weryfikacja jak i walidacje dotyczą **dokładności** modeli lub procedur

- weryfikacja oszacowuje na ile dokładnie równania modelu są rozwiązywane przez program komputerowy i nie określa czy model ten ma coś wspólnego z rzeczywistością
- walidacja oszacowuje na ile dokładnie model zaimplementowany w programie komputerowym modeluje rzeczywistość
- weryfikacja powinna poprzedzać walidację

Główne różnice występujące w przytoczonych powyżej definicjach wiążą się z faktem, iż tematyka weryfikacji i walidacji leży na pograniczu dwóch dyscyplin wiedzy: mechaniki i informatyki. Toteż w zależności od tego, jakie podejście się zastało przyjęte przez autorów za punkt wyjścia, pojęcia mają inny charakter, aczkolwiek definicje te nie są sprzeczne czy wykluczające się.

1.2.2 Metody weryfikacji

Niniejszy podrozdział przedstawia literaturowe zestawienie metod wykorzystywanych do weryfikacji symulacji numerycznych. Przedstawione zostały procedury lub metody weryfikacji kodu (programu) numerycznego, jak i konkretnego obliczenia.

Celem weryfikacji jest oszacowanie na ile równania modelu zostały poprawnie rozwiązane przy pomocy dyskretnego modelu zaimplementowanego w programie komputerowym. Zakładając, że modelem w naszym przypadku jest układ równań różniczkowych cząstkowych wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi, a u_{exact} jest analitycznym rozwiązaniem dla tego układu, wtedy błąd możemy oznaczyć, jako:

$$E = u_{exact} - u_{discrete} \quad (1.12)$$

Gdzie $u_{discrete}$ jest rozwiązaniem otrzymanym jako wynik symulacji komputerowej. Błąd E zależy od dyskretyzacji przestrzennej, która można parametryzować wielkością komórki obliczeniowej h , dyskretyzacji czasowej, którą można parametryzować krokiem czasowym τ , parametrów w procedurach iteracyjnych I , oraz od konkretnego kodu programu c . Wygodnie jest, podobnie jak Oberkampf i Trucano [28], rozdzielić E na dwie kategorie, wprowadzając $u_{h,\tau \rightarrow 0}$ rozwiązanie graniczne, czyli osiągane w granicy gdy $h \rightarrow 0$ i $\tau \rightarrow 0$. Wtedy

$$E \leq \|u_{exact} - u_{h,\tau \rightarrow 0}\| + \|u_{h,\tau \rightarrow 0} - u_{h,\tau,I,c}\| \quad (1.13)$$

gdzie $u_{h,\tau,I,c}$ jest wynikiem obliczeń numerycznych wykonanych przy pomocy kodu programu c , przy wykorzystaniu siatki obliczeniowej h , z krokiem czasowym τ , oraz z parametrami procedur iteracyjnych I . Pierwszy składnik sumy prawej strony nierówności (1.13) w analizie numerycznej nazywany jest błędami obcięcia². Oszacowanie tego składnika wykonywane jest przy użyciu narzędzi z analizy numerycznej, i dowodzi się je zazwyczaj dla konkretnej metody dyskretyzacji (metody różnic skończonych, metody objętości skończonych, metody elementów skończonych). Definiuje się, że metoda dyskretyzacji (schemat dyskretyzacji) jest zgodna wtedy i tylko wtedy gdy $u_{h,\tau} \rightarrow u_{exact}$ przy $h \rightarrow 0$ i $\tau \rightarrow 0$. Sprawdzenie czy metoda jest zbieżna do rozwiązania dokładnego wykonuje się zazwyczaj *a priori* korzystając z twierdzeń z analizy numerycznej. Przykładem takiego twierdzenia może być twierdzenie Laxa [31]: *Dla dobrze postawionego³ liniowego problemu początkowego dla układu równań różniczkowych cząstkowych hiperbolicznych oraz zgodnej aproksymacji metodą różnic skończonych rozwiązanie dyskretne $u_{h,\tau}$ zbiega do rozwiązania analitycznego u_{exact} wtedy i tylko wtedy gdy aproksymacja jest stabilna.* Bardzo silnym założeniem jest liniowość układu, której nie mamy w przypadku układu równań opisujących przepływy. Mimo to powszechnie stosuje się badanie stabilności jako warunek konieczny i wystarczający dla wykazania zbieżności metody [23]. Wiąże się to z faktem, iż stabilność układu równań różniczkowych cząstkowych bada się przy pomocy metody von Neumana [32], która dotyczy nie

² Błędy obcięć (ang. truncation errors) nie mają nic wspólnego z błędami zaokrąglenia (ang. round-off error), które wynikają ze skończonej reprezentacji liczby w maszynach cyfrowych. Często ich mylenie wynika z bardzo podobnych odpowiedników w języku polskim.

³ Dobrze postawiony problem w analizie numerycznej to taki, który posiada dokładnie jedno rozwiązanie oraz rozwiązanie jest zależne od danych wejściowych w sposób ciągły [92].

tylko układów liniowych. Analogiczne twierdzenie służące do określania zbieżności numerycznej metody zostało udowodnione przez Cea [33] dla metody elementów skończonych.

Powyższy podział błędów (1.13) został przytoczony po to, aby określić, że weryfikacja nie obejmuje oszacowania błędów obciążenia, które bada się na gruncie analizy numerycznej i nie jest to oszacowanie ilościowe. Na poparcie tej tezy można przytoczyć Obekampfa i Trucano [28], którzy stwierdzają, iż niemożliwe jest jakiegokolwiek oszacowanie ilościowe błędu *a priori* oraz Roache [23], który uważa, że znaczenie twierdzenia Laxa jest przeceniane podobnie, jak twierdzenia dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązań r.r.cz. Toteż metody przedstawione poniżej dotyczą oszacowania drugiego składnika po prawej stronie nierówności (1.13), dostarczają one ilościowego oszacowania błędu $\|u_{h,\tau \rightarrow 0} - u_{h,\tau,l,c}\|$ i są wykonywane *a posteriori*.

Metoda sztucznych rozwiązań (*ang. the method of manufactured solutions*)

Metoda ta została zaproponowana przez Roache [23] w celu weryfikacji programu komputerowego (kodu) zaprojektowanego i napisanego do rozwiązywania konkretnego modelu (w przypadku przepływów dla konkretnej klasy przepływów). Należy podkreślić, że metoda ta została zaproponowana jedynie do weryfikacji programu komputerowego a nie konkretnego obliczenia, ponieważ Roache zdefiniował dwa etapy weryfikacji. Weryfikacja kodu obliczeniowego (pierwszy etap) wymaga, według Roache, oceny błędu względem **znanego** rozwiązania i metoda powyższa daje możliwość generacji takiego rozwiązania dla dowolnego układu równań różniczkowych cząstkowych oraz warunków brzegowych i początkowych.

Dokładny opis metody został opisany w pracach Roache [23,34] i polega ona na wybraniu dowolnej funkcji analitycznej i przyjęcie jej jako rozwiązania. Wstawienie jej do układu równań różniczkowych pozwala na obliczenie analityczne lub symboliczne (przy użyciu takich narzędzi jak Macsyma, Mathematica czy Maple) członów źródłowych dla rozwiązywanych równań, gdyż wybrana funkcja zazwyczaj nie spełnia równań modelu. Następnie wyliczone człony źródłowe definiuje się dla nowych, przetransformowanych równań modelu. Podobnie postępuje się z warunkami brzegowymi, tak aby zapewnić zgodność na brzegu obszaru obliczeniowego. Ten nowy zestaw równań rozwiązuje się przy pomocy programu komputerowego, przy czym znane jest rozwiązanie dla przetransformowanego modelu i możliwe jest obliczenie różnicy pomiędzy otrzymanym rezultatem z symulacji numerycznej a znanym rozwiązaniem – wybraną funkcją analityczną.

Roache zachwala swoją metodę, gdyż uważa jest to jak do tej pory jedyny sposób zweryfikowania kodu programu dla nietrywialnych problemów. Podaje szereg przykładów praktycznych, w których dzięki tej metodzie udało się nie tylko ocenić ilościowo błędy dyskretyzacji przestrzennej i czasowej, błędy przy generowaniu siatki obliczeniowej, czy błędy procedur iteracyjnych, ale również zidentyfikować pomyłki programistyczne czy błędy zaokrągleń. Brak jakiegokolwiek odniesienia do fizyki w generowanych rozwiązaniach Roache uważa również za pozytywną cechę tej metody, gdyż jak sam określa weryfikacja nie powinna mieć nic wspólnego z nauką, fizyką czy rzeczywistością, a jedynie z matematyką.

Metoda ta idealnie pasuje do definicji weryfikacji, którą zaproponował Roache, czyli oszacowania błędu względem znanego *a priori* rozwiązania. Jednakże w celu zastosowania jej konieczna jest ingerencja w kod programu, a mianowicie transformacja równań. Proces ten nie jest trywialny, a czasami nawet niemożliwy, gdy nie ma dostępu do źródeł programu.

Wzorce analityczne

Weryfikację programu obliczeniowego można również wykonywać korzystając ze znanych rozwiązań analitycznych. Wyliczając bezpośrednio różnicę pomiędzy rozwiązaniem analitycznym, a dyskretnym. Główną wadą tego podejścia jest to, iż istnieje tylko kilka rozwiązań analitycznych i dotyczą one bardzo wąskiej klasy przepływów. Zazwyczaj są to rozwiązania dla modeli jedno lub dwu wymiarowych oraz prostej geometrii.

Przykładami takich rozwiązań są: dwuwymiarowy przepływ Darcy ze zmiennymi właściwościami materiałowymi [35], rozwiązanie analityczne dla przepływu w zagłębieniu podane przez Huanga i Li [36] czy stacjonarne rozwiązania dla pewnych typów równań Naviera-Stokesa podane przez Wanga [37]. Dla bardziej skomplikowanych przepływów, którym towarzyszą dodatkowe zjawiska, zazwyczaj nie znamy rozwiązania analitycznego, a jeśli to są to przypadki wyidealizowane (przewodnictwo ciepła w nieskończonym pręcie czy problem Stefana – jednowymiarowe krzepnięcie [38]).

Wzorce numeryczne

Kolejnym sposobem weryfikacji programu komputerowego jest porównywanie wyników obliczeń z opublikowanymi dotychczas wzorcami numerycznymi. Czyli porównanie z bardzo dokładnymi rozwiązaniami numerycznymi, których dokładność została potwierdzona bądź poprzez stosowanie wyszukanych metod dyskretyzacji (np. wielomiany Czebyszewa, metody spektralne, metody wielosiatkowe), bądź też poprzez uzyskanie rozwiązań klasycznymi metodami numerycznymi z dokładnym oszacowaniem błędu.

Przykładem takiego wzorca jest rozwiązanie podane przez Ghia i współautorów [39] dla przepływu w zagłębieniu z wykorzystaniem metody wielosiatkowej (*ang. multigrid technique*), oraz rozwiązanie podane przez de Vahl Davisa dla przepływu w różnicowo grzanym kanale [15], z wykorzystaniem klasycznej aproksymacji drugiego rzędu i oszacowaniu błędu przy pomocy ekstrapolacji Richardsona. Rozwiązanie podane przez de Vahl Davisa zostało potwierdzone przez Hortmana i Perica [40], a także Le Quere [16], którzy otrzymali rozwiązania z wykorzystaniem bardziej zaawansowanych metod. Weryfikacja przy pomocy wzorców numerycznych budzi wciąż wątpliwości, szczególnie w kręgach matematyków, gdyż często stosuje się ją do sprawdzenia poprawności zastosowanej aproksymacji o której nie wiadomo czy jest zgodna. Jednakże niniejsza metoda jest najprostszą i najszybszą metodą sprawdzenia poprawności programu. O jej popularności świadczy co raz większa liczba publikowanych rozwiązań wzorcowych, na przykład na łamach *Journal of Computational Physics*, a także wielu innych czasopism dotyczących numerycznej mechaniki płynów, obejmując tym samym stosunkowo szeroki zakres przepływów.

Metoda określania zbieżności na podstawie ekstrapolacji Richardsona

Podstawową i najbardziej popularną metodą określania zbieżności w celu weryfikacji konkretnego obliczenia jest metoda oparta na ekstrapolacji Richardsona [41,23,28]. Można ją wykorzystywać zarówno do oszacowania zbieżności przestrzennej jak i czasowej. Zakłada ona, że poszukiwane rozwiązanie jest funkcją analityczną (tzn. można ją rozwinąć w szereg Taylora), znany jest formalny rząd schematu, który został użyty do otrzymania rozwiązania, oraz błąd dyskretyzacji schematu jest co najwyżej tego samego rzędu co pierwszy pomijany człon reszty we wzorze Taylora (przy spełnieniu tych warunków mówi się, że rozwiązanie znajduje się w zakresie asymptotycznej zbieżności). Wtedy rozwiązanie dokładne można związać z rozwiązaniem dyskretnym rzędu p otrzymanym na siatce h w następujący sposób:

$$u_{exact}(x) = u_h(x) + \alpha h^p + O(h^{p+1}) \quad (1.14)$$

Mając dwa rozwiązania u_{h1} oraz u_{h2} otrzymane odpowiednio na siatkach $h1$ i $h2$, oraz zakładając, że znamy formalny rząd schematu metody p , można rozwiązać układ równań podstawiając do równania (1.14) rozwiązania u_{h1} i u_{h2} i wyliczając u_{exact} i α jako niewiadome. Otrzymamy wtedy, że

$$\alpha = \left[\frac{u_{h1} + u_{h2}}{h_2^p - h_1^p} \right] + O(h_1^{p+1}) + O(h_2^{p+1}) \quad (1.15)$$

$$u_{exact} = \left[\frac{h_2^p u_{h1} + h_1^p u_{h2}}{h_2^p - h_1^p} \right] + O(h_1^{p+1}) + O(h_2^{p+1}) \quad (1.16)$$

Pomijając człony rzędu wyższego niż p można zdefiniować estymator błędu dyskretyzacji przestrzennej ε dla dowolnego rozwiązania numerycznego u_h otrzymanego na siatce h , jako

$$\mathcal{E}(u_h) = \frac{\|u_{exact} - u_h\|}{\|u_{exact}\|} \quad (1.17)$$

W ten sposób można też obliczyć błąd rozwiązań u_{h1} i u_{h2} . Główną zaletą tego podejścia jest to, iż powyższą definicję błędu można stosować zarówno do całych rozwiązań, jak i do funkcjonałów zależnych od otrzymanych rozwiązań dyskretnych (np. strumień ciepła, liczba Nusselta, itp.). Główną wadą jest konieczność wykonania co najmniej dwóch niezależnych obliczeń na różnych siatkach ($h_1 \neq h_2$).

Postępowanie opisane powyżej można uogólnić i mając do dyspozycji trzy rozwiązania u_{h1} , u_{h2} , u_{h3} otrzymane odpowiednio na siatkach h_1 , h_2 , h_3 tak, że $r = h_3/h_2 = h_2/h_1$. Rozwiązanie u_{exact} można wtedy przedstawić następująco:

$$u_{exact} = u_{h1} - g_1 h_1 - g_2 h_1^2 \quad (1.18)$$

Gdzie g_1 i g_2 wynoszą:

$$g_1 = \frac{u_{h3} - u_{h2} - r^2(r^2 - 1)u_{h2}h_1^2}{r(r-1)h_1} \quad (1.19)$$

$$g_2 = \frac{u_{h3} - u_{h2} - r(u_{h2} - u_{h1})}{r(r-1)(r^2 - 1)h_1^2} \quad (1.20)$$

Co więcej można wtedy określić rzeczywisty rząd zbieżności schematu dyskretnego p , jako:

$$p = \ln\left(\frac{u_{h3} - u_{h2}}{u_{h2} - u_{h1}}\right) / \ln(r) \quad (1.21)$$

i porównywać z formalnym rzędem schematu oraz w ten sposób sprawdzić czy rzeczywiście ciąg rozwiązań znajduje się w zakresie asymptotycznej zbieżności.

Również podobne podejście badania zbieżności polegające na wykorzystaniu ekstrapolacji Richardsona zostało przedstawione w pracy Sterana i współautorów [25] i nazwane uogólnioną ekstrapolacją Richardsona. Określono tam, że aby wykazać zbieżność należy wykonać obliczenia dla co najmniej trzech siatek. Na podstawie otrzymanych rozwiązań należy badać stosunek różnicy pomiędzy kolejnymi rozwiązaniami R

$$R = (u_{h2} - u_{h1}) / (u_{h3} - u_{h2}) \quad (1.22)$$

Zostały wyróżnione trzy możliwości: (i) $0 < R < 1$ - monotoniczna zbieżność, (ii) $R < 0$ - zbieżność oscylacyjna, (iii) $R > 1$ rozbieżność. Dla pierwszego przypadku podano zarówno oszacowanie błędu δ^* , jak i niepewności w tym oszacowaniu U^* , dla drugiego tylko oszacowanie niepewności U^* , natomiast trzeci zakwalifikowano jako wykazanie braku zbieżności.

Dla przypadku (i), przy założeniu, że kolejne siatki h_1 , h_2 , h_3 były zagęszczane tak, że $r = h_3/h_2 = h_2/h_1$ jest stałe, został określony estymator błędu, również na podstawie ekstrapolacji Richardsona, jako

$$\delta_{h1}^* = \mathcal{E}(u_{h1}) = (u_{h2} - u_{h1}) / (r^p - 1) \quad (1.23)$$

natomiast niepewność tego estymatora została określona, jako

$$U_{h1}^* = C\delta_{h1}^* = C(u_{h2} - u_{h1}) / (r^p - 1) \quad (1.24)$$

gdzie C jest współczynnikiem korygującym, zależnym od formalnego rzędu aproksymacji wykorzystanym do otrzymania rozwiązań na siatkach h_1 oraz h_2 . Wzór oraz wyprowadzenie współczynnika można znaleźć w pracy [25]

Dla przypadku (ii) nie można wyprowadzić estymatora błędu, a jedynie wartość niepewności w jego oszacowaniu, która została zdefiniowana jako:

$$U_{h1}^* = \frac{1}{2}(\bar{u} - \underline{u}) \quad (1.25)$$

gdzie \bar{u} , \underline{u} oznaczają odpowiednio górne i dolne ograniczenie oscylujących rozwiązań u_{h1} , u_{h2} , u_{h3} .

Głównym ograniczeniem podejścia zaproponowanego przez Sterna i współautorów jest konieczność wykonania co najmniej trzech obliczeń, co nie zawsze jest możliwe, gdyż zagęszczanie

siatek powoduje wydłużenie czasu obliczeń oraz zwiększenie skali zadania dla zadań dwuwymiarowych czterokrotnie, a dla zadań trójwymiarowych ośmiokrotnie.

Indeks zbieżności siatki GCI(ang. Grid Convergence Index)

W celu ujednoczenia sposobu estymacji błędów dyskretyzacyjnych, wykonywanych dla oszacowania błędów dla konkretnego obliczenia, Roache zaproponował metodę również opartą na ekstrapolacji Richardsona [23]. Zdefiniował on współczynnik, który wylicza się według zaproponowanej przez niego procedury i nazwał go indeksem zbieżności siatki.

U podstaw tej procedury legła chęć estymacji błędu poprzez porównanie estymatora ε wyliczonego na podstawie równania (1.17) dla rozwiązań uzyskanych na siatkach h_1 i h_2 z ε , który byłby uzyskany w przypadku gdy zagęszczenie siatki byłoby jednorodne ($h_2 = 2h_1$) a rząd aproksymacji $p = 2$. Dzięki takiemu zabiegowi udało się wyeliminować konieczność rozwiązywania problemu na trzech siatkach. Definicja indeksu zbieżności siatki została więc przyjęta, jako:

$$GCI(u_{h_1}) = F_s \left(\left| \frac{u_{h_2} - u_{h_1}}{u_{h_1}} \right| / (r^p - 1) \right) \quad (1.26)$$

gdzie F_s jest tzw. współczynnikiem bezpieczeństwa i ma on funkcję normującą. Roache zaleca aby dla obliczenia wykonanego tylko przy użyciu dwóch siatek przyjmować $F_s = 3$, natomiast dla obliczenia wykonanego przy użyciu trzech lub więcej siatek $F_s = 1.25$. Wartość 3 normuje nam ten współczynnik w ten sposób, że dla obliczenia, dla którego $p = 2$ i $r = h_2/h_1 = 2$, otrzymujemy wartość GCI równą wartości błędu bezwzględnego u_{h_1} względem u_{h_2} (1.17).

Definicja napotkała krytykę ze strony Sterna [25] dotyczącą tego, iż indeks ten nie wykrywa oscylacyjnych zbieżności oraz według Sterna jest zbyt konserwatywny tzn. przedział niepewność błędu wyliczony na podstawie GCI jest często zbyt duży. Stern podał kilka przykładów dla których wartość $F_s = 1$, byłaby wystarczająca. Roache odparł zarzut „nadmiernego konserwatyzmu” [26] w definicji indeksu przykładami, w których wskazał, że wartość współczynnika bezpieczeństwa równa trzy jest niezbędna, słusznie stwierdzając, że posiadając tylko dwa rozwiązania nie ma pewności czy ciąg tych rozwiązań znajduje się w zasięgu asymptotycznej zbieżności.

Metody określania zbieżności procedur iteracyjnych

Dyskretyzacja równań różniczkowych cząstkowych zwykle prowadzi do wyznaczenia układu równań liniowych, które ze względu na swe rozmiary są rozwiązywane przy użyciu metod iteracyjnych, takich jak: metoda Jacobiego, Gaussa – Seidla, TDMA, GMRES, CGSTAB itp. Błędy powstałe w wyniku tych procedur należą do błędów dyskretyzacji, i według Roache identyfikuje się je przy pomocy metod weryfikacji (np. GCI). Ze względu na konieczność dostarczenia kryterium, które umożliwiłoby kontrolę błędu δ_i podczas iteracyjnego rozwiązywania liniowego układu równań, Ferziger [42] określił kryterium dotyczące estymacji błędu zbieżności dla takich procedur estymując wartość największej wartości własnej rozwiązywanego układu. Kryterium podane przez Ferzigera może być używane do estymacji błędów procedur iteracyjnych.

Oddzielnym źródłem błędów, które nazywane są również błędami procedur iteracyjnych są błędy procedur które wykorzystuje się do linearyzacji równań nieliniowych. Przykładem mogą być nadrelaksacyjne metody iteracji kroków czasowych (w tzw. *pseudoczasie* - ang. false transient). Dla tych procedur błędy estymuje się analizując zmianę wartości residuów w bieżącej i poprzedniej iteracji. Wartość tych residuów, może być wykorzystana jako estymator błędów. Dla metod służących do rozwiązywania nieliniowych układów równań, które rozwiązywane są w sposób iteracyjny, różnica pomiędzy wartościami wyliczonymi w kolejnych iteracjach może również zostać wykorzystana jako estymator błędu iteracyjnego.

Inne metody estymacji błędów dyskretyzacji

Głównym mankamentem opisanych powyżej procedur weryfikacji modeli numerycznych jest konieczność przeprowadzenia obliczeń dla co najmniej dwóch siatek obliczeniowych. Dla uniknięcia tego problemu podjęto próbę zdefiniowania estymatorów, które informowałyby o błędach dyskretyzacji bez konieczności zagęszczania lub rozrzedzenia siatki.

Do pierwszej klasy takich estymatorów można zaliczyć określanie błędu dyskretyzacji na podstawie dwóch rozwiązań na tej samej siatce lecz przy wykorzystaniu schematów dyskretyzacji przestrzennej różnego rzędu. Na przykład porównując rozwiązania otrzymane przy wykorzystaniu wzorów różnicowych czwartego rzędu i drugiego. Podwyższanie rzędu aproksymacji przestrzennej jest możliwe stosunkowo niskim kosztem wykorzystując tzw. metodę „deferred correction” [43], w której wyrazy wyższego rzędu wylicza się w sposób jawny, a wyrazy niższego rzędu w sposób niejawny. Porównując dwa rozwiązania można zdefiniować estymator błędu, na przykład w taki sposób jak zdefiniował to Roache [23].

Kolejną klasą estymatorów wykorzystująca tylko jedną siatkę jest rozwiązywanie pomocniczych równań różniczkowych, które konstruuje się tak aby informowały nas w jaki sposób propagowane są błędy (dyfuzja lub adwekcja błędów). Podejście to zostało zaproponowane przez Babuske i współpracowników [44,45] dla obliczeń wykonywanych metodą objętości skończonych i elementów skończonych.

Podobnym do powyższego podejścia jest metoda wykonywania obliczeń pomocniczych w celu sprawdzenia czy otrzymane rozwiązania, które mają swą interpretację fizyczną, spełniają zasady zachowania: masy, pędu i energii dla każdej komórki obliczeniowej. Rozszerzenie tego typu metod zostało zastosowane przez Changa i Hawortha [46] aby monitorować całkowitą energię kinetyczną dla komórek obliczeniowych w przepływach turbulentnych przy wykorzystaniu uśrednionych równań Naviera – Stoksa (ang. Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations). Metoda ta jest często wykorzystywana, jednakże w świetle definicji weryfikacji, która nie powinna mieć nic wspólnego ze sprawdzeniem poprawności modelu, nie jest zalecana przez Roache.

Inna klasa estymatorów opartych na obliczeniach z wykorzystaniem pojedynczej siatki obliczeniowej została zaproponowana przez Zhu i Zienkiewicza [47,48] dla metody elementów skończonych i nosi nazwę pomysłodawców. Estymatory te, obszernie opisane i wykorzystywane przez Pelletiera [49,50], zostały wyprowadzone w celu dostarczenia kryterium w procesie adaptacji siatki obliczeniowej. Jednakże mogą one również być wykorzystywane do estymacji błędów dyskretyzacji metody elementów skończonych. Zaproponowana metoda oparta jest na fakcie, że słabe sformułowanie wykorzystywane w metodzie elementów skończonych przy pewnych warunkach równoważne jest minimalizacji funkcjonału energetycznego. Badanie wartości takiego funkcjonału oraz wartości ekstremalnych przy pomocy metod optymalizacji wykorzystywane jest w tego typu estymatorach.

1.2.3 Metody walidacji

Niniejszy podrozdział przedstawia literaturowe zestawienie metodologii walidacji symulacji numerycznych. Przedstawione zostały kryteria i wskazówki dotyczące procesu walidacji.

Podstawowym celem walidacji jest określenie poprawności rozwiązania otrzymanego przy użyciu symulacji numerycznej czyli będącego wynikiem rozwiązania równań przyjętego modelu w świetle badań eksperymentalnych. Walidacja określa czy model matematyczno-numeryczny został prawidłowo wybrany w celu symulacji określonego zjawiska lub procesu fizycznego. Toteż błąd pomiędzy rzeczywistą wartością u_{nature} , a otrzymaną w wyniku działania programu wartością $u_{discret}$ może zostać podzielony następująco:

$$E = u_{nature} - u_{discrete} = (u_{nature} - u_{exp}) + (u_{exp} - u_{exact}) + (u_{exact} - u_{discrete}) \quad (1.27)$$

Pierwszy składnik odpowiada za błędy pomiarowe, które estymuje się podczas przeprowadzania eksperymentów, drugi składnik określa błędy pomiędzy przyjętym konceptualnym modelem a pomiarami eksperymentalnymi, natomiast trzeci składnik określa opisane w rozdziale 1.2.2 błędy

związane z rozwiązaniem numerycznym. Celem walidacji jest oszacowanie środkowego składnika sumy (1.27).

Oberkampff i Trucano [28] skupili się przede wszystkim na podaniu strategii jaka jest rekomendowana przy przeprowadzaniu walidacji symulacji numerycznej. Zalecają oni hierarchiczną strategię podziału procesu/zjawiska, które jest modelowane, podczas walidacji rzeczywistych procesów inżynierskich (*ang. building-block approach*). Dzięki takiemu podziałowi całego układu na podukłady, następnie na poziom wzorców i poziom problemów jednostkowych, skomplikowane zagadnienie inżynierskie jest rozbijane na szereg problemów, w których możliwe jest przeprowadzenie precyzyjnych pomiarów eksperymentalnych. Ponadto dla takich prostych układów można wykorzystać istniejące modele teoretyczne i skupić się na jednym lub dwóch zjawiskach, które da się precyzyjnie zbadać i opisać. Oberkampff stwierdza nawet więcej, że na poziomie systemu czy podsystemu, wzorce eksperymentalne są nie do przeprowadzenia ze względu na komplikację takich układów, wskazując jako jedyną drogę podział warstwowy z wyraźnym określeniem zjawisk jednostkowych, które w całości tworzą skomplikowany układ.

W celu przeprowadzenia eksperymentów, których wyniki służyłyby walidacji symulacji numerycznych problemów przepływowych Oberkampff i Trucano zdefiniowali sześć wskazówek, które są konieczne przy przeprowadzaniu takich eksperymentów. Podstawowym celem dla którego takie eksperymenty są przeprowadzane jest określenie dokładności modelu numerycznego i zasięgu jego stosowalności.

Wskazówka 1: Eksperyment walidacyjny powinien być przygotowywany wspólnie przez eksperymentatorów, projektantów modelu, projektantów komputerowych, użytkowników oprogramowania od momentu powstania projektu do momentu jego dokumentacji z uwzględnieniem silnych i słabych stron każdej z w/w grup.

Wskazówka 2: Eksperyment walidacyjny powinien być tak przygotowany aby obejmował istotę zjawiska fizycznego, włączając wszystkie dane niezbędne do przeprowadzenia symulacji numerycznej (dane materiałowe, warunki brzegowe, warunki początkowe).

Wskazówka 3: Eksperyment walidacyjny powinien dążyć do podkreślenia wspólnego uzupełniania się (synergizmu⁴) pomiędzy symulacją numeryczną a badaniami doświadczalnymi

Wskazówka 4: Pomimo to, że koncept eksperymentu powinien zostać zaprojektowany wspólnie przez eksperymentatorów i osoby tworzące modele numeryczne, niezbędna niezależność musi być zachowana przy otrzymywaniu rezultatów eksperymentalnych, jak i numerycznych.

Wskazówka 5: Zachowana powinna zostać hierarchia przeprowadzania pomiarów, zaczynając od tych, które nie wymagają skomplikowanych obliczeń, do tych, które wymagają dodatkowych żmudnych wyliczeń i analizy danych.

*Wskazówka 6: Projekt eksperymentu powinien być tak przygotowany aby można było dokonać analizy i estymacji zarówno błędów dokładności pomiarów (niepewności pomiarowej), jak i systematycznych błędów eksperymentalnych (*ang. bias errors*).*

Odmienne podejście do problemu walidacji zostało przedstawione przez Colemana i Sterna [25], którzy nie tylko zdefiniowali metrykę walidacyjną U_V (1.10), dzięki której można określić odległość pomiędzy wynikami symulacji numerycznej, a wynikami eksperymentalnymi, ale również zdefiniowali ostre kryterium (1.11), które pozwala uznać, że walidacja modelu przebiegła pozytywnie. Przedstawili oni sześć możliwych scenariuszy pomiędzy wartościami modułu błędu porównania $|E|$ (1.8), a wartością metryki walidacyjnej U_V (1.10) oraz wymaganym poziomem niepewności U_{reqd} , definiowanym na etapie projektowania eksperymentu walidacyjnego i symulacji numerycznej. Dla pierwszych trzech przypadków obejmujących

$$|E| < U_V < U_{reqd} \text{ lub } |E| < U_{reqd} < U_V \text{ lub } U_{reqd} < |E| < U_V \quad (1.28)$$

błąd porównania jest poniżej poziomu szumu, więc oszacowanie błędów modelowych δ_{SMA} nie jest możliwe na poziomie wymaganej niepewności. Jedynie dla pierwszego przypadku można ocenić czy walidację można zakwalifikować pozytywnie, i to tylko z punktu widzenia projektu modelu. W pozostałych przypadkach, czyli dla

⁴ Synergizm rozumiany jest tutaj jako uzupełnianie się badań eksperymentalnych z modelowaniem numerycznym w celu osiągnięcia lepszego zrozumienia obydwu metod.

$$U_V < |E| < U_{reqd}, U_V < U_{reqd} < |E| \text{ lub } U_{reqd} < U_V < |E| \quad (1.29)$$

metryka walidacji U_V (czyli niepewność porównania) jest poniżej poziomu wartości błędu porównania E , więc błąd ten jest powyżej poziomu szumu, co oznacza, że jest możliwe oszacowanie błędów modelu δ_{SMA} poniżej poziomu niepewności U_V .

Patrick Roache podobnie jak Oberkampf i Trucano nie definiuje konkretnych metod czy procedur, które są rekomendowane, a w zamian za to przedstawia kilkadziesiąt przypadków walidacji symulacji numerycznej i udziela cennych wskazówek, które mogą być przydatne zarówno przy badaniach eksperymentalnych, jak i przy porównywaniu tych wyników z rezultatami symulacji numerycznej. Uważa, że walidacja jest ściśle związana z dziedziną badań, których dotyczy, dlatego tylko ogólne spostrzeżenia są możliwe. Ze względu na to, iż walidacja wymaga przeprowadzenia badań doświadczalnych, należy być świadomym jakie metody eksperymentalne się wykorzystuje, znać ich ograniczenia i nie traktować rezultatów eksperymentalnych jako nieomylnych, co jest częstym błędem popełnianym przez osoby wykonujące obliczenia numeryczne, jak przyznaje Roache. Uważa, że pojedyncze pomiary eksperymentalne wykonane w celu walidacji symulacji numerycznej powinny być brane pod uwagę z dużą ostrożnością, ze względu na ograniczenia aparatury pomiarowej. Z tego względu zaleca, aby pomiary eksperymentalne przeprowadzać niezależnie kilka razy oraz najlepiej przeprowadzać je niezależnie w różnych miejscach z wykorzystaniem za każdym razem innego sprzętu, a jeśli to możliwe to pomiary powinny być przeprowadzane przez różne osoby. Autor przytacza kilka przykładów, w których nieprawidłowo wykonane pomiary eksperymentalne spowodowały negatywną walidację modelu, a po kilku latach okazało się, że model był poprawny, a błąd tkwił w nieodpowiednio przeprowadzonych eksperymentach (Aeschliman and Oberkampf [51]). Wymienia, że głównym powodem braku zgodności pomiędzy rezultatami obliczeń numerycznych a wynikami badań eksperymentalnych jest: nieodpowiednie odwzorowanie geometrii, procedury redukcji danych oraz pominięcie istotnego zjawiska fizycznego. Roache zgodził się z Marvinem [52], który uznał za niezbędną ocenę dokładności danych eksperymentalnych oraz określił, że zgodność z eksperymentem może być określona na poziomie nie większym niż oszacowana niepewność pomiarowa rezultatów doświadczalnych. Obaj autorzy zarekomendowali analizę niepewności jako dobrze ugruntowaną metodę oszacowania niepewności pomiarów eksperymentalnych (Moffat [53], Coleman i Steele [10]). Roache podzielił błędy, które należy oszacować w pomiarach eksperymentalnych na błędy dokładności (*ang. precision errors*) oraz błędy systematyczne (*ang. bias errors*). Uznali również, że dużo łatwiej zidentyfikować i oszacować błędy dokładności a niżeli błędy systematyczne. Roache zgodził się z Colemanem [23] odnośnie możliwych źródeł błędów systematycznych i wymienił wśród nich: procesy kalibracyjne, obróbkę danych eksperymentalnych, procedury redukcji danych oraz technikę testowania sprzętu jako potencjalne zagrożenia.

Kolejna wskazówka Roache na temat procedury walidacji dotyczy kolejności wykonywania pomiarów eksperymentalnych w stosunku do powstania modelu fizycznego. Według niego konceptualny model fizyczny dla celów obliczeń powinien zostać zdefiniowany przed przystąpieniem do pomiarów eksperymentalnych, ponieważ walidacją ma na celu określić jego poprawność. Podobnie jak Oberkampf, uznał, że walidację skomplikowanych procesów inżynierskich należy prowadzić poprzez kaskadowe rozbitcie na mniejsze podukłady, następnie podukłady na przypadki wzorcowe i jeśli zachodzi konieczność podzielić przypadki wzorcowe na problemy jednostkowe. Dzięki czemu otrzymujemy procesy, układy, a w szczególności przepływy mniej skomplikowane i prostsze do zamodelowania numerycznie jak i eksperymentalnie. Otrzymane problemy są bardziej ogólne, mają teoretyczny charakter, jednakże z drugiej strony możliwość bezpośredniego wykorzystania takich modeli z wszystkimi przyjętymi uproszczeniami jest mała, a co za tymi idzie wiarygodność obliczeń dla całego skomplikowanego procesu spada. Toteż często postuluje się, że analiza takich problemów jednostkowych nie jest wystarczająca do przeprowadzenia skutecznej walidacji, ale jest niezbędna.

Roache również zwrócił uwagę na częsty brak wystarczających danych dla własności materiałowych, które wpływają zarówno na wyniki eksperymentu, jak i wyniki modelowania numerycznego. Uczulił, aby zapewnić maksymalną zgodność warunków brzegowych i

początkowych pomiędzy pomiarami eksperymentalnymi, a założeniami przyjętymi w modelu numerycznym. Stwierdził, że nawet najprostsze typy warunków brzegowych są z trudem realizowane w warunkach laboratoryjnych.

Roache uważa, że głównym źródłem braku zgodności pomiędzy rezultatami badań doświadczalnych, a wynikami symulacji numerycznej jest brak świadomości przyjętych w symulacjach założeń. Określił, że należy rozważyć, czy przepływ jest lepki czy nielepki, ściśliwy czy nieściśliwy, płyn newtonowski czy nienewtonowski, należy umieć określić charakter przepływu (laminarny, przejściowy, turbulentny), zidentyfikować czy mają miejsce reakcje chemiczne, wyróżnić dodatkowe zjawiska, które mogą zachodzić oraz wiedzieć, jakie człony równań modelu odpowiedzialne są za przyjęte założenia.

Metodologia walidacji zaproponowana przez Oberkampfa i Trucano oraz rekomendowana przez Roache o rozbijaniu skomplikowanych układów na prostsze (ang. building-block technique), dla których można uzyskać wiarygodne dane eksperymentalne zapoczątkowała powstawanie baz danych, które zawierają dokładny opis przeprowadzonych eksperymentów wraz z uzyskanymi rezultatami. Przykładami takich baz są dostępne w sieci bazy stworzone przez ERCOFTAC [54], NAS Data Set Archive [55], QNET-CFD [56], ASME [57], NPARC Alliance Validation Archive [9]. Próbę stworzenia takiej bazy dla procesów odlewniczych podjęto również niedawno w IPPT PAN [123]. Podobnym sposobem walidacji jest uczestnictwo lub skorzystanie z wyników konferencji, spotkań na temat walidacji konkretnych typów przepływów. Przykładami takich spotkań są WUA Benchmark 1994 [58], WUA Benchmark 1996 [59], Stanford Turbulence Olympics [6], AGARD 1998 (NATO Advisory Group for Aeronautical Research and Development) [5], EURO THERM Seminars [8]

1.3. Przegląd literatury

Ze względu na to, iż w poprzednich rozdziałach została przedstawiona literatura dotycząca terminologii i metodologii weryfikacji i walidacji w poniższym przeglądzie ograniczę się do przeglądu prac opisujących rozwiązania numeryczne, w tym rozwiązań wzorcowych oraz wyników eksperymentalnych, a także rozważań teoretycznych przepływów lepkich i termicznych, których dotyczy niniejsza praca. Klasa ta obejmuje przepływ konwekcyjny, a w głównej mierze skupię się na przeglądzie literatury dotyczącej przepływów w obszarach ograniczonych (różnicowo grzany sześciąt), wywołanych gradientem temperatury pomiędzy przeciwległymi izotermicznymi ściankami.

Najbardziej znanym, a zarazem najczęściej używanym wzorcem numerycznym do weryfikacji poprawności symulacji numerycznych obejmujących przepływy z konwekcją naturalną jest wzorec zdefiniowany przez Grahama de Vahl Davisa prawie 20 lat temu [15]. Podał on wzorcowe rozwiązanie numeryczne, dotyczące płaskiego przepływu w różnicowo grzanym kanale. Przepływ wywołany jest gradientem temperatur pomiędzy dwoma przeciwległymi pionowymi krawędziami izotermicznymi, podczas gdy pozostałe dwie poziome krawędzie zostały przyjęte jako adiabatyczne. Rozwiązanie wzorcowe obejmuje cztery rozwiązania stanów stacjonarnych dla liczb Rayleigha od 10^3 do 10^6 , oraz stałej liczby Prandtla równej 0.71. Wartość liczby Prandtla odpowiada przypadkowi fizycznemu w którym powietrze wykorzystane byłoby jako medium. Do rozwiązania równań Naviera – Stokesa w sformułowaniu transportu wirowości wraz z równaniem przewodnictwa cieplnego, opisujących przepływ w powyżej opisanej geometrii wykorzystany został schemat różnic centralnych drugiego rzędu do aproksymacji wszystkich pochodnych. W celu otrzymania dokładnych rozwiązań zastosowane równomierne zagęszczanie siatek kartezyjskich. Rozwiązania zostały otrzymane dla siatek 11x11, 21x21, 41x41 oraz 81x81. Jako rozwiązania wzorcowe zostały podane wartości liczby Nusselta, których stabilność wzdłuż prostych łączących przeciwległe krawędzie adiabatyczne była analizowana, wraz z maksymalną wartością funkcji prądu, maksymalnymi wartościami prędkości pionowej i poziomej wraz z położeniami tych wartości. Wzorcowe wartości zostały otrzymane na podstawie ekstrapolacji Richardsona, analizując wyniki dla najgęstszych siatek. Błąd numeryczny w tych wartościach został oszacowany jako 0.1 %, 0.2 %, 0.3 % oraz 1 % odpowiednio dla liczb $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ oraz 10^6 .

Rozwiązanie otrzymane przez de Vahl Davisa zostało potwierdzone przez Hortmanna, Perica i Scheuerera [40], którzy dostarczyli rozwiązania wzorcowego z oszacowaniem błędu numerycznego mniejszym niż 0.01 %. Rozwiązali oni problem opisany powyżej wykorzystując metodę objętości skończonych wraz z zastosowaniem metody wielosiatkowej (ang. multigrid method). Zadanie zostało rozwiązane przy użyciu niejednorodnych siatek o rozmiarach 10x10, 20x20, 40x40, 80x80, 160x160, 320x320 oraz 640x640. Siatki konstruowano przez ich stopniowe zagęszczenie w kierunku krawędzi bocznych. Rozwiązania na rzadszych siatkach były wykorzystywane do otrzymania rozwiązań na gęstszych siatkach, wykorzystując metodę wielosiatkową, dzięki czemu czas obliczeń wydłużył się jedynie o 1%. Porównanie metody wielosiatkowej ze zwykłym jednorodnym zagęszczaniem siatki wykazało, że czas obliczeń przy pomocy metody wielosiatkowej rośnie liniowo wraz z zagęszczaniem, co jest dużo wydajniejsze niż kwadratowy przyrost czasu obliczeń otrzymany dla standardowej metody zagęszczania. Wykorzystano schematy różnic centralnych do aproksymacji członów konwekcyjnych, jak i dyfuzyjnych w wyniku czego cała metoda cechowała się kwadratowym rzędem zbieżności. Jako rozwiązania wzorcowe podano, podobnie jak zrobił to de Vahl Davis, wartości liczby Nusselta, oraz wartości prędkości i temperatury w pojedynczych punktach obszaru obliczeniowego.

Uzupełnienie rozwiązania zdefiniowanego przez Grahama de Vahl Davisa o rozwiązania stacjonarne dla wyższych liczb Rayleigha równych 10^7 oraz 10^8 podał Patric Le Quere [16]. Zastosował on do tego celu pseudo – spektralną metodę, wykorzystując do aproksymacji wielomiany Czebyszewa. W celu otrzymania dokładnych rozwiązań zostały wykorzystane przestrzenie aproksymacyjne złożone z wielomianów do 128 stopnia. W celu określenia zbieżności analizowano nie tylko liczbę Nusselta ale również zachowawczość masy i pędu. Ponadto wykonano obliczenia pomocnicze polegające na obliczeniu funkcji prądu i wirowości, w celu analizy jakościowej struktury przepływu wraz ze wzrostem liczby Rayleigha. Rozwiązania wzorcowe obejmowały wartości liczby Nusselta, wartości ekstremalne funkcji prądu, prędkości poziomej i pionowej. Otrzymane wyniki zostały porównane z dostępnymi rezultatami dla liczb $Ra = 10^6 - 10^7$, otrzymanymi przez Upsona i Greso [60], Quona [61], Wintersa [62], Lauriata i Altimira [63], Chenowetha i Paolucciego [64] oraz Haldenwanga i Labrossa [65].

Powyższe prace są w większości cytowane jako rozwiązania referencyjne i przy pomocy tych rozwiązań weryfikuje się obliczenia dotyczące konwekcji naturalnej. Jednakże dokładna ilościowa walidacja opisanej powyżej konfiguracji (porównanie z wynikami doświadczalnymi) nie jest możliwa, ze względu na liczbę $Pr = 0.71$, co pociągało by za sobą wykorzystanie powietrza jak medium w badaniach eksperymentalnych. Toteż w celu wykonania porównań symulacja numeryczna versus eksperyment wybrano podobną konfigurację, jeśli chodzi o geometrię i warunki brzegowe z tą różnicą, że wykorzystano wodę jako substancją roboczą. Wyniki numeryczne i eksperymentalne dotyczące takiej konfiguracji zostały zaproponowane w pracy Kowalewskiego i Rebowa [125] oraz Banaszka i współautorów [66], jako test weryfikacyjny i walidacyjny do problemów modelowania krzepnięcia wody w sześcienniej geometrii. Użycie cieczy jako medium jest korzystniejsze ze względu na możliwość dokładniejszego kontrolowania warunków eksperymentalnych, w tym termicznych warunków brzegowych. Szczególnie trudne jest zapewnienie w konfiguracjach eksperymentalnych warunku adiabatyczności ścianek. Ilościowe dane eksperymentalne wskazujące na istotność poprawnego określenie termicznych warunków brzegowych zostały do powyższej konfiguracji ($Ra = 10^4 - 10^6$, $Pr = 13.31$) zaprezentowane w pracach Kowalewskiego [67,68,126] oraz Hillera [69]. W pomiarach wykorzystano nowatorskie jak na owe czasy cyfrowe techniki wizualizacyjne, takie jak cyfrowa anemometria obrazowa (PIV) oraz cyfrowa termometria obrazowa (PIT). Konwekcja wody w pobliżu punktu zamarzania stwarza dodatkową interesującą modyfikację struktury przepływu. Ze względu na nieliniową zmianę gęstości wody w przedziale (tj. $0^{\circ}C - 10^{\circ}C$) wybrana do analizy konfiguracja eksperymentalna charakteryzuje się układem dwóch wirów przeciwnie skierowanych, tworzących kolidujące ze sobą strumienie ciepłej i zimnej cieczy. Stanowi to ciekawy wzorzec eksperymentalny, który musi być modelowany z zachowaniem szczególnej dokładności aby otrzymać zadawalające rezultaty. W pracy Kowalewskiego i Giangli [70,71], zbadano wrażliwość tego modelu na zmiany własności

materiałowych, poprzez porównanie rozwiązań dla stałych wartości materiałowych z rozwiązaniami w których własności materiałowe są funkcjami temperatury. W wyniku obliczeń numerycznych stwierdzono dużą wrażliwość na zmiany w lepkości, i mniejszą na zmiany ciepła właściwego i przewodności cieplnej. Opisana powyżej konfiguracja badana była przez Kowalewskiego i Rebova [68] w celu określenia wpływu przewodzenia ciepła przez ścianki boczne, modelowane jako adiabatyczne. Porównano rozwiązanie generowane dla adiabatycznych ścianek z takim, które uwzględnia przewodzenie ciepła w tych ściankach stwierdzając, że struktura przepływu w pobliżu lewej ścianki ulega istotnej zmianie w zależności od przyjętego warunku brzegowego. Numeryczne rozwiązania przepływu wody w różnicowo grzonym sześciacie zostało też przedstawione przez Zubkova i Kalbina [72] dla liczb Grashofa od 2.9×10^4 do 10^6 , na tej podstawie zidentyfikowano jeden stan stacjonarny i trzy samo-oscylujące. Nieliniową anomalia gęstości została zamodelowana tam poprzez zastosowanie formuły Gebharta-Moldendorfa [73], jednakże obliczenia nie zostały porównane z wynikami eksperymentalnymi.

Określenie reżimu stacjonarności przepływu w różnicowo grzonym sześciacie było przedmiotem badań Paolucciego i Chenowetha [64] oraz Le Quere i Behnii [17]. Określili oni zerwanie stacjonarności dla krytycznej liczby $Ra \approx 2 \times 10^8$. Badanie te oparte były na symulacji numerycznej metodą DNS (Direct Numerical Simulation), przeprowadzonej z wykorzystaniem wielomianów Czebyszewa do aproksymacji przestrzennej (wykorzystano tę samą aproksymację co do podania rozwiązania wzorcowego [16] opisanego powyżej). Badano zachowanie się współczynników w aproksymacji Czebyszewa, przy jednoczesnym zwiększaniu liczby Rayleigha i jako kryterium zmiany charakteru przepływu, przejścia od stanu stacjonarnego do stanu niestacjonarnego, przyjęto złamanie symetrii przepływu. Wyznaczone zostały pola fluktuacji temperatur oraz ich charakterystyczny charakter falowy. Analogiczne symulacje numeryczne z wodą jako medium robocze zostały później przedstawione przez Le Quere [74] w podłużnych geometriach prostokątnych. ($Ra = 10^7-10^8$, $Pr = 7$, $A = 1,4,10$). Analiza struktury przepływu, w szczególności fluktuacji termicznych i prędkości powiązały początek niestabilności z pojawieniem się niestabilności termicznej warstwy przyściennej. W pracy tej przeanalizowano wpływ przepływu niestacjonarnego na współczynnik przejmowania ciepła oraz zauważono rozbieżność pomiędzy rezultatami uzyskanymi w tych obliczeniach, a klasyczną analizą stabilności dla warstw przyściennych. Badania te oparte były jedynie na wynikach symulacji numerycznej dla dwuwymiarowego przypadku, wykonanie pomiarów eksperymentalnych w podobnych geometriach i porównanie rezultatów mogłoby pozwolić na walidację tych obliczeń.

Pierwsza teoretyczna praca na temat konwekcji naturalnej w zamkniętych geometriach (kwadrat, prostokąt) została opublikowana przez Pattersona i Imberga [75]. Przy pomocy analizy wymiarowej wyróżniono sześć różnych reżimów przepływu w zależności od wartości liczb bezwymiarowych Ra , Pr i stosunku boków obszaru (*ang. aspect ratio*). Analiza wymiarowa dla tego przypadku została podana przez Bejana [76], który na jej podstawie wyprowadził wzory na grubość termicznej warstwy przyściennej, maksymalną wartość prędkości poziomej przy aktywnej (cieplej lub zimnej) ścianie, grubość przyściennej warstwy kinematycznej wzdłuż ścianki, charakterystycznego czasu osiągnięcia stanu stacjonarnego oraz oszacowania liczby Nusselta w zależności od liczb Ra i Pr . Potwierdzenie wyników otrzymanych przy pomocy analizy wymiarowej zostało wykonane poprzez Schladow, Pattersona, i Streeta [77], poprzez dostarczenie rezultatów obliczeń numerycznych, a później również przez porównanie tych wyników z pomiarami eksperymentalnymi wykonanymi przez Pattersona i Armfielda [78] dla różnicowego grzanego sześcianu wypełnionego wodą ($Ra = 2 \times 10^9$). Jednakże uzyskane wyniki eksperymentalne i numeryczne mogły być tylko porównane jakościowo, ze względu na ograniczenia zastosowanej techniki eksperymentalnej oraz niewielką liczbę danych ilościowych (punktowe pomiary temperatury). Kilka wspólnych dla symulacji numerycznej cech przepływu zostało jednak zidentyfikowanych: obecność niestabilności falowych, obecność oscylacji w termicznej warstwie przyściennej, obecność struktur wirowych w rogach sześcianu oraz oscylacyjne dochodzenie do stanu stacjonarnego. Początkowa faza tworzenia się warstwy przyściennej, której towarzyszy powstawanie fal została zanalizowana przez Armfielda i Pattersona [79] metodą bezpośredniej

symulacji numerycznej (DNS) oraz analizy stabilności. Badana przez nich konfiguracja dotyczyła liczb $Ra = 6 \times 10^8$ i $Pr = 7.5$, $Ra = 5.4 \times 10^8$ i $Pr = 13$ oraz $Ra = 6.2 \times 10^8$ i $Pr = 18$. Stwierdzili oni, że początkowa faza przepływu może być opisana na podstawie analizy wymiarowej, ponieważ wartości określające grubość termicznej warstwy przyściennej są zgodne z modelem asymptotycznym, jednakże wraz z upływem czasu wpływ ścianek adiabatycznych jest zauważalny i uzyskane rezultaty zaczynają się różnić. Analiza stabilności potwierdziła możliwość istnienia fal biegnących o prędkości większej niż średnia prędkość w przepływie. Proces początkowego rozwoju konwekcji naturalnej został przestudiowany również eksperymentalnie dla powyższych konfiguracji, przy pomocy badań eksperymentalnych, przez wykorzystanie do wizualizacji metody cieniowej (ang. shadowgraph technique). Otrzymane serie zdjęć pozwalają zidentyfikować dwie grupy fal biegnących. Pierwsza grupa została powiązana z powstaniem gradientu temperatur, a druga na skutek oddziaływania pierwszej ze ścianką. Eksperymenty te przeprowadzone były w celu zbadania właściwości termicznej warstwy przyściennej, jednakże poza grubością tej warstwy, żadne inne wyniki ilościowe nie zostały podane. W kolejnej pracy Schopf i Paterson [80] przy użyciu tej samej techniki, opisali stopniowe zanikanie fal biegnących na skutek stratyfikacji temperatury, prowadzące do osiągnięcia stanu stacjonarnego. Opisano dokładnie proces rozpraszania się fal, który trwał dłużej w porównaniu z procesem powstawania niestabilności, jednakże również nie podano żadnych danych ilościowych. Głównym celem opisanych powyżej prac eksperymentalnych nie była jednak walidacja symulacji numerycznej a jedynie chęć zidentyfikowania i jakościowego opisu zjawisk. Były to więc eksperymenty poznawcze, a nie walidacyjne. Z uwagi na ograniczone możliwości eksperymentalne w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych, brak pełnych danych ilościowych nie może dziwić.

Dopiero na początku lat 90tych wspomniane już wyżej prace Kowalewskiego [67,68,70] dostarczyły pełnych ilościowych danych dotyczących pola prędkości i temperatury. Jednakże zostały one otrzymane dla dosyć niskich liczb $Ra = 10^4 - 10^6$. Wykorzystano w nich metodę cyfrowej analizy obrazów, zaproponowaną przez Hillera i Kowalewskiego [81], technikę jednoczesnego pomiaru prędkości i temperatury, udoskonaloną później technikami cyfrowymi DPIV&T [69], oraz techniką potoków optycznych do analizy przemieszczeń [82,83]. Zastosowanie tych technik pozwoliło na pomiar pełnych dwuwymiarowych pól prędkości i temperatury, wykorzystanych do porównań z symulacjami numerycznymi konwekcji naturalnej, towarzyszącej jej zjawisku krzepnięcia [68,70], oraz przepływu ze swobodną powierzchnią [84,85].

1.4. Zakres i cel pracy

Biorąc pod uwagę przedstawioną motywację oraz przegląd literatury na temat weryfikacji i walidacji symulacji numerycznych można śmiało stwierdzić, iż temat ten jest w ostatnich latach intensywnie badany poprzez różne zespoły naukowców. Weryfikacja i walidacja jako procesy uwiarygodniania obliczeń numerycznych są na drodze do ustalenia standardów, podobnie jak to miało miejsce w przypadku eksperymentalnej mechaniki płynów. Można stwierdzić, że istnieje duże zapotrzebowanie na wiarygodne, dokładne dane eksperymentalne obejmujące różne klasy przepływów oraz widoczny jest brak metodologii, która pozwalałaby jednoznacznie i szybko uwiarygodnić (walidować) obliczenia numeryczne.

W celu przedstawienia zaproponowanej metody oceny wiarygodności symulacji numerycznych oraz zademonstrowania przykładowego procesu weryfikacji i walidacji dla przepływów lepkich i termicznych przy pomocy tej metody, zdecydowano się na:

1. Stworzenie programu numerycznego do modelowania przepływów lepkich i termicznych, poddania go weryfikacji (uwzględniając metody opisane w rozdziale 1.2.2). W tym celu wykorzystana zostanie zarówno klasyczna metoda różnic skończonych, jak i nowatorska metoda bezsiatkowa (Rozdział 2)
2. Zdefiniowanie wzorca numerycznego dla przedmiotowej klasy przepływów obejmującego konwekcję naturalną wody w różnicowo grzany kanal oraz dostarczenie referencyjnego rozwiązania. Porównanie różnych metod i algorytmów numerycznych. (Rozdział 2)

3. Zaproponowanie metody uwiarygodniania przepływów lepkich i termicznych, opartej na analizie wrażliwości, do określenia najodpowiedniejszej konfiguracji w celu przeprowadzenia walidacji eksperymentalnej symulacji numerycznej, określenia istotnych parametrów dla konkretnej konfiguracji eksperymentalnej oraz dokładności pomiarów z jaką należy je przeprowadzić. (Rozdział 3)
4. Przeprowadzenie eksperymentu oraz zdefiniowanie wzorca eksperymentalnego dla przepływów lepkich i termicznych. Dostarczenie jakościowych i ilościowych danych do przeprowadzenia walidacji, w oparciu o cyfrowe techniki analizy obrazów (PIV, PIT). Dostarczenie danych eksperymentalnych charakteryzujące przejście od stanu stacjonarnego do niestacjonarnego, będących uzupełnieniem literaturowych badań numerycznych [17]. (Rozdział 4)
5. Walidację obliczeń numerycznych z wykorzystaniem kilku konfiguracji eksperymentalnych, zaprezentowanie skuteczności metody oceny wiarygodności symulacji numerycznej do identyfikacji istotnych parametrów dla przepływu oraz określenie tych parametrów symulacji numerycznych przy których układy te charakteryzują się większą wiarygodnością. (Rozdział 5)

2. Weryfikacja symulacji numerycznych przepływów lepkich i termicznych

W rozdziale tym przedstawiono krótkie wprowadzenie dotyczące matematycznego sformułowania modelu stosowanego przy symulacji przepływów lepkich i termicznych. Następnie zostały zwięźle opisane metody numeryczne, które zostały wykorzystane do stworzenia programów analizujących przedmiotowe przepływy. Przedstawiony został szczegółowy opis programów oraz proces ich weryfikacji. Na koniec zdefiniowano wzorzec numeryczny, który może służyć do weryfikacji programów analizujących przepływy lepkie i termiczne oraz przeprowadzono porównanie efektywności i dokładności różnych programów z wykorzystaniem zdefiniowanego wzorca.

2.1. Matematyczne sformułowanie problemu

Punkt wyjścia dla numerycznej mechaniki płynów dla omawianej klasy przepływów stanowią zasady zachowania masy, pędu i energii. Dla otwartego i spójnego obszaru $\Omega \subset R^3$ można zapisać powyższe zasady w kartezjańskim układzie współrzędnych $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ następująco:

- zasada zachowania masy:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\bar{x}, t) d\Omega = 0 \quad (2.1)$$

- zasada zachowani pędu:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\bar{x}, t) \bar{v}(\bar{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho(\bar{x}, t) \bar{f}(\bar{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \bar{f}_{pow}(\bar{x}, t) dS \quad (2.2)$$

- zasada zachowania energii:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\bar{x}, t) e_c(\bar{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho(\bar{x}, t) \bar{f}(\bar{x}, t) \bar{v}(\bar{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \bar{f}_{pow}(\bar{x}, t) \bar{v}(\bar{x}, t) dS - \int_{\partial\Omega(t)} \bar{q}(\bar{x}, t) \bar{n}(\bar{x}, t) dS \quad (2.3)$$

Powyższe równania (2.1)-(2.3) zakładają brak źródeł i upustów masy, pędu oraz mocy cieplnej w obszarze Ω . Równania (2.1)-(2.3) z postaci całkowej można przekształcić do postaci równań różniczkowych korzystając z twierdzenia Reynoldsa o transporcie (szczegółowe wyprowadzenie można znaleźć w pracach [86,87], poniżej przedstawione są istotne założenia przy tego typu przekształceniu).

Dla naszych potrzeb przyjęto założenie o nieściślności i stałej wartości lepkości dynamicznej

$$\rho(\bar{x}, t) = \rho = const \quad (2.4)$$

$$\mu(\bar{x}, t) = \mu = const \quad (2.5)$$

oraz wykorzystano fakt, iż siły powierzchniowe $\bar{f}_{pow}(\bar{x}, t)$ można wyrazić przy pomocy tensora naprężeń $\sigma(\bar{x}, t)$

$$\bar{f}_{pow}(\bar{x}, t) = \bar{\sigma}(\bar{x}, t) \bar{n}(\bar{x}) \quad (2.6)$$

Tensor naprężeń można z kolei wyrazić poprzez konstytutywny związek dla płynów newtonowskich

$$\bar{\sigma} = -\left(p + \frac{2}{3} \mu \text{div} \bar{v}\right) \bar{I} + 2\mu \bar{\bar{v}} \quad (2.7)$$

przy pomocy tensora prędkości deformacji $\bar{\bar{v}}$

$$\bar{\bar{v}} = \frac{1}{2} (\nabla \bar{v} + (\nabla \bar{v})^T) \quad (2.8)$$

oraz tensora jednostkowego \bar{I} , co w rezultacie pozwala na zapisanie równań (2.1)-(2.2) w postaci równań różniczkowych cząstkowych, które nazywane są równaniami Naviera-Stoksa:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f} \quad (2.10)$$

Przekształcenie równania (2.3) do postaci różniczkowej wymaga przyjęcia kolejnego związku konstytutywnego określającego gęstość przewodzonego strumień ciepła \vec{q} przez brzeg obszaru $\partial\Omega$. Przykładem takiego związku jest prawo Fouriera, które można zapisać następująco:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \quad (2.11)$$

Wykorzystując prawo Fouriera oraz zakładając stałe wartości ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu c_p (2.12), przewodnictwa cieplnego κ (2.13), lepkości dynamicznej μ (2.5)

$$c_p(\vec{x}, t) = c_p = \text{const} \quad (2.12)$$

$$\kappa(\vec{x}, t) = \kappa = \text{const} \quad (2.13)$$

oraz zakładając brak źródeł mocy cieplnej i brak zmian energii wskutek sił masowych, można równanie (2.3) zapisać w formie różniczkowej następująco:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p (\nabla T) \vec{v} = \kappa \Delta T + 2\mu \operatorname{tr}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (2.14)$$

Ostatni człon po prawej stronie określa dyssypację energii wewnętrznej spowodowaną siłami lepkości i jest zazwyczaj pomijany przy modelowaniu przepływów konwekcyjnych.

Równania (2.10) dla przepływów konwekcyjnych jest powiązane z równaniem (2.13) poprzez postać członów sił masowych \vec{f} . Założenie stałej wartości gęstości ρ w równaniach Naviera – Stoksa (2.9)-(2.10) we wszystkich członach za wyjątkiem członów sił masowych \vec{f} prowadzi do uproszczenia zwanego modelem Boussinesqua. Zmiana gęstości płyny wraz z temperaturą, na ogół liniowa, w członie sił masowych odpowiedzialna jest za generację przepływów konwekcyjnych. Przy przyjęciu liniowej zależności zmian gęstości od temperatury, człon sił masowych można zapisać jako:

$$\vec{f} = \rho \beta \vec{g} (T - T_{ref}) \quad (2.15)$$

W przypadku, gdy zmiana gęstości w funkcji temperatury nie jest liniowa człon ten musi zawierać jawnie podaną zależność gęstości od temperatury postaci:

$$\vec{f} = \vec{g} \rho(T) \quad (2.16)$$

Pełen układ równań różniczkowych opisujących nieściśliwe przepływy lepkie i termiczne dla potrzeb niniejszej pracy z uwzględnieniem powyższych założeń (2.4)-(2.8), (2.12)-(2.13) można przedstawić następująco:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (2.17)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f} \quad (2.18)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p (\nabla T) \vec{v} = \kappa \Delta T \quad (2.19)$$

Układ równań (2.17)-(2.19) stanowi punkt wyjścia dla metod numerycznych opisanych w następnych podrozdziałach. Wektor sił masowych \vec{f} przyjmuje postać (2.15) lub (2.16) w zależności od własności termo-fizycznych cieczy modelowej. Niewiadomymi są zazwyczaj trzy składowe prędkości $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ciśnienie p oraz temperatura T .

Poprawne sformułowanie zadania wymaga dodatkowo podania odpowiednich warunków brzegowych określających prędkość i temperaturę, które ogólnie mogą zostać sklasyfikowane następująco:

- warunek brzegowy I rodzaju (warunek Dirichleta)

$$T = T_c \quad \text{na} \quad \partial\Omega_* \quad (2.20)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_i \quad \text{na} \quad \partial\Omega_* \quad (2.21)$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega_* \quad (2.22)$$

- warunek brzegowy II rodzaju (warunek von Neumanna)

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega_* \quad (2.23)$$

- warunek brzegowy III rodzaju (warunek mieszany)

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_{ext}) \quad \text{na} \quad \partial\Omega_* \quad (2.24)$$

Typ warunków brzegowych jest dostosowany do wykorzystywanej geometrii obliczeniowej i fizycznego charakteru problemu. Warunki brzegowe określające prędkość definiuje się zazwyczaj przy pomocy warunków I rodzaju (2.21) – (2.22), natomiast do określenia warunków na temperaturę wykorzystuje się wszystkie trzy rodzaje (2.20),(2.23),(2.24). Termiczne warunki brzegowe oraz warunki brzegowe na prędkość zdefiniowane są na pewnych podobszarach $\partial\Omega_*$ pokrywając cały brzeg domeny obliczeniowej $\partial\Omega$. Równania różniczkowe z warunkami brzegowymi oraz warunkami początkowymi na prędkość v_0 i temperaturę T_0 w obszarze Ω stanowią problem początkowo – brzegowy, który jest przedmiotem rozważań numerycznej mechaniki płynów dla omawianej klasy przepływów.

2.2. Metoda różnic skończonych (SOLVSTR)

W rozdziale tym przedstawiono opis metody różnic skończonych wykorzystanej do stworzenia programu SOLVSTR. Program ten rozwiązuje równania Naviera – Stoksa przetransformowane do równań na wirowość i funkcję prądu wraz z równaniem przewodnictwa ciepła. Opisano zastosowane metody i schematy numeryczne, a także przedstawiono proces weryfikacji programu przy pomocy istniejących wzorców numerycznych dla przepływów lepkich i termicznych.

2.2.1. Opis metody

Bezpośrednie rozwiązywanie numeryczne równań Naviera – Stoksa dla przepływów nieściśliwych jest utrudnione ze względu na postać członu ciśnieniowego. Występuje w nim gradient ciśnienia, który jest niewiadomą. Z tego względu ciśnienie musi zostać wyliczone przy pomocy równania (2.9), w którym w sposób jawny nie występuje. Problem ten jest kluczowy i nie trywialny przy rozwiązywaniu równań Naviera – Stoksa toteż stworzono szereg metod, które polegają na przekształceniu równań (2.9)-(2.10) do postaci nie zawierającej w sposób jawny ciśnienia. Jedną z nich jest metoda, wykorzystana w programie SOLVSTR, która polega na transformacji równań (2.9)-(2.10) do równań na wirowość ω oraz funkcję prądu ψ . Wirowość ω definiuje się następująco:

$$\vec{\omega} = \text{rot}\vec{v} \quad (2.25)$$

Dla przepływów płaskich wirowość ma jedną składową i przedstawiona jest dalej w postaci skalarnej. Natomiast funkcja prądu ψ dla przepływów płaskich jest funkcją skalarną dwóch zmiennych spełniających następujące warunki:

$$v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.26)$$

$$v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.27)$$

Dzięki takiemu podstawieniu równanie ciągłości (2.9) jest spełnione tożsamościowo. Obliczając rotację obu stron równania (2.10) otrzymamy równanie ewolucyjne na wirowość zwane równaniem transportu wirowości, które nie zawiera ciśnienia:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \nu \Delta \omega + \text{rot}\vec{f} \quad (2.28)$$

Dodatkowe równanie wiążące wirowość z funkcją prądu otrzymuje się po podstawieniu warunków (2.26)-(2.27) do równania (2.25), otrzymując następującą zależność:

$$-\Delta\Psi = \omega \quad (2.29)$$

Równania (2.28)-(2.29) oraz równanie (2.19) stanowią punkt wyjścia do konstrukcji równań różnicowych, które następnie rozwiązuje się numerycznie. Konieczne jest również przetransformowanie warunków brzegowych na prędkość tak, aby otrzymać warunki brzegowe na wirowość i funkcję prądu. Warunki brzegowe dla funkcji prądu wynikają bezpośrednio z jej definicji, natomiast warunek brzegowy na wirowość jest otrzymywany z równania (2.29) przy założeniu z góry rzędu dokładności. Dla potrzeb programu SOLVSTR została wykorzystana formuła Woodsa [88] drugiego rzędu dokładności.

Kolejnym istotnym etapem budowy programu jest przyjęcie odpowiednich skal bezwymiarowych, które wykorzystuje się do ubezwymiarywania równań (2.28)-(2.29) i (2.19). Wybór ten jest podyktowany charakterem modelowanego przepływu. Opierając się na analizie wymiarowej przeprowadzonej przez Bejana [76] zaimplementowano trzy rodzaje skal bezwymiarowych do transformacji zmiennych wymiarowych do bezwymiarowych. Okazuje się bowiem, iż odpowiednie przyjęcie tych skal ułatwia proces numerycznego rozwiązania zadania.

Ze względu na to, iż poprawność programu SOLVSTR zostanie zweryfikowana w oparciu o wzorce numeryczne dotyczące modelowania stacjonarnych płaskich przepływów konwekcyjnych dla geometrii w kształcie kwadratu o długości L , w którym ruch wywołany jest na skutek różnicy temperatur $\Delta T = T_h - T_c$ pomiędzy przeciwległymi pionowymi bokami kwadratu, zdecydowano się, na podstawie analizy wymiarowej [76], zaimplementować dwa różne typy skal bezwymiarowych dla przepływów lepkich i termicznych. Pierwsza skala jest właściwa gdy różnica temperatur ΔT jest niewielka, a wynikowy stan stacjonarny charakteryzuje się równowagą pomiędzy konwekcją a przewodnictwem. Wtedy człon konwekcyjny i przewodnościowy w równaniu (2.19) są podobnego rzędu. Wychodząc z tej zależności można otrzymać następujące zmienne bezwymiarowe:

$$\theta = (T - T_c)/(T_h - T_c) \quad X_1 = x_1/L \quad X_2 = x_2/L \quad V_1 = \rho c_p v_1 L / \kappa \quad V_2 = \rho c_p v_2 L / \kappa \quad (2.30)$$

W przypadku gdy różnica temperatur ΔT jest duża, a lepkość płynu jest niewielka tworzą się warstwy przyścienne wzdłuż pionowych krawędzi. Ruch odbywa się jedynie w pobliżu krawędzi, toteż zakładamy iż, człon wypornościowy musi równoważyć człon konwekcyjny w równaniu (2.28). Bezwymiarową skalą dla prędkości jest oszacowana, na podstawie analizy wymiarowej, maksymalna wartość prędkości osiągana wzdłuż pionowych krawędzi. Wtedy zmienne bezwymiarowe mają następującą postać:

$$\theta = (T - T_c)/(T_h - T_c) \quad X_1 = x_1/L \quad X_2 = x_2/L \quad V_1 = \rho c_p v_1 L / \kappa Ra^{\frac{1}{2}} \quad V_2 = \rho c_p v_2 L / \kappa Ra^{\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

Dodatkowo, aby móc przeprowadzić weryfikację kodu przy pomocy wzorca numerycznego zdefiniowanego przez Ghia i współautorów [39] wprowadzono skalę, która jest użyteczna, gdy mamy do czynienia z konwekcją wymuszoną poprzez z góry zadaną wartość prędkości jednej ze ścian \bar{v}^* . Wzorec ten dotyczy rozwiązywania równań (2.28)-(2.29), z wyłączeniem równania energii (2.19), a zastosowanie znajdują następujące zmienne bezwymiarowe:

$$X_1 = x_1/L \quad X_2 = x_2/L \quad V_1 = v_1/v_1^* \quad V_2 = v_2/v_2^* \quad (2.32)$$

Szczegółowe wyprowadzenie powyższych skal oraz wyjaśnienie zasad analizy wymiarowej, która została wykorzystana do ich wyprowadzenia można znaleźć w książce Bejana [76].

Program SOLVSTR został stworzony do analizowania przepływów, które obejmują trzy wymienione wyżej przypadki. Toteż rozwiązywane są następujące bezwymiarowe równania (2.33)-(2.35) z stałymi $F_1, F_2, F_3, K_1, K_2, P_1, P_2, P_3, B$ zgodnie z Tabelą 2.1.

$$F_1 \frac{\partial \omega}{\partial t} + K_1 \left(V_1 \frac{\partial \omega}{\partial X_1} + V_2 \frac{\partial \omega}{\partial X_2} \right) = P_1 \Delta \omega - B \frac{\partial \theta}{\partial X_1} \quad (2.33)$$

$$F_2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = P_2 \Delta \Psi + \omega \quad (2.34)$$

$$F_3 \frac{\partial \theta}{\partial t} + K_2 \left(V_1 \frac{\partial \theta}{\partial X_1} + V_2 \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \right) = P_3 \Delta \theta \quad (2.35)$$

Skala	F_1	F_2	F_3	K_1	K_2	P_1	P_2	P_3	B
(2.30)	$1/\gamma_\omega$	$1/\gamma_\psi$	$1/\gamma_\theta$	$1/Pr$	1	1	1	1	Ra
(2.31)	$1/\gamma_\omega$	$1/\gamma_\psi$	$1/\gamma_\theta$	$Ra^{1/2}/Pr$	$Ra^{1/2}$	1	1	1	$Ra^{1/2}$
(2.32)	$1/\gamma_\omega$	$1/\gamma_\psi$	-	Re	-	1	1	-	0

Tabela 2.1. Zestawienie wykorzystanych skal bezwymiarowych w programie SOLVSTR

Poprzez ubezwymiarywanie problem konwekcji naturalnej dla płaskiej geometrii o kształcie kwadratu można zdefiniować podając dwie bezwymiarowe liczby: liczbę Rayleigha ($Ra = \rho^2 c_p g \beta \Delta T L^3 / \mu \kappa$), która określa stosunek sił wypornościowych do sił lepkościowych oraz liczbę Prandtla ($Pr = \mu c_p / \kappa$), która charakteryzuje płyn. Przy modelowaniu przepływu z pominięciem zjawisk cieplnych wystarczy określić liczbę Reynoldsa (Re), która określa stosunek sił bezwładności do sił lepkościowych.

W przypadku gdy poszukiwanym stanem dla powyższych równań (2.33)-(2.35) jest stan stacjonarny stałe F_1, F_2, F_3 zawierają współczynniki relaksacyjne $1/\gamma_\omega, 1/\gamma_\psi, 1/\gamma_\theta$, których wartości nie wpływa na końcowy stan stacjonarny. Z tego względu mogą być tak dobierane by zapewnić optymalną zbieżność iteracyjną. Takie podejście pozwala na bardziej efektywne rozwiązywanie problemu i nosi nazwę metody całkowania w pseudoczasie [89,90] (*ang. false transient method*). Jednakże w przypadku gdy chcemy otrzymać wyniki niestacjonarne wystarczy przyjąć $F_1=F_2=F_3=\rho L^2/\mu$ dla skal (2.30) i (2.32) oraz $F_1=F_2=F_3=\rho c_p L^2/\kappa Ra^{-0.5}$ dla skali (2.31).

Program SOLVSTR wykorzystuje siatki kartezjańskie, równomierne o stałej odległości pomiędzy węzłami siatki równe h (por. rysunek 2.1). Do dyskretyzacji przestrzennej równań (2.33)-(2.35) wykorzystano centralny schemat różnic skończonych (CDS) [89], którego wzory różnicowe dla pierwszej i drugiej pochodnej dla dowolnej funkcji Φ mają następującą postać:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_P = \frac{\Phi_E - \Phi_W}{2h} \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_P = \frac{\Phi_N - \Phi_S}{2h} \quad (2.36)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_P = \frac{\Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W}{h^2} \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_P = \frac{\Phi_N - 2\Phi_P + \Phi_S}{h^2} \quad (2.37)$$

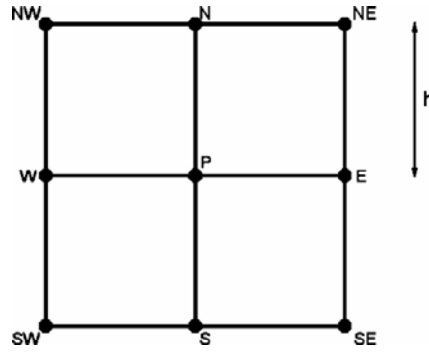
W powyższych wzorach indeks dolny oznacza wartość funkcji Φ w węzle siatki oznaczonym tym indeksem zgodnie z rysunkiem 2.1. Do dyskretyzacji czasowej wykorzystano schemat jawno - niejawni Cranka-Nicolsona [89], który dla ogólnego równania:

$$\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} = f(t, \Phi(t, x)) \quad (2.38)$$

można zapisać następująco:

$$\Phi^{t+1} = \Phi^t + \frac{1}{2} [f(t, \Phi^t) + f(t+1, \Phi^{t+1})] \cdot \Delta t \quad (2.39)$$

Przy pomocy powyższego wzoru można wyliczyć wartość funkcji Φ^{t+1} w kolejnym kroku czasowym na podstawie wartości funkcji Φ^t w poprzednim rozwiązując liniowy układ równań algebraicznych. Zastosowanie wzorów różnicowych (2.36)-(2.37) oraz schematu (2.39) pozwala przekształcić równania (2.33)-(2.35) w trzy układy równań liniowych, które ze względu na wzajemne sprzężenie muszą być rozwiązywane jednocześnie.



Rys. 2.1. Molekuła obliczeniowa

Macierze algebraicznych układów równań liniowych powstałych w wyniku opisanej powyżej dyskretyzacji są rzadkie lecz ich wymiar jest proporcjonalny do ilości węzłów siatki dla każdej niewiadomej funkcji. W przypadku, gdy niewiadomymi są trzy składowe prędkości, ciśnienie i temperatura zachodzi konieczność rozwiązywania kolejno pięciu układów równań o wymiarze proporcjonalnym do ilości węzłów siatki (*ang. segregated algorithm*) lub w przypadku zastosowania algorytmów sprzężonych (*ang. coupled*) jednego układu równań o wymiarze proporcjonalnym do ilość węzłów siatki pomnożonym przez ilość poszukiwanych funkcji (w tym przypadku 5). W obydwu przypadkach zachodzi konieczność rozwiązywania tych równań z wykorzystaniem metod iteracyjnych rozwiązywania równań liniowych. Można wykorzystać na przykład metodę Gaussa – Seidla, jednakże metoda ta charakteryzuje się zbyt dużą złożonością i wolną zbieżnością iteracyjną, toteż zdecydowano się przekształcić każdy z wynikowych układów równań liniowych przy pomocy metody ADI [91] na dwa układy o tym samym wymiarze z trójdiagonalnymi macierzami współczynników. W wyniku otrzymamy sześć układów trójdiagonalnych, które są rozwiązywane algorytmem typu TDMA [89] o złożoności liniowej. Sposób takiej dyskretyzacji zostanie przedstawiony przykładowo dla równania (2.34) dla zagadnienia płaskiego. Równanie to po zastosowaniu schematów (2.37)-(2.38) oraz formuły (2.39) tworzy układ równań liniowych, którego macierz w każdym wierszu ma co najwyżej pięć niezerowych współczynników. Macierz ta może być generowana na bieżąco przechodząc kolejno po węzłach siatki (złożoność takiej operacji jest proporcjonalna do ilości węzłów siatki). Przykładowy wiersz takiej macierzy, uwzględniając notację z Rysunku 2.1. można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{2\gamma_\psi \Delta t}{h^2}\right) \Psi_P^{t+1} - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_N^{t+1} - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_S^{t+1} - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_W^{t+1} - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_E^{t+1} = \\ & \left(1 - \frac{2\gamma_\psi \Delta t}{h^2}\right) \Psi_P^t - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_N^t - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_S^t - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_W^t - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_E^t + \gamma_\psi \omega_P^t \Delta t \end{aligned} \quad (2.40)$$

Równanie (2.40) jest zastępowane dwoma układami równań trójdiagonalnych, zgodnie z metodą ADI, które są rozwiązywane kolejno po sobie. Faktoryzacja równania (2.40) prowadzi do dwóch układów równań postaci:

$$-\frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_W^* + \left(1 + \frac{\gamma_\psi \Delta t}{h^2}\right) \Psi_P^* - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_E^* = \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_N^t + \left(1 - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{h^2}\right) \Psi_P^t + \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_S^t + \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2} \omega_P^t \quad (2.41)$$

$$-\frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_N^{t+1} + \left(1 + \frac{\gamma_\psi \Delta t}{h^2}\right) \Psi_P^{t+1} - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_E^{t+1} = \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_W^* + \left(1 - \frac{\gamma_\psi \Delta t}{h^2}\right) \Psi_P^* + \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2h^2} \Psi_E^* + \frac{\gamma_\psi \Delta t}{2} \omega_P^t \quad (2.42)$$

Istotny jest również fakt, że macierze układów równań (2.41) i (2.42) mają dominujące przekątne, co oznacza, że układy te są nieoznaczone oraz dobrze uwarunkowane [92]. Metody iteracyjne rozwiązywania układów liniowych są zbieżne dla macierzy tej klasy.

Przy pomocy opisanego powyżej sposobu postępowania dyskretyzowane są równania (2.35)-(2.37). Jednakże ze względu na to iż równania te nie są liniowe oraz wzajemnie sprzężone zachodzi konieczność rozwiązywania ich iteracyjnie. W każdej iteracji wewnętrznej rozwiązywanych jest sześć układów równań liniowych trójdzielnych postaci (2.41)-(2.42). Rozwiązując układ równań na wirowość ω pozostałe niewiadome takie jak temperatura θ czy składowe prędkości v_1, v_2 (oblicza się je przy pomocy funkcji prądu Ψ , patrz równania (2.26)-(2.27)) traktowane są jako znane i podstawia się pod nie wartości otrzymane w poprzedniej iteracji. Pełny algorytm rozwiązywania sprzężonych równań (2.35)-(2.37) w celu osiągnięcia stanu stacjonarnego można zapisać następująco:

Algorytm 2.1.

- (1) *generacja siatki*
- (2) *inicjacja warunków początkowych i brzegowych*
- (3) $t = 0$
- (4) $t = t + \Delta t$
- (5) *wylicz wartości funkcji prądu Ψ^{t+1} w kolejnym kroku czasowym $t+1$ (na podstawie równań – (2.41)-(2.42))*
- (6) *znajdź wartości składowych prędkości (równania (2.26) – (2.27))*
- (7) *wylicz wartość wirowości ω^{t+1} w kolejnym kroku czasowym*
- (8) *wylicz wartości temperatury θ^{t+1} w kolejnym kroku czasowym*
- (9) *sprawdź zbieżność, jeśli $\|\Psi^{t+1} - \Psi^t\|_2$ oraz $\|\omega^{t+1} - \omega^t\|_2$ jest dostatecznie małe to zakończ obliczenia, w przeciwnym przypadku wróć do punktu (4).*

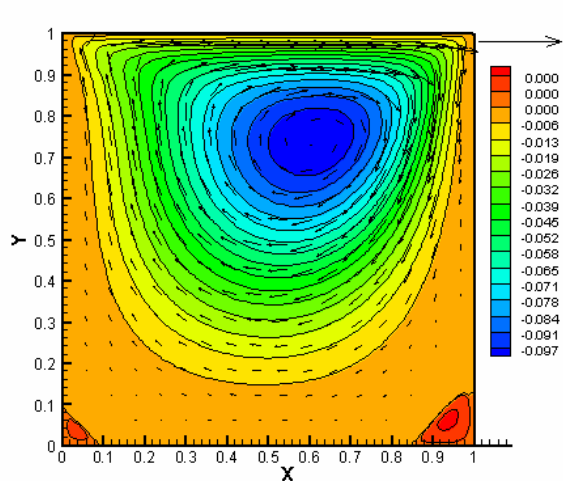
Każda iteracja (4)-(9) powyższego algorytmu wymaga w instrukcjach (5),(7),(9) rozwiązania dwóch układów równań liniowych postaci (2.41)-(2.42), które w programie SOLVSTR są rozwiązywane metodą TDMA. Można te układy równań rozwiązywać również innymi iteracyjnymi metodami rozwiązywania układów liniowych, na przykład metodą Gaussa – Seidla [92], CG, czy GMRES [93]. Rozwiązywanie układów równań liniowych jest najbardziej czasochłonnymi obliczeniowo etapem przedstawionego algorytmu.

2.2.2 Weryfikacja programu SOLVSTR

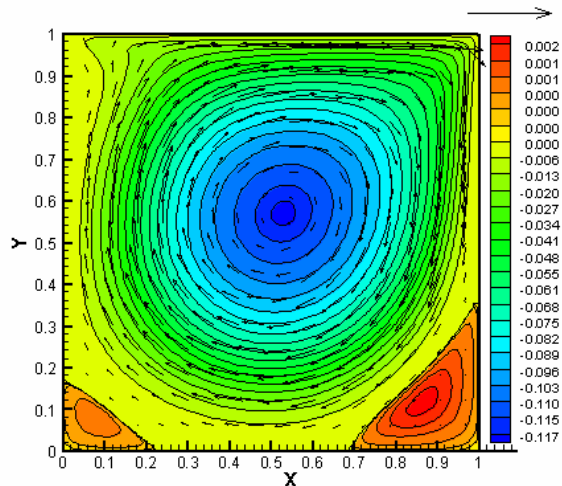
W celu weryfikacji kodu SOLVSTR wykonano obliczenia numeryczne dla wzorców numerycznych zdefiniowanych w pracach Ghia i współautorów [39], de vahl Davisa [15] oraz Le Quere [16]. Otrzymane wyniki porównano z tymi wzorcami w celu określenia dokładności stworzonego oprogramowania i poznania jego ograniczeń, w tym zakresu stosowalności.

Pierwszy z wykorzystanych wzorców został zdefiniowany przez Ghia i współautorów [39] w 1982 roku i dotyczy izotermicznego, nieściśliwego i lepkiego przepływu płaskiego płynu newtonowskiego w naczyniu ograniczonym trzema nieruchomymi i jedną ruchomą ścianką (ang. moving lid cavity problem). Przepływ jest wymuszony poprzez warunek brzegowy na górnej krawędzi kwadratu. Do obliczeń autorzy wzorca wykorzystali metodę wielosiatkową i podali rezultaty dla liczb Reynoldsa równych 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500 i 10000.

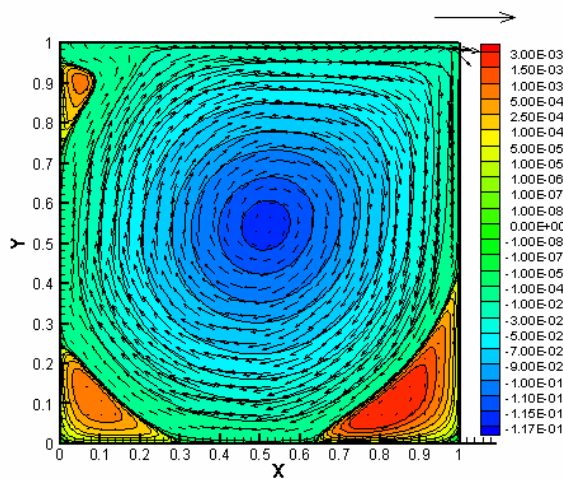
Program SOLVSTR w celu rozwiązania przedmiotowego wzorca rozwiązuje równania (2.33)-(2.34) wykorzystując zmienne bezwymiarowe (2.32). Zadanie rozwiązano dla liczb Reynoldsa równych 100,400,1000,3200,5000,7500,10000 na kartezjańskich siatkach o wymiarach 33x33, 65x65, 129x129, 257x257, 513x513 zagęszczanych jednorodnie. Przykładowe rozwiązania zostały przedstawione na Rysunku 2.2, na których przedstawiono pole prędkości wraz z polem



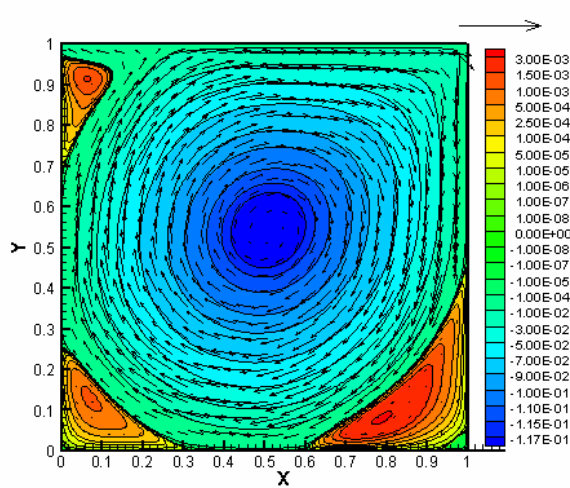
a) $Re = 100$



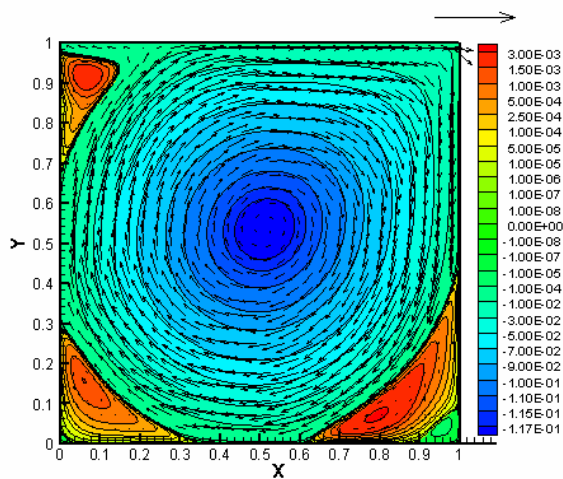
b) $Re = 1000$



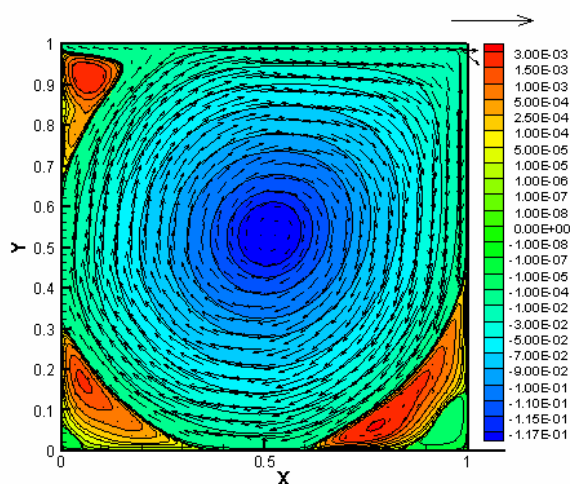
c) $Re = 3200$



d) $Re = 5000$

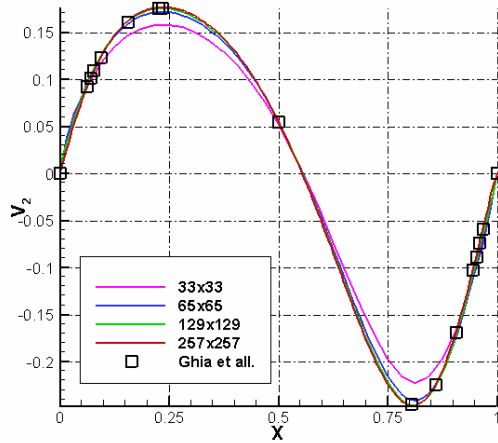


e) $Re = 7500$

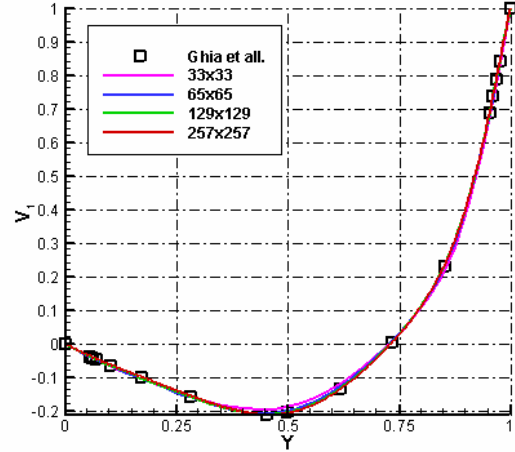


f) $Re = 10000$

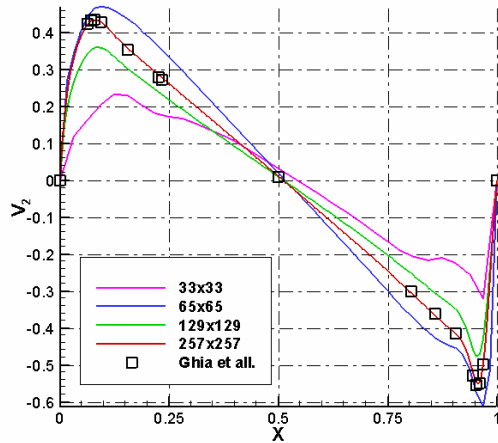
Rys. 2.2. Pole prędkości oraz kontury funkcji prądu dla liczb Reynoldsa z zakresu od 100 do 10000



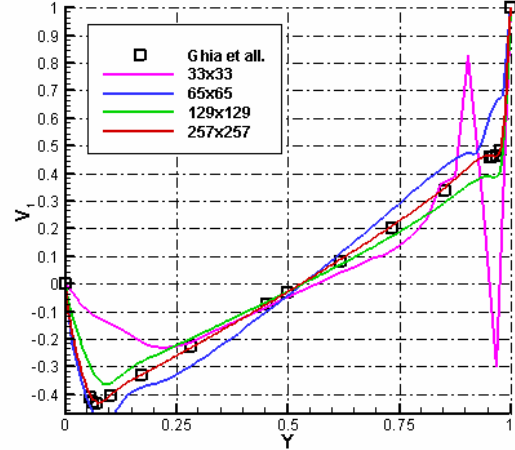
a) $Re=100$



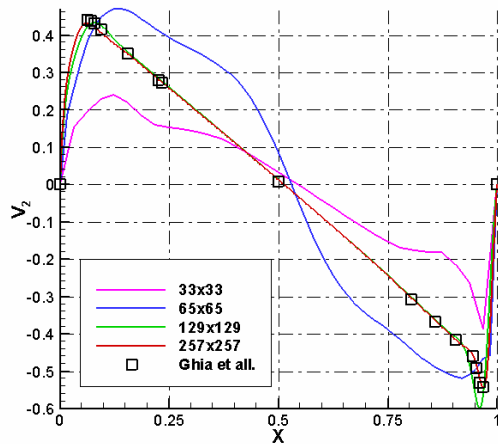
b) $Re=100$



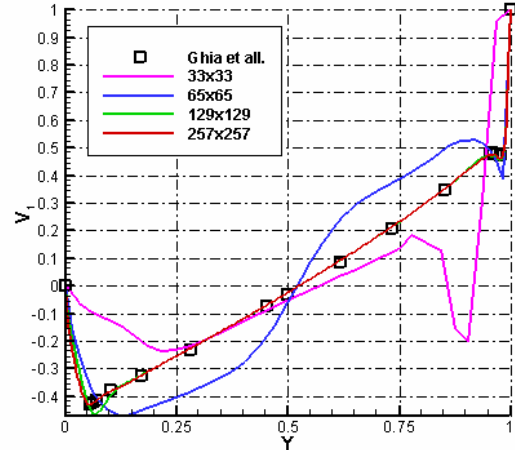
c) $Re = 5000$



d) $Re = 5000$



e) $Re = 10000$



f) $Re = 10000$

Rys. 2.3. Porównanie otrzymanych rozwiązań na czterech siatkach z rozwiązaniem referencyjnym dla liczb Reynoldsa 100,5000,10000. Porównano profile pionowej składowej prędkości wzdłuż $Y=0.5$, (a),(c),(e), poziomej składowej prędkości wzdłuż $X=0.5$ (b),(d),(f).

funkcji prądu. Dodatkowo zostały porównane profile prędkości pionowej V_2 wzdłuż prostej przecinającej poziomo domenę obliczeniową ($Y=0.5$) oraz profile prędkości poziomej V_1 wzdłuż prostej przecinającej pionowo domenę obliczeniową ($X=0.5$) uzyskanych przy pomocy różnych siatek obliczeniowych z wynikami referencyjnymi [39]. Porównanie profili prędkości zostało przedstawione na Rysunku 2.3

Dodatkowo w celu obliczenia współczynnika zbieżności siatki – GCI (por 1.26), określenia rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązań (1.21) oraz oszacowania estymatora błędu rozwiązania (1.17) porównano ekstremalne (maksymalne i minimalne) wartości składowej prędkości V_2 wzdłuż profilu $X = 0.5$ oraz składowej prędkości V_1 wzdłuż profilu $Y = 0.5$ (Rysunek 2.3). Sumaryczne zestawienie współczynnika zbieżności siatki GCI, rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązań numerycznych p oraz estymatora błędu rozwiązania ε zostało przedstawione w Tabeli 2.2 dla liczb Reynoldsa $Re = 100$ (a) oraz $Re = 5000$ (b).

Otrzymane wyniki dla niższych liczb Reynoldsa pozwalają na oszacowanie błędu rozwiązania na siatce 65×65 na około 8 %, na siatce 129×129 - 2 %, na siatce 257×257 - 0.3% oraz na siatce 513×513 – 0.01% (biorąc pod uwagę wartości współczynnika GCI) co pozwala stwierdzić iż program SOLVSTR prawidłowo rozwiązał zdefiniowany wzorzec, a najdokładniejsze rozwiązanie otrzymane na siatce 513×513 obarczone jest błędem około 0.1% (największa otrzymana wartość współczynnika GCI dla tej siatki). Dodatkowo można stwierdzić, że rzeczywisty rząd zbieżności p programu jest w przybliżeniu równy teoretycznemu rządowi zbieżności i wynosi 2.

Dla wyższych liczb Reynoldsa ($Re \geq 5000$) dokładność otrzymanych wyników jest znacznie gorsza. Rozwiązanie otrzymane na siatce 257×257 obarczone błędem wynoszącym nawet 17 % wyliczonym dla maksymalnej wartości poziomej składowej prędkości (Tabela 2.2.b). Rzeczywisty rząd zbieżności p dla takiej liczby Reynoldsa zmniejszył się i wynosi około 1. Takie zachowanie programu wraz ze zwiększaniem wartości liczby Reynoldsa jest oczekiwane gdyż wraz z zwiększaniem się tej liczby pogarsza się uwarunkowanie liniowego układu równań będącego wynikiem dyskretyzacji równania (2.33) – przestaje być spełniony warunek silnie dominującej przekątnej. Z tego powodu metoda iteracyjna rozwiązywania takich układów charakteryzuje się niższym rzędem zbieżności, a co za tym idzie dłuższym czasem obliczeń.

Siatka	$\min V_2$	GCI	p	ε
33x33	-0,222240			
65x65	-0,241399	0,079367(8 %)		0,025545(2.5%)
129x129	-0,246071	0,018986(2 %)	2,03591	0,006288(0.6 %)
257x257	-0,247051	0,003967(0.3 %)	2,253187	0,00132(0.13 %)
513x513	-0,247027	9,72E-05(0.01%)	5,351675	3,24E-05(0.003%)

Siatka	$\max V_2$	GCI	p	ε
33x33	0,157937			
65x65	0,171513	0,079154(8%)		0,018101(2%)
129x129	0,175274	0,021458(2%)	1,85187	0,007101(0.7%)
257x257	0,176481	0,006839(0.7%)	1,639691	0,002274(0.2%)
513x513	0,176541	0,00034(0.03%)	4,330319	0,000113(0.01%)

Siatka	$\min V_1$	GCI	p	ε
33x33	-0,196911			
65x65	-0,208160	0,05404(5%)		0,014998(1.4%)
129x129	-0,211241	0,014585(1.4%)	1,868326	0,004838(0.4%)
257x257	-0,211836	0,002809(0.2%)	2,372437	0,000935(0.1%)
513x513	-0,212065	0,00108(0.1%)	1,377542	0,00036(0.04%)

a) $Re = 100$

<i>Siatka</i>	<i>Min V₂</i>	<i>GCI</i>	<i>p</i>	<i>ε</i>
33x33	-0,320896			
65x65	-0,613754	0,477159(47%)		0,137215(13%)
129x129	-0,477550	0,285214(28%)	1,104432	0,105048(10%)
257x257	-0,551242	0,133684(13%)	0,886189	0,042656(4%)

<i>Siatka</i>	<i>Max V₂</i>	<i>GCI</i>	<i>p</i>	<i>ε</i>
33x33	0,232566			
65x65	0,471858	0,507127(50%)		0,144587(14%)
129x129	0,360791	0,307843(30%)	1,107342	0,114335(11%)
257x257	0,434014	0,168711(17%)	0,601061	0,053238(5%)

<i>Siatka</i>	<i>Min V₁</i>	<i>GCI</i>	<i>p</i>	<i>ε</i>
33x33	-0,235292			
65x65	-0,498794	0,528278(52%)		0,149714(14%)
129x129	-0,366129	0,362345(36%)	0,990026	0,137358(13%)
257x257	-0,431652	0,151796(15%)	1,017714	0,048157(5%)

b) $Re = 5000$

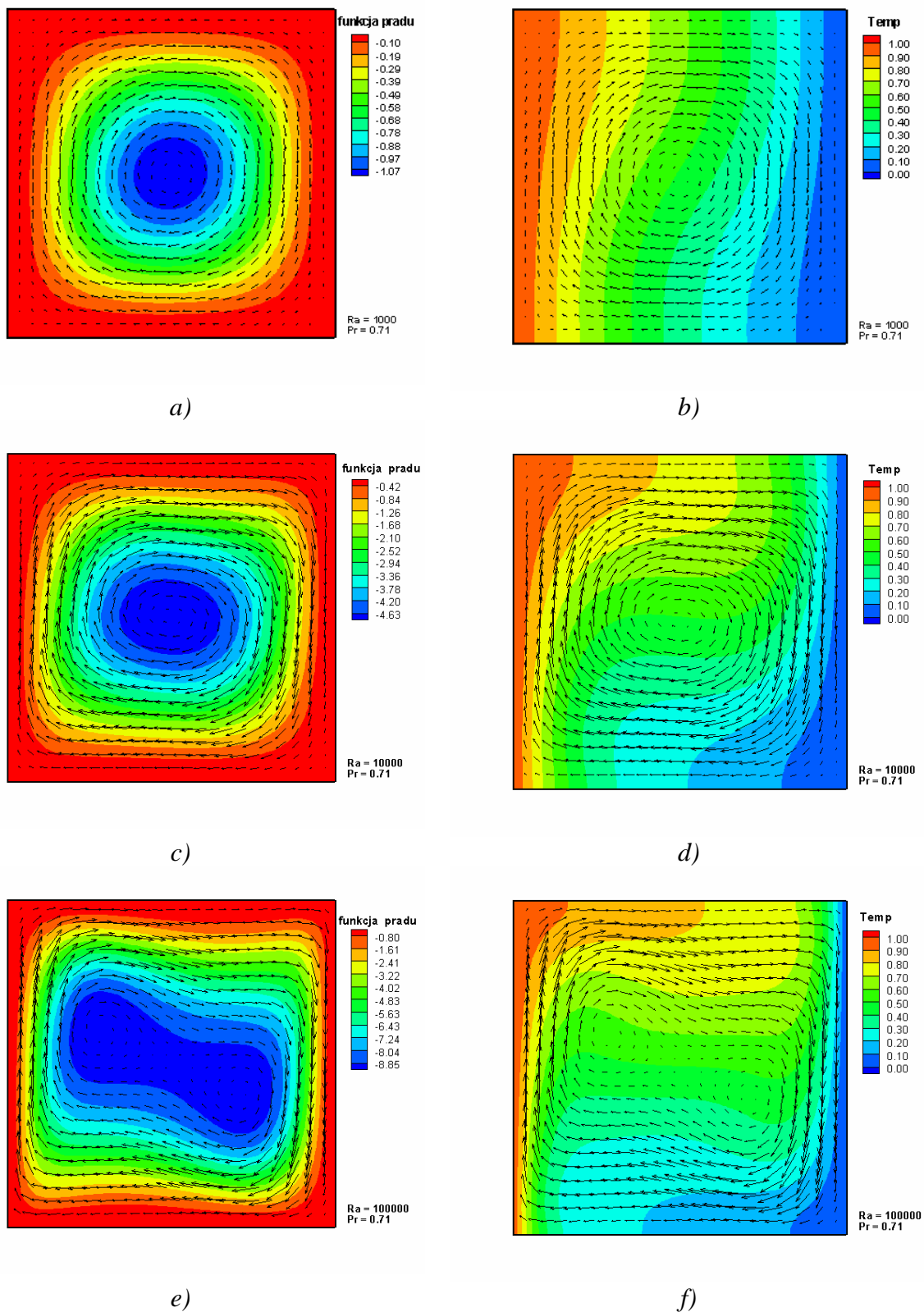
Tabela 2.2. Zestawienie współczynników zbieżności GCI (1.26), estymatora błędu ε (1.17) oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania p (1.21) dla liczb a) $Re = 100$ b) $Re = 5000$.

Kolejnym wzorcem numerycznym wykorzystanym do weryfikacji programu SOLVSTR jest wzorec opublikowany przez Grahama de Vahl Davisa [15] w 1983 roku, który dotyczy przepływów lepkich i termicznych. Geometrię obliczeniową również stanowi kwadrat, przepływ jest dwuwymiarowy, wywołany różnicą temperatur pomiędzy pionowymi ściankami kwadratu, podczas gdy poziome ścianki kwadratu są adiabatyczne. Rozwiązanie wzorcowe zostało podane dla stałej liczby Prandtla $Pr = 0.71$ (odpowiadające przepływowi w powietrzu) oraz dla liczb Rayleigha równych kolejno $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$. Rozwiązanie zostało otrzymane przy użyciu schematu różnic centralnych drugiego rzędu, a błąd zbieżności rozwiązania oszacowano przy pomocy ekstrapolacji Richardsona na poziomie 0.1%, 0.2%, 0.3 % oraz 1% dla kolejnych liczb Rayleigha.

Program SOLVSTR w celu rozwiązania niniejszego wzorca rozwiązuje równania (2.33)-(2.35) wykorzystując zmienne bezwymiarowe (2.30). Przykładowe kontury funkcji prądu Ψ oraz bezwymiarowej temperatury θ wraz z polem prędkości dla kolejnych liczb Rayleigha otrzymane programem SOLVSTR zostały przedstawione na Rysunku 2.4. Na poniższych rysunkach widoczne są stany stacjonarne dla liczby Rayleigha ($Ra = 10^3$) (a-b), $Ra = 10^4$ (c-d), a także dla liczby $Ra = 10^5$ (e-f). Na rysunkach tych widoczną są stany stacjonarne charakterystyczne dla niskich liczb Rayleigha z prawie jednorodnym gradientem temperatury (a,b), następnie stan stacjonarny przejściowy dla umiarkowanych liczb Rayleigha (c,d), w którym człon konwekcyjny równań ruchu jest w równowadze z członem przewodnościowym oraz na koniec stan stacjonarny charakterystyczny dla wysokich liczb Rayleigha (e,f), w którym konwekcja odgrywa najistotniejszą rolę (tworzy się termiczna warstwa przyścienna).

W Tabeli 2.3. zostały zestawione współczynniki określające zbieżność rozwiązań wykonanych na jednorodnie zagęszczonych siatkach kartezjańskich o wymiarach 25x25, 50x50 oraz 100x100. Dla niższych liczb Rayleigh ($Ra=10^3$) otrzymano rzeczywisty rząd zbieżności powyżej trzech co jest wynikiem niewielkiego wpływu członów konwekcyjnych. Otrzymany rząd zbieżności jest większy od teoretycznego rzędu zbieżności wynoszącego dwa. Jednakże wraz ze wzrostem liczby Rayleigha rzeczywisty rząd zbieżności rozwiązań maleje i wynosi około dwa. Dokładność kolejnych rozwiązań (biorąc pod uwagę współczynnik GCI) jest równa odpowiednio 0.2 %, 0.4 % i 0.6 % dla $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$. Nie jest to wynik gorszy od tego uzyskanego przez de vahl Davisa

[15], gdyż współczynnik GCI jest bardziej restrykcyjny (patrz Rozdział 1.2) przy oszacowywaniu błędów zbieżności rozwiązań. Oszacowanie błędów przy pomocy ekstrapolacji Richardsona ϵ daje oszacowanie podobne do tego, które otrzymał de Vahl Davis, a mianowicie 0.05%, 0.1%, 0.2%.



Rys. 2.4. Kontury funkcji prądu Ψ – lewa kolumna a),c),e) oraz kontury temperatury θ – prawa kolumna b),d),f) dla liczb Rayleigha, a),b) $Ra = 10^3$, c),d) $Ra = 10^4$, e),f) $Ra = 10^5$

Siatka	Max V_1	GCI	p	ε
25x25	3,54939			
50x50	3,6371	2.5%		0.8%
100x100	3,64296	0.1%	3,90	0.05%

Siatka	Max V_2	GCI	p	ε
25x25	3,663069			
50x50	3,695571	0.8%		0.05%
100x100	3,698188	0.07%	3,63	0.02%

a) $Ra = 10^3$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż $X=0.5$ oraz V_2 wzdłuż $Y=0.5$.

Siatka	Max V_1	GCI	p	ε
25x25	15,9505			
50x50	16,1291	1.1%		0.3%
100x100	16,1840	0.3%	1.70	0.1%

Siatka	Max V_2	GCI	p	ε
25x25	19,20643			
50x50	19,66843	2,3%		0.8%
100x100	19,74552	0.4%	2,58	0.1%

b) $Ra = 10^4$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż $X=0.5$ oraz V_2 wzdłuż $Y=0.5$.

Siatka	Max V_1	GCI	p	ε
25x25	35,12051			
50x50	34,99876	0.3%		0.1%
100x100	34,96479	0.09%	1,84	0.03%

Siatka	Max V_2	GCI	p	ε
25x25	61.9295			
50x50	68.1170	9%		2.9%
100x100	68.5198	0.6%	3.94	0.2%

c) $Ra = 10^5$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż $X=0.5$ oraz V_2 wzdłuż $Y=0.5$.

Tabela 2.3. Zestawienie współczynników zbieżności GCI(1.26), ε (1.17) oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania p (1.21) dla liczb a) $Ra = 10^3$ b) $Ra = 10^4$ c) $Ra = 10^5$.

Wraz ze wzrostem liczby Rayleigha przepływ zmienia swój charakter ($Ra \geq 10^6$). Dominującym efektem dla takich przepływów jest konwekcja. Obserwuje się tworzenie termicznych warstw przyściennych. Z tego względu konieczne jest zastosowanie odpowiednich skal bezwymiarowych do rozwiązywania równań (2.33)-(2.35). Na podstawie analizy wymiarowej [76] wyprowadzona została skala bezwymiarowa (2.31) odpowiednia dla tego reżimu przepływu. Ubezwymiarowanie to polega na przyjęciu jako skali prędkości maksymalną wartość prędkości osiąganą w warstwie przyściennej. Wartość ta jest proporcjonalna do $\kappa Ra^{0.5} / \rho c_p L$. Zastosowanie tej skali pozwoliło na uzyskanie rozwiązań dla liczby Rayleigha $Ra = 10^6, 10^7, 10^8$. Uzyskane wyniki zostały porównane z wynikami wzorca numerycznego podanego przez Patrika Le Quere [16] w 1999 roku oraz innymi wynikami numerycznymi podanymi przez Kelsona [94] oraz Haldenwanga [65]. Symulacje numeryczne przeprowadzone przez Le Quere i Haldenwanga wykorzystywały do aproksymacji przestrzennej wielomiany Chebysheva, natomiast symulacje Kelsona schemat różnic centralnych. Porównywaną wartością dla wszystkich wymienionych wyżej symulacji jest wartość liczby Nusselta, wyliczona wzdłuż prostej $X = 0.5L$, zdefiniowana w następujący sposób:

$$Nu_{\frac{1}{2}} = \int_0^1 \left(Ra^{\frac{1}{2}} v_1 \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) (x_1 = 0.5, x_2) dx_2 \quad (2.43)$$

Ponadto porównano wartości maksymalnych i minimalnych wartości składowych prędkości wzdłuż profili $X = 0.5L$ i $Y = 0.5L$ oraz oszacowano błąd zbieżności rozwiązania przy pomocy ekstrapolacji Richardsona (1.17) i indeksu zbieżności na siatce GCI (1.26). Dla liczby $Ra = 10^6$ błąd zbieżności rozwiązania 1 % biorąc pod uwagę estymator błędów (1.17), natomiast dla $Ra = 10^7$ i 10^8 odpowiednio 1.7 % i 6.4 %. Jako oszacowanie błędów zbieżności przyjęto maksymalną wartość z Tabeli 2.4 określającą ε , dla najgęstszej siatki. Rząd zbieżności rozwiązań w przybliżeniu dla wszystkich trzech przypadków był zbliżony do teoretycznego rzędu zbieżności i wynosił dwa. Porównano również wartości liczby Nusselta wyliczone przy pomocy programu SOLVSTR z wynikami innych programów dostępnych w literaturze (por. Tabela 2.5). Największe rozbieżności zauważalne są dla liczby $Ra = 10^8$, dla której określono największy błąd zbieżności wynoszący 6.4 %. Warto zauważyć jednak, że dla tej liczby Rayleigha przepływ jest bliski reżimu przejściowego, z widocznymi źródłami zaburzeń warstwy przyściennej. Takie same zaburzenia zaobserwowano w symulacjach wykonanych metodami spektralnymi [16].

Siatka	Max V_1	GCI	p	ε
65x65	0.07182			
129x129	0.06629	8 %		2.8 %
257x257	0.06437	3 %	1.53	0.9 %

Siatka	Max V_2	GCI	p	ε
65x65	0.24040			
129x129	0.21915	9.7 %		3.3 %
257x257	0.21278	3 %	1.74	0.9 %

a) $Ra = 10^6$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż $X=0.5$ oraz V_2 wzdłuż $Y=0.5$.

Siatka	Max V_1	GCI	p	ε
65x65	0.05571			
129x129	0.04953	12.4%		4.3 %
257x257	0.04709	5.2 %	1.34	1.7 %

Siatka	Max V_2	GCI	p	ε
65x65	0.25072			
129x129	0.22926	9.3 %		3 %
257x257	0.22675	1.1%	3.09	0.4 %

b) $Ra = 10^7$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż $X=0.5$ oraz V_2 wzdłuż $Y=0.5$.

Siatka	Max V_1	GCI	p	ε
65x65	0.08690			
129x129	0.04689	85 %		39 %
257x257	0.03967	18 %	2.47	6.4%

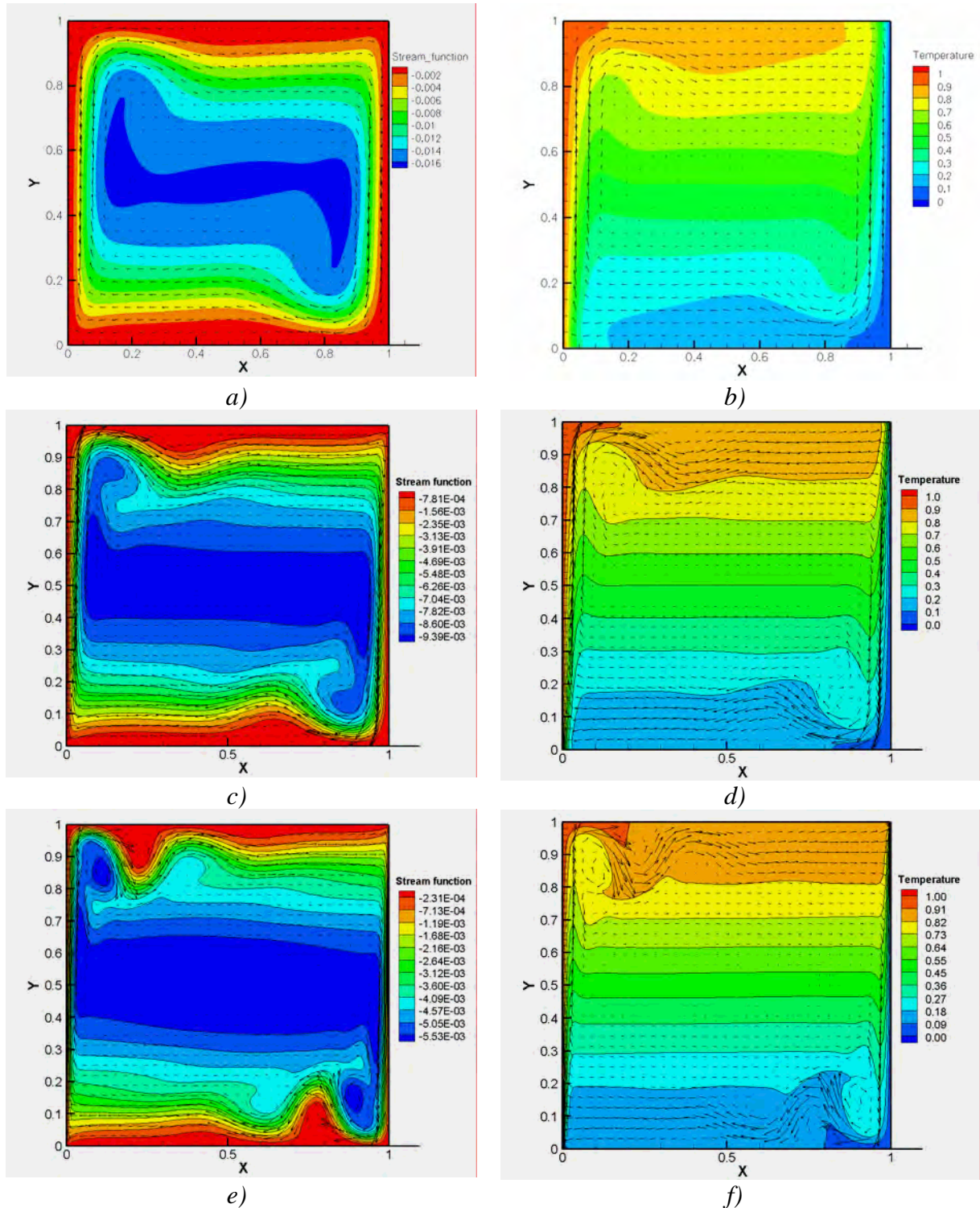
Siatka	Max V_2	GCI	p	ε
65x65	0.20355			
129x129	0.22758	10 %		3.4 %
257x257	0.22303	2 %	2.4	0.7 %

c) $Ra = 10^8$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż $X=0.5$ oraz V_2 wzdłuż $Y=0.5$.

Tabela 2.4. Zestawienie współczynników zbieżności GCI(1.26), ε (1.17) oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania p (1.21) dla liczb a) $Ra = 10^6$ b) $Ra = 10^7$ c) $Ra = 10^8$.

Program \ Ra	10^6	10^7	10^8
SOLVSTR	8.730	16.722	30.773
Le Quere [16]	8.825	16.523	30.225
Haldenwang [65]		16.550	30.260
Kelson [93]		16.500	30.200
De Vahl Davis [15]	8.799	-	-

Tabela 2.5. Porównanie liczby Nusselta wyliczonej dla profilu $X = 0.5$ (2.43) dla liczb Rayleigha $Ra = 10^6, 10^7, 10^8$.



Rys. 2.5. Pole prędkości wraz z konturami funkcji prądu Ψ – lewa kolumna a),c),e) oraz konturami temperatury θ – prawa kolumna b),d),f) dla liczb Rayleigha, a),b) $Ra = 10^6$, c),d) $Ra = 10^7$, e),f) $Ra = 10^8$

2.3. Metoda bezsiatkowa (SOLVMEF)

Metody bezsiatkowe należą do nowych metod, nie mających jeszcze dużego praktycznego zastosowania w mechanice płynów. Tym niemniej elastyczność tych metod, uzyskiwana dzięki uniknięciu skomplikowanego etapu generowania siatki obliczeniowej przy opisie niemal dowolnych geometrii, jest bardzo atrakcyjna dla zastosowań przemysłowych. Metody bezsiatkowe pozwalają na szybsze wyznaczenie współczynników układu równań algebraicznych dla całego obszaru obliczeniowego przy użyciu dowolnie rozłożonego zbioru punktów. Punkty te mogą być generowane wewnątrz domeny obliczeniowej równomiernie lub losowo. Dodatkowo punkty można w łatwy sposób zagęszczać w najbardziej interesujących rejonach przez dodawanie kolejnych, uzyskując dzięki temu odpowiednik siatek adaptacyjnych. Istnieje wiele odmian metod bezsiatkowych z różnego typu aproksymacjami – obszerny ich przegląd można znaleźć w książkach Liu [95] lub Alturi [96]. Do tej pory jedynie kilka z nich zostało zastosowanych do rozwiązywania prostych problemów transportu ciepła i masy [38,97,98].

2.3.1. Opis metody

W ramach niniejszej pracy stworzono oparty o metodę bezsiatkową program numeryczny SOLVMEF, rozwiązujący zagadnienie przepływu konwekcyjnego. W implementacji metody zdecydowano się wykorzystać podejście oparte o aproksymację DAM (z ang. *Diffuse Approximation Method*), będący średniokwadratową aproksymacją najmniejszych kwadratów pól skalarnych i ich pochodnych. Dokładny opis metody w zastosowaniu do przepływów lepkich i termicznych można znaleźć w pracach Sadat [99] oraz Prax [100]. Metoda może być zastosowana do dowolnego rozmieszczenia punktów kolokacyjnych. Dla uproszczenia procedury testowej w naszych obliczeniach, prezentowanych w dalszej części niniejszej pracy, ograniczono się do równomiernego rozkładu punktów. Przy tak uproszczonym podejściu i przy zastosowaniu najprostszej postaci tzw. funkcji bazowych: $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$, wzory różnicowe na pierwsze i drugie pochodne dowolnej funkcji można wyprowadzić analitycznie.

Aproksymacja DAM pierwszych i drugich pochodnych skalarnej funkcji Φ w dowolnym punkcie P wyraża się prostymi wzorami, przypominającymi wzory różnicowe:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{m_1(\Phi_E - \Phi_W) + m_2(\Phi_{NE} - \Phi_{NW}) + m_2(\Phi_{SE} - \Phi_{SW})}{2hm_1 + 4hm_2} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{m_1(\Phi_N - \Phi_S) + m_2(\Phi_{NW} - \Phi_{SW}) + m_2(\Phi_{NE} - \Phi_{SE})}{2hm_1 + 4hm_2} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W}{h^2} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi_N - 2\Phi_P + \Phi_S}{h^2} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\Phi_{SW} + \Phi_{NE} - \Phi_{NW} - \Phi_{SE}}{4h^2} \quad (2.48)$$

We wzorach h oznacza odległość pomiędzy sąsiednimi punktami, tak jak na Rysunku 2.1., a $\Phi_P, \Phi_N, \Phi_S, \Phi_W, \Phi_E, \Phi_{NW}, \Phi_{NE}, \Phi_{SW}, \Phi_{SE}$ oznaczają wartości funkcji aproksymowanej w punktach będących w bezpośrednim sąsiedztwie punktu P, natomiast m_1, m_2 oznaczają wartości tzw. funkcji wagowej. Funkcja wagowa określa zakres oddziaływania aproksymacji i najczęściej jest przyjmowana w postaci:

$$m(P, Z) = \begin{cases} \exp\left[-\ln(10)\left(\frac{r}{h\sqrt{2}}\right)^2\right] & \text{dla } r \leq h\sqrt{2} \\ 0 & \text{dla } r > h\sqrt{2} \end{cases} \quad (2.49)$$

gdzie r jest odległością pomiędzy punktem P a Z (Z jest dowolnym punktem z otoczenia punktu P, $m_1=m(P,N)=m(P,S)=m(P,E)=m(P,W)$, $m_2=m(P,NE)=m(P,NW)=m(P,SE)=m(P,SW)$).

Powyższe wzory różnicowe zostały zastosowane do dyskretyzacji równań (2.33)-(2.35) w celu otrzymania trzech układów równań liniowych. Macierze układów otrzymanych z zastosowaniem opisanej aproksymacji są rzadkie, a ilość niezerowych współczynników w każdym wierszu macierzy jest ściśle związana z ilością punktów wziętych pod uwagę dla wyprowadzenia wzorów różnicowych. Każda *molekuła obliczeniowa* (rys. 2.1.) składa się z dziewięciu punktów. Zatem w każdym wierszu macierzy otrzymano nie więcej niż dziewięć niezerowych współczynników. Jednak z uwagi na trudności efektywnej faktoryzacji tak powstałej macierzy, otrzymany układ musi być rozwiązywany klasyczną metodą Gaussa – Seidla. Nie jest to optymalne i jest to jeden z powodów ograniczających szersze stosowanie tej wersji metody bezsiatkowej.

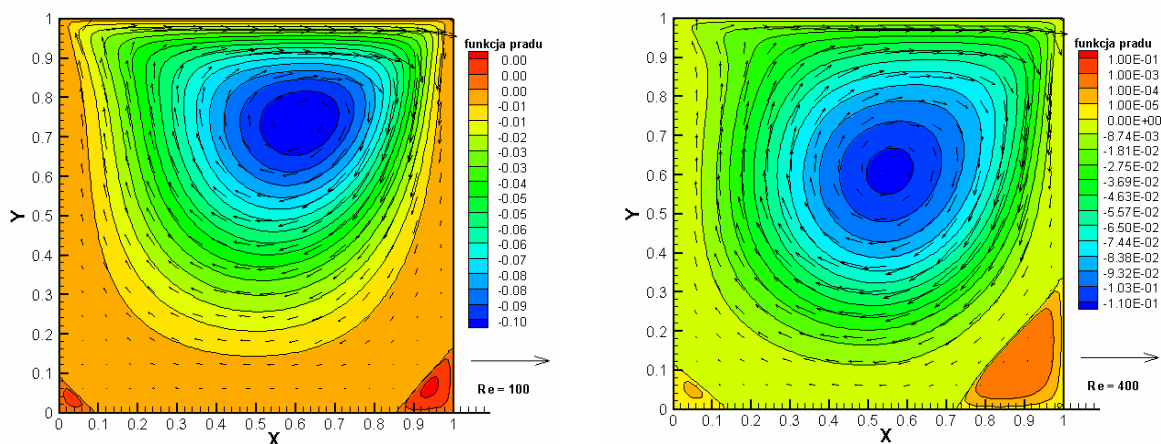
2.3.2 Weryfikacja programu SOLVMEF

W celu weryfikacji kodu SOLVMEF wykonano obliczenia numeryczne dla wzorców numerycznych wykorzystanych w poprzednim rozdziale. Otrzymane wyniki porównano w celu określenia dokładności stworzonego oprogramowania i poznania jego ograniczeń, w tym zakresu stosowalności.

Wzorzec numeryczny obejmujący modelowanie przepływu w kanale z ruchomą ścianką (Ghia i współautorzy [39]) został rozwiązany dla liczb Reynoldsa $Re = 100$ i 400 (Rysunek 2.6). Dla wyższych liczb Reynoldsa nie udało się uzyskać rozwiązań z oszacowaniem błędu poniżej 5%. Fakt ten świadczy o tym, iż zastosowana aproksymacja nie zapewnia dostatecznej dokładności w przypadkach, gdy mamy do czynienia z ruchem w obrębie wysokich liczb Reynoldsa. Toteż wykorzystana aproksymacja nie jest odpowiednia do symulacji, w których nieliniowe efekty są najistotniejsze.

Obliczenie rzeczywistego współczynnika zbieżności dla liczby Reynoldsa $Re = 100$ dało oczekiwany wynik około dwóch (Tabela 2.6) lecz oszacowania estymatora błędu dało wynik rzędu 5 %, co jest wynikiem dużo gorszym w porównaniu z programem SOLVSTR. Jednakże błąd wyliczony na podstawie ekstrapolacji Richardsona dla $Ra = 100$ jest mniejszy niż 1.5%, a porównanie wartości składowych prędkości V_1 (wzdłuż $Y=0.5$) oraz V_2 (wzdłuż $X=0.5$) jest zadawalające, co pozwala stwierdzić poprawną zbieżność rozwiązań dla umiarkowanych liczb Reynoldsa.

Kolejnym wzorcem numerycznym wykorzystanym do weryfikacji programu SOLVMEF jest wykorzystany w poprzednim rozdziale wzorzec opublikowany przez Grahama de Vahl Davisa [15]. Podobnie jak dla programu SOLVSTR wykonano obliczenia dla kolejnych liczb Rayleigha $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ przy stałej liczbie Prandlta $Pr = 0.71$. W wyniku otrzymano pola temperatury, funkcji prądu i prędkości analogiczne do tych przedstawionych na Rysunku 2.4. Porównano również wartości składowych prędkości V_1 wzdłuż prostej $Y=0.5$ oraz V_2 wzdłuż prostej $X=0.5$ otrzymane przy jednorodnym zagęszczaniu punktów kolokacyjnych (25x25, 50x50, 75x75, 100x100 punktów). Na rysunku 2.7 zostały zestawione profile dla kolejnych liczb Rayleigha.



a) $Re = 100$

b) $Re = 400$

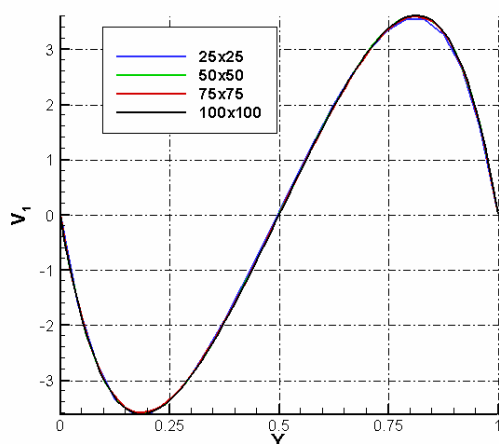
Rys. 2.6. Pole prędkości oraz kontury funkcji prądu dla liczb Reynoldsa $Re=100$ i $Re = 400$ (metoda bezsiatkowa).

Siatka	Min V_2	GCI	P	ε
33x33	-0,199036			
65x65	-0,235061	0,153258 (15 %)		0,048557 (4.8 %)
129x129	-0,247014	0,04839 (5%)	1,59	0,015858 (1.5 %)

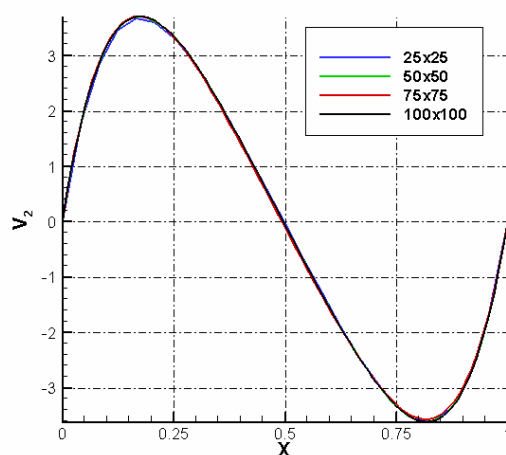
Siatka	Max V_2	GCI	P	ε
33x33	0,144294			
65x65	0,169843	0,150427 (15 %)		0,047703 (4.7 %)
129x129	0,175837	0,034088 (3.4 %)	2,09	0,011224 (1.1 %)

Siatka	Min V_1	GCI	P	ε
33x33	-0,198762			
65x65	-0,208900	0,04853 (4.8 %)		0,015904 (1.5 %)
129x129	-0,211259	0,011166 (1.1 %)	2,10	0,003705 (0.3 %)

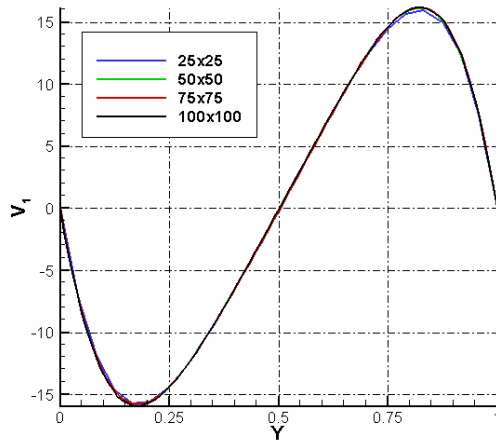
Tabela 2.6. Zestawienie współczynników zbieżności $GCI(1.26)$, $\varepsilon(1.17)$ oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania $p(1.21)$ dla liczby Reynoldsa $Re = 100$ (metoda bezsiatkowa).



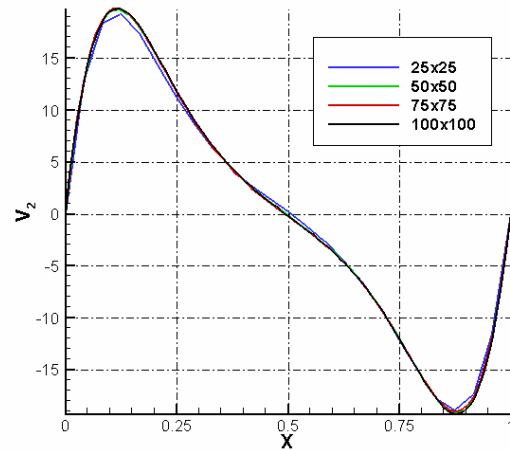
a) $Ra = 1000$



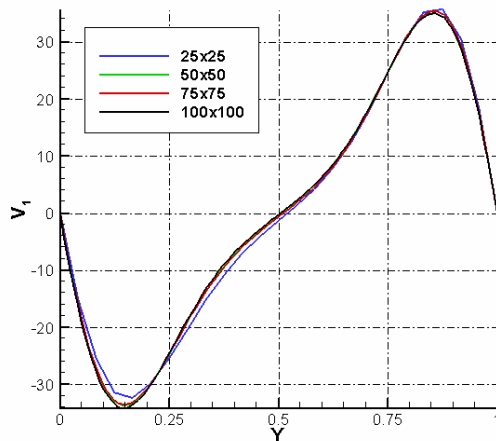
b) $Ra = 1000$



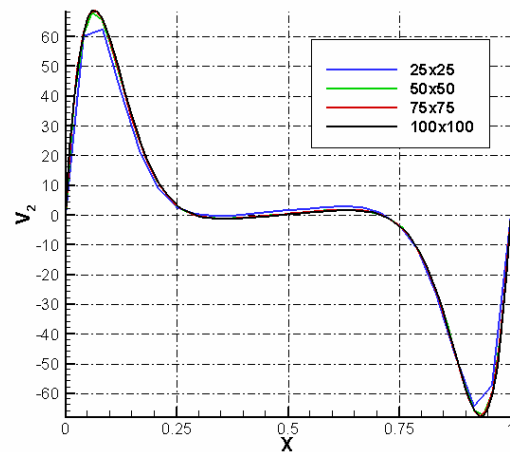
c) $Ra = 10000$



d) $Ra = 10000$



e) $Ra = 100000$



f) $Ra = 100000$

Rys. 2.7. Profile prędkości dla kolejnych liczb Reynoldsa, (a),(c),(e) profile pionowej składowej prędkości wzdłuż $Y=0.5$, (b),(d),(f) profile poziomej składowej prędkości wzdłuż $X=0.5$ (metoda beziatkowa).

Wyliczone wartości rzeczywistego współczynnika zbieżności dla programu SOLVMEF dla niniejszego wzorca, zamieszczono w Tabeli 2.7, wykazały one poprawną zbieżność zastosowanej metody. Wyniki dla liczby $Ra = 1000$ otrzymano z błędem około 0.2%, dla $Ra = 10000$ z błędem około 0.4%, natomiast dla $Ra = 100000$ z błędem około 1.1 %. Otrzymano dokładność na podobnym poziomie co przy pomocy programu SOLVSTR, jednakże szybkość wykonania liczona w ilości iteracji (iteracje (4)-(9) Algorytmu 2.1.) była cztery razy mniejsza dla programu SOLVMEF, a co za tym idzie czas obliczeń dla tego programu był krótszy. Takie zachowanie programu jest wynikiem zastosowanej aproksymacji DAM. Jest to ściśle związane z charakterystyczną cechą tej aproksymacji (patrz równania (2.44)-(2.48)), a mianowicie tego, iż w aproksymacji pochodnych wykorzystywane są wartości we wszystkich dziewięciu najbliższych punktach kolokacyjnych, w przeciwieństwie do klasycznych metod w których wykorzystuje się zazwyczaj dwa lub trzy sąsiednie (w zależności od kierunku liczenia pochodnej). Toteż w zadaniach, w których dominującym zjawiskiem jest dyfuzja, w naszym przypadku ciepła (konwekcja naturalna przy niskich liczbach Rayleigha), metoda ta pozwala uzyskać lepszą zbieżność. Fakt ten potwierdza również wartość rzeczywistego współczynnika zbieżności, którego

wyliczona wartość dla niniejszego wzorca (Tabela 2.7) jest wyższa od wartości teoretycznej równej dwa.

Wraz ze wzrostem liczby Rayleigha efekty konwekcyjne stają się bardziej istotne, czego efektem jest wzrost znaczenia członów nieliniowych w równaniach Naviera-Stokesa. Podobnie jak dla poprzedniego wzorca aproksymacja bezsiatkowa okazała się mało dokładna dla przypadków, w których dominują efekty nieliniowe (konwekcyjne). Nie udało się uzyskać rezultatów z błędem zbieżności poniżej 10 % dla wyższych liczb Rayleigha z wykorzystaniem wyżej opisanej aproksymacji bezsiatkowej.

<i>Siatka</i>	<i>Max V₁</i>	<i>GCI</i>	<i>p</i>	<i>ε</i>
25x25	3,549602			
50x50	3,612997	1.7%		0.5%
100x100	3,617497	0.1%	3,82	0.04%

<i>Siatka</i>	<i>Max V₂</i>	<i>GCI</i>	<i>p</i>	<i>ε</i>
25x25	3,663174			
50x50	3,696443	0.9%		0.3%
100x100	3,704403	0.2%	2,06	0.07%

a) $Ra = 10^3$

<i>Siatka</i>	<i>Max V₂</i>	<i>GCI</i>	<i>p</i>	<i>ε</i>
25x25	19,214741			
50x50	19,670120	2.3%		0.7%
100x100	19,746010	0.4%	2,58	0.1%

<i>Siatka</i>	<i>Max V₁</i>	<i>GCI</i>	<i>p</i>	<i>ε</i>
25x25	15,95022			
50x50	16,131201	1.1%		0.4%
100x100	16,18453	0.3%	1,76	0.1%

b) $Ra = 10^4$

<i>Siatka</i>	<i>Max V₂</i>	<i>GCI</i>	<i>p</i>	<i>ε</i>
25x25	62,114860			
50x50	68,127281	8.8%		2.8%
100x100	68,520858	0.5%	3,93	0.2%

<i>Siatka</i>	<i>Max V₁</i>	<i>GCI</i>	<i>p</i>	<i>ε</i>
25x25	35,702129			
50x50	35,03445	1.9%		0.6%
100x100	34,96875	0.2%	3,34	0.06%

c) $Ra = 10^5$

Tabela 2.7. Zestawienie współczynników zbieżności *GCI* (1.26), *ε* (1.17) oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania *p* (1.21) dla liczb a) $Ra = 10^3$ b) $Ra = 10^4$ c) $Ra = 10^5$.

Zbieżność oszacowano na podstawie ekstremalnych wartości poziomej składowej prędkości V_1 wzdłuż $X = 0.5L$ oraz pionowej składowej prędkości V_2 wzdłuż $Y = 0.5L$.

2.4. Wzorzec numeryczny dla przepływów lepkich i termicznych

Niniejszy podrozdział zawiera definicje wzorca numerycznego zaproponowanego do sprawdzenia dokładności i wydajności programów numerycznych używanych w symulacjach numerycznych przepływów lepkich i termicznych. Stosując ten wzorzec określono dokładności rozwiązań otrzymanych za pomocą różnych algorytmów i oceniono ich przydatność.

Do rozwiązania zdefiniowanego wzorca numerycznego wykorzystano programy opisane w poprzednich podrozdziałach SOLVSTR (rozdział 2.2) oparty na metodzie różnic skończonych, SOLVMEF (rozdział 2.3) oparty na metodzie bezsiatkowej, a także dwa kody komercyjne FLUENT [101] (metoda objętości skończonych) i FIDAP [102] (metoda elementów skończonych) oraz uniwersytecki kod FRECON3V [103,104] oparty na metodzie różnic skończonych.

2.4.1. Definicja wzorca

W celu określenia dokładności każdego z testowanych programów zdefiniowano wzorzec numeryczny (ang. *benchmark solution*), który ma umożliwić wstępną analizę dokładności obliczeń modeli numerycznych stosowanych do symulacji przepływów termicznych [105]. Wzorzec opisuje zjawisko konwekcji naturalnej wody w pobliżu temperatury krzepnięcia w różnicowo grzonym kwadracie. Domena obliczeniowa odpowiada również konfiguracji eksperymentalnej z różnicowo grzonym sześcianiem, która zostanie opisany w Rozdziale 4. Dla uproszczenia, w zadaniu numerycznym ograniczono się do analizy dwuwymiarowego pola przepływu w przekroju centralnym sześcianu. Przepływ generowany jest różnicą temperatur $T_h = 283K$ i $T_c = 273K$, ustaloną dla przeciwnych pionowych ścianek izotermicznych. Dla pozostałych ścianek naczynia przyjęto adiabatyczne warunki brzegowe. Ze względu na małe zmiany temperatury w przepływie, a także dla uproszczenia wzorca numerycznego, przyjęto stałe wartości wszystkich własności materiałowych, za wyjątkiem gęstości wody. Gęstość wody w pobliżu punktu krzepnięcia wykazuje silnie nieliniową zależność od temperatury. Toteż zachodzi konieczność reprezentacji członu sił masowych postaci (2.16), w którym zależność gęstości od temperatury T w Kelvinach wyraża się następującą zależnością [68]:

$$\rho(T) = -5150.43 + 78.48118 \cdot T - 0.3769827 \cdot T^2 + 8.10902 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 - 6.621398 \cdot 10^{-7} \cdot T^4 \quad (2.50)$$

Wybór wzorca podyktowany jest dużą wrażliwością na błędy symulacji numerycznej struktur przepływu generowanych w takiej konfiguracji. Nieliniowość przebiegu funkcji gęstości powoduje, że nawet ten prosty układ przepływowy stanowi trudne do dokładnego odwzorowania zadanie numeryczne (Kowalewski, Redow, [68]). Zaproponowany wzorzec numeryczny pozwala na porównanie wydajności kodów numerycznych oraz oszacowanie ich dokładności. Dwuwymiarową reprezentację problemu opisuje podstawowy układ równań (2.17)-(2.18) i (2.19). Przyjmując jako warunek początkowy zerowe pole prędkości oraz temperaturę $T_{init} = 278K$, poszukiwano stanu stacjonarnego przepływu.

Bezwymiarowe liczby charakteryzujące powyższy przepływ to liczba Rayleigha Ra i liczba Prandtla Pr . Wzorzec został zdefiniowany dla $Ra = 1.503 \cdot 10^6$ oraz $Pr = 13.31$. Należy zwrócić uwagę na umowność wartości liczby Rayleigha zdefiniowanej dla materiałów o nieliniowej charakterystyce termicznej. Podana wartość odnosi się do referencyjnej temperatury $273K$ (temperatura krzepnięcia wody). W zakresie temperatur $273K - 283K$, ze względu na anomalię gęstości wody, liczba Rayleigha zmieniłaby się wielokrotnie dla innej temperatury referencyjnej.

Celem zwiększenia stabilności kodu i zmniejszenia wpływu błędów zaokrąglenia (*round-off errors*), część z opisanych programów numerycznych operuje w zmiennych bezwymiarowych. Bezwymiarowa temperatura \mathcal{G} , współrzędne X, Y oraz składowe prędkości V_1, V_2 są zdefiniowane w oparciu o skalę podana we wzorze (2.30).

2.4.2. Procedura weryfikacyjna

Do rozwiązania powyżej sformułowanego problemu użyto pięć opisanych wcześniej kodów numerycznych opartych na różnych metodach dyskretyzacji (metoda różnic skończonych, metoda objętości skończonych, metoda elementów skończonych, metoda bezsiatkowa). Porównania dokonano po weryfikacji każdego z kodów numerycznych przeprowadzając porównanie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz liczby Nusselta otrzymanych na kolejno zagęszczanych siatkach obliczeniowych (tzw. test wrażliwości siatki). Po wybraniu rozwiązania referencyjnego przeprowadzono porównawczą analizę błędów. Poniżej omówiono rezultaty przeprowadzonego testu i podstawowe dane ilościowe. Dla każdego z testowanych kodów numerycznych podano tabelarycznie ekstremalne wartości prędkości wewnątrz naczynia oraz średnią wartość liczby Nusselta na prawej, zimnej ścianie. Dodatkowo podano wartości ekstremalne prędkości na poziomej linii przecinającej centralnie kuwetę ($Y=0.5$) oraz pionowej linii przecinającej centralnie kuwetę ($X=0.5$). Poniżej w pierwszej kolejności omówiono podstawowe cechy rozwiązań otrzymanych przy użyciu omawianych programów, zwracając uwagę na zachowanie się wartości globalnych i na czas obliczeń. Porównanie globalnych wartości okazało się nie wystarczające dla oceny wydajności różnych metodologii rozwiązywania powyższego zadania. Okazuje się, że zbieżność wartości globalnych nie gwarantuje dokładności odtworzenia struktury przepływu. Dla przeanalizowania tego parametru zaproponowano nową metodę weryfikacji rozwiązań numerycznych, polegającą na analizie średnich błędów profili prędkości i temperatury ekstrahowanych dla wybranych, charakterystycznych przekrojów. Rezultaty tej analizy przedstawiono w punkcie 2.4.3 tego podrozdziału.

FRECON3V (metoda różnic skończonych)

Pierwszym z przetestowanych kodów numerycznych jest trójwymiarowy kod FRECON3V oparty na metodzie różnic skończonych. FRECON3V [103] jest zmodyfikowaną wersją kodu, który powstał w University of New South Wales w Sydney, i został wykorzystany w pracy do stworzenia bazy porównawczej rozwiązań. Algorytm programu pozwala na rozwiązywanie równań przepływu i energii dla stałej, ortogonalnej siatki obliczeniowej. Ogranicza to praktycznie stosowalność programu jedynie do różnych wariantów geometrii prostopadłościanu. Dla uniknięcia problemów z członem ciśnieniowym algorytm programu rozwiązuje układ równań przepływu płynu nieściśliwego w zmiennych wirowości i potencjału prędkości [104]. Zastosowanie półjawnej metody ADI (*Alternating Direction Implicit*) dla zmiennych przestrzennych i nad-relaksacji całkowania w czasie (*false transient*), pozwala na szybkie rozwiązywanie problemów przepływowych w trzech wymiarach. Prosta struktura programu, duża szybkość i dokładność obliczeń to podstawowe zalety omawianego kodu. Dzięki możliwości programowego zdefiniowania funkcyjnych zależności temperaturowych dla lepkości, gęstości, ciepła właściwego i współczynnika przewodnictwa cieplnego, FRECON3V mógł również być wykorzystany w obecnych badaniach do analizy wpływu zmiennych własności materiałowych płynu na strukturę przepływu.

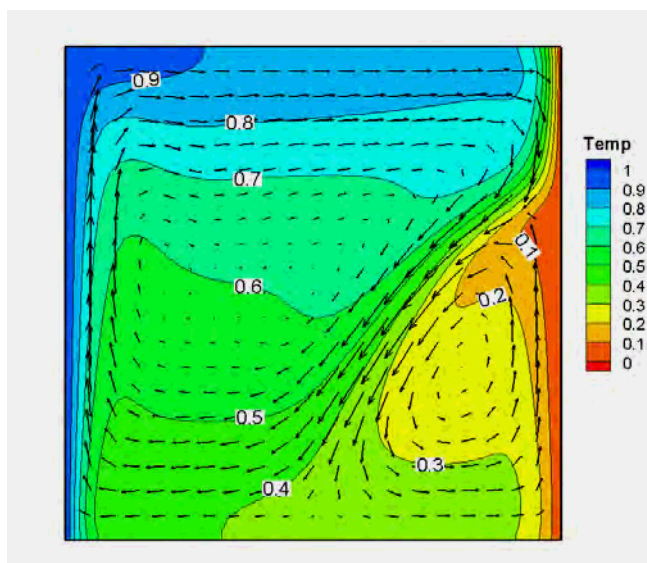
FRECON3V wykorzystuje do reprezentacji zmiennych tzw. potencjał wektorowy, sprawiający problemy przy definicji warunków brzegowych i w złożonych geometriach. Reprezentacja taka jest też często przyczyną kłopotów ze spełnieniem przez rozwiązania równania ciągłości. Okazało się jednak, że FRECON3V jest najefektywniejszym ze względu na czas obliczeniowy i najdokładniejszym jeśli chodzi o odwzorowanie struktury przepływu. Rozwiązania uzyskano dla stopniowo zagęszczanych prostokątnych jednorodnych, kartezyjskich siatek obliczeniowych. Ponieważ porównania dotyczą problemu płaskiego, przyjęto symetryczne warunki brzegowe i 5 węzłów obliczeniowych dla trzeciego wymiaru. W praktyce dla wektora prędkości oznacza to przyjęcie na tej granicy zerowania składowej normalnej i założenie poślizgu składowych stycznych prędkości. Dla pola temperatury przyjmuje się zerowanie strumienia ciepła w trzecim wymiarze, realizowane przez adiabatyczne warunki brzegowe. Dwuwymiarowe rozwiązania dla tak postawionego problemu zostały uzyskane dla siatek o rosnącej od 21x21 do 301x301 liczbie węzłów obliczeniowych. Wyniki tych obliczeń, oznaczone skrótem FRE, przedstawiono w Tabeli

2.8. W pierwszej części tabeli podano globalne wartości ekstremalne dla składowych prędkości i średnią wartość liczby Nusselta obliczoną dla prawej (zimnej) ścianki kuwety. W drugiej części tabeli zostały zestawione wartości minimalne i maksymalne składowych prędkości na prostych przecinających kuwetę poziomo ($Y=0.5$) i pionowo ($X=0.5$). Warunek zbieżności określony dla residuów wynosił 10^{-9} . Czas obliczeń wydłużał się z trzecią potęgą rozmiaru siatki obliczeniowej, od 180 sek. dla siatki najrzadszej (FRE1) do około 3.6×10^5 sek. dla siatki najgęstszej (FRE7). Czasy obliczeń zdefiniowano dla egzekucji programu na stacji roboczej pracującej w 32bitowym systemie operacyjnym Linux i wyposażonej w procesor Pentium4 HT/3GHz, 2GB RAM. Analiza zbieżności pozwoliła uznać rozwiązanie FRE7 za wzorcowe i rezultaty opisanych dalej symulacji odniesiono do tego rozwiązania.

Wektory prędkości oraz kontury temperatury otrzymane dla siatki 201x201 (FRE6) przedstawia rys. 2.8. Możemy tu wyróżnić dwie główne cyrkulacje płynu. Pierwsza cyrkulacja, zgodna z ruchem wskazówek zegara, odpowiada za transport płynu ogrzewanego na lewej gorącej ścianie. Po osiągnięciu krawędzi gorącej ścianki ogrzana ciecz przemieszcza się poziomo wzdłuż górnej adiabatycznej ścianki, po czym nie osiągając przeciwległej ścianki zimnej zawraca wzdłuż przekątnej naczynia, podążając zgodnie z izoliniami maksymalnej gęstości płynu. Druga, *anomalna* cyrkulacja, generowana jest wzdłuż zimnej ścianki. Wyporność wody rośnie ze spadkiem temperatury poniżej 277K i w związku z tym ochłodzona ciecz porusza się wzdłuż ścianki zimnej w kierunku ścianki górnej. Zimny strumień cieczy zderza się ze strumieniem gorącej cieczy unoszonej przez pierwotną cyrkulację. W ten sposób anomalia gęstości wody stworzyła ciekawą i jednocześnie trudną do symulacji numerycznych strukturę przepływu z tzw. punktem siodłowym utworzonym w miejscu kolizji obu cyrkulacji. Ze uwagi na wrażliwość takiej struktury na niedokładności numeryczne i zmiany warunków brzegowych jest ona szczególnie predysponowana do weryfikacji kodów numerycznych.

L_p	Siatka	U_{min}	U_{max}	V_{min}	V_{max}	Nu_c
FRE1	21x21	-141.9	101.4	-225.6	215.2	7.05
FRE2	41x41	-156.1	101.1	-177.0	213.1	6.98
FRE3	81x81	-158.7	102.9	-175.7	217.3	6.60
FRE4	121x121	-158.8	103.1	-175.8	221.4	6.52
FRE5	161x161	-159.1	103.3	-175.9	222.0	6.49
FRE6	201x201	-159.2	103.3	-175.9	221.9	6.48
FRE7	301x301	-159.2	103.4	-176.0	222.5	6.47

Tabela 2.8. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczby Nusselta dla programu FRECON3V



Rys. 2.8. Naturalna konwekcja wody w różnicowo grzonym kwadracie. Kontury temperatury i wektory prędkości otrzymane w obliczeniach kodem FRECON3V

FLUENT (metoda objętości skończonych)

Jednym z powszechniej stosowanych pakietów obliczeniowych numerycznej mechaniki płynów jest program FLUENT [101]. Dzięki zastosowaniu metody objętości skończonych i całkowego sformułowania zasad zachowania masy i pędu (2.1)-(2.3), możliwy jest elastyczny wybór niestrukturalnych i nieortogonalnych siatek obliczeniowych. Program pozostawia użytkownikowi dużą swobodę wyboru modelu fizycznego, algorytmu numerycznego oraz schematów dyskretyzacji pochodnych przestrzennych i czasowych. Zaletą tego programu jest możliwość definiowania własnych modułów (tzw. *user defined function*), odpowiedzialnych za odwzorowanie własności materiałowych, warunków brzegowych czy też modyfikacje samego algorytmu numerycznego. W obliczeniach prezentowanych w pracy wykorzystywano tą możliwość do zaimplementowania w obliczeniach nieliniowej zależności gęstości od temperatury (2.49).

Obliczenia wykonane programem FLUENT wykonano dla kilku jednorodnych siatek kartezyjskich, a uzyskane wartości ekstremalne, oznaczone skrótem FLU, przedstawiono w Tabeli 2.9. Obliczenia wykonano poszukując stacjonarnego rozwiązania przepływu laminarnego, stosując metodę projekcyjną SIMPLEC do wyznaczenia wartości ciśnienia oraz schemat dyskretyzacji przestrzennej QUICK. Czas obliczeń tym programem jest znacznie dłuższy niż miało to miejsce w dla poprzedniego kodu numerycznego. W związku z tym pierwotnie obliczenia wykonywano z pojedynczą precyzją zmiennoprzecinkowej reprezentacji liczb. Jednak uzyskiwane wyniki, porównane z wzorcem FRE6, wykazywały znaczne błędy, nawet dla bardzo gęstych siatek obliczeniowych (190x190 i 380x380). W związku z tym wszystkie inne rozwiązania prezentowane w niniejszej pracy poszukiwano w podwójnej precyzji. W rezultacie testów kod oceniono jako stosunkowo wolny ale zapewniający uzyskanie dokładnego rozwiązania przy odpowiednim zagęszczeniu siatki.

Lp	Siatka	U_{\min}	U_{\max}	V_{\min}	V_{\max}	Nu_c
FLU0	38x38	-158.94	105.31	-172.38	208.12	6.59
FLU1	76x76	-159.39	103.57	-173.61	220.60	6.47
FLU2	190x190	-159.77	103.51	-174.57	223.21	6.51
FLU3	380x380	-159.73	103.55	-174.73	223.52	6.50

Tabela 2.9. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczby Nusselta dla programu FLUENT

FIDAP (metoda elementów skończonych)

Kolejnym z kodów numerycznych wykorzystanych w tej pracy jest program FIDAP v. 8.7.0 [102]. Podobnie jak uprzednio opisany pakiet obliczeniowy, FIDAP umożliwia stosowanie w symulacjach szerokiej gamy modeli fizycznych i algorytmów numerycznych. Dyskretyzacja w Program FIDAP oparta jest na metodzie elementów skończonych. Rozwiązanie nieliniowego układu równań, będącego wynikiem dyskretyzacji metodą elementu skończonego może być uzyskane metodami projekcyjnymi, przy wykorzystaniu rozdzielania zmiennych ciśnienia od zmiennych prędkości lub metodami sprzężonymi.

Stacjonarne dwuwymiarowe rozwiązanie dla wzorcowego problemu otrzymano programem FIDAP, stosując kwadratowe elementy z funkcjami kształtu drugiego stopnia (elementy Hermite'a). Nieliniowy układ równań będący wynikiem dyskretyzacji został rozwiązany przez rozdzielanie zmiennych ciśnienia i prędkości. W Tabeli 2.10 zebrano wyniki dotyczące ekstremów globalnych dla składowych prędkości uzyskane dla dwóch siatek, otrzymane dla residuów na poziomie 10^{-4} . Główną zaletą programu FIDAP jest szybkość obliczeń, zadanie FID1 rozwiązuje się pięć razy szybciej niż odpowiadające mu gęstością siatki zadanie FLU0 z zastosowaniem kodu FLUENT. Wyniki otrzymane dla wybranych punktów kontrolnych nawet dla rzadkich siatek 38x38 (FID1) wydają się bardzo zbliżone do tych uzyskanych dla znacznie gęstszych siatek poprzednich kodów. Jednakże ich dokładniejsza analiza, uwzględniająca skomplikowaną strukturę przepływu wykazała znaczące rozbieżności w porównaniu ze wzorcem (por. rys. 2.10).

Lp	Siatka	U_{min}	U_{max}	V_{min}	V_{max}	Nu_c
FID1	39x39	-155.10	104.30	-178.07	227.02	6.64
FID2	77x77	-159.03	105.38	-174.93	225.17	6.44

Tabela 2.10. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczby Nusselta dla programu FIDAP

SOLVSTR (metoda różnic skończonych – opis rozdział 2.2)

Mimo, że reprezentacja równań w kodzie SOLVSTR jest podobna do zastosowanej w kodzie FRECON3V, jednakże kod SOLVSTR jest z założenia tylko dwuwymiarowy i dzięki temu może korzystać z nie sprawiającej kłopotów numerycznych skalarnej funkcji prądu. Szybkość programu SOLVSTR przy rozwiązywaniu zadanego problemu była porównywalna z osiąganą przez program FRECON3V. Szacunkowy czas rozwiązania zadania z siatką obliczeniową 200x200 (przy akceptowalnym residuum $< 10^{-9}$) wynosił 10^5 sekund. Jednak obserwowana zbieżność rozwiązania była znacznie wolniejsza niż w przypadku kodu FRECON3V, utrudniając nawet dla najgęstszych siatek osiągnięcie rezultatów różniących się od wzorca mniej niż 1%. W efekcie porównania dokładności odwzorowania struktury przepływu programu SLOWSTR wypadł gorzej w porównaniu z programem Fluent i Frecon (Tabela 2.16).

Lp	Siatka	U_{min}	U_{max}	V_{min}	V_{max}	Nu_c
STR1	50x50	-178.51	116.425	-191.450	248.063	6.63
STR2	100x100	-168.73	108.743	-183.605	237.538	6.78
STR3	150x150	-165.34	106.777	-180.327	232.612	6.73
STR4	200x200	-163.60	105.728	-179.554	229.670	6.67
STR5	250x250	-162.45	105.047	-177.356	227.635	6.65

Tabela 2.11. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczby Nusselta dla programu SOLVSTR

SOLVMEF (metoda bezsiatkowa – opis rozdział 2.3)

Powyżej sformułowany problem rozwiązano również metodą bezsiatkową z wykorzystaniem opisanej wcześniej aproksymacji DAM. Jak wspomniano, rozwiązywanie otrzymanego w wyniku aproksymacji algebraicznego układu równań wymaga znacznie dłuższego czasu obliczeń w porównaniu z innymi kodami. Czas obliczeniowy potrzebny do otrzymania zbieżności na poziomie 10^{-6} na siatce obliczeniowej 100x100 okazał się około 50 razy dłuższy niż dla analogicznego przypadku rozwiązywanego programem SOLVSTR. W dodatku uzyskane rozwiązanie nie spełnia podstawowych kryteriów poprawności (błąd powyżej 5%). Dla porównania wartości ekstrem globalnych zostały zebrane w Tabeli 2.12.

Lp	Siatka	U_{min}	U_{max}	V_{min}	V_{max}	Nu_c
MEF1	50x50	-157.27	98.23	-171.18	254.21	6.89
MEF2	100x100	-161.87	103.78	-167.58	225.94	6.22

Tabela 2.12. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczby Nusselta dla programu FLUENT

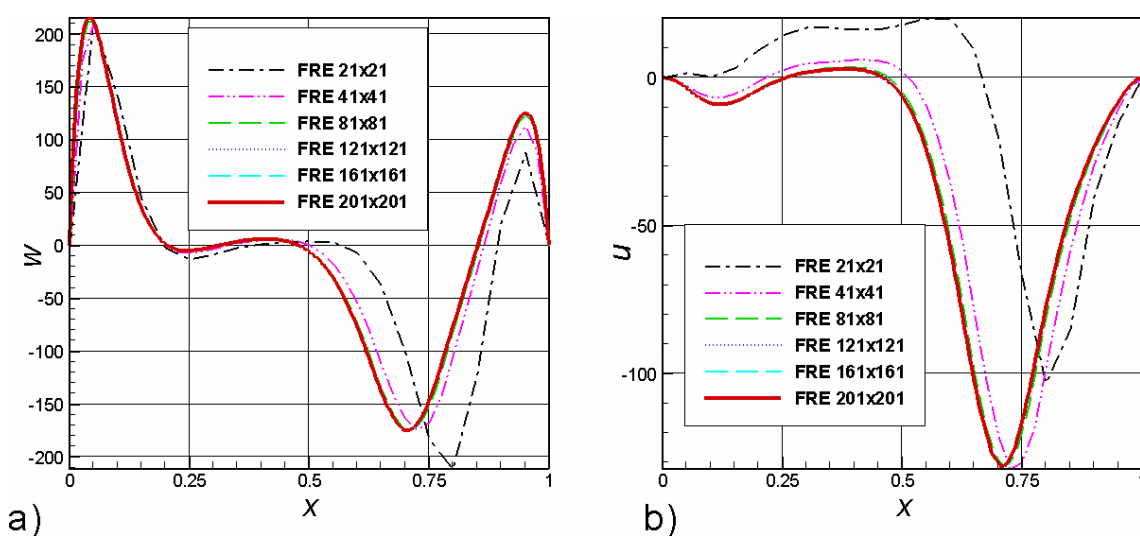
2.4.3. Definicja rozwiązania wzorcowego

Praktykowane powszechnie porównywanie globalnych wartości (*extremów*) rozwiązań nie wystarcza dla określenia dokładności otrzymanego rozwiązania. Przykładem jest porównanie zamieszczonego w Tabeli 2.8. zestawienia wartości globalnych dla różnych siatek programu FRE

z profilami prędkości otrzymanymi dla tych przypadków (Rysunek 2.9). Można zauważyć, że rozwiązanie dla siatki 40x40 (FRE2), mimo, że charakteryzuje się małymi błędami globalnymi, różni się w niektórych punktach profilu pionowej składowej prędkości niemal o 50% od rozwiązania wzorcowego (Rysunek 2.9.a). Podobne rozbieżności widoczne są też dla poziomej składowej prędkości.

Powyższe fakty dowodzą, że modelowanie naturalnej konwekcji z silnie nieliniowym członem wypornościowym wymaga dokładnej analizy i gęstych siatek obliczeniowych. Porównując na przykład liczbę Nusselta dla najrzadszej siatki (FRE1) i dla siatki dwa razy gęstszej (Tabela 2.8) można błędnie wywnioskować, że oba rozwiązania przedstawiają taką samą konfigurację. Porównanie profili składowych prędkości (rys. 2.9.) jasno wskazuje na duże rozbieżności w obu przypadkach. Widać, że rozwiązania charakteryzujące się małymi błędami (2%-5%) odwzorowania wartości globalnych, i tym samym kwalifikowane zazwyczaj w literaturze jako poprawne, mogą w istocie opisywać różne struktury przepływu. Takie błędy mogą być decydujące przy modelowaniu dodatkowych zjawisk, np. modelowania procesu krzepnięcia, gdzie nieliniowe charakterystyki równań przepływowych sprzęgają się z deformującą się, ruchomą granicą frontu fazowego.

Dla przeprowadzenia ilościowej analizy jakości odwzorowania struktury przepływu zaproponowano nową metodę weryfikacji. Do porównań wybrano profile składowych prędkości i temperatury otrzymane na podstawie **rozwiązania wzorcowego** (referencyjnego), otrzymanego programem FRECON3V na siatce 201x201 (FRE5). Wybrane profile aproksymowano wielomianami wyższego rzędu, co umożliwi ich porównanie z innymi rozwiązaniami bez dodatkowej interpolacji (przy różnych rozmiarach siatek). Profile wyznaczono dla trzech przekrojów: poziomą i pionową linię przecinającą domenę obliczeniową ($Y=0.5$ i $X=0.5$), oraz pionową linię przecinającą obszar punktu siodłowego przepływu ($X=0.9$). Wartości współczynników wielomianów interpolujących profil składowych prędkości V_1 , V_2 oraz temperatury T wzdłuż prostych $X = 0.5$, $Y = 0.5$ i $X = 0.9$ zostały przedstawione w tabelach 2.11-2.13. Profile te zostały przyjęte jako numeryczne rozwiązanie wzorcowe dla omawianego zagadnienia. Współczynniki zostały otrzymane przy pomocy nieliniowej metody najmniejszych kwadratów (algorytm Marquardt-Levenberg). Stopień wielomianów oraz dokładność współczynników zostały wybrane w ten sposób, aby błąd interpolacji (stosunek odchylenia standardowego do maksymalnej wartości) był mniejszy niż 1 %.



Rys. 2.9. Wartości składowych prędkości dla poziomego centralnego przekroju ($Y=0.5$) uzyskane kodem FRECON. (a) – pionowa składowa prędkości, (b) - pozioma składowa prędkości

	V_1	V_2	T
a ₀	0.653255375988277	-0.0182133390825522	0.375731268271168
a ₁	-236.702203764653	-0.534506952806084	0.0646566206852292
a ₂	1443.71621734046	-4649.62374660758	-3.44261930694882
a ₃	-13999.9971459506	9166.34090898581	80.5716617494023
a ₄	-48978.2873061909	184756.318840003	-849.389178138508
a ₅	769502.177696391	-2267214.57474188	5426.31856180659
a ₆	-2826411.42861687	13921830.6389979	-20619.6870300723
a ₇	5049355.25968998	-50905496.7836152	47584.9389176856
a ₈	-4889309.49455426	117326421.048108	-66982.5680747791
a ₉	2473294.32955038	-175454949.94745	54146.8042661755
a ₁₀	-514661.642022168	170542299.447756	-18312.94874948
a ₁₁		-104264882.357183	-5638.00828334596
a ₁₂		36505160.4951902	6840.33395345218
a ₁₃		-5592440.58260601	-1672.49783568399

Tabela 2.13. Wartości współczynników dla profilu wzdłuż prostej $X = 0.5$

	V_1	V_2	T
a ₀	-0.971923736403444	1.00212115245059	0.999467521831559
a ₁	435.542611756185	12877.9988611009	-6.23069515529224
a ₂	-35897.4472988611	-259340.543848846	-18.9999577130502
a ₃	1124550.4608794	2053796.14649148	433.527770212382
a ₄	-19836290.5781327	-5602841.78532119	7318.66314332766
a ₅	217415780.824244	-30304885.3151783	-180265.707163689
a ₆	-1573770830.54861	358963997.276281	1714792.57838228
a ₇	7864305725.45593	-1697089432.98434	-9862261.15685317
a ₈	-27964717917.5742	4892293454.42925	38472869.7475459
a ₉	72090244360.2021	-9357882052.45715	-106665059.51901
a ₁₀	-135881981012.186	12081139841.5678	214297962.730994
a ₁₁	187042192305.203	-10321221406.5473	-313025047.586471
a ₁₂	-185722571203.416	5462280648.88341	328987879.084903
a ₁₃	129406337902.134	-1489621427.86707	-242193161.156869
a ₁₄	-59987319824.8771	62096039.6233113	118435075.266555
a ₁₅	16604163672.9515	43140732.9300454	-34530031.2923873
a ₁₆	-2075551754.938	0.321619021644532	4539519.05438302

Tabela 2.14. Wartości współczynników dla profilu wzdłuż prostej $Y = 0.5$

	U	W	T
a ₀	1.37834316239398	1.11560341761746	0.308900034946171
a ₁	869.803859921856	-682.103162659822	-0.574121199057708
a ₂	74379.0946531731	64546.3444091368	74.382226060503
a ₃	-3924258.51426546	-2657731.00888943	-3161.22612928187
a ₄	89435741.7003693	60098287.7693382	74817.9579968359
a ₅	-1217186200.6406	-822661490.080435	-1125745.01070913
a ₆	10971526417.6405	7425487150.03986	11435967.2156945
a ₇	-69219909243.1401	-46729243229.224	-81662746.1201518
a ₈	316473663407.374	212583413470.936	421890116.068198
a ₉	-1072529330832.37	-715751344227.008	-1608940868.43137
a ₁₀	2732146343933.84	1809508968294.41	4588612041.2787
a ₁₁	-5267137304120.64	-3459353036180.82	-9850623665.12099
a ₁₂	7684697385210.4	5001906037363.17	15919604870.6355
a ₁₃	-8422179003474.85	-5429815720822.07	-19229337194.963
a ₁₄	6816871501820.86	4350956298121.35	17073562106.7329
a ₁₅	-3949555692631.44	-2494534120078.54	-10804649895.8457

a ₁₆	1548473261831.82	967384927672.173	4608652340.13695
a ₁₇	-367847357872.57	-227214939183.605	-1186818611.97188
a ₁₈	39966515019.2774	24398428716.3919	139329555.368117

Tabela 2.15. Wartości współczynników dla profilu wzdłuż prostej $X = 0.9$

Za miarę dokładności wyznaczenia wartości funkcji $f(x_i)$ badanego rozwiązania numerycznego, otrzymanego dla $N \times N$ węzłów, przyjęto odchylenie standardowe obliczane w stosunku do wartości $w(x_i)$ wielomianu rozwiązania wzorcowego (Tabele 2.13-15) w węzłach x_i siatki:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - w(x_i))^2 \quad (2.51)$$

Dla trzech wybranych profili odchylenia standardowe ε składowych prędkości U , V i temperatury T opisuje dziewięć wskaźników: ε_{u1} , ε_{w1} , ε_{t1} , ε_{u2} , ε_{w2} , ε_{t2} , ε_{u3} , ε_{w3} oraz ε_{t3} . Wartości te obliczone dla testowanych przypadków zebrano w tabeli Tabeli 2.16 i pokazano na rys. 2.10.

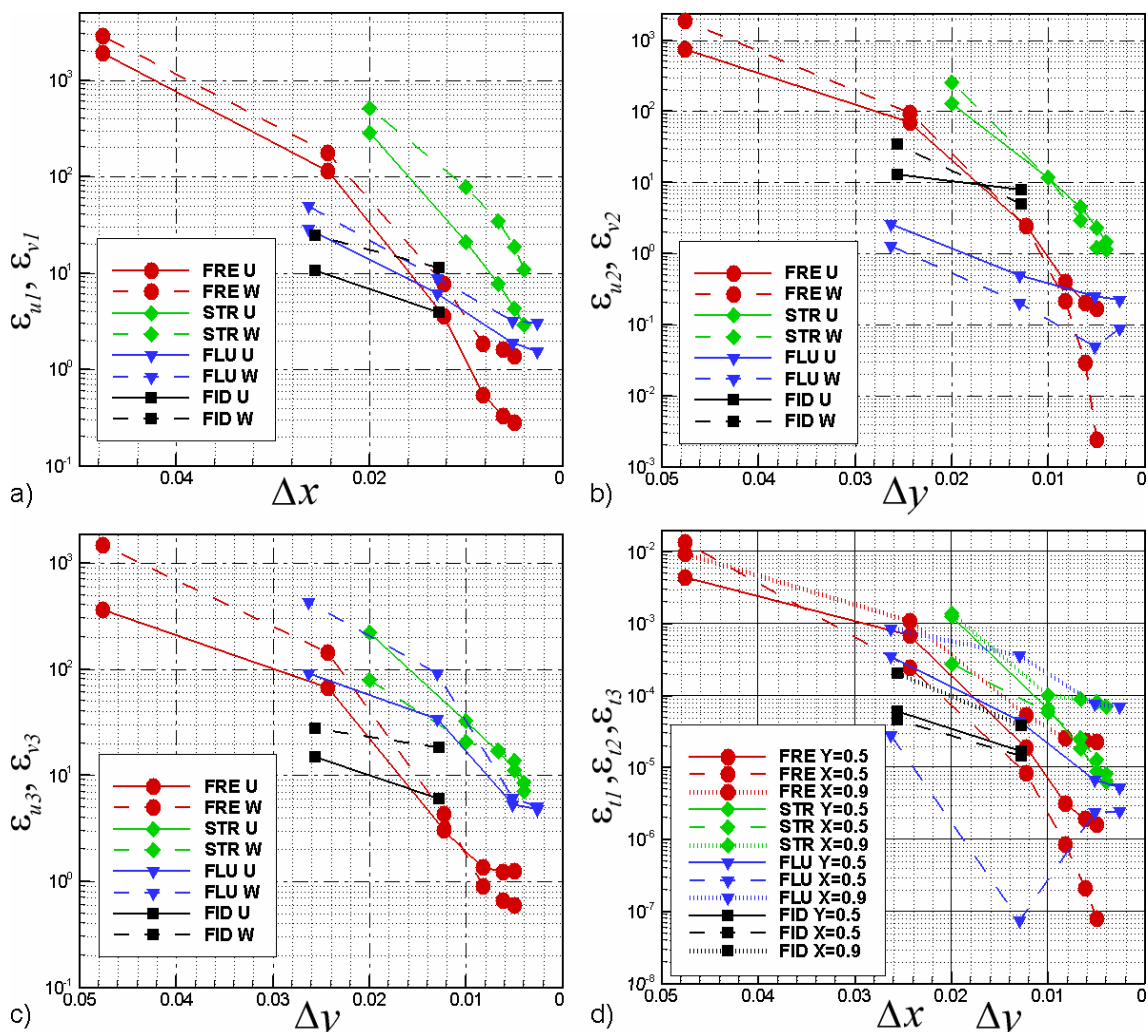
Zaproponowana miara dokładności może być łatwo użyta do oceny wydajności dowolnego rozwiązania numerycznego, bez względu na wymiar siatki, na jakiej zostało otrzymane. Przyjmując trzy odchylenia standardowe jako dopuszczalny błąd rozwiązania, można uznać, że tylko rozwiązania FRE4-7 i FLU3 spełniają kryterium dokładności, czyli są wystarczająco bliskie rozwiązaniu referencyjnego.

	Y=0.5			X=0.5			X=0.9		
	ε_{u1}	ε_{w1}	ε_{t1}	ε_{u2}	ε_{w2}	ε_{t2}	ε_{u3}	ε_{w3}	ε_{t3}
FRE6	0.2831	1.3876	1.64E-06	0.1670	0.0024	8.03E-08	1.2667	0.6012	2.28E-05
FRE5	0.3284	1.6127	1.94E-06	0.2045	0.0293	2.14E-07	1.2213	0.6626	2.35E-05
FRE4	0.5411	1.8601	3.20E-06	0.4004	0.2127	8.77E-07	1.3658	0.9012	2.57E-05
FRE3	3.5512	7.7287	1.94E-05	2.4778	2.4683	8.55E-06	3.0392	4.3332	5.45E-05
FRE2	114.45	178.24	6.98E-04	69.645	95.363	2.48E-04	67.3915	144.683	1.10E-03
FRE1	1893.7	2857.7	4.40E-03	753.31	1874.6	1.36E-02	364.095	1492.25	9.50E-03
FLU3	1.5510	3.0529	5.32E-06	0.2201	0.0892	2.50E-06	4.8378	5.1385	7.08E-05
FLU2	1.8745	3.1868	6.84E-06	0.2514	0.0488	2.43E-06	5.3223	6.1924	7.79E-05
FLU1	6.1705	8.8068	4.52E-05	0.4913	0.2016	7.51E-08	34.2911	91.7224	3.68E-04
FLU0	28.760	49.564	3.55E-04	2.5880	1.2864	2.88E-05	91.4327	433.448	8.58E-04
FID2	3.8785	11.347	1.70E-05	7.7958	5.0095	1.48E-05	5.9907	18.3377	3.87E-05
FID1	10.678	24.737	6.03E-05	13.056	35.092	4.70E-05	15.0269	27.8671	2.04E-04
STR5	2.8876	10.924	8.17E-06	1.4492	1.1331	6.39E-06	7.0646	8.5051	7.10E-05
STR4	4.3005	18.850	8.95E-06	2.3089	1.2263	1.30E-05	11.1198	13.5929	8.40E-05
STR3	7.6570	34.860	1.87E-05	4.5268	2.9492	2.61E-05	16.8484	17.3370	9.09E-05
STR2	20.769	77.964	6.67E-05	11.768	11.837	5.88E-05	32.4156	20.6114	1.01E-04
STR1	283.48	506.50	1.26E-03	127.88	251.92	2.83E-04	221.818	79.4415	0.0014
MEF1	586.31	1176.3	3.48E-03	214.57	799.64	5.34E-04	267.977	481.019	0.0038

Tabela 2.16. Wartości estymatorów dla składowych prędkości U , V oraz temperatury T wzdłuż prostych $Y = 0.5$, $X = 0.5$ oraz $X = 0.9$

Analiza wrażliwości siatki wykonana dla pięciu opisanych powyżej programów pozwala na ocenę zbieżności rozwiązań i na oszacowanie ich asymptotycznego zachowania. Na rys. 2.10 widać, na przykład, bardzo powolną zbieżność rozwiązań programu SOLVSTR w porównaniu z programem FRECON. Analiza wartości odchylenia standardowego wyznaczonego dla kolejnych siatek i rozwiązań dostarczanych przez programy FLUENT i FIDAP wykazuje zbieżność liniową, co jest także dużo gorszym wynikiem niż ten otrzymany przez programy FRECON, czy nawet

SOLVSTR. Rezultat ten jest zaskakujący, gdyż teoretyczny wykładnik zbieżności wszystkich analizowanych kodów jest ten sam i wynosi dwa.



Rys. 2.10. Miara dokładności rozwiązania numerycznego w funkcji odległości między węzłami:
 (a) – $\varepsilon_{u1}, \varepsilon_{v1}$ dla składowych prędkości wzdłuż prostej $Y=0.5$;
 (b) – $\varepsilon_{u2}, \varepsilon_{v2}$ dla składowych prędkości wzdłuż prostej $X=0.5$;
 (c) – $\varepsilon_{u3}, \varepsilon_{v3}$ dla składowych prędkości wzdłuż prostej $X=0.9$;
 (d) – $\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}, \varepsilon_{t3}$ dla temperatury wzdłuż prostych $Y=0.5, X=0.5$ i $X=0.9$

Analizując rys. 2.10.d można zauważyć, że błąd rozwiązania dla temperatury znacznie szybciej maleje niż ma to miejsce dla składowych prędkości. Wskazuje to na niewielki wpływ członu konwekcyjnego na zbieżność rozwiązania. Wynika z tego, że porównywanie samej temperatury nie jest wystarczającym kryterium poprawności rozwiązania, przynajmniej dla analizowanej konfiguracji.

Metoda bezsiatkowa zastosowana w programie SOLVMEF nie pozwala na osiągnięcie wystarczającej dokładności rozwiązań. Błąd obliczony według powyżej zdefiniowanego kryterium jest nieakceptowalnie duży, a bardzo powolna zbieżność kodu uniemożliwiła przeprowadzenie testów dla dużej liczby punktów kolokacyjnych. Zmiana metody rozwiązywania układu równań na bardziej zaawansowaną oraz wykorzystanie tzw. *preconditioningu* być może pozwoliłaby pokonać te trudności.

Podsumowując, zdefiniowany wzorzec numeryczny pozwala na wiarygodną ocenę dokładności i wydajności kodów numerycznych dla przepływów lepkich i termicznych. Może być wykorzystywany w pierwszym etapie weryfikacji – weryfikacji programu. Przeprowadzone testy pokazały na nieadekwatność oceny zbieżności na podstawie analizy punktowych wartości wybranych zmiennych. Porównane tutaj dwa kody komercyjne i trzy akademickie wykazują znaczne różnice w szybkości osiągnięcia zbieżnego i dokładnego rozwiązania. Stosując definicję błędu opartą na odchyleniu standardowym dla wybranych profili prędkości i temperatury stwierdzono, że tylko rozwiązania kodów FRECON3V i FLUENT są dokładne. Jednak uzyskanie dokładnego rozwiązania komercyjnym programem FLUENT wymagało siatki obliczeniowej składającej się z 380x380 węzłów, prawie dwa razy gęstszej od tej użytej dla uzyskania podobnego rozwiązania programem FRECON3V. Niewątpliwie komplikacje wewnętrznej struktury bardzo rozbudowanych uniwersalnych programów komercyjnych mogą utrudniać uzyskanie dokładnego rozwiązania. Stosowanie wzorców numerycznych, takich, jak powyżej zaproponowano, umożliwia obiektywną ocenę jakości rezultatów generowanego tymi kodami.

3. Metoda oceny wiarygodności symulacji numerycznych

W rozdziale tym przedstawiono opis zaproponowanej metody oceny wiarygodności symulacji numerycznych dla przepływów lepkich i termicznych. Przedstawiono algorytm identyfikacji parametrów, które mają kluczowe znaczenie dla analizowanego przepływu oraz zaproponowano sposób określania dokładności z jaką należy przeprowadzić pomiary eksperymentalne w celu wykonania pełnej walidacji oprogramowania. Na zakończenie metoda została zilustrowana przykładem, w którym (i) sprawdzono czy zaproponowana konfiguracja eksperymentalna może zostać wykorzystana do walidacji symulacji numerycznych, (ii) zidentyfikowano istotne parametry dla potrzeb definicji wzorca eksperymentalnego dla przepływów lepkich i termicznych oraz (iii) określono konieczną dokładność pomiarów eksperymentalnych.

3.1. Opis metody

W metodzie oceny wiarygodności symulacji numerycznych dla przepływów lepkich i termicznych zdecydowano się wykorzystać analizę wrażliwości badając zmiany rezultatów obliczeń towarzyszące zmianom parametrów wejściowych. Parametrami wejściowymi dla tego typu symulacji są zarówno warunki brzegowe, warunki początkowe, wartości stałych termofizycznych dla modelowanych cieczy lub współczynniki definiujące zależności dla tych wielkości od niewiadomych oraz każdy inny parametr definiowany jako warunek początkowy dla takich obliczeń. Można przyjąć, że dysponujemy N parametrami wejściowymi p_1, p_2, \dots, p_N od których zależy rezultat symulacji numerycznej, który dla omawianej klasy przepływów stanowią pole prędkości \vec{v} i temperatura T . Dla celów analizy wrażliwości proces rozwiązywania zadania z numerycznej mechaniki płynów potraktowano jako „czarną skrzynkę”, której na wejściu zadajemy N parametrów, a wyniku otrzymujemy pole prędkości i pole temperatury. Można przyjąć że mamy funkcję F :

$$F : P_1 \times \dots \times P_N \rightarrow \mathfrak{R}(\vec{v}, T) \quad (3.1)$$

określona na iloczynie kartezjańskim przestrzeni parametrów P_1, \dots, P_N . Zbiory te mogą być zarówno ciągłe jak i dyskretne. Wartością tej funkcji jest pole prędkości i temperatury, spełniające dyskretną postać równań (2.1)-(2.3) z dokładnością ε określoną na podstawie metod weryfikacji.

Zdecydowano się wykorzystać w niniejszej metodzie analizę wrażliwości, która umożliwia badanie zachowania układu pod wpływem zmian parametrów wejściowych. Analiza wrażliwości zostanie wykorzystana do identyfikacji kluczowych parametrów dla analizowanego przepływu oraz określenia dokładności z jaką należy wykonać pomiary w celu przeprowadzenia walidacji eksperymentalnej. Ponadto układ parametrów wejściowych, który będzie charakteryzował się najmniejszą wrażliwością na ich zmiany będzie uznawany jako bardziej wiarygodny w stosunku do tego, który charakteryzuje się dużą wrażliwością.

Analiza wrażliwości stosowana jest szeroko w numerycznej mechanice ciała stałego, często będąc uzupełnieniem symulacji numerycznej. Znajduje zastosowanie przy określaniu parametrów charakterystycznych dla badanego zjawiska [106], projektowaniu optymalnych kształtów i ich optymalizacji [107,108], a także przy estymacji błędów i niepewności pomiarowej [109,110]. Parametryczna analiza wrażliwości została również wykorzystana do analizy problemów liniowego [111] i nieliniowego transportu ciepła [112,113]. Dla potrzeb oceny niepewności pomiarowej ze względu na własności termo-fizyczne cieczy Borggaard, Pelletier i Turgeon [114] wyprowadzili ogólne równania wrażliwości ze względu na parametry występujące w opisie przepływów termicznych. Wszystkie powyższe zastosowania polegały na odpowiednim przekształceniu układu równań w ten sposób aby otrzymać jako niewiadome pochodne rozwiązań względem parametrów dla których wrażliwość się analizuje. Podejście to wymaga numerycznego rozwiązania podstawowego układu równań, a także dodatkowego przekształcenia tego układu równań do układu, w którym występują jako niewiadome pochodne otrzymanego rozwiązania względem parametrów wraz z rozwiązaniem tego układu. Proces ten jest bardzo żmudny w przypadku równań nieliniowych, samo wyprowadzenie równań nie jest trywialne [112], a dodatkowe rozwiązanie

numeryczne układu stanowi problem podobnego rzędu co zagadnienie wyjściowe. Toteż zamiast analizowania pochodnych rozwiązań względem parametrów otrzymanych na podstawie równań (2.1)-(2.3) zdecydowano się analizować bezpośrednio wrażliwość pewnego funkcjonału (na przykład może to być norma F) zdefiniowanego dla funkcji F przy zmianach parametrów p_1, \dots, p_N . Funkcjonał dla funkcji F może być definiowany w ten sposób, aby porównywać tylko te wartości z symulacji numerycznej które jesteśmy w stanie zmierzyć eksperymentalnie. Na przykład, gdy eksperymentalnie mierzona jest temperatura w pewnym określonym punkcie domeny obliczeniowej, to funkcjonał dla funkcji F , określony na wyniku symulacji numerycznej, powinien zwracać wartość średnią temperatury z pewnego wycinka obszaru odpowiadającego miejscu w którym wykonywany jest pomiar. Natomiast jeśli dysponujemy pełnymi danymi dotyczącymi pola temperatur dla całego pola przepływu, funkcjonałem może być norma euklidesowa tego pola. Kilka przykładowych funkcjonałów, oznaczanych dalej jako $\|F\|$ i wykorzystanych w niniejszej pracy dla celów walidacji, zostanie przedstawione w dalszej części pracy.

Głównym wadą proponowanego podejścia jest to, iż konieczne jest wielokrotne rozwiązywanie tego samego układu równań (2.1)-(2.3) z różnymi parametrami wejściowymi. Na podstawie wykonanych obliczeń dla różnych parametrów określa się wrażliwość na zmianę parametrów. Jednakże, z drugiej strony nie zachodzi konieczność modyfikowania i dyskretyzowania kolejnych równań, co umożliwia stosowanie niniejszej metody również wykonując obliczenia przy użyciu programów komercyjnych. Metoda polega na przetwarzaniu uzyskanych rezultatów i jest w pełni analizą *a posteriori*, podobnie jak metody służące do weryfikacji symulacji numerycznych.

W celu określenia wrażliwości, tzn. określenia odpowiedzi układu na zmianę jednego z parametrów wejściowych p_i o wielkość δ_i , będziemy analizowali wielkości:

$$\frac{DF}{\delta_i^+} = \frac{\|F(p_1, \dots, p_i + \delta_i, \dots, p_N) - F(p_1, \dots, p_i, \dots, p_N)\|}{\delta_i} \quad (3.2)$$

$$\frac{DF}{\delta_i^-} = \frac{\|F(p_1, \dots, p_i - \delta_i, \dots, p_N) - F(p_1, \dots, p_i, \dots, p_N)\|}{\delta_i} \quad (3.3)$$

które są odpowiednikami prawostronnej i lewostronnej pochodnej cząstkowej funkcji F względem parametru p_i . Korzystając ze wzoru Taylora można by rozpisać wartość funkcji F w punkcie $(p_1, \dots, p_i + \delta_i, \dots, p_N)$ względem punktu $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_N)$, a następnie, po zaniedbaniu wyrazów wyższego rzędu (powyżej drugiego) otrzymuje się dokładnie pochodną cząstkową funkcji F względem p_i . Jednakże zdecydowano się analizować wrażliwość badając wielkości (3.2)-(3.3), ponieważ funkcja F nie jest liniowa, ze względu na parametry wejściowe.

Wielkość wartości δ_i powinna być dobierana w ten sposób aby wartość parametru wejściowego p_i mogła być swobodnie kontrolowana eksperymentalnie. Dla przykładu, gdy parametr wejściowy p oznacza warunek brzegowy dla temperatury to interwał δ powinien mieć taką wartość aby warunek brzegowy p oraz $p + \delta$ były możliwe do zrealizowania eksperymentalnie i były to wartości rozróżnialne. Natomiast jeżeli parametr p_i oznacza wartość wielkości termofizycznej to interwał δ powinien być równy dokładności z jaką wartość ta została obliczona dla przedziału temperatur których dotyczy przepływ.

Kluczowe parametry przepływu dla badanej konfiguracji będą identyfikowane na podstawie analizy wartości współczynników (3.2) i (3.3). Analizując wartości współczynników (3.2) i (3.3) można sprawdzić czy zmiany są niewielkie, w przybliżeniu stałe czy też istotnie rosną lub maleją. Zatem parametr p_i będzie uznawany jako **nieistotny**, jeśli

$$\max\left(\frac{DF}{\delta_i^+}, \frac{DF}{\delta_i^-}\right) < \varepsilon_d(F) \quad (3.4)$$

gdzie po prawej stronie równania (3.4) znajduje się estymator błędu z jakim jest możliwe wyznaczenie funkcjonału dla F na podstawie danych eksperymentalnych, lub w przypadku braku danych eksperymentalnych przyjęty z góry ustalony próg istotności. Próg ten można wyznaczyć analizując jak względna zmiana parametru wpłynęła na zmianę wartości funkcjonału obliczając

$$\varepsilon_{di}^{\pm}(F) = \frac{\|F(p_1, \dots, p_i \pm \delta_i, \dots, p_N) - F(p_1, \dots, p_i, \dots, p_N)\|}{\|F(p_1, \dots, p_i, \dots, p_N)\|} \quad (3.5)$$

i przyjmując pewnien próg istotności, na przykład równy 3%. W przeciwnym przypadku, gdy parametr p_i nie spełnia warunku (3.4), lub wyliczony dla niego próg istotności (3.5) jest wyższy niż 3%, parametr będzie uznawany za **istotny**.

Na podstawie wyżej wymienionych kryteriów jesteśmy w stanie zidentyfikować zbiór kluczowych parametrów przepływu $\{p_1^*, \dots, p_k^*\} \subseteq \{p_1, \dots, p_N\}$, oraz określić dokładność z jaką muszą zostać wykonane pomiary, która dla ustalonego funkcjonału F wynosi:

$$\varepsilon_i(F) = \min(\varepsilon_{di}^+(F), \varepsilon_{di}^-(F)) \quad (3.6)$$

Gwarantuje to, że zmiana parametru p_i^* zmienia wartość funkcjonału F wyliczonego na podstawie symulacji w sposób bardziej istotny niż błędy wynikające z niedokładności wyliczenia funkcjonału F na podstawie danych eksperymentalnych. Aby zaproponowana analiza wrażliwości mogła być wykorzystywana do planowania procedur walidacyjnych należy ocenić z jaką dokładnością jesteśmy w stanie obliczyć zdefiniowany funkcjonał F na podstawie danych eksperymentalnych. By mieć pewność, że symulacja numeryczna poprawnie odwzorowała modelowany układ fizyczny, wartość błędu wyliczenia funkcjonału F na podstawie danych eksperymentalnych powinna być mniejsza niż oszacowanie (3.6) dla istotnych parametrów wejściowych.

Sposób postępowania przy przeprowadzaniu metody oceny wiarygodności może zostać przedstawiony przy pomocy następującego algorytmu:

Algorytm 3.1.

- (1) Określenie wszystkich parametrów wejściowych p_1, \dots, p_N ocenionych wstępnie jako charakterystyczne dla konkretnej symulacji numerycznej
- (2) Określenie interwałów zmienności δ_i dla wszystkich parametrów p_i
- (3) Przeprowadzenie obliczeń dla różnych parametrów wejściowych.
- (4) Definicja funkcjonału $\|F\|$ określonego w rezultacie symulacji numerycznej.
- (5) Wyznaczenie współczynników (3.2) i (3.3)
- (6) Określenie na podstawie kryterium (3.4) istotnych parametrów $\{p_1^*, \dots, p_k^*\} \subseteq \{p_1, \dots, p_N\}$ dla badanej konfiguracji
- (7) Wyznaczenie koniecznej dokładności pomiarów eksperymentalnych na podstawie (3.6)

Kroki algorytmu 3.1 (4)-(7) można powtarzać definiując za każdym razem inną postać funkcjonału określonego dla F . Postać funkcjonału powinna być każdorazowo dobierana biorąc pod uwagę możliwość wykonania pomiarów eksperymentalnych i ich dokładność tak aby na podstawie danych eksperymentalnych móc również obliczyć wartość zdefiniowanego funkcjonału. Warto zauważyć, że powtórne wykonanie kroków (4)-(7) po zamianie postaci funkcjonału nie pociąga za sobą powtarzania najbardziej pracochłonnych obliczeń wykonanych dla różnych parametrów wejściowych (krok 3), a jedynie wyznaczenie wartości funkcjonału na podstawie otrzymanych wcześniej rezultatów.

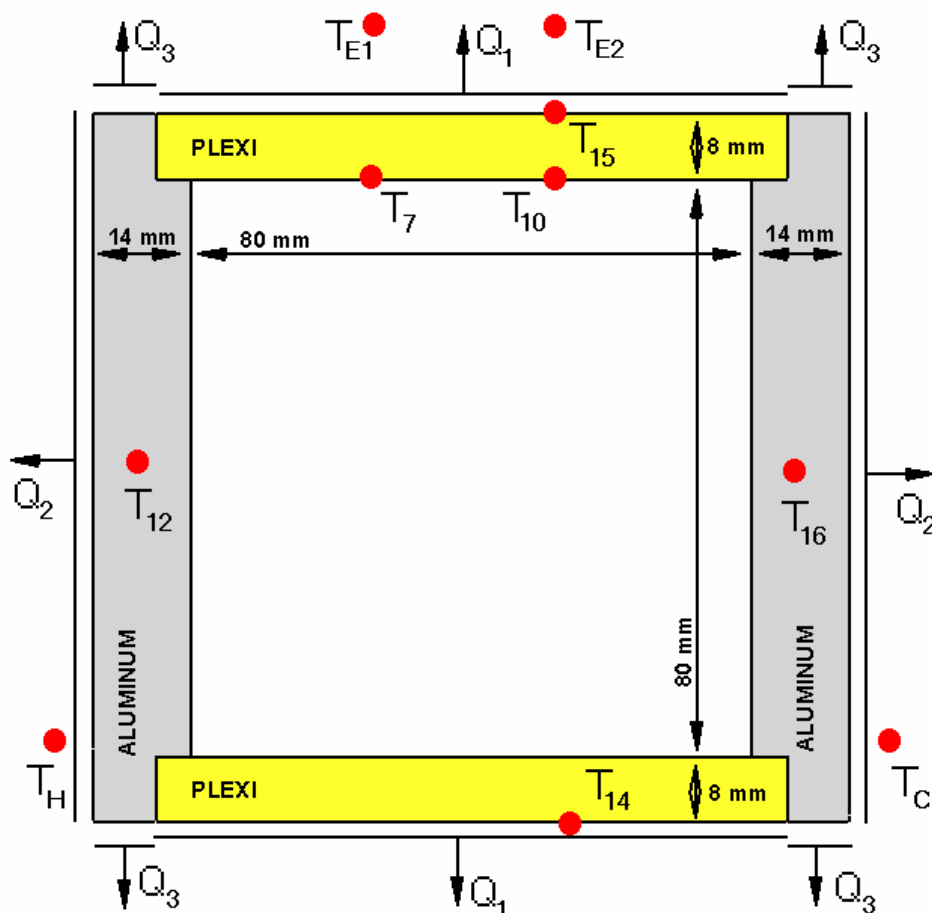
Poprzez porównywanie wyników (3.4)-(3.6), przeprowadzając zaproponowaną metodę dla dwóch lub większej ilości konfiguracji eksperymentalnych, można wnioskować na temat poziomu wiarygodności wykonanych symulacji numerycznych. Konfiguracja wykazująca wrażliwość dla mniejszej ilości parametrów wejściowych jest bardziej wiarygodna, gdyż w celu walidacji wymaga mniej skomplikowanych pomiarów eksperymentalnych. Niska wartość wyliczanych względnych miar wrażliwości (3.5) również świadczy o większym poziomie wiarygodności, gdyż nieuniknione fluktuacje w mierzonych wartościach nie powodują zmian, które są istotne dla całego zjawiska.

3.2. Przykład zastosowania metody oceny wiarygodności

W niniejszym podrozdziale zostanie zaprezentowane zastosowanie metody przedstawionej w podrozdziale 3.1. do modelowego przypadku przepływu wody w różnicowo grzonym sześcianie. Wyniki analizy zostaną wykorzystane do zaprojektowania wzorca eksperymentalnego.

3.2.1 Sformułowanie problemu

Biorąc pod uwagę zdefiniowany wzorzec numeryczny w Rozdziale 2 oraz chęć dostarczenia wyników eksperymentalnych będących odpowiednikiem tych obliczeń zdecydowano się rozszerzyć geometrię obliczeniową o niezbędne dodatkowe elementy tak aby móc porównywać wyniki symulacji numerycznej z wynikami eksperymentalnymi.



Rysunek 3.1. Szkic obszaru obliczeniowego wykorzystanego do obliczeń (● punkty kontroli temperatury).

Wykorzystując doświadczenie z poprzednich badań eksperymentalnych, jak i obliczeniowych [66,67,68], wyznaczono płaską domenę obliczeniową odpowiadającą przekrojowi centralnemu geometrii eksperymentalnej o wymiarach 80 x 80mm, z dwiema ścianami aluminiowymi o grubości 14 mm oraz dwiema ścianami z Pleksiglasu o grubości 8 mm (Rysunek 3.1). Przyjęte do obliczeń wymiary odpowiadają rzeczywistemu przekrojowi sześcianu, w którym został przeprowadzony eksperyment szczegółowo opisany w Rozdziale 4.

W wewnętrznym obszarze rozwiązywano równania (2.17)-(2.19) z parametrami termofizycznymi płynu odpowiadającemu wodzie, natomiast w dodatkowych ściankach ograniczających rozwiązywano jedynie równanie (2.19) przewodnictwa ciepła z parametrami

termofizycznymi odpowiednimi dla materiału z którego zbudowana jest ścianka (aluminium lub Pleksiglas). Warunki brzegowe na temperaturę zdefiniowano w postaci strumieni:

$$Q_i = \alpha_i (T_w - T_{ext}) \quad (3.7)$$

co odpowiada warunkowi trzeciego rodzaju (warunek mieszany). Takie sformułowanie wprowadza do każdego warunku brzegowego na temperaturę dodatkowe parametry, a mianowicie współczynnik przejmowania ciepła α_i , oraz temperaturę zewnętrzną T_{ext} . W powyższej konfiguracji wyróżniono trzy typy strumieni ciepłych: Q_1 strumień ciepła od Pleksiglasowej ściany do otoczenia (powietrze), Q_2 strumień ciepła od aluminiowej ściany do płynu chłodzącego (glikolu) utrzymywanego w stałej temperaturze, Q_3 strumień ciepła od aluminiowej ścianki do otoczenia (powietrze). Warunki brzegowe dla prędkości przyjęto równe zero na całym brzegu obszaru, w którym modelowano przepływ.

W obliczeniach przyjęto następujące wartości termofizyczne wody, pleksiglasu i aluminium:

Symbol	Własność termofizyczna	Wartość	Jednostka
ρ_0	Gęstość wody w temperaturze referencyjnej $T_{ref} = 273K$	999.8	Kg/m^3
μ	Lepkość dynamiczna wody (dla $T_{ref} = 273K$)	0.0017888	Kg/ms
κ	Wsp. przewodnictwa cieplnego wody (dla $T_{ref} = 273K$)	0.566	W/mK
c_p	Ciepło właściwe wody (dla $T_{ref} = 273K$)	4212.0	J/kgK
ρ_p	Gęstość Pleksiglasu	1180.0	Kg/m^3
κ_p	Wsp. przewodnictwa cieplnego Pleksiglasu	0.195	W/mK
c_{pp}	Ciepło właściwe Pleksiglasu	1388.69	J/kgK
ρ_w	Gęstość aluminium	2719.0	Kg/m^3
κ_w	Wsp. przewodnictwa cieplnego aluminium	202.4	W/mK
c_{pw}	Ciepło właściwe aluminium	871.0	J/kgK

Tabela 3.1. Zestawienie własności termofizycznych materiałów wykorzystanych w obliczeniach.

Nieliniowa zależność gęstości wody od temperatury modelowana była z wykorzystaniem formuły (2.50). Bezwymiarowe liczby Rayleigha oraz Prandtla, charakteryzujące konwekcję naturalną dla opisaną powyżej konfiguracji i różnicy temperatur $\Delta T = 10 K$ wynoszą odpowiednio 1.2×10^7 oraz 13.31. Podane wartości liczb bezwymiarowych zostały wyliczone w oparciu o wartości własności termofizycznych dla temperatury referencyjnej $T_{ref} = 273K$, które zostały zestawione w Tabeli 3.1.

3.2.2 Analiza wrażliwości

Parametrami wejściowymi wybranymi dla zdefiniowanej powyżej konfiguracji są :

Symbol	Opis	Wartość Początkowa	δ (interwał)	Typ parametru
$P_1 = T_H$	Temperatura T_H glikolu w termostатовanej komorze przylegającej bezpośrednio do lewej ściany i utrzymywany na stałym poziomie w celu jej ogrzania	283 K	1 K	Warunek brzegowy
$P_2 = T_C$	Temperatura T_C glikolu w termostатовanej komorze przylegającej bezpośrednio do prawej ściany i utrzymywana na stałym poziomie w celu jej oziębienia	271 K	1 K	Warunek brzegowy
$P_3 = T_{E1} = T_{E2}$	Temperatura otoczenia w odległości 30 cm od naczynia pomiarowego	298 K	2 K	Warunek brzegowy

$P_4 = \alpha_1$	Współczynnik przejmowania ciepła pleksiglas/powietrze	10 W/m ² K	9 W/m ² K	Warunek brzegowy
$P_5 = \alpha_2$	Współczynnik przejmowania ciepła aluminium/glikol	2500 W/m ² K	100 W/m ² K	Warunek brzegowy
$P_6 = \alpha_3$	Współczynnik przejmowania ciepła aluminium/powietrze	1400 W/m ² K	100 W/m ² K	Warunek brzegowy
$P_7 = T_{in}$	Temperatura początkowa cieczy w naczyniu pomiarowym	283 K	1 K	Warunek początkowy
$P_8 = v_{in}$	Pole prędkości początkowe cieczy w naczyniu pomiarowym	0 m/s	0.001 m/s	Warunek początkowy
$P_9 = \rho_0$	Gęstość wody w temperaturze referencyjnej	999.8 kg/m ³	10 %	Własność materiałowa
$P_{10} = \mu$	Lepkość dynamiczna wody w temperaturze $T_{ref} = 273K$	0.0017888 kg/ms	10 %	Własność materiałowa
$P_{11} = \kappa$	Współczynnik przewodnictwa cieplnego wody w temperaturze $T_{ref} = 273K$	0.566 W/mK	10 %	Własność materiałowa
$P_{12} = c_p$	Ciepło właściwe wody w temperaturze $T_{ref} = 273K$	4212.0 J/kgK	10 %	Własność materiałowa
$P_{13} = \rho_p$	Gęstość Pleksiglasu (przyjęto stałą wartość)	1180.0 kg/m ³	10 %	Własność materiałowa
$P_{14} = \kappa_p$	Współczynnik przewodnictwa cieplnego Pleksiglasu (przyjęto stałą wartość)	0.195 W/mK	10 %	Własność materiałowa
$P_{15} = c_{pp}$	Ciepło właściwe Pleksiglasu (przyjęto stałą wartość)	1388.99 J/kgK	10 %	Własność materiałowa
$P_{16} = \rho_w$	Gęstość aluminium (przyjęto stałą wartość)	2719.0 kg/m ³	10 %	Własność materiałowa
$P_{17} = \kappa_w$	Współczynnik przewodnictwa cieplnego aluminium (przyjęto stałą wartość)	202.4 W/mK	10 %	Własność materiałowa
$P_{18} = c_{pw}$	Ciepło właściwe aluminium (przyjęto stałą wartość)	871.0 J/kgK	10 %	Własność materiałowa
$P_{19} = \rho(T)$	Gęstości wody w funkcji temperatury	Formuła (2.50)	10 %	Własność materiałowa

Tabela 3.2. Zestawienie parametrów wejściowych dla badanej konfiguracji.

Powyższe zestawienie zawiera trzy kategorie parametrów, ze względu na które przeprowadzono analizę wrażliwości, a mianowicie: warunki brzegowe, warunki początkowe i własności materiałowe. Dodatkową klasą parametrów powinny być parametry opisujące geometrię modelu, takie jak długość boku kwadratu L , grubość ścian, które mogą wpływać na rezultat końcowy lub parametry uwzględniające drobne niedoskonałości konstrukcyjne. W niniejszej analizie parametry te zostały pominięte gdyż model numeryczny został stworzony w ten sposób, że odwzorowuje jedynie wycinek (przekrój) badanej konfiguracji eksperymentalnej odwzorowany w skali 1:1. Ze względu na to, iż fizyczne eksperymenty dotyczą zawsze geometrii przestrzennej (sześciianu), model numeryczny jest tylko dwuwymiarowym przybliżeniem przekroju centralnego dla badanej konfiguracji. Mimo tego ograniczenia, wynikającego jedynie z konieczności skrócenia czasochłonnych obliczeń, większość charakterystyk fizycznych pól prędkości i temperatury dla przepływów laminarnych ma swoje wierne odpowiedniki dla tego modelu płaskiego. Adekwatność tego opisu została zweryfikowana w przeprowadzonych symulacjach numerycznych [127].

Interwały zmian poszczególnych parametrów δ zostały wybrane w ten sposób, aby móc zrealizować eksperymentalnie zmianę poszczególnych parametrów (w przypadku parametrów dotyczących warunków brzegowych i początkowych), natomiast w przypadku parametrów

dotyczących własności materiałowych interwały te równe są dokładności pomiarów tych wielkości lub szacunkowej zmianie tych wielkości w badanym przedziale temperatur.

Kolejnym krokiem jest definicja funkcjonału, który będzie wyliczany na podstawie pól prędkości i temperatury. Ze względu na to, iż zaplanowano pomiary eksperymentalne pola prędkości i temperatury w całym centralnym przekroju sześciangu, oraz punktowe pomiary temperatury w punktach oznaczonych na Rysunku 3.1., zdefiniowano następujące funkcjonały polowe:

$$\|F\|_1^2 = \int_{\Omega} |T|^2 d\Omega \quad (3.8)$$

$$\|F\|_2^2 = \int_{\Omega} |v_1|^2 d\Omega \quad (3.9)$$

$$\|F\|_3^2 = \int_{\Omega} |v_2|^2 d\Omega \quad (3.10)$$

Funkcjonały zdefiniowane zostały jako: kwadrat normy euklidesowej dla temperatury T , dla poziomej składowej prędkości v_1 i dla pionowej składowej prędkości v_2 dla całego pola przekroju Ω . Ponadto, aby móc porównywać wyniki symulacji numerycznej z pomiarami punktowymi temperatury, zdefiniowano następujące funkcjonały punktowe, które zwracają wartość temperatury w punktach $T_{12}, T_{16}, T_7, T_{10}, T_{15}$ zaznaczonych na Rysunku 3.1.

$$\|F\|_4 = T(-0.004, 0.04) = T_{12} \quad (3.11)$$

$$\|F\|_5 = T(0.084, 0.04) = T_{16} \quad (3.12)$$

$$\|F\|_6 = T(0.02, 0.08) = T_7 \quad (3.13)$$

$$\|F\|_7 = T(0.06, 0.08) = T_{10} \quad (3.14)$$

$$\|F\|_8 = T(0.06, 0.088) = T_{15} \quad (3.15)$$

Dla zdefiniowanych powyżej funkcjonałów (3.8)-(3.10) wyliczono wartości zdefiniowane formułami (3.2), (3.3) i (3.5) w celu identyfikacji istotnych parametrów wejściowych. Obliczenia przeprowadzono programem Fluent, zadając kolejne zmiany parametrów wejściowych i wyliczając zmiany zdefiniowanych funkcjonałów. Zestawienie tych wartości zostało przedstawione w Tabeli 3.3. Dla każdego parametru p_i wyliczono wartość (3.2) i (3.3), otrzymując dwa wiersze danych dla każdego parametru, a następnie obliczono względną zmianę wartości funkcjonału przy zmianie tego parametru, wykorzystując formułę (3.5). Przyjmując próg istotności 3% można wyłonić istotne parametry wejściowe dla badanej konfiguracji (zaznaczone w tabeli kolorem żółtym).

Parametr	$\ F\ _1^2$	(3.2-3)	(3.5)	$\ F\ _2^2$	(3.2-3)	(3.5)	$\ F\ _3^2$	(3.2-3)	(3.5)
	499.9265			2.01E-10			4.52E-10		
P ₁	501.7545	1.82	36.41%	2.24E-10	2.28E-11	11.4%	5.03E-10	5.06E-11	11.2%
	498.5351	1.39	27.80%	1.77E-10	2.45E-11	12.2%	4.60E-10	8.19E-12	1.8%
P ₂	501.1452	1.22	24.40%	1.63E-10	3.83E-11	19.0%	3.98E-10	5.41E-11	12.0%
	498.8706	1.06	21.20%	2.37E-10	3.54E-11	17.6%	6.62E-10	2.10E-10	46.5%
P ₃	500.5153	0.59	11.80%	1.96E-10	5.60E-12	2.8%	4.38E-10	1.37E-11	3.0%
	499.3325	0.59	11.80%	2.08E-10	6.82E-12	3.4%	4.76E-10	2.43E-11	5.4%
P ₄	500.5104	0.58	11.60%	1.93E-10	7.79E-12	3.9%	4.55E-10	3.10E-12	0.7%
	498.8108	1.12	22.40%	2.38E-10	3.65E-11	18.1%	4.53E-10	1.32E-12	0.3%
P ₅	499.7668	0.16	3.20%	2.03E-10	2.29E-12	1.1%	4.67E-10	1.51E-11	3.4%
	500.1031	0.18	3.60%	1.98E-10	2.77E-12	1.4%	4.39E-10	1.27E-11	2.8%
P ₆	500.2023	0.28	5.60%	1.87E-10	4.04E-12	2.0%	4.38E-10	1.38E-11	3.1%
	499.6463	0.00	0.00%	2.05E-10	4.12E-12	2.0%	4.71E-10	1.90E-11	4.2%
P ₇	499.9262	0.00	0.00%	2.01E-10	3.10E-14	0.0%	4.52E-10	7.59E-14	0.0%
	499.9261	0.00	0.00%	2.01E-10	4.42E-14	0.0%	4.52E-10	2.47E-14	0.0%
P ₈	499.9269	0.00	0.00%	2.01E-10	8.17E-14	0.0%	4.52E-10	1.95E-13	0.0%
	499.9270	0.00	0.00%	2.01E-10	2.60E-14	0.0%	4.52E-10	1.60E-13	0.0%
P ₉	499.9238	0.00	0.00%	2.05E-10	4.26E-12	2.1%	4.41E-10	1.05E-11	2.3%
	499.9265	0.00	0.00%	2.01E-10	1.51E-13	0.1%	4.52E-10	1.34E-14	0.0%
P ₁₀	499.9553	0.03	0.60%	1.89E-10	1.19E-11	5.9%	4.19E-10	3.24E-11	7.2%
	499.8949	0.03	0.60%	2.15E-10	1.41E-11	7.0%	4.91E-10	3.91E-11	8.6%
P ₁₁	499.8320	0.09	1.80%	2.27E-10	2.62E-11	13.1%	4.98E-10	4.64E-11	10.3%
	499.6920	0.23	4.60%	1.86E-10	1.55E-11	7.7%	3.98E-10	5.40E-11	12.0%
P ₁₂	499.9091	0.02	0.40%	1.77E-10	2.38E-11	11.8%	4.03E-10	4.85E-11	10.7%
	499.9469	0.02	0.40%	2.32E-10	2.98E-11	14.8%	5.13E-10	6.09E-11	13.5%
P ₁₃	499.9267	0.02	0.40%	2.31E-10	1.68E-13	0.1%	4.52E-10	2.76E-13	0.1%
	499.9265	0.00	0.00%	2.01E-10	4.5E-13	0.0%	4.52E-10	0	0.0%
P ₁₄	499.9577	0.03	0.60%	2.01E-10	3.21E-13	0.2%	4.53E-10	7.14E-13	0.2%
	499.8899	0.04	0.80%	2.02E-10	4.95E-13	0.2%	4.52E-10	3.63E-13	0.1%
P ₁₅	499.9265	0.00	0.00%	2.01E-10	0	0.0%	4.52E-10	0	0.0%
	499.9265	0.00	0.00%	2.01E-10	0	0.0%	4.52E-10	0	0.0%
P ₁₆	499.9265	0.00	0.00%	2.01E-10	0	0.0%	4.52E-10	0	0.0%
	499.9265	0.00	0.00%	2.01E-10	0	0.0%	4.52E-10	0	0.0%
P ₁₇	499.9624	0.04	0.80%	2.03E-10	1.48E-12	0.7%	4.48E-10	3.95E-12	0.9%
	499.8882	0.04	0.80%	1.99E-10	1.02E-12	1.0%	4.58E-10	5.71E-12	1.3%
P ₁₈	499.9265	0.00	0.00%	2.01E-10	0	0.0%	4.52E-10	0	0.0%
	499.9265	0.00	0.00%	2.01E-10	0	0.0%	4.52E-10	0	0.0%
P ₁₉	500.2015	0.27	5.40%	1.84E-10	1.75E-11	8.7%	3.89E-10	6.25E-11	13.8%
	499.9527	0.03	0.60%	2.32E-10	3.04E-11	15.1%	5.13E-10	6.14E-11	13.6%

Tabela 3.3. Zestawienie wartości funkcjonałów połowych (3.8)-(3.10) oraz zmiany tych wartości (3.2)-(3.3), względna miara wrażliwości (3.5) na zmiany parametrów wejściowych.

Zaznaczono obszary przekraczające próg istotności.

Podobnie wyliczono wartości funkcjonałów punktowych (3.11)-(3.15) w celu określenia wrażliwości na zmianę parametrów wejściowych oraz określenia niezbędnej dokładności pomiarów eksperymentalnych. W Tabeli 3.4 zestawiono jedynie wartości poszczególnych funkcjonałów na zmiany kolejnych parametrów z oszacowaną względną miarą wrażliwości.

Para metr	$\ F\ _4$	(3.5)	$\ F\ _5$	(3.5)	$\ F\ _6$	(3.5)	$\ F\ _7$	(3.5)	$\ F\ _8$	(3.5)
	283.63		273.17		284.27		284.04		287.72	
P ₁	284.49	8.6%	273.26	0.9%	284.86	5.9%	284.66	6.2%	288.17	4.5%
	282.76	8.7%	273.10	0.7%	283.59	6.8%	283.41	6.3%	287.26	4.6%
P ₂	283.64	0.1%	274.12	9.5%	284.34	0.7%	284.13	0.9%	287.79	0.7%
	283.62	0.1%	272.23	9.4%	284.20	0.7%	283.95	0.9%	287.65	0.7%
P ₃	283.75	1.2%	273.33	1.6%	284.58	3.1%	284.36	3.2%	288.49	7.7%
	283.50	1.3%	273.12	1.5%	283.96	3.1%	283.71	3.3%	286.95	7.7%
P ₄	283.64	0.1%	273.21	0.4%	284.87	6.0%	284.73	6.9%	290.14	24.2%
	283.60	0.3%	273.12	0.5%	283.26	10.1%	282.80	12.4%	283.28	44.4%
P ₅	283.60	0.3%	273.08	0.9%	284.24	0.3%	284.00	0.4%	287.69	0.3%
	283.66	0.3%	273.28	1.1%	284.31	0.4%	284.07	0.3%	287.75	0.3%
P ₆	283.68	0.5%	273.29	1.2%	284.34	0.7%	284.11	0.7%	287.77	0.5%
	283.57	0.5%	273.06	1.1%	284.20	0.7%	283.97	0.7%	287.67	0.5%
P ₇	283.63	0.0%	273.18	0.1%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
	283.63	0.0%	273.18	0.1%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
P ₈	283.63	0.0%	273.18	0.1%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
	283.63	0.0%	273.18	0.1%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
P ₉	283.64	0.1%	273.18	0.1%	284.24	0.3%	283.91	1.3%	287.63	0.9%
	283.63	0.0%	273.18	0.1%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
P ₁₀	283.64	0.1%	273.17	0.0%	284.28	0.1%	284.05	0.1%	287.73	0.1%
	283.62	0.1%	273.18	0.1%	284.26	0.1%	284.03	0.1%	287.71	0.1%
P ₁₁	283.60	0.3%	273.20	0.3%	284.18	0.9%	283.94	1.0%	287.65	0.7%
	283.65	0.2%	273.16	0.1%	284.41	1.4%	284.14	0.9%	287.78	0.6%
P ₁₂	283.62	0.1%	273.18	0.1%	284.26	0.1%	284.02	0.2%	287.71	0.1%
	283.64	0.1%	273.17	0.0%	284.29	0.2%	284.06	0.2%	287.73	0.1%
P ₁₃	283.63	0.0%	273.17	0.0%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
	283.63	0.0%	273.18	0.1%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
P ₁₄	283.63	0.0%	273.18	0.1%	284.28	0.1%	284.05	0.1%	287.48	2.4%
	283.63	0.0%	273.18	0.0%	284.26	0.1%	284.02	0.2%	287.99	2.7%
P ₁₅	283.63	0.0%	273.17	0.0%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
	283.63	0.0%	273.17	0.0%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
P ₁₆	283.63	0.0%	273.17	0.0%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
	283.63	0.0%	273.17	0.0%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
P ₁₇	283.66	0.3%	273.23	0.6%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
	283.59	0.4%	273.12	0.5%	284.27	0.0%	284.03	0.1%	287.72	0.0%
P ₁₈	283.63	0.0%	273.17	0.0%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
	283.63	0.0%	273.17	0.0%	284.27	0.0%	284.04	0.0%	287.72	0.0%
P ₁₉	283.62	0.1%	273.19	0.2%	284.16	1.1%	283.99	0.5%	287.68	0.4%
	283.64	0.1%	273.17	0.0%	284.28	0.1%	284.05	0.1%	287.73	0.1%

Tabela 3.4. Zestawienie wartości funkcjonałów punktowych(3.11)-(3.15) wraz z względną miarą wrażliwości(3.5) na zmiany parametrów wejściowych. Zaznaczono obszary przekraczające próg istotności.

Na podstawie powyższej analizy można było zidentyfikować istotne parametry dla badanej konfiguracji. Są nimi: temperatura T_H lewej ściany (P_1), temperatura T_C prawej ściany (P_2), strumienie ciepła Q_1 (P_4), Q_2 (P_5), Q_3 (P_6) temperatura T_{ext} (P_3) oraz termofizyczne właściwości wody: lepkość dynamiczna (P_{10}), przewodność cieplna (P_{11}) i ciepło właściwe (P_{12}) oraz zależność gęstości od temperatury (P_{19}). Parametry powyższe zostały określone jako istotne, gdyż względna zmiana wartości funkcjonałów przy modyfikacji tych parametrów o zadany interwał δ wyniosła ponad 3%. Dokładność pomiarów eksperymentalnych w celu przeprowadzenia pełnej walidacji oszacowano dla istotnych parametrów wejściowych na podstawie formuły (3.6) i została zestawiona w Tabeli 3.5.

Parametr	$\ F\ _1$	$\ F\ _2$	$\ F\ _3$	$\ F\ _4$	$\ F\ _5$	$\ F\ _6$	$\ F\ _7$	$\ F\ _8$
P_1	27.8%	11.4 %	11.2 %	8.7 %	-	5.9 %	6.2 %	4.5 %
P_2	21.2%	17.6 %	12.0 %	-	9.4 %	-	-	-
P_3	11.8%	3.4 %	3.0 %	-	-	3.1 %	3.2 %	7.7 %
P_4	11.6%-	3.9 %	-	-	-	6.0 %	6.9 %	24.2 %
P_5	3.20%	-	3.4 %	-	-	-	-	-
P_6	5.60%	-	3.1 %	-	-	-	-	-
P_{10}	-	5.9 %	7.2 %	-	-	-	-	-
P_{11}	4.60%	7.7 %	10.3 %	-	-	-	-	-
P_{12}	-	11.8 %	10.7 %	-	-	-	-	-
P_{19}	5.40%	8.7 %	13.6 %	-	-	-	-	-

Tabela 3.5. Zestawienie oszacowania dokładności pomiarów eksperymentalnych

Wszystkie obliczenie wykonane w celu zbadania wrażliwości na parametry wyjściowe wykonano przy użyciu programu Fluent 6.22 [101] opisanego w rozdziale 2. Program ten wybrano do tych obliczeń ze względu na wystarczająca dokładność wykazaną w rozdziale 2 oraz wygodny dla użytkownika interface niezbędny przy modyfikacji geometrii i wartości parametrów wejściowych. Wszystkie parametry numeryczne oraz algorytmy i schematy numeryczne pozostawiono bez zmian.

3.2.3 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy można sformułować następujące wnioski i zalecenia dotyczące badanej konfiguracji, które należy uwzględnić przy pomiarach eksperymentalnych:

- Najistotniejszymi parametrami dla badanej konfiguracji są temperatura T_H – ciepłej prawej ścianki, temperatura T_C – zimnej lewej ścianki, temperatura T_{ext} – otoczenia, strumienie ciepła Q_1 , Q_2 , Q_3 (określone współczynnikami P_4 - P_6), własności termofizyczne wody: lepkość dynamiczna, przewodnictwo cieplne, ciepło właściwe oraz zależność gęstości od temperatury. Względna zmiana wartości funkcjonałów (3.2)-(3.3) oraz miara wrażliwości (3.5) wykazała największe wartości (powyżej 3%) na zmiany wyżej wymienionych parametrów
- Największą wrażliwość na zmiany spośród wymienionych powyżej parametrów, określoną na podstawie zdefiniowanej miary wrażliwości (3.5), wykazuje temperatura T_C – zimnej lewej ścianki (46.5% - Tabela 3.3) , temperatura T_H – ciepłej ścianki (36 % - Tabela 3.3) oraz strumień ciepła Q_1 (44.4% - Tabela 3.4)
- Walidację eksperymentalną poprawności przyjętych stałych termofizycznych wody można przeprowadzić jedynie na podstawie pełnych pól prędkości lub temperatury, jak wykazały testy numeryczne, a nie jest to możliwe przy pomocy punktowych pomiarów temperatury. Wrażliwość na właściwości termofizyczne wody wykazały jedynie funkcjonały polowe

$\|F\|_1, \|F\|_2, \|F\|_3$ wyliczane na podstawie całego pola przepływu, a nie wykazały jej funkcjonały punktowe (porównaj Tabele 3.3 – 3.4).

- W celu przeprowadzenia procesu walidacji obliczeń konieczna dokładność pomiarów eksperymentalnych została oszacowana dla pomiarów punktowych temperatury T_{12} na poziomie 8.7% ($\approx 1\text{K}$, Tabela 3.5), dla pomiarów punktowych T_{16} na poziomie 9.4% ($\approx 1\text{K}$, Tabela 3.5) decydujących o różnicy temperatur pomiędzy ściankami dla badanej konfiguracji.
- W badaniach eksperymentalnych należy kontrolować wartość strumienia ciepła Q_1 poprzez dokładne pomiary punktowe oznaczone jako T_7, T_{10} z dokładnością 0.5K oraz oznaczone jako T_{15} z dokładnością 2K (czwarty wiersz Tabeli 3.5)
- Wartość strumieni ciepła Q_2 i Q_3 nie może zostać zidentyfikowana przy pomocy punktowych pomiarów temperatury lecz przy pomocy pełnych pól prędkości lub temperatury. Obliczenie funkcjonału $\|F\|_3$ powinno być możliwe z błędem pomiaru mniejszymi niż 3 %, a funkcjonału $\|F\|_1$ z błędem pomiaru mniejszym niż 3-5 %. W przypadku nie uzyskania tak dokładnych wyników pomiarów należy kontrolować strumienie ciepła tak, aby nie był przekroczony założony interwał w badaniach wrażliwości, równy $100 \text{ W/m}^2\text{K}$. (piąty i szósty wiersz Tabeli 3.6)
- Pomiar temperatury otoczenia należy przeprowadzić z dokładnością większą niż 2K (równą przyjętemu interwałowi), gdyż zmiany temperatury otoczenia są zauważalne w wartościach prawie wszystkich funkcjonałów (wiersz 3 Tabeli 3.6), ale jednocześnie identyfikacja ich wpływu jest trudna, gdyż wymaga pomiarów punktowych temperatury z dokładnością do 0.3 K i pomiarów pól prędkości z dokładnością do 3 %.
- Dokładność wyznaczenia funkcjonałów $\|F\|_1, \|F\|_2$ i $\|F\|_3$ na podstawie danych eksperymentalnych w celu walidacji przyjętych wartości określających termofizyczne właściwości wody należy zmierzyć odpowiednio z dokładnością 5%, 6% i 7%.
- Badana konfiguracja wykazała niewielką wrażliwość na perturbacje warunków początkowych oraz na zmianę wartości własności materiałowych aluminium i Pleksiglasu. Umożliwia to przeprowadzenie walidacji eksperymentalnej dla badanej konfiguracji przy posiadanej dokładności danych materiałowych.

4. Badania eksperymentalne

Rozdział ten w całości został poświęcony badaniom eksperymentalnym przeprowadzonym w celu zdefiniowania wzorca eksperymentalnego dla przepływów lepkich i termicznych. Opisano wykorzystane stanowisko eksperymentalne i konfigurację eksperymentalną wraz z układem pomiarowym i systemem akwizycji danych. Przedstawiono wykorzystane metody pomiarowe wraz z dokładnym opisem analizy i obróbki uzyskanych wyników. Opisano przebieg eksperymentów oraz przedstawiono otrzymane wyniki. Na podstawie uzyskanych rezultatów zdefiniowano wzorzec eksperymentalny i oszacowano błędy pomiarowe. Na zakończenie rozdziału przeanalizowano wyniki pod kątem zerwania stabilności przepływu dla badanej konfiguracji. Przedstawione rezultaty badań eksperymentalnych są niezbędne do przedstawienia pełnego procesu walidacji symulacji numerycznych dla przepływów lepkich i termicznych.

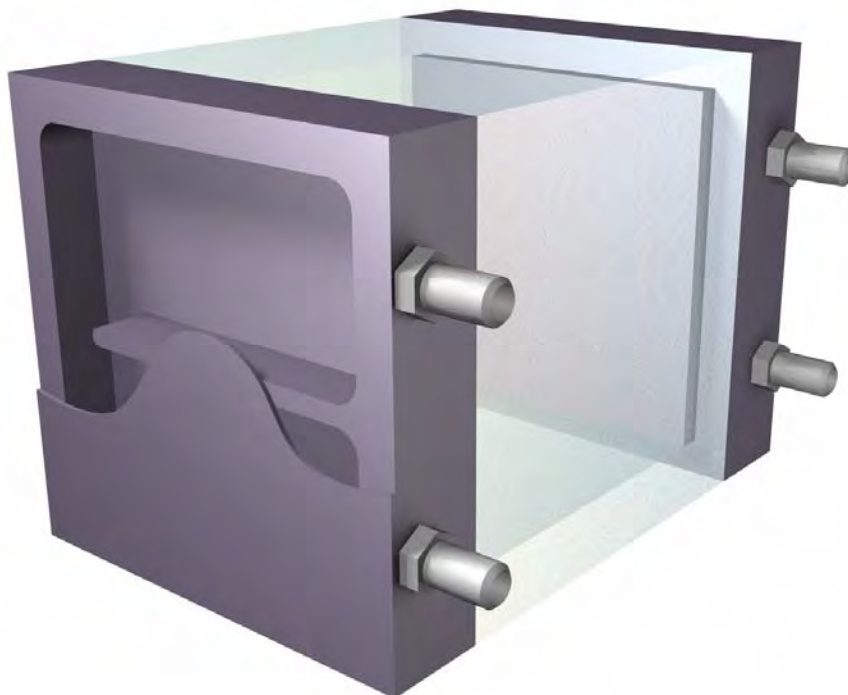
4.1. Opis konfiguracji

Wybrana konfiguracja eksperymentalna została zaprojektowana w ten sposób aby dostarczyć ilościowych danych o polu prędkości i polu temperatury, koniecznych do porównań z obliczeniami numerycznymi opisanymi w Rozdziale 2 i 3. Geometria naczynia, w którym wykonywano pomiary, to sześcián, w którym dwie przeciwległe ścianki pionowe wykonane zostały z aluminium i były utrzymywane podczas przeprowadzania eksperymentów w stałych temperaturach T_h i T_c ($T_h > T_c$). Ścianki te, lewa utrzymywana w temperaturze T_h oraz prawa utrzymywana w temperaturze T_c wykonane zostały z aluminium o grubości 14 mm. Pozostałe cztery ścianki wykonane były z przezroczystego Plexiglassu o grubości 8 mm, dzięki czemu można było rejestrować przepływ przy pomocy optycznych technik pomiarowych. Temperaturę aluminiowych ścian bocznych stabilizowano glikolem, który krążył pomiędzy termostatami, a komorami bezpośrednio przylegającymi do tych ścian. Rysunek 4.1 przedstawia szkic wykorzystanego naczynia pomiarowego wraz z wszystkimi istotnymi wymiarami.

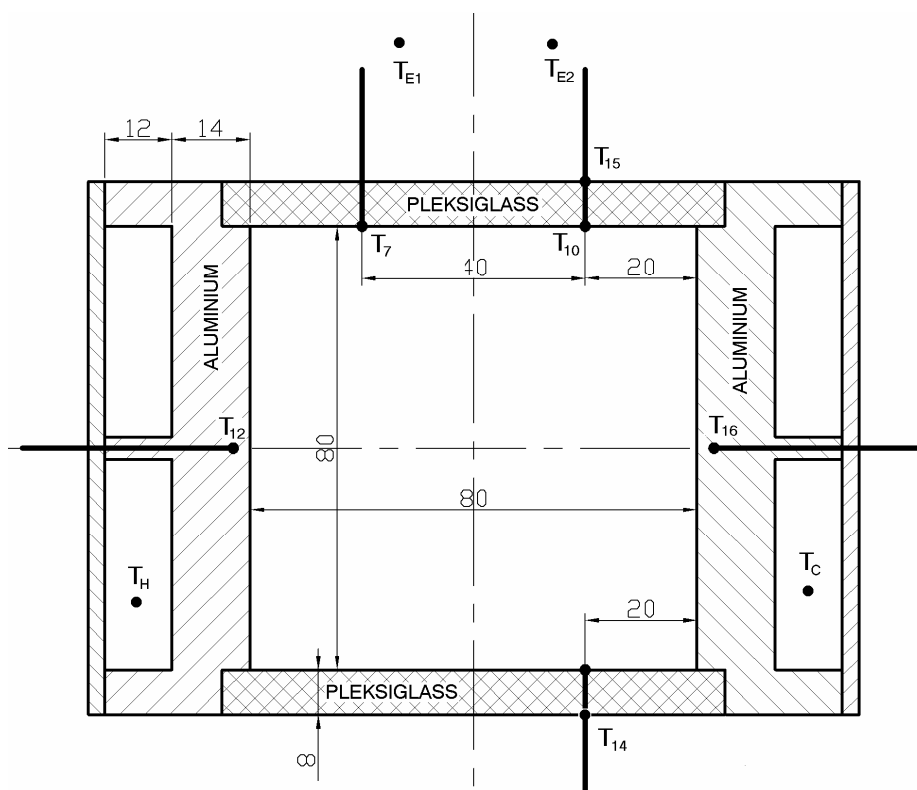
Geometria naczynia została tak zaprojektowana, aby można było zdefiniować wzorzec eksperymentalny dla przepływów konwekcyjnych wywołanych gradientem temperatur. Analogiczna konfiguracja była wykorzystywana w badaniach eksperymentalnych przez Kowalewskiego i Rebową [68,67] przy badaniu procesów krzepnięcia wody dla sześciánu o boku 38 mm. W celu dostarczenia ilościowych danych dla przepływu konwekcyjnego dla wyższych liczb Rayleigha ($Ra > 10^6$) zdecydowano się na modelowanie przepływu w sześciánie o boku $L = 80$ mm. We wszystkich badaniach przeprowadzonych na potrzeby niniejszej pracy wykorzystano czystą wodę jako ciecz modelową. Wybór wody jest podyktowany ogólną dostępnością oraz tym, iż jej własności materiałowe są dokładnie znane i jest to ciecz przezroczysta co umożliwia stosowanie optycznych technik pomiarowych. Istotne jest również wykorzystanie obecnych badań do przyszłych walidacji symulacji procesów krzepnięcia. W Tabeli 4.1. przytoczono, na podstawie danych literaturowych [76], zależność podstawowych własności materiałowych wody takich, jak: gęstość ρ , lepkość dynamiczna μ , współczynnik przewodnictwa cieplnego κ , ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu c_p , współczynnik rozszerzalności cieplnej β dla temperatur w zakresie od 0°C do 50°C. W badanym przedziale temperatur liczba Prandtla dla wody zmienia się od 13.44 do 3.57, a liczba Rayleigha zależy od różnicy temperatur $\Delta T = T_h - T_c$ i wynosi $1.5 \cdot 10^6$, $1.2 \cdot 10^7$, $1.3 \cdot 10^8$, $1.7 \cdot 10^8$ i $4 \cdot 10^8$ odpowiednio dla $\Delta T = 5^\circ\text{C}$, 10°C , 20°C , 25°C , 30°C . Woda w temperaturze od 0°C do 4°C charakteryzuje się anomalną charakterystyką zależności gęstości od temperatury (współczynnik rozszerzalności dla tego przedziału temperatur jest ujemny). Zależność gęstości wody od temperatury jest dokładnie przybliżona poprzez podaną już wcześniej formułę (2.50).

Na podstawie przytoczonych właściwości materiałowych wody (Tabela 4.1) można określić zakres liczb bezwymiarowych charakteryzujących niniejszą konfigurację eksperymentalną. Przy różnicy temperatur $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ otrzymamy liczbę $Ra \approx 1.2 \cdot 10^7$, a zwiększając sukcesywnie tę różnicę jesteśmy w stanie otrzymać liczbę $Ra \approx 4 \cdot 10^8$ dla $\Delta T = 30^\circ\text{C}$. Dokładne zestawienie

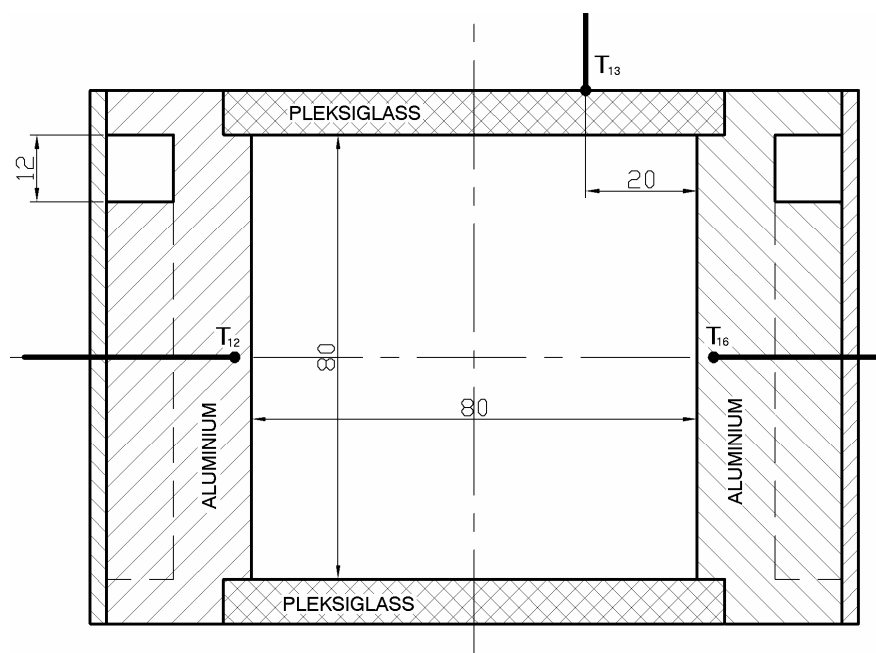
wykonanych eksperymentów zostało przedstawione w Dodatku wraz z określeniem uzyskanych liczb bezwymiarowych.



a) Szkic naczynia pomiarowego



b) Przekrój poprzeczny przez naczynie pomiarowe



c) Przekrój podłużny przez naczynie pomiarowe

Rysunek 4.1. Szkic oraz wymiary wykorzystanego naczynia pomiarowego.

$T [^{\circ}\text{C}]$	$\rho [\text{kg/m}^3]$	$\mu [\text{kg/ms}]$	$\kappa [\text{W/mK}]$	$c_p [\text{J/kgK}]$	$\beta \cdot 10^4 [1/\text{K}]$	Pr	$Ra/\Delta T$
0	999.9	0.001787	0.56	4212	-0.6	13.44	1269760
5	1000.0	0.001514	0.57	4202	0.1	11.13	240640
10	999.7	0.001304	0.58	4192	0.9	9.45	2513920
15	999.1	0.001137	0.59	4186	1.5	8.13	4730880
20	998.2	0.001002	0.59	4182	2.1	7.07	7398400
25	997.1	0.000891	0.60	4179	2.6	6.21	10142720
30	995.7	0.000798	0.61	4178	3.0	5.49	12866560
40	992.3	0.000654	0.63	4178	3.8	4.34	19051520
50	888.1	0.000548	0.64	4180	4.5	3.57	26321920

Tabela 4.1. Własności materiałowe wody oraz liczby bezwymiarowe charakterystyczne dla badanej konfiguracji ($L = 80 \text{ mm}$) w zakresie temperatur od 0°C do 50°C .

4.2. Układ pomiarowy i system akwizycji danych

Wykorzystane w niniejszych badaniach stanowisko pomiarowe składało się z:

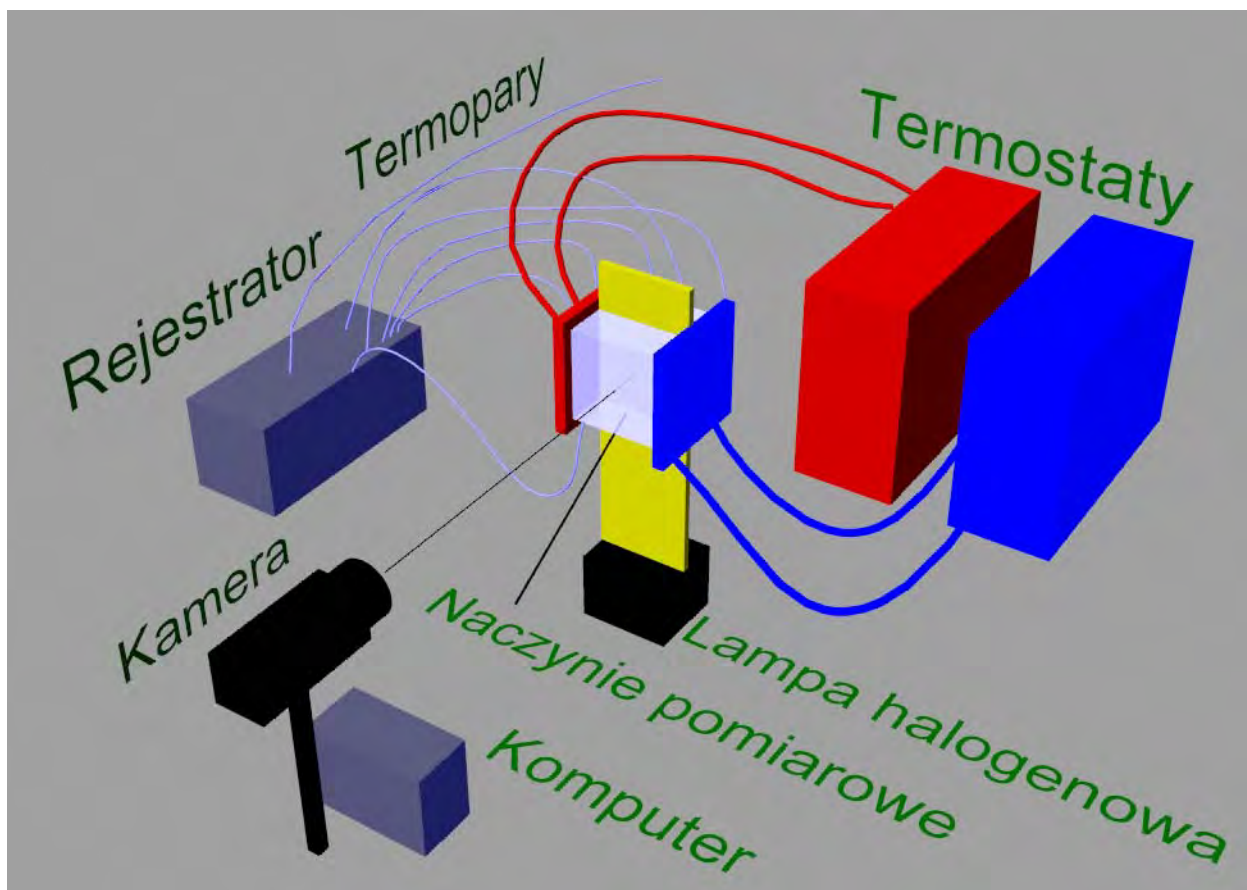
- naczynia pomiarowego (rysunek 4.1)
- dwóch termostatów
- lampy halogenowej (1000 W)
- trójprzetwornikowej kolorowej kamery 3CCD typu XC003/P firmy Sony wraz z 32 bitowym modułem akwizycji obrazów AM-STD-RGB (Imaging Tech. Inc) (maksymalna rozdzielczość kamery 768x542 pikseli)
- czarno-białej kamery CMOS (PCO 1200 hs) firmy PCO Imaging wraz z wbudowanym modułem pamięci do akwizycji obrazów (maksymalna rozdzielczość kamery 1280x1024 pikseli)
- dwóch komputerów PC
- wielo kanałowego punktowego rejestratora temperatur PTM 3040 firmy Prema Semiconductor

Schemat stanowiska pomiarowego stosowanego w doświadczeniach ilustruje rysunek 4.2. Do rejestracji obrazów wykorzystywano kamerę kolorową 3CCD, która umożliwia akwizycję obrazów kolorowych o maksymalnej rozdzielczości 768x542 pikseli w odstępach czasu nie

krótszych niż 40 ms. Przy pomocy karty akwizycji obrazów oraz oprogramowania możliwe było wykonywanie i zapisanie serii 50 zdjęć w formacie RGB. W celu otrzymania dokładniejszych pomiarów wykorzystywano szybką kamerę cyfrową CMOS (pco.1200hs), która umożliwia akwizycję obrazów czarno-białych o maksymalnej rozdzielczości 1280x1024 w odstępach czasu nie krótszych niż 1.6 ms. Kamera ta posiada wbudowaną pamięć do akwizycji obrazów, która umożliwiła wykonywanie długich serii zdjęć (w naszych badaniach wykonywano serię do 200 zdjęć) i bezpośrednio ich zapisanie w 16 bitowym formacie graficznym TIFF.

System oświetlenia stanowiła lampa z żarówką halogenową o mocy 1000 W, której światło uformowano w płaszczyznę świetlną tzw. nóż świetlny o szerokości 1000 mm i grubości 1-2 mm. Płaszczyzna świetlna oświetlała jedynie wycinek naczynia wypełnionego cieczą modelową. Lampa ustawiona była w ten sposób, aby oświetlała płaszczyznę przekroju poprzecznego (rysunek 4.1.b) centralnie przecinającego naczynie pomiarowe. Dzięki temu możliwe było rejestrowanie zdjęć kamerami z kierunku prostopadłego do tej płaszczyzny, tak jak przedstawiono to na rysunku 4.2.

System stabilizacji temperatury stanowiły dwa niezależne termostaty, które odpowiedzialne były za utrzymywanie temperatur T_h i T_c w komorach bezpośrednio przylegających do ścian naczynia pomiarowego. W komorach tych zamontowane zostały czujniki oporowe Pt-100, które kontrolowały temperaturę krążącego glikolu pomiędzy komorami a termostatami. W celu dokładnego kontrolowania warunków laboratoryjnych podczas przeprowadzania eksperymentów (w szczególności temperatury zewnętrznej) niezależnie wykonywano punktowe pomiary temperatury z wykorzystaniem wielo kanałowego punktowego rejestratora firmy PREMA. Punktowe czujniki (termopary NiCr-NiAl typu K, izolowane o średnicy 1 mm) zostały umieszczone w naczyniu pomiarowym oraz w jego pobliżu w celu monitorowania lokalnej temperatury zewnętrznej. Dokładne miejsce rozmieszczenia termopar zostało przedstawione na rysunkach 4.1b-c.(oznaczone jako T_7 - T_{16}). Oprócz termopar umieszczonych w ściankach naczynia pomiarowego lub bezpośrednio do niego przylegających rejestrowano temperaturę otoczenia poprzez dwa czujniki oporowe Pt-100 (T_L , T_P) umieszczone około 30 cm nad naczyniem pomiarowym.



Rys 4.2. Schemat stanowiska pomiarowego.

4.3. Metody pomiarowe

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wykorzystane metody pomiarowe, wraz z krótkim ich opisem. Określono charakterystyczne parametry dla tych metod oraz podano wartości parametrów, które zostały przyjęte podczas wykonywania pomiarów. Opisano metody analizy i obróbki danych eksperymentalnych wykorzystane w zastosowanych metodach pomiarowych, a także przedstawiono w jaki sposób określano błąd dokładności pomiaru.

4.3.1 Cyfrowa anemometria obrazowa (PIV)

Podstawową metodą eksperymentalną zastosowaną w niniejszych badaniach do otrzymania dwuwymiarowych pól prędkości jest cyfrowa anemometria obrazowa (*ang. Particle Image Velocimetry – PIV* [115,116,117]). Umożliwia ona nieinwazyjny ilościowy i jakościowy pomiar prędkości w całych dwuwymiarowych przekrojach na podstawie cyfrowej analizy obrazów. Pierwszym etapem tej metody jest rejestracja serii obrazów przepływu z cząstkami wskaźnikowymi rozproszonymi w cieczy modelowej (tzw. posiew), które oświetlone są widoczne jedynie w płaszczyźnie noża świetlnego. Odstęp czasowy pomiędzy wykonywanymi obrazami jest parametrem, który każdorazowo jest dobierany do charakteru przepływu. Kolejnym krokiem jest analiza przemieszczenia cząsteczek wskaźnikowych dla dwóch kolejnych obrazów. Na podstawie względnego przemieszczenia cząstek znacznikowych i odstępu czasowego pomiędzy wykonanymi obrazami obliczana jest lokalna prędkość pola przepływu. Analiza przemieszczenia cząsteczek wskaźnikowych może zostać wykonana przy pomocy różnych metod przetwarzania obrazów. Obszerny opis metod można znaleźć w pracach Westerweela i współautorów [118], Willerta i Ghariba [119] oraz Raffela i współautorów [120]. Klasyczne metody anemometrii cyfrowej polegają na podziale analizowanych obrazów na segmenty (tzw. okna), a następnie korzystając z cyfrowej reprezentacji każdego z segmentów szuka się dla każdego segmentu z pierwszego obrazu podobieństwa do któregoś segmentu z drugiego obrazu. Jako miarę podobieństwa przyjmuje się współczynnik korelacji obliczony na podstawie cyfrowej reprezentacji dwóch analizowanych segmentów. Stosowane są również inne definicje miary podobieństwa pomiędzy segmentami obrazów oparte na analizie Fourierowskiej segmentów czy autokorelacji [121].

Klasyczna metoda pomiaru pól prędkości PIV opisana powyżej ma szereg wad wynikających głównie z sztywnego podziału na segmenty analizowanych obrazów. Zastąpienie analizy podobieństwa pomiędzy segmentami obrazu metodą potoków optycznych (*ang. optical flow*), która umożliwia wyznaczenie przemieszczenia dla każdego elementu obrazu (piksla), pozwoliło na powiększenie dokładności pomiaru w porównaniu z klasyczną analizą PIV (Quenot, Pakleza, Kowalewski [49,50]). Wykorzystanie tej metody w niniejszych badaniach pozwoliło w wielu przypadkach na istotną poprawę dokładności pomiaru pól prędkości.

Dokładność pomiarów metodą PIV zależna jest od wielu czynników, z których najistotniejszymi są rozdzielczość obrazu, prawidłowy dobór sekwencji korelacji i odstępu czasowego pomiędzy obrazami oraz rodzaj i rozmiar cząstek wskaźnikowych. Dla zwiększenia dokładności pomiaru wykonywano obliczenia pól prędkości na podstawie serii N zdjęć (dla zdjęć wykonanych kamerą kolorową długość serii N wynosiła 40, a dla zdjęć wykonanych kamerą czarno – białą długość serii N wynosiła 150) i otrzymywano w ten sposób $N-1$ pól prędkości. Serie zdjęć wykonywano w równych odstępach czasowych $\Delta t = 50, 100, 200, 300, 500$ i 1000 ms. Dla każdej z serii wyliczano średnie pole prędkości \vec{v}_{avg} w oparciu o wartości chwilowe prędkości $\vec{v}_i (i=1..N)$ otrzymane na podstawie pojedynczych par zdjęć.

$$\vec{v}_{avg} = \frac{1}{N} \sum_{i=1..N} \vec{v}_i \quad (4.1)$$

W celu określenia optymalnego odstępu czasowego dla konkretnego pomiaru (serii zdjęć) oraz oszacowania dyspersji pojedynczych pól prędkości dla uzyskanych wyników analizowano odchylenia standardowe dla każdej z serii obrazów.

$$\sigma_N = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1..N} (\vec{v}_i - \vec{v}_{avg})^2 \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

Ze względu na to, iż analizowano stany stacjonarne przepływu, przyjęto że, im mniejsze odchylenie standardowe σ_N w punkcie tym dokładniejszy pomiar punktowy, a dla otrzymanych średnich pól prędkości przyjęto, że im mniejsza maksymalna wartość odchylenia standardowego σ_N w całym polu tym dokładniejszy pomiar dla całego pola. Dzięki temu kryterium można było określić optymalny czas rejestracji kolejnych obrazów. Jako miarę dokładności (błąd pomiaru pola prędkości) wyliczonego na podstawie (4.1) przyjęto wartość $3s_\sigma$, którą jest potrójna wartość estymatora dyspersji średniej wyliczonej na podstawie (4.1).

$$s_\sigma = \left[\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1..N} (\vec{v}_i - \vec{v}_{avg})^2 \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

Pomiary wykonywano z różnego rodzaju cząstkami znacznikowymi: pyłki sosny, ciekłe kryształy kapsułkowane i niekapsułkowane. Średnica tych cząstek wahała się w granicach od 50 do 250 μm , a ich gęstość jest podobnego rzędu co gęstość wody. Prędkość sedimentacji dla tych cząstek jest około 1000 razy mniejsza od mierzonych prędkości w przepływie. Z tego względu można przyjąć, że cząstki przemieszczały się wzdłuż linii pola przepływu wywołanego różnicą temperatur i zaniedbać efekty inercyjne.

4.3.2 Cyfrowa termometria obrazowa (PIT)

Cyfrowa termometria obrazowa (PIT) jest metodą pomiaru pól temperatury na podstawie analizy cyfrowych obrazów kolorowych przepływu, w którym jako cząstki wskaźnikowe stosuje się zawiesiny ciekłokrystaliczne. Metoda ta powstała na bazie metody cyfrowej anemometrii obrazowej (PIV) opisanej w rozdziale 4.3.1, z tą różnicą, że metoda pomiaru pól temperatury (PIT) wymaga wykonywania obrazów kolorowych. Stosowany w tej metodzie układ optyczny jest analogiczny do używanego przy pomiarach pól prędkości. Pomiar pola temperatury cieczy w badanych przepływach bazuje na zjawisku selektywnego rozpraszania światła przez niektóre substancje ciekłokrystaliczne. Objawia się to jako zmiana barwy światła (długości fali) w funkcji temperatury i kąta rozproszenia. Wykorzystanie zawiesiny ciekłokrystalicznej jako posiewu stworzyło możliwość wizualizacji pola temperatury cieczy dla całego dwuwymiarowego przekroju przez naczynie pomiarowe oświetlane przez tzw. nóż świetlny (Hiller i Kowalewski [81]). Połączenie obu metod (PIV & PIT) umożliwiło stworzenie narzędzia pomiarowego do diagnostyki przepływów termicznych, dzięki czemu można uzyskać jednocześnie pola prędkości i pole temperatury. Przydatność tak utworzonej techniki hybrydowej została wykorzystana do badań przepływów z przemianą fazową [67,68] oraz przepływów ze swobodną powierzchnią [84,85].

Określenie lokalnej temperatury cieczy dokonuje się poprzez wyznaczenie barwy (długości fali) światła rozpraszanego przez cząstki posiewu ciekłokrystalicznego. Zastosowana analiza obrazów barwnych, prowadząca do wyznaczenia barwy dominującej rozpraszanego światła (długości fali o maksymalnej intensywności), opiera się na klasycznej metodzie kolorymetrii. Rejestrowane obrazy w formacie RGB¹ poddaje się transformacji algebraicznej, która prowadzi do wyznaczenia barwy dominującej (ang. Hue). Wyznaczenie barwy dominującej umożliwia pomiar lokalnej temperatury ciekłego kryształu. Proces kalibracji przeprowadzono każdorazowo dla wszystkich zastosowanych zawiesin ciekłokrystalicznych. W niniejszych badaniach wykorzystano zawiesiny ciekłokrystaliczne, które zestawiono w Tabeli 4.2 wraz z ich właściwościami. Zastosowanie różnego rodzaju ciekłych kryształów spowodowane było koniecznością dostosowania zakresu zmian barwny do warunków termicznych danej konfiguracji eksperymentalnej.

¹ RGB (Red, Green, Blue) – podstawowe składowe obrazu barwnego w reprezentacji addytywnej.

Lp	Symbol	Producent	Temperatura startowa zmian barwnych	Zakres zmian barwnych	Forma
1	BM250/R0C10W/S33	Hallcrest Ltd.	0 °C	10°C	Kapsułkowane
2	BM100/R6C12W/S33	Hallcrest Ltd.	6 °C	12°C	Kapsułkowane
3	TM445 (R17C6W)	BDH	17°C	6°C	Nie kapsułkowane
4	TM446 (R37C6W)	BDH	37°C	6°C	Nie kapsułkowane
5	TM317 (21C)	BDH	21°C	20°C	Nie kapsułkowane
6	TM912	Merc	-2°C	10°C	Nie kapsułkowane
7	TCC 1001	Merc	27°C	4°C	Kapsułkowane
8	BM100/R20C10W/S33	Hallcrest Ltd	20°C	10°C	Kapsułkowane

Tabela 4.2. Zestawienie wykorzystanych w badaniach zawiesin ciekłokrystalicznych

W wstępnych badaniach wyłoniono cztery zawiesiny ciekłokrystaliczne, które pozwalały na uzyskanie najlepszych rezultatów w obrębie badanych temperatur. Są nimi zawiesiny numer 2, 3, 5, 7 z Tabeli 4.2. Dodatkowo, wykorzystano mieszanę zawiesin numer 3 i 6 w stosunku 3 : 1 uzyskując nową zawiesinę, którą nazwano Mix C. Dla tych pięciu zawiesin wykonano proces kalibracji, w wyniku czego wyliczono postać funkcji wiążącej barwę dominującą (*ang. Hue*) z temperaturą ciekłego kryształu. Kalibrację przeprowadzono wykonując niezależnie pomiary cieczy przy pomocy punktowych pomiarów temperatury i jednocześnie dokonując rejestracji obrazów. Procedura ta pozwoliła związać wartość barwy dominującej obliczonej na podstawie analizy obrazu ze znaną temperaturą mierzoną jednocześnie punktowo przez termopary. Poniżej przedstawiono postać funkcji kalibracyjnych wraz z analitycznymi formułami otrzymane w procesie kalibracji dla kolejnych zawiesin ciekłokrystalicznych, które zostały wykorzystane w dalszych badaniach. Dla każdej funkcji podano wyliczone współczynniki wielomianu kalibracyjnego ogólnej postaci:

$$T[°C] = A_0 + A_1H + A_2H^2 + A_3H^3 + A_4H^4 + A_5H^5 \quad (4.4)$$

Na podstawie funkcji kalibracyjnej postaci (4.4) oraz dysponując obrazem zawierającym barwę dominującą (*ang. Hue*, składowa H obrazu w zmiennych HSV²) wyliczano pełne pola temperatury.

$$A_0 = -3.310133725122E+00$$

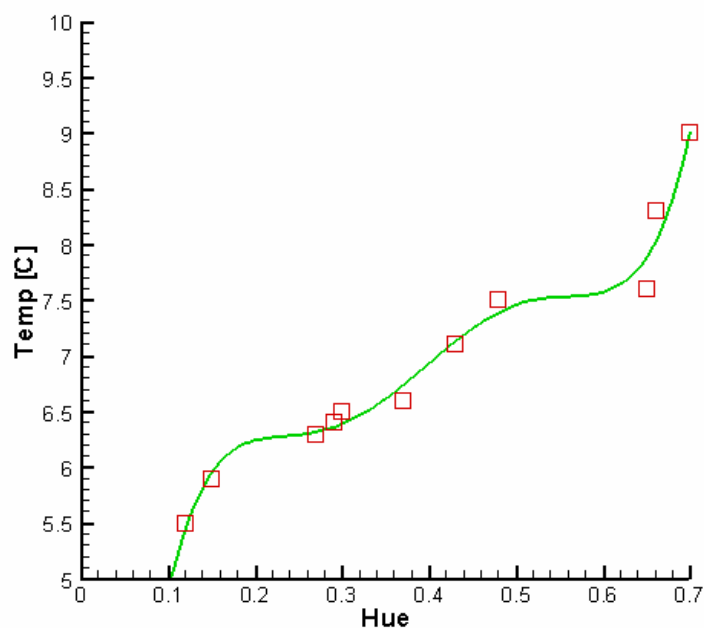
$$A_1 = 1.497795553658E+02$$

$$A_2 = -9.009563901644E+02$$

$$A_3 = 2.570808124664E+03$$

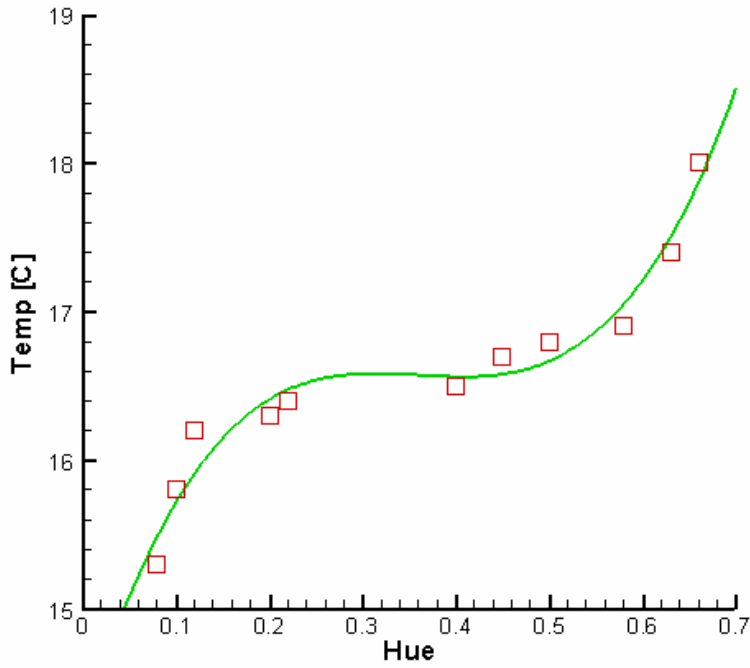
$$A_4 = -3.424912823552E+03$$

$$A_5 = 1.722424961352E+03$$



a) BM100/R6C12W/S33 (Hallcrest)

² HSV (Hue, Saturation, Value) – składowe obrazu barwnego w klasycznej reprezentacji barwy obrazu



$$A_0=1.421620906979E+01$$

$$A_1=2.030195319446E+01$$

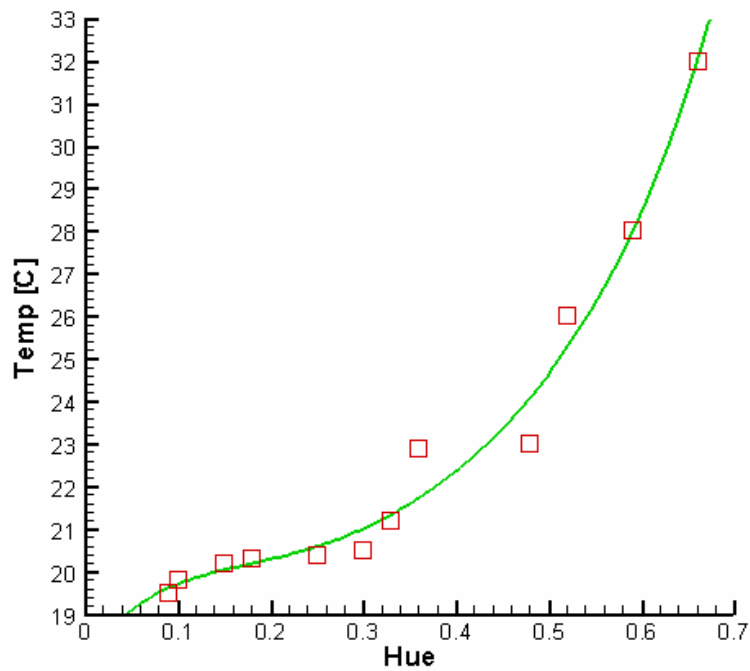
$$A_2=-5.713682305162E+01$$

$$A_3=5.269927128404E+01$$

$$A_4=0.0$$

$$A_5=0.0$$

b) TM445 (R17C6W) BDH



$$A_0=1.791776756812E+01$$

$$A_1=3.179426458148E+01$$

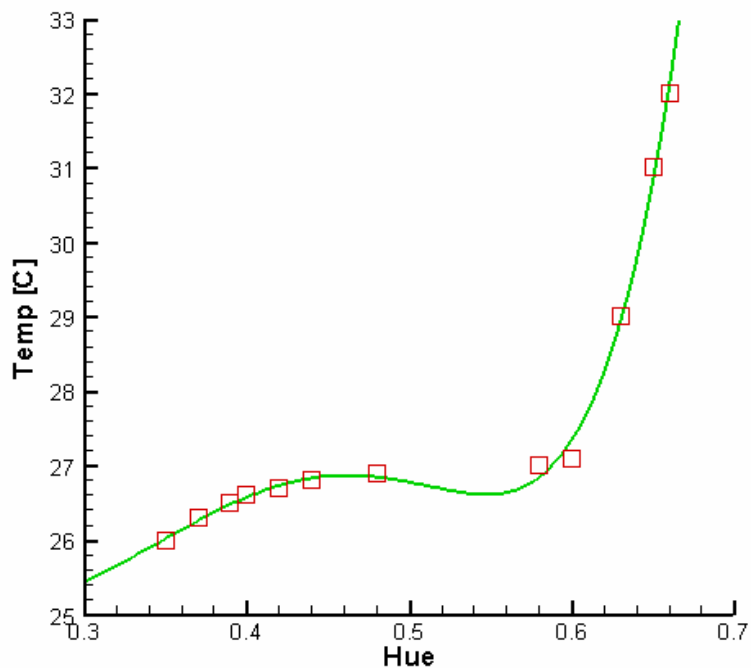
$$A_2=-1.892031380807E+02$$

$$A_3=5.943885337885E+02$$

$$A_4=-8.147604294755E+02$$

$$A_5=4.731984899788E+02$$

c) TM317 (21C) BDH



d) TCC 1001 (Merc)

$$A_0 = -1.599193239699E+01$$

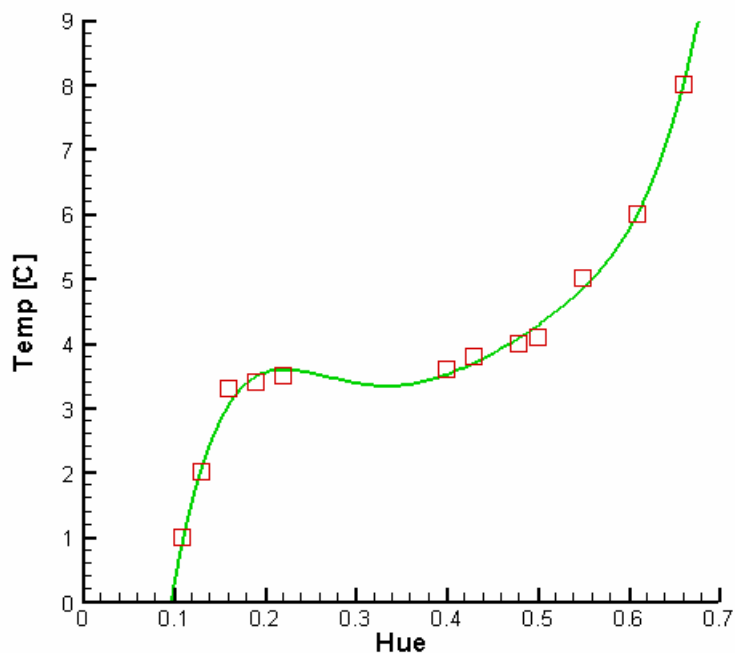
$$A_1 = 5.853384681897E+02$$

$$A_2 = -3.372867905327E+03$$

$$A_3 = 9.628180034326E+03$$

$$A_4 = -1.331189558581E+04$$

$$A_5 = 7.097502653066E+03$$



e) MixC

$$A_0 = -1.651468786279E+01$$

$$A_1 = 2.925319107610E+02$$

$$A_2 = -1.615414909562E+03$$

$$A_3 = 4.229009831807E+03$$

$$A_4 = -5.305641910642E+03$$

$$A_5 = 2.603422134686E+03$$

Rysunek 4.3. Zestawienie krzywych kalibracyjnych dla wykorzystanych zawieszin ciekłokrystalicznych. Na marginesie podano wartość współczynników wielomianu kalibracyjnego.

Dokładność pomiaru temperatury zależy od wartości Hue i zmienia się od 3% do 10% pełnego zakresu i zależy od charakteru otrzymanych funkcji kalibracyjnych. Dla ciekłych kryształów używanych w niniejszych badaniach otrzymano lepszą dokładność dla niższych temperatur ($0.1 < \text{Hue} < 0.25$, kolor czerwony i zielony) wynoszącą około 0.5 K oraz gorszą

dokładność dla wyższych temperatur ($0.5 < \text{Hue} < 0.7$, kolor niebieski) wynoszącą około 2K. Największa czułość metody ma miejsce przy zmianie barwy materiału ciekłokrystalicznego z czerwieni do zieleni, odpowiadającej zmianie wartości temperatury poniżej jednego stopnia ($0.2 < \text{Hue} < 0.5$).

Wykorzystując krzywe kalibracyjne można automatycznie przetwarzać obrazy RGB zarejestrowane podczas przeprowadzania eksperymentu. Algorytm takiego przetwarzania, który był wykorzystywany do otrzymania pól temperatury, można zapisać następująco:

- (1) Wczytanie obrazu RGB
- (2) Wyznaczenie składowych R, G, B ($0 \leq R, G, B \leq 255$)
- (3) Dyskryminacja informacji barwnej obrazu poprzez wycięcie wartości R, G, B , poniżej ustalonej wartości progowej (około 50 dla każdej ze składowej R, G, B)
- (4) Znalezienie składowych H, S, V (Hue, Saturation, Value) na podstawie R, G, B
- (5) Usrednienie składowej Hue poprzez zastosowanie filtrów medianowych dla całego pola
- (6) Wyliczenie pola temperatur na podstawie wartości Hue korzystając ze znajomości analitycznej krzywej kalibracyjnej postaci (4.4)
- (7) Zapisanie pola temperatur

Powyższy algorytm został zaimplementowany w programie Matlab [122], z wykorzystaniem pakietu do przetwarzania obrazów (Image Toolbox), co pozwoliło na automatyczną obróbkę obrazów uzyskanych podczas eksperymentów.

Typowe materiały ciekłokrystaliczne mają ciężar właściwy zbliżony do ciężaru właściwego wody, toteż cząstki posiewu mogą być traktowane jako neutralne względem siły wyporu. Czas relaksacji termicznej materiału ciekłokrystalicznego jest stosunkowo długi i dla typowej zawiesiny cząstek o wymiarze od 50 μm do 250 μm wynosi około od 3 ms do 15 ms. Jest to czas zupełnie wystarczający dla badań konwekcji termicznej w cieczach.

Pomiar pól temperatury techniką PIT, choć bardzo atrakcyjny z uwagi na bezinwazyjność metody i możliwość uzyskania informacji o rozkładzie temperatury w całym przekroju przepływu, posiada szereg ograniczeń. Zakres zmian barwy materiału ciekłokrystalicznego na ogół nie pokrywa całego interesującego nas zakresu zmian temperatur. Toteż w celu powiększenia zakresu zmian barwy materiału wykonywano pomiary z wykorzystaniem mieszanek zawiesin ciekłokrystalicznych (np. MixC) lub dokonywano kilkakrotnych pomiarów w tych samych warunkach laboratoryjnych z wykorzystaniem różnego rodzaju zawiesin ciekłokrystalicznych wrażliwych w różnych zakresach temperatur. Również istotna z punktu widzenia dokładności pomiarów tą metodą jest odpowiednia koncentracja zawiesiny ciekłokrystalicznej. W celu uzyskania obrazów o większym nasyceniu barwnym wykorzystano do opisanego powyżej analizy obrazu powstałe w wyniku zsumowania kilku kolejnych obrazów cyfrowych w krótkim odstępie czasu.

4.3.3 Wizualizacja struktur przepływu

Akwizycja całych serii obrazów przepływu wraz z cząsteczkami wskaźnikowymi pozwoliła na wizualizację torów cząstek i sumowanie od kilku do kilkunastu kolejnych obrazów. Taka metoda wizualizacji jest doskonałym narzędziem do jakościowej oceny struktury przepływu, dzięki niej można łatwo identyfikować i interpretować poszczególne różnice i podobieństwa struktury przepływu. Służy ona głównie do jakościowej oceny zgodności symulacji numerycznej z wynikami eksperymentalnymi oraz również do identyfikacji szczegółów pól prędkości trudnych do identyfikacji na podstawie pól wektorowych prędkości. Informacja zbierana podczas wizualizacji odpowiada scałkowanym w czasie torom poruszającego się z płynem posiewu i stanowi cenne uzupełnienie metody PIV.

Komputerowa rejestracja obrazów umożliwiła rejestrację długich sekwencji obrazów, które rejestrowały stany stacjonarne przepływu, i ich późniejsze zsumowanie w pamięci komputera. Do wykonania tej operacji wykorzystano program ADDIMGS wykonany w Zakładzie Mechaniki i

Fizyki Płynów IPPT PAN i wielokrotnie wykorzystywanym do analizy jakościowej przepływów [67,68,123]. Przed zsumowaniem poszczególne obrazy komputerowe poddawano dodatkowo filtracji pozwalającej na wzmocnienie kontrastu i pełniejsze wyodrębnienie poszczególnych cząstek znacznikowych. Odpowiedni dobór parametrów filtracji, liczby sumowanych obrazów i odstępów czasowych został wykonany metodą prób i błędów i pozwolił na wizualizację tych torów cząstek, które były najbardziej istotne dla analizy struktury przepływu. Wykonywano sumowania zarówno obrazów czarno – białych, jak i kolorowych, poprzez sumowanie obrazów dla każdej składowej obrazu RGB.

Otrzymane wyniki na podstawie opisanej powyżej wizualizacji torów cząstek otrzymanych z obrazów w badaniach eksperymentalnych zostały porównane z wirtualnymi torami cząstek, generowanymi na bazie otrzymanych rozwiązań numerycznych. Procedura taka w numerycznej mechanice płynów nosi nazwę *particle tracking* i polega na wyznaczaniu linii prądu przepływu. Analogiczną operację można wykonać na podstawie pól prędkości otrzymanych metodą PIV. Porównanie uzyskanych rezultatów eksperymentalnych, tzn. fizycznych torów cząstek znacznikowych pochodzących z wizualizacji przepływu, linii prądu wyznaczonych na podstawie eksperymentalnego pola prędkości (PIV) oraz wirtualnych torów powstałych przez scałkowanie pól prędkości z wirtualnymi torami otrzymanymi na podstawie rozwiązań numerycznych umożliwiła interpretację struktur przepływu i jakościową ocenę ich zgodności.

4.3.4 Punktowe pomiary temperatury

Analiza wrażliwości przedstawiona w Rozdziale 3 wykazała konieczność przeprowadzenia badań eksperymentalnych z jednoczesnym monitorowaniem temperatury otoczenia, a także temperatur w naczyniu pomiarowym tak, aby dokładnie określić termiczne warunki brzegowe, w tym przyjęte strumienie ciepła. Ponadto opisana w podrozdziale 4.3.2 procedura kalibracji zawieszin ciekłokrystalicznych wymaga niezależnych pomiarów lokalnej temperatury. Z tego względu rejestrowano podczas wszystkich badań eksperymentalnych punktowo temperaturę przy użyciu wielokanałowego rejestratora PTM3040 firmy PREMA. Termopary o średnicy 1 mm zostały zamontowane na stałe w ściankach naczynia pomiarowego oraz w jego otoczeniu, tak jak pokazano na rysunku 4.1. Termopary zostały wykalibrowane przed rozpoczęciem pomiarów, a błąd kalibracji (różnica wskazań pomiędzy termoparami zanurzonymi w cieczy o tej samej temperaturze) wynosiła mniej niż 0.1 K.

Pomiary punktowe rejestrowano podczas przebiegu całego eksperymentu, dzięki czemu można było niezależnie sprawdzić poprawność wskazań czujników oporowych Pt100 zamontowanych w naczyniu pomiarowym i sprzężonych z termostatami. Częstotliwość rejestracji w pomiarach punktowych wynosiła 0.03 Hz. Ze względu na to, iż celem badań było wykonanie pomiarów dla stanów stacjonarnych, błąd dokładności pomiarów określano podobnie jak dla pomiarów metodą PIV. Wyliczano wartość średnią dla pomiaru punktowego temperatury dla pewnego przedziału czasowego (co najmniej 30 minut), a następnie obliczano estymator określający dyspersję tak wyliczonej średniej s_{σ} (formuła 4.3). Wartość $3 s_{\sigma}$ przyjmowano jako miarę błędu pomiaru. Dla termopar zamontowanych w naczyniu pomiarowym (w ściankach naczynia) wartość ta wynosiła około 0.1 K, natomiast dla termopar umieszczonych w celu monitorowania temperatury zewnętrznej (w powietrzu) średnia fluktuacja temperatury wynosiła 0.5 K. Ta ostatnia wartość jest efektem trudnego do uniknięcia ruchu konwekcyjnego powietrza w pomieszczeniu.

4.4 Przebieg eksperymentów

Podstawowym celem przeprowadzonych eksperymentów jest dostarczenie ilościowych danych o polu prędkości i temperatury charakterystycznych dla stanów stacjonarnych przy zadanej konfiguracji eksperymentalnej z różnymi termicznymi warunkami brzegowymi. Toteż procedura przeprowadzania eksperymentów była podobna. Do naczynia pomiarowego wlewano przegotowaną

i odgazowaną wodę destylowaną wraz z rozproszonymi w niej cząsteczkami wskaźnikowymi (posiewem). Następnie włączano termostaty, które odpowiedzialne były za utrzymywanie stałej temperatury T_L i T_P w komorach bezpośrednio przylegających do aluminiowych ścian naczynia. Po kilku godzinach pracy termostatów, obserwowano ustalenie się temperatury zarówno wewnątrz naczynia pomiarowego, jak i na jego ściankach. Proces ustalania się temperatury był monitorowany przy pomocy punktowych pomiarów temperatury, a w szczególności dbano o to, by temperatury T_h i T_c cieplej i zimnej ścianki naczynia pomiarowego nie zmieniały się. Przy takich warunkach rejestrowano kilka serii zdjęć w różnych odstępach czasowych ($\Delta t = 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 2000 \text{ ms}$) przy użyciu opisanego powyżej układu akwizycji obrazów. Po zarejestrowaniu zdjęć zmieniano parametry termicznych warunków brzegowych poprzez zmianę wartości temperatury, która była stabilizowana przez termostaty. Zazwyczaj zwiększano różnicę temperatur, po czym odczekiwano kilka godzin w celu osiągnięcia ponownie stanu stacjonarnego, w którym przeprowadzano kolejne rejestracje obrazów. Proces powyższy był kilkadziesiąt razy powtarzany z wykorzystaniem różnego rodzaju posiewu (Tabela 4.2) oraz dwóch różnych kamer. Dokładne zestawienie wykonanych pomiarów zostało przedstawione w Tabeli D.1. w dodatku do niniejszej pracy. Znajdują się w niej wartości temperatur ustawionych na termostatach i wskazywanych przez czujniki oporowe zamontowane w komorach bezpośrednio przylegających do aluminiowych ścian naczynia pomiarowego w których krąży glikol (T_L, T_P) oraz wartości rejestrowane na termoparach T_{12}, T_{16} umieszczonych w aluminiowych ściankach naczynia pomiarowego T_h, T_p . Ponadto zamieszczono wartości liczb bezwymiarowych Ra, Pr opisujących bieżącą konfigurację wraz z uzyskaną różnicą temperatur $\Delta T = T_h - T_c$. Dla każdej konfiguracji określono rodzaj posiewu, który został wykorzystany, kamerę, którą wykonano rejestrację, oraz przedziały czasowe z którymi wykonywano kolejne serie zdjęć. Dodatkowo zaznaczono czy udało się wyznaczyć pole prędkości i pole temperatur (kolumny PIV, PIT). Wartość liczb bezwymiarowych obliczano na podstawie wartości termofizycznych wody dla temperatury średniej $T_{avg} = (T_c + T_h)/2$. Ze względu na anomalie gęstości wody (2.50) konfiguracje eksperymentalne, dla których wartość T_{avg} otrzymywano w pobliżu 4°C , charakteryzuje efektywnie niższa wartość liczby Rayleigha.

Powyżej opisane badania zostały poprzedzone badaniami wstępnymi, których zadaniem było ustalenie zakresu barwnego wykorzystanych zawieszin ciekłokrystalicznych i przyporządkowanie ich do badanych konfiguracji eksperymentalnych. Ponadto określono optymalne odstępy czasowe z jakimi należy rejestrować obrazy dla kolejnych konfiguracji poprzez analizę błędów dokładności otrzymywanych pól prędkości metodą PIV. Okazało się, że dla różnicy temperatur $\Delta T \approx 10 \text{ K}$ i mniejszej optymalny jest odstęp czasowy $\Delta t = 1 \text{ s}$, dla różnicy temperatur $\Delta T \approx 20 \text{ K}$ odstęp $\Delta t = 500 \text{ i } 200 \text{ ms}$, natomiast dla różnicy temperatur powyżej 25K - $\Delta t = 200 \text{ i } 100 \text{ ms}$.

Do rejestracji wykorzystywano dwie kamery: kolorową o rozdzielczości 756×568 i czarno białą o rozdzielczości 1280×1024 . Rejestrowane obrazy zostały wykadrowane tak, aby obejmowały oświetlony płaszczyznę świetlną obszar z jak największą rozdzielczością. Efektywnie otrzymano rozdzielczość obrazów dla kamery kolorowej 520×509 pikseli oraz dla kamery czarno białej 920×911 pikseli. W celu dokładnego zbadania termicznej warstwy przyściennej wykonywano również pomiary przepływu jedynie wzdłuż jednej z aluminiowych ścian, rejestrując obrazy obejmujące tylko fragment oświetlonej płaszczyzny o rozmiarach $35 \times 26 \text{ mm}$ lewego dolnego rogu analizowanego przekroju. W pomiarach tych wykonywano serie obrazów o pełnej rozdzielczości 1280×1024 w odstępach czasu $\Delta t = 500, 300, 200, 100, 50 \text{ ms}$. Obrazy te zostały wykorzystane do analizy fluktuacji pól prędkości i zostały szczegółowo opisane w rozdziale 4.7.

4.5 Wyniki badań eksperymentalnych

Wyniki pomiarów eksperymentalnych zostaną przedstawione w trzech częściach. Podziału na części dokonano ze względu na różnicę temperatur ΔT pomiędzy temperaturą zarejestrowaną w lewej ścianie aluminiowej T_h , a temperaturą zarejestrowaną w prawej ścianie T_c . Pierwszą grupę pomiarów stanowią konfiguracje o różnicy temperatur około 10°C , w Tabeli D.1. są to numery od 1 do 24. W grupie tej znajdują się konfiguracje, których zakres temperatur znajduje się w pobliżu

0°C, toteż obserwowano strukturę przepływu składającą się z dwóch wirów, jednego powyżej 4°C oraz drugiego, poniżej tej temperatury, spowodowane anomalną zależnością gęstości od temperatury dla wody. Kolejną grupę stanowią konfiguracje eksperymentalne o różnicy temperatur od 14°C do 25°C. Grupa ta charakteryzuje się widocznymi termicznymi warstwami przyściennymi, powstającymi przy aktywnych ściankach bocznych (zimnej i ciepłej). Struktura przepływu jest prosta, gdyż temperatura wewnątrz naczynia pomiarowego zawsze jest wyższa niż 4°C. Jest to zakres wysokich liczb Rayleigha, w których większość przepływu odbywa się w pobliżu ścianek podczas gdy ciecz w centralnej części naczynia pozostaje w bezruchu. Trzecią grupę stanowią konfiguracje o różnicy temperatur powyżej 25°C, w których termiczne warstwy przyścienne powodują powstawanie struktur wirowych widocznych w rogach centralnego przekroju naczynia. Do grupy tej należą konfiguracje, w których dochodzi do zerwania stabilności przepływu i stan stacjonarny nie jest obserwowany. Wyróżnione grupy podzielone ze względu na różnicę temperatur ΔT zostały zestawione w Tabeli 4.3.

Numery Eksp ³ .	Różnica temp. ΔT	Zakres Ra	Zakres Pr	Opis
1-24	$\Delta T < 14^\circ\text{C}$	$Ra < 3 \cdot 10^7$	$9.53 < Pr < 13.31$	przepływy z inwersją gęstości.
25-39	$14^\circ\text{C} < \Delta T < 25^\circ\text{C}$	$3 \cdot 10^7 < Ra < 1.5 \cdot 10^8$	$7.01 < Pr < 9.53$	Przepływy bez inwersji gęstości charakteryzujące się wysokimi liczbami Rayleigha z wykształconymi termicznymi warstwami przyściennymi.
40-50	$\Delta T > 25^\circ\text{C}$	$Ra > 1.5 \cdot 10^8$	$5.39 < Pr < 7.01$	Przepływ przejściowy, w którym dochodzi do zerwania stacjonarności przepływu.

Tabela 4.3. Podział na grupy wykonanych badań eksperymentalnych

Prezentowane wyniki dla wybranych konfiguracji składają się z wizualizacji przepływu w centralnym przekroju (rys. 4.1b), wykonanej zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 4.3.3, pola prędkości otrzymanego na podstawie metody PIV, opisaniej w rozdziale 4.3.1, oraz pola temperatur na podstawie metody PIT opisaniej w rozdziale 4.3.2. Każdemu wynikowi eksperymentalnemu przedstawionemu w niniejszej pracy towarzyszy opis w postaci tabelarycznej zestawiony w Dodatku zawierający informacje na temat konfiguracji, której dotyczył pomiar. Opis ten zawiera :

- informacje identyfikujące eksperyment (nr z Tabeli D.1., liczby bezwymiarowe, różnica temperatur)
- wartości punktowych pomiarów temperatury w punktach $T_7 - T_{16}$ oznaczonych na rysunku 4.1 b i c (podano wartości średnie, patrz opis rozdział 4.3.4), które zmierzono podczas rejestracji obrazów wraz z oszacowaniem dokładności tych pomiarów $3s_\sigma$ (4.3)
- efektywną rozdzielczość kamery
- odstęp czasowy Δt pomiędzy kolejnymi obrazami
- rodzaj cząsteczek wskaźnikowych (posiew)
- dokładność pomiaru metodą PIV (maksymalna wartość $3s_\sigma$ dla całego pola)
- zakres wrażliwości barwnej dla wykorzystanej w pomiarze zawiesiny ciekłokrystalicznej z wyodrębnionym zakresem dla każdego koloru (przedziały od/do w °C, oraz przedziały od/do wartości Hue odpowiadający kolejnym kolorom)

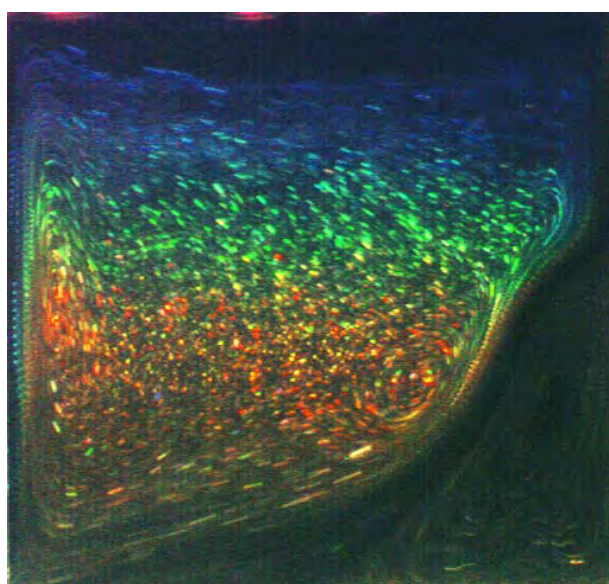
Dokładność metody PIV określano poprzez podanie maksymalnej wartości estymatora dyspersji $3s_\sigma$ dla wyliczonej wartości średniej pola prędkości w całym polu prędkości. Estymator ten oblicza się wykorzystując formułę (4.3) na podstawie średniej prędkości otrzymanych z serii obrazów tak jak opisano to w rozdziale 4.3.1. Dokładność pomiaru metodą PIT określona jest dla każdego przedziału temperatury, który odpowiada konkretnemu kolorowi zawiesiny ciekłokrystalicznej. Z uwagi na to iż, analizowano nie pojedyncze obrazy barwne lecz obrazy powstałe w wyniku zsumowania kilku obrazów dokładność pomiaru oszacowywana jest dla każdego rezultatu

³ Numery eksperymentów określają numery z Tabeli D.1. zamieszczonej w Dodatku niniejszej pracy

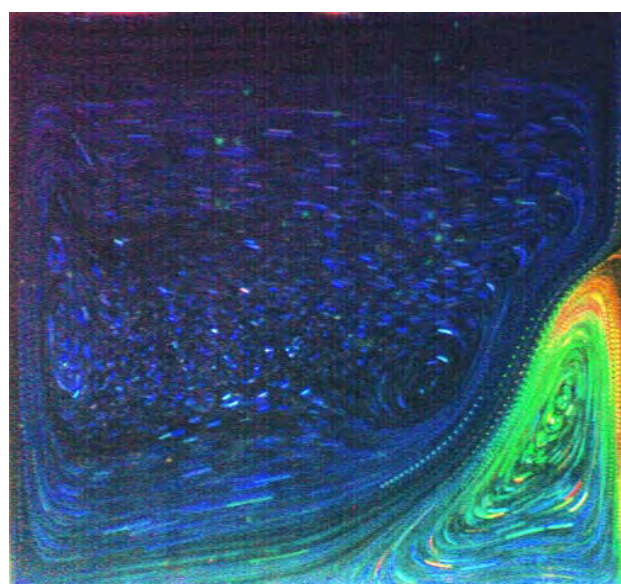
oddzielnie na podstawie krzywych kalibracyjnych. Miarą dokładności dla tych pomiarów może być stosunek ilości pikseli jednego koloru (np. czerwonego, żółtego, zielonego czy niebieskiego) do przedziału temperatur odpowiadającemu temu kolorowi lub miarą dokładności można odczytywać na podstawie charakteru krzywej kalibracyjnej biorąc pod uwagę wartości Hue. Dla obszarów bezbarwnych, poza zakresem wrażliwości zawiesiny ciekłokrystalicznej, nie można tą metodą określić temperatury poza stwierdzeniem iż temperatura w tych obszarach jest poniżej lub powyżej pewnej wartości granicznej (tzn. dolnej lub górnej wartości przedziału wrażliwości barwnej ciekłego kryształu). Z tego względu toteż nie określono dokładności dla obszarów „bezbarwnych”.

4.5.1 Wyniki badań dla $\Delta T < 14^\circ\text{C}$

Pierwsza część wyników eksperymentalnych obejmuje konfiguracje eksperymentalne dla różnicy temperatur $\Delta T = T_h - T_c < 14^\circ\text{C}$ pomiędzy aluminiowymi ściankami termostatu. Badane konfiguracje charakteryzują się występowaniem anomalnej zależności gęstości wody dla temperatury w pobliżu 4°C . Obraz konwekcji naturalnej wody w zakresie temperatur powodujących występowanie anomalii gęstości zasadniczo różni się od obrazu konwekcji naturalnej standartowych płynów (por. rys. 4.4). Ciecz w otoczeniu ciepłej ścianki (lewa strona naczynia) zachowuje się „normalnie”, tzn. jej gęstość maleje z temperaturą. Ogrzane warstwy wody przemieszczają się w związku z tym wzdłuż ciepłej ścianki w kierunku ścianki górnej. Dalszy kierunek przepływu nadaje geometria naczynia, i ciepłe masy płynu docierają do górnej krawędzi ścianki zimnej. Anomalia zmian gęstości w temperaturach poniżej 4°C powoduje powstanie drugiej, odwrotnej cyrkulacji w pobliżu zimnej ścianki, przemieszczającej ciecz w przeciwnym kierunku. Oddziaływanie obu wirowych struktur przepływu stanowi interesujący i zarazem trudny do symulacji numerycznych wzorzec eksperymentalny. Odpowiednie eksperymentalne zwizualizowanie powstających struktur oraz dostarczenie ilościowych danych eksperymentalnych o polu prędkości i polu temperatur jest naczelnym celem tej części badań. Dane te posłużą do zdefiniowania wzorca eksperymentalnego w rozdziale 4.6 niniejszej pracy.



a) Eksperyment Nr 12 ($T_h = 10^\circ\text{C}$, $T_c = 0^\circ\text{C}$)
TLC: BM100/R6C12W/S33Halcrest

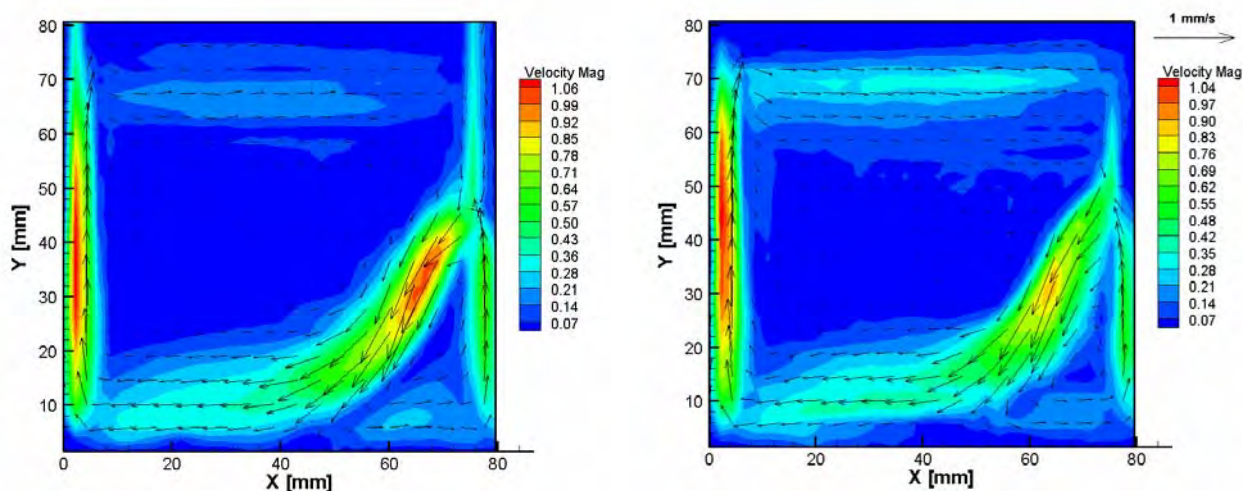


b) Eksperyment Nr 11 ($T_h = 10^\circ\text{C}$, $T_c = 0^\circ\text{C}$)
TLC: MixC

Rysunek 4.4. Wizualizacja pola temperatury z wykorzystaniem różnych zawiesin ciekłokrystalicznych

Tworząc taki wzorzec nie tylko ograniczono się do badania konfiguracji przedstawionej na rysunku 4.4 dla różnicy temperatur $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, ale sprawdzono również wrażliwość na zmianę

termicznych warunków brzegowych (tj. zmiany temperatur T_c , T_h ścianek bocznych). Rysunek 4.6. przedstawia otrzymane struktury przepływu w przypadku gdy zmieniano w niewielkim zakresie temperatury ścianek izotermicznych: a) $T_h \cong 10^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 2^\circ\text{C}$ b) $T_h \cong 12^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 0^\circ\text{C}$ c) $T_h \cong 10^\circ\text{C}$ i $T_c \cong -2.5^\circ\text{C}$ d) $T_h \cong 10^\circ\text{C}$ i $T_c \cong -2^\circ\text{C}$ e) $T_h \cong 10^\circ\text{C}$ i $T_c \cong -1^\circ\text{C}$ f) $T_h \cong 10^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 1^\circ\text{C}$. Dokładne wartości warunków brzegowych zostało zestawione w sposób tabelaryczny w Dodatku do niniejszej pracy. Zaobserwowano zgodnie z oczekiwaniami (patrz wnioski otrzymane na podstawie metody oceny wiarygodności - rozdział 3), dużą wrażliwość struktury przepływu na zmiany termicznych warunków brzegowych. W celu prawidłowej symulacji numerycznej tych konfiguracji zachodzi konieczność zdefiniowania tych warunków brzegowych z dokładnością przynajmniej do 0.5°C . Obniżając temperaturę prawej ścianki wir w prawym dolnym rogu wydłużał się, odseparowując ciepłe masy wody zupełnie od prawej ściany (rysunek 4.6 c). Natomiast wraz z zwiększaniem temperatury lewej ścianki wir ten malał i zmieniał kształt z podłużnego wzdłuż prawej ścianki do trójkątnego w prawym dolnym rogu (rysunek 4.6 f).



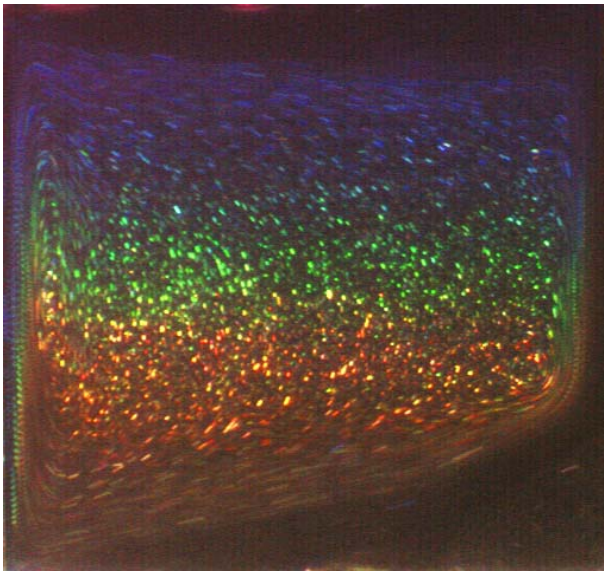
a) Eksperyment Nr 12 ($T_h = 10^\circ\text{C}$, $T_c = 0^\circ\text{C}$)

b) Eksperyment Nr 11 ($T_h = 10^\circ\text{C}$, $T_c = 0^\circ\text{C}$)

Rysunek 4.5. Pole prędkości otrzymane z wykorzystaniem różnych zawiesin ciekłokrystalicznych jako posiewu (a) BM100/R6C12W/S33Halcrest (b) MixC

Prezentowane wyniki na rysunkach 4.4 i 4.5 zostały otrzymane przy wykorzystaniu zawiesin ciekłokrystalicznych BM100/R6C12W/S33 i MixC jako cząsteczek znacznikowych. Rysunek 4.4. przedstawia tę samą konfigurację eksperymentalną (porównaj Tabelki z eksperymentu 11 i 12 zamieszczone w Dodatku), w których pole temperatury zostało zwizualizowane a) przy pomocy BM100/R6C12W/S33 i b) przy pomocy mieszanki MixC. Świadczy to o powtarzalności struktury uzyskanego przepływu i predysponuje tą konfigurację do zdefiniowania na jej podstawie wzorca eksperymentalnego. Krysztaly te są wrażliwe dla różnych przedziałów temperatur, dzięki czemu możliwe jest otrzymanie pola temperatury dla całego pola przekroju. Dzięki temu uzyskano dokładność pomiaru temperatury metodą PIT wynosi 0.5°C dla temperatur w zakresie $3.3^\circ\text{C} - 3.6^\circ\text{C}$ (kolor żółty dla zawiesiny MixC), $3.6^\circ\text{C} - 3.9^\circ\text{C}$ (kolor zielony dla zawiesiny MixC), $6.4^\circ\text{C} - 6.5^\circ\text{C}$ (kolor żółty dla zawiesiny BM100/R6C12W/S33) oraz około 1°C dla pozostałych temperatur. Duża dokładność wynika również z tego, iż krzywa kalibracyjna dla zawiesiny BM100/R6C12W/S33 (por. rysunek 4.1.a) nie wykazuje silnych nieliniowości, tzn. rośnie w przybliżeniu jednostajnie. Dzięki temu udało się uzyskać równomierne pole temperatur dla całego pola przekroju.

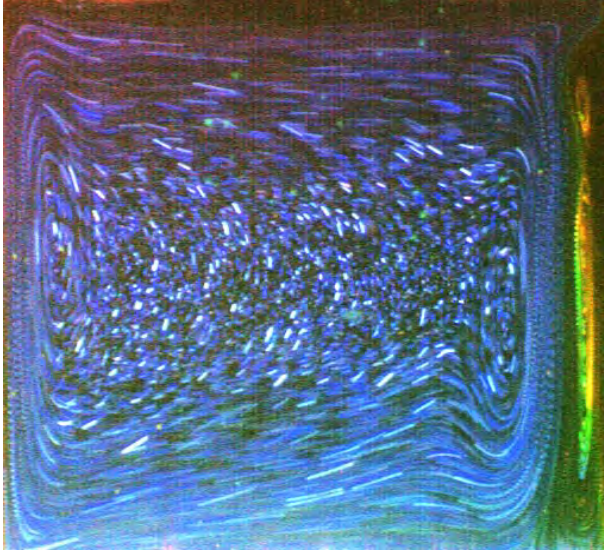
Te same obrazy barwne zostały wykorzystane do wyznaczenia pól prędkości dla badanych konfiguracji. Na podstawie składowej „Green” obrazów RGB wyliczane były pola prędkości przy pomocy metody PIV. Wykonywano serie zdjęć o długości $N = 40$ w odstępach czasu $\Delta t = 1$ s. Na podstawie otrzymanych w ten sposób pól prędkości wyliczono średnie pole prędkości (4.1) oraz wyliczono dokładność tak wykonanych pomiarów (4.3).



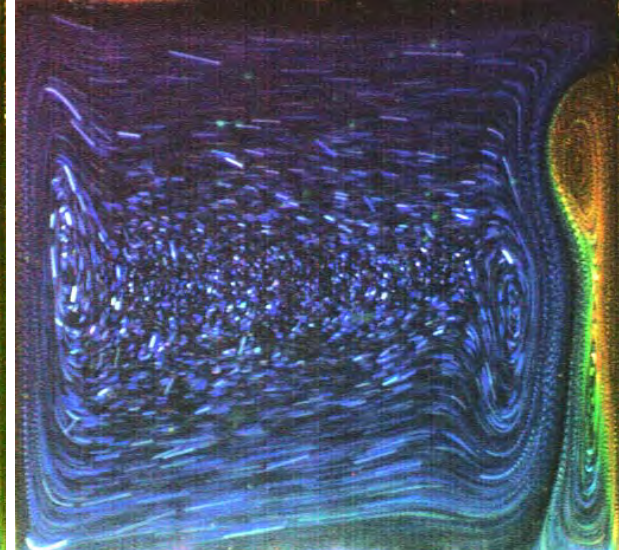
a) Eksperyment nr 18 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = 2\text{ }^\circ\text{C}$)



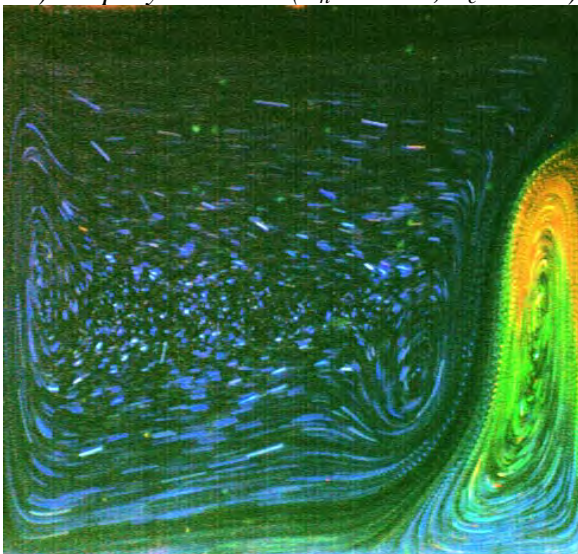
b) Eksperyment nr 21 ($T_h = 12\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = 0\text{ }^\circ\text{C}$)



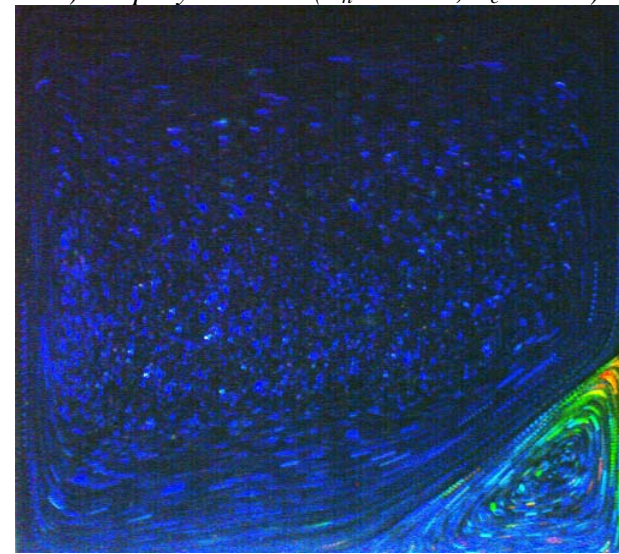
c) Eksperyment nr 1 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = -2\text{ }^\circ\text{C}$)



d) Eksperyment nr 4 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = -1\text{ }^\circ\text{C}$)

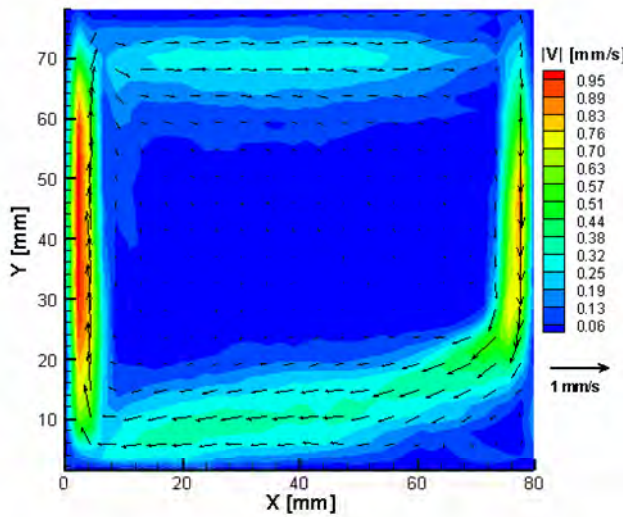


e) Eksperyment nr 7 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = 1\text{ }^\circ\text{C}$)

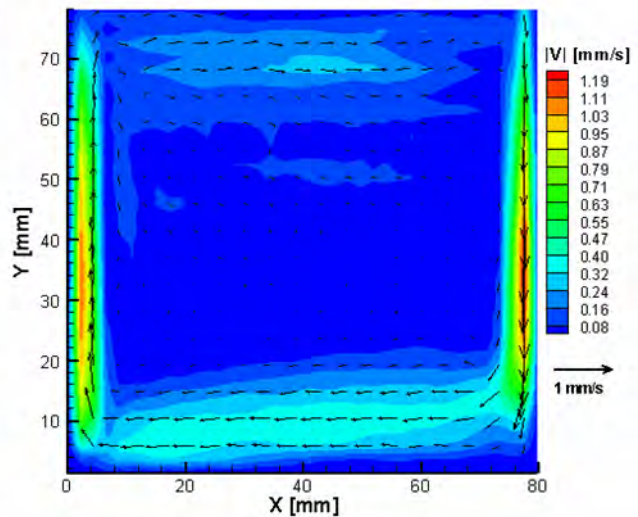


f) Eksperyment nr 14 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = 2\text{ }^\circ\text{C}$)

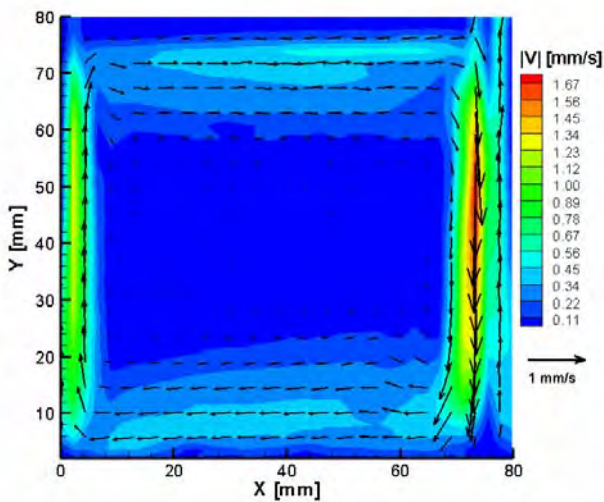
Rysunek 4.6 Wizualizacja pola temperatury dla różnych warunków brzegowych (zmieniano wartości temperatur T_h lub T_c)



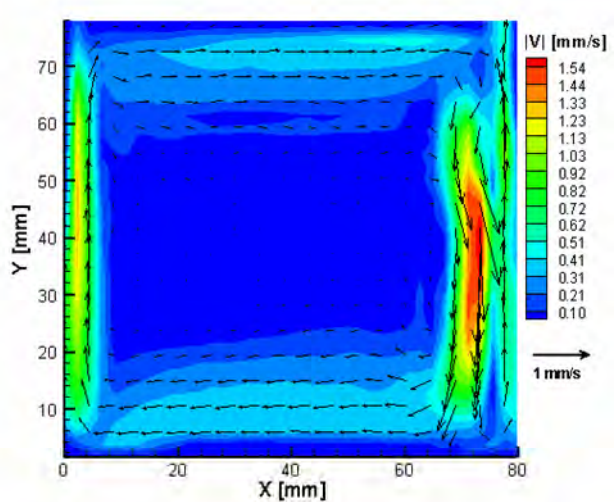
a) Eksperyment nr 18 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = 2\text{ }^\circ\text{C}$)



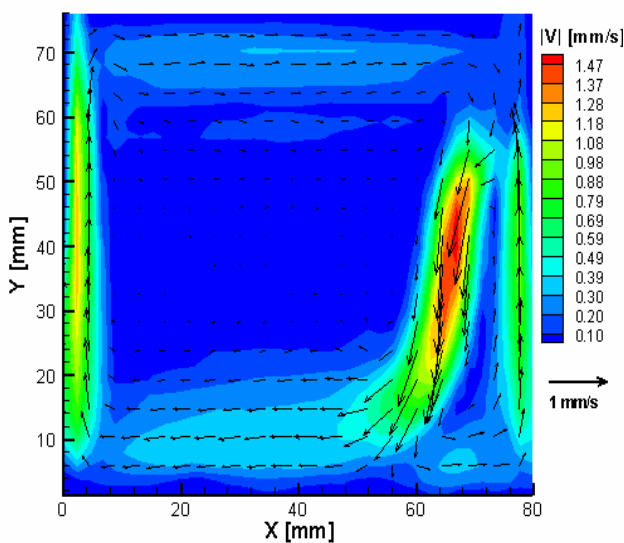
b) Eksperyment nr 21 ($T_h = 12\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = 0\text{ }^\circ\text{C}$)



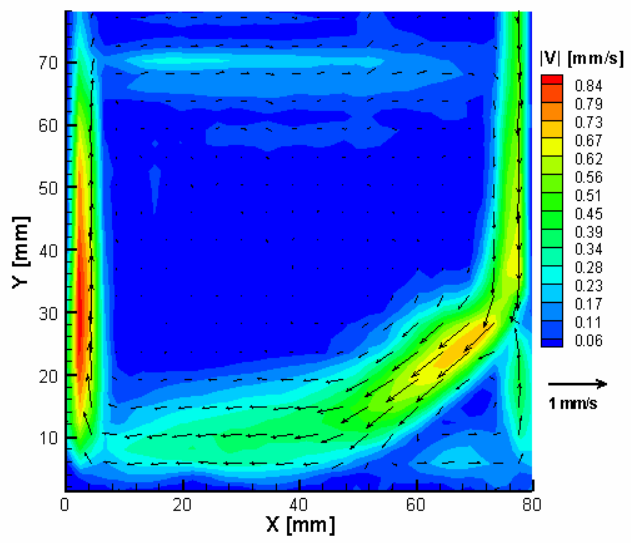
c) Eksperyment nr 1 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = -2\text{ }^\circ\text{C}$)



d) Eksperyment nr 4 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = -1\text{ }^\circ\text{C}$)



e) Eksperyment nr 7 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = 1\text{ }^\circ\text{C}$)



f) Eksperyment nr 14 ($T_h = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = 2\text{ }^\circ\text{C}$)

Rysunek 4.7 Pole prędkości dla różnych warunków brzegowych
(zmieniano wartości temperatur T_h lub T_c)

Dokładność tej metody dla badanych konfiguracji wynosiła od 0.21 mm/s do 0.24 mm/s. Największą zmienność (odchylenie standardowe od średniej (4.2)) zaobserwowano w obszarze spotkania się dwóch przeciwległych strumieni zimnego i ciepłego. Pola prędkości odpowiadające powyżej opisanym konfiguracjom zostały przedstawione na rysunkach 4.5 i 4.7. Maksymalne wartości prędkości mieściły się w zakresie od 1 do 1.5 mm/s.

Wnioski z przeprowadzonej analizy wrażliwości przeprowadzonej na potrzeby metody oceny wiarygodności wykazały konieczność dokładnego monitorowania temperatury zewnętrznej, jak i konieczność znajomości wartości strumieni ciepła Q_1, Q_2, Q_3 pomiędzy otoczeniem a ściankami z Pleksiglasu (Q_1), temperaturą stabilizowanego przez termostaty glikolu a aluminiowymi ściankami (Q_2) oraz pomiędzy otoczeniem a ściankami z aluminium (Q_3) (por. rys. 3.1). Wartości powyższych strumieni można oszacować na podstawie wartości punktowych pomiarów temperatury $T_7, T_{10}, T_{E1}, T_{E2}, T_L, T_P, T_{12}, T_{13}, T_{15}$ oraz T_{16} (por. rys. 4.1.b-c). Jednakże dla pewności wyznaczonych wartości strumieni ciepła wykonano pomocniczy eksperyment. Polegał on na tym, iż stabilizowano obydwie ścianki aluminiowe termostatu oraz wodę wewnątrz naczynia pomiarowego jedną stałą temperaturą, którą dodatkowo mierzono termoparą zanurzoną w naczyniu. Przy ustalonej temperaturze wewnątrz naczynia pomiarowego dokonywano rejestracji pomiarów temperatury zewnętrznej strony ściany Pleksiglasowej (termopary T_{13}, T_{14}, T_{15}), wewnętrznej strony (termopary T_7, T_{10}), oraz rejestrowano temperaturę otoczenia (termopary T_{E1}, T_{E2}). Bilansując odpowiednie strumienie ciepła wyznaczono wartość współczynnika przejmowania ciepła pomiędzy otoczeniem a ścianką z Pleksiglasu: $\alpha_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$. W celu wyznaczenia współczynnika α_2 pomiędzy cieczą termostatowaną a aluminiową ścianką rozmontowano naczynie pomiarowe i usunięto jedną ze ścianek aluminiowych. Obrócono naczynie pomiarowe o 90° w ten sposób, że od dołu znajdowała się druga ścianka aluminiowa. Od góry naczynie nie było zamknięte. Zamontowano na zewnątrz ścianki i wewnątrz ścianki dodatkowe termopary, aby móc monitorować lokalną temperaturę. Nalano ciecz od góry do tego naczynia i stabilizowano temperaturę poprzez termostat. W wyniku wyznaczono wartość współczynnika przejmowania ciepła pomiędzy termostatowaną cieczą (glikolem) a aluminiową ścianką: $\alpha_2 = 2400 \text{ W/m}^2\text{K}$. Trzeci współczynnik przejmowania ciepła pomiędzy aluminiową ścianką a otoczeniem wyznaczono wykorzystując jedynie ścianki aluminiowe. Zlikwidowano ścianki z Pleksiglasu i mierzono temperaturę wewnątrz ścianek aluminiowej, na zewnątrz i w otoczeniu. Bilans strumieni ciepła pozwolił na wyznaczenie wartości współczynnika przejmowania ciepła: $\alpha_3 = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$. Wszystkie powyżej opisane pomiary pomocnicze przeprowadzane były dla różnych temperatur (stabilizowano termostaty na różne temperatury, następnie powtarzano pomiary przy zmienionych wartościach temperatury). Podane powyżej wartości współczynników otrzymano dla konfiguracji opisanych w tym podrozdziale.

4.5.2 Wyniki badań dla $\Delta T \in [14^\circ\text{C}, 25^\circ\text{C}]$

Kolejna część wyników eksperymentalnych obejmuje konfiguracje eksperymentalne dla różnicy temperatur $\Delta T = T_h - T_c \in [14^\circ\text{C}, 25^\circ\text{C}]$ pomiędzy aluminiowymi ściankami termostatu. Są to przepływy termiczne charakterystyczne dla wysokich liczb Rayleigha ($3.0 \cdot 10^7 \leq Ra \leq 1.5 \cdot 10^8$). Zakres badanych temperatur został tak dobrany aby nie obserwowano anomalii związanych z właściwościami gęstości wody w pobliżu 4°C . Wzdłuż ścianek aluminiowych powstają wyraźne termiczne warstwy przyścienne, wzdłuż których odbywa się większość ruchu. Wraz z zwiększaniem się różnicy temperatur pomiędzy ściankami warstwy te są cieńsze, a prędkość przepływającego płynu większa. Płyn przyspieszając wzdłuż ścianek napotyka w rogu naczynia na górną ściankę Pleksiglasową i zakręca przy czym dochodzi do rozproszenia bardzo cienkiego strumienia płynu i wytracenia prędkości. W części centralnej naczynia nie obserwowano dużych ruchów mas cieczy. Temperatura w części centralnej wykazywała jednorodny rozkład.

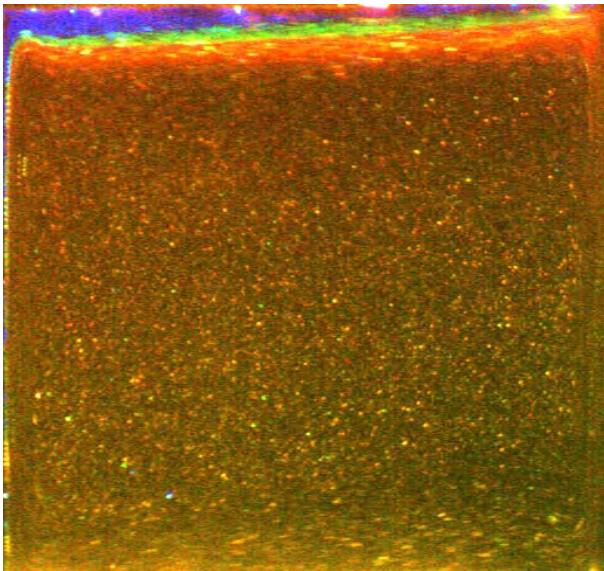
Na rysunku 4.8 została wizualizowane pole temperatury dla a) $T_h \cong 18^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 4^\circ\text{C}$ b) $T_h \cong 22.6^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 5.3^\circ\text{C}$ c) i d) $T_h \cong 27.2^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 6.8^\circ\text{C}$ e) i f) $T_h \cong 31.8^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 8.5^\circ\text{C}$ g) $T_h \cong 23.2^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 9^\circ\text{C}$ h) $T_h \cong 27.2^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 6.8^\circ\text{C}$. Wykorzystano w tym celu zawiesziny ciekłokrystaliczne

TM317 i TM445. Zakres barwny wykorzystanych zawieszin ciekłokrystalicznych nie pokrywał całego badanego przedziału temperatur toteż powtarzano eksperyment z tymi samymi warunkami brzegowymi z wykorzystaniem różnych zawieszin (Rysunek 4.8 c i d, e i f). Dzięki temu można było wyznaczyć kilka izoterm dla badanych konfiguracji. Dokładność pomiaru pól temperatury wynosi około 0.5 °C dla temperatur w przedziałach: [16.3°C,16.4°C] (kolor żółty, zawiesina TM445) [16.4°C, 16.8°C] (kolor zielony, zawiesina TM445), [20.4°C,20.5°C] (kolor żółty, zawiesina TM317). W pozostałych przedziałach dokładność wynosiła około 1°C. Zawiesina ciekłokrystaliczna TM445 pokrywała zakres temperatur od 15 °C do 18.5 °C, natomiast TM317 zakres od 19 °C do 32 °C. Dla temperatur poniżej 15°C otrzymywano bezbarwne obszary dla których nie można określić dokładnie temperatury, poza stwierdzeniem, iż jest ona poniżej 15°C.

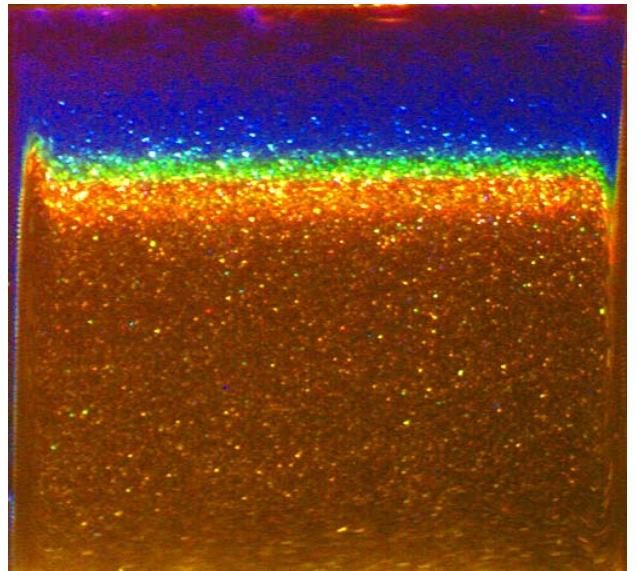
Wartości prędkości wzrastały wraz z zwiększaniem się różnicy temperatur T_h i T_c pomiędzy ściankami. Pola prędkości otrzymane dla kolejnych konfiguracji eksperymentalnych zostały zamieszczone na rysunku 4.7. Dla różnicy temperatur około 14°C maksymalna średnia prędkość wynosiła około 2.4 mm/s, dla różnicy temperatur około 17°C – 3.4 mm/s, zaś dla różnicy temperatur 23 °C – 4 mm/s. Wraz z zwiększaniem się prędkości szerokość warstwy przyściennej zmniejszała się. Toteż dokładność pomiarów przy pomocy metody PIV kamerą o efektywnej rozdzielczości 520x509 była niewystarczająca. Dla serii 40 obrazów i odstępów pomiędzy zdjęciami $\Delta t = 200$ lub 500 ms błąd pomiarów wahał się od 0.4 mm/s do 1.5 mm/s. Dokładne wartości zostały zamieszczone w tabelach w Dodatku. Z tego względu zdecydowano się wykonać dodatkowe pomiary metodą PIV z wykorzystaniem szybkiej kamery CMOS, dzięki której można było zwiększyć efektywną rozdzielczość przestrzenną do 920x911 pikseli oraz wykonywać rejestrację obrazów z maksymalną częstotliwością 1kHz. Kamerą tą rejestrowano serie około 100 obrazów w odstępach $\Delta t = 100, 200$ i 500 ms. Dokładność wyznaczonych pól prędkości dla tych pomiarów wyniosła od 0.24 mm/s do 0.42 mm/s. Dla najwyższych liczb Rayleigha spośród badanych ($\Delta T \cong 23$ °C) zaobserwowano falowy charakter przepływu w warstwach przyściennych, który nie jest widoczny na uśrednionych polach prędkości (Rysunek 4.9). Pola te charakteryzowały się dużo większymi fluktuacjami prędkości w porównaniu z tymi dla mniejszych liczb Rayleigha. Jest to związane z wejściem w reżim przejściowy przepływu, początki powstawania struktur turbulentnych. Szczegółowe rozważania na temat charakteru przepływu w warstwach przyściennych zostało przedstawione w rozdziale 4.7.

Dla badanych konfiguracji wyznaczono szerokość kinetycznych warstw przyściennych wzdłuż pionowych ścianek, przy których generowany jest ruch cieczy. Wynosiła ona odpowiednio 4.4 mm, 3.5 mm i 3 mm dla liczb Rayleigha $Ra = 3.15 \cdot 10^7$, $Ra = 1.3 \cdot 10^8$ i $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ i została zmierzona na podstawie zdjęć o efektywnej rozdzielczości 920x911 dla profilu centralnie przecinającego badany przekrój ($Y=0.40mm$). Grubość tę można porównać z oszacowaniem otrzymanym na podstawie analizy wymiarowej dla geometrii w kształcie kwadratu z dwoma pionowymi ściankami izotermicznymi i dwoma poziomymi adiabatycznymi [76]. Grubość oszacowana na podstawie tej analizy wynosi $Pr^{1/2}LRa^{-1/4}$, co dla konfiguracji badanych w niniejszym podrozdziale daje 3.5 mm, 2 mm i 1.9 mm dla $Ra = 3.15 \cdot 10^7$, $Ra = 1.3 \cdot 10^8$ i $Ra = 1.5 \cdot 10^8$, odpowiednio. Wartości te są mniejsze od otrzymanych w eksperymencie, co jest spowodowane tym, iż przy wyprowadzaniu powyższego wzoru na szerokość warstwy przyściennej istotnym założeniem jest zaniedbanie poziomej składowej prędkości i jej pochodnych, jako istotnie mniejszych w stosunku do pionowej składowej prędkości wzdłuż aktywnych ścianek pionowych.

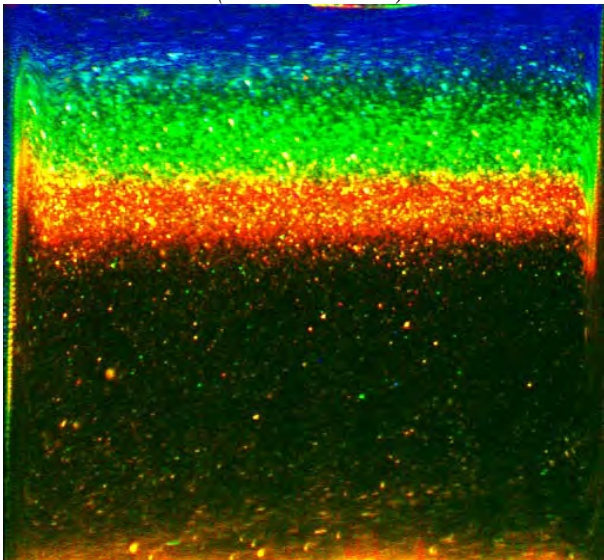
Podobnie jak dla poprzednich konfiguracji przeprowadzono pomiary mające na celu określenie strumieni cieplnych Q_1, Q_2, Q_3 (por. rys. 3.1). Dla badanych konfiguracji wyznaczono współczynniki przejmowania ciepła $\alpha_1 = 10 W/m^2K$, $\alpha_2 = 2000 W/m^2K$, $\alpha_{3L} = 500 W/m^2K$, $\alpha_{3P} = 1800 W/m^2K$. Strumień ciepła Q_3 został rozdzielony na dwa strumienie Q_{3P} , Q_{3L} przy prawej i lewej ścianie. Pomiary wykonano w ten sam sposób, jak opisano to w poprzednim podrozdziale. Wartości współczynników przejmowania ciepła wyznaczono na podstawie pomocniczego eksperymentu, jak i na podstawie analizy zarejestrowanych wartości temperatury przez termopary podczas pomiarów eksperymentalnych.



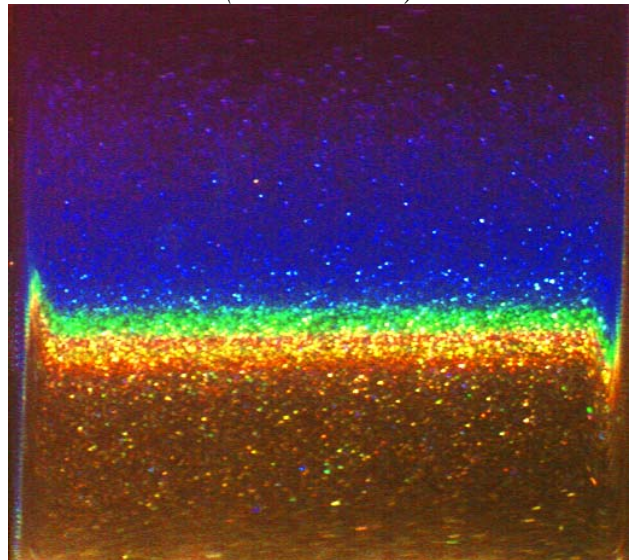
a) Eksperyment nr 25 ($T_h \cong 18^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 4^\circ\text{C}$)
(TLC: TM445)



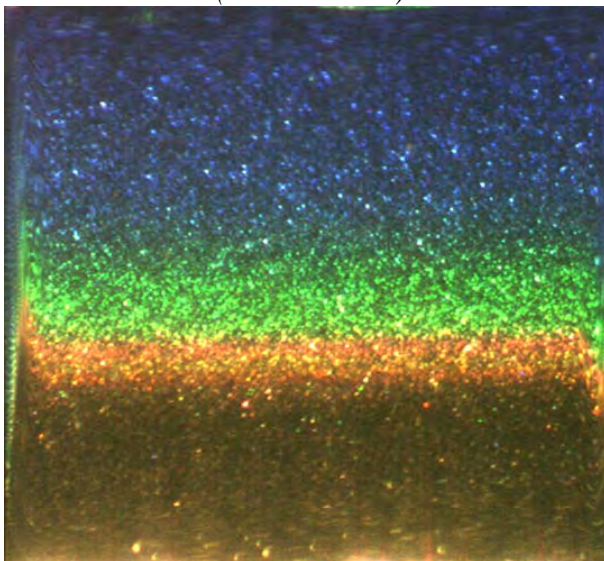
b) Eksperyment nr 28 ($T_h \cong 22.6^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 5.3^\circ\text{C}$)
(TLC: TM445)



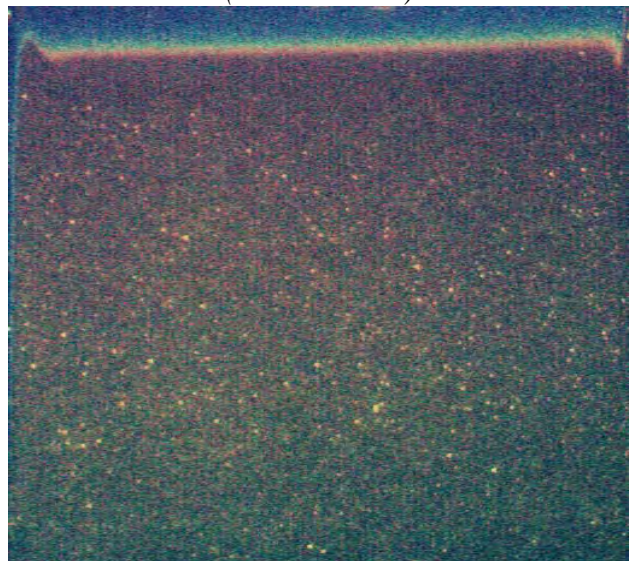
c) Eksperyment nr 33 ($T_h \cong 27.2^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 6.8^\circ\text{C}$)
(TLC: TM317)



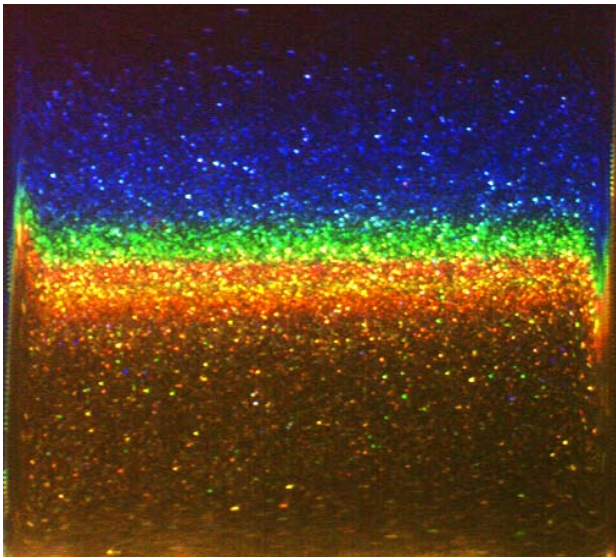
d) Eksperyment nr 32 ($T_h \cong 27.2^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 6.8^\circ\text{C}$)
(TLC: TM445)



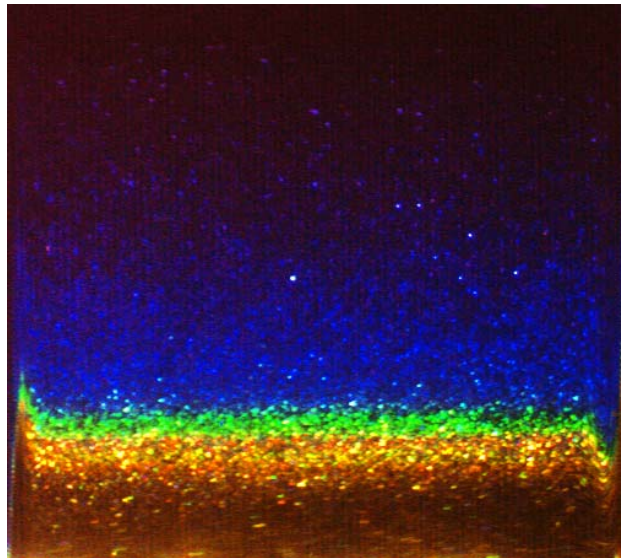
e) Eksperyment nr 37 ($T_h \cong 27.2^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 6.8^\circ\text{C}$)
(TLC: TM317)



f) Eksperyment nr 38 ($T_h \cong 27.2^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 6.8^\circ\text{C}$)
(TLC: TM1001)

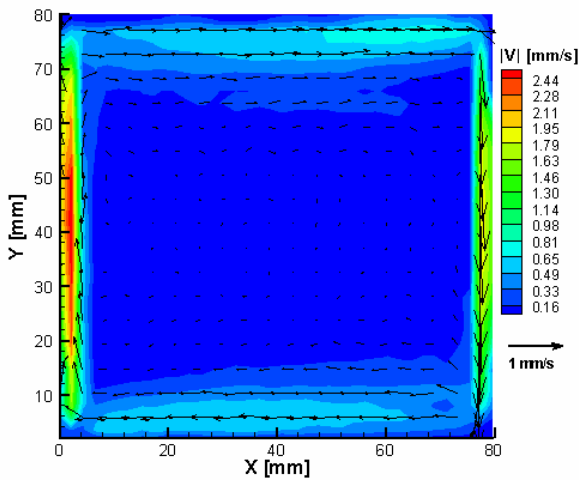


g) Eksperyment nr 31 ($T_h \approx 23.2^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 9^\circ\text{C}$)
(TLC: TM445)

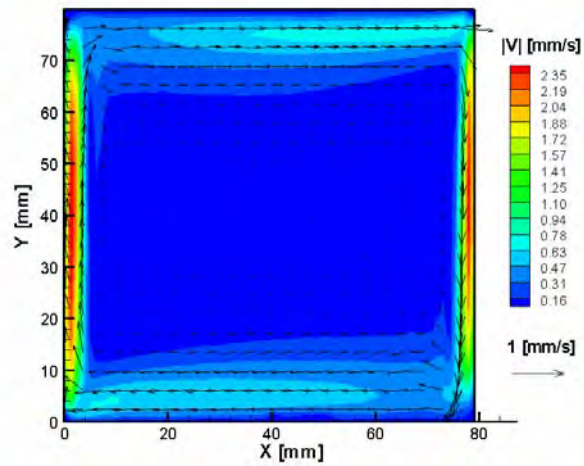


h) Eksperyment nr 36 ($T_h \approx 27.2^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 6.8^\circ\text{C}$)
(TLC: TM445)

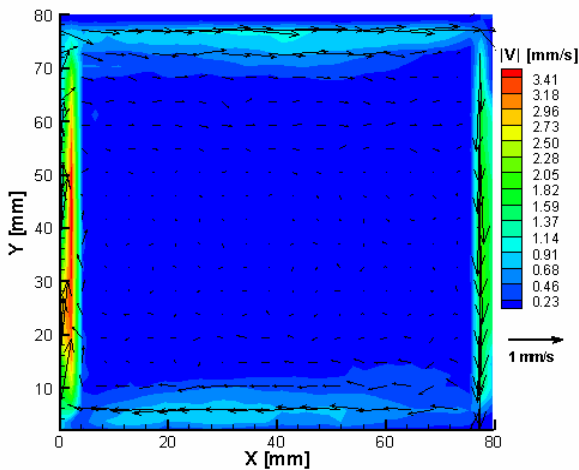
Rysunek 4.8 Wizualizacja pola temperatury konwekcji naturalnej dla liczb Rayleigha w zakresie od $3 \cdot 10^7$ do $1.5 \cdot 10^8$ z wykorzystaniem różnych zawiesin ciekłokrystalicznych (TLC).



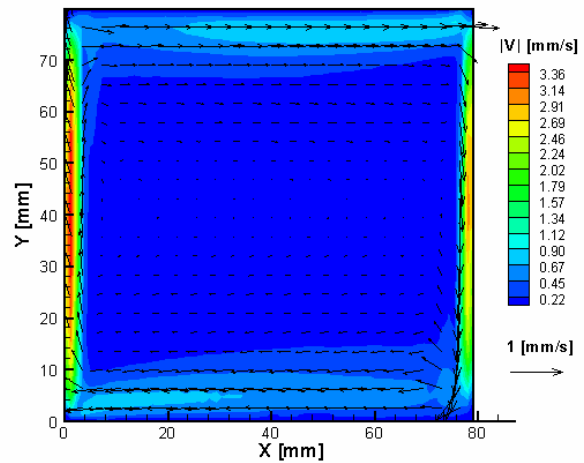
a) Eksperyment nr 25 ($T_h \approx 18.3^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 4^\circ\text{C}$)
rozdzielczość kamery 520x509



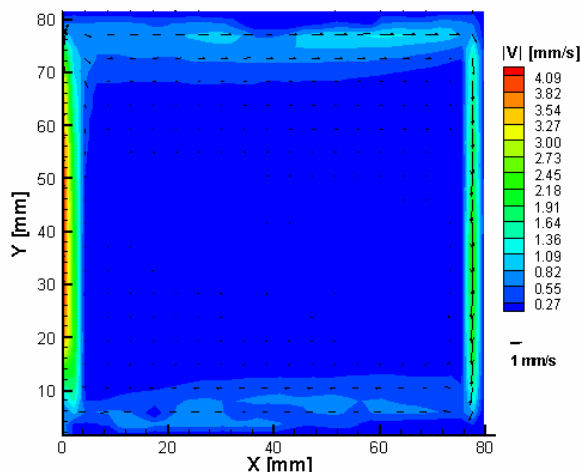
b) Eksperyment nr 27 ($T_h \approx 18.6^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 4^\circ\text{C}$)
rozdzielczość kamery 920x911



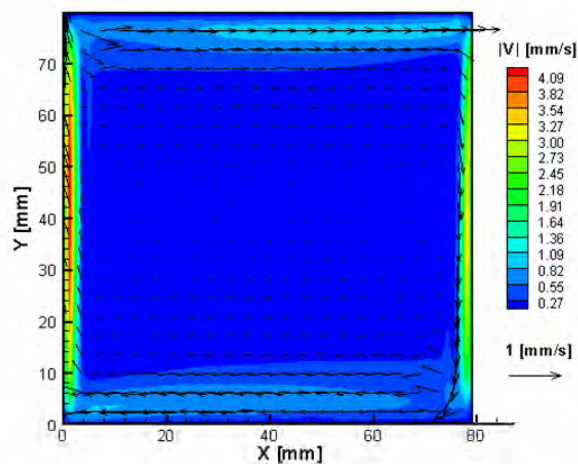
c) Eksperyment nr 28 ($T_h \approx 22.6^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 5.2^\circ\text{C}$)
rozdzielczość kamery 520x509



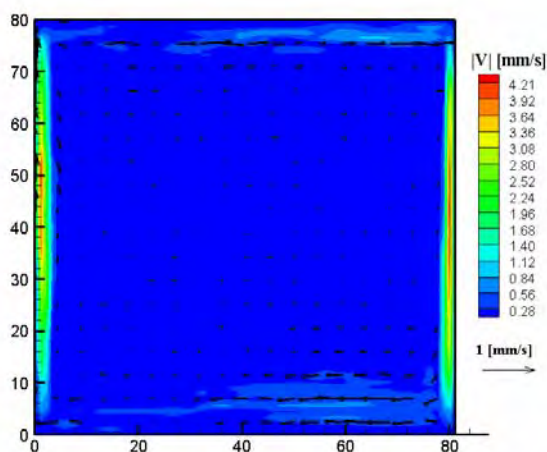
d) Eksperyment nr 30 ($T_h \approx 22.8^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 5.3^\circ\text{C}$)
rozdzielczość kamery 920x911



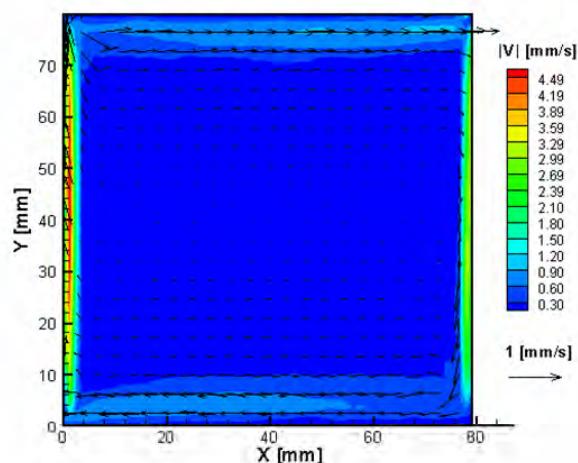
e) Eksperyment nr 33 ($T_h \approx 27.2^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 6.87^\circ\text{C}$)
rozdzielczość kamery 520x509



f) Eksperyment nr 35 ($T_h \approx 27.2^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 6.7^\circ\text{C}$)
rozdzielczość kamery 920x911



g) Eksperyment nr 38 ($T_h \approx 31.8^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 8.5^\circ\text{C}$)
rozdzielczość kamery 520x509



h) Eksperyment nr 39 ($T_h \approx 31.7^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 8.3^\circ\text{C}$)
rozdzielczość kamery 920x911

Rysunek 4.9. Pole prędkości konwekcji naturalnej dla liczb Rayleigha w zakresie od $3 \cdot 10^7$ do $1.5 \cdot 10^8$. Eksperymenty rejestrowane dwoma kamerami.

4.5.3 Wyniki badań dla $\Delta T > 25^\circ\text{C}$

Kolejna część wyników eksperymentalnych obejmuje konfiguracje eksperymentalne dla różnicy temperatur $\Delta T > 25^\circ\text{C}$ pomiędzy aluminiowymi ściankami termostatu. Są to przepływy termiczne charakterystyczne dla wysokich liczb Rayleigha ($Ra > 1.5 \cdot 10^8$). Wzdłuż ścianek aluminiowych warstwy przyścienne są bardzo wąskie (około 1 mm). Ruch cieczy generowany jest w wąskiej warstwie wzdłuż pionowych ścianek. W rogach naczynia ciecz napotyka poziome ścianki i ze względu na dużą szybkość rozprasza się w sposób nie ustalony, zakręcając w kierunku poziomym i częściowo zawracając w kierunku środka naczynia. W lewym górnym i prawym dolnym rogu widoczne są wyraźne zawirowania powstające w wyniku zderzenia się szybkiego strumienia płynącego wzdłuż ścianek z poprzeczną ścianką. Fluktuacje prędkości w pobliżu ścianek i w rogach są na tyle duże, iż można stwierdzić, że mamy do czynienia z przepływem niestacjonarnym. Jednakże można zauważyć pewne elementy podobne do konfiguracji opisanych w poprzednim rozdziale. Temperatura w części centralnej wykazuje jednorodny rozkład, duże gradienty temperatury zlokalizowane są w pobliżu ścianek izotermicznych, w termicznej warstwie przyściennej.

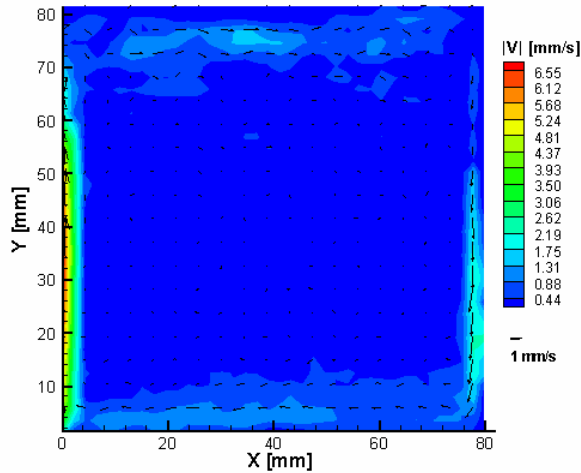
Na rysunku 4.11 została przedstawiona wizualizacja pola temperatury dla przypadków: a) i b) $T_h \cong 36.3\text{ }^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 10.2\text{ }^\circ\text{C}$; b) i c) $T_h \cong 45.8\text{ }^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 14.1\text{ }^\circ\text{C}$; d) i f) $T_h \cong 55.5\text{ }^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 18\text{ }^\circ\text{C}$. Do wizualizacji temperatury wykorzystano zawiesiny ciekłokrystaliczne TM317 i TC1001. Zakres barwny wykorzystanych zawiesin ciekłokrystalicznych nie pokrywał całego badanego przedziału temperatur toteż powtarzano eksperyment z tymi samymi warunkami brzegowymi z wykorzystaniem różnych zawiesin (rysunek 4.11 a i b, c i d). Zawiesina ciekłokrystaliczna TC1001 posiada bardzo wąski zakres barwny od $26\text{ }^\circ\text{C}$ do $32\text{ }^\circ\text{C}$ ($6\text{ }^\circ\text{C}$) w porównaniu z różnicą temperatur występującą w przepływie. Toteż wizualizacje z wykorzystaniem tej zawiesiny dawały obrazy, w których widoczne zmiany kolorów obserwowane były jedynie w pasku o szerokości kilku pikseli. Dodatkowo krzywa kalibracyjna dla tej zawiesiny ciekłokrystalicznej jest silnie nieliniowa, tzn. zmiany kolorów z czerwonego na żółty i dalej na zielony zachodzą w bardzo wąskim przedziale temperatur między $26\text{ }^\circ\text{C}$ a $27\text{ }^\circ\text{C}$, a pozostały zakres od $27\text{ }^\circ\text{C}$ do $32\text{ }^\circ\text{C}$ odpowiada kolorowi niebieskiemu. Z tego względu widoczna na obrazach jest tylko granica pomiędzy kolorem zielonym a niebieskim, którą można uznać jako izotermę o wartości $27.2\text{ }^\circ\text{C}$. Dokładność pomiaru pół temperatury wynosi około $0.5\text{ }^\circ\text{C}$ w przedziale [$20.4\text{ }^\circ\text{C}$, $20.5\text{ }^\circ\text{C}$] (kolor żółty, zawiesina TM317) oraz [26.6 , 27.2] (kolor żółty i zielony, zawiesina TC1001). W pozostałych przedziałach dokładność dla zawiesiny TM317 wynosiła około $1\text{ }^\circ\text{C}$, jednakże zakres zmian barwy tej zawiesiny jest mniejszy niż $32\text{ }^\circ\text{C}$ i duża część obszaru pozostawała bezbarwna. Dodatkowo przedział temperatur odpowiadający kolorowi niebieskiemu jest bardzo szeroki [23.0 , 32.0] i wewnątrz tego przedziału nie można jednoznacznie wyznaczyć izoterm. Dla zawiesiny TC1001 przedział temperatur odpowiadający kolorowi niebieskiemu jest również szeroki [27.2 , 32] toteż dokładność w tym zakresie nie jest w pełni zadawalająca. Natomiast dla temperatur powyżej $32\text{ }^\circ\text{C}$ w obu przypadkach otrzymywano bezbarwne obszary dla których nie można określić dokładnie temperatury.

Wartości prędkości wzrastały wraz z zmniejszaniem się szerokości warstwy przyściennej. Pola prędkości otrzymane dla kolejnych konfiguracji eksperymentalnych zostały zamieszczone na rysunku 4.10. Są to uśrednione pola prędkości otrzymane na podstawie serii zdjęć o długości $N = 40$ (Rysunek 4.10 a i c) oraz $N = 90$ (Rysunek 4.10 b i d). W rezultatach będących wynikiem uśredniania po serii o długości $N = 40$ nie można dostrzec falowego charakteru prędkości. Natomiast różnice dla chwilowych pomiarów prędkości dla badanych konfiguracji wynosiły nawet 3 mm/s (różnica pomiędzy prędkością średnią a prędkością pojedynczego pomiaru). Rysunek 4.10 a i b przedstawia pola prędkości zarejestrowane dla różnicy temperatur około $26\text{ }^\circ\text{C}$, maksymalna średnia prędkość wynosiła około 6.5 mm/s , natomiast Rysunek 4.10 c i d pola prędkości zarejestrowane dla różnicy około $32\text{ }^\circ\text{C}$, w których maksymalna średnia prędkość wynosiła około 7 mm/s . Ponieważ dokładność pomiarów metodą PIV dla kamery o efektywnej rozdzielczości 520×509 była niewystarczająca (błąd pomiarów wahał się między 1.2 mm/s do 2.1 mm/s) podobnie jak w poprzednim przypadku zdecydowano się wykonać pomiary metodą PIV z wykorzystaniem szybkiej kamery CMOS, zwiększając efektywną rozdzielczość obrazów do 920×911 pikseli. Kameralą tą wykonywano serie zdjęć o długości około 100 w odstępach $\Delta t = 200$ i 100 ms . Dokładność dla tych pomiarów wyniosła od 0.33 mm/s do 0.99 mm/s . Zaobserwowano falowy charakter przepływu nie tylko w warstwach przyściennych, ale również wzdłuż ścianek poziomych. Dokładne rozważania na temat charakteru przepływu dla badanych konfiguracji zostało przedstawione w rozdziale 4.7.

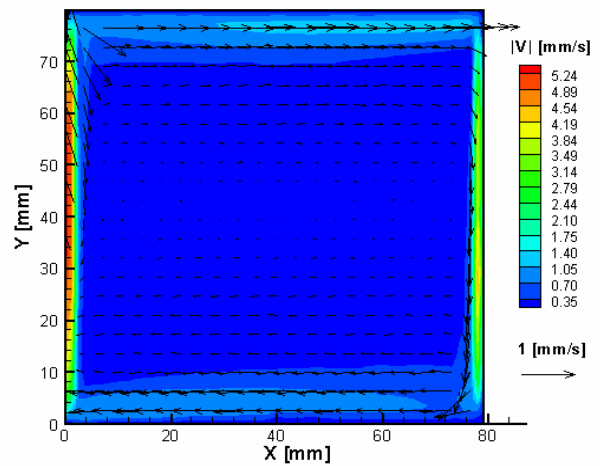
Dla badanych konfiguracji wyznaczono szerokość kinematycznej warstwy przyściennej wzdłuż pionowych ścianek, w których odbywa się większość ruchu pionowego cieczy. Wynosiła ona odpowiednio 2.6 mm i 1.7 mm dla liczb Rayleigha $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ i $Ra = 4.3 \cdot 10^8$ i została zmierzona na podstawie zdjęć o efektywnej rozdzielczości 920×911 dla profilu centralnie przecinającego badany przekrój ($Y=0.40\text{ mm}$). Oszacowanie otrzymane na podstawie analizy wymiarowej dla tej geometrii daje wartości 1.8 mm i 1.2 mm dla liczb Rayleigha $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ i $Ra = 4.3 \cdot 10^8$, odpowiednio. Wartości te są mniejsze od otrzymanych w eksperymencie, co jest spowodowane przyjętymi w tym oszacowaniu uproszczeniami.

Podobnie jak dla poprzednich konfiguracji przeprowadzono pomiary mające na celu określenie strumieni cieplnych Q_1, Q_2, Q_3 (por. rys. 3.1). Dla badanych konfiguracji wyznaczono

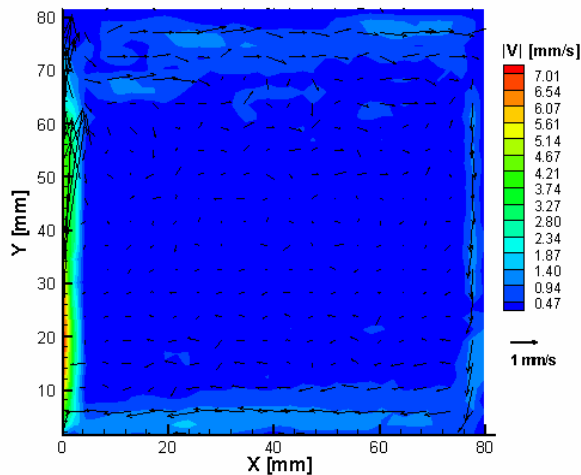
współczynniki przejmowania ciepła $\alpha_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_2 = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_{3L} = 500 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_{3P} = 2200 \text{ W/m}^2\text{K}$. Strumień ciepła Q_3 został rozdzielony na dwa strumienie Q_{3P} , Q_{3L} przy prawej i lewej ścianie. Pomiary wykonano w ten sam sposób, jak opisano to w poprzednich podrozdziałach. Wartości wyznaczono w oparciu o pomocniczy eksperyment, jak i na podstawie analizy zarejestrowanych wartości temperatury przez termopary podczas pomiarów.



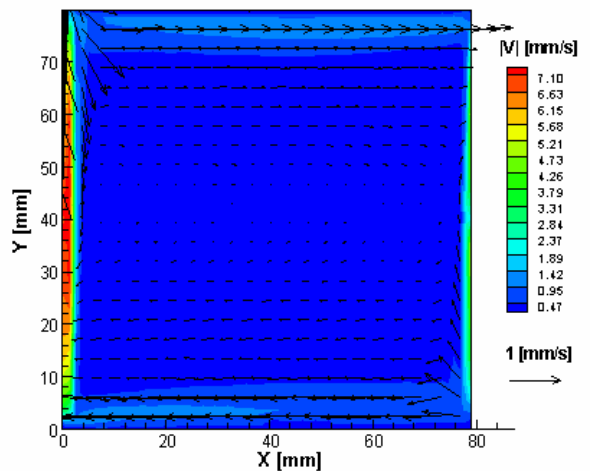
a) Eksperyment nr 42 ($T_h \approx 36.4 \text{ }^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 10.2 \text{ }^\circ\text{C}$) rozdzielczość kamery 520x509



b) Eksperyment nr 43 ($T_h \approx 36.3 \text{ }^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 10.0 \text{ }^\circ\text{C}$) rozdzielczość kamery 920x911

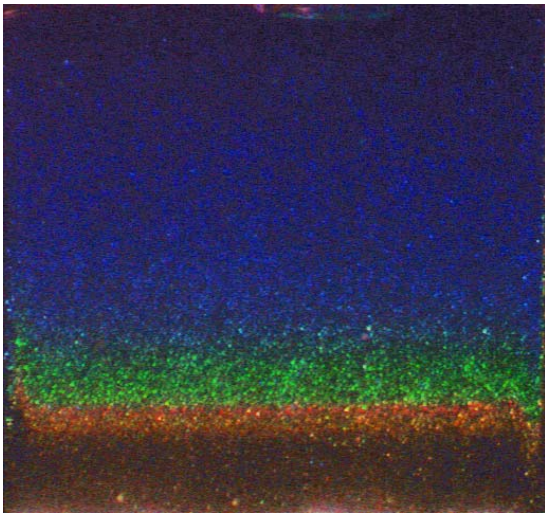


c) Eksperyment nr 46 ($T_h \approx 45.8 \text{ }^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 14.0 \text{ }^\circ\text{C}$) rozdzielczość kamery 520x509

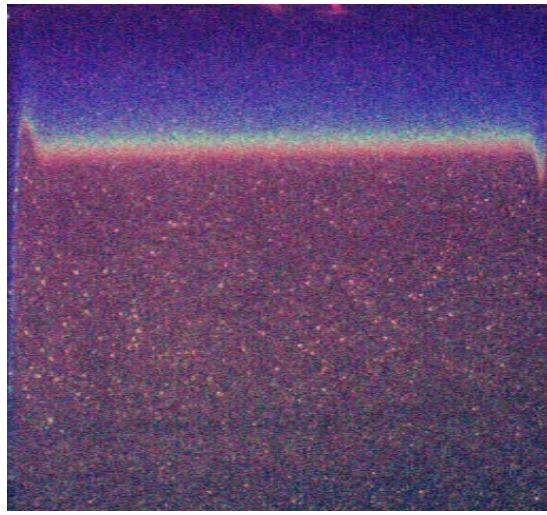


d) Eksperyment nr 47 ($T_h \approx 45.6 \text{ }^\circ\text{C}$ i $T_c \approx 13.6 \text{ }^\circ\text{C}$) rozdzielczość kamery 920x911

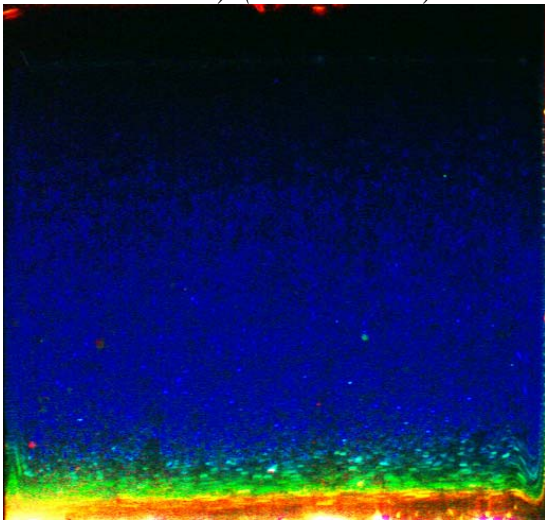
Rysunek 4.10. Pole prędkości dla konwekcji naturalnej dla liczb Rayleigha w zakresie od $1.5 \cdot 10^8$ do $5.1 \cdot 10^8$. Eksperymenty rejestrowane dwoma kamerami.



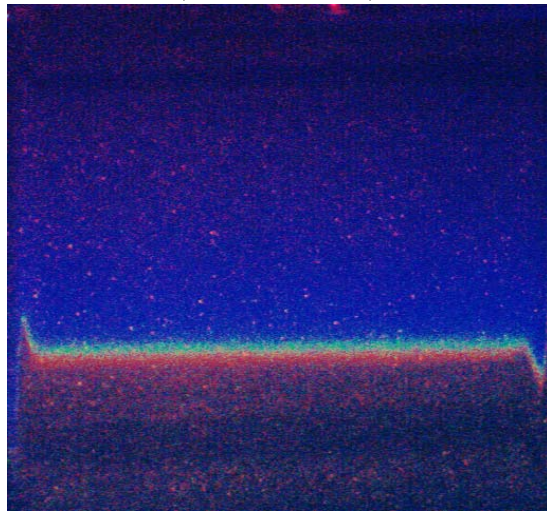
a) Eksperyment nr 40 ($T_h \cong 36.4^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 10.2^\circ\text{C}$) (TLC: TM317)



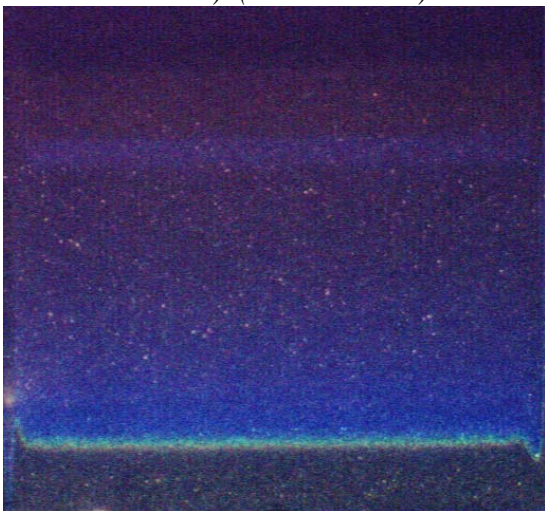
b) Eksperyment nr 42 ($T_h \cong 36.4^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 10.2^\circ\text{C}$) (TLC: TC1001)



c) Eksperyment nr 44 ($T_h \cong 45.8^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 14.2^\circ\text{C}$) (TLC: TM317)



d) Eksperyment nr 46 ($T_h \cong 45.8^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 14.0^\circ\text{C}$) (TLC: TC1001)



e) Eksperyment nr 48 ($T_h \cong 55.0^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 18.0^\circ\text{C}$) (TLC: TC1001)



f) Eksperyment nr 50 ($T_h \cong 54.2^\circ\text{C}$ i $T_c \cong 18.0^\circ\text{C}$) (TLC: TC1001)

Rysunek 4.11. Wizualizacja pola temperatury konwekcji naturalnej dla liczb Rayleigha w zakresie od $1.5 \cdot 10^8$ do $5.1 \cdot 10^8$ z wykorzystaniem różnych zawiesin ciekłokrystalicznych

4.6 Definicja wzorca eksperymentalnego

Biorąc pod uwagę przeprowadzone badania eksperymentalne zdecydowano się zdefiniować wzorzec eksperymentalny w oparciu o wyniki badań z rozdziału 4.5.1. Konfiguracje opisane w tym podrozdziale dotyczą przepływów termicznych dla liczb Rayleigha rzędu 10^6 , charakteryzujących się złożoną strukturą przepływu składającą się z dwóch przeciwnie skierowanych wirów, spowodowaną anomalną zależnością gęstości wody od temperatury. Konfiguracja ta została wykorzystana do zdefiniowania wzorca numerycznego dla celów weryfikacji symulacji numerycznych ([124], por. rozdział 2), toteż jest istotne aby sprawdzić na ile konfiguracja ta może być odtworzona eksperymentalnie. Zdefiniowany wzorzec może być wykorzystywany do walidacji symulacji numerycznych przepływów lepkich i termicznych.

Do zdefiniowania wzorca wykorzystane zostały wyniki uzyskane z eksperymentów nr 10,11,12,13 (por. Dodatek, Tabela D.1.). Przeprowadzając eksperymenty dla tych konfiguracji starano się zapewnić maksymalnie identyczne warunki przeprowadzonych pomiarów. Analizując tabele z przeprowadzonych eksperymentów dla wybranej konfiguracji można określić wspólne termiczne warunki brzegowe: temperatura lewej ścianki $T_h = 10.0^\circ\text{C}$, temperatura prawej ścianki $T_c = 0.0^\circ\text{C}$, temperatura otoczenia $T_{\text{ext}} = 26.3^\circ\text{C}$, współczynnik przejmowania ciepła $\alpha_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_2 = 2400 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_3 = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ (por rys. 3.1 oraz wzór 3.7). Szczegółowe dane dotyczące punktowych pomiarów temperatury dla zdefiniowanego wzorca eksperymentalnego zostały podane w Tabeli 4.4 po przeanalizowaniu Tabeli D.1. oraz szczegółowych tabel z eksperymentów numer 10-13.

Wzorzec numeryczny:						$\Delta T = 10.00$				$Pr = 11.78$		$Ra = 1.5 \cdot 10^6$			
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
10.0	0.3	-2.0	0.3	10.0	0.3	0.0	0.3	10.80	0.3	10.60	0.3	15.4	0.6	26.3	0.6

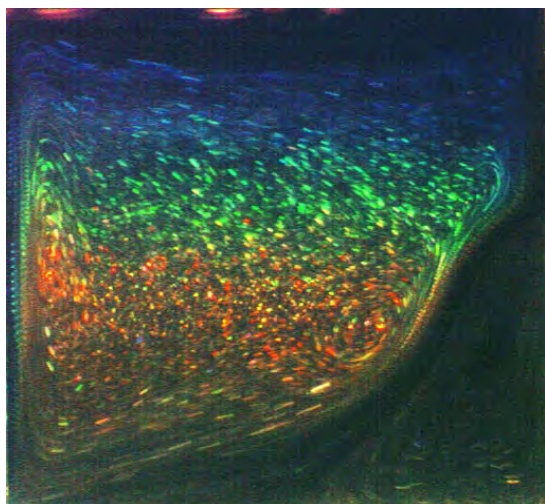
Tabela 4.4 Wartości warunków termicznych określonych dla wzorca numerycznego. Podano wartości temperatury na podstawie punktowych pomiarów oraz ich dokładność.

Dzięki wielokrotnemu powtarzaniu pomiarów z wykorzystaniem różnych zawieszin ciekłokrystalicznych udało się uzyskać pełne dwuwymiarowe pole temperatury w centralnym przekroju sześciangu. Na podstawie wizualizacji wybranej konfiguracji eksperymentalnej przy pomocy zawiesziny ciekłokrystalicznej BM100/R6C12W/S33 (rys 4.12 a) oraz mieszanki zawieszin MixC (rys. 4.12 b) przedstawiono dwuwymiarowe pole temperatury zawierające dziewięć izoterm (rys. 4.12 c). Zakres barwny obu wykorzystanych zawieszin ciekłokrystalicznych uzupełniał się, co umożliwiło wyznaczenie izoterm również w obszarach w których nie było to możliwe w przypadku wykorzystania tylko jednej z nich. Dokładność wyznaczonych izoterm jest równa 1°C dla izoterm o wartości 9.5, 7.5, 5.5, 3.0 oraz 0.5°C dla izoterm o wartości 6.5, 6.4, 4.0, 3.9, 3.6. Dokładność wyznaczenia izoterm została wyznaczona na podstawie procedury kalibracji zawieszin ciekłokrystalicznych opisanego w rozdziale 4.3.2.

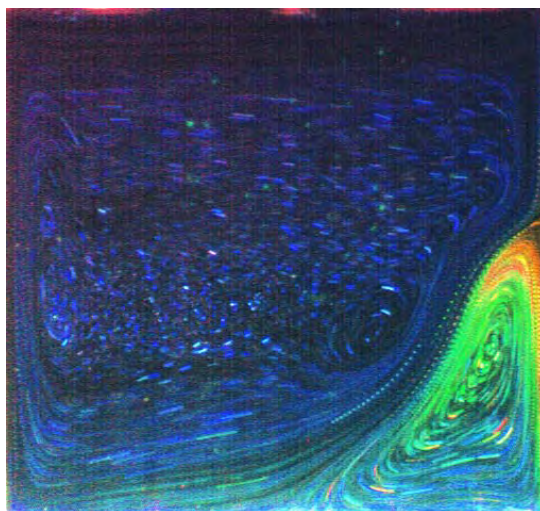
Dla ułatwienia porównań pomiędzy wynikami symulacji numerycznej a wynikami eksperymentalnymi przedstawiono również profile temperatury, poziomej i pionowej składowej prędkości wzdłuż prostych $Y=0.5L$ (40 mm), $X = 0.5L$ (40mm), $X = 0.9L$ (72 mm). Rysunek 4.13. przedstawia profile temperatury i prędkości, które traktowane są jako eksperymentalny wzorzec do walidacji symulacji numerycznych.

Na Rysunku 4.13 zamieszczono również wartości błędów pomiarowych wyznaczonych przy pomocy formuły (4.3). Pola prędkości zostały otrzymane przy pomocy metody PIV zarówno w przypadku, gdy jako posiew wykorzystano zostały zawiesziny ciekłokrystaliczne jak i pyłki sosny. Średnie pole prędkości wyliczono na podstawie serii pól prędkości o długości $N = 40$. Obrazy były rejestrowane w stałym odstępnie czasu $\Delta t = 1\text{s}$. Maksymalny błąd wyznaczenia średniej wartości prędkości dla tej konfiguracji wahał się pomiędzy 0.21 mm/s a 0.24 mm/s. Pole zawierające

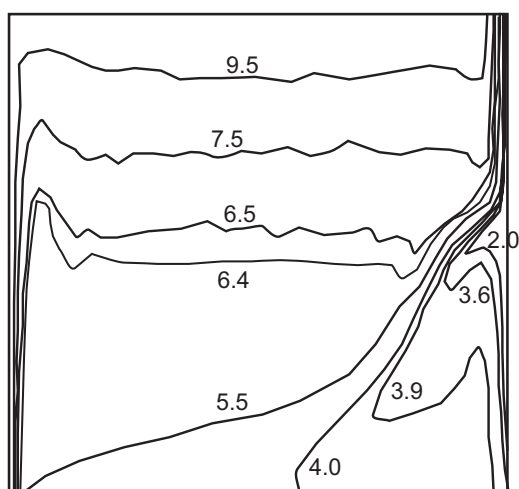
wartość błędu dla badanej konfiguracji zostało przedstawione na rysunku 4.14 a wraz z polem przedstawiającym odchylenie standardowe (rys. 4.14 b). Największe wartości fluktuacji prędkości zarejestrowano w miejscu spotkania się dwóch przeciwległych strumieni ciepłego i zimnego, co jest zgodne z wynikami symulacji numerycznej (por. rozdział 2) oraz przypuszczeniem, iż jest to punkt bardzo wrażliwy na jakiegokolwiek zmiany w badanej konfiguracji. W Tabeli D.2. w Dodatku niniejszej pracy podano również wartości liczbowe dla zdefiniowanego wzorca eksperymentalnego dla wybranych profili aby ułatwić porównywanie z wynikami symulacji numerycznych.



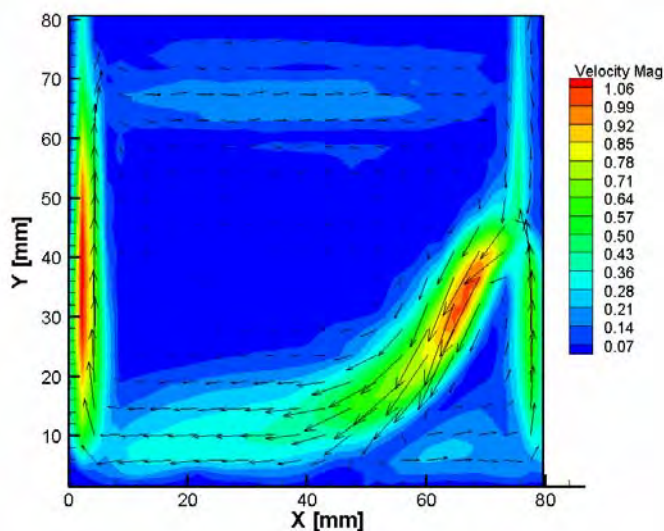
a) Wizualizacja pola temperatury
Eksperyment nr 12 ($T_h=10\text{ }^\circ\text{C}$ $T_c=0\text{ }^\circ\text{C}$)
TLC: BM100/R6C12/S33



b) Wizualizacja pola temperatury
Eksperyment nr 11 ($T_h=10\text{ }^\circ\text{C}$ $T_c=0\text{ }^\circ\text{C}$)
TLC: MixC

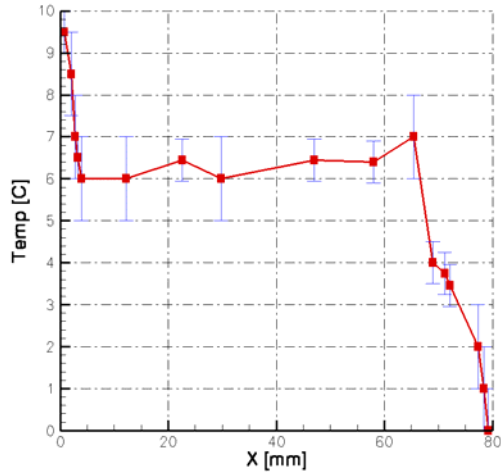


c) Wzorcowe pole temperatury
otrzymana na podstawie eksperymentów
nr 11 i 12

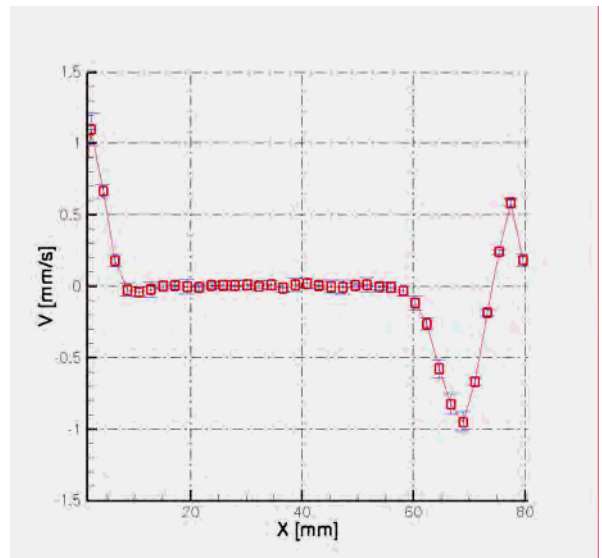


d) Wzorcowe pole prędkości
Eksperyment Nr 12
($T_h=10\text{ }^\circ\text{C}$ $T_c=0\text{ }^\circ\text{C}$)

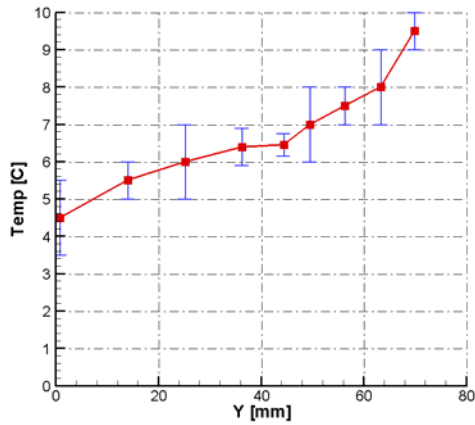
Rysunek 4.12. Wzorec eksperymentalny przepływu konwekcji naturalnej
($Ra = 1.5 \cdot 10^6$, $Pr = 11.78$) Pole prędkości i temperatury.



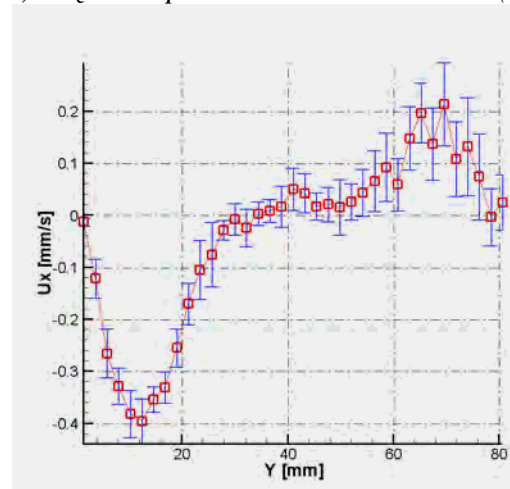
a) Temperatura wzdłuż $Y = 40\text{mm}(0.5L)$



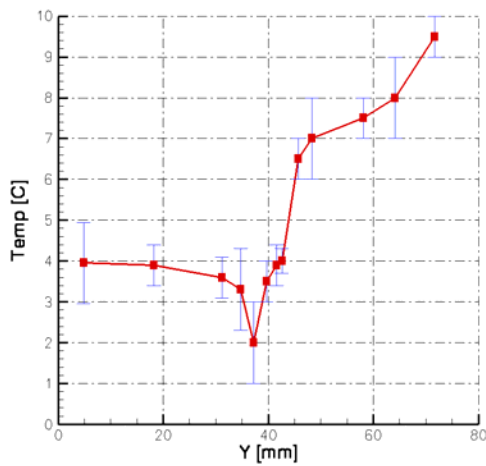
b) Prędkość pionowa wzdłuż $Y = 40\text{mm}(0.5L)$



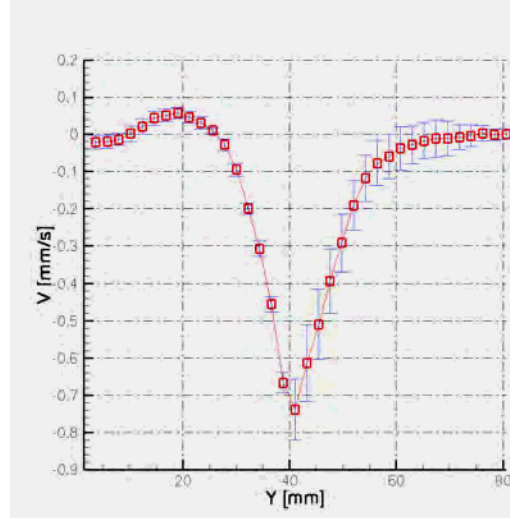
c) Temperatura wzdłuż $X = 40\text{mm}(0.5L)$



d) Prędkość pozioma wzdłuż $X = 40\text{mm}(0.5L)$

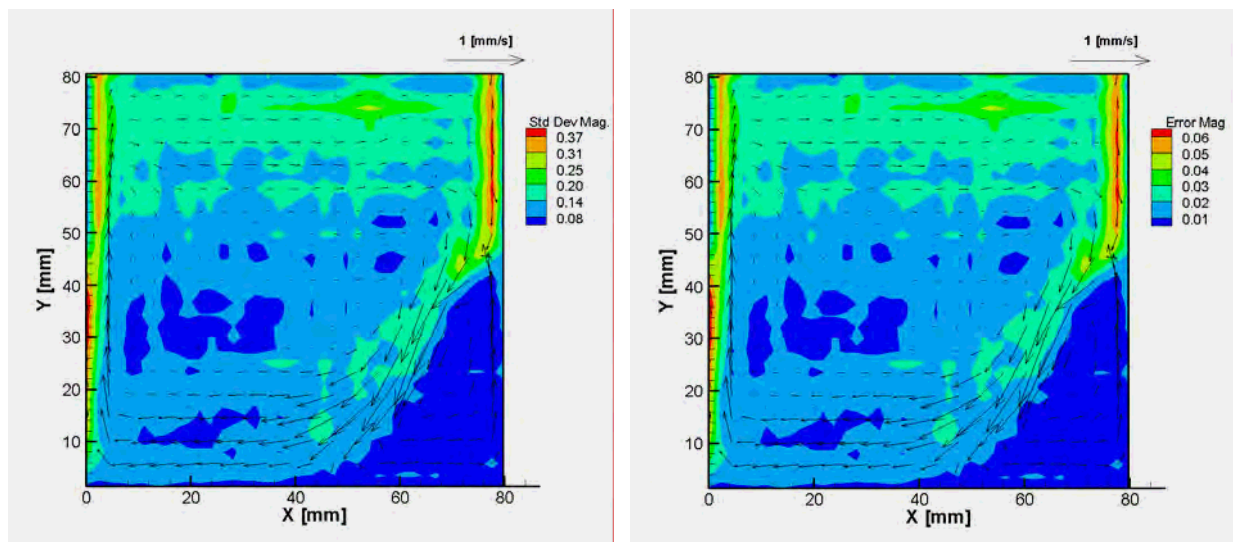


e) Temperatura wzdłuż $X = 72\text{mm}(0.9L)$



f) Prędkość pionowa wzdłuż $X = 72\text{mm}(0.9L)$

Rysunek 4.13. Wzorzec eksperymentalny przepływu konwekcji naturalnej ($Ra = 1.5 \cdot 10^6$, $Pr = 11.78$). Profile prędkości na podstawie Eksperymentu nr 12, profile temperatury na podstawie Eksperymentu nr 11 i 12.



a) Odchylenie standardowe (por. 4.2)

b) Błąd pomiaru (por. 4.3)

Rysunek 4.14. Analiza błędu pomiaru pola prędkości dla wybranej konfiguracji wzorcowej (Eksperyment Nr 12)

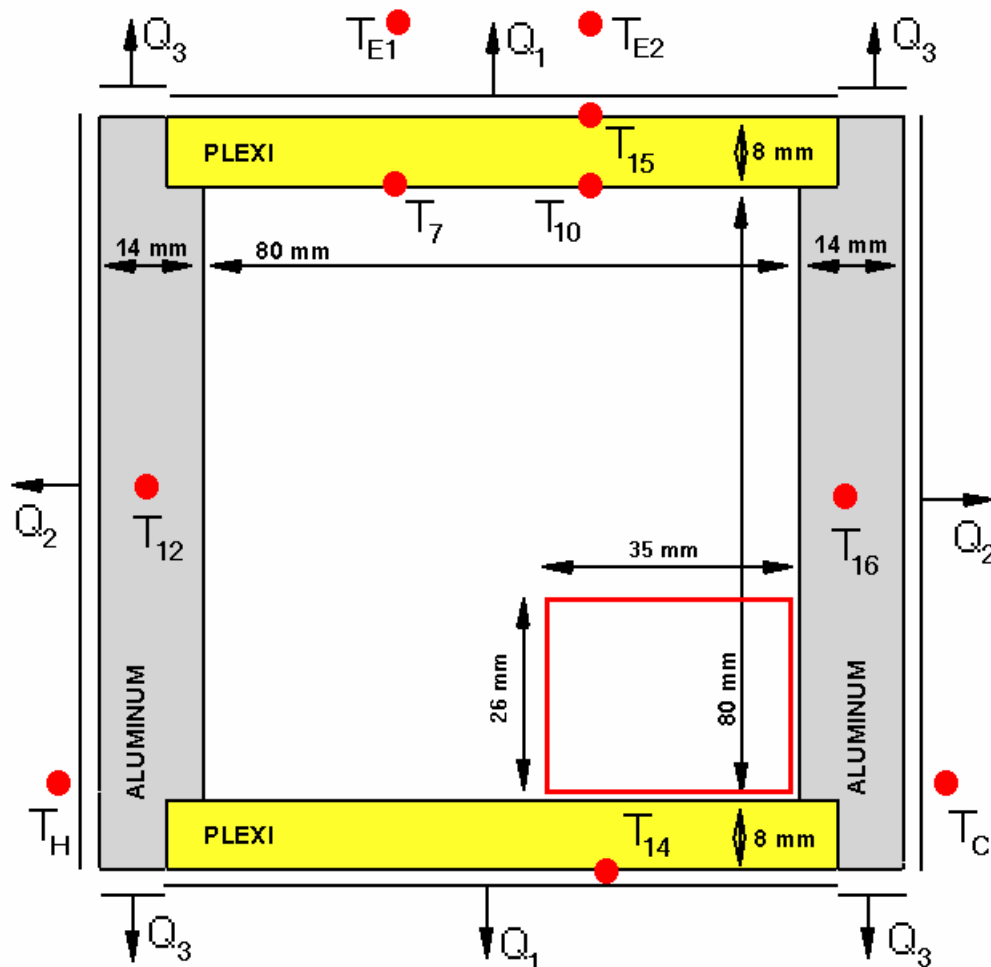
4.7 Analiza zerwania stacjonarności przepływu

W celu przeanalizowania procesu zerwania stacjonarności przepływu dla wysokich liczb Rayleigha ($Ra > 3.0 \cdot 10^7$) zdecydowano się przeprowadzić badania przepływu tylko dla fragmentu badanego przepływu, a mianowicie prawego dolnego rogu badanego przekroju. W miejscu tym dochodzi do powstawania skomplikowanych struktur przepływu spowodowanych tym, iż szybki strumień cieczy chłodzonej przez aluminiową ściankę napotyka dolną ściankę poziomą. Analiza jedynie fragmentu przepływu pozwoliła znacznie zwiększyć dokładność pomiarów i jednocześnie zbadać zmiany zachodzące w przepływie przy stopniowym zwiększaniu liczby Rayleigha.

Do pomiarów wykorzystano kamerę CMOS (PCO Imaging), ustawioną w ten sposób, że możliwe było wykonywanie obrazów o pełnej rozdzielczości 1280x1024 pikseli prawego dolnego rogu. Zdjęcia wykonywano z odległości 12 cm od płaszczyzny „noża świetlnego”, analizowany obszar w rzeczywistości miał 35 mm szerokości i 26 mm wysokości. Rejestrowany obszar został wyróżniony na Rysunku 4.15. Ze względu na to, iż wykorzystano kamerę czarno-białą dokonano jedynie pomiarów pól prędkości metodą PIV, a jako posiew wykorzystano pyłki sosny. Równocześnie dokonywano punktowe pomiary temperatury w miejscach zaznaczonych na Rysunku 4.15. czerwonymi kółkami ($T_{12}, T_{16}, T_7, T_{10}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_L, T_P, T_{E1}, T_{E2}$). Większość z tych punktów była usytuowana w centralnym przekroju sześciangu lub w jego bezpośrednim sąsiedztwie poza termoparą T_{13} , która przytwierdzona była do tylnej ściany pleksiglasowej od zewnętrznej strony (por. rys. 4.1.b-c).

Zdecydowano się rozważyć cztery konfiguracje eksperymentalne odpowiadające liczbom Rayleigha równym kolejno $3.1 \cdot 10^7$, $1.5 \cdot 10^8$, $1.8 \cdot 10^8$, $4.4 \cdot 10^8$. Szczegółowe zestawienie wartości termicznych warunków brzegowych i zarejestrowanych pomiarów punktowych temperatury zostało zamieszczone w Tabeli 4.6.

Eksperymenty przeprowadzono analogicznie do opisanych poprzednio w rozdziale 4.5. Dokonywano rejestracji serii zdjęć o długości $N = 150$ w odstępach czasu $\Delta t = 50, 100, 200, 300$ ms. Na podstawie tych obrazów wyliczano pola prędkości metodą PIV (Optical flow [83]), a następnie wartości średnie na podstawie tak otrzymanych prędkości chwilowych.



Rysunek 4.15 Szkic konfiguracji eksperymentalnej.
(prostokątem oznaczono obszar analizowany w tym podrozdziale)

Obliczono wartości średnie prędkości poziomej i pionowej a następnie średnią normę prędkości wykorzystując formułę (4.1). Dodatkowo wyliczono pola kolejnych momentów statystycznych obu składowych prędkości tj. odchylenia standardowego, skośności i kurtozy. W tym celu wykorzystano nieobciążone estymatory wyprowadzone dla niezależnych zmiennych losowych:

- Odchylenie standardowe $\sigma_N = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1..N} (\bar{v}_i - \bar{v}_{avg})^2 \right]^{1/2}$ (4.5)

- Skośność $S_N = \frac{1}{(N-1)\sigma_N^3} \sum_{i=1..N} (\bar{v}_i - \bar{v}_{avg})^3$ (4.6)

- Kurtoza $K_N = \frac{1}{(N-1)\sigma_N^4} \sum_{i=1..N} (\bar{v}_i - \bar{v}_{avg})^4$ (4.7)

Wszystkie powyższe parametry służą do opisu charakteru rozkładu prawdopodobieństwa składowych prędkości. Odchylenie standardowe jest miarą dyspersji (rozproszenia) rozkładu wokół średniej. Skośność jest miarą symetrii rozkładu względem średniej. Dodatkowo wartości wskazują iż rozkład jest niesymetryczny a wartości większych od średniej jest więcej w porównaniu z tymi mniejszymi od średniej, zaś dla ujemnej wartości skośności sytuacja jest odwrotna. Kurtoza jest miarą spłaszczenia rozkładu i jest określana względem rozkładu normalnego. Dla rozkładu normalnego kurtoza wynosi 3, i jeśli wartość kurtozy jest większa od 3 to badany rozkład jest bardziej skupiony wokół wartości średniej, i im wyższa wartość tym wyższy i węższy jest profil rozkładu, natomiast dla wartości kurtozy poniżej 3 mamy do czynienia z rozkładem bardziej

splaszczonym niż rozkład normalny (profil rozkładu jest szeroki) i posiada tzw. „daleko idące ogony” (*ang. heavy tails*).

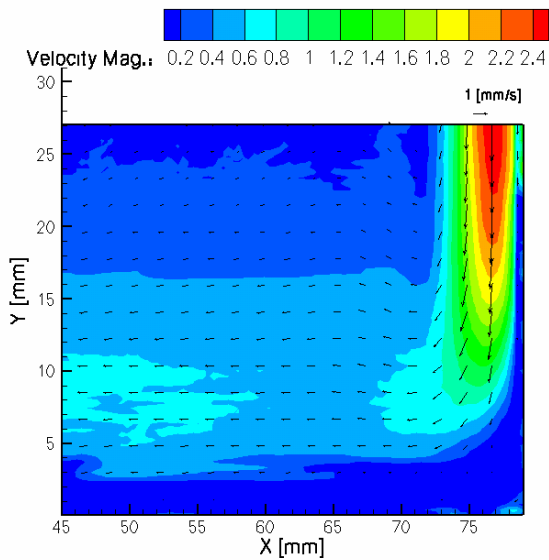
Dokonano oszacowania dokładności pomiarów na podstawie estymacji dyspersji wartości średniej (4.3), wyniosła ona odpowiednio 0.48, 0.84, 1.02, 1.02 mm/s dla liczb Rayleigha równych odpowiednio $3.1 \cdot 10^7$, $1.5 \cdot 10^8$, $1.8 \cdot 10^8$, $4.4 \cdot 10^8$.

Rysunek 4.16 przedstawia średnie pola prędkości dla badanych konfiguracji. Na podstawie tych pól można określić szerokość kinematycznej warstwy przyściennej, w której odbywa się większość ruchu. Wynosi ona 7 mm, 5 mm, 4 mm i 3 mm dla kolejnych konfiguracji i została zmierzona na wysokości 20 mm. Wartości powyższe są nieco większe od tych rejestrowanych na wysokości 40 mm, czyli w połowie wysokości kuwety, gdzie warstwa ta jest najwęższa. Maksymalna wartości prędkości średniej rosła wraz z wzrostem wartości liczby Rayleigha wynosząc odpowiednio 2.6 mm/s, 6.11 mm/s, 6.47 mm/s i 7.24 mm/s. Również wraz z wzrostem liczby Rayleigha rosła wartość odchylenia standardowego (rys. 4.17). Wartości pionowej składowej prędkości są dużo większe w porównaniu z wartością poziomą składowej toteż przy analizowaniu wartości odchylenia standardowego należy zwrócić uwagę na średnią wartość prędkości dla bieżącej konfiguracji. Z tego względu zamieszczono również pole średniej prędkości poziomej i pionowej oddzielnie (rysunek 4.18 i 4.22), wraz z polami odchylenia standardowego, skośności i kurtozy dla obu składowych prędkości (rysunki 4.19-21, 4.23-25). Ponadto wyliczono pole intensywności turbulencji (fluktuacji), zdefiniowane jako stosunek odchylenia standardowego do wartości średniej prędkości:

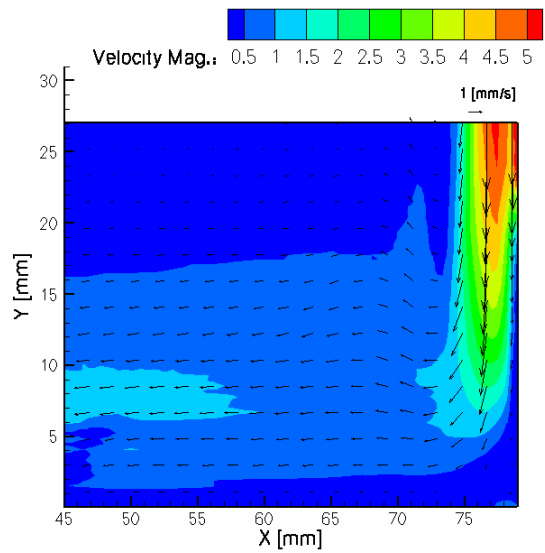
$$I = \frac{\sigma_N}{\bar{v}_{avg}} \quad (4.8)$$

Wartość powyższa określa jak duża jest wartość fluktuacji względem średniej wartości pola prędkości. Na podstawie pól intensywności fluktuacji można wnioskować iż, przepływ dla $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ można uznać za stacjonarny, dla większości obszaru analizowanego pola wartości $I < 0.3$. Dla $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ intensywność fluktuacji można uznać za umiarkowaną ($0.3 < I < 0.5$), natomiast dla $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ oraz $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ wartość ta jest rzędu jedności, co oznacza, że fluktuacje prędkości są tego samego rzędu co średnia wartość prędkości.

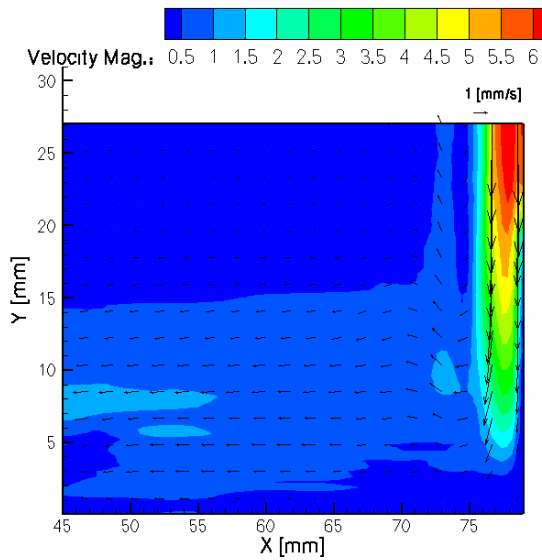
Charakter taki również można dostrzec analizując pola składowych prędkości. Porównując pole odchylenia standardowego poziomej składowej prędkości (rys. 4.19) do jej wartości średniej (rys. 4.18). Można zauważyć, że dla wyższych liczb Rayleigha (porównaj rysunki c i d) wartość odchylenia standardowego jest podobnego rzędu co średnia wartość prędkości. Wartości skośności dla obydwu składowych prędkości są ujemne, co jest związane z kierunkiem przepływu. Największą zmienność skośności obserwuje się dla wysokich liczb Rayleigha (rys. 4.20 d). Kurtoza dla obydwu składowych prędkości wykazuje podobne zachowanie. Jest większa od 10 dla niskich liczb $Ra = 3 \cdot 10^7$ (rys. 4.21 a i 4.51 a), co świadczy o małych fluktuacjach prędkości i dużej koncentracji rozkładu wokół średnich wartości. Dla $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ kurtoza jest w większości punktów pola mniejsza od 3, co oznacza iż dyspersja fluktuacji jest duża, odchylenie standardowe wzrosło, a rozkład charakteryzuje się wyraźnymi „ogonami”. Dla wyższych liczb Rayleigha ($1.5 \cdot 10^8$, $4.4 \cdot 10^8$) kurtoza mieści się dla większości analizowanych punktów w przedziale od 2 do 5, co oznacza, że rozkład jest bliski rozkładowi normalnemu, o nieco węższym rozproszeniu i większych fluktuacjach (przeważają punkty o kurtozie większej niż 3). Ten fakt również może oznaczać, iż dla liczb $Ra > 10^8$ dochodzi do zmiany charakteru przepływu i dla tych konfiguracji założenie stacjonarności przepływu nie jest prawdziwe.



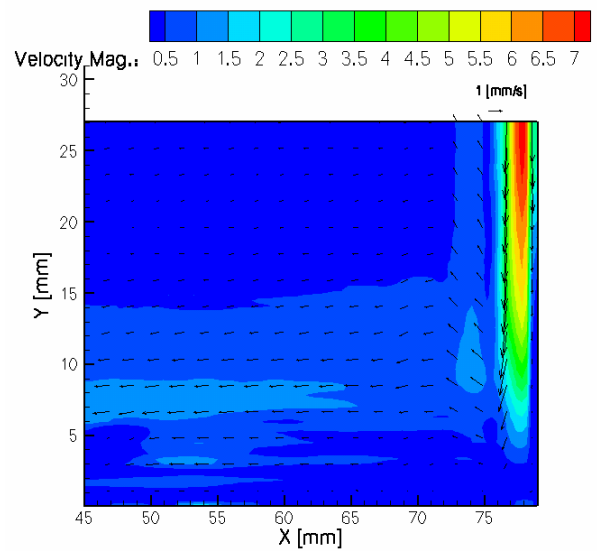
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

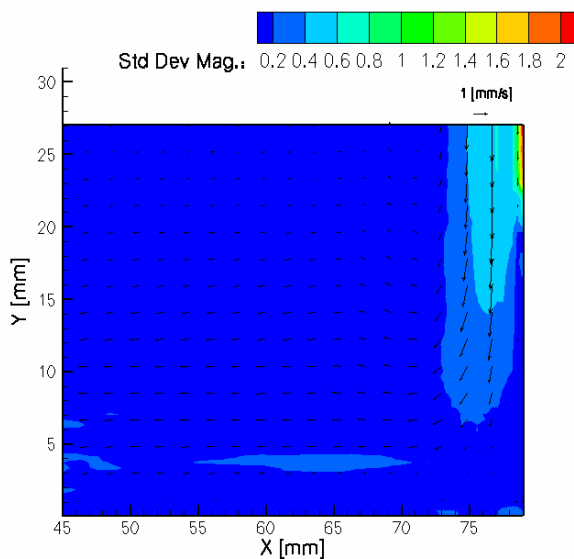


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

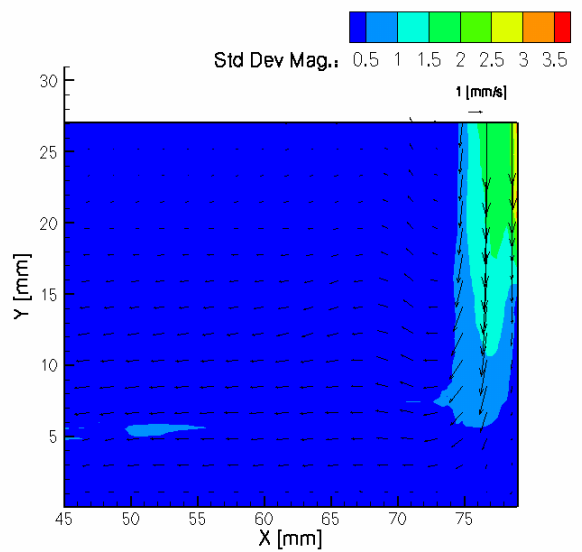


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

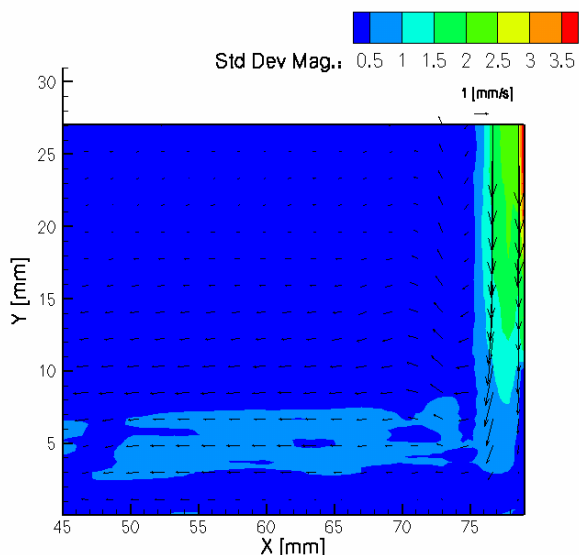
Rysunek 4.16. Średnie pole prędkości dla konwekcji naturalnej wody.



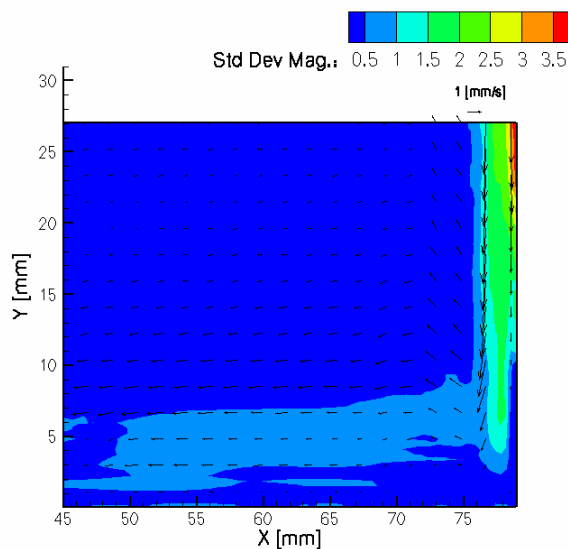
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

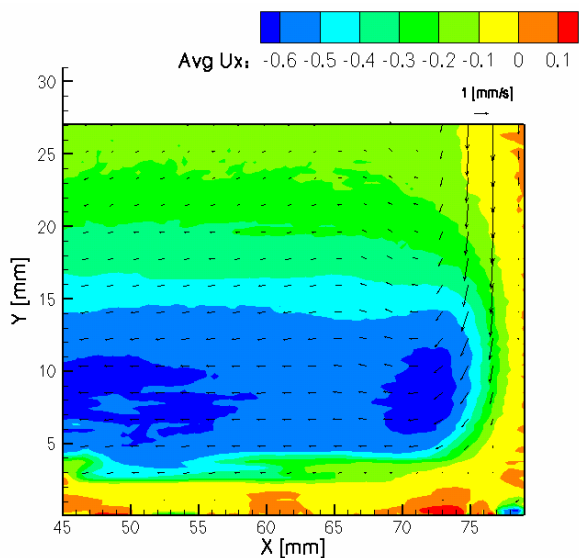


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

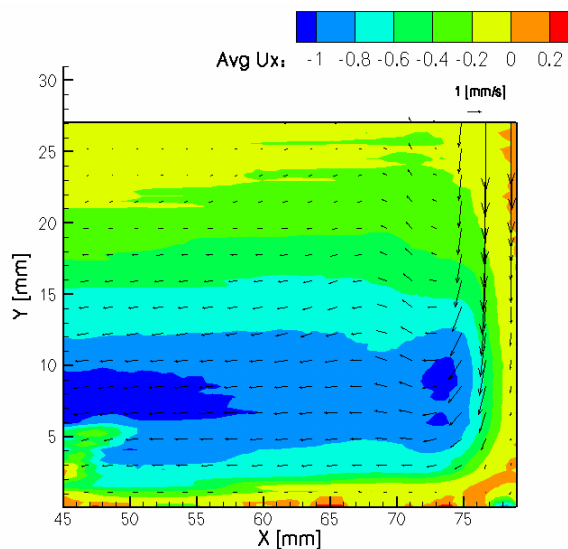


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

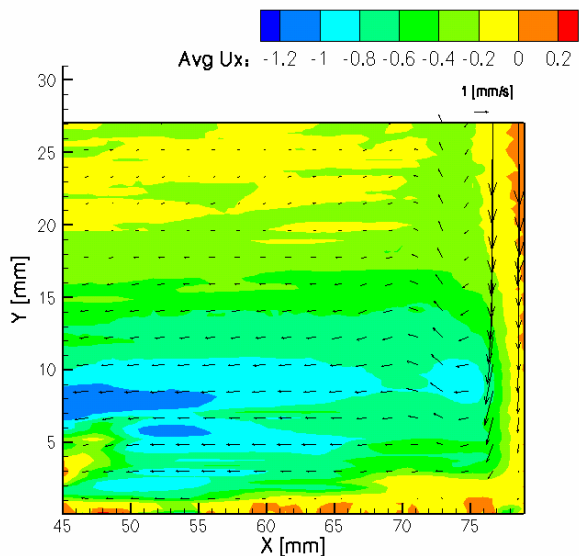
Rysunek 4.17. Odchylenie standardowe normy prędkości dla konwekcji naturalnej wody



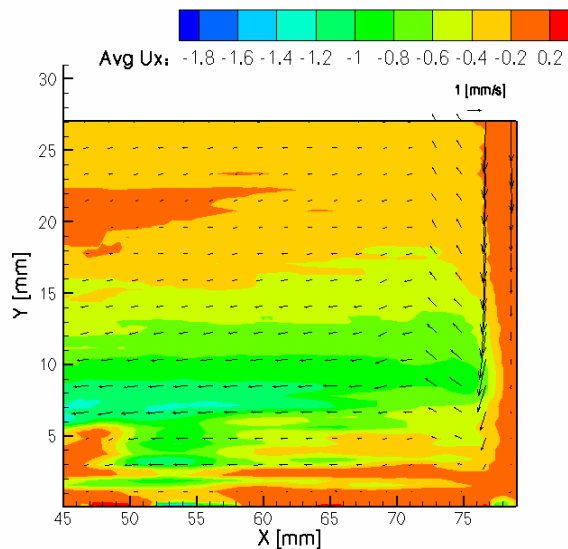
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

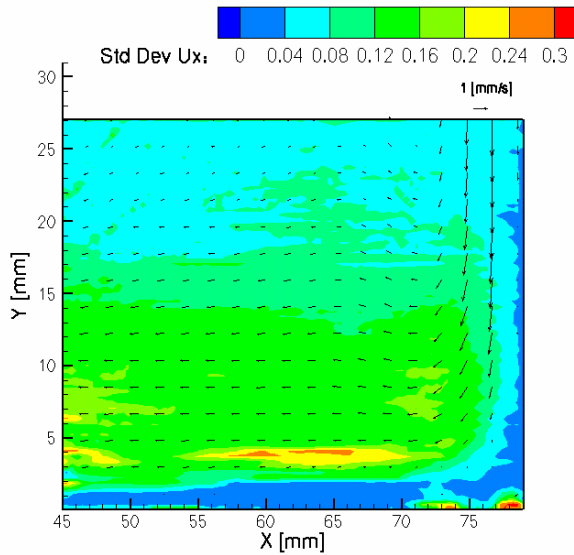


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

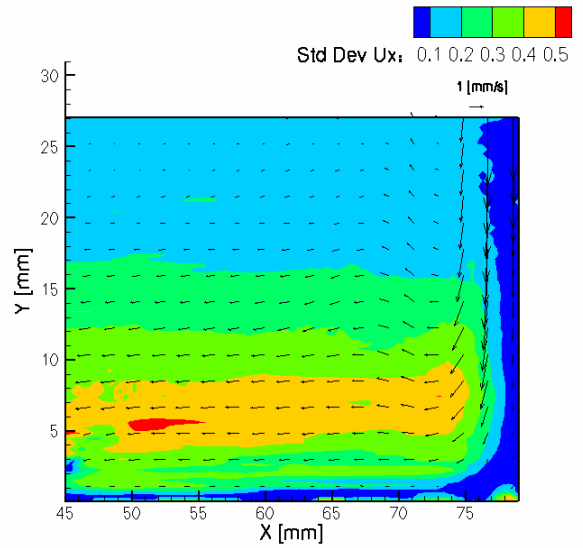


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

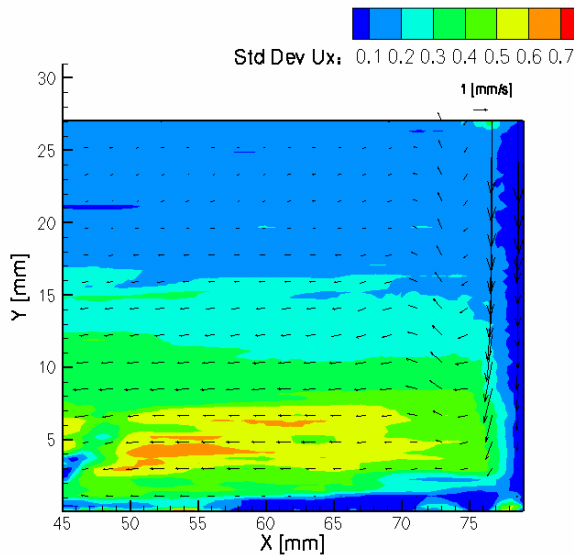
Rysunek 4.18. Średnie pole poziomej składowej prędkości dla konwekcji naturalnej wody



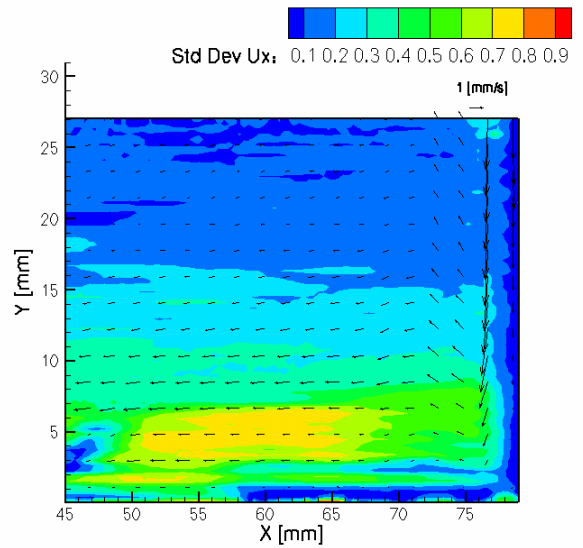
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

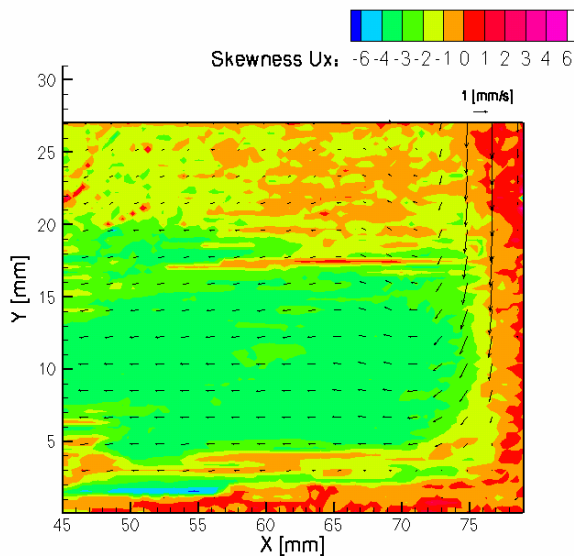


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

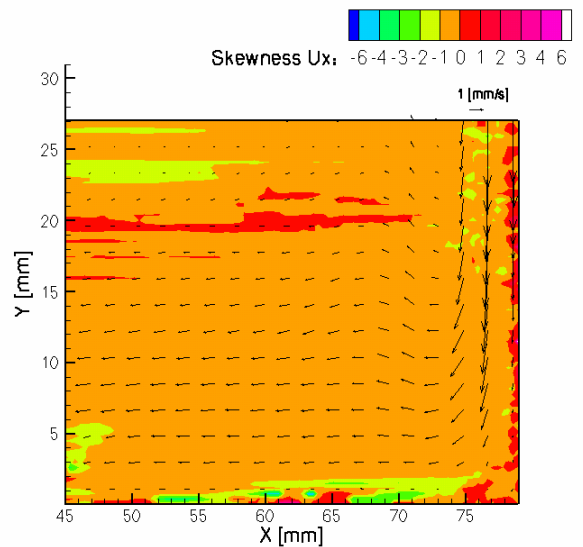


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

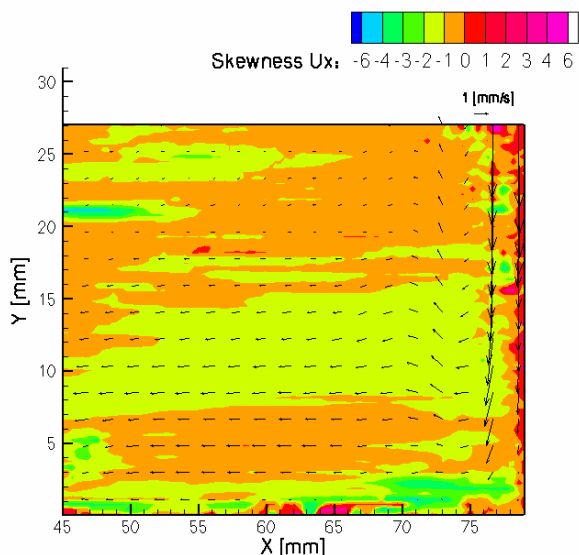
Rysunek 4.19. Odchylenie standardowe poziomej składowej prędkości dla konwekcji naturalnej wody



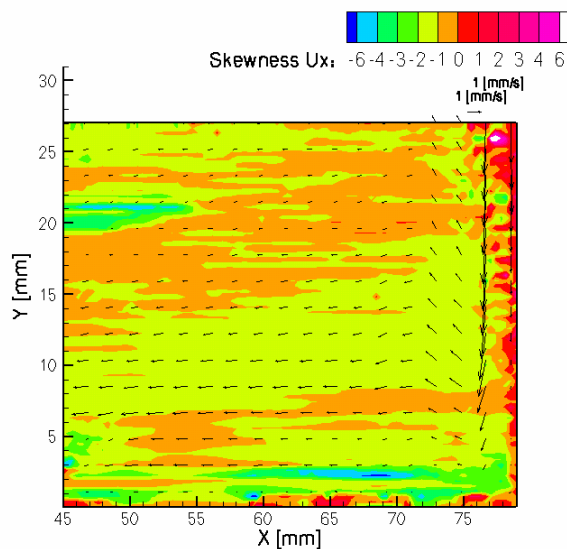
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

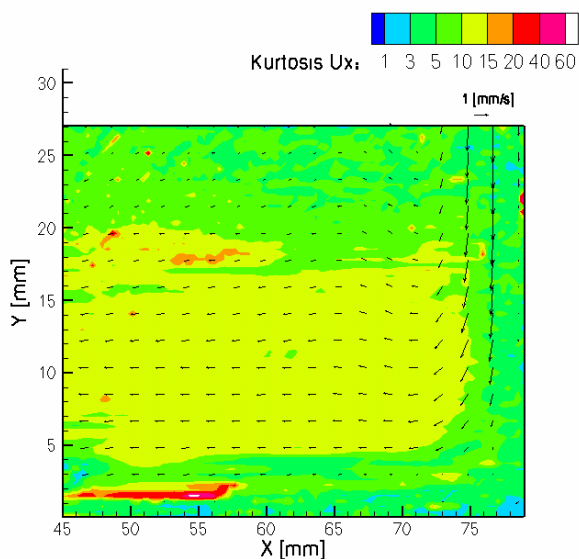


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

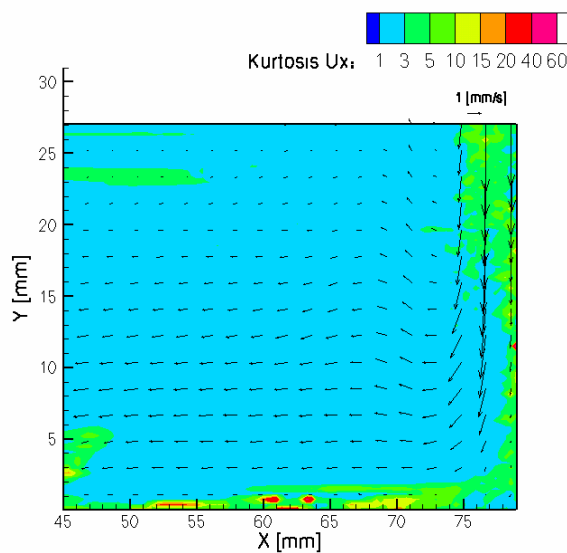


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

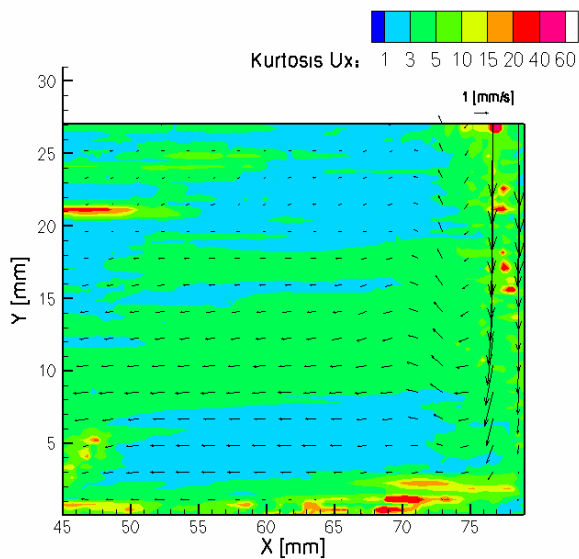
Rysunek 4.20 Skośność poziomej składowej prędkości dla konwekcji naturalnej wody



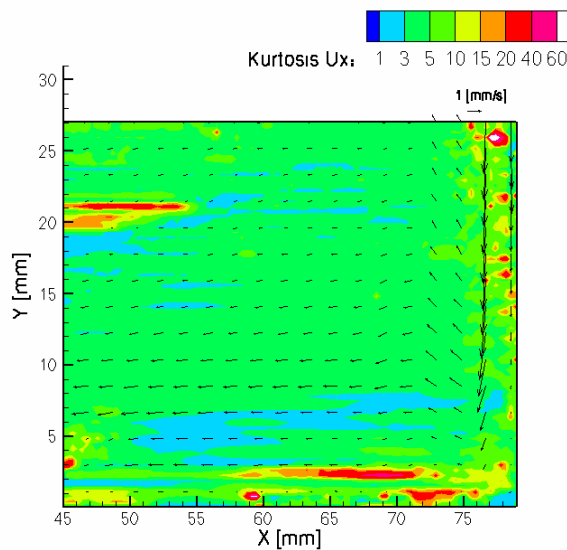
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

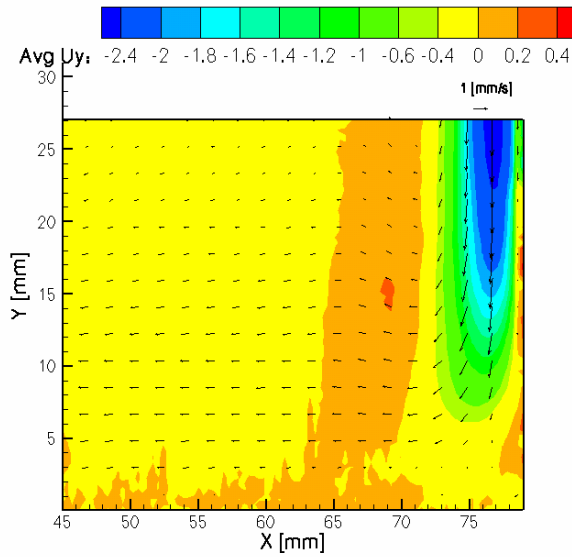


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

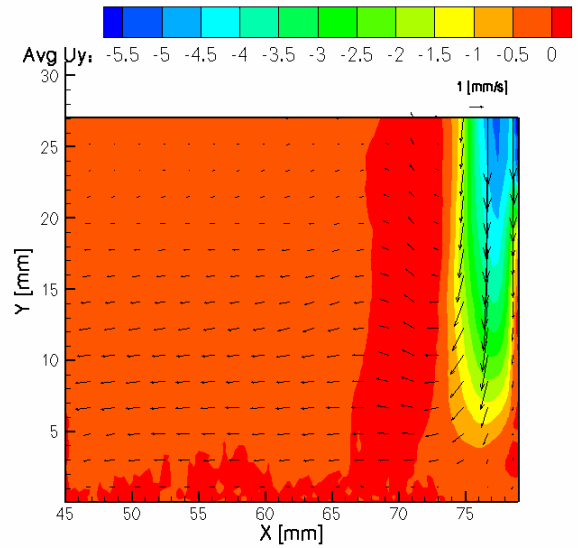


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

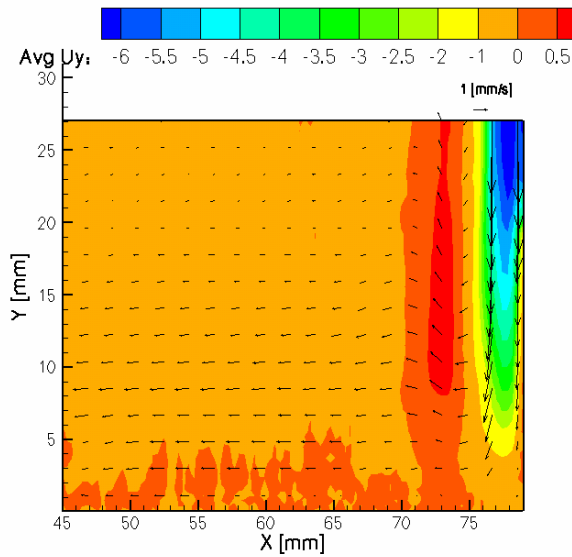
Rysunek 4.21. Kurtoza poziomej składowej prędkości dla konwekcji naturalnej wody



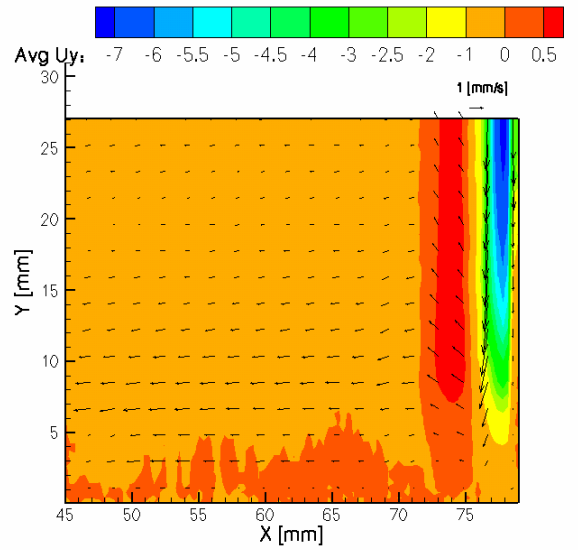
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

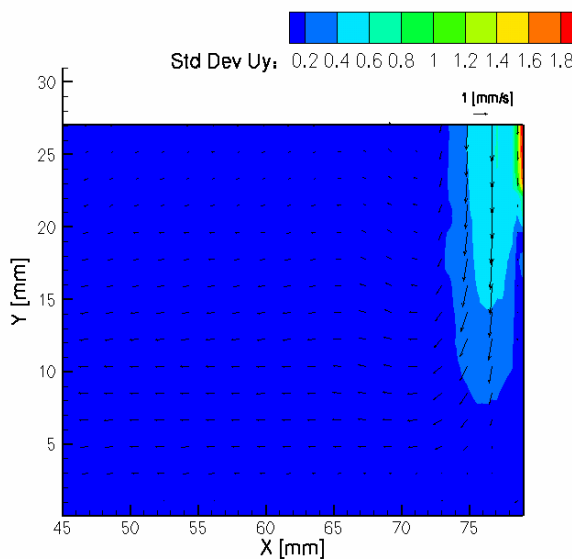


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

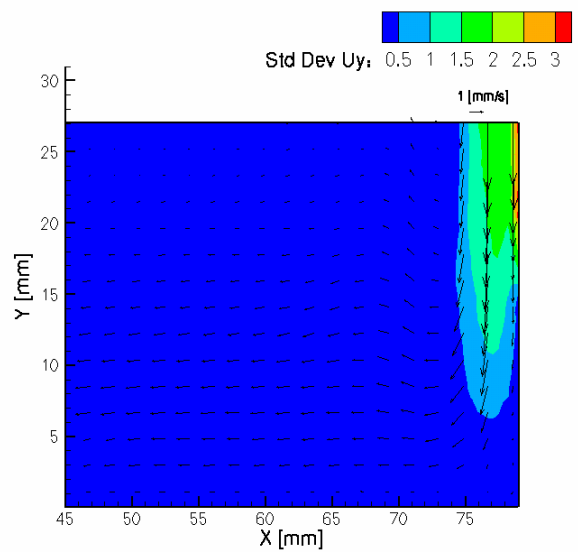


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

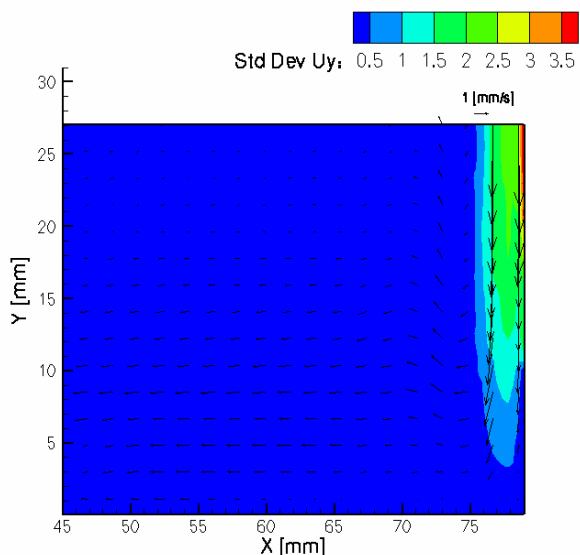
Rysunek 4.22. Średnie pole pionowej składowej prędkości dla konwekcji naturalnej wody



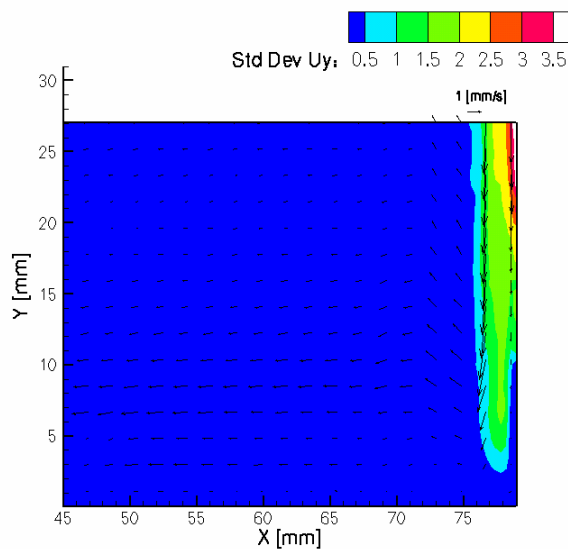
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

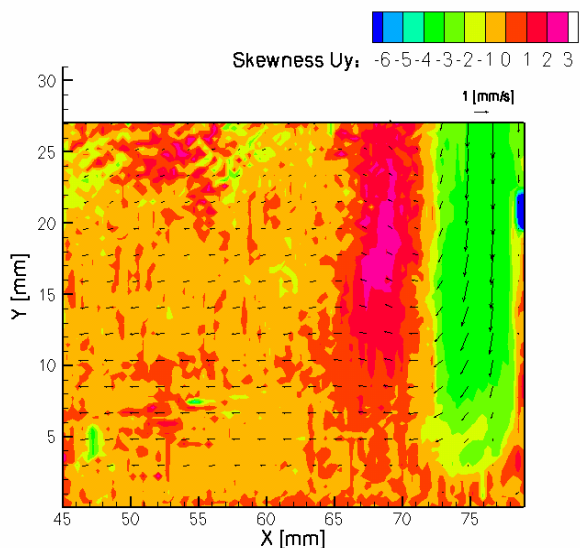


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

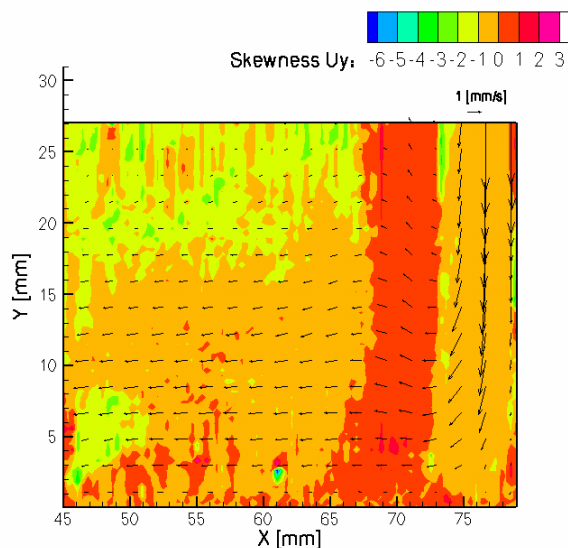


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

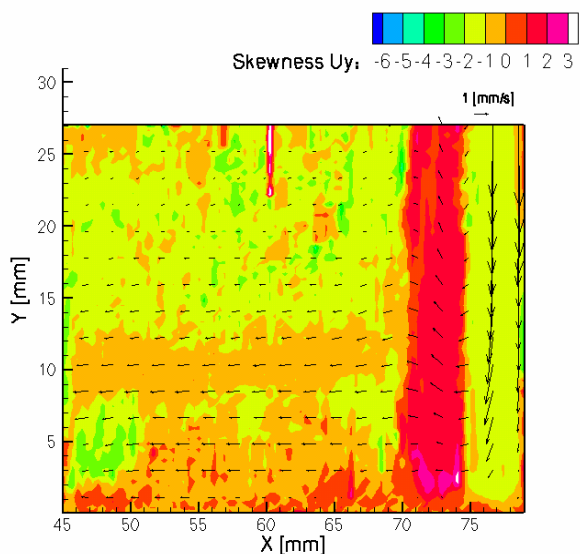
Rysunek 4.23. Odchylenie standardowe pionowej składowej prędkości dla konwekcji naturalnej wody



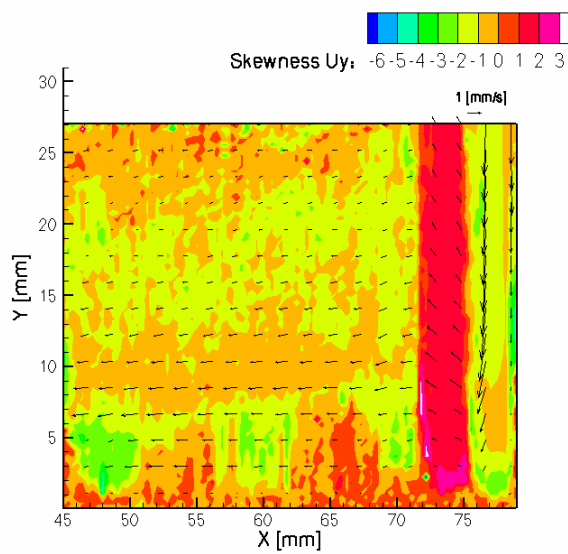
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

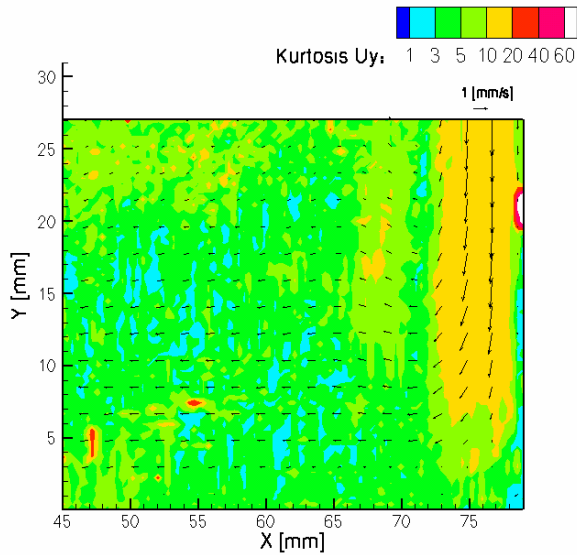


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

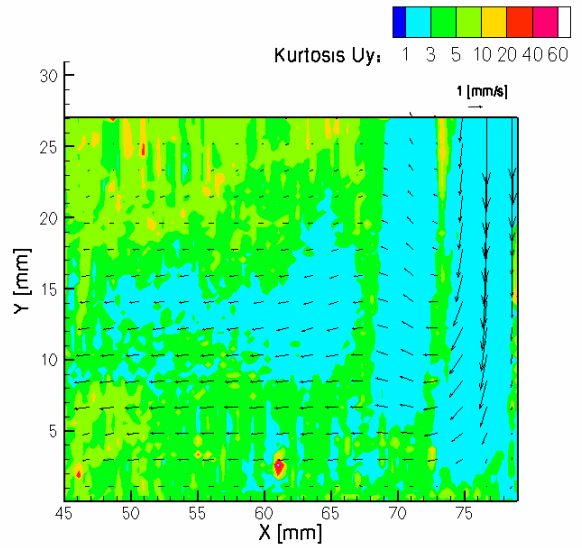


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

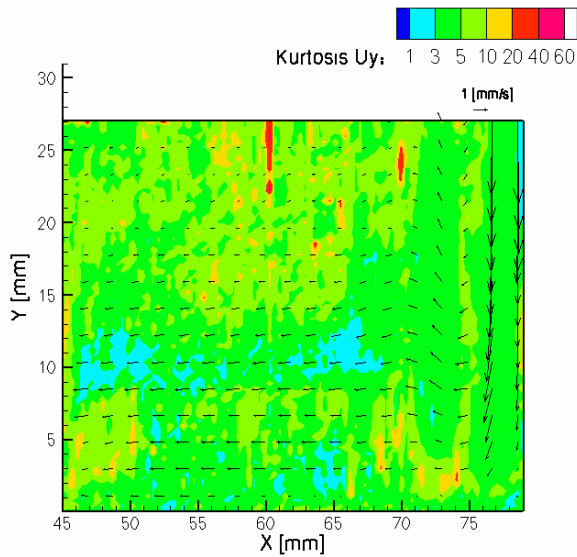
Rysunek 4.24. Skośność pionowej składowej prędkości dla konwekcji naturalnej wody



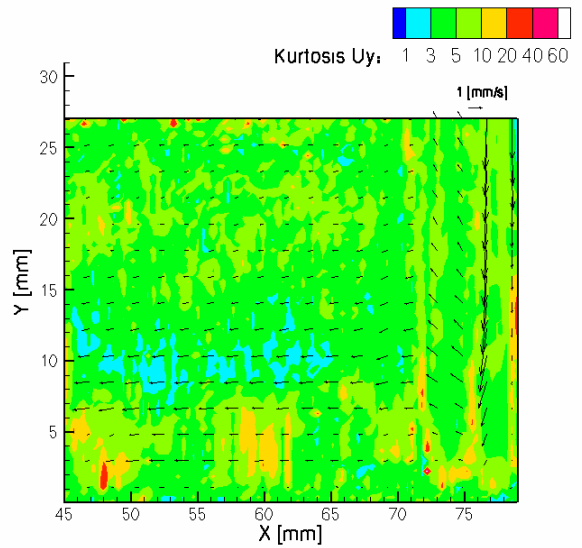
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

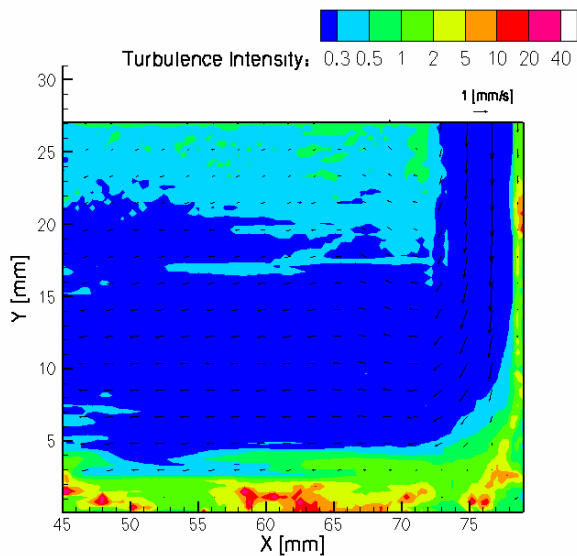


c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

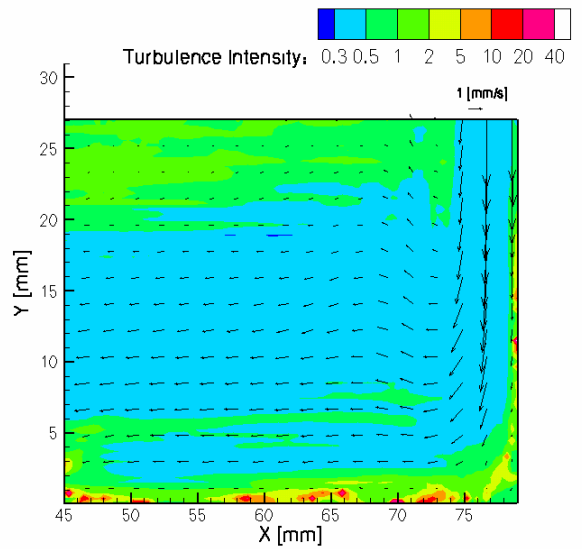


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

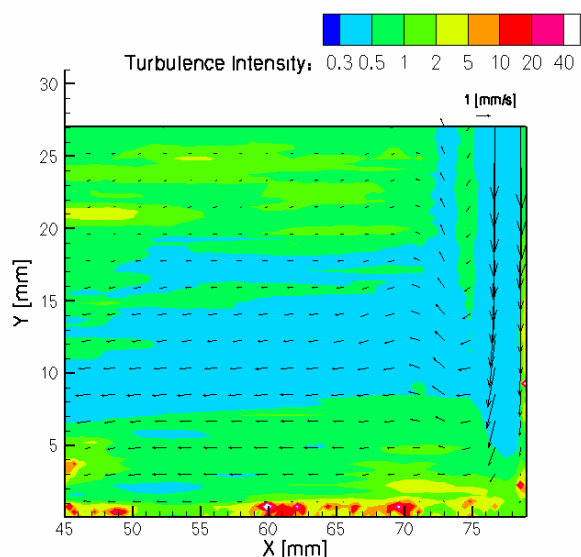
Rysunek 4.25. Odchylenie standardowe pionowej składowej prędkości dla konwekcji naturalnej wody



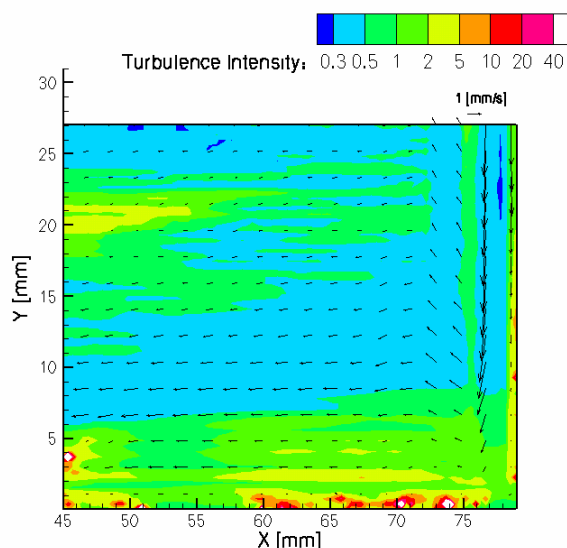
a) $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



b) $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)



c) $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

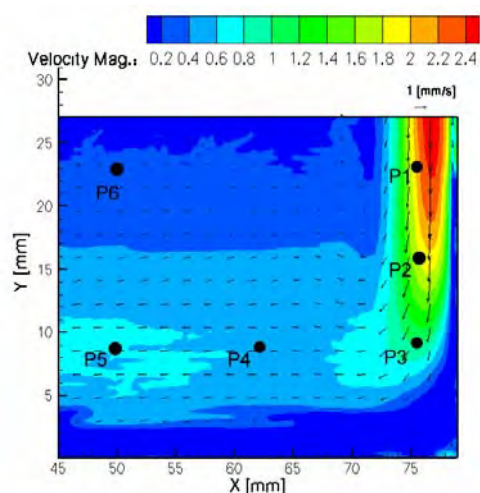


d) $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

Rysunek 4.26. Intensywność turbulencji dla konwekcji naturalnej wody.

W celu dokładniejszego przeanalizowania rozkładu prędkości i fluktuacji prędkości dla badanych konfiguracji eksperymentalnych zdecydowano się wybrać sześć punktów P1, P2, P3, P4, P5, P6, które zostały zaznaczone na Rysunku 4.27 i wyznaczyć dla nich rozkłady statystyczne składowych prędkości. Obok rysunku 4.27 podano współrzędne wybranych punktów. Punkty te wybrano w ten sposób, aby znajdowały się w wąskiej strefie warstwy przyściennej (P1,P2,P3) oraz w obszarze wolniejszego przepływu wzdłuż dolnej ścianki (P3,P4,P5), oraz dodatkowo wybrano jeden punkt oddalony od obydwu ścianek (P6).

Dla wybranych punktów wyznaczono rozkłady dla obydwu składowych prędkości i wyliczono momenty statystyczne. Całościowe zestawienie rozkładów w postaci histogramów dla kolejnych konfiguracji zostało zamieszczone na Rysunku 4.29 oraz w Tabeli D.3. zamieszczonej w Dodatku zawierającej wartości momentów statystycznych.



P1 = (78.0,24.0)

P2 = (78.0,15.0)

P3 = (78.0,8.5)

P4 = (62.5,8.5)

P5 = (50.0,8.5)

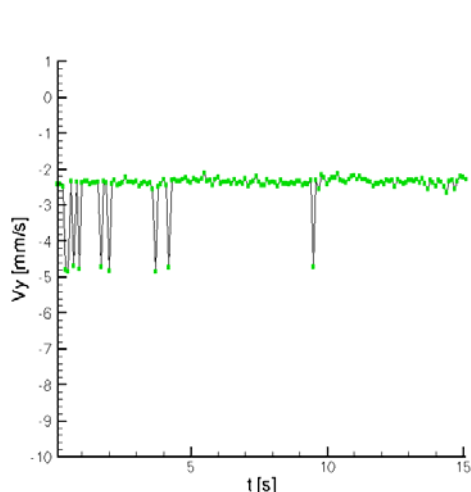
P6 = (50.0,24.0)

Rysunek 4.27. Szkic badanej konfiguracji z naniesionymi punktami, w których przeanalizowano statystyczne rozkłady składowych prędkości.

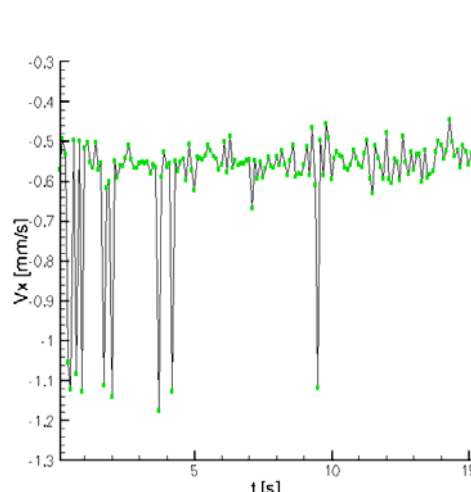
Wartości pionowej składowej prędkości dla $Ra = 3 \cdot 10^7, 1.5 \cdot 10^8, 1.8 \cdot 10^8$ mają podobne rozkłady w punktach P1,P2,P3. Na histogramach widoczne są dwa zgrupowania, co oznacza, że prędkość w tych punktach ma dwie wyróżnione wartości prędkości wokół których się skupia. Dla najwyższej liczby $Ra = 4 \cdot 10^8$ rozkład zmienia się, nie ma dwóch wyraźnych zgrupowań i staje się

zbliżony do rozkładu normalnego. Charakterystyczny rozkład z dwoma skupieniami obserwowany jest również dla składowych poziomych w punktach P4 i P5, co oznacza, że zaobserwowany rozkład dla składowych pionowych propaguje się w kierunku wyznaczonym przez przepływ. Interesujące jest to iż, że dla najwyższej liczby $Ra = 4 \cdot 10^8$ dla składowych pionowych prędkości w punktach P1, P2, P3 nie można wyróżnić dwóch zgrupowań prędkości, a pojawiają się one przy składowych poziomych prędkości w punktach P4 i P5. Zachowanie takie należy zapewne powiązać z wartościami prędkości, bowiem pionowe wartości prędkości są kilkakrotnie większe od poziomych. Można zatem wnioskować, że zerwanie stacjonarności przepływu nie jest związane z wartością globalną liczby Rayleigha i nie zachodzi jednocześnie w całym obszarze, a jedynie można je powiązać z punktowymi rozkładami prędkości. Wykreślone histogramy rozkładów prędkości przemawiają za tym, że zmianie rozkładu prędkości można przypisać zmianę charakteru przepływu. Przyjmując taką definicję zmiany charakteru przepływu, zerwanie stacjonarności można określić tylko dla pewnych obszarów, należą do nich na przykład punkty P1, P2, P3 dla konfiguracji w której $Ra = 4.4 \cdot 10^8$.

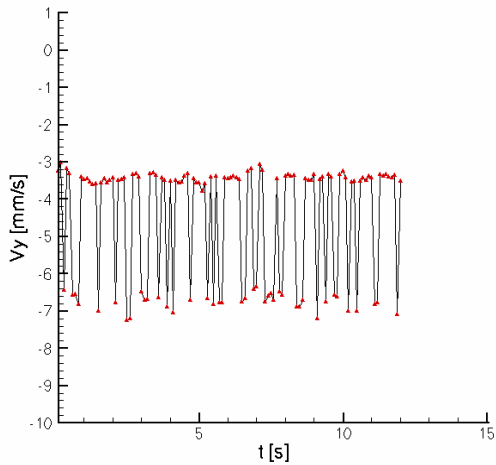
Dla poparcia tej tezy wykreślono w funkcji czasu pionową składową prędkości w punkcie P2 oraz poziomą składową prędkości w punkcie P4. Wykresy zestawiono na Rysunku 4.28. dla badanych konfiguracji. Na wszystkich rysunkach widoczne są lokalne fluktuacje prędkości chwilowej. Dla $Ra = 3 \cdot 10^7$ obie wykreślone składowe prędkości są w przybliżeniu stałe, oscylują wokół wartości -2.4 mm/s (pionowa składowa w P2) i -0.55 mm/s (pozioma składowa w P4). Z częstotliwością około 1, 2 lub 5 sekund występują wartości znacznie odbiegające od tej wartości (dwukrotnie większe), które można przypisać występowaniu sporadycznych fal. Dla $Ra = 1.5 \cdot 10^8$ mamy podobną sytuację dla składowych prędkości, które oscylują wokół -3.2 mm/s oraz -0.7 mm/s, z tym że ruch falowy jest jednostajny i fluktuacje występują niemal periodycznie co 1 sekundę dla obydwu składowych. Dla $Ra = 1.8 \cdot 10^8$ większość wartości prędkości również oscyluje wokół wartości -4.5 mm/s (pionowa składowa w P2) i -0.8 mm/s (pozioma składowa w P4), jednakże rozproszenie (dyspersja) tych oscylacji jest dużo większe w porównaniu z poprzednimi konfiguracjami. Prędkości o dużo wyższych wartościach występują z częstotliwością około 1.5 sekundy dla obydwu składowych. Dla konfiguracji o najwyższej liczbie $Ra = 4.4 \cdot 10^8$ dla składowej pionowej w punkcie P2 nie można wyróżnić ruchu falowego, raczej można mówić o rozkładzie o dużej dyspersji, natomiast wykres poziomej składowej prędkości w punkcie P4 ma podobny charakter do tych obserwowanych we wcześniejszych konfiguracjach. Wykreślone ciągi czasowe potwierdzają zatem tezę, iż stacjonarność przepływu należy raczej oceniać na podstawie rozkładów prawdopodobieństwa dla konkretnych punktów. Podawanie wartości krytycznych liczb bezwymiarowych jest niejednoznaczne i wymaga lokalnej analizy pola prędkości (por. rys. 4.28). Wynika z tego że konieczne jest znalezienie wielkości, które opisywałyby lokalny charakter przepływu (tzn. na podstawie lokalnych wartości prędkości i/lub temperatury), i informowałyby o zmianie charakteru rozkładu.



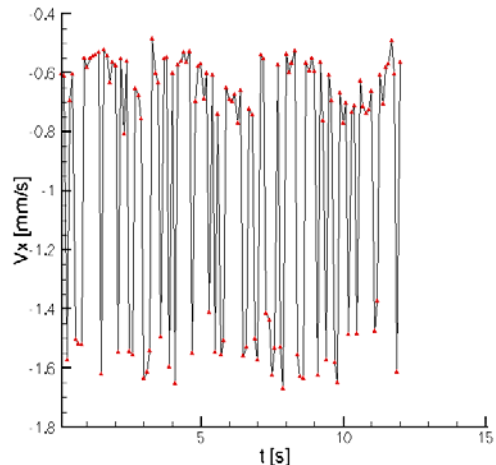
a) P2Vy $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



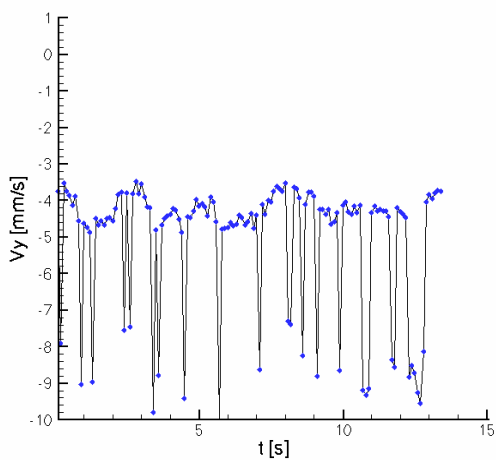
b) P4Vx $Ra = 3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)



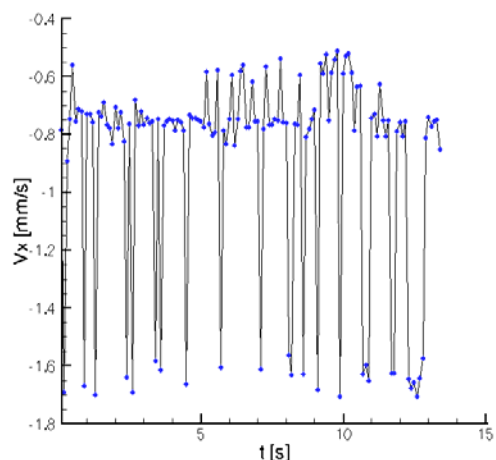
c) $P2V_y Ra = 1.53 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)



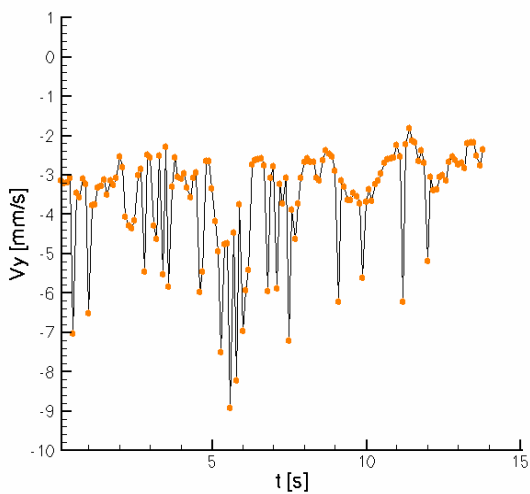
d) $P4V_x Ra = 1.53 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)



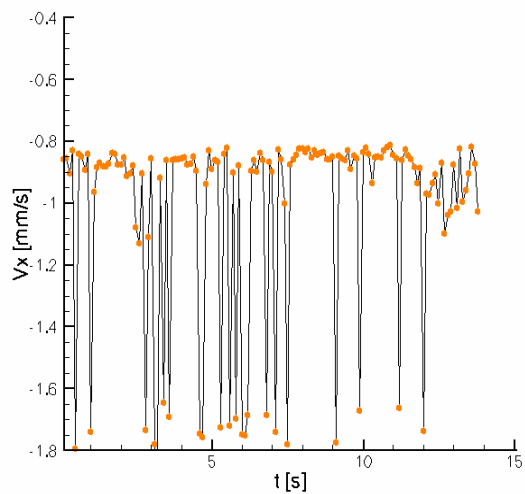
e) $P2V_y Ra = 1.81 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)



f) $P4V_x Ra = 1.81 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

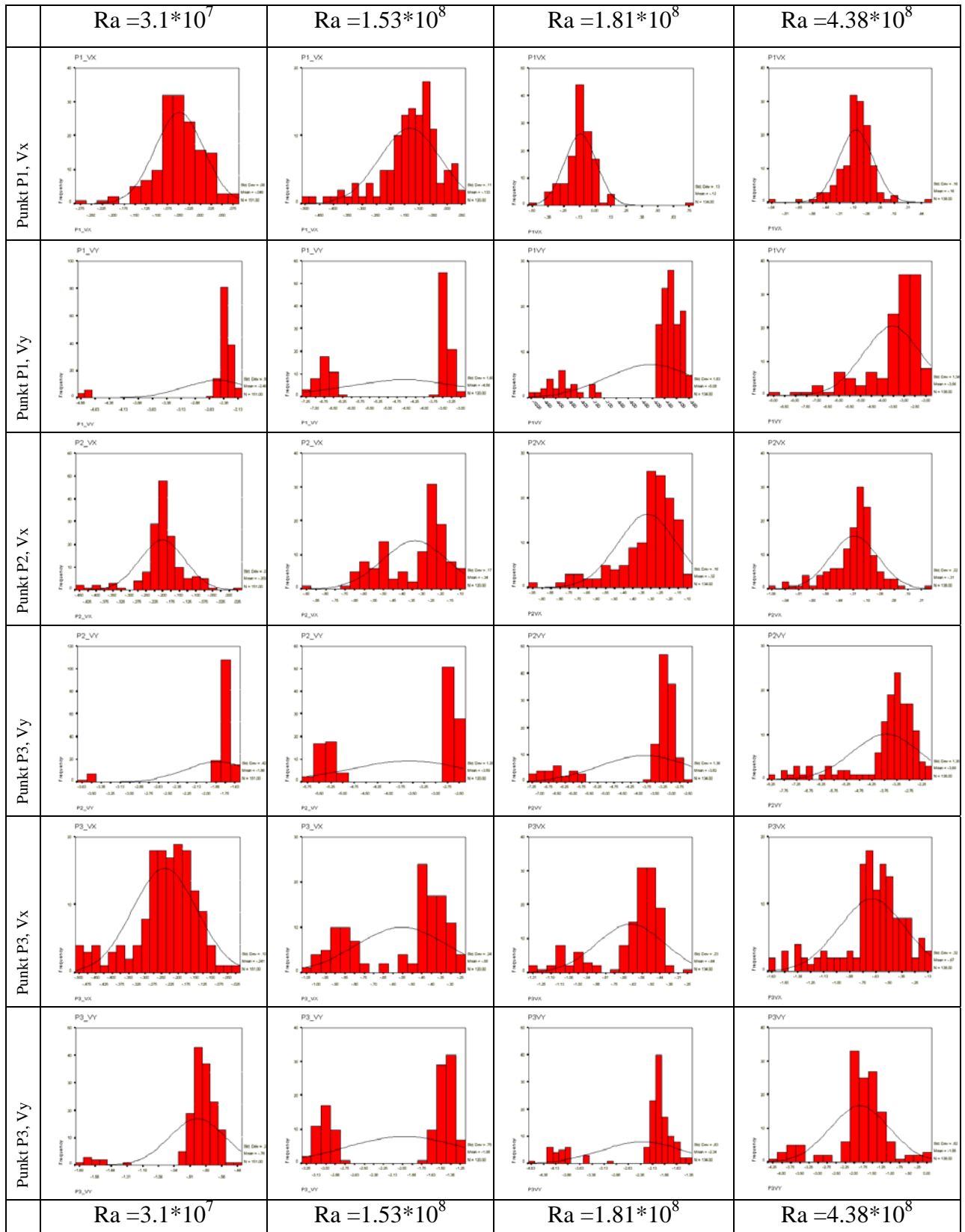


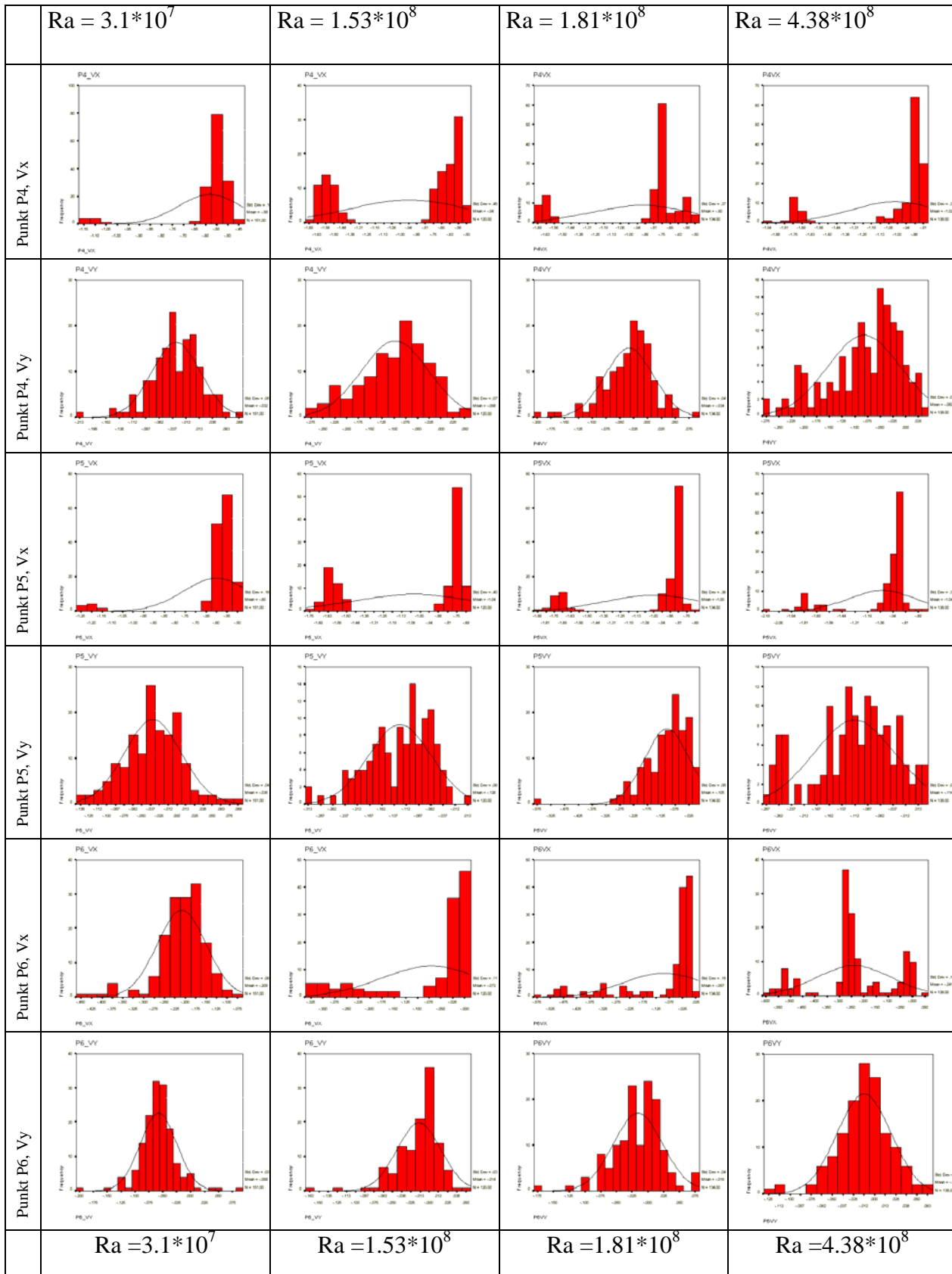
g) $P2V_y Ra = 4.38 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)



h) $P4V_x Ra = 4.38 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

Rysunek 4.28. Fluktuacje pionowej składowej prędkości w punkcie P2 oraz poziomej składowej prędkości w punkcie P4 dla badanych konfiguracji eksperymentalnych





Rysunek 4.29. Histogramy rozkładów poziomej i pionowej składowej prędkości w punktach P1-P6 dla badanych konfiguracji eksperymentalnych.

5. Walidacja symulacji numerycznych

W rozdziale tym przedstawiono proces walidacji symulacji numerycznych dla wybranych konfiguracji obejmujących przepływy lepkie i termiczne. Proces ten polega na porównaniu rezultatów symulacji numerycznych z wynikami eksperymentalnymi. Celem tego procesu jest oszacowanie ilościowe błędów wynikających z poczynionych założeń w modelu, który został rozwiązany numerycznie. Na początku przedstawiono sposób w jaki porównywano wyniki symulacji numerycznych z wynikami eksperymentalnymi. Następnie przedstawiono walidację obliczeń numerycznych wykonanych dla potrzeb zaproponowanej metody oceny wiarygodności w rozdziale 3 przy pomocy zdefiniowanego wzorca eksperymentalnego w rozdziale 4.6. Ponadto porównano wyniki szeregu symulacji numerycznych, odpowiadających kolejnym konfiguracjom eksperymentalnym, których wyniki eksperymentalne zostały zaprezentowane w rozdziale 4. Dodatkowo przedstawiono proces walidacji z wykorzystaniem metody oceny wiarygodności przepływów konwekcyjnych dla konfiguracji z pionowym gradientem temperatury z wykorzystaniem danych wcześniej opublikowanych [123].

5.1 Procedura walidacji

W celu ujednoczenia sposobu przeprowadzania procedury walidacyjnej zdecydowano się na wykorzystanie terminologii i metodologii zaproponowanej przez Sterna i współautorów [25]. Procedura ta wymaga określenia błędu porównania E zdefiniowanego jako różnica pomiędzy wynikami eksperymentalnymi D , a wynikami symulacji numerycznej S (1.7). Kryterium decydującym czy wyniki danej symulacji numerycznej są poprawne w świetle danych eksperymentalnych określa się przy pomocy warunku (1.11). Wymaga on porównania normy błędu porównania $|E|$ z wartością metryki walidacyjnej U_V . Metryka ta została zdefiniowana w rozdziale 1 (1.10), jako suma kwadratów niepewności danych eksperymentalnych U_D , niepewności wyniku symulacji numerycznej U_{SN} oraz niepewności danych wykorzystanych jako parametry wejściowe w wykonanych obliczeniach U_{SPD} .

Przyjęto, iż niepewność danych eksperymentalnych U_D , przedstawionych w rozdziale 4, można określić poprzez trzykrotną wartość estymatora dyspersji wyznaczonego dla wartości średniej (4.3) przy pomiarach prędkości metodą PIV (por. rozdział 4.3). Natomiast dla pomiarów temperatury metodą PIT (por. rozdział 4.4) przyjęto wartość dokładności tych pomiarów. Dla punktowych pomiarów temperatury podobnie jak dla pomiarów metodą PIV przyjęto trzykrotną wartość estymatora wartości średniej (4.3) wyznaczonego na podstawie serii pomiarów jako wartość niepewności danych eksperymentalnych U_D .

Niepewność wyniku symulacji numerycznej U_{SN} wyliczano na podstawie symulacji numerycznych wykonanych na jednorodnie zagęszczanych siatkach wyznaczając względny błąd rozwiązania. Błąd ten wyliczany jest jako różnica pomiędzy rozwiązaniem wyliczonym przy pomocy ekstrapolacji Richardsona z wykorzystaniem rozwiązań numerycznych na co najmniej dwóch siatkach (1.16), a rozwiązaniem dla którego aktualnie oszacowywana jest niepewność wyniku symulacji numerycznej U_{SN} . Niepewnością danych wykorzystywanych jako parametry wejściowe w symulacjach numerycznych U_{SPD} dla badanych konfiguracji jest dokładność wyznaczenia wartości właściwości termo-fizycznych materiałów, które są przyjmowane jako parametry wejściowe do obliczeń numerycznych. Ze względu na to iż wszystkie przedstawione wyniki eksperymentalne dotyczą przepływu wody, dla której własności materiałowe są znane z dokładnością większą niż 0.5 %, wartość niepewności U_{SPD} można zaniedbać.

Podsumowując można stwierdzić, iż w przypadku gdy spełniony jest warunek:

$$|E| \leq U_V = (U_D^2 + U_{SN}^2 + U_{SPD}^2)^{0.5} \quad (5.1)$$

przyjmuje się, iż walidacja wyników symulacji numerycznych w świetle danych eksperymentalnych D została osiągnięta na poziomie niepewności określonym przez wartość

metryki walidacyjnej U_V . Zdecydowano się wykorzystać to kryterium pomimo zastrzeżeń przedstawionych przez Roache [27], który zauważył że definicja ta umożliwi osiągnięcie pozytywnej walidacji w przypadkach gdy niepewność danych eksperymentalnych jest wystarczająco duża, co nie jest efektem pożądanym. Jednakże wyniki eksperymentalne, które zostaną wykorzystane i zostały przedstawione w rozdziale 4, otrzymano na podstawie procedury uśredniania czyli z wykorzystaniem serii niezależnych pomiarów, co pozwoliło na zminimalizowanie błędu dokładności pomiarów, który został przyjęty jako niepewność danych eksperymentalnych U_D . Ponadto niepewność symulacji numerycznych U_{SN} , wyliczono przy pomocy ekstrapolacji Richardsona na podstawie co najmniej trzech rozwiązań, czyli niepewność ta również została zminimalizowana. Natomiast niepewność danych wykorzystanych na wejściu do wykonanych obliczeń U_{SPD} dla potrzeb niniejszej pracy można zaniedbać gdyż jest one dużo mniejsze w porównaniu z pozostałymi wartościami niepewności, ponieważ dla cieczy modelowych takich jak woda wartości własności termo-fizycznych znane są z dużą dokładnością. Reasumując można przyjąć, że prawa strona nierówności (5.1) została zminimalizowana i stanowi poziom, który określa minimalny przedział niepewności błędu porównania $|E|$ z jakim można przeprowadzić procedurę walidacji z wykorzystaniem danych eksperymentalnych D . Innymi słowy jest to najmniejszy przedział niepewności z jaki można wykonywać walidację przy pomocy danych eksperymentalnych D z rozdziału 4.

Dodatkowym argumentem przemawiającym za wykorzystaniem warunku (5.1) jako kryterium walidacyjne jest to, iż po zaniedbaniu niepewności U_{SPD} porównywane są wartości o tych samych wymiarach. Dla przykładu przy porównywaniu wartości określających temperaturę, błąd porównania $|E|$ wyrażony jest w $^{\circ}\text{C}$ jako różnica wartości eksperymentalnej i wyliczonej na podstawie symulacji numerycznej. Z drugiej strony wartość metryki walidacyjnej jest również wyrażona w $^{\circ}\text{C}$ jako suma niepewności pomiaru eksperymentalnego czyli potrojonej wartości dyspersji wyznaczonej wartości średniej oraz niepewności symulacji numerycznej czyli względnego błędu rozwiązania.

5.2 Przykłady walidacji obliczeń numerycznych

5.2.1 Wzorzec numeryczny

Pierwszym z przedstawionych przykładów jest walidacja symulacji numerycznej dotycząca przepływu wody w różnicowo grzonym sześcianie zdefiniowana w rozdziale 2. Dane eksperymentalne dla tej konfiguracji, niezbędne w procesie walidacji, stanowią wzorzec eksperymentalny zdefiniowany w rozdziale 4.6. Dla celów porównawczych wykorzystane zostaną wartości temperatury wzdłuż wybranych profili (por. Tabela 4.5) oraz wartości składowych prędkości zdefiniowane jako wzorzec eksperymentalny. Punktowe pomiary temperatury zamieszczone w Tabeli 4.4 również zostaną porównane z wynikami obliczeń numerycznych.

Biorąc pod uwagę wnioski z przeprowadzonej analizy wrażliwości na potrzeby zaproponowanej metody oceny wiarygodności oraz przeprowadzone badania eksperymentalne zdecydowano się rozszerzyć geometrię obliczeniową wykorzystywaną w rozdziale 2 o dwie ściany pionowe i dwie ściany poziome ograniczające przepływ. Odpowiadają one ścianom aluminiowym i pleksiglasowym wykorzystanym w badaniach laboratoryjnych (por. Rysunek 4.1 b). Przy czym ograniczono się do walidacji symulacji numerycznych dwuwymiarowych, dla geometrii przedstawionej na Rysunku 3.1. Wykonano dwa rodzaje symulacji numerycznych, które polegały na rozwiązywaniu równań (2.17)-(2.18) w centralnym obszarze o kształcie kwadratu, gdzie modelowany jest przepływ oraz rozwiązywaniu równania przewodnictwa cieplnego (2.19) we wprowadzonych ściankach. Pierwszy rodzaj symulacji, nazwanej w dalszym ciągu symulacją A, obejmuje symulację numeryczną w której przyjęto zmienne wartości materiałowe wody w zależności od temperatury (przyjęto zależności kawałkami liniowe na podstawie wartości przedstawionych w Tabeli 4.1). Drugi rodzaj symulacji, oznaczanej dalej symulacją B, polegał na

przyjęciu stałych wartości materiałowych μ , κ , c_p dla wody. Zostały przyjęte wartości materiałowe dla temperatury $T = 0^\circ\text{C}$ (wiersz 1, Tabela 4.1). Zależność gęstości wody od temperatury w obu przypadkach była modelowana przy pomocy formuły (2.50). Własności materiałowe aluminium i pleksiglasu przyjęto jako stałe (nie zależne od temperatury), wykorzystując dane przedstawione w Tabeli 3.1. Na podstawie analizy wrażliwości przeprowadzonej w rozdziale 3 oraz badań eksperymentalnych (por. rozdział 4.5.1) wyznaczono termiczne warunki brzegowe. Przyjęto warunki brzegowe trzeciego rodzaju na zewnętrznych krawędziach ścianek określając wartości strumieni ciepła Q_1 , Q_2 , Q_3 (por rys. 3.1 i formułę 3.7), w których $\alpha_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_2 = 2400 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_3 = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$. Wartość temperatur w komorach bezpośrednio przylegających do ścianek aluminiowych przyjęto $T_L = 10^\circ\text{C}$, $T_P = -2^\circ\text{C}$, a temperaturę otoczenia $T_{\text{ext}} = 26.3^\circ\text{C}$. Warunki brzegowe dla składowych prędkości przyjęto równe zero wzdłuż wszystkich ścian ograniczających obszar w którym rozwiązywano równania przepływu.

Powyższe dwie symulacje przeprowadzono z wykorzystaniem programu Fluent [101], opisanego w rozdziale 2.4.2. Wykonano zarówno symulacje stacjonarne, jak i niestacjonarne na jednorodnie zagęszczanych siatkach, zawierających odpowiednio 40×40 , 80×80 i 160×160 elementów kontrolnych. Oszacowanie dokładności rozwiązania numerycznego wykonano przy pomocy indeksu zbieżności siatki GCI (1.26), który dla tych symulacji był mniejszy niż 1 %.

Trzecim rodzajem symulacji, które zostaną poddane procesowi walidacji z wykorzystaniem danych eksperymentalnych z rozdziału 4.6 są symulacje numeryczne wykonane przy pomocy programu SOLVSTR (por. rozdział 2.2) dla geometrii z pionowymi ściankami izotermicznymi i poziomymi adiabatycznymi. W dalszej części tego podrozdziału symulację tę oznaczono symulacją C. Obliczenia te zostały wykonane w ten sposób, że modelowano przepływ jedynie w geometrii obliczeniowej o kształcie kwadratu, która odpowiada przekrojowi centralnemu przez sześciąt w którym wykonywano badania eksperymentalne. Przyjęto termiczne warunki brzegowe dla ścian pionowych I rodzaju $T_h = 10^\circ\text{C}$ i $T_c = 0^\circ\text{C}$ oraz II rodzaju dla poziomych ścian adiabatycznych. Własności materiałowe wody przyjęto jako stałe, równe wartościom dla temperatury $T = 0^\circ\text{C}$ (Tabela 4.1), za wyjątkiem zależności gęstości od temperatury, gdzie wykorzystano formułę 2.50. Obliczenia wykonano na jednorodnie zagęszczanych siatkach, zawierających odpowiednio 65×65 , 129×129 i 257×257 węzłów. Wartość indeksu zbieżności siatki GCI (1.26) wyliczona na podstawie otrzymanych rozwiązań jest mniejsza niż 2 %, co weryfikuje pozytywnie wykonane obliczenia.

Na rysunku 5.1. przedstawiono kontury temperatury oraz pole prędkości dla obliczeń ze zmiennymi wartościami termo-fizycznymi wody (symulacja A), ze stałymi wartościami termo-fizycznymi (symulacja B) oraz symulację ze stałymi wartościami termo-fizycznymi oraz pionowymi ściankami izotermicznymi i poziomymi ściankami adiabatycznymi (symulacja C) wraz z eksperymentalną wizualizacją pola temperatury (na podstawie 4.12, eksperyment nr 11,12). Jakościowo różnice pomiędzy tymi rezultatami nie są duże, struktura przepływu jest podobna. Jedynie dla obliczeń z izotermicznymi i adiabatycznymi ściankami (symulacja C) można zauważyć, że obszar zawierający temperaturę poniżej 4°C jest większy w porównaniu z pozostałymi symulacjami oraz punkt spotkania się przeciwbieżnych strumieni jest wyżej, na wysokości $2/3 L$, podczas gdy w pozostałych przypadkach jest na wysokości około $1/2$. Na podstawie tylko jakościowego porównania otrzymanych wyników można stwierdzić, że założenia przyjęte w symulacji C nie odpowiadają konfiguracji eksperymentalnej i walidacja tej symulacji nie będzie pozytywna. Niemniej jednak analiza błędów pola temperatur potwierdza wnioski z rozdziału 3, że punktowe pomiary temperatury nie są wystarczające do tego by rozstrzygnąć, która z symulacji A czy B lepiej odwzorowuje konfigurację eksperymentalną. Do określenia różnic w strukturze przepływu niezbędne są ilościowe pomiary pól prędkości i temperatury wykonane w całym przekroju.

Porównanie punktowych pomiarów temperatury z wynikami trzech symulacji numerycznych A,B,C zostało przedstawione w Tabeli 5.1. Dokonano procedury walidacji w sposób

opisany w rozdziale 5.1. z wykorzystaniem pomiarów punktowych temperatury dla zdefiniowanego wzorca eksperymentalnego w punktach $T_7, T_{10}, T_{12}, T_{15}, T_{16}$ (por. rysunek 3.1)

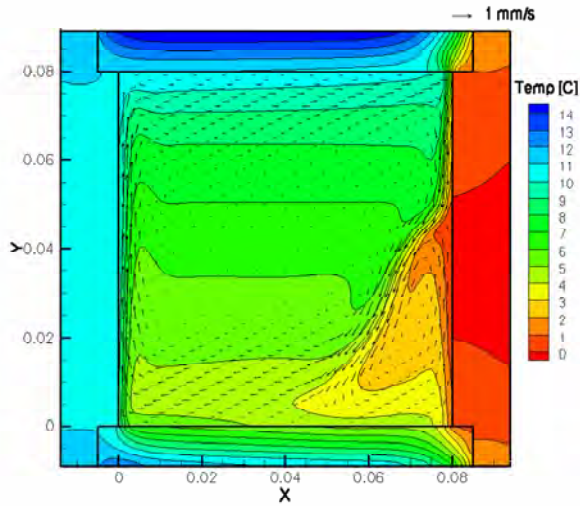
	Punkt	Wartość eksp. D	Niepewność pomiaru U_D (4.3)	Wartość Sym. S	Niepewność Obliczeń U_{SN} (1.16)	$ E = D-S $ (1.7)	metryka walidacji U_V (1.10)
Symulacja Numeryczna A	T_7	10.8	0.3	10.75	0.02	0.05	0.31
	T_{10}	10.6	0.3	10.48	0.02	0.12	0.31
	T_{12}	10.0	0.3	10.09	0.02	0.09	0.31
	T_{15}	15.4	0.9	14.79	0.02	0.61	0.9
	T_{16}	0.0	0.2	-0.2	0.02	0.2	0.31
Symulacja Numeryczna B	T_7	10.8	0.3	11.02	0.02	0.22	0.31
	T_{10}	10.6	0.3	10.71	0.02	0.11	0.31
	T_{12}	10.0	0.3	10.29	0.02	0.29	0.31
	T_{15}	15.4	0.6	14.50	0.02	0.9	0.9
	T_{16}	0.0	0.3	-0.22	0.02	0.22	0.31
Symulacja Numeryczna C	T_7	10.8	0.9	9.17	0.03	1.63	0.31
	T_{10}	10.6	0.3	8.41	0.03	2.19	0.32

Tabela 5.1. Walidacja sym. num. A,B,C w oparciu o punktowe pomiary temperatury

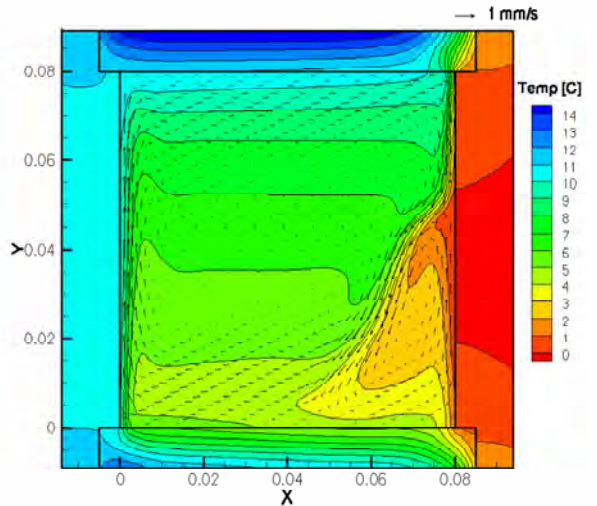
Na podstawie powyższej analizy można stwierdzić, że walidacja oparta jedynie o punktowe pomiary temperatury została osiągnięta na poziomie niepewności określonym przez wartość metryki walidacyjnej równymi odpowiednio 0.31 i 0.9 (patrz Tabela 5.1) tylko dla symulacji A i B. Potwierdziła się hipoteza dotycząca konieczności uwzględnienia ścianek w modelu przy walidacji eksperymentalnej. Dalsza walidacja zostanie tylko przeprowadzona dla symulacji A i B, a symulacja C na podstawie powyższych porównań nie będzie dalej rozważana, gdyż nie są spełnione nawet termiczne warunki brzegowe dla konfiguracji eksperymentalnej. Wszystkie zamieszczone powyżej w Tabeli 5.1. dane zostały podane w °C. Potwierdzona została również hipoteza, że mając do dyspozycji jedynie pomiary punktowe nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć, która z symulacji A czy B jest bardziej wiarygodna w oparciu tylko o te dane eksperymentalne.

Rysunek 5.2 przedstawia kontury norm prędkości dla trzech rozważanych przypadków (a)-(c) wraz z wynikiem pomiarów eksperymentalnych (d). Przy pomocy tych konturów można jedynie dostrzec drobne różnice struktury przepływu pomiędzy symulacjami A i B, a mianowicie to, że wir znajdujący się w prawym dolnym rogu jest bardziej spłaszczony w górnej części dla obliczeń ze zmiennymi wartościami termo-fizycznymi (a) w porównaniu z prawie okrągłym, elipsoidalnym kształtem tego wiru w górnej części w przypadku stałych wartości termo-fizycznych (b). Ponadto widoczna jest również stwierdzona wcześniej rozbieżność przy pomocy przeprowadzonej procedury walidacyjnej na podstawie punktowych pomiarów temperatury (Tabela 5.1) pomiędzy obliczeniami uwzględniającymi rozwiązywanie równania przewodnictwa cieplnego w ściankach (a)-(b), a obliczeniami, w których ścianki te są adiabatyczne lub izotermiczne (c). Wir w prawym dolnym rogu dla symulacji C jest zdecydowanie większy i ma inny kształt, jest bardziej okrągły. Miejsce spotkania się dwóch przeciwnych strumieni w pobliżu prawej ścianki dla symulacji A i B znajduje się na wysokości 0.5L, natomiast dla symulacji C na wysokości 2/3L.

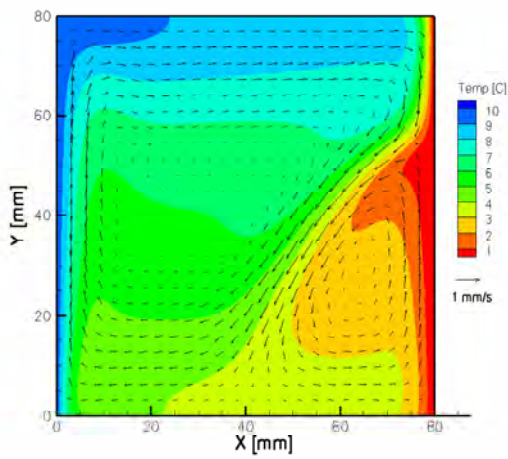
Istotnym faktem jest to, iż walidacji wykonanych symulacji numerycznych nie można oprzeć jedynie na porównaniu maksymalnych wartości składowych prędkości dla otrzymanych pól prędkości, gdyż wartości te dla wszystkich trzech przypadków są podobne (Rysunek 5.2). Zauważalna jest różnica w wartościach prędkości dla obszaru wzdłuż górnej ścianki pomiędzy wynikami symulacji numerycznej (a) i (b), a wynikami eksperymentalnymi (d). Jednakże można to wytłumaczyć tym, że w tym obszarze błąd pomiaru eksperymentalnego był duży (wysoka wartość dyspersji wartości średniej prędkości – por. Rysunek 4.14 a), a uśrednianie pól prędkości wykazujące duże fluktuacje powoduje wygładzenie i zaniżenie wartości tego pola.



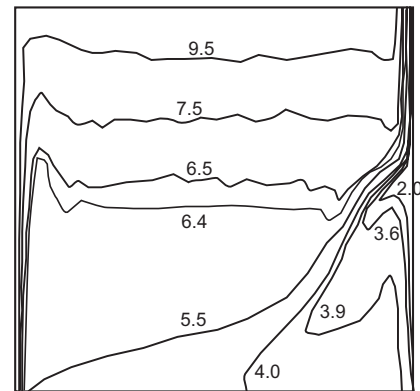
a) Symulacja A



b) Symulacja B

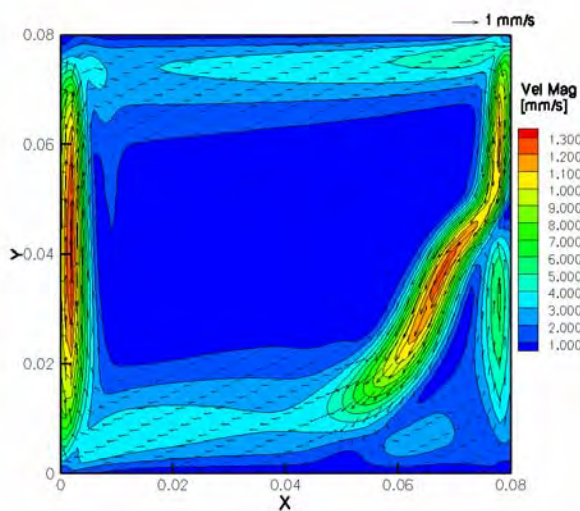


c) Symulacja C

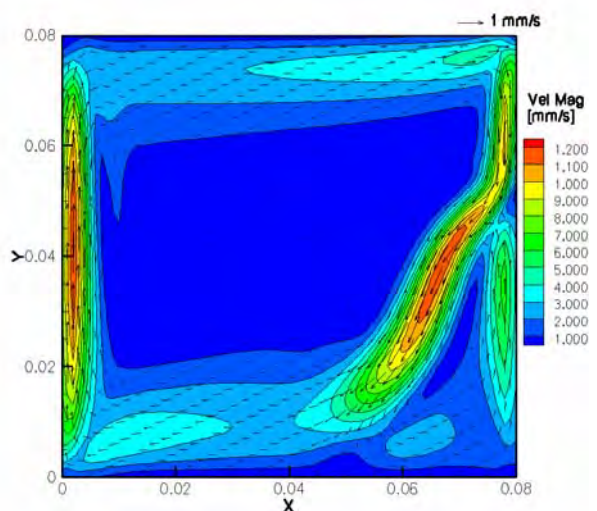


d) Eksperyment (por 4.6., izotermy w °C)

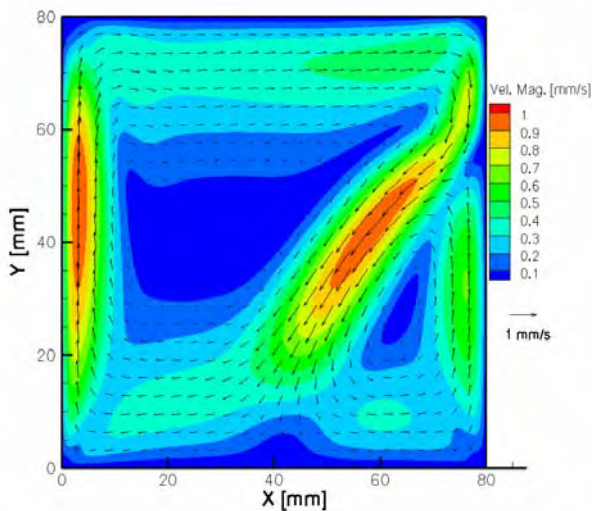
Rys 5.1. Porównanie pól temperatury otrzymanych na podstawie sym. num. (a) – (c) z pomiarami eksperymentalnymi otrzymanymi metodą PIT (d)



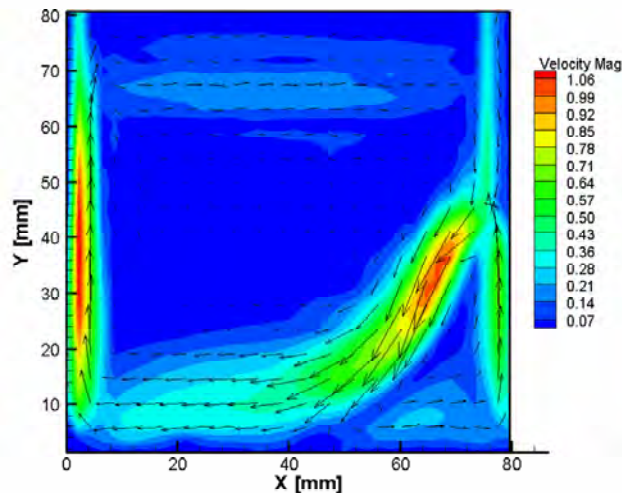
a) Symulacja A



b) Symulacja B



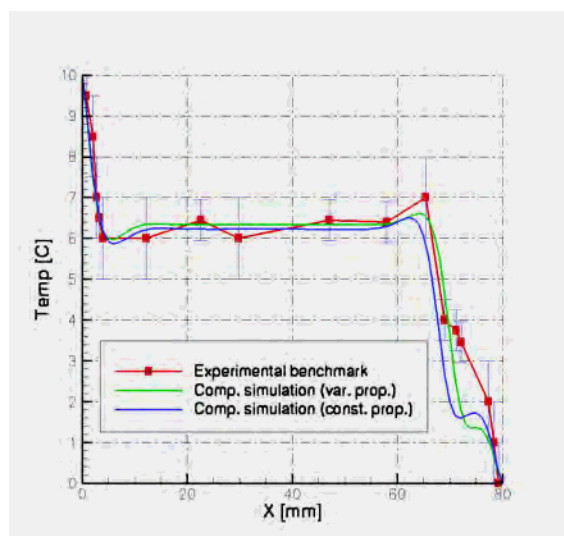
c) Symulacja C



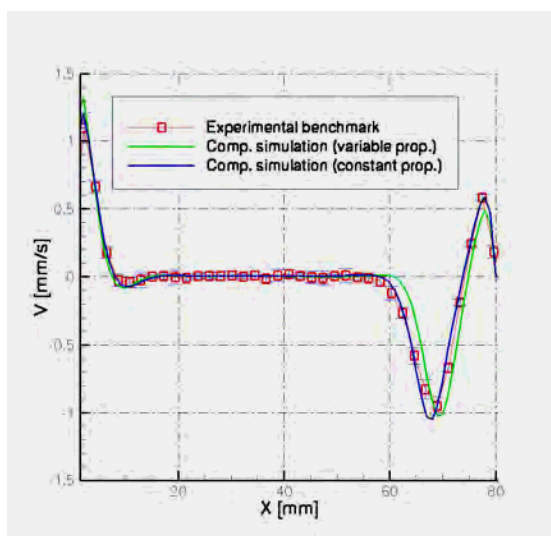
d) Eksperyment (por 4.6, nr 12)

Rys 5.2. Porównanie pól prędkości i konturów normy prędkości otrzymanych na podstawie sym. num. (a) – (c) z pomiarami eksperymentalnymi otrzymanymi metodą PIV (d)

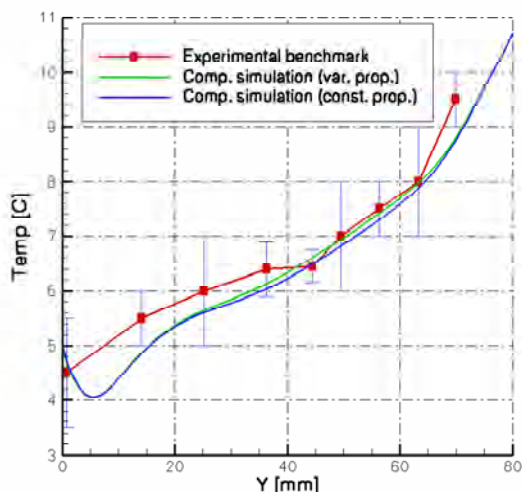
Porównywanie całych pól temperatur czy prędkości nie jest łatwe, a dodatkowo bardzo żmudne. Z tego względu wzorzec eksperymentalny został podany w postaci wartości temperatury i składowych prędkości wzdłuż wybranych profili ($Y=0.5L$, $X=0.5L$, $X=0.9L$), i porównanie otrzymanych wyników zostało wykonane dla tych danych. Na rysunku 5.3 przedstawiono porównanie wyników eksperymentalnych z wynikami symulacji numerycznej wykonanej ze stałymi wartościami termo-fizycznymi wody (kolor niebieski – symulacja B) oraz ze zmiennymi wartościami termo-fizycznymi (kolor zielony – symulacja A). Błąd porównania E oraz metryka walidacyjna U_V o której mowa w rozdziale 5.1., została wyliczona w dalszej części tego podrozdziału w oparciu o te dane. Profile temperatur oraz składowych prędkości wzdłuż prostych $Y = 0.5L$ oraz $X = 0.5L$ niewiele się różnią, można jedynie zauważyć drobne rozbieżności w pobliżu prawej ścianki. Jednakże profil pionowej prędkości wzdłuż prostej $X = 0.9L$ wyliczony przy założonych zmiennych wartościach termo-fizycznych wody (symulacja A) jest bliższy wartościom otrzymanym eksperymentalnie. W obszarze w którym dochodzi do spotkania się dwóch przeciwbieżnych strumieni płynu widoczne jest przesunięcie zarówno profilu temperatury, jak i pionowej składowej prędkości (rysunek 5.3 e i f).



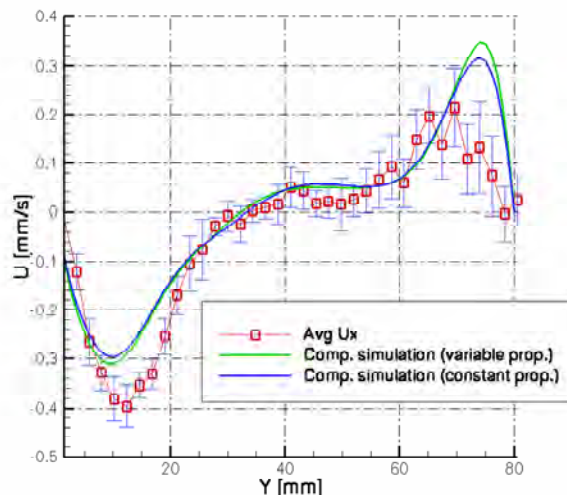
a) Temperatura wzdłuż $Y = 0.5L$



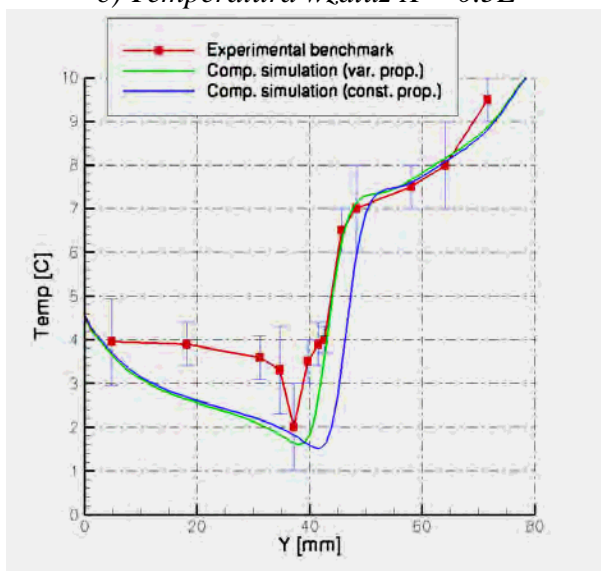
b) Skł. pionowa prędkości wzdłuż $Y = 0.5L$



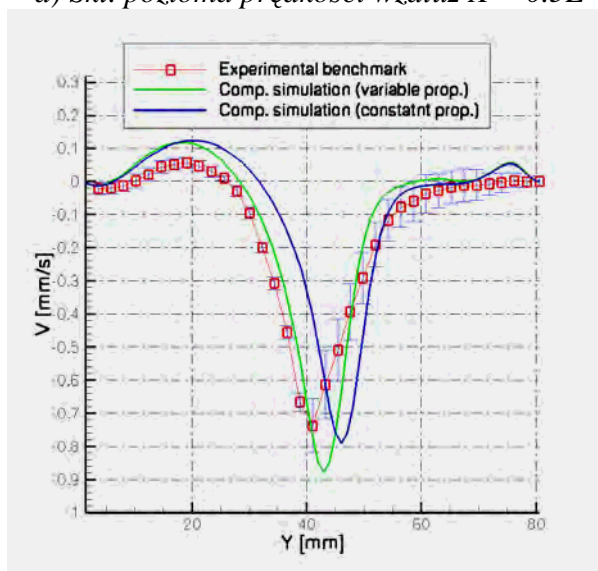
c) Temperatura wzdłuż $X = 0.5L$



d) Skł. pozioma prędkości wzdłuż $X = 0.5L$



e) Temperatura wzdłuż $X = 0.9L$



f) Skł. pionowa prędkości wzdłuż $X = 0.9L$

Rys. 5.3. Porównanie profili temperatury a), c), e) oraz profili składowych prędkości b), d), f) wzdłuż prostych $X = 0.5$ (a,b), $Y = 0.5$ (c,d) oraz $Y=0.9L$ (e,f).

Na podstawie powyższego porównania można jednoznacznie stwierdzić że symulacja A jest bliższa danym eksperymentalnym niż symulacja B. Formalne potwierdzenie tego faktu zostało wykazane poprzez wyliczenie wartości błędu porównania $|E|$ oraz wartości metryki walidacyjnej (Tabela 5.2 i 5.3). Do tego celu wykorzystano dane zaprezentowanych na rysunku 5.3, czyli wartości temperatury i składowych prędkości dla wybranych profili. Wartości porównywano tylko w punktach, w których są dostępne wartości z pomiarów eksperymentalnych (Tabela D.2 w Dodatku).

Eksperyment			Symulacja Numeryczna A				Symulacja Numeryczna B			
X	D	U_D	S	U_{SN}	$ E $	U_V	S	U_{SN}	$ E $	U_V
0.8	9.50	0.5	9.25	0.060	0.25	0.504	8.93	0.060	0.57	0.504
2.0	8.50	1.0	7.55	0.050	0.95	1.001	7.65	0.040	0.85	1.001
2.8	7.00	1.0	6.66	0.040	0.34	1.001	6.97	0.040	0.03	1.001
3.2	6.50	0.5	6.40	0.030	0.10	0.501	6.72	0.030	0.22	0.501
3.9	6.00	1.0	6.17	0.020	0.17	1.000	6.18	0.020	0.18	1.000
12.2	6.00	1.0	6.34	0.001	0.34	1.000	6.21	0.001	0.21	1.000

22.6	6.45	0.5	6.33	0.002	0.12	0.500	6.22	0.002	0.23	0.500
29.8	6.00	1.0	6.33	0.002	0.33	1.000	6.22	0.002	0.22	1.000
47.0	6.45	0.5	6.34	0.002	0.11	0.500	6.22	0.002	0.23	0.500
58.0	6.40	0.5	6.35	0.001	0.05	0.500	6.29	0.001	0.11	0.500
65.4	7.00	1.0	6.59	0.007	0.41	1.000	6.06	0.006	0.94	1.000
69.0	4.00	0.5	4.66	0.040	0.66	0.502	2.68	0.040	1.32	0.502
71.2	3.75	0.5	2.57	0.060	1.18	0.504	1.66	0.060	2.09	0.504
72.1	3.45	0.5	1.81	0.050	1.64	0.502	1.60	0.050	1.85	0.502
77.3	2.00	1.0	1.15	0.001	0.85	1.000	1.37	0.001	0.63	1.000
78.4	1.00	1.0	0.82	0.002	0.18	1.000	0.96	0.002	0.04	1.000
79.2	0.00	1.0	0.35	0.010	0.35	1.000	0.41	0.010	0.41	1.000

a) Pionowa składowa prędkości wzdłuż $Y = 0.5L$

Eksperyment			Symulacja Numeryczna A				Symulacja Numeryczna B			
Y	D	U_D	S	U_{SN}	$ E $	U_V	S	U_{SN}	$ E $	U_V
0.8	4.50	1.0	4.61	0.02	0.11	1.000	4.64	0.02	0.14	1.000
14.0	5.50	0.5	5.01	0.01	0.49	0.500	4.84	0.01	0.66	0.500
25.1	6.00	1.0	5.63	0.01	0.37	1.000	5.59	0.01	0.41	1.000
36.2	6.40	0.5	6.12	0.01	0.28	0.500	6.02	0.01	0.38	0.500
44.4	6.45	0.5	6.57	0.01	0.12	0.500	6.46	0.01	0.01	0.500
49.4	7.00	1.0	6.90	0.01	0.10	1.000	6.78	0.01	0.22	1.000
56.3	7.50	0.5	7.40	0.01	0.10	0.500	7.27	0.01	0.23	0.500
63.3	8.00	1.0	7.95	0.02	0.05	1.000	7.85	0.02	0.15	1.000
69.8	9.50	0.5	8.65	0.02	0.85	0.500	8.60	0.02	0.90	0.500

b) Pozioma składowa prędkości wzdłuż $X = 0.5L$

Eksperyment			Symulacja Numeryczna A				Symulacja Numeryczna B			
Y	D	U_D	S	U_{SN}	$ E $	U_V	S	U_{SN}	$ E $	U_V
4.9	3.95	1.0	3.63	0.1	0.32	1.005	3.69	0.1	0.26	1.005
18.3	3.90	0.5	2.64	0.1	1.26	0.510	2.69	0.1	1.21	0.510
31.2	3.60	0.5	2.07	0.1	1.53	0.510	2.18	0.1	1.42	0.510
34.8	3.30	1.0	1.88	0.1	1.42	1.005	1.97	0.1	1.33	1.005
37.2	2.00	1.0	1.65	0.2	0.35	1.020	1.84	0.2	0.16	1.020
39.7	3.30	0.5	1.81	0.2	1.49	0.539	1.59	0.2	1.71	0.539
41.6	3.90	0.5	2.97	0.2	0.93	0.539	1.52	0.2	2.38	0.539
42.6	4.00	0.5	3.89	0.2	0.11	0.539	1.65	0.2	2.35	0.539
45.7	6.50	0.5	6.39	0.2	0.11	0.539	3.64	0.2	2.86	0.539
48.3	7.00	1.0	7.08	0.1	0.08	1.005	5.65	0.1	1.35	1.005
58.1	7.50	0.5	7.65	0.1	0.15	0.510	7.59	0.1	0.09	0.510
64.1	8.00	1.0	8.14	0.1	0.14	1.005	8.06	0.2	0.06	1.020
71.7	9.50	0.5	8.90	0.1	0.60	0.510	8.86	0.1	0.64	0.510

c) Pozioma składowa prędkości wzdłuż $X = 0.9L$

Tabela 5.2. Walidacja symulacji numerycznych A,B w oparciu o profile temperatury. Wyróżniono obszary nie spełniające warunku walidacji ($|E| > U_V$)

Eksperyment			Symulacja Numeryczna A				Symulacja Numeryczna B			
X	D	U_D	S	U_{SN}	E	U_V	S	U_{SN}	E	U_V
2.1	1.10	0.11	1.18	0.010	0.08	0.110	1.20	0.010	0.10	0.110
4.3	0.66	0.05	0.72	0.010	0.06	0.051	0.74	0.010	0.08	0.051
6.4	0.18	0.04	0.19	0.010	0.01	0.041	0.25	0.005	0.07	0.040
8.6	-0.02	0.04	-0.07	0.010	0.05	0.041	-0.05	0.005	0.03	0.040
10.7	-0.03	0.04	-0.06	0.010	0.03	0.041	-0.06	0.001	0.03	0.040
12.9	-0.02	0.05	-0.03	0.010	0.01	0.051	-0.03	0.010	0.01	0.051
15.0	0.00	0.01	0.00	0.010	0.00	0.014	-0.01	0.010	0.01	0.014
19.3	0.00	0.05	0.01	0.010	0.01	0.051	0.01	0.010	0.01	0.051
21.5	-0.01	0.02	0.00	0.001	0.01	0.020	0.01	0.001	0.02	0.020
23.7	0.01	0.02	0.00	0.010	0.01	0.022	0.01	0.010	0.00	0.022
28.0	0.00	0.03	0.00	0.001	0.00	0.030	0.00	0.005	0.00	0.030
30.1	0.01	0.03	0.01	0.010	0.00	0.032	0.01	0.010	0.00	0.032
32.3	0.00	0.02	0.01	0.010	0.01	0.022	0.01	0.010	0.01	0.022
36.6	-0.01	0.03	0.00	0.010	0.01	0.032	0.00	0.010	0.01	0.032
40.9	0.02	0.03	0.00	0.010	0.02	0.032	0.00	0.010	0.02	0.032
43.0	0.01	0.02	0.01	0.010	0.00	0.022	0.00	0.010	0.01	0.022
47.3	-0.01	0.05	0.00	0.001	0.01	0.050	0.01	0.001	0.02	0.050
53.8	0.00	0.02	0.00	0.010	0.00	0.022	0.01	0.010	0.01	0.022
56.0	-0.01	0.03	0.01	0.010	0.02	0.032	0.01	0.010	0.02	0.032
58.1	-0.03	0.04	0.01	0.010	0.04	0.041	0.00	0.010	0.03	0.041
60.3	-0.12	0.05	0.00	0.010	0.12	0.051	-0.04	0.010	0.08	0.051
62.4	-0.26	0.04	-0.10	0.010	0.16	0.041	-0.18	0.010	0.08	0.041
64.6	-0.58	0.06	-0.30	0.010	0.28	0.061	-0.69	0.010	0.11	0.061
66.7	-0.82	0.07	-0.72	0.010	0.10	0.071	-1.02	0.010	0.20	0.071
68.9	-0.95	0.06	-1.02	0.010	0.07	0.061	-0.95	0.010	0.00	0.061
71.0	-0.67	0.03	-0.88	0.020	0.21	0.036	-0.54	0.020	0.13	0.036
73.2	-0.19	0.03	-0.42	0.020	0.23	0.036	-0.14	0.020	0.05	0.036
75.3	0.24	0.02	0.23	0.010	0.01	0.022	0.21	0.010	0.03	0.022
77.5	0.58	0.02	0.48	0.010	0.10	0.022	0.58	0.010	0.00	0.022
79.6	0.18	0.05	0.40	0.010	0.22	0.051	0.46	0.010	0.28	0.051

a) Pionowa składowa prędkości wzdłuż prostej $Y = 0.5L$.

Oznaczenia:

X – współrzędna pozioma

D – pionowa składowa prędkości na podstawie eksperymentu nr 12 (Tabela D2)

U_D – niepewność pomiaru obliczona na podstawie (4.3)

S - wartość pionowej składowej prędkości wyliczona w symulacji A lub B

U_{SN} – niepewność symulacji numerycznej (1.16)

E – błąd porównania zdefiniowany jako $D - S$

U_V – metryka walidacji (1.10)

Eksperyment			Symulacja Numeryczna A				Symulacja Numeryczna B			
Y	D	U_D	S	U_{SN}	E	U_V	S	U_{SN}	E	U_V
1.4	-0.01	0.01	-0.01	0.010	0.00	0.014	-0.06	0.01	0.05	0.014
3.6	-0.12	0.04	-0.18	0.010	0.06	0.041	-0.20	0.01	0.08	0.041
5.8	-0.26	0.05	-0.27	0.005	0.01	0.050	-0.25	0.01	0.01	0.050
8.0	-0.33	0.03	-0.30	0.005	0.03	0.030	-0.28	0.01	0.05	0.030
10.2	-0.38	0.04	-0.31	0.005	0.07	0.040	-0.29	0.01	0.09	0.040
12.4	-0.39	0.04	-0.29	0.005	0.10	0.040	-0.28	0.01	0.11	0.040
14.6	-0.35	0.03	-0.26	0.005	0.09	0.030	-0.24	0.01	0.11	0.030
16.8	-0.33	0.03	-0.22	0.005	0.11	0.030	-0.19	0.01	0.14	0.030
19.0	-0.25	0.04	-0.16	0.100	0.09	0.108	-0.16	0.10	0.09	0.108
21.2	-0.17	0.04	-0.13	0.100	0.04	0.108	-0.12	0.10	0.05	0.108
23.4	-0.10	0.06	-0.10	0.100	0.00	0.117	-0.09	0.10	0.01	0.117
27.8	-0.03	0.02	-0.04	0.005	0.01	0.021	-0.05	0.01	0.02	0.021
30.0	-0.01	0.03	-0.02	0.005	0.01	0.030	-0.03	0.01	0.02	0.030
34.4	0.00	0.02	0.01	0.005	0.01	0.021	0.00	0.01	0.00	0.021
38.8	0.02	0.04	0.04	0.005	0.02	0.040	0.04	0.01	0.02	0.040
41.0	0.05	0.04	0.05	0.005	0.00	0.040	0.05	0.01	0.00	0.040
45.4	0.02	0.03	0.05	0.005	0.03	0.030	0.05	0.01	0.03	0.030
49.8	0.02	0.05	0.05	0.005	0.03	0.050	0.05	0.01	0.03	0.050
54.2	0.04	0.05	0.05	0.005	0.01	0.050	0.05	0.01	0.01	0.050
56.4	0.06	0.06	0.05	0.005	0.01	0.060	0.05	0.01	0.01	0.060
58.6	0.09	0.07	0.06	0.005	0.03	0.070	0.06	0.01	0.03	0.070
60.8	0.06	0.05	0.07	0.005	0.01	0.050	0.07	0.01	0.01	0.050
63.0	0.15	0.06	0.09	0.005	0.06	0.060	0.10	0.01	0.05	0.060
65.2	0.19	0.06	0.13	0.100	0.06	0.117	0.13	0.10	0.06	0.117
69.6	0.21	0.08	0.24	0.100	0.03	0.128	0.24	0.10	0.03	0.128
71.8	0.11	0.07	0.30	0.200	0.19	0.212	0.29	0.20	0.18	0.212
74.0	0.13	0.09	0.34	0.200	0.21	0.219	0.31	0.20	0.18	0.219
76.2	0.07	0.08	0.32	0.200	0.25	0.215	0.29	0.20	0.22	0.215

b) Pozioma składowa prędkości wzdłuż $X = 0.5L$.

Oznaczenia:

Y – współrzędna pionowa

D – pozioma składowa prędkości na podstawie eksperymentu nr 12 (Tabela D2)

U_D – niepewność pomiaru obliczona na podstawie (4.3)

S – wartość poziomej składowej prędkości wyliczona w symulacji A lub B

U_{SN} – niepewność symulacji numerycznej (1.16)

E – błąd porównania zdefiniowany jako $D - S$

U_V – metryka walidacji (1.10)

Eksperyment			Symulacja Numeryczna A				Symulacja Numeryczna B			
Y	D	U _D	S	U _{SN}	E	U _V	S	U _{SN}	E	U _V
1.4	0.00	0.01	-0.01	0.01	0.01	0.014	0.00	0.01	0.00	0.014
3.6	-0.02	0.02	-0.01	0.02	0.01	0.028	-0.01	0.02	0.01	0.028
5.8	-0.02	0.02	0.00	0.02	0.02	0.028	0.00	0.02	0.02	0.028
8.0	-0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.028	0.02	0.02	0.03	0.028
10.2	0.00	0.02	0.05	0.02	0.05	0.028	0.04	0.02	0.04	0.028
12.4	0.02	0.02	0.07	0.02	0.05	0.028	0.07	0.02	0.05	0.028
14.6	0.04	0.02	0.10	0.02	0.06	0.028	0.10	0.02	0.06	0.028
16.8	0.05	0.02	0.15	0.02	0.10	0.028	0.11	0.02	0.06	0.028
19.0	0.06	0.01	0.11	0.02	0.05	0.022	0.12	0.02	0.06	0.022
21.2	0.05	0.02	0.10	0.02	0.05	0.028	0.12	0.02	0.07	0.028
23.4	0.03	0.02	0.09	0.03	0.06	0.036	0.11	0.03	0.08	0.036
25.6	0.01	0.01	0.06	0.03	0.05	0.032	0.10	0.03	0.09	0.032
27.8	-0.03	0.02	0.02	0.04	0.05	0.045	0.06	0.04	0.09	0.045
30.0	-0.09	0.02	-0.05	0.04	0.04	0.045	0.03	0.04	0.12	0.045
32.2	-0.19	0.02	-0.11	0.04	0.08	0.045	-0.01	0.04	0.18	0.045
34.4	-0.31	0.02	-0.20	0.04	0.11	0.045	-0.06	0.04	0.25	0.045
36.6	-0.45	0.02	-0.31	0.04	0.14	0.045	-0.14	0.04	0.31	0.045
38.8	-0.66	0.03	-0.46	0.04	0.20	0.050	-0.26	0.04	0.40	0.050
41.0	-0.74	0.08	-0.76	0.05	0.02	0.094	-0.40	0.05	0.34	0.094
43.2	-0.61	0.10	-0.88	0.05	0.27	0.112	-0.59	0.05	0.02	0.112
45.4	-0.51	0.09	-0.76	0.05	0.25	0.103	-0.76	0.05	0.25	0.103
47.6	-0.39	0.09	-0.41	0.05	0.02	0.103	-0.68	0.05	0.29	0.103
49.8	-0.29	0.08	-0.17	0.04	0.12	0.089	-0.44	0.04	0.15	0.089
52.0	-0.19	0.06	-0.08	0.04	0.11	0.072	-0.23	0.04	0.04	0.072
54.2	-0.12	0.06	-0.04	0.03	0.08	0.067	-0.10	0.03	0.02	0.067
56.4	-0.08	0.06	-0.02	0.03	0.06	0.067	-0.04	0.03	0.04	0.067
58.6	-0.06	0.06	0.00	0.03	0.06	0.067	-0.02	0.03	0.04	0.067
60.8	-0.04	0.06	0.01	0.02	0.05	0.063	-0.01	0.02	0.03	0.063
63.0	-0.03	0.05	0.01	0.02	0.04	0.054	-0.01	0.02	0.02	0.054
65.2	-0.02	0.05	0.00	0.02	0.02	0.054	-0.01	0.02	0.01	0.054
67.4	-0.01	0.05	0.00	0.02	0.01	0.054	-0.01	0.02	0.00	0.054
71.8	-0.01	0.03	0.02	0.02	0.03	0.036	0.01	0.02	0.02	0.036
74.0	0.00	0.03	0.04	0.02	0.04	0.036	0.05	0.02	0.05	0.036
78.4	0.00	0.02	0.03	0.02	0.03	0.028	0.03	0.02	0.03	0.028

c) Pionowa składowa prędkości wzdłuż $X = 0.9 L$. Wyróżniono obszary nie spełniające warunku walidacji ($|E| > U_V$)

Oznaczenia tak jak dla punktu (b)

Tabela 5.3. Walidacja symulacji numerycznych A i B w oparciu o profile prędkości

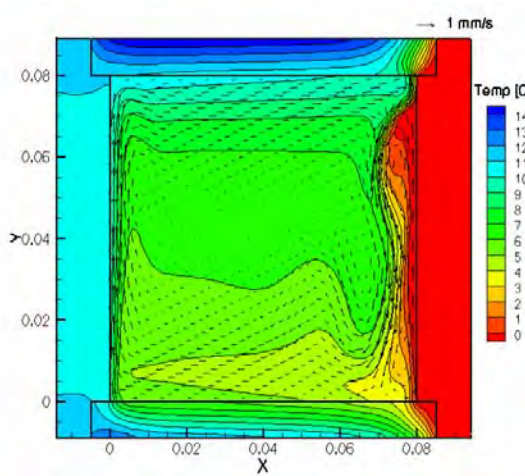
Przedstawione w Tabelach 5.2. i 5.3. porównanie wartości normy błędu porównania $|E|$ i metryki walidacyjnej U_V dla symulacji A i B jest wyznaczeniem ilościowym błędu wynikającym z przyjętych założeń w tych symulacjach. Tym samym został osiągnięty cel walidacji, którym jest oszacowanie niepewności modelu przy pomocy danych eksperymentalnych oraz, o ile to możliwe estymacji znaku i wartości błędu modelowania. Obie symulacje wykazują pewne rozbieżności w porównaniu z danymi eksperymentalnymi (por rys. 5.3), które wyróżniono w Tabelach 5.2. i 5.3. W tych przypadkach w myśl kryterium 5.1 walidacja nie jest pomyślna. Wyznaczono tym samym wartość błędu modelowania (błędu wynikającego z przyjętych założeń przy modelowaniu numerycznym), co jest celem proponowanej procedury walidacji obliczeń.

Zaprezentowane w Tabelach 5.2 i 5.3 zestawienie może posłużyć do oceny, która z symulacji jest bliższa wynikom eksperymentalnym, czyli jest bardziej wiarygodna. Można zauważyć, że niezgodność występuje częściej dla symulacji B. Ponadto bezwzględne wartości błędu porównania $|E|$ są większe dla symulacji B niż dla symulacji A. Jest to widocznie szczególnie dla profilu temperatury wzdłuż $X = 0.9L$, gdzie błąd ten wynosi nawet do $2.86\text{ }^{\circ}\text{C}$ (maksymalna wartość), natomiast dla symulacji A jedynie $1.53\text{ }^{\circ}\text{C}$. Większą rozbieżność dla symulacji B w porównaniu z symulacją A otrzymano również dla pionowej składowej prędkości wzdłuż tego samego profilu ($X = 0.9L$). Maksymalna wartość błędu porównania dla symulacji B wynosi w tym przypadku 0.40 mm/s , natomiast dla symulacji A 0.27 mm/s . Poprzez takie porównywanie można określić, który model lepiej odwzorowuje konfigurację eksperymentalną. Na podstawie porównania zawartego w Tabelach 5.2 i 5.3 można stwierdzić, iż model uwzględniający zmienność właściwości termo-fizycznych wody (symulacja A) jest bardziej wiarygodny w porównaniu z modelem, w którym wartości te są przyjęte jako stałe (symulacja B).

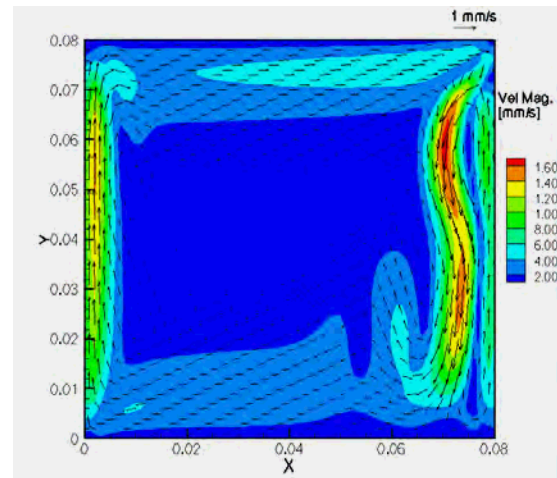
Szczegółowego wyjaśnienia wymaga również sprawdzenie czy strumienie ciepła Q_1 , Q_2 , Q_3 zostały poprawnie wyznaczone. Strumienie te są istotne z tego względu, iż stanowią warunki brzegowe dla powyższych symulacji numerycznych (A i B), a metoda oceny wiarygodności zaproponowana w rozdziale wykazała dużą wrażliwość konfiguracji na zmiany wartości tych strumieni. W tym celu wykonano szereg obliczeń nie zmieniając wartości współczynników przejmowania ciepła, a jedynie zmieniając wartość T_L lub T_P . Symulacje te zostały przeprowadzone w tym celu aby sprawdzić czy struktura przepływu jest nadal poprawnie odtwarzana gdy zmieniane jest temperatura jednej ze ścianek. Obliczenia te stanowią analogię do przeprowadzonych eksperymentów nr 1-21. Zmieniając jedynie temperaturę T_P kolejno na równą -2°C , -1°C , 0°C , 1°C , 2°C otrzymano struktury przepływu podobne do tych uzyskanych eksperymentalnie.

Dla najniższych wartości temperatury T_P ($-2\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$) wir w prawej części obszaru obliczeniowego miał kształt podłużny wzdłuż prawej ścianki, całkowicie odizolowując centralny wir od tej ścianki. Dla temperatury $T_P = -1\text{ }^{\circ}\text{C}$ kształt tego wiru jest bardzo charakterystyczny z przewężeniem na wysokości około $0.3L$. Wraz ze zmniejszaniem się różnicy temperatur wir ten zmieniał swój kształt od podłużnego do trójkątnego, podobnie jak zaobserwowano to eksperymentalnie (por. Rys. 4.6.). Podwyższenie temperatury T_L zmieniło bilans cieplny wewnątrz obszaru obliczeniowego na tyle, iż prawy wir zniknął zupełnie (rys. 5.4), odpowiada to wynikom uzyskanym eksperymentalnie (porównaj rysunek 5.2 i 4.7). Zgodność otrzymanych wyników symulacji numerycznych z pomiarami eksperymentalnymi potwierdzają również maksymalne wartości prędkości, których wartości zmieniają się w podobny sposób przy kolejnych zmianach konfiguracji eksperymentalnych. Na podstawie przedstawionego porównania, w którym nie zmieniano wartości przyjętych strumieni ciepła Q_1 , Q_2 i Q_3 , a jedynie wartości temperatur T_L i T_P oraz ze względu na jakościową i ilościową zgodność otrzymanych rezultatów można potwierdzić poprawność przyjętych w obliczeniach wartości współczynników przejmowania ciepła. Porównując symulacje numeryczne (Rys 5.4.) z wynikami eksperymentalnymi zaprezentowanymi w rozdziale 4.5.1, a mianowicie rysunkiem 4.6 oraz polami prędkości zaprezentowanymi na rysunku 4.7. Uzyskana bardzo dobra zgodność była możliwa dzięki przeprowadzonej analizie wrażliwości, odpowiedniemu wyborowi istotnych parametrów dla tej konfiguracji i poprawnemu zdefiniowaniu

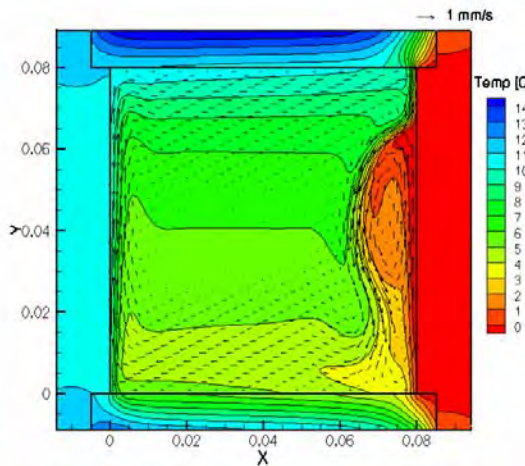
problemu numerycznego, w szczególności określeniu dokładnych termicznych warunków brzegowych.



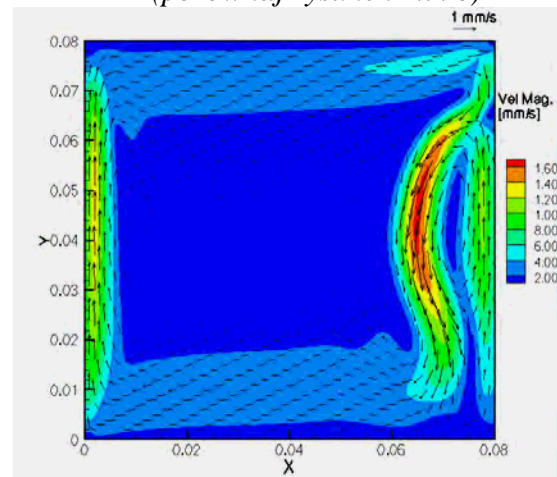
a) Pole temperatury $T_L = 10\text{ °C}$ $T_P = -2\text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.6. c)



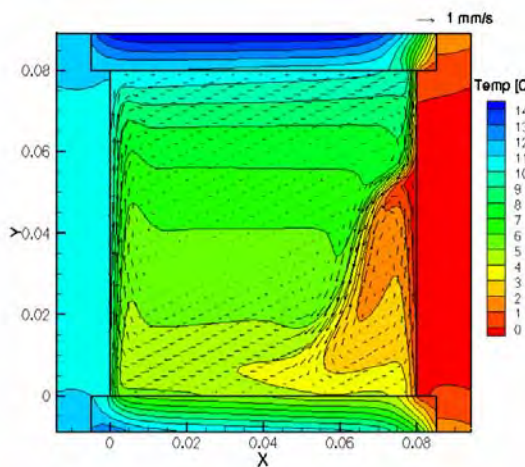
b) Pole prędkości $T_L = 10\text{ °C}$ $T_P = -2\text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.7. c)



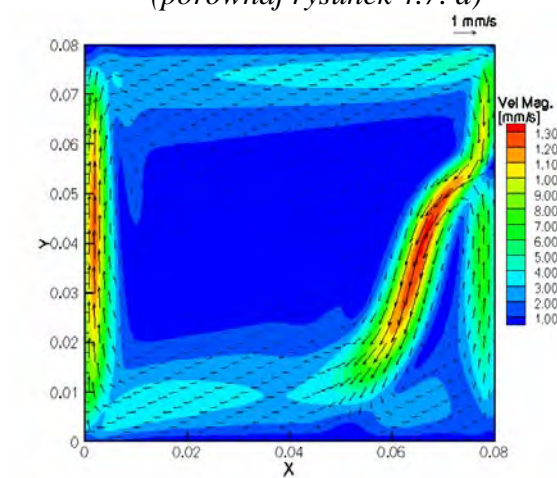
c) Pole temperatury $T_L = 10\text{ °C}$ $T_P = -1\text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.6. d)



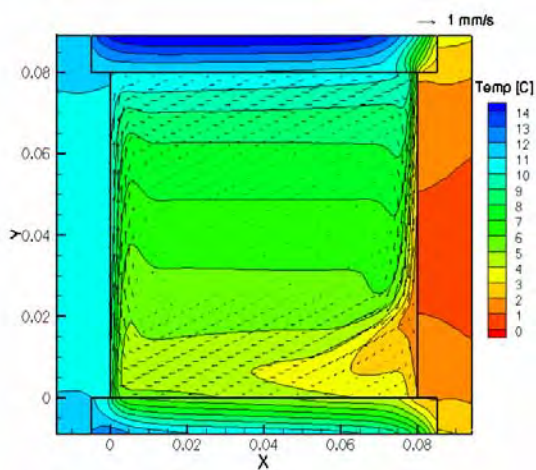
d) Pole prędkości $T_L = 10\text{ °C}$ $T_P = -1\text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.7. d)



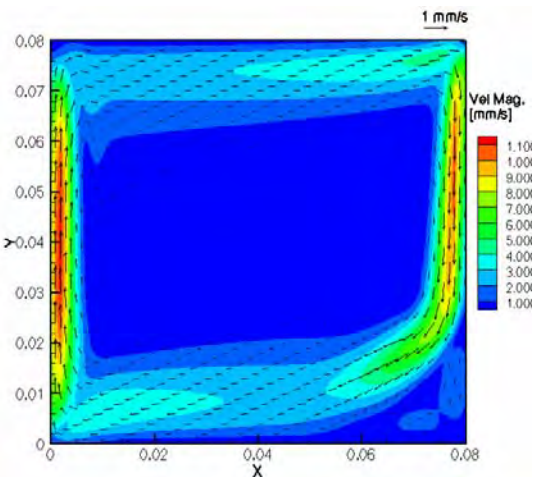
e) Pole temperatury $T_L = 10\text{ °C}$ $T_P = 1\text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.6. e)



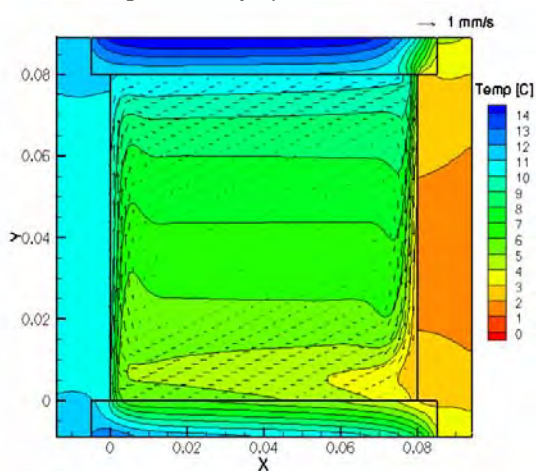
f) Pole prędkości $T_L = 10\text{ °C}$ $T_P = 1\text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.7. e)



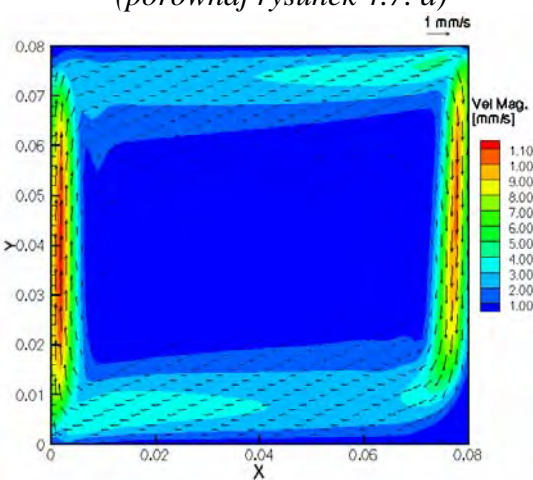
g) Pole temperatury $T_L = 10 \text{ °C}$ $T_P = 2 \text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.6. a)



h) Pole prędkości $T_L = 10 \text{ °C}$ $T_P = 2 \text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.7. a)



i) Pole temperatury $T_L = 12 \text{ °C}$ $T_P = 2 \text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.6. b)



j) Pole prędkości $T_L = 12 \text{ °C}$ $T_P = 2 \text{ °C}$
(porównaj rysunek 4.7. b)

Rysunek 5.4. Pola temperatur i pola prędkości na podstawie symulacji numerycznych wykonanych do eksperymentów nr 1,4,7,14,18. Wpływ zmiany temperatury ścianek na strukturę przepływu (por. eksperymenty na rysunkach 4.6. i 4.7.)

5.2.2 Wyższe liczby Rayleigha

Kolejne symulacje numeryczne dla których wykonano proces walidacji dotyczą również przepływu w różnicowo grzonym sześciacie, jednakże dla liczb Rayleigha rzędu 10^7 , czyli o rząd wielkości większych. Konfiguracje te nie zawierają opisanej w poprzednim rozdziale struktury składającej się z dwóch wirów wywołanej anomalną zależnością gęstości. W procesie walidacji wykorzystano dane eksperymentalne przedstawione w rozdziale 4.5.2., które obejmują konfiguracje dla $Ra = 2.9 \cdot 10^7$, $3.4 \cdot 10^7$, $9.1 \cdot 10^7$, $1.3 \cdot 10^8$ oraz przedstawione w rozdziale 4.7 dla $Ra = 3 \cdot 10^7$ i $1.5 \cdot 10^8$.

Ze względu na to, iż zawarta w rozdziale 4.7 analiza zerwania stabilności przepływu wykazała, że dla analizowanych wartości liczb Rayleigha można zaobserwować niestacjonarny charakter przepływu (por. rys. 4.28) zaszła konieczność przeprowadzenia symulacji numerycznych niestacjonarnych. Wskazały na to duże błędy symulacji stacjonarnych i brak odpowiedniego

poziomu zbieżności. Błędy te zostały zaobserwowane w procesie weryfikacji zarówno w rezultatach obliczeń wykonanych programem SOLVSTR (por. rozdział 2), jaki i przy użyciu komercyjnego pakietu FLUENT[101].

Poniżej walidacji zostały poddane niestacjonarne rozwiązania będące wynikiem obliczeń wykonanych przy pomocy programu SOLVSTR (por. rozdz. 2). W obliczeniach tych ograniczonego się do modelowania przepływu płaskiego w kwadratowej domenie obliczeniowej z poziomymi ścianami izotermicznymi i pionowymi ścianami adiabatycznymi. Wykorzystano skale bezwymiarowe (2.31), które są odpowiednie dla tego reżimu przepływu. Wykonano trzy rodzaje obliczeń dla $Ra = 3 \cdot 10^7$ $Pr = 9.53$, $Ra = 1.3 \cdot 10^8$ $Pr = 7.01$, $Ra = 1.7 \cdot 10^8$ $Pr = 7.01$ na jednorodnie zagęszczanych siatkach o następujących wymiarach: 65x65, 129x129, 257x257. Obliczenia te zostały zwalidowane w oparciu o wyniki eksperymentów nr 25-27 i 51, 32-35 i 52, 40-44 i 53.

Ponadto wykonano również niestacjonarne obliczenia z wykorzystaniem pakietu Fluent [101], uwzględniając w geometrii obliczeniowej pionowe ściany aluminiowe i poziome ściany Pleksiglasowe, tak jak przedstawiono to na rysunku 3.1. Termiczne warunki brzegowe zdefiniowano w oparciu o pomocnicze pomiary eksperymentalne opisane w rozdziale 4.5.2. w celu wyznaczenie współczynników przejmowania ciepła. Dla strumieni ciepła Q_1 i Q_2 przyjęto współczynniki przejmowania ciepła $\alpha_1 = 10$ W/m²K i $\alpha_2 = 2000$ W/m²K. Strumień Q_3 rozdzielono na dwa strumienie Q_{3P} i Q_{3L} określające odpowiednio strumienie przy prawej i lewej ścianie (por. rysunek 3.1. oraz formułę 3.7). Współczynniki przejmowania ciepła dla tak zdefiniowanego strumienia ciepła wynoszą $\alpha_{P3} = 1800$ W/m²K, $\alpha_{L3} = 500$ W/m²K. Przeprowadzono symulacje niestacjonarne, z wykorzystaniem schematu drugiego rzędu zarówno do dyskretyzacji czasowej jak i przestrzennej. Obliczenia wykonano na jednorodnie zagęszczanych siatkach o wymiarach 80x80 i 160 x 160.

W celu zademonstrowania zaproponowanej metody oceny wiarygodności w rozdziale 3, przeprowadzono analizę wrażliwości ze względu na parametry wejściowe przyjęte w tych obliczeniach. Następnie wyznaczono istotne parametry dla badanych konfiguracji oraz wyliczono wrażliwość wyników (tj. zdefiniowanych funkcjonalów) na zmianę parametrów wejściowych.

Przyjęto następujące parametry wejściowe ze względu na które przeprowadzono analizę wrażliwości:

Symbol	Opis	Wartość początkowa	δ zakres zmian	Typ parametru
$P_1 = T_H$	Temperatura cieczy utrzymywanej w stałej temperaturze T_H w celu ogrzania lewej ściany	293 K	1 K	Warunek brzegowy
$P_2 = T_C$	Temperatura cieczy utrzymywanej w stałej temperaturze T_C w celu oziębienia prawej ściany	273 K	1 K	Warunek brzegowy
$P_3 = T_{E1} = T_{E2}$	Temperatura otoczenia	298 K	2 K	Warunek brzegowy
$P_4 = \alpha_1$	Współczynnik przejmowania ciepła (plexi/powietrze)	10 W/m ² K	9 W/m ² K	Warunek brzegowy
$P_5 = \alpha_2$	Współczynnik przejmowania ciepła (aluminium/glikol)	2000 W/m ² K	100 W/m ² K	Warunek brzegowy
$P_6 = \alpha_{P3}$	Współczynnik przejmowania ciepła (aluminium/powietrze)	1800 W/m ² K	100 W/m ² K	Warunek brzegowy
$P_7 = \alpha_{L3}$	Współczynnik przejmowania ciepła (aluminium/powietrze)	500 W/m ² K	100 W/m ² K	Warunek brzegowy
$P_8 = T_{in}$	Temperatura początkowa	283 K	1 K	Warunek początkowy
$P_9 = v_{in}$	Pole prędkości początkowe	0 m/s	0.001 m/s	Warunek początkowy

$P_{10} = \rho_0$	Gęstość wody w temperaturze referencyjnej	999.7 kg/m ³	10 %	Własność materiałowa
$P_{11} = \mu$	Lepkość dynamiczna wody	0.001304 kg/ms	10 %	Własność materiałowa
$P_{12} = \kappa$	Wsp. przewodnictwa cieplnego wody	0.58 W/mK	10 %	Własność materiałowa
$P_{13} = c_p$	Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu	4192 J/kgK	10 %	Własność materiałowa
$P_{14} = \beta$	Współczynnik rozszerzalności cieplnej	0.00009 1/K	10 %	Własność materiałowa

Tabela 5.4. Zestawienie parametrów wejściowych ze względu na które przeprowadzono analizę wrażliwości oraz zakresu zmian δ (por. rozdział 3).

Powyższe parametry określają warunki brzegowe, warunki początkowe i własności materiałowe. Liczba parametrów jest mniejsza w porównaniu z tą przedstawioną w rozdziale 3, ponieważ zdecydowano się nie badać wrażliwości ze względu na parametry materiałowe aluminium i pleksiglasu. Interwały zmienności parametrów wejściowych δ zostały przyjęto w podobny sposób jak zrobiono to w rozdziale 3. Dla parametrów określających warunki brzegowe przyjęto wartości, które można zrealizować eksperymentalnie, a dla parametrów określających własności materiałowe szacunkową wartość zmienności w badanym przedziale temperatur.

Kolejnym krokiem w zaproponowanej metodzie jest definicja funkcjonałów, których wrażliwość jest badana na zmiany wyżej wymienionych parametrów. Postać funkcjonałów została podyktowana wykonanymi pomiarami eksperymentalnymi. Przyjęto następujące funkcjonały:

$$\|F\|_1 = T(-0.004, 0.04) = T_{12} \quad (5.2)$$

$$\|F\|_2 = T(0.084, 0.04) = T_{16} \quad (5.3)$$

$$\|F\|_3 = T(0.02, 0.08) = T_7 \quad (5.4)$$

$$\|F\|_4 = T(0.06, 0.08) = T_{10} \quad (5.5)$$

$$\|F\|_5 = T(0.06, 0.088) = T_{15} \quad (5.6)$$

$$\|F\|_6 = \min\{U(x, y) : 0 \leq x, y \leq 0.08\} \quad (5.7)$$

$$\|F\|_7 = \max\{U(x, y) : 0 \leq x, y \leq 0.08\} \quad (5.8)$$

$$\|F\|_8 = \min\{V(x, y) : 0 \leq x, y \leq 0.08\} \quad (5.9)$$

$$\|F\|_9 = \max\{V(x, y) : 0 \leq x, y \leq 0.08\} \quad (5.10)$$

$$\|F\|_{10} = V|_{P_1} \quad (5.11)$$

$$\|F\|_{11} = V|_{P_2} \quad (5.12)$$

$$\|F\|_{12} = U|_{P_3} \quad (5.13)$$

$$\|F\|_{13} = V|_{P_3} \quad (5.14)$$

$$\|F\|_{14} = U|_{P_4} \quad (5.15)$$

$$\|F\|_{15} = U|_{P_5} \quad (5.16)$$

Wartość funkcjonałów (5.2)-(5.6) można zwalidować w oparciu o punktowe pomiary temperatury (w nawiasach podano współrzędne punktów), natomiast wartości funkcjonałów (5.7)-(5.16) w oparciu o pomiary metodą PIV (w tym również pomiary przedstawione w rozdziale 4.7).

Współrzędne punktów P1-P6 wykorzystanych w definicji funkcjonałów (5.11)-(5.16) zostały podane w rozdziale 4.7.

Zgodnie z zaproponowaną w rozdziale 3 metodą następnym krokiem jest wyliczenie względnych zmian wartości funkcjonałów (3.2)-(3.3) przy zmianie parametrów wejściowych zestawionych w Tabeli 5.4., oraz również bezwzględnej miary wrażliwości zdefiniowanej formułą (3.5). Na podstawie tych wartości, zestawionych w Tabeli 5.5., wyłoniono istotne parametry dla badanej konfiguracji.

Na podstawie przeprowadzonej analizy wrażliwości można stwierdzić, że istotnymi parametrami dla badanej konfiguracji są: temperatura T_H ciepłej ścianki (parametr P1), temperatura T_C zimnej ścianki (parametr P2) oraz współczynnik przejmowania ciepła α_1 występujący w strumieniu ciepła Q_1 (parametr P4).

Pozostałe współczynniki przejmowania ciepła ($\alpha_2, \alpha_{3L}, \alpha_{3P}$) wykazują dużo mniejszą wrażliwość na zmiany parametrów dochodzącą maksymalnie do 4%, przeciwnie niż w poprzedniej konfiguracji. Z tego względu można uznać, że konfiguracja nie jest wrażliwa na te współczynniki. Istotne z punktu widzenia możliwości przeprowadzenia eksperymentu w takiej konfiguracji jest to, iż badana konfiguracja jest mało wrażliwa na zmiany temperatury otoczenia (parametr 3). Odnotowano jedynie ponad 3 % wrażliwość na zmianę tego parametru dla temperatury na zewnątrz ścianki (T_{15}) i wewnątrz zimnej ścianki (T_{16}), czyli dopuszczalna w eksperymencie zmiana tego parametru nie wpływa na przepływ. To predysponuje tę konfigurację do przeprowadzenia walidacji eksperymentalnej.

Wyliczono istotną wrażliwość ze względu na parametry określające własności materiałowe (gęstość, lepkość, przewodność cieplną, ciepło właściwe i współczynnik rozszerzalności cieplnej), którą odnotowano tylko na podstawie pomiarów prędkości, podobnie jak w analizie przeprowadzonej w rozdziale 3. Jednakże wartości bezwzględnej miary wrażliwości ε_d dla parametrów określających własności materiałowe dla niniejszej konfiguracji są mniejsze od tej badanej w rozdziale 3, zawierają się w przedziale od 3 % do 8 %.

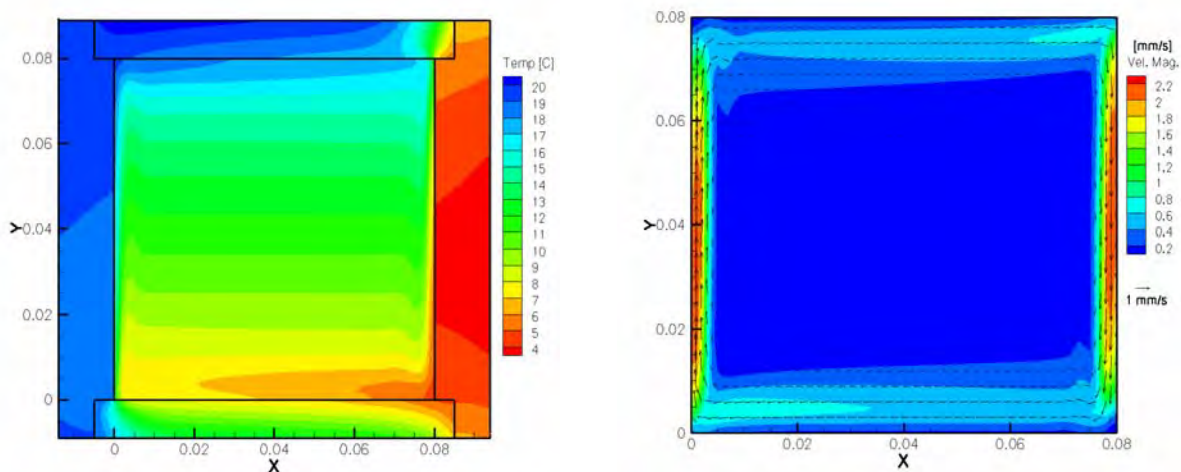
Na podstawie przytoczonych analizy, można stwierdzić, iż konfiguracja zdefiniowana w niniejszym rozdziale jest lepiej uwiarygodniona w porównaniu z tą zdefiniowaną w rozdziale 3, ponieważ wykazuje wrażliwość na mniejszą ilość parametrów oraz wartości bezwzględnej miary wrażliwości są mniejsze. Maksymalna wartość tej miary została odnotowana dla parametru określającego wartość temperatury T_H i wynosi 21 %, podczas gdy wrażliwość na ten sam parametr w poprzedniej konfiguracji wyniosła 46 %. Poza tym wartości tej miary dla parametrów określających termiczne warunki brzegowe jest mniejsza niż 8 % dla niniejszej konfiguracji, podczas gdy wartości te mieściły się w przedziale między 10 % a 20 % dla konfiguracji opisanej w rozdziale 3.

Na rysunku 5.5 przedstawiono pole temperatury i pole prędkości dla rozważanej konfiguracji dla której przeprowadzono analizę wrażliwości. Struktura przepływu jest prosta, wzdłuż pionowych ścianek odbywa się większość ruchu, gdzie wytworzyły się widoczne warstwy przyścienne o szerokości około 4 mm, wewnątrz których ciecz płynie z prędkością nawet do 2.26 mm/s.

Przeprowadzona analiza wrażliwości i wnioski uzyskane na jej podstawie umożliwiają przyjęcie uproszczenia modelu i wykonanie symulacji z pominięciem rozwiązywania zagadnienia przewodnictwa ciepła w ściankach pionowych i poziomych, co umożliwia przeprowadzenie procesu walidacji również dla wyników obliczeń wykonanych przy pomocy programu SOLVSTR, nie zawierającego modułu transportu ciepła w ściankach.

Zmienna	S	$\varepsilon_d^+(P1)$	$\varepsilon_d^-(P1)$	$\varepsilon_d^+(P2)$	$\varepsilon_d^-(P2)$	$\varepsilon_d^+(P3)$	$\varepsilon_d^-(P3)$	$\varepsilon_d^+(P4)$	$\varepsilon_d^-(P4)$	$\varepsilon_d^+(P5)$	$\varepsilon_d^-(P5)$	$\varepsilon_d^+(P6)$	$\varepsilon_d^-(P6)$	$\varepsilon_d^+(P7)$	$\varepsilon_d^-(P7)$
T ₁₂	18,92	0,05	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
T ₁₆	3,83	0,02	0,02	0,21	0,21	0,05	0,05	0,00	0,01	0,04	0,04	0,02	0,03	0,00	0,00
T ₇	18,39	0,04	0,04	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
T ₁₀	17,64	0,04	0,04	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
T ₁₅	19,45	0,03	0,03	0,01	0,01	0,04	0,04	0,07	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
U _{min}	-0,73	0,01	0,01	0,01	0,03	0,01	0,00	0,03	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00
U _{max}	0,68	0,03	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00
V _{min}	-2,22	0,03	0,03	0,03	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
V _{max}	2,22	0,03	0,03	0,02	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
V _{p1}	-1,99	0,01	0,04	0,04	0,01	0,02	0,02	0,02	0,04	0,02	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02
V _{p2}	-1,77	0,00	0,02	0,02	0,01	0,00	0,00	0,01	0,03	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
U _{p3}	-0,24	0,00	0,04	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
V _{p3}	-1,29	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,00	0,04	0,05	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
U _{p4}	-0,40	0,00	0,03	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,03	0,03	0,03
U _{p5}	-0,42	0,02	0,02	0,02	0,00	0,00	0,00	0,02	0,02	0,00	0,00	0,02	0,00	0,02	0,02
Zmienna	S	$\varepsilon_d^+(P8)$	$\varepsilon_d^-(P8)$	$\varepsilon_d^+(P9)$	$\varepsilon_d^-(P9)$	$\varepsilon_d^+(P10)$	$\varepsilon_d^-(P10)$	$\varepsilon_d^+(P11)$	$\varepsilon_d^-(P11)$	$\varepsilon_d^+(P12)$	$\varepsilon_d^-(P12)$	$\varepsilon_d^+(P13)$	$\varepsilon_d^-(P13)$	$\varepsilon_d^+(P14)$	$\varepsilon_d^-(P14)$
T ₁₂	18,92	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
T ₁₆	3,83	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,02	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
T ₇	18,39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
T ₁₀	17,64	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
T ₁₅	19,45	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
U _{min}	-0,73	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,04	0,01	0,03	0,04	0,04	0,04	0,05	0,04	0,03
U _{max}	0,68	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,03	0,01	0,03	0,04	0,04	0,04	0,06	0,04	0,03
V _{min}	-2,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,05	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
V _{max}	2,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,05	0,05	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05
V _{p1}	-1,99	0,02	0,02	0,01	0,01	0,07	0,03	0,05	0,01	0,04	0,09	0,09	0,06	0,01	0,05
V _{p2}	-1,77	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,03	0,03	0,03	0,06	0,06	0,07	0,07	0,03	0,03
U _{p3}	-0,24	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
V _{p3}	-1,29	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,02	0,04	0,05	0,05	0,05	0,06	0,08	0,04	0,04
U _{p4}	-0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,05	0,03	0,02	0,05	0,08	0,08	0,07	0,00	0,03
U _{p5}	-0,42	0,02	0,02	0,01	0,01	0,07	0,05	0,02	0,00	0,05	0,10	0,10	0,07	0,00	0,02

Tabela 5.5. Analiza wrażliwości ze względu na parametry wejściowe dla konwekcji naturalnej wody ($Ra = 3 \cdot 10^7$). Bezwzględna miara wrażliwości $\varepsilon_d^+, \varepsilon_d^-$ (3.5) obliczona dla parametrów z Tabeli 5.4. (wyróżniono wartości przekraczające 3 %)



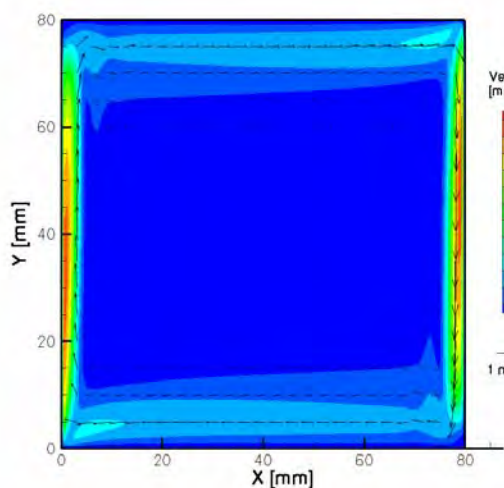
a) Pole temperatury

b) Pole prędkości

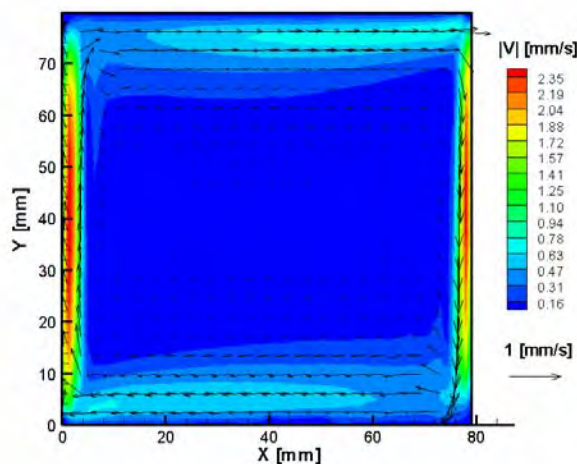
Rysunek 5.5. Wynik symulacji numerycznej otrzymany przy pomocy programu Fluent dla konwekcji naturalnej wody dla liczby Rayleigha $Ra = 3 \cdot 10^7$.

Na rysunku 5.6 zestawiono pola temperatury i pole prędkości będące rezultatem programu SOLVSTR z wynikami pomiarów eksperymentalnych. Ze względu na to, iż symulacje te są niestacjonarne przedstawione pola są uśrednionymi polami w czasie $t = 10$ s. Otrzymane średnie wartości prędkości są podobne do tych uzyskanych eksperymentalnie, maksymalna wartość pionowej składowej prędkości wynosiła 2.40 mm/s co koresponduje ze średnią wartością zanotowaną eksperymentalnie 2.60 mm/s. Główną różnicą pomiędzy eksperymentem, a obliczeniami numerycznymi jest brak perturbacji zanotowanych przy konfiguracji eksperymentalnej opisanych w rozdziale 4.7. W przypadku pominięcia tych wartości chwilowych skoków prędkości, które odpowiadają zauważonym perturbacjom (por rys. 4.28 a-b), wartość średnia składowej poziomej skupia się wokół wartości -2.40 mm/s, co odpowiada wartości wyznaczonej numerycznie. Można również zauważyć pewną różnicę w grubości warstwy przyściennej, w której odbywa się większość ruchu (por rysunek 5.6 e i f). W symulacji numerycznej jest ona węższa, wynosi około 4 mm, podczas gdy w eksperymencie warstwa ta wynosi około 7 mm. Jednakże ta rozbieżność jest spowodowana przyjętymi w symulacji numerycznej warunkami brzegowymi (program SOLVSTR). Ścianki boczne w symulacji były izotermiczne toteż w jej wyniku otrzymano grubość warstwy zbliżoną do wartości teoretycznej, którą można oszacować na podstawie analizy wymiarowej [76]. Teoretyczna wartość grubości tej warstwy jest proporcjonalna do $Pr^{0.5} \cdot L \cdot Ra^{-0.25}$, i dla niniejszej konfiguracji wynosi 3.5 mm.

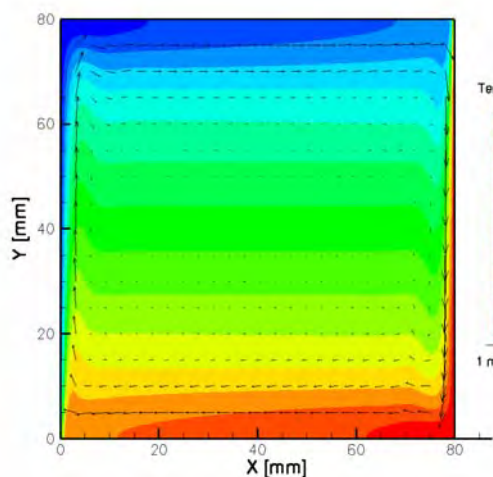
W Tabeli 5.6 zestawiono wyniki przeprowadzonej walidacji zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 5.1. Porównano punktowe wartości temperatury i prędkości oraz ekstremalne wartości prędkości w całym badanym przekroju. W Tabeli 5.6.a zostały zwalidowane wyniki otrzymane programem SOLVSTR, natomiast w Tabeli 5.6.b programem Fluent. W wyniku procedury walidacyjnej oba rozwiązania można uznać jako wiarygodne w świetle danych eksperymentalnych. Błąd porównania, kolumna E dla większości porównywanych wartości dla obydwu programów jest mniejszy od metryki walidacyjnej U_V . Rozbieżności opisane powyżej, które znajdują odzwierciedlenie głównie w wartościach prędkości w Tabeli 5.6, są niewielkie. Dodatkowo dyspersja danych eksperymentalnych przy pomiarach prędkości spowodowana fluktuacjami ułatwia spełnienie warunku (5.1). Warunek ten nie jest spełniony jedynie dla wartości poziomej składowej prędkości w punktach P3, P4, P5 dla obu symulacji numerycznych. Można to tłumaczyć brakiem występowania fluktuacji prędkości w tych symulacjach, odpowiedzialnych za większe wartości średnie składowych prędkości obliczonych na podstawie pomiarów eksperymentalnych.



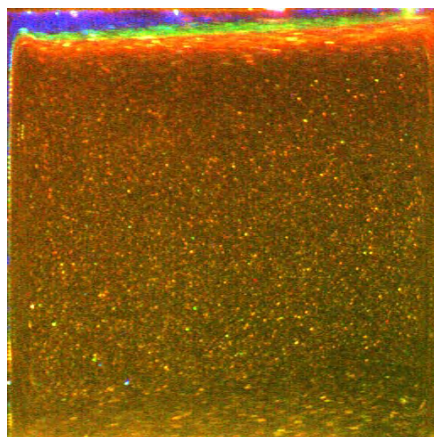
a) Pole prędkości (SOLVSTR)



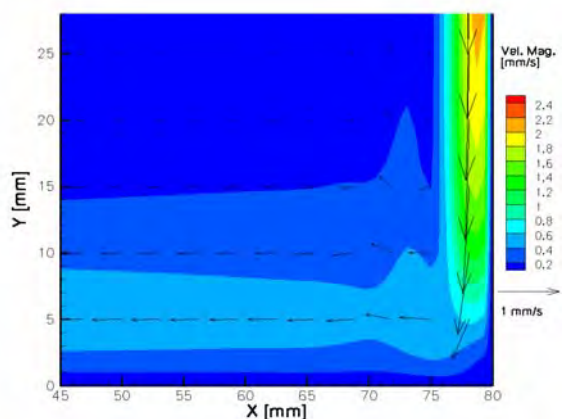
b) Pole prędkości (eksperyment nr 27)



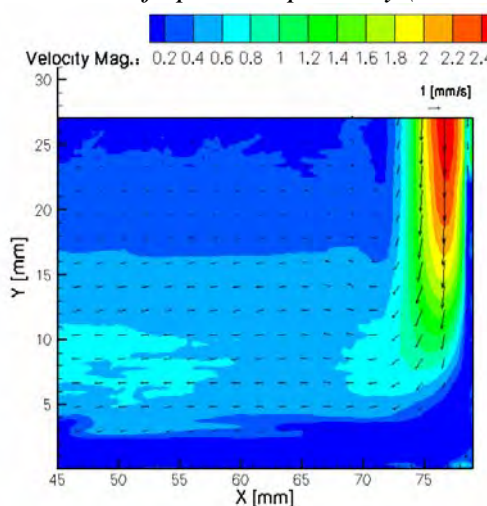
c) Pole temperatury (SOLVSTR)



d) Wizualizacja pola temperatury (eks. nr 25)



e) Pole prędkości – fragment (SOLVSTR)



f) Pole prędkości – fragment (eks. nr 51)

Rysunek 5.6. Porównanie wyników symulacji numerycznej uzyskanych programem SOLVSTR z pomiarami eksperymentalnymi (rozdział 4) $Ra = 3 \cdot 10^7$

Eksperyment			Symulacja Numeryczna (SOLVSTR)			
Zmienna	D	U_D	S	U_{SN}	E	U_V
T_7	18,22	0,48	17,99	0,07	0,23	0,49
T_{10}	17,76	0,63	17,17	0,07	0,59	0,63
U_{min}	-0,66	0,24	-0,65	0,01	0,01	0,24
U_{max}	0,69	0,24	0,65	0,01	0,04	0,24
V_{min}	-2,60	0,24	-2,40	0,09	0,20	0,26
V_{max}	2,42	0,24	2,40	0,09	0,02	0,26
V_{P1}	-2,48	0,58	-1,99	0,04	0,49	0,58
V_{P2}	-1,85	0,42	-1,71	0,04	0,14	0,42
U_{P3}	-0,24	0,09	-0,22	0,01	0,02	0,09
V_{P3}	-0,75	0,21	-1,05	0,02	0,30	0,21
U_{P4}	-0,58	0,14	-0,39	0,01	0,19	0,14
U_{P5}	-0,60	0,16	-0,42	0,02	0,18	0,16

a) Program SOLVSTR

Eksperyment			Symulacja Numeryczna (Fluent)			
Zmienna	D	U_D	S	U_{SN}	E	U_V
T_{12}	18,67	0,38	18,92	0,02	0,25	0,38
T_{16}	4,05	0,38	3,83	0,02	0,22	0,38
T_7	18,22	0,48	18,39	0,02	0,17	0,48
T_{10}	17,76	0,63	17,64	0,02	0,12	0,63
T_{15}	20,17	0,47	19,45	0,02	0,72	0,47
U_{min}	-0,66	0,24	-0,73	0,01	0,07	0,24
U_{max}	0,69	0,24	0,68	0,01	0,01	0,24
V_{min}	-2,6	0,24	-2,22	0,05	0,38	0,25
V_{max}	2,42	0,24	2,22	0,05	0,20	0,25
V_{P1}	-2,48	0,58	-1,99	0,01	0,49	0,58
V_{P2}	-1,85	0,42	-1,77	0,02	0,08	0,42
U_{P3}	-0,24	0,09	-0,29	0,02	0,05	0,09
V_{P3}	-0,75	0,21	-1,29	0,01	0,54	0,21
U_{P4}	-0,58	0,14	-0,4	0,01	0,18	0,14
U_{P5}	-0,6	0,16	-0,42	0,01	0,18	0,16

b) Program Fluent

Oznaczenia:

Zmienna – definiuje funkcjonal dla którego dokonujemy porównanie (T oznacza pomiar punktowy temperatura U, V pomiary składowych prędkości)

D – wartość pomiaru eksperymentalnego dla zmiennej na podstawie eksperymentu nr 27 i 50)

U_D – niepewność pomiaru obliczona na podstawie (4.3)

S - wartość zmiennej uzyskana w symulacji numerycznej

U_{SN} – niepewność symulacji numerycznej (1.16)

E – błąd porównania zdefiniowany jako $D - S$

U_V – metryka walidacji (1.10)

Tabela 5.6. Walidacja symulacji numerycznych przepływu konwekcji naturalnej dla $Ra = 3 \cdot 10^7$.
Wyróżniono obszary nie spełniające warunku walidacji ($|E| > U_V$)

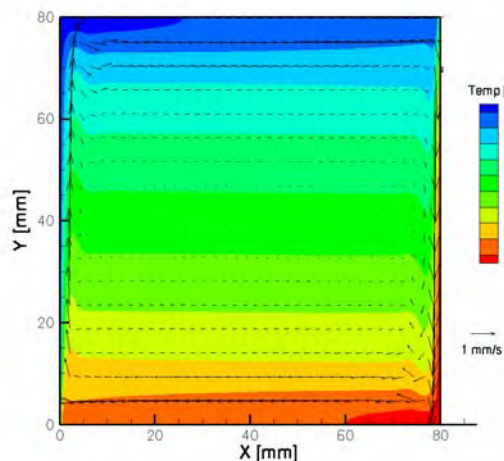
Wykonano również obliczenia będące odpowiednikiem eksperymentów 31-34 oraz 52 przy pomocy programów SOLVSTR i Fluent. Dla tej konfiguracji liczba Rayleigha wynosi $Ra = 1.3 \cdot 10^8$. Termiczne warunki brzegowe przyjęte do obliczeń zostały tak dobrane, aby móc dokonać walidacji w oparciu w/w eksperymenty. Temperatura glikolu termostatowanego przy lewej ścianie wynosiła $T_L = 30^\circ\text{C}$, natomiast przy prawej ścianie $T_P = 0^\circ\text{C}$. Eksperymentalnie oszacowano, podobnie jak poprzednio, strumienie ciepła Q_1 , Q_2 , Q_{3P} , i Q_{3L} , współczynniki przejmowania ciepła dla tych strumieni ciepła wynosiły odpowiednio $\alpha_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_2 = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_{3P} = 500 \text{ W/m}^2\text{K}$ $\alpha_{4P} = 2200 \text{ W/m}^2\text{K}$, przy temperaturze zewnętrznej $T_{\text{ext}} = 26^\circ\text{C}$.

Analiza wrażliwości przeprowadzona dla tej konfiguracji wykazała również, że najistotniejsza jest zależność przepływu od temperatur T_H , T_C oraz współczynnika przejmowania ciepła α_1 . Pozwoliło to na wykonanie walidacji dla wyników symulacji numerycznej otrzymanej przy pomocy programu SOLVSTR, bez konieczności rozwiązywania zagadnienia przewodnictwa cieplnego w ściankach naczynia. Na rysunku 5.7 zestawiono pole temperatury i pole prędkości będące rezultatem tej symulacji porównane z wynikami pomiarów eksperymentalnych. Ze względu na to, iż symulacja numeryczna jest niestacjonarna podobnie jak dla poprzedniej konfiguracji przedstawione pola są uśrednione w czasie $t = 10 \text{ s}$. Otrzymane średnie wartości prędkości, jak i charakter przepływu w symulacji numerycznej jest podobny do otrzymanego eksperymentalnie. Maksymalne wartości składowej prędkości pionowej wynosi około 5 mm/s , podczas gdy maksymalne eksperymentalne wartości wynoszą około 6 mm/s . Podobnie jak dla poprzedniej konfiguracji symulacja numeryczna nie odtwarzała fluktuacji prędkości, które zostały zaobserwowane przy analizie zerwania stabilności w rozdziale 4.7. Również podobnie jak poprzednio dla liczby Rayleigha $Ra = 3 \cdot 10^7$ zauważono, że kinetyczna warstwa przyścienna, w której odbywa się większość ruchu była węższa w porównaniu z wynikami eksperymentalnymi. Jej szerokość jest bliska wartości teoretycznej (2.1 mm) i wynosiła 3 mm , podczas gdy wartość eksperymentalna równa jest około 5 mm (Rysunek 5.7. e i f). Te dwie rozbieżności pomiędzy wynikami symulacji numerycznej a pomiarami eksperymentalnymi zostały zaobserwowane w wynikach numerycznych uzyskanych zarówno programem SOLVSTR, jak i Fluent.

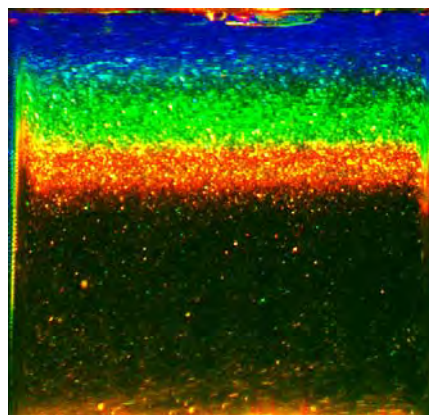
Wyniki procedury walidacyjnej przeprowadzonej dla symulacji numerycznej z wykorzystaniem programu SOLVSTR i Fluent zostały zamieszczone w Tabeli 5.7. Punktowe pomiary temperatury zostały wykorzystane do sprawdzenia dokładności z jaką termiczne warunki brzegowe zostały poprawnie odwzorowane przez obie symulacje. Oba programy odwzorowały je z zadowalającą precyzją ($E < U_V$). Natomiast widoczna jest rozbieżność przy porównywaniu ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz dla lokalnych wartości prędkości porównanych w punktach P1-P5. Rozbieżność ta spowodowana jest opisanym powyżej brakiem odtwarzania fluktuacji prędkości przez obie symulacje numeryczne. Można zauważyć, że w przypadku pominięcia wartości prędkości, które odpowiadają fluktuacjom, wartości składowej pionowej prędkości w punkcie P2 skupiają się wokół wartości -3.4 mm/s , co odpowiada otrzymanej wartości w symulacjach numerycznych (por. rysunek 4.28 c-d). Podobnie jest dla poziomej składowej prędkości w punkcie P4, wartość eksperymentalna przy pominięciu wartości odpowiadająca fluktuacjom wynosi około -0.6 mm/s , czyli blisko wartości otrzymanych w obu symulacjach.

Na podstawie przeprowadzonej procedury walidacji można stwierdzić, iż symulacja numeryczna z wykorzystaniem programu SOLVSTR lepiej odwzorowuje badaną konfigurację eksperymentalną w porównaniu z wynikiem otrzymanym przy pomocy programu Fluent. Jednakże jest to głównie spowodowane tym, iż błąd porównania E jest nieznacznie mniejszy dla programu SOLVSTR (Tabela 5.7.a) w porównaniu z wynikami uzyskanymi programem Fluent (Tabela 5.7.b), a dyspersja danych eksperymentalnych jest duża wskutek występowania zaobserwowanych fluktuacji. W wyniku tego, niepewność pomiarowa jest duża, toteż dla obliczeń można łatwiej uzyskać pozytywny wynik walidacji z wykorzystaniem takich danych eksperymentalnych. Otrzymana rozbieżność dla punktowych pomiarów prędkości może być spowodowana również tym, iż pomiary ze względu na turbulentny charakter ruchu dla tej konfiguracji eksperymentalnej

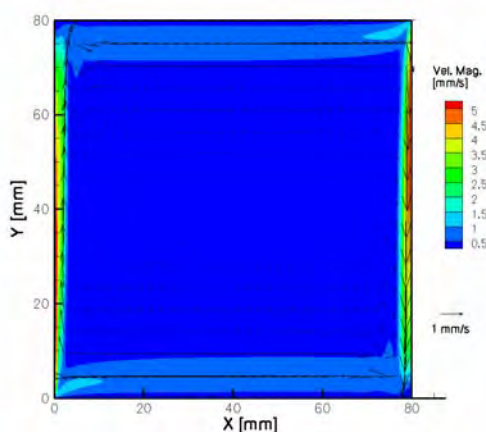
(liczby Rayleigha $Ra = 1.8 \cdot 10^8$) nie charakteryzował się tak wysokim stopniem powtarzalności, jak wcześniej opisane konfiguracje. Można zauważyć różnicę w odwzorowaniu termicznych warunków brzegowych, porównując Tabelę dla eksperymentu nr 52 z Tabelami eksperymentów nr 32-34. Eksperyment 52 stanowił wzorzec na podstawie którego porównywano wartości składowych prędkości w punktach P1-P5, gdzie $Ra = 1.5 \cdot 10^8$, natomiast do pozostałych porównań wykorzystano dane z eksperymentów 32-24, w których $Ra = 1.3 \cdot 10^8$.



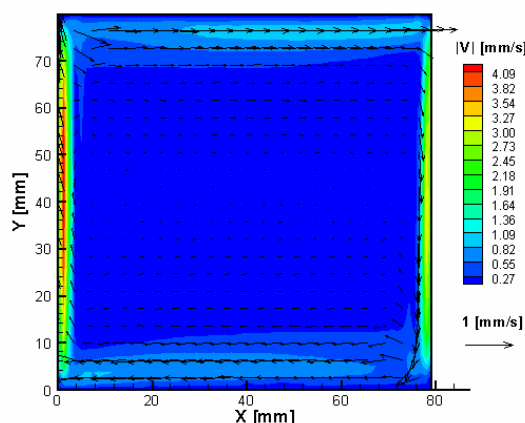
a) Pole temperatury (SOLVSTR)



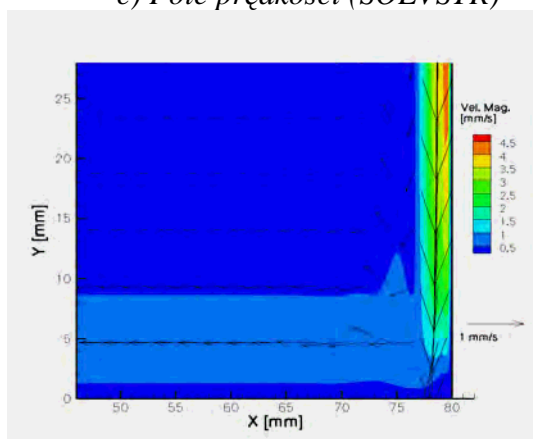
b) Wizualizacja pola temperatury (eks. nr 32)



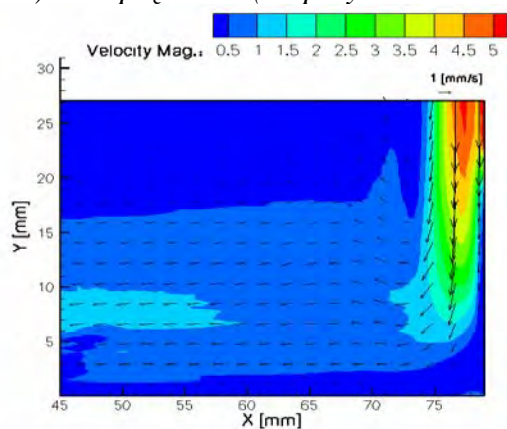
c) Pole prędkości (SOLVSTR)



d) Pole prędkości (eksperyment nr 35)



e) Pole prędkości – fragment (SOLVSTR)



f) Pole prędkości – fragment (eks. nr 51)

Rysunek 5.7. Porównanie wyników symulacji numerycznej uzyskanych programem SOLVSTR z pomiarami eksperymentalnymi (rozdział 4) $Ra = 1.3 \cdot 10^8$

Eksperyment			Symulacja Numeryczna (SOLVSTR)			
Zmienna	D	U_D	S	U_{SN}	E	U_V
T_7	25,51	0,18	25,64	0,09	0,13	0,20
T_{10}	24,40	0,21	24,57	0,11	0,17	0,24
U_{min}	-1,12	0,76	-1,23	0,04	0,11	0,76
U_{max}	0,97	0,76	1,23	0,04	0,26	0,76
V_{min}	-6,11	1,16	-5,29	0,06	0,82	1,16
V_{max}	6,19	1,16	5,29	0,06	0,90	1,16
V_{P1}	-4,55	1,59	-3,03	0,02	1,52	1,59
V_{P2}	-3,58	1,28	-2,53	0,07	1,05	1,28
U_{P3}	-0,55	0,24	-0,36	0,02	0,19	0,24
V_{P3}	-1,98	0,75	-1,97	0,06	0,01	0,75
U_{P4}	-0,94	0,45	-0,52	0,01	0,42	0,45
U_{P5}	-1,04	0,40	-0,58	0,02	0,46	0,40

a) Program SOLVSTR

Eksperyment			Symulacja Numeryczna (Fluent)			
Zmienna	D	U_D	S	U_{SN}	E	U_V
T_{12}	27,23	0,24	27,27	0,02	0,04	0,24
T_{16}	6,76	0,18	6,58	0,03	0,18	0,18
T_7	25,51	0,18	25,40	0,02	0,11	0,18
T_{10}	24,40	0,21	24,69	0,04	0,29	0,21
T_{15}	25,08	0,33	24,82	0,02	0,26	0,33
U_{min}	-1,12	0,76	-1,01	0,01	0,11	0,76
U_{max}	0,97	0,76	1,01	0,01	0,04	0,76
V_{min}	-6,11	1,16	-3,65	0,05	2,46	1,16
V_{max}	6,19	1,16	3,65	0,05	2,54	1,16
V_{P1}	-4,55	1,59	-2,39	0,01	2,16	1,59
V_{P2}	-3,58	1,28	-2,19	0,02	1,39	1,28
U_{P3}	-0,55	0,24	-0,36	0,02	0,19	0,24
V_{P3}	-1,98	0,75	-1,68	0,01	0,30	0,75
U_{P4}	-0,94	0,45	-0,48	0,01	0,46	0,45
U_{P5}	-1,04	0,40	-0,49	0,01	0,55	0,40

b) Program Fluent

Oznaczenia:

Zmienna – definiuje funkcjonal dla którego dokonujemy porównanie (T oznacza pomiar punktowy temperatury U, V pomiary składowych prędkości)

D – wartość pomiaru eksperymentalnego dla zmiennej na podstawie eksperymentu nr 35 i 51)

U_D – niepewność pomiaru obliczona na podstawie (4.3)

S - wartość zmiennej uzyskana w symulacji numerycznej

U_{SN} – niepewność symulacji numerycznej (1.16)

E – błąd porównania zdefiniowany jako $D - S$

U_V – metryka walidacji (1.10)

Tabela 5.7. Walidacja symulacji numerycznej $Ra = 1.3 \cdot 10^8$. Wyróżniono obszary nie spełniające warunku walidacji ($|E| > U_V$).

5.2.3 Konfiguracja z pionowym gradientem temperatury

W celu zademonstrowania zaproponowanej metody oceny wiarygodności symulacji numerycznych do innych konfiguracji eksperymentalnych niż rozważana w tej pracy konfiguracja z różnicowo grzany sześcianiem, przeprowadzono analizę wrażliwości dla konfiguracji eksperymentalnej obejmującej przepływ konwekcyjny wywołany pionowym gradientem temperatury. Szczegółowy opis prac eksperymentalnych, które stanowią źródło danych eksperymentalnych do walidacji, został zaczerpnięty z pracy Kowalewski T.A., Cybulski A., Michałek T., Kowalczyk M. pt. „Laboratoryjne wzorce do walidacji programów odlewniczych” [123]. Przetawiony tam został dokładny przebieg eksperymentów, wykorzystane naczynie modelowe, własności cieczy modelowej oraz wyniki eksperymentalne, w tym pomiary metodą PIV i pomiary punktowe temperatury przy pomocy termopar.

Konfiguracja ta obejmowała przepływ glikolu polietylenowego (PEG900) w sześcianie o boku 0.038 m chłodzonym od górnej ściany, która utrzymywana była w temperaturze $T_c = 26.1^\circ\text{C}$. Ściany naczynia wykonane były z pleksiglasu o grubości 8 mm . Naczynie to było zanurzone w zewnętrznym płaszczu termostatowanym w temperaturze $T_{ext} = 36.1^\circ\text{C}$. Bezwymiarowe liczby Rayleigha i Prandtla wyliczone dla tej konfiguracji wynoszą odpowiednio $Ra = 526612$ i $Pr = 1358$. Tego typu konfiguracje charakterystyczne są dla przepływów związanych z hodowlą monokryształów.

Do symulacji numerycznej wykorzystano program Fluent [101], rozwiązując zagadnienie trójwymiarowego przepływu w sześciacie o boku 0.038 m oraz zagadnienie przewodnictwa cieplnego w ściankach pleksiglasowych. Na zewnątrz ścianek pleksiglasowych założono termiczny warunek brzegowy trzeciego rodzaju, przyjmując współczynnik przejmowania ciepła $\alpha = 3000\text{ W/m}^2\text{K}$. W obliczeniach górna ścianka przyjęta została jako izotermiczna o temperaturze $T_c = 26.1^\circ\text{C}$.

Dla takiej konfiguracji przeprowadzono analizę wrażliwości zgodnie z zaproponowaną metodą oceny wiarygodności, uwzględniając termiczne warunki brzegowe, warunki początkowe i własności materiałowe. Pełny zestaw parametrów wejściowych został zestawiony w Tabeli 5.8.

Symbol	Opis	Wartość początkowa	δ zakres zmian	Typ parametru
$P_1 = T_c$	Temperatura T_c górnej ścianki sześcianu	299.1 K	1 K	Warunek brzegowy
$P_2 = \alpha$	Współczynnik przejmowania ciepła	3000 W/m ² K	300 W/m ² K	Warunek brzegowy
$P_3 = T_{ext}$	Temperatura T_{ext} termostatowanej cieczy w płaszczu otaczającym naczynie modelowe	308.95 K	2 K	Warunek brzegowy
$P_4 = T_{in}$	Temperatura początkowa	306 K	2 K	War. poczt.
$P_5 = v_{in}$	Pole prędkości początkowe	0 m/s	0.001 m/s	War. poczt.
$P_6 = \rho_0$	Gęstość glikolu w temperaturze referencyjnej	1100 kg/m ³	10 %	Własność materiałowa
$P_7 = \mu$	Lepkość dynamiczna glikolu	0.099 kg/ms	10 %	Własność materiałowa
$P_8 = \kappa$	Przewodność cieplna glikolu	0.188 W/mK	10 %	Własność materiałowa
$P_9 = c_p$	Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu	2260 J/kgK	10 %	Własność materiałowa
$P_{10} = \beta$	Współczynnik rozszerzalności cieplnej	0.00076 1/K	10 %	Własność materiałowa

Tabela 5.8. Zestawienie parametrów wejściowych ze względu na które przeprowadzono analizę wrażliwości dla konwekcji glikolu polietylenowego w kanale z izotermiczną ścianką górną.

Kolejnym krokiem w zaproponowanej metodzie jest definicja funkcjonałów, których wrażliwość jest badana na zmiany wyżej wymienionych parametrów. Postać funkcjonałów została podyktowana zaprezentowanymi w pracy [123] wynikami pomiarów eksperymentalnych. Przyjęto następujące funkcjonały:

$$\|F\|_1 = T(0.038, 0.001, 0.037) = T_1 \quad (5.17)$$

$$\|F\|_2 = T(0.038, 0.001, 0.019) = T_2 \quad (5.18)$$

$$\|F\|_3 = T(0.038, 0.019, 0.019) = T_3 \quad (5.19)$$

$$\|F\|_4 = T(0.038, 0.037, 0.019) = T_4 \quad (5.20)$$

$$\|F\|_5 = \min\{W(x, 0.019, 0.019): 0 \leq x \leq 0.038\} \quad (5.21)$$

$$\|F\|_6 = \max\{W(x, 0.019, 0.019): 0 \leq x \leq 0.038\} \quad (5.22)$$

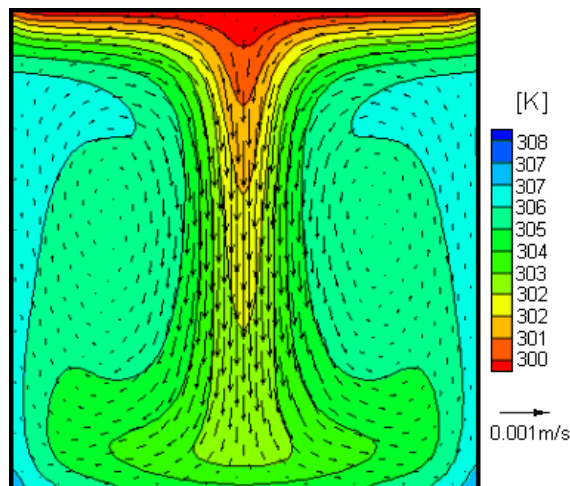
Zgodnie z zaproponowaną metodą w rozdziale 3 następnym krokiem jest wyliczenie względnych zmian wartości funkcjonałów (3.2)-(3.3) oraz bezwzględnej miary wrażliwości zdefiniowanej formułą (3.5) na zmiany parametrów wejściowych P1 – P10 zestawionych w Tabeli 5.8. Na podstawie tych wartości zestawionych w Tabeli 5.9. wyłoniono istotne parametry dla badanej konfiguracji.

Zmienna	S	ε_d^+ (P1)	ε_d^- (P1)	ε_d^+ (P2)	ε_d^- (P2)	ε_d^+ (P3)	ε_d^- (P3)	ε_d^+ (P4)	ε_d^- (P4)	ε_d^+ (P5)	ε_d^- (P5)
T ₁	34,60	0,02	0,02	0,00	0,00	0,10	0,11	0,00	0,00	0,00	0,00
T ₂	33,50	0,03	0,03	0,00	0,00	0,08	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00
T ₃	33,00	0,04	0,03	0,00	0,00	0,11	0,11	0,00	0,00	0,00	0,00
T ₄	29,90	0,06	0,06	0,00	0,00	0,07	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00
F ₄ = W _{min}	-1,758	0,07	0,06	0,00	0,00	0,09	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00
F ₅ = W _{max}	0,318	0,05	0,05	0,00	0,00	0,08	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00
Zmienna	S	ε_d^+ (P6)	ε_d^- (P6)	ε_d^+ (P7)	ε_d^- (P7)	ε_d^+ (P8)	ε_d^- (P8)	ε_d^+ (P9)	ε_d^- (P9)	ε_d^+ (P10)	ε_d^- (P10)
T ₁	34,60	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00
T ₂	33,50	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,00	0,01	0,00	0,01
T ₃	33,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,02	0,00	0,01	0,00	0,01
T ₄	29,90	0,00	0,00	0,01	0,00	0,02	0,02	0,00	0,01	0,00	0,01
F ₄ = W _{min}	-1,758	0,02	0,02	0,23	0,07	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07
F ₅ = W _{max}	0,318	0,00	0,00	0,22	0,09	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05

Tabela 5.9. Analiza wrażliwości ze względu na parametry wejściowe. Bezwzględna miara wrażliwości $\varepsilon_d^+, \varepsilon_d^-$ (3.5) obliczona dla parametrów z Tabeli 5.8. (wyróżniono wartości przekraczające 3 %)

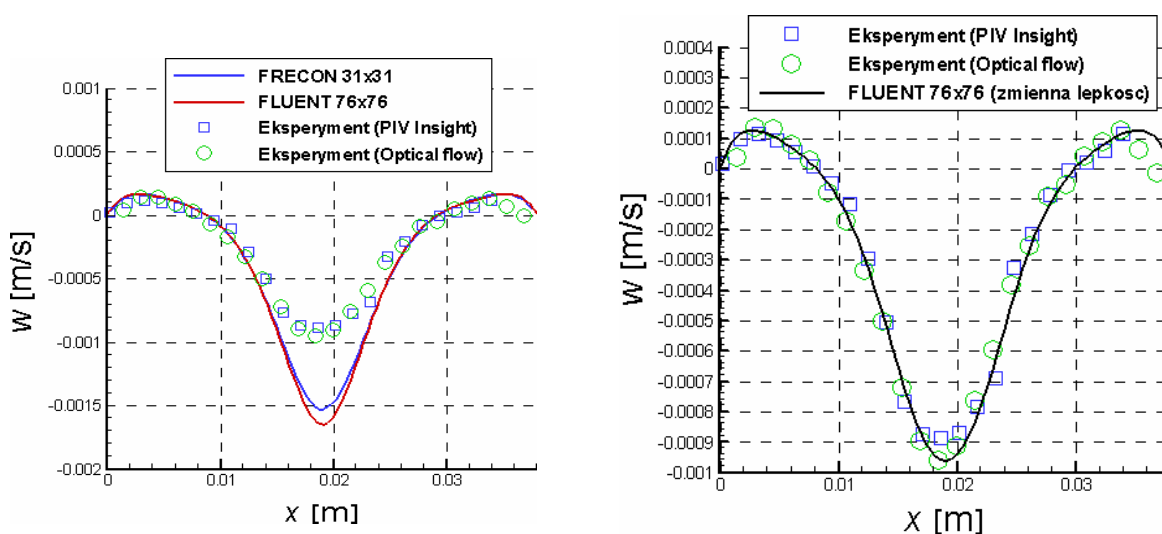
Na podstawie przeprowadzonej analizy wrażliwości można stwierdzić, że istotnymi parametrami dla badanej konfiguracji są: temperatura T_c górnej ścianki, temperatur T_{ext} termostатовanej cieczy oraz wartość lepkości dynamicznej. Konfiguracja okazała się być szczególnie wrażliwa na zmiany wartości lepkości i współczynnika rozszerzalności cieplnej. Zmiany wartości składowej pionowej prędkości zmieniały się o ponad 20 % w skutek zmian wartości lepkości. Przedstawiona analiza wrażliwości prawidłowo wskazała najistotniejsze parametry konfiguracji eksperymentalnej, ponieważ dopiero uwzględnienie zmiennej zależności lepkości w obliczeniach numerycznych zmierzonej eksperymentalnie dało pożądaną zgodność rezultatów.

Pole temperatury i prędkości będące rezultatem obliczeń numerycznych w płaszczyźnie pionowej centralnie przecinającej sześcián dla przyjętych warunków termicznych zostało przedstawione na rysunku 5.8. Strukturę przepływu widoczną w płaszczyźnie pionowego przekroju centralnego charakteryzują dwie symetryczne cyrkulacje. Wywołuje je centralna struga zimnej cieczy spływająca od ścianki górnej i zwracająca po osiągnięciu dna naczynia wzdłuż ścianek bocznych. Podobną strukturę przepływu rejestrowano eksperymentalnie [123].



Rysunek. 5.8. Pole temperatury i prędkości w płaszczyźnie przekroju centralnego otrzymane z symulacji numerycznej programem Fluent

Przeprowadzona analiza wykazała szczególnie dużą wrażliwość na zmiany współczynnika lepkości dynamicznej, co jak okazuje się jest kluczowym parametrem dla tej konfiguracji. Na rysunku 5.9 porównano profile pionowej składowej prędkości otrzymane w wyniku obliczeń numerycznych z założoną stałą wartością lepkości w obliczeniach (a) oraz ze zmienną zależnością lepkości od temperatury (b). Poprawna zgodność pomiędzy wynikami symulacji numerycznej z pomiarami eksperymentalnymi dla drugiego przypadku potwierdza słuszność postulowanej hipotezy, stwierdzonej na podstawie przeprowadzonej analizy wrażliwości. Dopiero po uwzględnieniu zmiennej lepkości, udało się uzyskać zadawalającą zgodność ilościową dla tej konfiguracji.



a) Obliczenia ze stałą lepkością

b) Obliczenia ze zmienną lepkością

Rysunek. 5.9. Porównanie profili pionowej składowej prędkości z wynikami eksperymentalnymi dla obliczeń numerycznych (a) ze stałą wartością lepkości dynamicznej oraz (b) ze zmienną wartością lepkości dynamicznej

Otrzymaną zgodność pomiędzy wynikami symulacji oraz pomiarami eksperymentalnymi potwierdza również walidacja przeprowadzona zgodnie ze sposobem opisanym w rozdziale 5.1. W Tabeli 5.10 zestawiono wartości badanych funkcjonatów z wynikami symulacji numerycznych otrzymanymi przy założeniu stałej wartości lepkości (a) oraz zmiennej wartości lepkości (b). Obliczono błąd porównania E i wartość metryki walidacyjnej U_V . Dla wszystkich badanych funkcjonatów otrzymano zadawalającą zgodność z niskim poziomem niepewności walidacji U_V tylko dla obliczeń, w których założono zmienną zależność lepkości od temperatury. Obliczenia ze stałą wartością lepkości zostały ocenione negatywnie, wartości ekstremalne prędkości (funkcjonały F_4 i F_5) wykazały największe rozbieżności.

Eksperyment			Symulacja Numeryczna			
Zmienna	D	U_D	S	U_{SN}	E	U_V
T_1 [K]	307,2	0,5	307,6	0,01	0,40	0,50
T_2 [K]	306,8	0,5	306,5	0,02	0,30	0,50
T_3 [K]	306,8	0,5	306,0	0,02	0,80	0,50
T_4 [K]	305,5	2,0	302,9	0,20	2,60	2,01
$F_4 = W_{\min}$ [mm/s]	-0,965	0,1	-1,754	0,01	0,79	0,10
$F_5 = W_{\max}$ [mm/s]	0,140	0,1	0,317	0,01	0,18	0,10

a) Obliczenia numeryczne ze stałą wartością lepkości

Eksperyment			Symulacja Numeryczna			
Zmienna	D	U_D	S	U_{SN}	E	U_V
T_1 [K]	307,2	0,5	307,3	0,01	0,10	0,50
T_2 [K]	306,8	0,5	306,5	0,02	0,30	0,50
T_3 [K]	306,8	0,5	306,3	0,02	0,50	0,50
T_4 [K]	305,5	2,0	303,5	0,20	2,00	2,01
$F_4 = W_{\min}$ [mm/s]	-0,965	0,1	-0,963	0,01	0,00	0,10
$F_5 = W_{\max}$ [mm/s]	0,140	0,1	0,125	0,01	0,02	0,10

b) Obliczenia ze zmienną zależnością lepkości od temperatury

Tabela 5.10. Walidacja symulacji numerycznych konwekcji naturalnej glikolu polietylenowego dla konfiguracji z pionowym gradientem temperatury. Wyróżniono obszary nie spełniające warunku walidacji. ($|E| > U_V$)

Warto zwrócić uwagę, że przy obliczaniu wartości metryki walidacyjnej U_V nie uwzględniono wartości niepewności pochodzących od danych wejściowych U_{SPD} (por. równanie 5.1), którą powinna zawierać niepewność określającą, jak dokładnie zostały określone wartości materiałowe cieczy. Cieczą modelową dla tego przypadku był glikol polietylenowy, którego właściwości nie są tak dokładnie znane jak to zakładaliśmy dla wody. Na podstawie powyższego porównania można oszacować wartość niepewności U_{SPD} dla tego przypadku. Biorąc to pod uwagę można zaproponować aby wartość niepewności U_{SPD} była obliczana na podstawie zaproponowanej analizy wrażliwości badanego funkcjonatu na zmiany parametrów wejściowych. W ten sposób można otrzymać wielkość o tym samym wymiarze co inne niepewności w metryce walidacyjnej, takie jak U_{SN} i U_D . Do tego celu można wykorzystać formułę (3.6), która określa względną zmianę wielkości badanego funkcjonatu F przy zmianie parametru wejściowego o interwał δ .

6. Podsumowanie i wnioski

W niniejszej pracy **przedstawiono metodę oceny wiarygodności symulacji numerycznych dla przepływów lepkich i termicznych**. Metodę tę oparto na analizie wrażliwości rozwiązań numerycznych na parametry wejściowe. Zaproponowana metoda pozwala wyłonić istotne parametry dla badanej konfiguracji, to znaczy takie, których zmiany wpływają w sposób najbardziej istotny na rezultat symulacji numerycznych. Zastosowanie niniejszej metody pozwala nie tylko na określenie istotnych parametrów fizycznych, ale również na określenie dokładności z jaką należy przeprowadzić pomiary eksperymentalne, aby móc dokonać bezpośredniego porównania pomiędzy wynikami symulacji numerycznej a pomiarami eksperymentalnymi, a w konsekwencji dokonać walidacji obliczeń numerycznej.

Zaproponowana metoda badania wrażliwości na parametry wejściowe została wpisana pomiędzy dwa procesy weryfikacji i walidacji, związane z uwiarygodnianiem symulacji numerycznych, które są obecnie nieformalnymi standardami w numerycznej mechanice płynów. Takie umiejscowienie metody umożliwi wybranie optymalnej konfiguracji eksperymentalnej do przeprowadzenia walidacji symulacji numerycznej, a dzięki temu usprawnienie tego czasochłonnego etapu. Ponadto metoda ta określa dokładność z jaką należy przeprowadzić pomiary, co jest cenną wskazówką dla osób odpowiedzialnych za zaprojektowanie eksperymentu koniecznego dla procesu walidacji. W przypadku, gdy badania eksperymentalne nie są przeprowadzane, można na podstawie tej metody wnioskować na temat wiarygodności przeprowadzonych obliczeń w funkcji parametrów uznanych za istotne. Jeśli symulacja numeryczna wykazuje niewielką wrażliwość na zmiany fizycznych parametrów wejściowych, można wysnuć wniosek, iż jest ona bardziej wiarygodna od innych konfiguracji, które wykazują wrażliwość na większą ilość parametrów lub dla których obliczona miara wrażliwości jest ilościowo większa.

W pracy ograniczono się do rozważania tylko jednej klasy przepływów, a mianowicie przepływów lepkich i termicznych. Zrobiono to celowo, gdyż etap walidacji jest ściśle związany z określoną dziedziną i stworzenie ogólnej metody wydaje się być mało prawdopodobne. Roache stwierdza w swojej książce [23], że ze względu na specyfikę badań eksperymentalnych można przedstawić jedynie ogólne obserwacje na temat metodologii walidacji,. Toteż jest mało prawdopodobne aby powstał w przyszłości ogólny standard procedur walidacyjnych. W porównaniu z dotychczas publikowanymi opracowaniami na temat uwiarygodniania symulacji numerycznych w mechanice płynów [21-25,28,30], autor rozprawy starał się poświęcić tyle samo miejsca zagadnieniom weryfikacji co walidacji. Do tej pory widoczny jest nadmiar publikacji na temat weryfikacji, dla przykładu tematowi weryfikacji w książce Roache [23] poświęcone jest trzy razy więcej miejsca niż walidacji. Podobnie jest w innych publikacjach [21-25,28].

W celu szczegółowego przedstawienia zaproponowanej metody **opisano pełny proces weryfikacji i walidacji**. Proces ten potraktowano całościowo, opisując szczegółowo programy stworzone na potrzeby analizy przedmiotowej klasy przepływów, proces ich weryfikacji przy pomocy wzorców numerycznych, następnie przeprowadzono analizę wrażliwości dla wybranej konfiguracji eksperymentalnej ze względu na parametry wejściowe. Na zakończenie przeprowadzono pełną walidację z wykorzystaniem danych eksperymentalnych. (rozdział 4 i 5).

Wcześniej w rozdziale drugim przedstawiono matematyczne sformułowanie modelu wykorzystanego do analizowania przepływów lepkich i termicznych. Model ten stanowi układ równań różniczkowych cząstkowych wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi opisującymi nieściśliwe przepływy termiczne cieczy newtonowskich. Przedstawiono dwie metody numeryczne służące do rozwiązywania tego typu równań. Pierwsza z nich oparta jest na metodzie różnic skończonych, natomiast druga na metodzie bezsiatkowej. **Stworzono dwa autorskie programy SOLVSTR i SOLVMEF**, w których zaimplementowano wyżej wymienione metody. **Programy zostały zweryfikowane przy pomocy wzorców numerycznych**, obejmujących przepływ

wymuszony w zamkniętym kanale z ruchomą ścianką górną (ang. moving lid driven cavity, Ghia [39]), konwekcję naturalną płynu newtonowskiego w różnicowo grzonym kanale dla umiarkowanych liczb Rayleigha (ang. cavity heated from the side, de Vahl Davis [15]) oraz konwekcję naturalną płynu newtonowskiego w różnicowo grzonym naczyniu dla wysokich liczb Rayleigha (Le Quere [16]). Porównano dokładność oraz szybkość wykonania stworzonych programów z programami komercyjnymi takimi jak Fluent [101] i Fidap [102] oraz z uniwersyteckim programem FRECON3V [103], rozważając przepływ wody w różnicowo grzonym sześciennym kanale dla temperatur bliskich temperaturze krzepnięcia. Na podstawie tych badań **wyłoniono numeryczne rozwiązanie wzorcowe dla przepływów konwekcyjnych**, które zostało opublikowane w pracy Michałek T., Kowalewski T.A., Sarler B. [105]. Do przeprowadzenia weryfikacji zaproponowano nową metodę oceny błędów opartą na ilościowym porównywaniu struktur przepływu.

W wyniku przeprowadzonych testów z wykorzystaniem wzorców numerycznych dla obu programów można stwierdzić, iż metody wykorzystane w autorskich programach SOLVSTR i SOLVMEF są zbieżne. Program SOLVSTR poprawnie odtworzył strukturę przepływu dla zagadnienia przepływu w kanale z ruchomą ścianką górną dla liczb Reynoldsa $Re = 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500, 10000$. Rozwiązania te są obciążone błędem zbieżności, oszacowanym na podstawie ekstrapolacji Richardsona, równym 0.1%, 0.2%, 0.5 %, 3 %, 17 %, 20 %, 21 % odpowiednio dla kolejnych liczb Reynoldsa. Zagadnienie przepływu konwekcyjnego w różnicowo grzonym kanale rozwiązane zostało dla liczb Rayleigha $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$. Otrzymane rozwiązania numeryczne obciążone są błędem zbieżności numerycznej, oszacowanym na podstawie ekstrapolacji Richardsona, równym 0.1 %, 0.2 %, 0.3 %, 1 %, 2 %, 7 %. Teoretyczny i rzeczywisty rząd zbieżności rozwiązań wyniósł dwa dla większości rozważanych przypadków. Otrzymane wyniki są porównywalne z wynikami wzorców numerycznych opublikowanymi w literaturze [15,16,60-65,94].

Metoda bezsiatkowa oparta na aproksymacji DAM [99,100], która została wykorzystana w programie SOLVMEF, okazała się być mniej dokładna i wolniej zbieżna dla przepływów, w których dominują człony nieliniowe. Fakt ten został zidentyfikowany przy pomocy wzorca numerycznego zdefiniowanego przez Ghia [39]. Nie udało się uzyskać poprawnych wyników (tzn. z błędem zbieżności poniżej 3 %) dla liczb Reynoldsa wyższych niż 1000. Również nie udało się uzyskać wyników o zadawalającym stopniu zbieżności dla wzorca numerycznego obejmującego przepływy konwekcyjne w różnicowo grzonym kanale dla liczb Rayleigha wyższych od 10^5 . Jednakże na podstawie otrzymanych rezultatów dla tego wzorca można stwierdzić, iż metoda jest odpowiednia do symulacji zjawisk, w których dominują efekty dyfuzyjne. Dla przykładu problem przepływu konwekcyjnego dla niskich liczb Reynoldsa ($Ra = 10^3, 10^4$) został rozwiązany kilkakrotnie szybciej przez program SOLVMEF w porównaniu z programem SOLVSTR, przy tej samej ilości węzłów obliczeniowych (100x100 węzłów).

Porównanie efektywności stworzonych programów z programami komercyjnymi Fluent [101] i Fidap [102] oraz uniwersyteckim programem FRECON3V [103,104] zostało wykonane **na podstawie zdefiniowanego wzorca numerycznego** obejmującego przepływ wody w różnicowo grzonym kanale dla temperatur $\Delta T = 10$ °C. Stosując zaproponowaną metodę oceny błędów wybrano rozwiązanie otrzymane programem FRECON jako wzorzec numeryczny. Szybkość rozwiązywania zdefiniowanego wzorca z wykorzystaniem programu SOLVSTR była podobna do szybkości z jaką rozwiązywano problem na siatce o tych samych rozmiarach przez program FRECON3V. Natomiast program SOLVMEF okazał się być wolno zbieżny, co potwierdza tezę, iż nie jest to program adekwatny do analizowania przepływów charakteryzujących się wysokimi liczbami Rayleigha ($Ra = 1.5 \cdot 10^6$). Czas obliczeń programem SOLVMEF był około pięćdziesiąt razy dłuższy w porównaniu z czasami obliczeń z wykorzystaniem programu FRECON3V czy SOLVSTR. Programy komercyjne wykorzystane do rozwiązania niniejszego wzorca poprawnie odtworzyły strukturę przepływu. Fidap charakteryzował się dużą szybkością osiągnięcia zbieżnego

rozwiązania w porównaniu z innymi programami, natomiast przy pomocy programu Fluent udało się uzyskać rezultaty zbliżone z rozwiązaniem wzorcowym, jednakże program ten potrzebował w tym celu dwa razy gęstszej siatki.

W rozdziale trzecim **przedstawiono szczegółowy sposób postępowania przy przeprowadzaniu analizy wrażliwości** ze względu na parametry fizyczne. Określono w jaki sposób wyłaniać istotne parametry dla konfiguracji eksperymentalnej oraz w jaki sposób oszacować dokładność pomiarów eksperymentalnych. W tym celu zdefiniowano bezwzględną miarę wrażliwości (3.5), którą wylicza się na podstawie niezależnych symulacji numerycznych z różnymi parametrami wejściowymi. Zaprezentowano przykładową analizę wrażliwości ze względu na termiczne warunki brzegowe, warunki początkowe i wartości termo-fizyczne cieczy modelowej dla wybranej konfiguracji eksperymentalnej. W wyniku tej analizy zidentyfikowano kluczowe parametry dla tej konfiguracji, oszacowano konieczną dokładność pomiarów eksperymentalnych oraz przedstawiono szereg wniosków dotyczących przeprowadzenia eksperymentalnej walidacji. Najistotniejszymi parametrami okazały się temperatura zimnej ścianki T_c oraz temperatura ciepłej ścianki T_h oraz wartość współczynnika przejmowania ciepła α_1 służącego do określenia strumienia Q_1 . Oceniając konieczną dokładność pomiarów stwierdzono, że wpływ błędnie przyjętych wartości współczynników termo-fizycznych wody można zidentyfikować jedynie na podstawie pomiarów pól prędkości i temperatury, a nie jest to możliwe na podstawie jedynie pomiarów punktowych temperatury. Dokładność pomiaru temperatury T_h i T_c w ściankach aluminiowych z jaką należy wykonać eksperyment musi być lepsza niż $1\text{ }^\circ\text{C}$, temperatury zewnętrznej $T_{\text{ext}}\ 2\text{ }^\circ\text{C}$. Natomiast pomiar punktowy temperatury w ściankach pleksiglasowych wymaga dokładności $0.5\text{ }^\circ\text{C}$. Okazało się, że konfiguracja jest bardzo wrażliwa na współczynniki przejmowania ciepła dla ścianek izotermicznych i wykazuje dla monitorowanych funkcjonalów rozbieżności rzędu 3-4 % przy zmianach współczynników o 5%. Są to zmiany istotne, gdyż powodują zmianę struktury przepływu, którą można zidentyfikować jedynie przy pomocy pomiarów pól prędkości.

W rozdziale czwartym **przedstawiono rezultaty badań eksperymentalnych** wykonanych w ramach niniejszej pracy i dotyczących przepływu wody w różnicowo grzanej sześciennie, a w szczególności stanów stacjonarnych dla liczb Rayleigha w zakresie od 10^6 do 10^9 . Przedstawiono pola prędkości i temperatury dla centralnego pionowego przekroju przez sześciennik, uzyskane przy pomocy optycznych technik pomiarowych: cyfrowej anemometrii obrazowej (PIV) i cyfrowej termometrii obrazowej (PIT). Dodatkowo zestawiono te dane z punktowymi pomiarami temperatury wykonywanymi w ściankach naczynia pomiarowego oraz w pomieszczeniu gdzie wykonywano pomiary. Cyfrowa analiza obrazów umożliwiła również wizualizację torów cząstek, dzięki którym można jakościowo określać zgodność wyników eksperymentalnych z wynikami symulacji numerycznych. W wyniku tych badań **zdefiniowano wzorzec eksperymentalny** dla $Ra = 1.5 \cdot 10^6$ i $Pr = 11.78$ i temperatur w zakresie $0 - 10^\circ\text{C}$. Przepływ charakteryzuje się specyficzną strukturą, spowodowaną anomalną zależnością gęstości wody w funkcji temperatury. Określono błąd pomiaru dla uzyskanych pól prędkości rzędu 8 % (0.07 mm/s), oraz pól temperatury rzędu 10 % (1°C). Dla punktowych pomiarów temperatury błąd ten wynosił około 0.3°C . Określono termiczne warunki brzegowe dla tej konfiguracji, w tym określono wartości współczynników przejmowania ciepła przy pomocy dodatkowych pomiarów eksperymentalnych.

Dodatkowo przedstawiono wyniki badań dla wyższych liczb Rayleigh ($Ra > 10^7$), które nie zawierały struktury przepływu składającej się z dwóch wirów wywołanej anomalną zależnością gęstości wody od temperatury. Dokładność otrzymanych pól prędkości wynosiła około 8% dla umiarkowanych liczb Rayleigh ($Ra = 3 \cdot 10^7$) oraz 14 % dla wysokich liczb Rayleigh ($Ra \sim 10^8$). Dla każdego z wykonanych eksperymentów określono oddzielnie dokładność pomiaru pola prędkości (por. tabele opisujące eksperymenty w Dodatku) na podstawie serii pól prędkości otrzymanych dla tej samej konfiguracji. Dokładność pomiaru pól temperatury została oszacowana na podstawie zakresu wrażliwości zawieszin ciekło krystalicznych i wynosiła od 10 % do 30 %.

Dokładność pomiarów punktowych temperatury, podobnie jak w poprzedniej konfiguracji wynosiła 0.3 °C.

Ostatnim etapem badań eksperymentalnych było **przeprowadzenie analizy zerwania laminarności przepływu** wraz z zwiększaniem się liczby Rayleigha. W tym celu przeprowadzono pomiary eksperymentalne rejestrując obrazy jedynie dla fragmentu badanego wcześniej przekroju, dzięki czemu udało się zwiększyć dokładność pomiaru pól prędkości (0.35 mm/s dla wyższych liczb Rayleigh, czyli ok. 5%). Na podstawie przeprowadzonej analizy zaobserwowano dla przepływów o liczbie Rayleigha $Ra > 10^7$ falowy charakter ruchu w warstwach przyściennych, który dla przepływów o liczbie $Ra = 4 \cdot 10^8$ zmienia się w ruch o dużej intensywności turbulencji obserwowany w obszarach, w których występują duże wartości prędkości. Wysłano wniosek, że lokalne zerwanie stacjonarności przepływu ma miejsce poniżej literaturowej krytycznej liczby Rayleigha (Quere [17], Chenoweth [64]). Przeprowadzone przez autora wstępne symulacje metodą DNS zdają się wskazywać, że wprowadzenie niejednorodnych termicznych warunków brzegowych może być źródłem periodycznych perturbacji pola przepływu, zaobserwowanych w eksperymencie. Tłumaczyłoby to pojawienie się w polu prędkości impulsowych zmian (ang. spikes). Tym bardziej wskazuje to na konieczność walidacji kodów numerycznych przy modelowaniu przepływów charakterystycznych dla wysokich liczb Rayleigha, gdzie niewielkie zaburzenia termicznych warunków brzegowych powodują jakościowe zmiany pola i z pewnością zmieniają krytyczną liczbę Ra reżimu przejściowego.

W rozdziale piątym **przeprowadzono walidację obliczeń numerycznych** wykonanych przy pomocy programów SOLVSTR i Fluent **wykorzystując zdefiniowany przez autora wzorzec eksperymentalny**. W walidacji tej uwzględniono niepewność pomiarów eksperymentalnych oraz niepewność rozwiązania numerycznego. Niepewność pomiarów eksperymentalnych oszacowano na podstawie dokładności pomiarów, natomiast niepewność symulacji numerycznej przy pomocy ekstrapolacji Richardsona. Symulacja nie uwzględniająca transportu ciepła w ściankach aluminiowych i pleksiglasowych została oceniona negatywnie już na podstawie samych punktowych pomiarów temperatury. Porównano dwie symulacje numeryczne uwzględniające transport ciepła w ściankach aluminiowych z wynikami eksperymentalnymi. Pierwsza z symulacji zakładała kawałkami liniowe zależności własności materiałowych od temperatury, natomiast druga zakładała stałe wartości materiałowe. Dla obu symulacji określono błąd porównania pomiędzy wynikiem symulacji numerycznej a pomiarami eksperymentalnymi. Błąd wyliczony na podstawie profili prędkości wzdłuż wybranych przekrojów był znacząco większy dla drugiej symulacji w porównaniu z pierwszą. Zidentyfikowane rozbieżności pomiędzy symulacjami numerycznymi a eksperymentem mogą być spowodowane tym, iż dokładność pomiarów eksperymentalnych nie była wystarczająca. Nie udało się otrzymać pól prędkości z dokładnością lepszą niż 6 %, co było warunkiem otrzymania zadawalającej zgodności dla tej konfiguracji.

Dodatkowo **przedstawiono walidację obliczeń** odpowiadające tej samej konfiguracji eksperymentalnej **dla wyższych liczb Rayleigha ($Ra = 3 \cdot 10^7$, $Ra = 1.3 \cdot 10^8$)**. Na podstawie przeprowadzonej analizy wrażliwości okazało się, iż konfiguracje te są mniej wrażliwe na parametry określające termiczne warunki brzegowe, w tym temperaturę zewnętrzną oraz współczynniki przyjmowania ciepła określające strumienie ciepła między ściankami naczynia a otoczeniem. Fakt ten umożliwił wykonanie walidacji rezultatów symulacji numerycznych otrzymanych również przy pomocy prostego i szybkiego programu SOLVSTR, które nie uwzględnia przepływu ciepła w ściankach naczynia pomiarowego. W rezultacie pozytywnie oceniono obliczenia wykonane z wykorzystaniem programu SOLVSTR i Fluent. Fakt ten potwierdza zasadność przeprowadzania analizy wrażliwości, która dla tej konfiguracji wykazała wrażliwość na mniejszą ilość parametrów.

Przeprowadzono analizę wrażliwości dla konfiguracji eksperymentalnej obejmującej przepływ glikolu polietylenowego wywołany pionowym gradientem temperatury. W sposób jednoznaczny dla tej konfiguracji został zidentyfikowany istotny parametr wejściowy, którym

okazał się współczynnik lepkości przyjęty w symulacji numerycznej. W oparciu o przeprowadzoną analizę porównawczą symulacji, która uwzględnia zmienny i stały współczynnik lepkości **zasugerowano, iż analiza wrażliwości pozwala określić niepewność danych materiałowych U_{SPD}** , niezbędną w procedurze walidacji, gdy modelowane są przepływy cieczy o nieznanymi dokładnie własnościach materiałowych.

Podsumowując można stwierdzić, że **zaproponowana metoda oceny wiarygodności symulacji numerycznych usprawnia proces walidacji poprzez określenie istotnych parametrów** dla badanej konfiguracji. Na podstawie przytoczonych przykładów można stwierdzić, że metoda oparta jedynie na przeprowadzaniu niezależnych symulacji numerycznych pozwala poprawnie określić istotne parametry dla badanej konfiguracji oraz oszacować niezbędną dokładność pomiarów do przeprowadzenia walidacji eksperymentalnej (cyt. „... beneficial synergism arises when experiments are designed specifically for CFD Validation” Aeschliman and Oberkamp [51]). Uzyskanie pozytywnej oceny procedury walidacyjnej, poprzez porównanie z pomiarami eksperymentalnymi pozwoliło stwierdzić, które z przeprowadzonych symulacji wystarczająco poprawnie opisują badane zjawisko fizyczne.

7. Bibliografija

- [1] Boehm B.W., „Software Engineering Economics”, *Prentice-Hall*, New York, 1981.
- [2] Blottner F. G., „Accurate Navier-Stokes results for the hypersonic flow over a spherical nosetip”, *AIAA J. Spacecraft Rockets*, **27** (2), pp.113-122, 1990.
- [3] Roache P.J., „Quantification of Uncertainty in Computational Fluid Dynamics”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **29**, pp. 123-160, 1997.
- [4] Marini M., Desideri J.-A., Grasso F., Periaux J., “The FLOWNET Database Project” *ERCOFTAC Bulletin No. 52*, 2002.
- [5] AGARD, “Validation of Computational Fluid Dynamics”, *NATO Advisory Group for Aeronautical Research and Development*, Lisbon, Portugal, 1998.
- [6] Freitas C. J., Ed., „The CFD Triathlon: Three Laminar Flow Simulations by Commercial CFD Codes”, *ASME Fluids Engineering Conference*, **160**, Washington, DC, 1993.
- [7] *Proc. of 7th ERCOFTAC/IAHR Workshop on Refined Turbulence Modeling*, UMIST, Manchester, UK, 1998.
- [8] *Proc. of the Seminar EURO THERM 69 Heat and Mass Transfer In Solid-Liquid Phase Change Processes*, Bistra Castel, Ljubljana, Slovenia, 2003.
- [9] NPARC Alliance CFD Code Validation Web Site, <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/>
- [10] Coleman H. W., Steele W. G., “Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers, 2nd Edition, *Willey*, New York, 1999.
- [11] Freitas C. J., „Editorial Policy Statement on the Control of Numerical Accuracy”, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **115** (3),pp. 339-340,1993.
- [12] Gresho P. M., Taylor C., “Editorial”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **19**, p. iii, 1994.
- [13] AIAA, ”Editorial Policy Statement on Numerical Accuracy and Experimental Uncertainty”, *AIAA Journal*, **32** (1), p.3 , 1994.
- [14] ASME Editorial Board, “Journal of Heat Transfer Editorial Policy Statement on Numerical Accuracy”, *ASME Journal of Heat Transfer*, **116**, pp. 797-798,1994.
- [15] de Vahl Davis G., “Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **3** (3), pp. 249-264,1983.
- [16] Le Quere P., „Accurate Solutions to the Square Thermally Driven Cavity at High Rayleigh Number”, *Computers and Fluids*, **20** (1), pp.29-41, 1991
- [17] Le Quere P., Behnia M., „From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity“, *Journal of Fluid Mechanics*, **358**, pp. 81-107,1998.

- [18] IEEE, “IEEE Standard dictionary of electrical and electronics terms”, *ANSI/IEEE Std 100-1984*, 1984.
- [19] IEEE, “IEEE standard glossary of software engineering terminology”, *IEEE Std 610.12-1990*, New York, 1991.
- [20] ISO, “ISO 9000-3: Quality management and quality assurance standards – Part 3: guidelines for the application of ISO 9001 to the development, supply and maintenance of software”, *International Standards Organization*, Geneva, Switzerland, 1991.
- [21] AIAA, “Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations”, *AIAA-G-077-1998*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Reston, VA, 1998.
- [22] Roache P.J., “Verification of codes and calculations”, *AIAA Journal*, **36** (5), pp. 696-702, 1998.
- [23] Roache P.J., “Verification and validation in Computational Science and Engineering”, *Hermosa Publishers*, Albuquerque, NM, 1998.
- [24] Oberkampf W.L., Blottner F.G., Aeschliman D.P., “Methodology for Computational Fluid Dynamics Code Verification/Validation”, *AIAA Paper 95-2226*, *26th AIAA Fluid Dynamics Conference*, San Diego, California, 1995.
- [25] Stern F., Wilson R.V., Coleman H.W., Paterson E.G., “Comprehensive Approach to Verification and Validation of CFD Simulations – Part1: Methodology and Procedures”, *Journal of Fluids Engineering*, **123**, pp.793-802, 2001.
- [26] Roache P.J., “Conservatism of the grid convergence index in finite volume computations on steady-state fluid flow and heat transfer”, *Journal of Fluids Engineering*, **125** (4), pp.731-732, 2003.
- [27] Roache P.J., “Criticism of the >> correction factor<< verification method “”, *Journal of Fluids Engineering*, **125** (4), pp732-733, 2003
- [28] Oberkampf W.L., Trucano T.G., “Verification and validation in computational fluid dynamics”, *Progress in Aerospace Science*, **38**, pp.209-272, 2002.
- [29] Coleman H.W., “Some observation on Uncertainties and the Verification and Validation of a Simulation”, *Journal of Fluids Engineering*, **125** (4), pp.733-735, 2003.
- [30] Oberkampf W.L., Trucano T.G., “Validation methodology in computational fluid dynamics”, *AIAA Journal*, 2000-2549, 2000.
- [31] Richtmeyer R.D., Morton K.W., “Difference methods for initial-value problems”, *Interscience*, New York, 1967.
- [32] Johnson C., Rannacher R., Boman M., “Numerics and Hydrodynamics Stability: Toward Error Control in Computational Fluid Dynamics”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **32**, pp.1058-1079, 1995
- [33] Ciarlet G., “The Finite Element Method for Elliptic Problems”, *NorthHolland Publishing Co.*, 1978.

- [34] Roache P.J., “Code verification by the method of manufactured solutions”, *Journal of Fluids Engineering*, **124** (1), 2002.
- [35] Salari K., Roache P.J., “The Influence of Sweep on Dynamic Stall Produced by a Rapidly Pitching Wing”, *AIAA Paper 90-9581*, 1990.
- [36] Huang H., Li M., „Finite-Difference Approximation for the Velocity-Vorticity Formulation on Staggered and Non-Staggered Grids”, *Computers and Fluids*, **26** (1), pp.59-82, 1995.
- [37] Wang C.Y., “Exact Solutions of the Steady-State Navier-Stokes Equations”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **23**, pp.159-177,1991.
- [38] Kovacevic I., Poredos A., Sarler B., “Solving the Stefan problem with the radial basis function collocation method”, *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, **44** (6), pp.575-599, 2003.
- [39] Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T., “High-Re Solutions for Incompressible Flows Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”, *Journal of Computational Physics*, **48**, pp.387-411, 1982.
- [40] Hortman M., Peric M., Scheuerer G., „Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench-mark solutions”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **11**, pp. 189-207, 1990.
- [41] Richardson L.F., “The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with Application to the Stress in a Masonry Dam”, *Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **210**, pp. 307-357, 1908.
- [42] Ferziger J.H., “Estimation and Reduction of Numerical Error”, Proc. of Fluids Engineering Conference, *FED - Vol.158*, Washington, 1993.
- [43] Khosla P.K., Rubin S.G., “A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme”, *Computers and Fluids*, **2**, pp.207-209, 1974.
- [44] Babuska I., Strouboulis T., Updhayay C.S., “A Model Study of the Quality of A Posteriori Error Estimators for Linear Elliptic Problems. Error Estimation in the Interior of Patchwise Uniform Grid of Triangles”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **114**, pp.307-378, 1994.
- [45] Babuska I., Strouboulis T., Gangaraj S.K., Updhayay C.S., “Pollution Error in the h-Version of the Finite Element Method and the Local Quality of the Recovered Derivatives”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **140**, pp.1-37, 1997.
- [46] Chang S., Haworth D.C., “Adaptive Grid Refinement Using Cell-Level and Global Imbalances”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **24**, pp. 375-392, 1997.
- [47] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., “A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, pp. 337-357, 1987.
- [48] Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C., “Superconvergence Recovery Technique and A Posteriori Error Estimates”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**, pp.1321-1339, 1990.

- [49] Pelletier D., Ignat L., "On the Accuracy of the Grid Convergence Index and the Zhu-Zienkiewicz Error Estimator", *Joint JSME-ASME Fluid Mechanics Meeting, Quantification of Uncertainty in Computational Fluids Dynamics*, ASME FED Vol. **213**, pp. 31-36, 1995.
- [50] Pelletier D., Ignat L., Ilinca F., "An Adaptive Finite Element Method for Conjugate Heat Transfer", *AIAA Paper 95-0637, AIAA 33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada, 1997
- [51] Aeschliman D.P., Oberkampf W.L., „Experimental Methodology for Computational Fluid Dynamics Code Validation”, *SAND95-1189*, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1997.
- [52] Marvin J.G., "Perspective on Computational Fluid Dynamics Validation", *AIAA Journal*, **33** (10), pp.1778-1787, 1995.
- [53] Moffat R.J., "Contribution to the Theory of Uncertainty Analysis for Single-Sample Experiments", *The 1980-81 AFOSR/HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows*, **1**, ThermoSciences Division, Mechanical Engineering Department, Stanford University, 1981.
- [54] ERCOFTAC Fluid Dynamics Databases <http://ercoftac.mech.surrey.ac.uk>
- [55] NAS Data Set Archive <http://www.nas.nasa.gov>
- [56] QNET-CFD <http://www.qnet-cfd.net>
- [57] ASME Journal of Fluids Engineering <http://www.asme.org>
- [58] Muller A., Ed. Proc. of the Basel World CFD User Days 1994, *Second World Conference in Applied Computational Fluid Dynamics*, Basel, Switzerland, 1994.
- [59] Muller A., Loffler B. Eds. Proc. of the Basel World CFD User Days 1996, *Third World Conference in Applied Computational Fluid Dynamics*, Basel, Switzerland, 1996.
- [60] Upson C.D., Gresho P.M., Lee R.L., "Finite-element simulation of thermally induced convection in an enclosed cavity", *Report UCID-18602*, Lawrence Livermore Lab., Livermore, California, 1980.
- [61] Quon C. "Effects of grid distribution on the computation of high Rayleigh convection in a differentially heated cavity", *Proc. of Natn. Symp. On Numerical Methods in Heat Transfers*, Univ. of Maryland, Baltimore, 1981.
- [62] Winters K., "Prediction of laminar natural convection in heated cavities", *Numerical Methods in Heat Transfer*, **2**, pp.179-204, Wiley, New York, 1983.
- [63] Lauriat G., Altimir I., "A new formulation of the SADI method for the prediction of natural convection flows in cavities", *Computers and Fluids*, **13**, 1983.
- [64] Chenoweth D.R., Paolucci S., "Natural Convection in an enclosed vertical layer with large horizontal temperature differences", *Journal of Fluid Mechanics*, **169**, 1986.

- [65] Haldenwang P., Labrosse G., “2-D and 3-D spectral Chebyshev solutions for free convection at high Rayleigh number”, *Proc. of 6th Finite Element Methods in Flow Problems*, pp. 261-266, 1986.
- [66] Banaszek J., Jaluria Y., Kowalewski T.A., Rebow M., „Semi-Implicit FEM Analysis of Natural Convection in Freezing Water”, *Numerical Heat Transfer, Part A*, **36**, pp.449-472,1999.
- [67] Kowalewski T.A., Cybulski A., „Experimental and numerical investigation of natural convection in freezing water”, *Proc. of Conf. On Heat Transfer with Change of Phase*, Kielce, 61 (2), pp. 7-16, 1996.
- [68] Kowalewski T.A., Rebow M., „Freezing of Water in a Differentially Heated Cubic Cavity”, *International Journal on Computational Fluid Dynamics*, **11**, pp.193-210,1999.
- [69] Hiller W.J., Koch St., Kowalewski T.A., Stella F., “Onset of natural convection in a cube”, *International Journal Heat and Mass Transfer*, **36**, pp. 3251-3263, 1993.
- [70] Giangi M., Kowalewski T.A., Stella F., Leonardi E., “Natural Convection during ice formation: numerical simulation vs. experimental results”, *Comp. Assisted Mech. And Eng. Scs.*, **7**, pp. 321-342,2000.
- [71] Giangi M., Stella F., Kowalewski T.A., “Phase-change problems with free convection: fixed grid simulation”, *Comp. & Vis. Scs.*, **2**, pp.123-130, 1999.
- [72] Zubkov P.T., Kalabin E.V., “Numerical Investigation of the Natural Convection of Water in the Neighborhood of the Density Inversion Point for Grashof Number up to 10^6 ”, *Fluid Dynamics*, **36** (6), pp. 944-951, 2001.
- [73] Gebhart B., Mollendorf J., “A new density relation for pure and saline water”, *Deep Sea Res.*, **24**, 831,1977.
- [74] Le Quere P., “Transition to unsteady natural convection in a tall water-filled cavity”, *Phys. Fluids A*, **2** (4), 1990.
- [75] Paterson J., Imberg J. “Unsteady natural convection in a rectangular cavity”, *J. Fluid Mechanics*, **100**, pp. 65-86, 1980.
- [76] Bejan A. “Convection Heat Transfer”, *John Wiley & Sons*, 2nd Edition, New York, 1995.
- [77] Schladow S.G., Paterson J.C., Street R.L., “Transient flow in a side-heated cavity at high Rayleigh number: a numerical study”, *J. Fluid Mech.*, **200**, pp. 121-148, 1989.
- [78] Patterson J.C., Armifield S.W., “Transient features of natural convection in a cavity”, *J. Fluid Mech.*, **219**, pp.469-497, 1990.
- [79] Armifield S.W., Patterson J.C., ”Wave properties of natural-convection boundary layers”, *J. Fluid Mech.*, **239**, pp. 195-211, 1992.
- [80] Schopf W., Patterson J.C., “Natural Convection in a side-heated cavity: visualization of the initial flow features”, *J. Fluid Mech.*, **295**, pp. 357-379, 1995.

- [81] Hiller W., Kowalewski T. A., “Simultaneous Measurement of the Temperature and Velocity Fields In Thermal Convective Flows”, *Flow Visualization IV, Hemisphere*, pp. 617-622, Paris, 1987.
- [82] Quénot G. M., “Image Matching Using Dynamic Programming: Application to Stereovision and Image Image Interpolation”, *Proc. IMAGE' COM*, pp. 265-270, 1996.
- [83] Quénot G. M., Pakleza J., Kowalewski T. A., “Particle Image Velocimetry Using Optical Flow for Image Analysis”, *Proc. 8th International Symposium on Flow Visualisation*, Sorrento, Italy, 1998.
- [84] Kowalewski T. A., Cybulski A., Sobiecki T., “Experimental Model for Casting Problems”, *Computational Methods and Experimental Measurements*, **1**, pp. 179-188, WIT Press, Southampton, 2001.
- [85] Michalek T., Kowalewski T.A., “Experimental model of mould filling flow”, *Proc. of Eurotherm 69 Seminar, Heat and Mass Transfer In Solid-Liquid Phase Change Processes*, Bistra Castle, Ljubljana, Slovenia, 2003.
- [86] Slattery J.C., “Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua”, *McGraw-Hill, Inc.*, 1972.
- [87] Truesdell C., Toupin R.A., “Handbuch der Physik”, **3** (1), *Springer-Verlag*, Berlin, 1960.
- [88] Woods L.C., „A Note on the Numerical Solution of Fourth Order Differential Equations“, *Aero. Quart.*, **5**, pp. 176-184, 1954.
- [89] Ferziger J.H., Peric M., „Computational Methods for Fluids Dynamics”, 2nd Edition, *Springer*, 1999.
- [90] Mallinson G.D., de Vahl Davis G., “The Method of the False Transient for the Solution of Coupled Elliptic Equations”, *J. Comp. Phys.*, **12**, pp.435-461, 1973.
- [91] Samarskii A.A., Andreyev V.B., “On a High Accuracy Difference Scheme for Elliptic Equations with Several Space Variables”, *USSR Comp. Math. and Math. Phys.*, **3**, pp. 1373-1382, 1963.
- [92] Ralston A., “Wstęp do analizy numerycznej”, *PWN*, Warszawa, 1971.
- [93] Golub G., Ortega J.M., „Scientific Computing. An Introduction with Parallel Computing”, *Academic Press Ltd.*, 1993.
- [94] Kelson N.A., “The laminar boundary layer regime for natural convection of air in a square cavity.” *Report 1990/FMT/3*, School of Mechanical and Industrial Engineering, Univ. New South Wales, Kensington, NSW.
- [95] Liu G. R., “Mesh-free Methods”, *CRC Press*, Boca Raton, 2003.
- [96] Atluri S. N., Shen S., “The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method”, *Tech Science Press*, Encino, 2002.
- [97] Sarler B., “Towards Mesh-free Computation of Transport Phenomena”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **26**, pp. 731-738, 2002.
- [98] De S., Bathe K.J., “The method of finite spheres”, *Computational Mechanics*, **25**, pp. 329-345, 2000.
- [99] Sadat H., Couturier S., “Performance and Accuracy of a Meshless Method For Laminar Natural Convection”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **37**, pp. 455-467, 2000.
- [100] Prax C., Salagnac P., Sadat H., “Diffuse Approximation and Control-Volume-Based Finite-Element Methods: A Comparative Study”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **34**, pp. 303-321, 1998.
- [101] Fluent 6.0., “Users Guide”, *Fluent Inc.*, Lebanon, NH 2002.

- [102] Fidap 8.7., “Users Guide”, *Fluent Inc.*, Lebanon, NH 2002.
- [103] Leonardi E., Kowalewski T. A., Timchenko V., De Vahl Davis G., “Effects of Finite Wall Conductivity on Flow Structures in Natural Convection”, *Proc. of Int. Conf. Comp. Heat and Mass Transfer*, Eds. A.A. Mohamad & I. Sezai, pp. 182-188, Eastern Mediterranean University Printinghouse, Cyprus, 1999.
- [104] Mallinson G. D., De Vahl Davis G., “Three Dimensional Natural Convection in a Box: A Numerical Study”, *J. Fluid Mech.*, **83**, pp. 1-31, 1977.
- [105] Michalek T., Kowalewski T. A., Saler B., “Natural Convection for Anomalous Density Variation of Water: Numerical Benchmark”, *Progress In Computational Fluid Dynamics*, **5** (3-5), pp. 158-170, 2005.
- [106] van Keulen F., Haftka R.T., Kim N.H. „Review of Options for Structural Design Sensitivity Analysis. Part1: Linear System”, *Elsevier Science*, 2004.
- [107] Haftka R.T., “Techniques for thermal sensitivity analysis”, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, **17**, pp.71-80,1981.
- [108] Sosnowski W., “Numeryczna symulacja, analiza wrażliwości i optymalizacja nieliniowych procesów deformacji konstrukcji”, 2003.
- [109] Burg C.O.E., Newman III J.C., “Computationally efficient, numerically exact design space derivatives via the complex Taylor’s series expansion method”, *Computers & Fluids*, **32**, pp. 373-383, 2003.
- [110] Borggaard J., Pelletier D., Turgeon E., “Parametric Uncertainty Analysis for Thermal Fluid Calculations”, *Nonlinear Analysis*, **47**, 4533-4543, 2001.
- [111] Blackwell B.F., Dowding K.J., Cochran R.J., “Development and implementation of sensitivity coefficient equations for heat conduction problems”, *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, **36** (1), 1999.
- [112] Dowding K.J., Blackwell B.F., “Sensitivity analysis for nonlinear heat conduction”, *Journal of Heat Transfer*, **123** (1), 2001.
- [113] Gu Y.X., Chen B.S., Zhang H.W., Grandhi R., “A sensitivity analysis method for linear and nonlinear transient heat conduction with precise time integration”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **24** (1), 2002.
- [114] Turgeon E., Pelletier D., Borggaard J., “A general continuous sensitivity equation formulation for complex flows”, *Proc. 8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, AIAA Paper 2000-4732, 2000.
- [115] Westerweel J., “Digital Particle Image Velocimetry – Theory and Application”, *Delft University Press*, 1993.
- [116] Hesselink L., “Digital Image Processing in Flow Visualization”, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20**, pp. 421-485, 1988.
- [117] Kowalewski T.A., “Particle image velocimetry and thermometry for two-phase flow problems”, *Visualization and Imaging in Transport Phenomena, Annals of the New York Academy of Scs.*, 972, pp.213-219, 2002.
- [118] Westerweel J., Nieuwstadt F. T. M., Flor J. B., “Measurement of Dynamics of Coherent Flow Structures Using Particle Image Velocimetry”, *Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, pp. 476-499, 1990.
- [119] Willert C. E., Gharib M., “Digital Particle Image Velocimetry”, *Experiments in Fluids*, **10**, pp. 181-193, 1991.

- [120] Raffel M., Willert C., Kompenhans J., „Particle Image Velocimetry. A Practical Guide”, *Springer*, Berlin, 1998.
- [121] Gouriet J. B., Stitou A., Riethmuller M. L., “Practical Implications Of Camera Resolution And Peak Locking In Actual Measurements”, *4th International Symposium on Particle Image Velocimetry, paper 1012, PIV 01, 2/3, September 17-19, Göttingen, Germany, 2001.*
- [122] Matlab, UserGuide v. 7.0.4, *The MathWorks Inc.*, 1994-2005.
- [123] Kowalewski T.A., Cybulski A. Michalek T., Kowalczyk M. „Laboratoryjne wzorce do walidacji programów odlewniczych”, *Prace IPPT*, Warszawa, 2005.
- [124] Michalek T., Kowalewski T.A., „Numerical Benchmark based on Natural Convection of Freezing Water”, *Proc. Of 4th International Conference on Computational Heat and Mass Transfer*, Cachan, Paris, 2005.
- [125] Kowalewski T.A., Rebow M., “An experimental benchmark for freezing water in the cubic cavity”, *Adv. In Computational Heat Transfer*, pp. 149-156, Begel House Inc., NY 1998.
- [126] Kowalewski T.A. “Experimental validation of numerical codes in thermally driven flows”, *Adv. In Computational Heat Transfer*, pp.1 – 15, Begel House Inc., NY 1998.
- [127] Michalek T., Kowalewski T.A., “Simulations of the water freezing process – numerical benchmarks”, *TASK Quarterly*, **7** (3),pp. 389-408, 2003.

Lp	Termiczne warunki brzegowe				ΔT [°C]	Liczby bezwymiarowe		Parametry pomiarów				
	T_L [°C]	T_P [°C]	T_h [°C]	T_c [°C]		Pr	Ra	Posiew	PIV	PIT	Kamera/Rozdzielczość ¹	Δt [ms]
1	10	-5	10.11	-2.56	12.67	11.78	$1.9 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000,500
2	10	-5	10.10	-2.69	12.79	11.78	$1.9 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000,500
3	10	-5	10.03	-2.70	12.73	11.78	$1.9 \cdot 10^6$	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	2000,1000,500
4	10	-4	10.02	-1.78	11.80	11.78	$1.7 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000,500
5	10	-4	9.94	-1.86	11.83	11.78	$1.7 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542,1280x1024	1000,500
6	10	-4	10.05	-1.80	11.85	11.78	$1.7 \cdot 10^6$	Pyłki sosny	●	○	768x542	2000,1000,500
7	10	-3	10.02	-0.84	10.86	11.78	$1.6 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000,500
8	10	-3	9.87	-0.95	10.82	11.78	$1.6 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000,500
9	10	-3	10.14	-0.99	11.13	11.78	$1.6 \cdot 10^6$	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	2000,1000,500
10	10	-2	10.01	0.08	9.93	11.78	$1.5 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000,500
11	10	-2	9.90	0.05	9.85	11.78	$1.5 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000,500
12	10	-2	10.22	0.05	10.17	11.78	$1.5 \cdot 10^6$	BM100/R6C12W/S33	●	●	768x542	1000
13	10	-2	10.14	-0.03	10.17	11.78	$1.5 \cdot 10^6$	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	2000,1000,500
14	10	-1	10.03	1.05	8.98	11.78	$1.3 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000
15	10	-1	9.99	1.02	8.97	11.78	$1.3 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000
16	10	-1	10.03	1.07	8.96	11.78	$1.3 \cdot 10^6$	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	2000,1000
17	10	0	10.06	1.93	8.13	11.78	$1.2 \cdot 10^6$	MixC	●	●	768x542	1000
18	10	0	10.12	1.82	8.30	11.78	$1.2 \cdot 10^6$	BM100/R6C12W/S33	●	●	768x542	1000
19	10	0	10.04	1.90	8.14	11.78	$1.2 \cdot 10^6$	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	2000,1000,500
20	10	3	10.24	4.41	5.83	9.53	$1.1 \cdot 10^7$	BM100/R6C12W/S33	●	●	768x542	1000
21	12	0	11.85	2.21	9.64	9.53	$1.9 \cdot 10^6$	BM100/R6C12W/S33	●	●	768x542	1000
22	15	0	14.21	2.31	11.90	9.53	$2.3 \cdot 10^7$	Pyłki sosny	●	○	768x542	1000,500
23	8	2	8.61	3.22	5.39	11.31	$9.1 \cdot 10^6$	BM100/R6C12W/S33	●	●	768x542	1000
24	8	4	8.74	5.01	3.73	9.53	$7.5 \cdot 10^6$	BM100/R6C12W/S33	●	●	768x542	1000
25	20	0	18.33	3.99	14.34	9.53	$2.9 \cdot 10^7$	TM445	●	●	768x542	1000,500
26	20	0	18.67	4.05	14.62	9.53	$2.9 \cdot 10^7$	TM317	●	●	768x542	500
27	20	0	18.70	4.03	14.67	9.53	$2.9 \cdot 10^7$	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	1000,500,300,200,100

¹ Rozdzielczość jednoznacznie określa kamerę, którą rejestrowano obrazy. Rozdzielczość 768x542 oznacza, że rejestrowano obrazy kamerą 3CCD Sony, natomiast 1280x1024 oznacza rejestrację kamerą CMOS pco1200 hs PCO Imaging.

Lp	Termiczne warunki brzegowe				Liczby bezwymiarowe			Parametry pomiarów				
	T _L [°C]	T _P [°C]	T _h [°C]	T _c [°C]	ΔT [°C]	Pr	Ra	Posiew	PIV	PIT	Kamera/Rozdzielczość ²	Δt [ms]
28	25	0	22.63	5.25	17.38	9.53	3.4*10 ⁷	TM445	●	●	768x542	500,200
29	25	0	22.72	5.41	17.31	9.53	3.4*10 ⁷	TM317	●	●	768x542	500
30	25	0	22.78	5.33	17.45	9.53	3.4*10 ⁷	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	500,200,100
31	25	5	23.18	8.96	14.22	7.01	9.1*10 ⁷	TM445	●	●	768x542	1000,500,200
32	30	0	27.23	6.76	20.47	7.01	1.3*10 ⁸	TM445	●	●	768x542	1000,500,200,100
33	30	0	27.20	6.87	20.33	7.01	1.3*10 ⁸	TM317	●	●	768x542	500,200
34	30	0	27.08	6.91	20.17	7.01	1.3*10 ⁸	TC1001	●	●	768x542	500,200
35	30	0	27.23	6.71	20.52	7.01	1.3*10 ⁸	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	500,300,200,100
36	30	5	27.68	10.31	17.37	7.01	1.1*10 ⁸	TM445	●	●	768x542	500,200,100
37	35	0	31.78	8.46	23.32	7.01	1.5*10 ⁸	TM317	●	●	768x542	500,200,100,50
38	35	0	31.78	8.48	23.30	7.01	1.5*10 ⁸	TC1001	●	●	768x542	500,200
39	35	0	31.66	8.25	23.41	7.01	1.5*10 ⁸	Pyłki sosny	●	○	768x542	500,200
40	40	0	36.40	10.21	26.19	7.01	1.7*10 ⁸	TM317	●	●	768x542	500,200
41	40	0	36.43	10.05	26.38	7.01	1.7*10 ⁸	BM100/R20C10W/S33	●	○	768x542	500
42	40	0	36.30	10.19	26.11	7.01	1.7*10 ⁸	TC1001	●	●	768x542	500,200
43	40	0	36.32	9.98	26.34	7.01	1.7*10 ⁸	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	500,300,200,100,50
44	50	0	45.75	14.20	31.55	5.41	4.3*10 ⁸	TM317	●	●	768x542	500,200
45	50	0	45.80	13.81	31.99	5.41	4.3*10 ⁸	BM100/R20C10W/S33	●	○	768x542	500,200
46	50	0	45.83	14.04	31.79	5.41	4.3*10 ⁸	TC1001	●	●	768x542	500,200
47	50	0	45.60	13.62	31.98	5.41	4.3*10 ⁸	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	500,300,200,100,50
48	60	0	55.03	18.00	37.03	5.39	5.1*10 ⁸	TC1001	●	●	768x542	500,200
49	60	0	54.17	19.97	34.20	5.39	4.7*10 ⁸	Pyłki sosny	●	○	768x542,1280x1024	500,200,100,50

Tabela D.1. Zestawienie wykonanych eksperymentów wraz z termicznymi warunkami brzegowymi oraz innymi parametrami pomiarów.

² Rozdzielczość jednoznacznie określa kamerę, którą rejestrowano obrazy. Rozdzielczość 768x542 oznacza, że rejestrowano obrazy kamerą 3CCD Sony, natomiast 1280x1024 oznacza rejestrację kamerą CMOS pco1200.hs PCO Imaging.

Eksperyment Nr 1								ΔT	12.67	Pr 11.78				Ra	$1.9 \cdot 10^6$
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
10.0	0.3	-5.0	0.3	10.11	0.21	-2.56	0.18	10.54	0.21	10.42	0.15	14.94	0.66	25.76	0.27
PIV								PIT							
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)							
Δt				1000 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski	
Posiew				MixC				0.0	3.3	3.3	3.6	3.6	3.9	3.9	8.0
Dokładność pomiaru				0.24				0.11	0.18	0.18	0.25	0.25	0.48	0.5	0.66

Eksperyment Nr 4								ΔT	11.80	Pr 11.78				Ra	$1.7 \cdot 10^6$
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
10.0	0.3	-4.0	0.3	10.02	0.18	-1.78	0.18	10.62	0.18	10.46	0.18	15.11	0.54	25.84	0.58
PIV								PIT							
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)							
Δt				1000 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski	
Posiew				MixC				0.0	3.3	3.3	3.6	3.6	3.9	3.9	8.0
Dokładność pomiaru				0.24				0.11	0.18	0.18	0.25	0.25	0.48	0.5	0.66

Eksperyment Nr 7								ΔT	10.86	Pr 11.78				Ra	$1.6 \cdot 10^6$
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
10.0	0.3	-3.0	0.3	10.02	0.24	-0.84	0.21	10.69	0.21	10.63	0.21	15.21	0.6	26.6	0.75
PIV								PIT							
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)							
Δt				1000 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski	
Posiew				MixC				0.0	3.3	3.3	3.6	3.6	3.9	3.9	8.0
Dokładność pomiaru				0.21				0.11	0.18	0.18	0.25	0.25	0.48	0.5	0.66

Eksperyment Nr 11								ΔT	9.85	Pr 11.78				Ra	$1.5 \cdot 10^6$
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
10.0	0.3	-2.0	0.3	10.01	0.24	0.08	0.18	10.79	0.21	10.69	0.21	15.53	0.66	26.33	0.21
PIV								PIT							
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)							
Δt				1000 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski	
Posiew				MixC				0.0	3.3	3.3	3.6	3.6	3.9	3.9	8.0
Dokładność pomiaru				0.21				0.11	0.18	0.18	0.25	0.25	0.48	0.5	0.66

Eksperyment Nr 12								ΔT	10.17	Pr 11.78				Ra	$1.5 \cdot 10^6$
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
10.0	0.3	-2.0	0.3	10.22	0.12	0.05	0.12	10.89	0.15	10.81	0.12	15.44	0.33	26.28	0.63
PIV								PIT							
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)							
Δt				1000 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski	
Posiew				BM100/R6C12W/S33				5.5	6.4	6.4	6.5	6.5	7.5	7.5	9.5
Dokładność pomiaru				0.24				0.12	0.28	0.28	0.35	0.35	0.55	0.55	0.7

Szczegółowe zestawienie punktowych pomiarów temperatury dla eksperymentów (Tabela D1) oraz oszacowanie dokładności tych pomiarów.

Eksperyment Nr 14								ΔT	8.98		Pr 11.78		Ra		$1.3 \cdot 10^6$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
10.0	0.3	-1.0	0.3	10.03	0.24	1.05	0.21	10.69	0.21	10.63	0.21	-	-	26.67	0.75	
PIV								PIT								
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)								
Δt				1000 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski		
Posiew				MixC				0.0	3.3	3.3	3.6	3.6	3.9	3.9	8.0	
Dokładność pomiaru				0.24				0.11	0.18	0.18	0.25	0.25	0.48	0.5	0.66	

Eksperyment Nr 18								ΔT	8.30		Pr 11.78		Ra		$1.2 \cdot 10^6$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
10.0	0.3	0.0	0.3	10.12	0.12	1.82	0.18	10.80	0.15	10.76	0.18	-	-	24.02	0.72	
PIV								PIT								
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)								
Δt				1000 ms				czerwony		Żółty		zielony		Niebieski		
Posiew				BM100/R6C12W/S33				5.5	6.4	6.4	6.5	6.5	7.5	7.5	9.5	
Dokładność pomiaru				0.21				0.12	0.28	0.28	0.35	0.35	0.55	0.55	0.7	

Eksperyment Nr 21								ΔT	9.64		Pr 9.53		Ra		$1.9 \cdot 10^6$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
12.0	0.3	0.0	0.3	11.85	0.24	2.21	0.21	12.28	0.21	12.12	0.21	-	-	26.94	1.2	
PIV								PIT								
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)								
Δt				1000 ms				czerwony		Żółty		zielony		Niebieski		
Posiew				BM100/R6C12W/S33				5.5	6.4	6.4	6.5	6.5	7.5	7.5	9.5	
Dokładność pomiaru				0.23				0.12	0.28	0.28	0.35	0.35	0.55	0.55	0.7	

Eksperyment Nr 25								ΔT	14.34		Pr 9.53		Ra		$2.9 \cdot 10^7$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
20.0	0.3	0.0	0.3	18.33	0.18	3.99	0.18	17.69	0.18	17.05	0.18	19.94	0.57	25.37	0.45	
PIV								PIT								
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)								
Δt				500 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski		
Posiew				TM445				15.3	16.3	16.3	16.4	16.4	16.8	16.8	18.0	
Dokładność pomiaru				0.36				0.08	0.21	0.21	0.28	0.28	0.53	0.53	0.66	

Eksperyment Nr 27								ΔT	14.67		Pr 9.53		Ra		$2.9 \cdot 10^7$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
20.0	0.3	0.0	0.3	18.67	0.24	4.05	0.18	18.22	0.48	17.76	0.63	20.17	0.27	26.52	0.96	
PIV								Uwagi:								
Kamera/Rozdzielczość				920x911												
Δt				200 ms												
Posiew				Pyłki sosny												
Dokładność pomiaru				0.24												

Szczegółowe zestawienie punktowych pomiarów temperatury dla eksperymentów (Tabela D1) oraz oszacowanie dokładności tych pomiarów.

Eksperyment Nr 28								ΔT	17.38				Pr 9.53		Ra	$3.4 \cdot 10^7$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
25.0	0.3	0.0	0.3	22.63	0.18	5.25	0.18	21.40	0.21	20.47	0.18	-	-	24.63	1.41		
PIV								PIT									
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)									
Δt				500 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski			
Posiew				TM445				15.3	16.3	16.3	16.4	16.4	16.8	16.8	18.0		
Dokładność pomiaru				0.57				0.08	0.21	0.21	0.28	0.28	0.53	0.53	0.66		

Eksperyment Nr 30								ΔT	17.45				Pr 9.53		Ra	$3.4 \cdot 10^7$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
25.0	0.3	0.0	0.3	22.78	0.21	5.33	0.15	21.49	0.21	20.67	0.21	-	-	25.46	1.10		
PIV								Uwagi:									
Kamera/Rozdzielczość				920x911													
Δt				200 ms													
Posiew				Pyłki sosny													
Dokładność pomiaru				0.3													

Eksperyment Nr 31								ΔT	14.22				Pr 7.01		Ra	$9.1 \cdot 10^7$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
25.0	0.3	5.0	0.3	23.18	0.18	8.96	0.18	22.16	0.18	21.44	0.21	-	-	26.12	0.27		
PIV								PIT									
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)									
Δt				500 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski			
Posiew				TM445				15.3	16.3	16.3	16.4	16.4	16.8	16.8	18.0		
Dokładność pomiaru				0.69				0.08	0.21	0.21	0.28	0.28	0.53	0.53	0.66		

Eksperyment Nr 32								ΔT	20.47				Pr 7.01		Ra	$1.3 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
30.0	0.3	0.0	0.3	27.23	0.24	6.76	0.18	25.51	0.21	24.40	0.18	25.08	0.33	25.84	0.18		
PIV								PIT									
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)									
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski			
Posiew				TM445				15.3	16.3	16.3	16.4	16.4	16.8	16.8	18.0		
Dokładność pomiaru				0.72				0.08	0.21	0.21	0.28	0.28	0.53	0.53	0.66		

Eksperyment Nr 33								ΔT	20.33				Pr 7.01		Ra	$1.3 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
30.0	0.3	0.0	0.3	27.20	0.18	6.87	0.18	25.39	0.18	24.33	0.21	24.96	0.39	23.93	0.78		
PIV								PIT									
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)									
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski			
Posiew				TM317				19.5	20.4	20.4	20.5	20.5	22.9	22.9	32.0		
Dokładność pomiaru				0.96				0.09	0.16	0.16	0.25	0.25	0.42	0.42	0.66		

Szczegółowe zestawienie punktowych pomiarów temperatury dla eksperymentów (Tabela D1) oraz oszacowanie dokładności tych pomiarów.

Eksperyment Nr 35								ΔT	20.52		Pr 7.01		Ra	$1.3 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
30.0	0.3	0.0	0.3	27.23	0.24	6.71	0.18	25.48	0.18	24.43	0.18	25.07	0.42	26.75	1.5
PIV								Uwagi:							
Kamera/Rozdzielczość				920x911											
Δt				200 ms											
Posiew				Pyłki sosny											
Dokładność pomiaru				0.33											

Eksperyment Nr 36								ΔT	17.37		Pr 7.01		Ra	$1.1 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
30.0	0.3	5.0	0.3	27.68	0.18	10.31	0.18	22.16	0.18	21.44	0.21	-	-	26.12	0.27
PIV								PIT							
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)							
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski	
Posiew				TM445				15.3	16.3	16.3	16.4	16.4	16.8	16.8	18.0
Dokładność pomiaru				1.11				0.08	0.21	0.21	0.28	0.28	0.53	0.53	0.66

Eksperyment Nr 37								ΔT	23.32		Pr 7.01		Ra	$1.5 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
35.0	0.3	0.0	0.3	31.78	0.18	8.46	0.15	29.41	0.18	28.05	0.15	-	-	24.88	1.43
PIV								PIT							
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)							
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski	
Posiew				TM317				19.5	20.4	20.4	20.5	20.5	22.9	22.9	32.0
Dokładność pomiaru				0.93				0.09	0.16	0.16	0.25	0.25	0.42	0.42	0.66

Eksperyment Nr 38								ΔT	23.30		Pr 7.01		Ra	$1.5 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
35.0	0.3	0.0	0.3	31.78	0.87	8.48	0.99	29.5	0.90	24.29	0.78	-	-	25.19	0.72
PIV								PIT							
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)							
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski	
Posiew				TC1001				26.0	26.6	26.6	26.7	26.7	27.2	27.2	32.0
Dokładność pomiaru				1.50				0.35	0.40	0.40	0.43	0.43	0.59	0.59	0.66

Eksperyment Nr 39								ΔT	23.41		Pr 7.01		Ra	$1.5 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}	
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.
35.0	0.3	0.0	0.3	31.66	0.21	8.25	0.21	29.43	0.18	28.16	0.21	-	-	26.61	0.99
PIV								Uwagi:							
Kamera/Rozdzielczość				920x911											
Δt				200 ms											
Posiew				Pyłki sosny											
Dokładność pomiaru				0.42											

Szczegółowe zestawienie punktowych pomiarów temperatury dla eksperymentów (Tabela D1) oraz oszacowanie dokładności tych pomiarów.

Eksperyment Nr 40								ΔT	26.19				Pr 7.01		Ra	$1.7 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
40.0	0.3	0.0	0.3	36.40	0.15	10.21	0.15	33.62	0.15	32.07	0.15	30.37	1.2	25.57	0.66		
PIV								PIT									
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)									
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski			
Posiew				TM317				19.5	20.4	20.4	20.5	20.5	22.9	22.9	32.0		
Dokładność pomiaru				1.2				0.09	0.16	0.16	0.25	0.25	0.42	0.42	0.66		

Eksperyment Nr 42								ΔT	26.11				Pr 7.01		Ra	$1.7 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
40.0	0.3	0.0	0.3	36.30	0.87	10.19	0.99	33.41	1.11	32.01	0.99	30.12	1.11	25.90	0.42		
PIV								PIT									
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)									
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski			
Posiew				TC1001				26.0	26.6	26.6	26.7	26.7	27.2	27.2	32.0		
Dokładność pomiaru				1.53				0.35	0.40	0.40	0.43	0.43	0.59	0.59	0.66		

Eksperyment Nr 43								ΔT	26.34				Pr 7.01		Ra	$1.7 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
40.0	0.3	0.0	0.3	36.32	0.18	9.98	0.18	33.59	0.18	32.05	0.18	29.40	1.26	26.76	1.05		
PIV								Uwagi:									
Kamera/Rozdzielczość				920x911													
Δt				100 ms													
Posiew				Pyłki sosny													
Dokładność pomiaru				0.45													

Eksperyment Nr 44								ΔT	31.55				Pr 5.41		Ra	$4.3 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
50.0	0.3	0.0	0.3	45.75	1.71	14.20	1.23	42.06	0.24	40.16	0.18	35.51	0.54	26.33	0.66		
PIV								PIT									
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)									
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski			
Posiew				TM317				19.5	20.4	20.4	20.5	20.5	22.9	22.9	32.0		
Dokładność pomiaru				1.23				0.09	0.16	0.16	0.25	0.25	0.42	0.42	0.66		

Eksperyment Nr 46								ΔT	31.79				Pr 5.41		Ra	$4.3 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}			
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.		
50.0	0.3	0.0	0.3	45.83	1.11	14.04	0.96	41.89	0.84	39.99	0.84	35.68	0.60	24.16	0.51		
PIV								PIT									
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)									
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski			
Posiew				TC1001				26.0	26.6	26.6	26.7	26.7	27.2	27.2	32.0		
Dokładność pomiaru				1.83				0.35	0.40	0.40	0.43	0.43	0.59	0.59	0.66		

Szczegółowe zestawienie punktowych pomiarów temperatury dla eksperymentów (Tabela D1) oraz oszacowanie dokładności tych pomiarów.

Eksperyment Nr 47								ΔT	31.98		Pr 5.41		Ra		$4.3 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
50.0	0.3	0.0	0.3	45.60	0.18	13.62	0.21	41.85	0.18	39.97	0.21	35.48	0.54	25.79	0.45	
PIV								Uwagi:								
Kamera/Rozdzielczość				920x911												
Δt				100 ms												
Posiew				Pyłki sosny												
Dokładność pomiaru								0.84								

Eksperyment Nr 48								ΔT	37.03		Pr 5.39		Ra		$5.1 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
60.0	0.3	0.0	0.3	55.03	0.99	18.00	0.99	50.06	0.93	47.83	0.87	-	-	23.86	0.93	
PIV								PIT								
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)								
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski		
Posiew				TC1001				26.0	26.6	26.6	26.7	26.7	27.2	27.2	32.0	
Dokładność pomiaru								2.1	0.35	0.40	0.40	0.43	0.43	0.59	0.59	0.66

Eksperyment Nr 50								ΔT	36.79		Pr 5.39		Ra		$5.1 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
60.0	0.3	-5.0	0.3	54.17	3.03	18.01	1.36	50.17	1.08	47.85	0.84	-	-	23.86	0.39	
PIV								PIT								
Kamera/Rozdzielczość				520x509				Zakres wrażliwości barwnej (Temp./Hue)								
Δt				200 ms				czerwony		żółty		zielony		niebieski		
Posiew				TC1001				26.0	26.6	26.6	26.7	26.7	27.2	27.2	32.0	
Dokładność pomiaru								2.16	0.35	0.40	0.40	0.43	0.43	0.59	0.59	0.66

Eksperyment Nr 50								ΔT	15.48		Pr 9.53		Ra		$3.1 \cdot 10^7$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
20.0	0.3	0.0	0.3	18.70	0.3	3.22	0.3	18.02	0.21	17.35	0.21	20.17	0.42	26.39	0.36	
PIV								T_{13}		T_{14}		T_{ext2}				
Kamera/Rozdzielczość				1280x1024				Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
Δt				100 ms				17.67	0.27	13.64	1.83	26.37	0.33			
Posiew				Pyłki sosny				Uwagi:								
Dokładność pomiaru																0.48

Eksperyment Nr 51								ΔT	23.62		Pr 7.01		Ra		$1.53 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
30.0	0.3	0.0	0.3	27.29	0.24	3.67	0.45	25.54	0.24	24.34	0.27	25.08	0.33	26.50	0.3	
PIV								T_{13}		T_{14}		T_{ext2}				
Kamera/Rozdzielczość				1280x1024				Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
Δt				100 ms				21.19	0.36	13.42	1.38	26.5	0.33			
Posiew				Pyłki sosny				Uwagi:								
Dokładność pomiaru																0.84

Szczegółowe zestawienie punktowych pomiarów temperatury dla eksperymentów (Tabela D1) oraz oszacowanie dokładności tych pomiarów.

Eksperyment Nr 52								ΔT	28.04		Pr	7.01		Ra	$1.81 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
40.0	0.6	0.0	0.6	36.56	0.27	8.52	0.42	33.69	0.3	32.04	0.42	29.40	0.42	23.72	1.45	
PIV								T_{13}		T_{14}		T_{ext2}				
Kamera/Rozdzielczość				1280x1024				Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
Δt				100 ms				25.12	0.99	16.34	1.16	24.32	1.44			
Posiew				Pyłki sosny				Uwagi:								
Dokładność pomiaru				1.02												

Eksperyment Nr 53								ΔT	31.89		Pr	5.41		Ra	$4.38 \cdot 10^8$	
T_L		T_P		$T_h = T_{16}$		$T_c = T_{12}$		T_7		T_{10}		T_{15}		T_{ext}		
Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
50.0	1.0	0.0	1.0	46.24	0.27	14.36	0.27	42.50	0.21	40.64	0.18	35.48	0.54	26.33	0.57	
PIV								T_{13}		T_{14}		T_{ext2}				
Kamera/Rozdzielczość				1280x1024				Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	Wart.	Dokł.	
Δt				100 ms				30.60	0.51	20.59	0.9	27.44	0.96			
Posiew				Pyłki sosny				Uwagi:								
Dokładność pomiaru				1.02												

Szczegółowe zestawienie punktowych pomiarów temperatury dla eksperymentów (Tabela D1) oraz oszacowanie dokładności tych pomiarów.

Temperatura						U _x		U _y			
Y=0.5L		X=0.5L		X=0.9L		X=0.5L		Y=0.5L		X=0.9L	
X [mm]	T [C]	Y [mm]	T [C]	Y [mm]	T [C]	Y [mm]	V _x [mm/s]	X [mm]	V _y [mm/s]	Y [mm]	V _y [mm/s]
0.8	9.50	0.8	4.50	4.9	3.95	1.4	-0.01	2.1	1.10	1.4	0.00
2.0	8.50	14.0	5.50	18.3	3.90	3.6	-0.12	4.3	0.66	3.6	-0.02
2.8	7.00	25.1	6.00	31.2	3.60	5.8	-0.26	6.4	0.18	5.8	-0.02
3.2	6.50	36.2	6.40	34.8	3.30	8.0	-0.33	8.6	-0.02	8.0	-0.01
3.9	6.00	44.4	6.45	37.2	2.00	10.2	-0.38	10.7	-0.03	10.2	0.00
12.2	6.00	49.4	7.00	39.7	3.50	12.4	-0.39	12.9	-0.02	12.4	0.02
22.6	6.45	56.3	7.50	41.6	3.90	14.6	-0.35	15.0	0.00	14.6	0.04
29.8	6.00	63.3	8.00	42.6	4.00	16.8	-0.33	17.2	0.01	16.8	0.05
47.0	6.45	69.8	9.50	45.7	6.50	19.0	-0.25	19.3	0.00	19.0	0.06
58.0	6.40			48.3	7.00	21.2	-0.17	21.5	-0.01	21.2	0.05
65.4	7.00			58.1	7.50	23.4	-0.10	23.7	0.01	23.4	0.03
69.0	4.00			64.1	8.00	25.6	-0.07	25.8	0.01	25.6	0.01
71.2	3.75			71.7	9.50	27.8	-0.03	28.0	0.00	27.8	-0.03
72.1	3.45					30.0	-0.01	30.1	0.01	30.0	-0.09
77.3	2.00					32.2	-0.02	32.3	0.00	32.2	-0.19
78.4	1.00					34.4	0.00	34.4	0.01	34.4	-0.31
79.2	0.00					36.6	0.01	36.6	-0.01	36.6	-0.45
						38.8	0.02	38.7	0.01	38.8	-0.66
						41.0	0.05	40.9	0.02	41.0	-0.74
						43.2	0.04	43.0	0.01	43.2	-0.61
						45.4	0.02	45.2	0.00	45.4	-0.51
						47.6	0.02	47.3	-0.01	47.6	-0.39
						49.8	0.02	49.5	0.01	49.8	-0.29
						52.0	0.03	51.7	0.01	52.0	-0.19
						54.2	0.04	53.8	0.00	54.2	-0.12
						56.4	0.06	56.0	-0.01	56.4	-0.08
						58.6	0.09	58.1	-0.03	58.6	-0.06
						60.8	0.06	60.3	-0.12	60.8	-0.04
						63.0	0.15	62.4	-0.26	63.0	-0.03
						65.2	0.19	64.6	-0.58	65.2	-0.02
						67.4	0.14	66.7	-0.82	67.4	-0.01
						69.6	0.21	68.9	-0.95	69.6	-0.01
						71.8	0.11	71.0	-0.67	71.8	-0.01
						74.0	0.13	73.2	-0.19	74.0	0.00
						76.2	0.07	75.3	0.24	76.2	0.00
						78.4	0.00	77.5	0.58	78.4	0.00
								79.6	0.18		

Tabela D.2. Rozwiązania wzorcowe dla profili temperatury, poziomej i pionowej składowej prędkości (Eksperyment nr 12).

Wzorzec eksperymentalny przepływu konwekcji naturalnej
($Ra = 1.5 \cdot 10^6$, $Pr = 11.78$)

Ra = $3.1 \cdot 10^7$ (Eksperyment Nr 51)

	P1_VX	P1_VY	P2_VX	P2_VY	P3_VX	P3_VY	P4_VX	P4_VY	P5_VX	P5_VY	P6_VX	P6_VY
N	151	151	151	151	151	151	151	151	151	151	151	151
Średnia	-4.86E-02	-2.48E+00	-2.01E-01	-1.85E+00	-2.41E-01	-7.56E-01	-5.82E-01	-3.15E-02	-6.03E-01	-3.45E-02	-2.09E-01	-5.80E-02
Odch. Std.	5.58E-02	5.81E-01	6.80E-02	4.22E-01	9.75E-02	2.19E-01	1.39E-01	4.59E-02	1.56E-01	4.07E-02	5.94E-02	3.31E-02
Skośność	-0.661	-3.633	-0.828	-3.666	-0.910	-3.032	-3.396	-0.456	-3.480	-0.042	-1.414	0.269
Kurtoza	4.794	14.716	7.336	15.867	3.757	12.368	13.719	4.029	14.107	3.240	6.328	7.192

Ra = $1.53 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 52)

	P1_VX	P1_VY	P2_VX	P2_VY	P3_VX	P3_VY	P4_VX	P4_VY	P5_VX	P5_VY	P6_VX	P6_VY
N	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120
Średnia	-1.32E-01	-4.55E+00	-3.37E-01	-3.58E+00	-5.54E-01	-1.98E+00	-9.37E-01	-9.79E-02	-1.04E+00	-1.26E-01	-7.16E-02	-1.43E-02
Odch. Std.	1.07E-01	1.59E+00	1.68E-01	1.28E+00	2.37E-01	7.48E-01	4.49E-01	7.17E-02	4.03E-01	6.45E-02	1.05E-01	3.01E-02
Skośność	-1.120	-0.685	-0.768	-0.686	-0.625	-0.661	-0.642	-0.480	-0.676	-0.586	-1.441	-1.657
Kurtoza	4.748	1.510	2.664	1.513	2.821	1.505	1.502	2.869	1.514	3.010	3.439	8.557

Ra = $1.81 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 53)

	P1VX	P1VY	P2VX	P2VY	P3VX	P3VY	P4VX	P4VY	P5VX	P5VY	P6VX	P6VY
N	134	134	134	134	134	134	134	134	134	134	134	134
Średnia	-1.18E-01	-5.07E+00	-3.21E-01	-3.81E+00	-6.40E-01	-2.34E+00	-9.01E-01	-3.37E-02	-1.00+00	-1.04E-01	-9.69E-02	-1.62E-02
Odch. Std.	1.28E-01	1.82E+00	1.63E-01	1.36E+00	2.32E-01	8.33E-01	3.73E-01	4.42E-02	3.55E-01	8.11E-02	1.52E-01	3.92E-02
Skośność	1.819	-1.559	-1.466	-1.571	-1.403	-1.507	-1.404	-0.739	-1.523	-1.838	-1.682	-0.538
Kurtoza	16.790	3.811	5.110	3.737	3.843	3.688	3.293	4.684	3.452	10.253	4.504	4.809

Ra = $4.38 \cdot 10^8$ (Eksperyment Nr 54)

	P1VX	P1VY	P2VX	P2VY	P3VX	P3VY	P4VX	P4VY	P5VX	P5VY	P6VX	P6VY
N	138	138	138	138	138	138	138	138	138	138	138	138
Średnia	-1.64E-01	-3.56E+00	-3.05E-01	-3.68E+00	-6.65E-01	-1.85E+00	-1.01E+00	-8.24E-02	-1.04E+00	-1.13E-01	-2.40E-01	-1.26E-02
Odch. Std.	1.60E-01	1.34E+00	2.18E-01	1.34E+00	3.19E-01	8.19E-01	3.19E-01	7.24E-02	3.26E-01	8.03E-02	1.54E-01	3.20E-02
Skośność	-0.812	-1.700	-0.805	-1.707	-1.008	-0.872	-1.776	-0.745	-1.884	-0.449	-0.257	-0.682
Kurtoza	8.841	5.722	5.037	5.308	3.966	4.441	4.393	2.809	5.144	2.508	2.797	4.719

Tabela D.3. Zestawienie momentów statystycznych (średnia, odchylenie standardowe, skośność, kurtoza) opisujących rozkłady prędkości poziomej i pionowej w punktach P1,P2,P3,P4,P5,P6

