

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
OŚRODEK MECHANIKI

Rozprawa doktorska

**MODELOWANIE POŚLIZGÓW I ROZWOJU  
USZKODZEŃ W STREFIE KONTAKTU  
CIAŁ SPREŻYSTO-PLASTYCZNYCH**

**mgr inż. Stanisław Stupkiewicz**

Promotor:

**prof. dr hab. Zenon Mróz**

Warszawa 1996

*Pracę dedykuję mojej Żonie.  
Pragnę podziękować Jej za wsparcie, poświęcenie i wyrozumiałość.*

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>1</b>
1.1	Cel i zakres pracy . . . . .	1
1.2	Problemy kontaktowe z tarciem . . . . .	5
1.2.1	Sformułowanie dla małych poślizgów . . . . .	6
1.2.2	Problemy kontaktowe w zakresie dużych deformacji . . . . .	8
1.2.3	Sprężone zagadnienia termo-mechaniczne . . . . .	10
1.2.4	Numeryczna analiza problemów kontaktowych . . . . .	11
1.2.5	Problemy sprężystości z tarciem . . . . .	15
1.3	Mechanizmy i opis procesów tarcia i zużycia . . . . .	16
1.3.1	Modele tarcia . . . . .	16
1.3.2	Zużycie powierzchni . . . . .	22
1.4	Zniszczenie — odpajanie i delaminacja . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Własności wybranych problemów brzegowych z tarciem</b>	<b>26</b>
2.1	Klasa problemów kontaktowych o proporcjonalnej odpowiedzi na proporcjonalne obciążenie . . . . .	26
2.1.1	Sformułowanie monotonicznego problemu quasi-statycznego . . . . .	27
2.1.2	Sformułowanie równoważnego problemu statycznego . . . . .	27
2.1.3	Inne konstytutywne prawa kontaktowe . . . . .	29
2.1.4	Przykład — pasek na podłożu z tarciem . . . . .	30
2.1.5	Dyskusja . . . . .	32
2.2	Problem tarczy na podłożu z tarciem . . . . .	32
2.2.1	Sformułowanie problemu . . . . .	32
2.2.2	Analiza całkowitej dysypacji i prawo propagacji frontu delaminacji . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Modelowanie konstytutywne tarcia i zużycia</b>	<b>37</b>
3.1	Model anizotropowego tarcia i zużycia . . . . .	37
3.1.1	Mikro-mechaniczny model tarcia ortotropowego . . . . .	39
3.1.2	Ogólny opis tarcia anizotropowego . . . . .	45
3.1.3	Modelowanie zużycia anizotropowego . . . . .	47
3.1.4	Przykładowe modele tarcia anizotropowego . . . . .	49
3.1.5	Sprężony model tarcia i zużycia . . . . .	55
3.1.6	Podsumowanie . . . . .	57
3.2	Fenomenologiczny model tarcia i zużycia w procesach obróbki plastycznej . . . . .	57

3.2.1	Krytyczna analiza istniejących modeli . . . . .	57
3.2.2	Model tarcia powierzchni o podwójnej skali nierówności . . . . .	59
3.2.3	Splaszczanie nierówności pod wpływem ściskania i ścinania . . . . .	65
3.2.4	Model uwzględniający cząstki trzeciego ciała . . . . .	71
3.2.5	Uogólnienie prawa zużycia Archarda . . . . .	74
3.3	Modelowanie tarcia — przykłady numeryczne . . . . .	76
3.3.1	Konsystentna macierz styczna . . . . .	76
3.3.2	Przykłady numeryczne . . . . .	80
3.3.3	Podsumowanie . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Pasek i włókno — proste modele jednowymiarowe</b>	<b>93</b>
4.1	Proste modele paska na podłożu . . . . .	93
4.2	Oddziaływanie tarcia i postępującej delaminacji . . . . .	96
4.2.1	Podłoże kruche . . . . .	96
4.2.2	Podłoże sprężyste . . . . .	97
4.3	Obciążenie termiczne paska na podłożu ciernym . . . . .	98
4.4	Włókno w matrycy — efekt Poissona . . . . .	100
4.4.1	Sformułowanie problemu . . . . .	102
4.4.2	Obciążanie . . . . .	104
4.4.3	Odciażanie i dociażanie . . . . .	106
4.5	Włókno w matrycy — dylatacja warstwy kontaktowej . . . . .	107
4.5.1	Oddziaływanie nierówności kontaktujących się powierzchni . . . . .	107
4.5.2	Odcinkami liniowy model dylatacji . . . . .	109
4.5.3	Identyfikacja parametrów modelu . . . . .	112
4.6	Włókno w matrycy — ewolucja stanu powierzchni . . . . .	116
4.6.1	Model konstytutywny zużycia . . . . .	116
4.6.2	Uproszczona metoda rozwiązania . . . . .	118
4.6.3	Symulacja wyników eksperymentalnych . . . . .	119
4.7	Podsumowanie . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Belka na podłożu ciernym</b>	<b>124</b>
5.1	Belka pół-nieskończona . . . . .	124
5.1.1	Sformułowanie problemu . . . . .	125
5.1.2	Własności układu belka-podłoże . . . . .	126
5.1.3	Krzywa ugięcia belki . . . . .	131
5.1.4	Obciążenie proporcjonalne . . . . .	134
5.1.5	Model tarcia sprężystego . . . . .	135
5.1.6	Przybliżona metoda rozwiązania . . . . .	136
5.1.7	Wyniki i dyskusja . . . . .	137
5.1.8	Podsumowanie . . . . .	148
5.2	Belka o skończonej długości . . . . .	148
5.2.1	Ocena jakościowa oddziaływania belki z podłożem . . . . .	149
5.2.2	Sformułowanie problemu . . . . .	150
5.2.3	Przykład . . . . .	151

5.2.4	Odspajanie belki w modzie III . . . . .	155
5.2.5	Odspajanie belki w obecności sił tarcia . . . . .	156
5.2.6	Podsumowanie . . . . .	158
<b>6</b>	<b>Podsumowanie pracy i wnioski końcowe</b>	<b>159</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>164</b>

# Rozdział 1

## Wprowadzenie

### 1.1 Cel i zakres pracy

Kontakt ciał oraz związane z nim zjawiska — takie jak tarcie i zużycie — są niezwykle często spotykane tak w technice jak i w życiu codziennym. W istocie własności kontaktowe bardzo często mają decydujący wpływ na zachowanie się układów mechanicznych, technologii wykonania detali, ich użyteczność, trwałość, a nawet estetykę.

Rozwój nowoczesnych materiałów i technologii, stwarza zapotrzebowanie na nowe, dokładniejsze modele zachowań układów mechanicznych. Równocześnie, doskonalone metody numeryczne oraz rosnące możliwości obliczeniowe komputerów pozwalają modelować coraz bardziej złożone, rzeczywiste problemy techniczne. Jednakże często poważnym ograniczeniem okazuje się brak wystarczająco dokładnych modeli konstytutywnych. Dotyczy to w szczególności sposobu modelowania zjawisk kontaktowych, których fizyczna złożoność i różnorodność pozostaje ciągle w dysonansie z prostotą stosowanych modeli.

Ogólnie pojmowane pojęcie kontaktu obejmuje również problemy, w których występuje powierzchnia międzyfazowa (ang. *interface*). Angielskie określenie *interface problems* (nie mające równoważnego odpowiednika w języku polskim) określa w mechanice szeroką klasę zagadnień, w których występuje powierzchnia nieciągłości — nieruchoma (materialna, na przykład powierzchnia kontaktu ciał lub różnych składników kompozytu) lub ruchoma (związana z przemianami fazowymi, propagacją zniszczenia, itp.).

Tematyka niniejszej pracy związana jest z tak pojętymi zjawiskami kontaktu, przy czym główny punkt ciężkości położony jest na oddziaływania cierne kontaktujących się powierzchni oraz ich wpływ na rozwój uszkodzeń (zużycie powierzchni, delaminację) występujących w strefie kontaktu.

Podjmując próby modelowania tarcia należy sobie zdawać sprawę z różnorodności materiałów spotykanych w parach kontaktowych i warunków, w jakich one współpracują. Bogactwo warunków kontaktowych, rozumianych jako zbiór wszystkich cech pary kontaktowej, które decydują o jej własnościach ciernych, jest ogromne. Należy się więc spodziewać występowania bardzo różnych własności ciernych, a także różnorodności praw rządzących zjawiskami kontaktu, tarcia i zużycia.

Jako przykład całkowicie odmiennych warunków kontaktowych mogą posłużyć następujące pary kontaktowe: gumowa opona z asfaltem (z możliwością wystąpienia wody,

piasku i innych zanieczyszczeń na powierzchni drogi); odkuwka stalowa z matrycą (o temperaturach odpowiednio 1100°C i 200°C); smarowane elementy łożysk tocznych; łożysko igiełkowe w precyzyjnym urządzeniu, na przykład w zegarku. Biorąc pod uwagę dodatkowe czynniki — takie jak obecność i rodzaj smaru, czy cząstek trzeciego ciała w strefie kontaktu, prędkość poślizgu, wielkość nacisków kontaktowych, temperatura powierzchni i inne — nawet ta sama para materiałów może wykazywać bardzo zróżnicowane własności.

W każdej dziedzinie modelowania zjawisk fizycznych, przy budowaniu modeli należy dokonać wyboru między jego ogólnością a dokładnością. Klasyczne prawo tarcia Coulomba można zaliczyć do grupy modeli o dużej ogólności. W niektórych warunkach kontaktowych stosowność prawa Coulomba jest bardzo ograniczona — na przykład w procesach obróbki plastycznej ze względu na wysokie ciśnienia kontaktowe. Jednakże jego prostota i względna dokładność w wielu rodzajach warunków kontaktowych powoduje, że jest ono powszechnie stosowane. Nawet wtedy, gdy prawa rządzące rzeczywistymi oddziaływaniami ciernymi są dużo bardziej złożone. Należy zwrócić uwagę na fakt, że w literaturze jest bardzo niewiele przykładów rozwiązań konkretnych problemów brzegowych z tarciem, w których stosowane są prawa tarcia inne niż prawo Coulomba (por. np. Kobayashi i in. [53]).

Prawo Coulomba jest tylko fenomenologicznym opisem obserwowanego zjawiska proporcjonalności siły tarcia do siły normalnej. Nie pozwala więc przewidzieć wartości współczynnika tarcia (jedynego parametru modelu). W tym celu tworzone są mikro-mechaniczne modele kontaktu i tarcia bazujące na mierzalnych własnościach powierzchni (chropowatość, twardość, itp.). Inną możliwością są pomiary doświadczalne dające praktyczne wartości współczynników oraz będące bazą dla porównań wartości przewidywanych na drodze teoretycznej.

Dla uniknięcia ograniczeń prawa Coulomba tworzone są specjalizowane modele tarcia, które przy wykorzystaniu większej liczby parametrów oraz bardziej złożonych praw starają się lepiej opisywać własności cierne w wybranych warunkach kontaktowych. W połączeniu z symulacją komputerową ulepszone modele tarcia i zużycia mogą być przydatne na przykład w optymalizacji procesów technologicznych. Rozdział 3 zawiera, należący do tej klasy, model tarcia i zużycia dla procesów obróbki plastycznej.

Własności nowoczesnych materiałów, takich jak kompozyty, w decydującym stopniu zależą nie tylko od własności samych składników kompozytu, ale również od współpracy tych składników. Ma to miejsce na przykład w kompozytach ceramicznych, w których matryca i włókna są materiałami kruchymi. Jednakże dzięki odpowiednio dobranym własnościom kontaktowym na powierzchniach międzyfazowych mogą wykazywać bardzo wysoką wytrzymałość na zniszczenie (ang. *toughness*).

Jednym z głównych mechanizmów zniszczenia w kompozytach warstwowych jest delaminacja, czyli odspajanie poszczególnych warstw kompozytu. W podejściach do modelowania tych zjawisk przeważnie uwzględnia się delaminację połączoną z wyboczeniem na zdelaminowanej części. Jednakże w kompozytach, w których, oprócz obciążeń płytowych całego elementu, występują dodatkowo międzywarstwowe naprężenia ściskające, na zdelaminowanych częściach tych powierzchni należy się spodziewać oddziaływań ciernych. Zamieszczone w pracy przykłady odspajania paska i belki od podłoża, w obecności sił tarcia na odspojonej powierzchni, są przyczynkiem do lepszego poznania wzajemnych

interakcji oddziaływań ciernych oraz postępującej delaminacji.

Ważnym aspektem związanym z opisem zjawisk kontaktu i tarcia jest ich silna nieliniowość. Po pierwsze, z kontaktem dwóch ciał jest zawsze związany warunek ich wzajemnego nie przenikania się. Ogólnie, powierzchnia kontaktu nie jest znana *a priori* — jest częścią rozwiązania i może się zmieniać w trakcie procesu. Drugim zjawiskiem towarzyszącym kontaktowi i względnym przemieszczeniom powierzchni jest tarcie. Ze względu na możliwe dwa stany kontaktu ciernego (poślizg lub przyleganie) i niejednoznaczność sił tarcia w stanie przylegania, oddziaływania cierne są źródłem silnej nieliniowości zagadnień z tarcie. Tak więc nawet kontakt dwóch ciał liniowo sprężystych prowadzi do problemów nieliniowych. Uwzględnienie nieliniowości materiałowej (nieliniowa sprężystość, plastyczność) oraz geometrycznej (duże deformacje) jest oczywiście dodatkowym źródłem nieliniowości w ogólnych problemach kontaktowych. Co za tym idzie, problemy kontaktowe są ciągle wyzwaniem tak od strony teoretycznej, jak i w obliczeniach numerycznych.

Formalnie można wyróżnić trzy rodzaje zagadnień brzegowych — zagadnienia: kontaktowe, z tarcie oraz kontaktowe z tarcie. W zagadnieniach kontaktowych zaniedbuje się oddziaływania styczne do powierzchni kontaktu, czyli tarcie. W zagadnieniach brzegowych z tarcie znane są powierzchnia kontaktu i normalne naciski kontaktowe, natomiast nie jest znany kierunek działania sił tarcia (ich wartość bezwzględna wynika ze znanych normalnych sił kontaktowych). Najogólniejszy jest przypadek problemów kontaktowych z tarcie, gdzie częścią rozwiązania jest wyznaczenie normalnych i stycznych oddziaływań kontaktowych.

Niniejsza praca podsumowuje badania autora prowadzone w zakresie szeroko rozumianej mechaniki kontaktu, głównie w jej dwóch podobszarach: modelowania konstytutywnego zjawisk kontaktowych (tarcie, zużycie) oraz opisu zachowania ciał sprężystych oddziałujących z podłożem ciernym. W drugim przypadku nacisk położony jest na odspajanie i delaminację zachodzące wzdłuż powierzchni międzyfazowych oraz na oddziaływania cierne występujące na zdelaminowanej części tej powierzchni. Rozdziały 2–5 zawierają oryginalne, częściowo opublikowane już wyniki.

Rozdział 2 poświęcony jest dwóm wybranym klasom zagadnień brzegowych z tarcie. Pokazano warunki równoważności statycznych i quasi-statycznych problemów kontaktowych z tarcie dla kilku prostych modeli konstytutywnych kontaktu i tarcia. Sformułowano również dwuwymiarowy problem tarczy na podłożu z tarcie, w którym dodatkowo uwzględniono postępujące odspajanie tarczy od podłoża. Wyprowadzono lokalny, energetyczny warunek propagacji szczeliny odspajającej o prostej postaci. W przypadkach jednowymiarowych (pasek, belka) jest on całkowicie równoważny prostym, wytrzymałościowym warunkom odspajania. Rozdziały 4 oraz 5 zawierają rozwiązania jednowymiarowych przypadków ogólnego dwuwymiarowego zagadnienia z tarcie.

Rozdział 3 zawiera opis dwóch konstytutywnych modeli tarcia i zużycia. Pierwszy model jest uogólnieniem klasycznego tarcia Coulomba na przypadek anizotropii powierzchni kontaktowych. Opis tarcia i zużycia zaproponowany przez Mroza i Stupkiewicza [73] został rozszerzony o prosty model wiążący zmiany anizotropii ze zużyciem powierzchni. Podano także ulepszony model tarcia ortotropowego z niestowarzyszonym prawem poślizgu. Druga część rozdziału 3 poświęcona jest modelowaniu tarcia i zużycia w warunkach kontaktowych charakterystycznych dla procesów obróbki plastycznej. Uwzględ-

nione zostały zjawiska takie jak plastyczne zgniatanie nierówności powierzchni obrabianego materiału i związany z tym wzrost rzeczywistej powierzchni kontaktu, tarcie na skutek orania (ang. *ploughing*) oraz zaproponowany został prosty model uwzględniający obecność cząstek trzeciego ciała na powierzchni kontaktowej. Ponadto model uwzględnia wpływ zmian temperatury powierzchni kontaktowych. Powiązanie odpowiadających sobie mechanizmów tarcia i zużycia pozwoliło na sformułowanie nowego prawa zużycia powierzchni, będącego uogólnieniem klasycznego prawa Archarda [4]. Ostatnia część rozdziału 3 poświęcona jest analizie numerycznej problemów kontaktowych z zastosowaniem modelu tarcia dla procesów obróbki plastycznej przedstawionego w rozdziale 3.2.2. Wyprowadzona jest konsystentna macierz sztywności elementu kontaktowego przy założeniu, że powierzchnia narzędzia jest sztywna i modelowana elementami liniowymi oraz policzone są proste przykłady dwuwymiarowe. Wyniki numeryczne ilustrują własności nowego modelu tarcia.

W rozdziale 4, na prostym, jednowymiarowym przykładzie paska spoczywającego na podłożu ciernym, zilustrowane są różne możliwe modele oddziaływania z podłożem i ich interakcje (Mróz, Stupkiewicz [74]). W szczególności dyskutowany jest wpływ tarcia na propagację odspojenia. Rozdział ten zawiera również praktyczny przykład dotyczący wyciągania włókna z matrycy w kompozytach o kruchej matrycy (np. w kompozytach ceramicznych). Zmodyfikowany model paska na podłożu jest powszechnie stosowany do opisu współpracy włókna z matrycą w takich kompozytach. Przedstawiony model uwzględnia dylatację na skutek oddziaływania nierówności powierzchni kontaktowych (Stupkiewicz [105]).

W rozdziale 5 przedstawiony został problem oddziaływania sprężystej belki z podłożem ciernym. W przypadku belki pół-nieskończonej (Stupkiewicz, Mróz [104]) przyłożone obciążenie zginające belkę w płaszczyźnie podłoża jest równoważone jedynie przez siły tarcia między belką a podłożem. Zaprezentowane rozwiązanie wykazuje cechę samopodobieństwa, gdy obciążenie belki rośnie monotonicznie i spełnia pewien dodatkowy warunek. Zaprezentowano również nowe wyniki (rozdział 5.2) dotyczące belki o skończonej długości, która uginając się jednocześnie ślizga się z tarciem po podłożu. Rozwiązanie prostego przykładu belki utwierdzonej ilustruje ciekawe efekty, które dla względnie dużych sił tarcia w znaczący sposób mogą wpływać na zachowanie układu — w szczególności, gdy dodatkowo rozpatrywane jest postępujące odspajanie belki od podłoża. Pokazano, że odciążenie, czyli zmniejszenie przyłożonego obciążenia może spowodować dalsze odspajanie od podłoża.

Poniżej, w kolejnych podrozdziałach, zaprezentowany jest przegląd literatury dotyczącej kontaktu i tarcia. Przedstawione jest sformułowanie problemów kontaktowych, będące punktem wyjścia dla rozważań zawartych w rozdziale 2. Jednocześnie zdefiniowane kinematyczne i statyczne miary oddziaływań kontaktowych są podstawowymi zmiennymi modeli tarcia dyskutowanych w rozdziale 3. Rozdział 1.3 stanowi przegląd modeli tarcia i zużycia będący wprowadzeniem do rozdziałów poświęconych modelowaniu konstytutywnemu tych zjawisk. W końcu w rozdziale 1.4 omówione są krótko podstawy mechaniki zniszczenia jako baza dla rozważań dotyczących wzajemnego oddziaływania tarcia i postępującego odspajania (delaminacji).

## 1.2 Problemy kontaktowe z tarciem

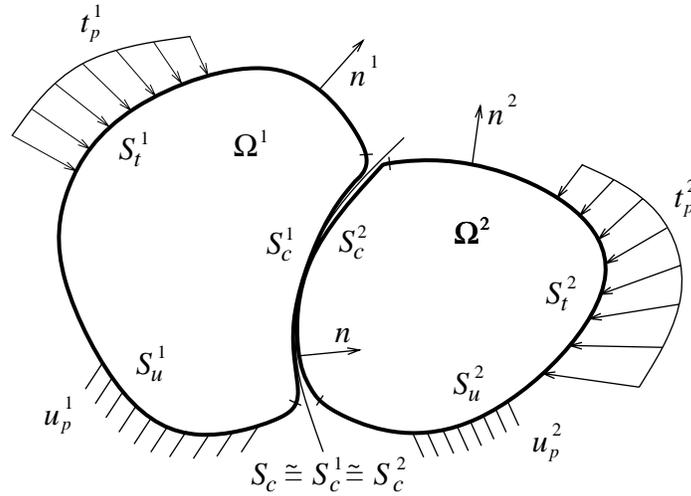
Rygorystyczne sformułowanie ogólnych problemów kontaktowych z tarciem jest trudnym i ciekawym problemem badawczym. Podobnie — ich dyskretyzacja metodą elementów skończonych i metody rozwiązywania otrzymanych nieliniowych problemów przyrostowych. W bieżącym podrozdziale zostaną krótko omówione podstawy formułowania i metod rozwiązywania problemów kontaktowych będące bazą dla tematów poruszanych w dalszej części pracy. Szczegółowe zagadnienia związane z tą tematyką wykraczają poza zakres niniejszej pracy.

W klasycznych problemach brzegowych w mechanice ciała stałego definiuje się część brzegu, na której zadane są obciążenia oraz część brzegu, na której zadane są przemieszczenia. Sformułowanie takich problemów zawiera równania równowagi, związki kinematyczne oraz równania konstytutywne ciał odkształcalnych (sprężystych, sprężysto-plastycznych, itp.). W zagadnieniach kontaktowych, oprócz tej klasycznej części sformułowania, należy dodatkowo wyróżnić część brzegu, na której możliwy jest wzajemny kontakt dwóch (lub więcej) ciał. Następnie definiuje się kinematyczne miary kontaktu (odległość normalna i prędkość poślizgu) oraz odpowiadające im wielkości statyczne (normalne naciski kontaktowe i naprężenia cierne). W końcu należy przyjąć związki konstytutywne wiążące ze sobą te wielkości.

Najprostszymi związkami tego typu są warunek kontaktu Signoriniego oraz prawo tarcia Coulomba. W klasycznych podejściach do opisu problemów kontaktowych, ze względu na matematyczną postać otrzymywanych zależności, warunki te były najczęściej traktowane jako ograniczenia nałożone na deformację kontaktujących się ciał. W bardziej nowoczesnym podejściu związki między kinematycznymi i statycznymi miarami kontaktowymi traktowane są jako prawa konstytutywne kontaktu (Curnier i in. [25]; Klarbring [52]). Ogólniejsze problemy kontaktowe, w których brane są pod uwagę również zjawiska generacji i przewodzenia ciepła lub zużycia powierzchni kontaktowych, wymagają dodatkowej części sformułowania opisującej te procesy (np. równania przewodzenia ciepła) oraz równań wiążących wielkości opisujące te procesy z pozostałymi wielkościami kinematycznymi i statycznymi (Zmitrowicz [130, 132]; Johansson, Klarbring [46]; Stromberg i in. [103]). Opis różnych klas problemów kontaktowych wiąże się z koniecznością przyjęcia odpowiednich (często bardzo się różniących) sformułowań. Przykładowo, w analizie połączeń często wystarczy przyjęcie założenia o małych przemieszczeniach i małych poślizgach. Z kolei procesy obróbki plastycznej wiążą się z dużymi deformacjami, sprzężoną termo-plastycznością, zazwyczaj również z efektami lepkimi. Odnośne modele i sformułowania można znaleźć na przykład w pracach: Mróz, Raniecki [72]; Raniecki, Samanta [93]; Nowacki [80]; Perzyna [86, 87]; Rodič [94]; Simo, Miehe [95].

Ponieważ równania konstytutywne klasycznej plastyczności oraz tarcia nie zależą od prędkości (odkształceń, poślizgów) w tego typu zadaniach parametr obciążenia można utożsamić z czasem rzeczywistym i wystarczy prowadzić analizę quasi-statyczną (o ile procesy są na tyle powolne, że można pominąć dynamiczne siły masowe). Jednakże w wielu przypadkach sama natura badanych procesów wymaga sformułowania dynamicznego (Hughes i in. [37]; Wriggers i in. [123]; Bajer, Bogacz [10]; Szefer i in. [112]).

Najogólniejszym przypadkiem problemu kontaktowego z tarciem jest kontakt dwóch



Rysunek 1.1: Dwa ciała w kontakcie (małe poślizgi).

ciał doznających dużych deformacji, a co za tym idzie również dużych poślizgów. Pod pojęciem dużych poślizgów należy rozumieć poślizgi towarzyszące procesom, w których ustalony punkt jednego ciała kontaktuje się z różnymi punktami drugiego ciała i gdy względne przemieszczenia punktów w strefie kontaktu trzeba traktować jako skończone. Skończone poślizgi wiążą się zazwyczaj ze zmianami kierunku wektora normalnego do powierzchni kontaktowej. Obok zmian konfiguracji wywołanych skończoną deformacją kontaktujących się ciał, jest to główny powód konieczności uwzględniania skończonych przemieszczeń względnych.

Poniżej przedstawione zostanie najprostsze sformułowanie problemu kontaktowego, mianowicie kontakt dwóch ciał sprężystych przy założeniu małych odkształceń i małych przemieszczeń względnych punktów na powierzchni kontaktu. Następnie zostaną skrótkowo omówione problemy kontaktowe o skończonych deformacjach i poślizgach, przy czym poruszone zostaną aspekty charakterystyczne jedynie dla problemów kontaktowych. W szczególności część sformułowania dotycząca dużych deformacji sprężysto-plastycznych — wykraczająca poza zakres pracy — nie będzie szczegółowo omawiana.

### 1.2.1 Sformułowanie dla małych poślizgów

W celu zdefiniowania wielkości opisujących stan kontaktu oraz wprowadzenia podstawowych praw konstytutywnych kontaktu, rozważmy przypadek quasi-statycznego kontaktu dwóch ciał sprężystych. Dzięki uproszczonej kinematyce kontaktu sformułowanie takiego zagadnienia jest stosunkowo proste. Uwzględnienie dużych deformacji i dużych poślizgów wymaga przedefiniowania niektórych zależności, jednakże struktura problemu nie zmienia się.

Pokazane na rysunku 1.1 dwa ciała zajmują obszary  $\Omega^\alpha \in \mathcal{R}^3$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Części brzegu, na których określone są przemieszczenia i obciążenia oznaczone są odpowiednio przez  $S_u^\alpha$  i  $S_t^\alpha$ , a potencjalne powierzchnie kontaktu przez  $S_c^\alpha$  ( $S_u^\alpha, S_t^\alpha, S_c^\alpha$  nie mają części wspólnej oraz  $S_u^\alpha \cup S_t^\alpha \cup S_c^\alpha = \partial\Omega^\alpha$ ).

Z założenia małych względnych przemieszczeń wynika, że każdemu punktowi na powierzchni kontaktowej  $S_c^1$  odpowiada dokładnie jeden, ustalony punkt na powierzchni  $S_c^2$ . A zatem obie powierzchnie  $S_c^1$  i  $S_c^2$  mogą być utożsamione i reprezentowane przez jedną wspólną powierzchnię kontaktu  $S_c$ . Dzięki takiemu założeniu kinematyka kontaktu ulega znacznemu uproszczeniu. Mianowicie para oddziałujących ze sobą punktów obu ciał może być reprezentowana przez jeden punkt  $\mathbf{x} \in S_c$ . Wektor  $\mathbf{d}$  opisujący odległość dwóch punktów w (potencjalnym) kontakcie zdefiniowany jest jako:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_c, \quad (1.1)$$

gdzie  $\mathbf{u}^\alpha$  są polami przemieszczeń obu ciał. Przez  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^1$  oznaczmy jednostkowy wektor normalny do powierzchni  $S_c$  skierowanym na zewnątrz  $\Omega^1$ . Wektor odległości  $\mathbf{d}$  można teraz rozłożyć na składowe normalną i styczną do powierzchni kontaktu:

$$d_N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}, \quad \mathbf{d}_T = (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{d}.$$

Oddziaływania kontaktowe opisane są wektorem nacisków kontaktowych  $\mathbf{t} = \mathbf{t}^1 = -\mathbf{t}^2$ , którego składowe mają postać

$$t_N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{t}_T = (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{t}. \quad (1.2)$$

Quasi-statyczny problem kontaktowy polega na znalezieniu dwóch pól przemieszczeń  $\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}, \lambda)$  ( $\mathbf{x} \in \Omega^\alpha$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ ) spełniających następujący układ równań:

- równanie równowagi

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \mathbf{f}_p^\alpha = 0, \quad (1.3)$$

- równanie konstytutywne (liniowej sprężystości)

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathbf{C}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha, \quad (1.4)$$

- warunki zgodności odkształceń

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^\alpha + \nabla^T \mathbf{u}^\alpha), \quad (1.5)$$

- warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\alpha &= \mathbf{u}_p^\alpha && \text{na } S_u^\alpha, \\ \boldsymbol{\sigma}^\alpha \mathbf{n}^\alpha &= \mathbf{t}_p^\alpha && \text{na } S_t^\alpha, \\ \boldsymbol{\sigma}^\alpha \mathbf{n} &= \mathbf{t} && \text{na } S_c, \end{aligned} \quad (1.6)$$

- warunki początkowe

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (1.7)$$

- normalne prawo kontaktowe (warunek Signoriniego)

$$d_N \geq 0, \quad t_N \leq 0, \quad d_N t_N = 0, \quad (1.8)$$

- prawo konstytutywne tarcia (warunek tarcia Coulomba)

$$\begin{cases} |\mathbf{t}_T| \leq -\mu t_N & \text{jeżeli } |\dot{\mathbf{d}}_T| = 0, \\ |\mathbf{t}_T| = -\mu t_N, \quad \frac{\mathbf{t}_T}{|\mathbf{t}_T|} = \frac{\dot{\mathbf{d}}_T}{|\dot{\mathbf{d}}_T|} & \text{jeżeli } |\dot{\mathbf{d}}_T| > 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

W powyższych równaniach kropka oznacza pochodną względem czasu  $\lambda$  (parametru obciążenia quasi-statycznego). Zadane siły masowe  $\mathbf{f}_p^\alpha$ , obciążenia zewnętrzne  $\mathbf{t}_p^\alpha$  i wymuszenia kinematyczne  $\mathbf{u}_p^\alpha$  są znanymi funkcjami czasu. Trzecie z równań (1.6), definiujące wektor nacisków kontaktowych  $\mathbf{t}$ , formalnie nie jest warunkiem brzegowym. Jednakże zostało umieszczone obok naprężeniowego warunku brzegowego na brzegu  $S_t^\alpha$  ze względu na analogiczną strukturę.

Ze względu na przyrostowy charakter prawa tarcia Coulomba (1.9) zagadnienia kontaktowe z tarciem należą do klasy problemów zależnych od historii. W związku z tym ich rozwiązanie musi być poszukiwane przyrostowo.

Należy zwrócić uwagę, że normalne naprężenia kontaktowe  $t_N$  zdefiniowane przez równania (1.2) i (1.6) są niedodatnie, co znajduje odzwierciedlenie w warunkach Signoriniego (1.8). Często używana jest odwrotna konwencja, w której naprężenia kontaktowe  $p_N$  są nieujemne i mają interpretację ciśnień kontaktowych:

$$p_N = -t_N, \quad \mathbf{p}_T = \mathbf{t}_T. \quad (1.10)$$

Naprężenia kontaktowe  $p_N$ ,  $\mathbf{p}_T$ , zgodne z powyższą konwencją, są bardziej naturalne w zastosowaniu do modelowania konstytutywnego zjawisk kontaktowych i będą często używane w dalszej części pracy.

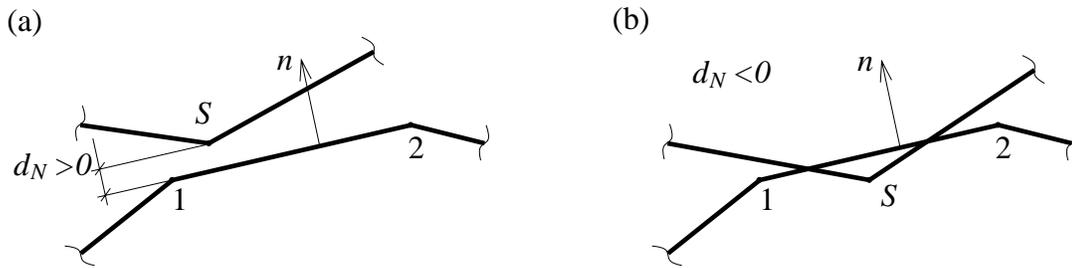
Lokalne równanie równowagi (1.3) z warunkami brzegowymi (1.6) może być zastąpione równaniem wyrażającym całkowitą zasadę prac przygotowanych:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \int_{\Omega^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \nabla \delta \mathbf{u}^\alpha d\Omega^\alpha - \int_{\Omega^\alpha} \mathbf{f}_p^\alpha \delta \mathbf{u}^\alpha d\Omega^\alpha - \int_{S_t^\alpha} \mathbf{t}_p^\alpha \delta \mathbf{u}^\alpha dS^\alpha \right) = \\ - \int_{S_c} (t_N \delta d_N + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{d}_T) dS, \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdzie  $\delta \mathbf{u}^\alpha$  oznacza pole kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeń wirtualnych ( $\delta \mathbf{u}^\alpha = 0$  na  $S_u^\alpha$ ), a  $\delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{u}^2 - \delta \mathbf{u}^1$  jest wirtualnym przemieszczeniem względnym punktów na powierzchni kontaktu. Powyższe sformułowanie wariacyjne może być punktem wyjścia do dyskretyzacji metodą elementów skończonych. Lewa strona równania (1.11) jest standardowym członem opisującym równowagę ciała w zakresie małych deformacji, natomiast prawa strona uwzględnia pracę naprężeń kontaktowych.

### 1.2.2 Problemy kontaktowe w zakresie dużych deformacji

Uwzględnienie skończonych zmian konfiguracji ciał i ich powierzchni kontaktowych, zasadniczo komplikuje tak sformułowanie kontaktowych problemów brzegowych jak i metody ich numerycznej analizy.



Rysunek 1.2: Zdyskretyzowany kontakt węzła  $S$  z liniowym elementem 1–2: (a) separacja,  $d_N > 0$ ; (b) penetracja,  $d_N < 0$ .

Odrzucenie założenia o małych względnych przemieszczeniach względnych powierzchni kontaktowych powoduje, że nie można na stałe związać ze sobą oddziaływujących ze sobą punktów obu powierzchni. Konieczne jest więc ustalenie metody wyznaczania punktów chwilowo kontaktujących się ze sobą. Definicja musi uwzględniać możliwą separację i penetrację powierzchni. Penetracja powierzchni może wynikać z warunku nie przenikania się powierzchni, gdy zamiast warunku Signoriniego stosowana jest funkcja kary (kontaktowa podatność normalna). Również w procesie iteracyjnego poszukiwania rozwiązania może wystąpić przejściowa penetracja powierzchni. Dopiero po wyznaczeniu pary punktów będących w chwilowym kontakcie, można zdefiniować miary ich odległości oraz prędkości względnej.

Dominującą metodą formułowania problemów kontaktowych jest rozpatrywanie kontaktu ciał zdyskretyzowanych (dla potrzeb metody elementów skończonych). Klasycznym podejściem jest wyróżnienie jednej powierzchni jako odniesienia dla opisu względnego ruchu poszczególnych węzłów<sup>1</sup> zdyskretyzowanej powierzchni drugiego ciała (np. Wriggers i in. [122, 123]). Dwuwymiarowy przypadek kontaktu węzła z prostoliniowym elementem pokazany jest na rysunku 1.2. Budowane na podstawie takiego schematu elementy kontaktowe są stosunkowo proste, gdyż dla elementów liniowych wektor normalny  $\mathbf{n}$  ma w obrębie jednego elementu stały kierunek. Przybliżenie rzeczywistego brzegu krzywą (powierzchnią w zadaniach trójwymiarowych) odcinkami liniową prowadzi jednak do skokowych zmian wektora normalnego przy przejściu z elementu na sąsiedni i w konsekwencji do pogorszenia zbieżności rozwiązania. Z kolei użycie zakrzywionych elementów kontaktowych (tworzących gładkie powierzchnie) prowadzi do znacznego skomplikowania sformułowania problemu, szczególnie gdy rozpatrywane są przypadki trójwymiarowe i gdy oba kontaktujące się ciała traktowane są jako odkształcalne. Stąd też powstała potrzeba odmiennego, bardziej racjonalnego sformułowania problemów kontaktowych o skończonych deformacjach.

Lepsze podejście uzyskuje się gdy najpierw opisywany jest kontakt w sformułowaniu kontynualnym, a następnie problem kontynualny jest dyskretyzowany dla potrzeb analizy numerycznej. Dzięki temu możliwa jest konsyistentna dyskretyzacja przestrzenna (elementy) oraz linearyzacja względem parametru obciążenia (czasu) potrzebna przy roz-

<sup>1</sup>Taki węzeł określany jest mianem “niewolnika” (ang. *slave*), podczas gdy powierzchnia (lub jej element), z którą się kontaktuje, określana jest jako “pan” (ang. *master*).

wiązywaniu problemów nieliniowych. Sformułowania tego typu dla kontaktu bez tarcia zawierają na przykład prace Telegi [114], Curniera i in. [24]. Przepuszczalnie pierwsze podejście uwzględniające tarcie kontaktowe zaprezentowali Klarbring i Bjorkman [51] dla ograniczonej klasy problemów, w których deformacja jednego z ciał jest z góry narzucona. Kolejne prace — Curnier i in. [25], Klarbring [52] — zawierają pełne sformułowanie kontaktu dwóch ciał odkształcalnych.

Podstawą wyżej wymienionych sformułowań jest *projekcja ortogonalna* punktów potencjalnej powierzchni kontaktowej ciała  $B^1$  na potencjalną powierzchnię kontaktową drugiego ciała —  $B^2$ . Podobnie jak w przypadku kontaktu powierzchni zdyskretyzowanych sformułowanie jest więc “niesymetryczne”. Jedno z ciał —  $B^2$  — jest wyróżniane jako “przeszkoda” lub “cel” (ang. *obstacle, target*), i deformacja drugiego ciała —  $B^1$  (zwanego *contactor*) — jest ograniczona przez tą przeszkodę. Projekcja ortogonalna wyznacza normalną odległość (separację lub penetrację) obu powierzchni, będącą odpowiednikiem wektora odległości  $\mathbf{d}$  zdefiniowanego równaniem (1.1) dla przypadku małych poślizgów. Odległość związanych ze sobą punktów powierzchni jest funkcją określoną dla wszystkich punktów potencjalnej powierzchni kontaktowej ciała  $B^1$ . Projekcja ortogonalna jest jednoznaczna, gdy obie powierzchnie są dostatecznie blisko siebie (co wystarcza dla potrzeb mechaniki kontaktu). Wtedy też funkcja normalnej odległości jest jednoznaczna, a odwzorowanie punktów jednej powierzchni na punkty drugiej powierzchni jest wzajemnie jednoznaczne.

Projekcja ortogonalna jest również podstawą sformułowania zaproponowanego w pracy Szefera i in. [112]. W pracy tej wprowadzona została koncepcja “kontaktowej powierzchni osobliwej”, która pozwala dodatkowo uwzględnić obecność trzeciego ciała w strefie kontaktu.

### 1.2.3 Sprzężone zagadnienia termo-mechaniczne

W wielu rzeczywistych problemach kontaktowych zachodzi konieczność uwzględnienia nie tylko oddziaływań mechanicznych, ale także termicznych. W problemach kontaktowych oddziaływania mechaniczne i procesy przewodzenia ciepła mogą być ze sobą silnie sprzężone. Po pierwsze, z dysypacją cieniłą wiąże się generacja ciepła na powierzchni kontaktowej. Po drugie, gdy rozpatrywane jest przewodzenie ciepła przez powierzchnię kontaktową, parametry problemu czysto mechanicznego (aktualna powierzchnia kontaktu, wielkość ciśnień kontaktowych) mają znaczący wpływ na proces przewodzenia ciepła. Ze względu na sprzężenia termo-mechaniczne można wyróżnić dwie klasy problemów kontaktowych. Pierwsza — to zadania, w których można się spodziewać znaczącej generacji ciepła na powierzchni kontaktowej (duże odległości poślizgu cieniłego, obciążenia cykliczne). Do drugiej klasy należą zadania, które ze swojej natury wymagają uwzględnienia wpływu zmian temperatury i przewodzenia ciepła. Wtedy uwzględnienie przewodzenia ciepła przez powierzchnię kontaktową jest źródłem dodatkowych sprzężeń. Przykładem należącym do drugiej grupy są procesy obróbki plastycznej na gorąco.

W procesach kucia na gorąco występują bardzo duże różnice temperatury kontaktujących się powierzchni, dochodzące do 700–800°C przy pierwszym kontakcie odkuwki z matrycą. W klasycznych metodach kucia kontakt trwa stosunkowo długo (rzędu 1–

2s), a zatem ilość ciepła otrzymywana przez matrycę jest stosunkowo duża. Z kolei w stosowanych w ograniczonym zakresie metodach kucia przy bardzo dużych prędkościach i krótkich czasach kontaktu (HERF — *High Energy Rate Forming*), ilość otrzymanego ciepła jest znacznie mniejsza, gdyż czas kontaktu jest znacznie krótszy. Jednak ze względu na bardzo wysokie prędkości poślizgu i związaną z nimi wysoką moc ciepła generowanego na skutek dysypacji ciernej moc strumienia ciepła jest bardzo duża. W obu przypadkach dokładne modelowanie deformacji obrabianego materiału i naprężeń termicznych w matrycy jest możliwe jedynie w ramach sprzężonego opisu termo-mechanicznego.

Sformułowania termo-mechanicznych problemów kontaktowych można znaleźć na przykład w pracach Johanssona i Klarbringa [46] (małe poślizgi) oraz Wriggersa i Miehe [124] (duże poślizgi). Praca Stromberga i in. [103] rozszerza sformułowanie Johanssona i Klarbringa [46] o procesy zużycia powierzchni.

Zazwyczaj przyjmuje się, że cała energia dysypowana na skutek tarcia zamienia się w ciepło generowane na powierzchni kontaktu. Wynikowy strumień ciepła jest następnie dzielony na pół i przekazywany do obu kontaktujących się ciał. Johansson i Klarbring [46] zaproponowali konstytutywny model kontaktu, którym każda powierzchnia charakteryzuje się pewną kontaktową przewodnością cieplną  $\gamma^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) będącą funkcją kontaktowych nacisków normalnych:  $\gamma^\alpha = \gamma^\alpha(t_N)$ . W takim przypadku, strumienie ciepła tarcia, dostarczane do każdego z ciał, zachowują stosunek  $\gamma^1/\gamma^2$ , podczas gdy całkowita przewodność kontaktowa równa jest  $\gamma^1\gamma^2/(\gamma^1 + \gamma^2)$ . Praca Johanssona i Klarbringa [46] zawiera również model, w którym uwzględniona jest dodatkowo pojemność cieplna samej warstwy kontaktowej. Może to modelować na przykład pojemność cieplną warstwy smaru lub cząstek zużytego materiału (trzeciego ciała).

Wyrafinowany model kontaktowej przewodności cieplnej dla przypadku kontaktu bez tarcia został przedstawiony przez Zavarise i in. [125]. Uwzględnia on trzy mechanizmy przewodzenia ciepła przez powierzchnię kontaktową: na rzeczywistych kontaktach nierówności obu ciał, w “bąbelkach” gazu występującego w pustkach między nierównościami powierzchni oraz przez promieniowanie. Uproszczona wersja tego modelu została użyta przez Wriggersa i Miehe [124] dla ogólnego przypadku kontaktu cierne.

## 1.2.4 Numeryczna analiza problemów kontaktowych

Tak jak w całej nieliniowej mechanice ciała stałego, również w przypadku problemów kontaktowych, praktycznie jedyną możliwością rozwiązywania konkretnych problemów brzegowych są metody przybliżone. Wśród nich najszerzej stosowana jest przemieszczeniowa metoda elementów skończonych. Mimo ciągłego rozwoju metod numerycznych, zwiększającej się mocy obliczeniowej komputerów oraz postępów w teoretycznej mechanice zagadnień kontaktowych, efektywne i dokładne rozwiązywanie zadań tego typu jest ciągle możliwe jedynie w ograniczonym zakresie.

Szczególność złożoności problemów kontaktowych wynika z konieczności spełnienia nieliniowych kontaktowych praw konstytutywnych — warunku nieprzenikania oraz prawa tarcia. Jest to szczególnie trudne, gdy powierzchnie kontaktu są zakrzywione i gdy oba kontaktujące się ciała podlegają deformacji. Oczywiście rozwiązywanie zadań trójwymiarowych jest znacznie trudniejsze niż dwuwymiarowych. I to nie tylko dlatego, że

zwiększa się liczba niewiadomych. Również algorytmy kontaktowe ulegają znacznemu skomplikowaniu i są kosztowne numerycznie.

Równania najprostszych praw kontaktowych — warunek Signoriniego (1.8) z modelem tarcia Coulomba (1.9) — mają postać niejednoznacznych związków między wielkościami kinematycznymi ( $d_N$  oraz  $\dot{\mathbf{d}}_T$ ) a odpowiadającymi im naprężeniami kontaktowymi ( $t_N$  oraz  $\mathbf{t}_T$ ). Popularną metodą uwzględnienia tego typu zależności jest *metoda mnożników Lagrange’a*. Jednakże jej zastosowanie w analizie numerycznej prowadzi do źle uwarunkowanych macierzy sztywności i w konsekwencji do numerycznych problemów ze zbieżnością metody. Znaczące polepszenie własności numerycznych osiągnięte jest dzięki zastosowaniu *rozszerzonej metody mnożników Lagrange’a* (Alart, Curnier [2]).

W odmiennym podejściu do problemów kontaktowych rezygnuje się ze ścisłego spełnienia warunków kontaktu i tarcia. Dopuszcza się pewną penetrację powierzchni oraz niezerowe poślizgi (zwane sprężystymi), nawet gdy naprężenia styczne są mniejsze od wartości granicznej. Dzięki takiej regularyzacji z zastosowaniem *funkcji kary*, konstytutywne związki kontaktowe stają się jednoznaczne. Wadą podejścia jest konieczność wprowadzenia dużych sztywności (aby zapobiec nadmiernym penetracjom). Powoduje to, że podobnie jak w metodzie mnożników Lagrange’a, otrzymuje się w wyniku źle uwarunkowane macierze sztywności. Sformułowania w oparciu o funkcję kary są podstawą metod prezentowanych na przykład przez Klarbringa [49], Wriggersa i in. [123], czy Perica i Owena [85].

Przy założeniu liniowej funkcji kary, zregularyzowane normalne prawo kontaktowe ma postać:

$$t_N = \begin{cases} 0 & \text{dla } d_N > 0, \\ c_N d_N & \text{dla } d_N \leq 0, \end{cases}$$

gdzie współczynnik  $c_N$  jest normalną podatnością kontaktową. Taka interpretacja funkcji kary, jako odzwierciedlenia pewnego dopuszczalnego “przenikania” się powierzchni kontaktowych, ma podstawy teoretyczne. W istocie mikro-mechaniczne rozważania dotyczące kontaktu powierzchni z nierównościami dają fizyczne podstawy regularyzacji jednostronnego warunku kontaktowego Signoriniego. Inspirowane mikro-mechaniką kontaktu nieliniowe podatności kontaktowe zostały zaproponowane między innymi przez Odena i Martinsa [81] oraz Wriggersa i in. [123].

Regularyzacja warunku tarcia, dla której również można szukać wytłumaczenia w oddziaływaniu nierówności, dokonywana jest zazwyczaj przez rozbitcie względnej prędkości stycznej na jej część sprężystą i niesprężystą (Michałowski, Mróz [67], Curnier [23]):

$$\dot{\mathbf{d}}_T = \dot{\mathbf{d}}_T^e + \dot{\mathbf{d}}_T^s.$$

Definiując zależność między naprężeniem stycznym i sprężystą częścią poślizgu:

$$\mathbf{t}_T = c_T \mathbf{d}_T^e = c_T (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{d}^e,$$

oraz warunek tarcia ograniczający dopuszczalne wartości sił kontaktowych:

$$F(t_N, \mathbf{t}_T) = \|\mathbf{t}_T\| + \mu t_N \leq 0, \quad (1.12)$$

opis tarcia można sprowadzić do formalizmu teorii plastyczności. Sprężysta część poślizgu  $\mathbf{d}_T^e$  odpowiada odkształceniom sprężystym, podczas gdy część niesprężysta  $\mathbf{d}_T^s$  jest odpowiednikiem odkształceń plastycznych<sup>2</sup>.

Warunek tarcia należy uzupełnić o prawo poślizgu (analogię niestowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia):

$$\dot{\mathbf{d}}_T^s = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{t}_T}, \quad (1.13)$$

gdzie  $G = \|\mathbf{t}_T\| = \text{const}$  jest potencjałem poślizgu, a  $\dot{\lambda} > 0$  jest mnożnikiem wyznaczanym z warunku zgodności  $\dot{F} = 0$ . Podobnie jak w teorii plastyczności wyprowadza się prawo przyrostowe w postaci:

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{D}^{ep} \dot{\mathbf{d}},$$

gdzie *konstytutywna macierz styczna*  $\mathbf{D}^{ep}$  (odpowiednik macierzy sprężysto-plastycznej) ma postać (Peric, Owen [85]):

$$\mathbf{D}^{ep} = c_T(\mathbf{1} - \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mu c_N \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} + c_N \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.14)$$

Wektor  $\mathbf{n}$  jest wersorem normalnym, a  $\mathbf{s} = \mathbf{t}_T / \|\mathbf{t}_T\|$  jest wersorem stycznym do powierzchni kontaktu (zwrot  $\mathbf{s}$  pokrywa się ze zwrotem wektorów  $\mathbf{t}_T$  i  $\dot{\mathbf{d}}_T$ ). Powyższe wzory są prawdziwe dla przypadku, gdy wektor normalny  $\mathbf{n}$  ma ustalony kierunek, a więc dla powierzchni płaskich lub gdy powierzchnia jest zdyskretyzowana elementami liniowymi.

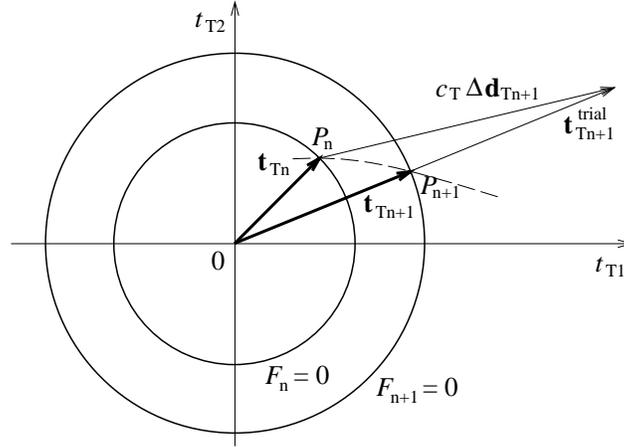
Konstytutywna macierz styczna (1.14) jest pochodną wektora naprężeń po przyroście wektora przemieszczenia względnego:  $\mathbf{D}^{ep} = \partial \mathbf{t} / \partial \mathbf{d}$ . Odpowiada więc nieskończone małym przyrostom przemieszczeń. Jednakże w algorytmach numerycznych przyrosty przemieszczeń są skończone. Wynika to z konieczności podzielenia przedziału czasu, w którym rozpatrywany jest proces, na kroki czasowe o skończonej długości. Aby uzyskać pożądaną kwadratową zbieżność iteracyjnych metod rozwiązywania układów równań nieliniowych (np. najpopularniejszą metodą Newtona-Raphsona lub którąś z jej modyfikacji), należy używać macierzy stycznej konsystentnej z zastosowaną metodą całkowania po czasie. Podobnie jak dla warunku Hubera-Misesa w plastyczności (Simo, Taylor [96]), taką macierz można wyznaczyć w oparciu o algorytm powrotu promieniowego (ang. *radial return*). Idea tego algorytmu przedstawiona jest na rysunku 1.3.

Stosując w pełni niejawną metodę całkowania po czasie (ang. *one-step backward Euler scheme*), żąda się spełnienia warunku tarcia i prawa poślizgu jedynie na końcu kroku. Poszukiwane jest więc rozwiązanie dla kroku czasowego  $n + 1$  przy znanym rozwiązaniu dla kroku  $n$ . W oparciu o przyrost przemieszczenia  $\Delta \mathbf{d}_{n+1}$  wyznaczana jest próbna wartość naprężenia kontaktowego  $\mathbf{t}_{n+1}^{trial}$  (ang. *elastic predictor, trial stress*):

$$\mathbf{t}_{Nn+1}^{trial} = \mathbf{t}_{Nn} + c_N \Delta \mathbf{d}_{Nn+1}, \quad \mathbf{t}_{Tn+1}^{trial} = \mathbf{t}_{Tn} + c_T \Delta \mathbf{d}_{Tn+1}.$$

Jeśli  $\mathbf{t}_{n+1}^{trial}$  spełnia warunek tarcia (1.12), to rozważany punkt kontaktu znajduje się w stanie przylegania, a naprężenie na końcu kroku przyjmuje wartość próbną:  $\mathbf{t}_{n+1} = \mathbf{t}_{n+1}^{trial}$ .

<sup>2</sup>Uwzględnienie wpływu poślizgów niesprężystych na wartość współczynnika tarcia prowadzi do praw wzorowanych na modelach plastyczności ze wzmocnieniem (Buczowski, Kleiber [17, 18]; de Souza Neto i in. [98])



Rysunek 1.3: Algorytm powrotu promieniowego (*radial return*).

W przeciwnym razie następuje poślizg, a napężenie próbne jest korygowane (ang. *plastic corrector*) w sposób zgodny z prawem poślizgu:

$$t_{Nn+1} = t_{Nn+1}^{trial}, \quad \mathbf{t}_{Tn+1} = -\mu t_{Nn+1} \mathbf{s}_{n+1},$$

gdzie wektor  $\mathbf{s}_{n+1}$  jest kierunkiem poślizgu na końcu kroku:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \frac{\mathbf{t}_{Tn+1}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{Tn+1}^{trial}\|}.$$

Po zdefiniowaniu funkcji odpowiedzi na skończony przyrost przemieszczenia

$$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{t}_n, \mathbf{d}_n, \mathbf{d} - \mathbf{d}_n) = \|\mathbf{t}_{Tn+1}\| \mathbf{s}_{n+1} + t_{Nn+1} \mathbf{n}_{n+1}, \quad (1.15)$$

jej pochodna

$$\tilde{\mathbf{D}}^{ep} = \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{t}_n, \mathbf{d}_n, \mathbf{d} - \mathbf{d}_n)}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}_{n+1}} \quad (1.16)$$

stanowi *konsyistentną macierz styczną* i jest równa

$$\tilde{\mathbf{D}}^{ep} = c_T \frac{\|\mathbf{t}_{Tn+1}\|}{\|\mathbf{t}_{Tn+1}^{trial}\|} (\mathbf{1} - \mathbf{s}_{n+1} \otimes \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}) - \mu c_N \mathbf{s}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1} + c_N \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}. \quad (1.17)$$

Macierze styczne konstytutywna (1.14) i konsyistentna (1.17) są niesymetryczne. Wynika to z użycia niestowarzyszonego prawa poślizgu (1.13) i pojawienia się członu  $\mathbf{s} \otimes \mathbf{n}$ . Ta własność problemów kontaktowych z tarciem jest dodatkowym utrudnieniem w ich analizie numerycznej, gdyż globalna macierz sztywności również staje się niesymetryczna i w związku z tym wymaga zastosowania odpowiednich algorytmów numerycznych.

Na koniec warto zwrócić uwagę, że stosowanie niejawnych algorytmów całkowania jest niekiedy zbyt kosztowne numerycznie. Konieczność iteracyjnego rozwiązywania równań o bardzo dużej liczbie niewiadomych prowadzi do znacznego wydłużenia czasu obliczeń.

Dlatego też, stosowanie metody całkowania jawnego (Eulera) — mniej dokładnej, lecz na tyle szybkiej, że można używać bardzo dużej ilości małych kroków czasowych — często okazuje się bardziej efektywne w tego typu zastosowaniach (Owen i in. [83]).

Przedstawione powyżej wyprowadzenie konsystentnej macierzy stycznej dla zagadnień kontaktowych z tarciem jest ograniczone do przypadku, gdy jedno z ciał jest nieodkształcalne, a elementy skończone opisujące jego powierzchnię są liniowe. W przypadku, gdy oba ciała są odkształcalne, i dla elementów zakrzywionych otrzymanie konsystentnej macierzy stycznej jest znacznie bardziej skomplikowane i zazwyczaj jest poważnym ograniczeniem we wprowadzaniu takich ogólniejszych elementów kontaktowych do programów analizy metodą elementów skończonych. Uwzględnienie bardziej zaawansowanych modeli tarcia wiąże się z dodatkowymi utrudnieniami.

W rozdziale 3.3.1 w oparciu o powyższy schemat wyprowadzona jest konsystentna macierz styczna dla nowego modelu tarcia, przeznaczonego dla opisu procesów obróbki plastycznej.

### 1.2.5 Problemy sprężystości z tarciem

Podklasą problemów kontaktowych z tarciem są zadania, w których znane są normalne naciski, a więc i bezwzględna wielkość sił tarcia, natomiast w rozwiązaniu należy wyznaczyć ich kierunek. Ogólne problemy tego typu wymagają rozwiązywania numerycznego. Uzyskanie rozwiązania analitycznego możliwe jest jedynie w szczególnie prostych, jednowymiarowych przypadkach. Bardzo istotną zaletą rozwiązań analitycznych jest możliwość zbadania i przejrzystego zilustrowania ciekawych efektów powstających w efekcie uwzględnienia tarcia. Ponadto rozwiązania analityczne mogą być wykorzystane do analizy poprawności i dokładności metod przybliżonych.

Najprostszym jednowymiarowym zagadnieniem brzegowym z tarciem jest problem sprężystego paska spoczywającego na sztywnym podłożu ciernym. Na tym przykładzie Jarzębowski i Mróz [42] badali prawa poślizgu i prawa pamięci związane z propagacją stref poślizgu. Wprowadzony został opis przy pomocy powierzchni pamięci, podobny do stosowanego w wielopowierzchniowych warunkach plastyczności. Pasek na podłożu jest również prototypem modeli procesów wyciągania włókna z matrycy w kompozytach o kruchej matrycy (np. Hutchinson, Jensen [38], Marshall [62]). W rozdziale 4 przykład paska na podłożu jest wykorzystany do analizy delaminacji od podłoża z jednoczesnymi poślizgami ciernymi w strefie odspojonej.

Innymi prostymi elementami jednowymiarowymi są belki. Fischer i in. [30, 31] oraz Nikitin [78] zajmowali się oddziaływaniem z podłożem ciernym belki poddanej zginaniu w płaszczyźnie podłoża. Nikitin pokazał, że rozwiązanie musi uwzględniać nieskończoną liczbę stref poślizgu, które przy obciążeniu monotonicznym propagują w sposób samopodobny. Problemowi oddziaływania belki z podłożem ciernym poświęcony jest rozdział 5.

Tematem, którym zajmowało się wielu badaczy, są belki warstwowe, w których pomiędzy warstwami mogą występować poślizgi i towarzyszące im siły tarcia. Ogólne sformułowanie takiego problemu przedstawił Murakami [77]. Swobodnie podpartą belką dwuwarstwową zajmowali się Krzyś i Trojnecki [58]. Pokazali oni, że aby zachować

ciągłość sił normalnych w poszczególnych warstwach należy uwzględnić skok wydatków sił tarcia na granicy strefy poślizgu. Springfield i Joshi [99], którzy analizowali ten sam przypadek, nie uwzględnili tego skoku w swoim rozwiązaniu. W wyniku otrzymali błędne rozwiązanie o zupełnie odmiennym charakterze propagacji strefy poślizgu. Ilustruje to ogólną trudność przy konstruowaniu rozwiązań analitycznych problemów, w których występują niejednoznaczne w swej naturze związki określające siły tarcia.

## 1.3 Mechanizmy i opis procesów tarcia i zużycia

### 1.3.1 Modele tarcia

#### Fenomenologiczny opis tarcia

Spośród wszystkich modeli tarcia można wyróżnić podstawową (i przypuszczalnie najliczniejszą) grupę — modele, w których zakłada się jedynie dwa możliwe stany kontaktu: przyleganie i poślizg. Ponadto uwzględnia się jedynie składową prędkości poślizgu styczną do powierzchni kontaktu i pomija się takie efekty jak na przykład dylatacja kontaktowa.

Do opisu tego typu modeli tarcia bardzo dobrze pasuje aparat teorii plastyczności (rozdział 1.2.4). Różne modele tarcia zadaje się przez zdefiniowanie wielkości naprężeń ciernych występujących podczas poślizgu:  $p_T^{sl} = p_T^{sl}(p_N, \mathbf{w})$ , a ogólną postać prawa tarcia można zapisać jako:

$$F(p_N, \mathbf{p}_T, \mathbf{w}) = \|\mathbf{p}_T\| - p_T^{sl}(p_N, \mathbf{w}) \leq 0. \quad (1.18)$$

gdzie  $\mathbf{w}$  jest symbolicznym oznaczeniem wektora dowolnych zmiennych stanu, od których zależy wielkość naprężeń tarcia rozwinięte. Przykładowo w klasycznym modelu tarcia Coulomba mamy:  $p_T^{sl} = p_T^{sl}(p_N) = \mu p_N$ .

W równaniu (1.18) do opisu oddziaływań kontaktowych zastosowane zostało ciśnienie kontaktowe  $p_N = -t_N \geq 0$ , bardziej naturalnym w modelowaniu konstytutywnym od normalnego naprężenia kontaktowego  $t_N$ . Naprężenia cierne  $\mathbf{p}_T$  zachowują konwencję znaków przyjętą w rozdziale 1.2. Dla zachowania zgodności znaków zmiennych kinematycznych i statycznych, wprowadźmy miary względnego ruchu kontaktujących się powierzchni  $u_N, \mathbf{u}_T$ :

$$\begin{aligned} p_N &= -t_N, & \mathbf{p}_T &= \mathbf{t}_T, \\ u_N &= -d_N, & \mathbf{u}_T &= \mathbf{d}_T. \end{aligned}$$

Tak więc z dodatnim ciśnieniem kontaktowym  $p_N$  skoniugowana jest normalna odległość powierzchni  $u_N$ , dodatnia gdy zachodzi penetracja.

Warunkowi tarcia (1.18) towarzyszy niestowarzyszone prawo poślizgu (1.18) w postaci:

$$\dot{\mathbf{u}}_T^s = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}_T},$$

z potencjałem poślizgu  $G = \|\mathbf{p}_T\| = \text{const}$ . Zgodnie z tym prawem poślizgu normalna składowa prędkości poślizgu  $\dot{u}_N$  jest zerowa.

Należy zwrócić uwagę, że warunek tarcia (1.18) jest niezależny od sposobu sformułowania problemu kontaktowego i metody jego rozwiązywania. Dla przylegania ( $F < 0$ )

można równie dobrze zakładać zerowe przemieszczenia styczne, jak również dopuszczać pewien poślizg sprężysty.

Opis tarcia przy pomocy warunku (1.18) nie obejmuje modeli tarcia, w których zakłada się występowanie większej liczby możliwych stanów kontaktu ciernego. Przykładowo, w niektórych modelach rozróżnia się mikro-poślizgi odpowiadające za zjawiska histerezy kontaktowej oraz poślizg globalny, będący odpowiednikiem poślizgu w klasycznym prawie tarcia Coulomba. Tego typu modele zaproponowane zostały w pracach Mroza i Jarzębowskiego [42] oraz Mroza i Giambanco [70]. Modele te wymagają wprowadzenia większej liczby powierzchni tarcia, które pozwalają opisać “pamięć” kontaktu. Z kolei w celu uwzględnienia dylatacji kontaktowej prosty potencjał poślizgu  $G = \|\mathbf{p}_T\| = \text{const}$  musi być zastąpiony odpowiednim potencjałem generującym składową normalną prędkości  $v_N^s = \dot{u}_N^s \neq 0$ .

## Mechanizmy tarcia

W teoriach tłumaczących przyczyny tarcia ogólnie przyjęte jest, że istnieją dwa główne mechanizmy. Pierwszy z nich, związany jest z wzajemnym przyleganiem stykających się ze sobą materiałów i określany jest mianem tarcia adhezyjnego. Drugi mechanizm — tarcia ściernego (abrazyjnego) — ma swoje źródło w deformacjach plastycznych warstwy powierzchniowej, wywołanych przez nierówności drugiej powierzchni lub cząstki trzeciego ciała znajdujące się pomiędzy kontaktującymi się powierzchniami. Deformacje te, w zależności od rodzaju materiałów, stanu ich powierzchni i dodatkowych czynników, mogą dotyczyć samych nierówności (np. ścinanie, spłaszczanie nierówności) lub też całej warstwy powierzchniowej. W tym ostatnim przypadku, wyróżnić można ścinanie całej warstwy na skutek dużych naprężeń stycznych przyłożonych do powierzchni oraz oranie powierzchni przez twarde nierówności lub cząstki trzeciego ciała. Dodatkowo, w materiałach kruchych, duże naprężenia ścinające mogą powodować powstawanie szczelin w warstwie powierzchniowej. Klasyfikację mechanizmów tarcia można znaleźć na przykład w pracach Tabora [113] lub Suha i Sina [109].

Jedną z pierwszych była teoria tarcia adhezyjnego (np. Bowden, Tabor [16]). Jej podstawowym pojęciem jest rzeczywista powierzchnia kontaktu. Ze względu na mikro-nierówności występujące na każdej rzeczywistej powierzchni, przy zetknięciu się ciał bezpośredni kontakt zachodzi jedynie na niewielkiej części nominalnej powierzchni kontaktu. Określa ją stosunek sumy  $A_r$  pól powierzchni rzeczywistych kontaktów nierówności obu powierzchni do całkowitego (nominalnego) pola powierzchni kontaktu  $A$ :

$$\alpha = \frac{A_r}{A}.$$

W dalszej części pracy stosunek ten określany będzie skrótowo jako *rzeczywista powierzchnia kontaktu*  $\alpha$ .

Podstawowym założeniem teorii tarcia adhezyjnego jest, że rzeczywiste kontakty charakteryzuje stała wytrzymałość na ścinanie  $\tau$ , będąca ułamkiem granicy plastyczności przy ścinaniu  $k$  słabszego materiału:  $\tau = mk$ . Na skutek występowania różnych zanieczyszczeń powierzchniowych, naprężenie tnące  $\tau$  jest mniejsze od wytrzymałości na ścinanie, czyli

$m \leq 1$ . W przypadku kontaktu metali, adhezję stykających się nierówności tłumaczy się powstawaniem mikro-spawów, których ścinanie podczas poślizgu daje wkład do globalnej siły tarcia. Ten wkład jest proporcjonalny do granicy plastyczności oraz do rzeczywistej powierzchni kontaktu  $\alpha$ :

$$p_T^{sl} = \alpha\tau = \alpha mk, \quad \tau = mk, \quad 0 \leq m \leq 1.$$

Stały współczynnik adhezji  $m$  (ang. *friction factor*) zależy od rodzaju kontaktujących się materiałów i od stanu ich powierzchni, obecności smaru itp.

Teoria tarcia adhezyjnego tłumaczy prawo Coulomba dzięki temu, że rzeczywista powierzchnia kontaktu  $\alpha$  okazuje się w wielu modelach oddziaływania chropowatych powierzchni liniową funkcją nacisków normalnych (np. model Greenwooda i Williamsona [32] dla nierówności oddziałujących sprężysto). Prosty model tarcia adhezyjnego można wyprowadzić zakładając, że na rzeczywistych kontaktach ciśnienia są tak duże, że nierówności odkształcają się plastycznie (Archard [4]; Bowden, Tabor [16]). Przyjmując, że normalne naciski na rzeczywistych kontaktach są wtedy równe twardości materiału  $H \approx (2 + \pi)k$ , otrzymuje się:

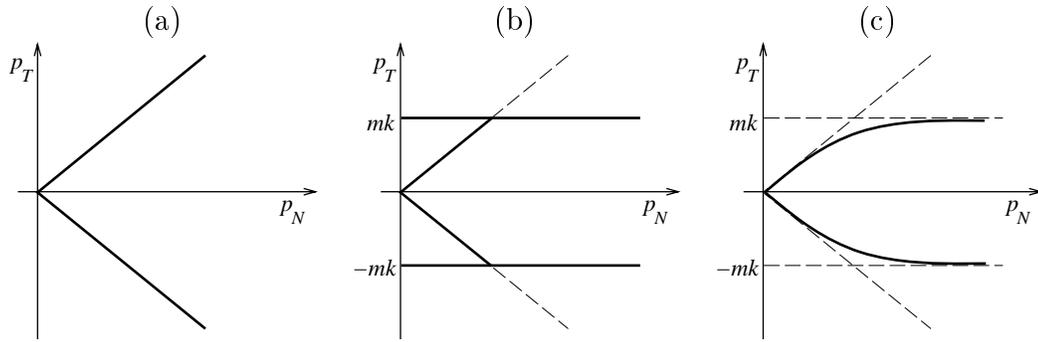
$$\alpha = \frac{p_N}{H} = \frac{p_N}{(2 + \pi)k}, \quad p_T^{sl} = \alpha mk, \quad \mu = \frac{p_T^{sl}}{p_N} = \frac{m}{2 + \pi} < 0.2.$$

Główną słabością tej teorii jest, że przewidywane przez nią współczynniki tarcia są ograniczone do  $\mu \leq 0.2$ , choć w rzeczywistości większe wartości są często spotykane. Uwzględnienie wzrostu powierzchni kontaktu na skutek dodatkowych czynników pozwala w pewnym zakresie tłumaczyć takie przypadki (Tabor [113]).

Uzyskanie czystego tarcia adhezyjnego możliwe jest jedynie w warunkach laboratoryjnych (kontakt czystych powierzchni metalowych). W warunkach rzeczywistych praktycznie zawsze występują cząstki zużytego materiału lub zanieczyszczeń. Obserwowane w licznych testach rysy na powierzchniach kontaktu sugerują, że drugim ważnym mechanizmem tarcia jest oranie twardymi nierównościami lub cząstkami znajdującymi się pomiędzy kontaktującymi się powierzchniami i związane z tym deformacje plastyczne warstwy powierzchniowej. Powstało wiele modeli tych zjawisk — od prostych, wychodzących z zależności geometrycznych dla założonych kształtów twardych nierówności (Tabor [113], Komvopoulos i in. [54]), po modele bazujące na analitycznych (metodą charakterystyk) oraz przybliżonych (metodą górnej oceny kinematycznej) rozwiązaniach plastycznej deformacji wokół orzącej nierówności (Suh, Sin [109]; Challen, Oxley [21]; Petryk [88, 89]; Avitzur, Nakamura [5]; Komvopoulos i in. [55]; Azarkhin, Richmond [8, 9]).

W rzeczywistych warunkach kontaktowych na wypadkową siłę tarcia składać się może wiele różnych mechanizmów (adhezja, oranie przez twarde nierówności należące do jednej z powierzchni, oranie przez cząstki trzeciego ciała, ścinanie nierówności i in.). Próby uwzględnienia w jednym modelu różnych mechanizmów tarcia zawierają między innymi prace Suha i Sina [109], Tabora [113], a także Zhanga i in. [127, 128].

Ze względu na obecność smarów i ich udział w zjawiskach tarcia wyróżnia się trzy rodzaje tarcia. *Tarcie suche* zachodzi w warunkach, gdy powierzchnie kontaktowe są praktycznie wolne od jakichkolwiek smarów. W przypadku tarcia w warunkach smarowania



Rysunek 1.4: Proste modele tarcia: (a) model Coulomba  $p_T^{sl} = \mu p_N$ ; (b) model o stałym naprężeniu tnącym  $p_T^{sl} = mk$  i model Orowana; (c) model Wanheima i Bay'a.

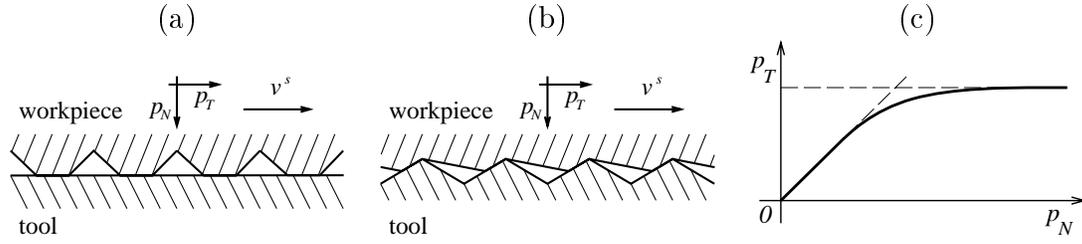
granicznego (ang. *boundary lubrication*), niewielkie ilości smaru pokrywają cienką warstwą powierzchnie kontaktujących się ciał wpływając w ten sposób (czasem bardzo znacznie) na współczynnik adhezji  $m$ . Dyskutowane powyżej mechanizmy tarcia są charakterystyczne dla tarcia suchego i smarowania granicznego. W trzecim przypadku, gdy ilość smaru jest wystarczająca, a także gdy prędkość poślizgu jest wystarczająco wysoka, cienka warstwa smaru całkowicie separuje powierzchnie kontaktowe. Mamy wtedy do czynienia ze *smarowaniem hydrodynamicznym*. Osiągane współczynniki tarcia oraz zużycie powierzchni są wtedy bardzo niskie. Warunki takie są typowe w częściach maszyn, łożyskach itp.

Niekiedy wyróżnia się jeszcze czwarty rodzaj oddziaływania powierzchni w warunkach smarowania. Zwykle określany jest on również terminem “smarowanie graniczne” (ang. *boundary lubrication*). Dotyczy przypadku, gdy naciski normalne są częściowo przenoszone przez bezpośrednie kontaktu nierówności powierzchniowych, a częściowo przez hydrodynamiczne lub hydrostatyczne oddziaływania smaru (Avitzur [6, 7]; Wilson [119], Sobis i in. [97]).

### Modele tarcia w procesach obróbki plastycznej

Model tarcia Coulomba nie może być stosowany dla procesów obróbki plastycznej ze względu na specyficzne warunki kontaktowe. Po pierwsze, procesy te zwykle charakteryzują się wysokimi ciśnieniami kontaktowymi. Zastosowanie modelu Coulomba ze stałym współczynnikiem tarcia może prowadzić do naprężeń stycznych większych od granicy plastyczności na ścinanie. W najprostszych modelach zakłada się więc, że naprężenia tarcia  $p_T^{sl}$  nie zależą od nacisków normalnych  $p_N$  i są pewnym ułamkiem granicy plastyczności na ścinanie — rysunek 1.4(b). Bardziej realistyczny model został zaproponowany przez Orowana [82] w latach czterdziestych. Model ten jest połączeniem modelu Coulomba dla mniejszych wartości nacisków normalnych z modelem o stałym naprężeniu tnącym dla większych nacisków.

Ważną cechą warunków kontaktowych w procesach obróbki plastycznej jest duża różnica twardości kontaktujących się powierzchni. Dlatego też, zazwyczaj zakłada się, że powierzchnia narzędzia (matrycy, stempla, itp.) jest sztywna w stosunku do uplastycz-



Rysunek 1.5: Podstawowe modele mikro-mechaniczne: (a) ST/RW; (b) RT/SW; (c) charakter zależności naprężenia ciernego od nacisków normalnych.

nionego materiału obrabianego. Wychodząc z tego założenia, modele tarcia budowane na bazie mikro-mechaniki kontaktu zakładają jeden z dwóch prostych schematów współpracy powierzchni: kontakt chropowatego materiału z gładkim narzędziem (schemat ST/RW — *smooth tool-rough workpiece*, rysunek 1.5(a)), oraz kontakt gładkiego materiału z chropowatym narzędziem (schemat RT/SW — *rough tool-smooth workpiece*, rysunek 1.5(b)).

Pierwszy schemat (ST/RW) odpowiada modelowi tarcia adhezyjnego. Modele bazujące na tym schemacie uwzględniają ważną cechę charakterystyczną zjawisk kontaktowych w warunkach wysokich nacisków normalnych. Plastyczna deformacja nierówności prowadzi do ich spłaszczania i do wzrostu rzeczywistej powierzchni kontaktu. Jednak rzeczywista powierzchnia kontaktu może co najwyżej osiągnąć wartość  $\alpha = 1$ . Po przyjęciu, że naprężenie styczne na rzeczywistych kontaktach nierówności jest stałe i wynosi  $\tau = mk$  (typowe założenie modeli adhezyjnych) naprężenie tarcia przyjmuje postać:

$$p_T^{sl} = \alpha mk. \quad (1.19)$$

Pierwszym i najbardziej popularnym modelem tego typu jest model Wanheima i Bay'a [115, 14]. Na podstawie rozwiązania metodą charakterystyk (materiał sztywno-plastyczny) otrzymali oni zależność rzeczywistej powierzchni kontaktu  $\alpha$  od bezwymiarowego ciśnienia normalnego  $\bar{p}_N = p_N/k$  oraz od współczynnika adhezji  $m$  opisującego średnie lokalne naprężenie styczne na spłaszczonym czubku nierówności:

$$\alpha = \alpha(\bar{p}_N, m). \quad (1.20)$$

Podstawiając (1.20) do (1.19) otrzymuje się model tarcia o jednym tylko parametrze  $m$ :

$$\bar{p}_T^{sl} = m\alpha(\bar{p}_N, m),$$

gdzie bezwymiarowe ciśnienia skalowane są przez granicę plastyczności na ścinanie obrabianego materiału  $k$ :

$$\bar{p}_N = \frac{p_N}{k}, \quad \bar{p}_T = \frac{p_T}{k}.$$

Otrzymany model tarcia daje w rezultacie gładkie przejście od liniowego prawa Coulomba do stałego naprężenia ciernego dla wysokich nacisków normalnych (rys. 1.5(c)).

Powyższy model tarcia adhezyjnego stał się punktem wyjścia do całej serii prac Wanheima, Bay'a i współpracowników [11, 12, 13, 14, 79, 101, 116], w których przedstawione

zostały kolejne wyniki dotyczące modeli tarcia w procesach obróbki plastycznej. Bay [14] zaprezentował bardziej rozbudowane rozwiązanie metadą charakterystyk, w którym rzeczywista powierzchnia kontaktu zależy od dodatkowego parametru (kąta nachylenia nierówności). Zapropozował również funkcję analityczną, przybliżającą rozwiązania analityczne.

Przyjęcie założenia, że powierzchnia narzędzia jest chropowata, natomiast powierzchnia materiału obrabianego jest gładka (schemat RT/SW), pozwala modelować drugi podstawowy mechanizm tarcia (oranie) i prowadzi do modeli tarcia ściernego. Tego typu model został rozwinięty przez Avitzura i Nakamurę [5]. Oparty jest on na rozwiązaniu metodą górnej oceny kinematycznej problemu orania powierzchni twardą trójkątną nierównością. Również ten model opisuje gładkie przejście od prawa Coulomba do tarcia nie zależącego od ciśnienia normalnego (rys. 1.5(c)). W kolejnych pracach Avitzur [6, 7] uwzględnił obecność smaru, który przenosi część nacisków normalnych (smarowanie graniczne).

Jedną z ważnych cech warunków kontaktowych w procesach obróbki plastycznej jest zaawansowana deformacja plastyczna obrabianego materiału. Deformacja plastyczna samego materiału znacznie przyspiesza proces spłaszczania nierówności, a więc i wzrost rzeczywistej powierzchni kontaktu (Wilson, Sheu [118]; Sutcliffe [111]). Powstały więc modele tarcia adhezyjnego (bazujące na rozwiązaniach metodą górnej oceny kinematycznej lub metodą elementów skończonych) uwzględniające wpływ deformacji plastycznej wewnątrz obrabianego materiału (Wilson [119, 120]; Korzekwa i in. [57]). Wilson [120] zaproponował również prosty model tarcia ściernego uwzględniający deformację plastyczną materiału, przy wykorzystaniu rozwiązania metodą górnej oceny kinematycznej (tego samego, na bazie którego zbudowany został model tarcia adhezyjnego).

De Souza Neto i in. [98] zaproponowali fenomenologiczny model tarcia przeznaczony dla procesów tłoczenia blach, będący modyfikacją modelu Coulomba. Zakłada się w nim, że współczynnik tarcia zależy od skumulowanej dysypacji cieplnej. Założenie to oparte jest na obserwacji, że na skutek poślizgów następuje ścieranie cienkiego pokrycia z powierzchni blachy i w efekcie zmiana jej własności cieplnych. Jak pokazują wyniki [98], przyjęcie skumulowanej dysypacji cieplnej jako wewnętrznej zmiennej stanu daje bardzo dobre wyniki w tego typu zastosowaniach.

W rozdziale 3.2 przedstawione są nowe modele przeznaczone do opisu tarcia w procesach obróbki plastycznej.

### **Tarcie anizotropowe**

Badania eksperymentalne pokazują, że dla niektórych materiałów wielkość siły tarcia zależy od kierunku poślizgu. Tego typu zależności obserwuje się dla powierzchni mających nieizotropową strukturę. Może ona wynikać z anizotropii samego materiału (kompozyty, kryształy) lub może być pozostałością obróbki mechanicznej powierzchni. Własności anizotropowe tarcia i zużycia dla pewnych par kontaktowych zostały udokumentowane w bardzo wielu pracach [20, 34, 41, 91, 110]. Liczne odesłania do literatury na temat tarcia anizotropowego zawierają prace Zmitrowicza [130, 131, 132].

Propozycje opisu tarcia anizotropowego na bazie aparatu teorii plastyczności sięgają

prac Michałowskiego i Mroza [67] oraz Curniera [23]. He i Curnier [35] zaprezentowali model tarcia anizotropowego sformułowany w formalizmie dużych deformacji i dużych poślizgów. Z kolei Zmitrowicz [131] zaproponował opis tarcia przy użyciu tensora tarcia, który przyporządkowuje jednostkowemu wektorowi prędkości poślizgu wektor siły tarcia. W odróżnieniu od innych modeli prowadzi on do niestowarzyszonego prawa poślizgu.

Rozdział 3.1 zawiera model anizotropowego tarcia i zużycia będący rozszerzeniem modelu Michałowskiego i Mroza [67].

### 1.3.2 Zużycie powierzchni

Przez zużycie powierzchni rozumie się ubytek materiału na skutek oddziaływań kontaktowych. Prędkość zużycia opisuje normalna prędkość transformacji powierzchni  $\dot{w}$  mierzoną w [m/s]. W innym ujęciu odzwierciedla ona ubytek objętości materiału na jednostkę powierzchni i jednostkę czasu [m<sup>3</sup>/(m<sup>2</sup>s)].

Podstawowymi mechanizmami zużycia są zużycie adhezyjne, ściernie, korozyjne oraz zmęczeniowe. Pierwsze dwa są bezpośrednio związane z odpowiadającymi im mechanizmami tarcia. Zużycie korozyjne ma duże znaczenie w niektórych warunkach kontaktowych, gdzie wysokie temperatury powierzchni kontaktowych sprzyjają przyspieszonemu utlenianiu i w konsekwencji znacznemu ubytkowi materiału. Z kolei zużycie zmęczeniowe występuje na powierzchniach poddawanych cyklicznym obciążeniom i związane jest z propagacją mikro-szczelin zmęczeniowych. Obciążenia cykliczne mogą mieć charakter czysto mechaniczny, jak w przypadku kół zębatach, łożysk itp., bądź termiczny lub mieszany termiczno-mechaniczny, typowy dla powierzchni matryc, stempli, walców używanych w procesach obróbki plastycznej na gorąco. Zmęczenie termiczne związane jest z wielokrotnymi cyklami zmian temperatury powierzchni, wywołującymi cykliczne naprężenia termiczne napędzające procesy zmęczenia warstwy powierzchniowej.

Klasyfikacja mechanizmów zużycia i typowych warunków ich występowania zawiera praca Lima i Ashby'ego [60]. Wyróżniają oni spośród innych mechanizmów zużycia te, które są związane z deformacjami plastycznymi nierówności powierzchniowych oraz w całej warstwie powierzchniowej, a więc zużycie adhezyjne oraz ściernie. Zużycie na skutek tych mechanizmów jest dla wielu warunków kontaktowych z dobrą dokładnością opisywane przez proste prawo Archarda [4].

Prawo Archarda, wyprowadzone przy założeniu mechanizmu zużycia adhezyjnego mówi, że objętość zużytego materiału  $V$  jest wprost proporcjonalna do siły normalnej  $F_N$  oraz drogi poślizgu  $u_T$ , a odwrotnie proporcjonalna do twardości powierzchni  $H$ :

$$V \sim \frac{F_N u_T^s}{H}.$$

Lokalna prędkość zużycia  $\dot{w}$  wyraża się więc przez normalne naciski kontaktowe  $p_N$  oraz prędkość poślizgu  $v_T^s = \|\mathbf{v}_T^s\|$ :

$$\dot{w} = \gamma \frac{p_N v_T^s}{H}, \quad (1.21)$$

gdzie  $\gamma$  jest parametrem modelu. Do równoważnego prawa zużycia prowadzi teoria zużycia delaminacyjnego (ang. *delamination wear*) rozwijana przez Suha i współpracowników

[106, 107, 108]. Zgodnie z tą teorią zużycie następuje wskutek nukleacji pustek oraz rozwoju podpowierzchniowych szczelin równoległych do powierzchni kontaktowej. Propagacja tych szczelin wywołwana jest następującym cyklicznie nagniataniem powierzchni przez ślizgające się po niej nierówności drugiej powierzchni kontaktowej. Gdy szczelina osiąga pewną krytyczną długość następuje oderwanie kawałka materiału, który ma charakterystyczny kształt płatka. Ponieważ zużycie powierzchni następuje cienkimi warstwami, mechanizm ten został skojarzony z delaminacją.

Szczególne warunki zużycia w procesach obróbki plastycznej omówione są na przykład w pracach Hansena [33] oraz Spuzica i in. [100], a pewne uogólnienie prawa Archarda dla tego typu warunków kontaktowych zostało zaproponowane przez Sobisa i in. [97]. Hansen [33] pokazał, że stosując prosty model oddziaływania twardych nierówności z powierzchnią, można wykazać prawo zużycia ściernego w postaci zgodnej z prawem Archarda. Ten mechanizm zużycia, a w szczególności ścieranie przez cząstki trzeciego ciała (ang. *third body abrasion*), jest dominujący w procesach obróbki plastycznej na gorąco. Przykładowo, badania statystyczne przyczyn zniszczenia matryc dla ponad 100 elementów (o różnych geometriach) kutych na gorąco wykazały, że w około 70% za zniszczenie matryc odpowiedzialne było zużycie ściernie (Meyer-Nolkemper, Heinemeyer [66]). Różnego rodzaju spękania spowodowały uszkodzenie około 25% matryc, a pozostałe 5% przypadało na trwałe odkształcenia plastyczne.

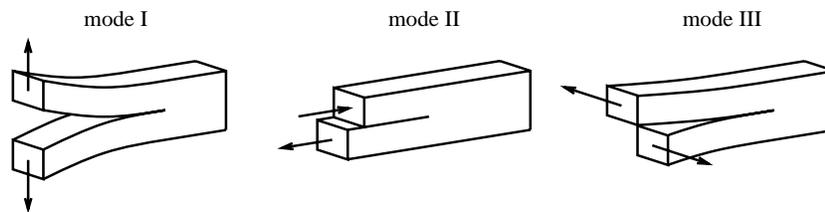
Prawo Archarda (1.21) zostało wyprowadzone w oparciu o założenie, że rzeczywista powierzchnia kontaktu jest proporcjonalna do nacisków normalnych. W tym zakresie nacisków zachowuje słuszność prawo tarcia Coulomba, a więc zachodzi proporcjonalność ciśnienia kontaktowego  $p_N$  do naprężenia tarcia poślizgowego  $p_T = \|\mathbf{p}_T\|$ . A zatem prawo zużycia (1.21) można przedstawić w równoważnej postaci, w której prędkość zużycia jest proporcjonalna do dysypacji ciernej  $D$ :

$$\dot{w} = \tilde{\gamma} \frac{\mathbf{p}_T \cdot \mathbf{v}_T^s}{H} = \tilde{\gamma} \frac{D}{H}. \quad (1.22)$$

Przypuszczalnie dzięki właśnie tej własności, zapewnia ono bardzo dobry opis zużycia w szerokiej gamie warunków kontaktowych. Fenomenologicznym wytłumaczeniem takiej zależności może być następująca argumentacja:

Mikroskopowym przejawem dysypacji sił tarcia jest dysypacja towarzysząca deformacjom plastycznym oraz rozwojowi uszkodzeń w warstwie powierzchniowej. Tak więc wielkości obu dysypacji są ze sobą silnie związane. Jednocześnie procesy zachodzące w warstwie powierzchniowej są przyczyną zużycia. Można przyjąć, że przy ustalonym mechanizmie zużycia, jego prędkość jest proporcjonalna do prędkości dysypacji energii w warstwie. Prędkość zużycia jest więc proporcjonalna również do prędkości dysypacji sił tarcia.

Powyższe rozumowanie jest podstawą modeli zużycia zaproponowanych w rozdziałach 3.1 i 3.2, dla powierzchni anizotropowych oraz dla procesów obróbki plastycznej.



Rysunek 1.6: Podstawowe mody rozwarcia i propagacji szczeliny.

## 1.4 Zniszczenie — odspajanie i delaminacja

Jednym z celów niniejszej pracy jest analiza wzajemnych oddziaływań między procesami zniszczenia i procesami ciernymi. Procesy mikrouszkodzeń warstwy powierzchniowej prowadzące do zużycia powierzchni wraz z odnośnymi modelami zostały omówione w poprzednim podrozdziale. Poniżej zostaną wprowadzone podstawowe pojęcia i zależności występujące przy opisie procesów zniszczenia, takich jak odspajanie i delaminacja, charakterystycznych na przykład dla kompozytów warstwowych.

Badając propagację szczeliny na granicy dwóch ośrodków (np. między dwiema warstwami kompozytu, lub między cienką powłoką a podłożem) można koncentrować się na skomplikowanym polu naprężeń panującym wokół końca takiej szczeliny i na możliwości zmiany kierunku jej propagacji (czyli przejściu od delaminacji do rozwoju szczeliny w poprzek jednej z warstw). Dla potrzeb uproszczonego opisu zjawisk tego typu można też zakładać, że propagacja takiej szczeliny zachodzi w ściśle określonym kierunku, to znaczy w płaszczyźnie dzielącej oba ośrodki. Przyjmując uproszczony model elementu (belkowy, płytowy, itp.) koncentrować się wtedy można na wpływie uszkodzenia na własności całego elementu. Pierwsze podejście jest typowe dla mechaniki pękania<sup>3</sup>. W pracy, do fenomenologicznego opisu zjawisk odspajania i delaminacji, stosowane będzie drugie podejście, wywodzące się z mechaniki zniszczenia.

W mechanice pękania wyróżnia się trzy mody propagacji szczelin (rysunek 1.6): mod I związany z otwieraniem, mod II związany ze ścinaniem w płaszczyźnie prostopadłej do linii tworzonej przez koniec szczeliny oraz mod III związany ze ścinaniem w płaszczyźnie równoległej do tej linii. W kompozytach warstwowych procesy delaminacji mogą zachodzić we wszystkich tych modach oraz ich kombinacjach. W literaturze najobszerniej badana jest delaminacja zachodząca przy dominacji modu I, połączona najczęściej z wyboczeniem zdelaminowanych warstw kompozytu (np. Storakers [102]). Zjawiska tego typu występują również w układach składających się z cienkiej warstwy na podłożu, typowych na przykład w elementach elektronicznych lub powłokach lakierowych (np. Hutchinson i in. [40]).

Przy założeniu, że warstwy są ściskane odpowiednio dużymi ciśnieniami normalnymi, w rejonach, gdzie nastąpiło odspojenie, pozostają one w kontakcie. W takim przypadku delaminacja ograniczona jest jedynie do modów II i III. Natomiast na odspojonej powierzchni można się spodziewać poślizgów i związanych z nimi oddziaływań ciernych. Właśnie tego typu zjawiskom, nie przyciągającym jak dotąd uwagi badaczy, poświęcone

<sup>3</sup>Obszerny przegląd metod i wyników z tej dziedziny można znaleźć w pracy Hutchinsona i Suo [39].

są przykłady z rozdziałów 4 oraz 5.2.

W najprostszym przypadku rozwój nieodwracalnego procesu zniszczenia opisywany jest przez jeden parametr skalarny. Może to być na przykład długość szczeliny w jakimś elemencie konstrukcyjnym. Klasyczny warunek energetyczny propagacji zniszczenia Griffitha mówi, że propagacja jest możliwa wtedy, gdy energia uwalniana na skutek jednostkowego przyrostu długości szczeliny jest równa “oporowi” tej propagacji, czyli energii zużytej w tym nieodwracalnym procesie. Oznaczając przez  $\Pi$  energię potencjalną układu

$$\Pi = \int_V U(\boldsymbol{\varepsilon})dV - \int_{S_t} \mathbf{t}_p \cdot \mathbf{u}dS_t, \quad (1.23)$$

prędkość uwalniania energii  $G$  związaną ze wzrostem skalarnego parametru zniszczenia  $a$  definiuje się jako

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a}.$$

W równaniu (1.23)  $U(\boldsymbol{\varepsilon})$  oznacza sprężystą energię odkształceniową, a  $\mathbf{t}_p$  — obciążenia zewnętrzne. Warunek Griffitha mówi, że w ciele sprężystym propagacja zniszczenia zachodzi, gdy

$$G = R, \quad (1.24)$$

gdzie  $R$  oznacza energię dysypowaną przy jednostkowym przyroście zniszczenia. W ogólnym przypadku  $G$  i  $R$  mogą zależeć od wartości parametru zniszczenia  $a$  i wtedy z przebiegu zależności  $G_{cr}(a) = R(a)$  wnioskuje się o stateczności procesu zniszczenia.

Warunek propagacji zniszczenia należy zmodyfikować, gdy zniszczenie nie jest jedynym procesem dysypatywnym. Taki uogólniony warunek propagacji, będący w istocie bilansem energii, można wtedy zapisać jako

$$-d\Pi = dL - dU = dD = dD^d + dD^r. \quad (1.25)$$

Oznacza to, że na skutek przyrostu zniszczenia o  $da$  praca sił zewnętrznych przyrasta o  $dL$ , całkowita energia sprężysta — o  $dU$ , a całkowita energia dysypowana — o  $dD$ . Przyrost dysypacji ma dwa składniki, mianowicie  $dD^d$  związany z propagacją zniszczenia oraz  $dD^r$  związany z pozostałymi procesami dysypatywnymi (na przykład na skutek tarcia).

## Rozdział 2

# Własności wybranych problemów brzegowych z tarciem

W niniejszym rozdziale przedstawione są dwie szczególne klasy problemów brzegowych z tarciem. Pokazano, że istnieje pewna klasa problemów kontaktowych z tarciem, których odpowiedź na obciążenie proporcjonalne jest również proporcjonalna, mimo nieliniowości problemu oraz przyrostowego charakteru prawa tarcia Coulomba.

Druga klasa zagadnień dotyczy cienkich, płaskich ciał (tarcz) oddziałujących z podłożem. Występujące między ciałem i podłożem siły tarcia mają znaną wartość bezwzględną, nie jest natomiast znany ich kierunek i zwrot. Zbadane są warunki delaminacji takich ciał od podłoża i wpływ tarcia na propagację rozwarstwienia. Szczególnymi przypadkami tego typu problemów są rozważane w dalszych rozdziałach pracy przykłady paska oraz belki na podłożu z tarciem.

### 2.1 Klasa problemów kontaktowych o proporcjonalnej odpowiedzi na proporcjonalne obciążenie

Zagadnienia kontaktowe są silnie nieliniowe ze względu na jednostronne warunki kontaktu oraz oddziaływania cierne. Najprostszymi prawami konstytutywnymi są odpowiednio warunek Signoriniego oraz prawo tarcia Coulomba. Nieliniowość warunku Signoriniego przejawia się nie znaną i zmieniającą się powierzchnią kontaktu. Tarcie, będące procesem dysypatywnym, również jest źródłem nieliniowości. Prawo poślizgu wynikające z warunku tarcia Coulomba, powstawanie i ewolucja różnych stref (poślizgu, przylegania, poślizgów powrotnych, itp.) powodują, że problemy kontaktowe z tarciem zależą od historii i ścieżki obciążenia.

Klasyczny model tarcia Coulomba wiąże ze sobą siły tarcia oraz prędkość względnego poślizgu kontaktujących się ciał. Przy założeniu, że można zaniedbać siły masowe, prawidłowy opis tego typu zależności wymaga sformułowania *problemu quasi-statycznego*, to znaczy takiego, w którym znany stan w pewnej chwili  $t$  pozwala wyznaczyć jedynie pochodną tego stanu względem czasu. Rozwiązanie w pewnym skończonym przedziale czasu  $t \in [t_1, t_2]$  wymaga więc scałkowania związków przyrostowych.

Poniżej zostanie pokazane, że istnieje klasa problemów kontaktowych, w których stan kontaktu nie zmienia się pod działaniem obciążeń, i dzięki temu rozwiązania są liniową funkcją parametru obciążenia. Wtedy też przyrostowy model tarcia Coulomba okazuje się równoważny *modelowi tarcia sprężystego*, który uzależnia siły tarcia od względnych przemieszczeń, a nie od ich prędkości. A zatem *problem statyczny*, zdefiniowany jako taki problem, który jest w pełni określony przez stan początkowy i końcowy (a więc zakładający model tarcia sprężystego) staje się równoważny *problemowi quasi-statycznemu*.

### 2.1.1 Sformułowanie monotonicznego problemu quasi-statycznego

Rozważmy problem kontaktu dwóch ciał sprężystych, sformułowany w rozdziale 1.2.1 i opisany równaniami (1.3)–(1.9). Załóżmy dodatkowo, że obciążenie jest proporcjonalne i monotonicznie rosnące, oraz że w chwili początkowej na całej powierzchni kontaktu obu ciał zarówno odległość w kierunku normalnym jak i normalne naciski kontaktowe są zerowe. Niech  $\lambda$ , takie że  $\lambda > 0$ , oznacza parametr obciążenia. Wtedy zadane *obciążenia proporcjonalne* wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{f}_p^\alpha(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \bar{\mathbf{f}}_p^\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{t}_p^\alpha(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \bar{\mathbf{t}}_p^\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_p^\alpha(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \bar{\mathbf{u}}_p^\alpha(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

gdzie wielkości  $\bar{\mathbf{f}}_p^\alpha$ ,  $\bar{\mathbf{t}}_p^\alpha$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_p^\alpha$  nie zależą od parametru obciążenia  $\lambda$ . Drugie założenie, dotyczące zerowej separacji i zerowych nacisków kontaktowych dla  $\lambda = 0$ , można zapisać jako:

$$d_N(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad p_N(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in S_c. \quad (2.2)$$

Rozwiązaniem tak postawionego problemu quasi-statycznego są dwa pola przemieszczeń  $\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}, \lambda)$  ( $\mathbf{x} \in \Omega^\alpha$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ ) spełniające równania (1.3)–(1.9) oraz (2.1) i (2.2).

Zdefiniowane powyżej obciążenie monotoniczne może również obejmować przypadek obciążenia cieplnego. W takim przypadku prawo Hooke'a (1.4):  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ , przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}\Delta T), \quad \Delta T(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \Delta \bar{T}(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

gdzie  $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$  oznacza odkształcenia termiczne,  $\boldsymbol{\alpha}$  jest tensorem współczynników rozszerzalności cieplnej, a  $\Delta T$  oznacza zmianę temperatury względem stanu początkowego. Należy jednak zwrócić uwagę, że zależne od czasu zjawiska przewodzenia ciepła nie mogą być uwzględnione w powyższym opisie. Tak więc zmiany temperatury mogą się jedynie odnosić do równomiernych (a więc powolnych) zmian temperatury całego ciała. W świetle tego, istnienie niejednorodnych pól temperatury  $\Delta T$ , spełniających wymóg proporcjonalności (2.3), nie wydaje się prawdopodobne.

### 2.1.2 Sformułowanie równoważnego problemu statycznego

Załóżmy, że istnieje<sup>1</sup> rozwiązanie  $\bar{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in \Omega^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ ) spełniające następujący układ równań:

---

<sup>1</sup>Nie będącymi tematem tej pracy problemami istnienia i jednoznaczności rozwiązań problemów kontaktowych z tarcie, zajmowali się na przykład Duvaut i Lions [28] dla problemów statycznych oraz Alart i Curnier [2], Klarbring [49, 50] dla problemów quasi-statycznych.

- równanie równowagi

$$\text{Div } \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha + \bar{\mathbf{f}}_p^\alpha = 0 \quad (2.4)$$

- równanie konstytutywne (liniowej sprężystości)

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha = \mathbf{C}^\alpha \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\alpha \quad (2.5)$$

- warunki zgodności odkształceń

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\alpha = \frac{1}{2}(\nabla \bar{\mathbf{u}}^\alpha + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}^\alpha) \quad (2.6)$$

- warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^\alpha &= \bar{\mathbf{u}}_p^\alpha && \text{na } S_u^\alpha, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha \mathbf{n}^\alpha &= \bar{\mathbf{t}}_p^\alpha && \text{na } S_t^\alpha, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{na } S_c, \end{aligned} \quad (2.7)$$

- normalne prawo kontaktowe (warunek Signoriniego)

$$\bar{d}_N \geq 0, \quad \bar{t}_N \leq 0, \quad \bar{d}_N \bar{t}_N = 0 \quad (2.8)$$

- model tarcia sprężystego

$$\begin{cases} |\bar{\mathbf{t}}_T| \leq -\mu \bar{t}_N & \text{jeżeli } |\bar{\mathbf{d}}_T| = 0 \\ |\bar{\mathbf{t}}_T| = -\mu \bar{t}_N, \quad \frac{\bar{\mathbf{t}}_T}{|\bar{\mathbf{t}}_T|} = \frac{\bar{\mathbf{d}}_T}{|\bar{\mathbf{d}}_T|} & \text{jeżeli } |\bar{\mathbf{d}}_T| > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

W modelu tarcia sprężystego (2.9) zakłada się, że siły tarcia zależą od przemieszczeń względnych, a nie od ich prędkości, tak jak w modelu tarcia Coulomba (1.9). Tak więc równania (2.4)–(2.9) opisują statyczny problem kontaktowy z tarcieciem (por. Duvaut, Lions [28]).

Można łatwo pokazać, że problem statyczny (2.4)–(2.9) z nieznanym  $\bar{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{x})$  jest równoważny problemowi quasi-statycznemu (1.3)–(1.9) z nieznanym  $\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}, \lambda)$  przy spełnionych założeniach (2.1). W istocie, rozwiązanie proporcjonalne (liniowo zależne od  $\lambda$ ) w postaci

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \bar{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma}^\alpha(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha(\mathbf{x}), \dots,$$

automatycznie spełnia równania (1.3)–(1.8). Natomiast równoważności modelu tarcia sprężystego (2.9) i Coulomba (1.9) dowodzą poniższe zależności:

$$|\mathbf{t}_T| = \lambda |\bar{\mathbf{t}}_T| \leq \lambda (-\mu \bar{t}_N) = -\mu t_N, \quad \frac{\dot{\mathbf{d}}_T}{|\dot{\mathbf{d}}_T|} = \frac{\dot{\lambda} \bar{\mathbf{d}}_T}{|\dot{\lambda} \bar{\mathbf{d}}_T|} = \frac{\dot{\mathbf{d}}_T}{|\dot{\mathbf{d}}_T|},$$

gdyż dla obciążenia monotonicznego  $\dot{\lambda} > 0$ .

### 2.1.3 Inne konstytutywne prawa kontaktowe

Zastąpmy warunek Signoriniego oraz prawo tarcia Coulomba modelami z liniową podatnością kontaktową (styczną i normalną). Styczne przemieszczenie względne może być rozłożone na składową sprężystą  $\mathbf{d}_T^e$  i niesprężystą  $\mathbf{d}_T^s$  związaną z poślizgiem:

$$\mathbf{d}_T = \mathbf{d}_T^e + \mathbf{d}_T^s.$$

Przyjmijmy następujące podatne prawa kontaktowe:

$$t_N = \begin{cases} 0 & \text{dla } d_N > 0, \\ c_N d_N & \text{dla } d_N \leq 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{t}_T = c_T \mathbf{d}_T^e, \quad \begin{cases} |\mathbf{t}_T| \leq -\mu t_N & \text{jeżeli } |\dot{\mathbf{d}}_T^s| = 0, \\ |\mathbf{t}_T| = -\mu t_N, \quad \frac{\mathbf{t}_T}{|\mathbf{t}_T|} = \frac{\dot{\mathbf{d}}_T^s}{|\dot{\mathbf{d}}_T^s|} & \text{jeżeli } |\dot{\mathbf{d}}_T^s| > 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Łatwo pokazać, że rozwiązanie proporcjonalne  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  spełnia równania (1.3)–(1.7) z konstytutywnymi prawami kontaktowymi (2.10) i (2.11), jeżeli  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  jest rozwiązaniem problemu (2.4)–(2.7) z prawami kontaktowymi w postaci:

$$\bar{\mathbf{d}}_T = \bar{\mathbf{d}}_T^e + \bar{\mathbf{d}}_T^s,$$

$$\bar{t}_N = \begin{cases} 0 & \text{dla } \bar{d}_N > 0, \\ c_N \bar{d}_N & \text{dla } \bar{d}_N \leq 0, \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{t}}_T = c_T \bar{\mathbf{d}}_T^e, \quad \begin{cases} |\bar{\mathbf{t}}_T| \leq -\mu \bar{t}_N & \text{jeżeli } |\bar{\dot{\mathbf{d}}}_T^s| = 0, \\ |\bar{\mathbf{t}}_T| = -\mu \bar{t}_N, \quad \frac{\bar{\mathbf{t}}_T}{|\bar{\mathbf{t}}_T|} = \frac{\bar{\dot{\mathbf{d}}}_T^s}{|\bar{\dot{\mathbf{d}}}_T^s|} & \text{jeżeli } |\bar{\dot{\mathbf{d}}}_T^s| > 0. \end{cases}$$

Normalne prawo kontaktowe (2.8) lub (2.10) może być wzbogacone o liniowe prawo dylatacji i rozwiązanie wciąż zachowa własność proporcjonalności. Jeżeli nierówności obu powierzchniowe modelowane są przez trójkątne “zęby” o nachyleniu  $\delta$ , idealnie pasujące do siebie przy zerowym położeniu początkowym, to względne przemieszczenie styczne powoduje dylatację kontaktową. Uogólniony warunek Signoriniego uwzględniający liniową dylatację kontaktową ma wtedy postać:

$$d_N - |\mathbf{d}_T| \tan \delta \geq 0, \quad t_N \leq 0, \quad (d_N - |\mathbf{d}_T| \tan \delta) t_N = 0,$$

a prawo z podatnością normalną można zapisać jako

$$t_N = \begin{cases} 0 & \text{dla } d_N - |\mathbf{d}_T| \tan \delta > 0, \\ c_N (d_N - |\mathbf{d}_T| \tan \delta) & \text{dla } d_N - |\mathbf{d}_T| \tan \delta \leq 0. \end{cases}$$

Odpowiednie prawa kontaktowe dla równoważnych problemów statycznych otrzymuje się przez podstawienie  $\bar{t}_N$ ,  $\bar{d}_N$ ,  $\bar{\mathbf{d}}_T$  w miejsce  $t_N$ ,  $d_N$ ,  $\mathbf{d}_T$ .

W końcu, izotropowy warunek tarcia Coulomba (1.9) może być — bez utraty własności proporcjonalności rozwiązania — zastąpiony anizotropowym prawem tarcia, na przykład

w postaci opisanej w rozdziale 3.1. Aby rozwiązanie mogło być proporcjonalne, model tarcia musi zachowywać podstawowe własności modelu tarcia Coulomba, to znaczy siła tarcia nie może zależeć od prędkości poślizgu i musi być dla danego kierunku poślizgu liniową funkcją nacisków normalnych.

Wyznamy teraz energię dysypowaną na skutek tarcia. Prędkość dysypacji cieiernej w punkcie na powierzchni kontaktu jest równa

$$D(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{t}_T(\mathbf{x}, \lambda) \cdot \dot{\mathbf{d}}_T(\mathbf{x}, \lambda).$$

Całkowitą energię dysypowaną w danym punkcie otrzymuje się przez scałkowanie prędkości dysypacji  $D$ :

$$\int_0^\lambda D(\mathbf{x}, \hat{\lambda}) d\hat{\lambda} = \frac{1}{2} \lambda^2 \bar{\mathbf{t}}_T(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{d}}_T(\mathbf{x}).$$

Jak widać energia dysypowana nie jest liniową funkcją parametru obciążenia  $\lambda$ . Co za tym idzie, problemy kontaktowe z prawami konstytutywnymi, które zależą od dysypacji cieiernej, nie będą miały rozwiązań proporcjonalnych. Przykładem takiego prawa konstytutywnego jest prawo zużycia Archarda, zgodnie z którym objętość zużytego materiału jest proporcjonalna do skumulowanej dysypacji cieiernej.

#### 2.1.4 Przykład — pasek na podłożu z tarciem

Jako przykład opisanej powyżej własności niektórych problemów kontaktowych z tarciem może posłużyć problem sprężystego paska spoczywającego na sztywnym podłożu. Rozdział 4 zawiera opis wielu aspektów zachowania tego prostego modelu przy zastosowaniu różnych modeli jego oddziaływania z podłożem.

Niech pasek o przekroju prostokątnym i wysokości  $h$  obciążony będzie ciśnieniem normalnym  $p_N$ , równoważonym reakcją podłoża. Rosnącym naciskom kontaktowym towarzyszy wzrost sił tarcia rozwiniętego  $\tau_s = \mu p_N$ . Dla prostoty pomijamy odkształcenia wzdłużne wywołane przyłożonym obciążeniem normalnym na skutek poprzecznego efektu Poissona. Ponadto, do końca paska przyłożone jest obciążenie  $\sigma_a$  — rysunek 2.1(a). Równanie równowagi paska ma postać:

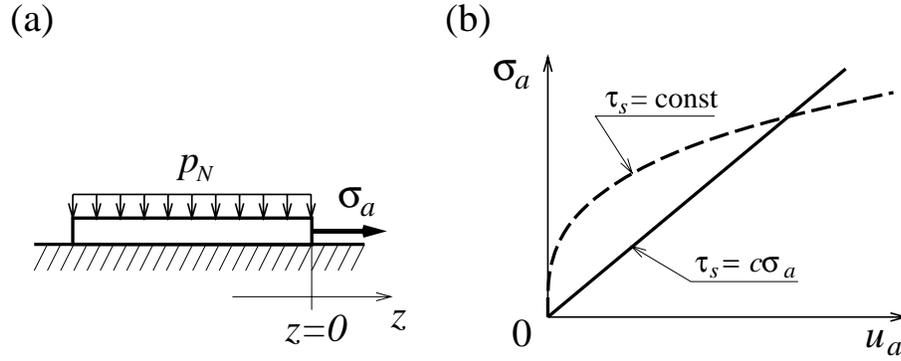
$$\sigma' - \frac{\tau}{h} = 0, \quad (2.12)$$

gdzie  $\sigma$  jest wzdłużnym naprężeniem w pasku, prim oznacza pochodną względem współrzędnej  $z$ ,  $\tau$  jest naprężeniem stycznym między paskiem a podłożem, a  $h$  jest wysokością paska. W strefie poślizgu, gdzie występują poślizgi punktów paska względem podłoża, cieierne naprężenia styczne są równe  $\tau = \tau_s \operatorname{sign} \dot{u} = \pm \tau_s$ , gdzie  $u$  oznacza przemieszczenia. Naprężenie w pasku jest związane z przemieszczeniami zależnością

$$Eu' = E\varepsilon = \sigma. \quad (2.13)$$

Dla uproszczenia ograniczymy się tylko do przypadku rozciągania paska ( $\sigma_a > 0$ ), kiedy w strefie poślizgu  $\tau = +\tau_s$ . Oznaczając przez  $s$  długość strefy poślizgu, warunki brzegowe równań (2.12) i (2.13) można zapisać jako:

$$\sigma = 0, \quad u = 0, \quad \text{dla } z = -s.$$



Rysunek 2.1: Pasek pod obciążeniem proporcjonalnym: (a) schemat układu; (b) zależność obciążenie-przemieszczenie.

Założmy, że obciążenie paska jest proporcjonalne. Istnieje wtedy liniowa zależność między obciążeniem  $\sigma_a$  i naprężeniami ciernymi  $\tau_s$ , którą można zapisać jako

$$\tau_s = c\sigma_a,$$

gdzie  $c > 0$  jest współczynnikiem proporcjonalności. Równania (2.12) i (2.13) można zapisać w znormalizowanej postaci:

$$\bar{\sigma}' = \frac{1}{l}, \quad \bar{u}' = \frac{1}{l}\bar{\sigma}, \quad (2.14)$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_a}, \quad \bar{u} = \frac{Eu}{\sigma_a s}, \quad l = \frac{h}{c}.$$

Rozwiązanie równań (2.14) ma postać

$$\bar{\sigma} = 1 + \frac{z}{l}, \quad \bar{u} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{l}\right)^2, \quad s = l,$$

a zależność obciążenie-przemieszczenie  $\sigma_a(u_a)$  jest liniowa ( $u_a$  jest przemieszczeniem końca paska):

$$\bar{u}_a = \frac{1}{2}, \quad u_a = \frac{s}{2E}\sigma_a.$$

W najprostszym modelu paska na podłożu ciernym (rozd. 4.1) siły tarcia  $\tau_s$  są stałe — a więc obciążenie nie jest proporcjonalne. Długość strefy poślizgu  $s$  rośnie wtedy liniowo ze wzrostem obciążenia  $\sigma_a$ . Zależność obciążenie-przemieszczenie jest nieliniowa i ma postać:  $u_a = h\sigma_a^2/(2E\tau_s)$ . Krzywe obciążenie-przemieszczenie dla obu przypadków (obciążenia proporcjonalnego i nieproporcjonalnego) pokazane są na rysunku 2.1(b). Punkt przecięcia odpowiada jednakowym w obu przypadkach wartościom  $\sigma_a$  oraz  $\tau_s$ .

## 2.1.5 Dyskusja

Klasa problemów kontaktowych opisana powyżej z pewnością nie jest ogólna ze względu na silne założenia dotyczące małych poślizgów oraz początkowego stanu kontaktu (brak separacji powierzchni i brak oddziaływań kontaktowych dla  $\lambda = 0$ ). Jednakże wykazana została ciekawa cecha układów tego typu. Mianowicie odpowiedź na obciążenie proporcjonalne jest również proporcjonalna. Prowadzi to do dalszych wniosków o równoważności klasycznego przyrostowego prawa tarcia Coulomba z prawem tarcia sprężystego oraz równoważności quasi-statycznych oraz statycznych problemów kontaktowych.

Wykazana własność zachodzi dzięki temu, że warunek tarcia Coulomba  $f(t_N, \mathbf{t}_T) = 0$  jest funkcją jednorodną stopnia zerowego względem naprężeń kontaktowych  $\mathbf{t}$ . Co za tym idzie, przy ustalonym kierunku poślizgu, siły tarcia rozwiniętego są liniową funkcją normalnych sił kontaktowych. Dzięki temu dla rozwiązania proporcjonalnego stan kontaktu w każdym punkcie powierzchni kontaktowej jest ustalony: punkt, w którym nie zachodzi poślizg, pozostaje w stanie przylegania; punkt, w którym poślizg zachodzi, ślizga się w ustalonym kierunku. To znaczy, nieskończenie mały przyrost obciążenia od stanu początkowego  $\lambda = 0$  powoduje ukształtowanie się stref poślizgu, przylegania i separacji, które następnie pozostają nie zmienione w trakcie obciążania proporcjonalnego. Przykład paska na podłożu z tarciem ilustruje tą własność — długość strefy poślizgu jest stała podczas obciążania proporcjonalnego i zależy tylko od obciążenia (parametru  $c$  proporcjonalności obciążenia  $\sigma_a$  i naprężeń ciernych  $\tau_s$ ).

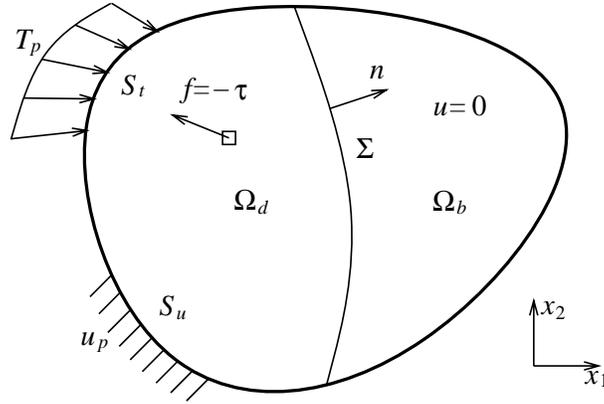
Własność proporcjonalności rozwiązania zachowują również inne kontaktowe prawa konstytutywne opisane w rozdziale 2.1.3. Uwzględniają one zjawiska takie jak podatność i dylatacja kontaktowa. Dzięki temu, że mają prostą postać zależności liniowych, stan kontaktu oraz stosunek sił tarcia do normalnych sił kontaktowych pozostaje nie zmieniony przy rosnącym parametrze  $\lambda$ . Oczywiście przy zastosowaniu bardziej fizycznych, nieliniowych równań konstytutywnych rozwiązanie proporcjonalne nie istnieje.

Zależność między tarciem w przyrostowej postaci prawa Coulomba, a tarciem w postaci przemieszczeniowej w modelu tarcia sprężystego, jest analogiczna do zależności między teorią plastycznego płynięcia a deformacyjną teorią plastyczności. Równoważność obu teorii plastyczności zachodzi tylko wtedy, gdy naprężenie pozostaje ciągle w tym samym punkcie na powierzchni plastyczności. Jednakże nawet wtedy proporcjonalne obciążenie nie spowoduje proporcjonalnej odpowiedzi. Dla warunku plastyczności Hubera-Misesa, proporcjonalna odpowiedź układu mogłaby jedynie mieć miejsce gdyby granica plastyczności rosła liniowo od zera w funkcji odkształceń plastycznych. Rzeczywiste materiały nie wykazują takich własności.

## 2.2 Problem tarczy na podłożu z tarciem

### 2.2.1 Sformułowanie problemu

Rozważmy cienką tarczę, spoczywającą na sztywnym, płaskim podłożu. Tarcza, pokazana na rysunku 2.2, jest reprezentowana przez zbiór  $\Omega \in \mathcal{R}^2$ . Załóżmy też, że krzywa  $\Sigma$  dzieli obszar  $\Omega$  na dwie części:  $\Omega_b$ , w której tarcza jest przymocowana (przyklejona) do



Rysunek 2.2: Tarcza odspajana i oddziałująca ciernie z podłożem.

podłoża oraz  $\Omega_d$ , na której tarcza uległa odspojeniu od podłoża. Zakładamy, że połączenie tarczy z podłożem jest nieskończenie sztywne, a zatem we wszystkich punktach  $\mathbf{x} \in \Omega_b$  przemieszczenia  $\mathbf{u}$  są zerowe:  $\mathbf{u} \equiv 0$ . Z kolei na odspojonej części tarczy oddziałuje ciernie z podłożem. Znana jest bezwzględna wielkość naprężeń ciernych, co odpowiada założeniu, że znane są normalne naciski między tarczą a podłożem.

Na brzegu  $S_u$  zadane są przemieszczenia  $\mathbf{u}_p$  a do brzegu  $S_t$  przyłożone są obciążenia zewnętrzne  $\mathbf{T}_p = \mathbf{t}_p h$ , gdzie  $h$  jest grubością tarczy, a  $\mathbf{T}_p$  jest wydatkiem siły na jednostkową długość brzegu. Siły tarcia  $\boldsymbol{\tau}$  mają charakter sił masowych, gdyż są przyłożone do wszystkich punktów tak zdefiniowanego ciała dwuwymiarowego. Ich bezwzględna wielkość  $\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \mu p_N$  jest stała i znana ( $\mu$  jest współczynnikiem tarcia), natomiast kierunek określony jest prawem poślizgu wyprowadzonym z prawa tarcia Coulomba.

Na granicy obszaru zdelaminowanego określony jest jednostkowy wektor normalny  $\mathbf{n}$  skierowany na zewnątrz  $\Omega_d$ . Wzdłuż krzywej  $\Sigma$  ciągłe są odkształcenia tarczy  $\mathbf{u}$ :

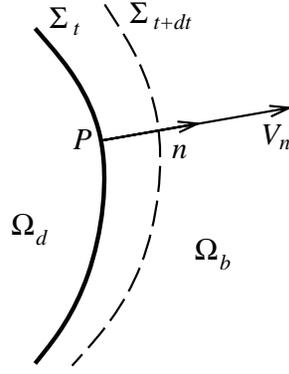
$$[\mathbf{u}] = 0, \quad (2.15)$$

gdzie  $[\varphi(\mathbf{x})] = \varphi(\mathbf{x}^+) - \varphi(\mathbf{x}^-)$ ,  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , oznacza skok wielkości  $\varphi$  przy przejściu przez powierzchnię  $\Sigma$  ( $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- = \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}^+ \in \Omega_b$ ,  $\mathbf{x}^- \in \Omega_d$ ).

Na skutek założenia, że w obszarze  $\Omega_b$  połączenie tarczy z nieodkształcalnym podłożem jest idealnie sztywne, można się spodziewać skoku naprężeń kontaktowych przy przejściu przez krzywą  $\Sigma$ :

$$[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}] \neq 0.$$

Taki skok należy interpretować jako skutek nieskończonego impulsu oddziaływań stycznych między tarczą a podłożem na froncie delaminacji  $\Sigma$ . Przy założeniu podatnego połączenia na obszarze  $\Omega_b$ , naprężenia styczne między tarczą a podłożem wystąpiłyby w obszarze o skończonej powierzchni (prawdopodobnie na całym obszarze  $\Omega_b$  przy założeniu, że tak tarcza jak i charakterystyka podatności warstwy łączącej tarczę z podłożem są sprężyste). Przypadek sztywnego połączenia można więc traktować jako graniczny, gdy sztywność połączenia dąży do nieskończoności. Wtedy oddziaływania styczne wewnątrz

Rysunek 2.3: Propagacja frontu delaminacji  $\Sigma$ .

obszaru  $\Omega_b$  dążą do zera, a oddziaływania na froncie delaminacji  $\Sigma$  dążą do nieskończoności.

Rozważmy kinematykę propagacji frontu delaminacji (rysunek 2.3). Niech punkt  $P$  stale leży na poruszającej się krzywej  $\Sigma$ . Składowa normalna  $V_n$  prędkości punktu  $P$  musi być nieujemna ( $V_n \geq 0$ ), gdyż proces delaminacji jest nieodwracalny. Zróżniczkowany warunek ciągłości przemieszczeń (2.15) daje zależność między prędkością propagacji krzywej  $\Sigma$  a skokiem prędkości punktów tarczy  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$  oraz skokiem gradientu przemieszczenia  $\mathbf{u}$ :

$$[\dot{\mathbf{u}}] + V_n [(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n}] = 0. \quad (2.16)$$

Ponieważ siły tarcia  $\boldsymbol{\tau}$  mają charakter sił masowych równanie równowagi przybiera postać

$$\text{Div} \mathbf{N} + \mathbf{f} = 0,$$

gdzie przez  $N_{ij} = h\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) oznaczone są wewnętrzne siły membranowe. Siły masowe  $\mathbf{f}$  równe są siłom tarcia:

$$\mathbf{f} = -\boldsymbol{\tau},$$

przy czym znak “minus” został wprowadzony aby zachować zgodność oznaczeniami przyjętymi w rozdziale 1.2. Tak zdefiniowane dysypatywne siły tarcia  $\boldsymbol{\tau}$  spełniają prawo tarcia w postaci:

$$\begin{cases} |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau & \text{jeżeli } |\dot{\mathbf{u}}| = 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| = \tau, \quad \frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{u}}}{|\dot{\mathbf{u}}|} & \text{jeżeli } |\dot{\mathbf{u}}| > 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Prawo (2.17) uwzględnia fakt, że prędkość każdego punktu tarczy  $\dot{\mathbf{u}}$  jest jednocześnie jego prędkością poślizgu względem nieruchomego podłoża.

Warunki brzegowe zadane są na brzegach  $S_u$  i  $S_t$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_p & \text{na } S_u, \\ \mathbf{N} \mathbf{n} &= \mathbf{T}_p & \text{na } S_t. \end{aligned}$$

Z warunku ciągłości przemieszczeń (2.15) i (2.16) na ruchomym froncie delaminacji wynika dodatkowy warunek brzegowy:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}} = -V_n \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{na } \Sigma. \quad (2.18)$$

Ponadto należy, podobnie jak w rozdziale 1.2.1, narzucić warunki zgodności odkształceń (1.5) oraz liniowe prawo Hooke'a  $\mathbf{N} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ .

### 2.2.2 Analiza całkowitej dysypacji i prawo propagacji frontu delaminacji

Źródłem dysypacji w układzie jest delaminacja oraz oddziaływania cierne. Stosując podejście zbliżone do podejścia przedstawionego w pracy Pradeilles-Duval i Stolza [90] zostaną znalezione termodynamiczne siły napędowe obu tych procesów dysypatywnych.

Traktując układ tarczy i podłoża jako całość, obciążenia  $\mathbf{T}_p$  przyłożone do brzegu  $S_t$  oraz przemieszczenia  $\mathbf{u}_p$  zadane na brzegu  $S_u$  będziemy traktować jako wymuszenia zewnętrzne. Natomiast oddziaływania między tarczą a podłożem będą traktowane jako siły wewnętrzne. Całkowita energia dysypowana w układzie tarczy z podłożem jest różnicą między przyrostem pracy sił zewnętrznych a przyrostem energii sprężystej:

$$D = \int_{S_t} \mathbf{T}_p \cdot \dot{\mathbf{u}} dS + \int_{S_u} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}}_p dS - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_d} U(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega, \quad (2.19)$$

gdzie  $U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$  jest gęstością odkształceniowej energii sprężystej. Pochodną całkowitej energii sprężystej całkowanej po zmiennym obszarze  $\Omega_d(t)$  można wyznaczyć jako:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_d} U(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = \int_{\Omega_d} \mathbf{N} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega + \int_{\Sigma} U(\boldsymbol{\varepsilon}) V_n d\Sigma, \quad (2.20)$$

gdź jedyną zmienną częścią brzegu jest  $\Sigma$ , a  $V_n$  opisuje normalną prędkość brzegu  $\Sigma$ .

Wykorzystując zależności (2.18) i (2.20) oraz zasadę prac przygotowanych w postaci:

$$\int_{\Omega_d} \mathbf{N} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = \int_{S_t} \mathbf{T}_p \cdot \dot{\mathbf{u}} dS + \int_{S_u} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}}_p dS + \int_{\Sigma} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Sigma + \int_{\Omega_d} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega; \quad (2.21)$$

całkowaną dysypację (2.19) można wyznaczyć jako sumę dwóch składników:

$$D = \int_{\Omega_d} (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Sigma} [(\mathbf{N}\mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{u}\mathbf{n}) - U(\boldsymbol{\varepsilon})] V_n d\Sigma. \quad (2.22)$$

Przemieszczenia skoniugowane z oddziaływaniami między tarczą a podłożem na granicy strefy zdelaminowanej  $\Sigma$  (o teoretycznie nieskończonej wartości) są zerowe — ze względu na założenie sztywnego połączenia. Dlatego też, ich praca oraz związana z nimi energia sprężysta jest zerowa i nie występują one w równaniu (2.21). Pośrednio manifestują się one w niezerowych oddziaływaniach  $\mathbf{T}$  wzdłuż krzywej  $\Sigma$  (trzeci człon po prawej stronie równania (2.21)).

Pierwsza całka w równaniu (2.22) opisuje dysypację na skutek tarcia. Zgodnie z prawem poślizgu (2.17) zachowana jest dodatniość energii dysypowanej,  $\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} \geq 0$ . Drugi człon równania (2.22) związany jest z dysypacją na froncie delaminacji. Termodynamiczną siłą napędową związaną z normalną prędkością frontu delaminacji  $V_n$  jest prędkość energii uwalnianej  $G$  zdefiniowana jako:

$$G = (\mathbf{N}\mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{u}\mathbf{n}) - U(\boldsymbol{\varepsilon}) = (\mathbf{N}\mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{u}\mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.23)$$

Wprowadzając parametr  $s$  zdefiniowany wzdłuż krzywej  $\Sigma$  prawo propagacji frontu delaminacji można wyrazić w lokalnej postaci warunku Griffitha, mianowicie:

$$g(G(s)) \leq 0, \quad V_n(s) \geq 0, \quad g(G(s))V_n(s) = 0.$$

A zatem, gdy  $g(G(s)) < 0$  propagacja frontu delaminacji nie jest możliwa:  $V_n(s) = 0$ ; natomiast gdy  $g(G(s)) = 0$  delaminacja może zachodzić:  $V_n(s) \geq 0$ . Jak widać z równania (2.23) powyższy lokalny energetyczny warunek propagacji wyraża się przez lokalne naprężenia i odkształcenia na froncie delaminacji. A zatem jest on równoważny warunkowi naprężeniowemu (wytrzymałościowemu).

W szczególności postać warunku delaminacji  $g(G(s)) \leq 0$  może mieć postać

$$G(s) - G_{cr} = G(s) - \Gamma \leq 0, \quad (2.24)$$

gdzie krytyczna wartość energii uwalnianej  $G_{cr}$  jest równa energii  $\Gamma$  potrzebnej do odspojenia jednostkowej powierzchni, przy założeniu, że energia odspojenia w modzie II jest równa energii odspojenia w modzie III ( $\Gamma_{II} = \Gamma_{III} = \Gamma$ ).

Wykazana własność równoważności energetycznego i naprężeniowego warunku propagacji rozwarstwienia jest zilustrowana dwoma przykładami jednowymiarowymi: paska (rozd. 4) oraz belki (rozd. 5.2) na podłożu ciernym. W szczególnym przypadku prostych modeli jednowymiarowych (takich jak pasek czy belka), postać energii uwalnianej  $G$  znacznie się upraszcza. Gdy jedyną niezerową składową tensora naprężenia jest składowa normalna do granicy frontu delaminacji  $\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ , energia uwalniana  $G$  redukuje się do postaci:

$$G = \frac{1}{2}U, \quad (2.25)$$

gdzie  $U$  jest jednostkową energią sprężystą. Warunek delaminacji (2.24) mówi wtedy, że na froncie delaminacji następuje skok jednostkowej energii sprężystej.

## Rozdział 3

# Modelowanie konstytutywne tarcia i zużycia

Zjawiska zachodzące przy wzajemnym kontakcie ciał są niezwykle złożone a ich poznanie i opis są ciągle wyzwaniem dla badaczy. Składa się na to bogactwo występujących warunków kontaktu i tarcia. O warunkach kontaktu decyduje rodzaj kontaktujących się materiałów, stan powierzchni (chropowatość, złożona struktura warstwy powierzchniowej, obecność tlenków, zanieczyszczeń itp.), warunki smarowania, wreszcie typowe dla danej pary kontaktowej ciśnienia kontaktowe oraz wielkość poślizgów. Złożoność zjawiska powoduje, że brak jest jednolitego, uniwersalnego modelu tarcia i zużycia, a prawdopodobnie stworzenie takiego modelu nie jest w ogóle możliwe.

Na tym tle jest swoistym fenomenem, że dwa niezwykle proste modele – model tarcia Amontona-Coulomba (Amonton [3], Coulomb [22]) oraz prawo zużycia Archarda [4] – opisują złożone zjawiska tarcia i zużycia w bardzo szerokiej klasie warunków kontaktowych. Klasyczne podejście do opisu tarcia i towarzyszącego mu zużycia (Bowden, Tabor [16]; Rabinowicz [92]), tłumaczy pewne zjawiska i zależności jednak obecny stan wiedzy nie pozwala na przewidywanie wartości parametrów modeli (współczynników tarcia i zużycia) w rzeczywistych warunkach kontaktowych. Jedynie badania eksperymentalne pozwalają wyznaczyć zakresy stosowalności modeli i wartości ich parametrów.

Z drugiej strony, rozwijane są teoretyczne modele tarcia. Modele te starają się przewidywać wartości współczynników tarcia czy zużycia dla założonych warunków kontaktowych lub uogólniają istniejące modele, tak aby opisać zjawiska nie poddające się opisowi istniejącymi modelami. W niniejszym rozdziale przedstawione są dwa nowe modele tarcia i zużycia. Pierwszy jest uogólnieniem modeli Coulomba i Archarda na przypadek tarcia i zużycia anizotropowego, drugi przeznaczony jest dla warunków tarcia w procesach obróbki plastycznej, gdzie stosowalność modelu tarcia Coulomba jest ograniczona.

### 3.1 Model anizotropowego tarcia i zużycia

Klasyczny izotropowy model tarcia Coulomba zakłada, że wielkość siły tarcia nie zależy od kierunku prędkości względnej (poślizgu), a jej kierunek jest zgodny z kierunkiem poślizgu.

Liczne wyniki eksperymentalne<sup>1</sup> pokazują, że przy kontakcie i poślizgu pewnych powierzchni warunki te nie są zachowane. Tarcie w takim przypadku określa się pojęciem *tarcia anizotropowego* a występujące zazwyczaj jednocześnie zużycie powierzchni zależące od kierunku poślizgu nosi nazwę *zużycia anizotropowego*.

Anizotropia tarcia i zużycia związana jest z anizotropią własności jednej lub obu kontaktujących się powierzchni. Uprzywilejowane kierunki nierówności powierzchniowych można spotkać na przykład w kompozytach czy kryształach, gdzie odzwierciedlają one niejednorodność samego materiału (w skali mikro). Również powierzchnie materiałów jednorodnych i izotropowych mogą uzyskać własności anizotropowe na skutek obróbki powierzchniowej lub zużycia.

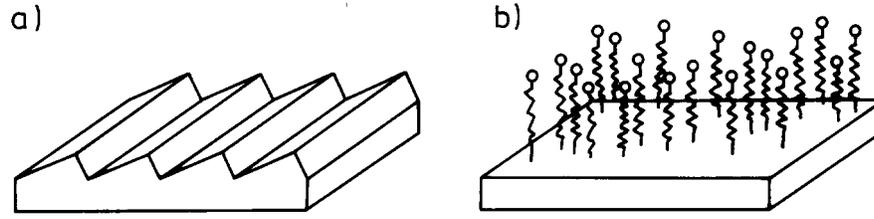
Badanie zależności wartości siły tarcia od kierunku poślizgu ma bardzo bogatą literaturę. Znacznie mniejsza jest wiedza na temat składowej siły tarcia normalnej do kierunku poślizgu, która decyduje o różnicy kierunków wektorów siły tarcia i prędkości poślizgu. Do nielicznych prac zawierających wyniki eksperymentalne na ten temat należą prace Rabinowicza [91] i Halaunbrenner [34]. O ile jednak prace te obrazują występowanie samego zjawiska, o tyle jego ilościowa ocena nie jest ciągle możliwa.

Klasyczne izotropowe prawo tarcia Coulomba jest reprezentowane przez stożkową powierzchnię graniczną tarcia (1.12). Ponieważ poślizg zachodzi w płaszczyźnie stycznej do powierzchni kontaktu (przy braku dylatacji kontaktowej) potencjał poślizgu jest walcem i zatem prawo poślizgu (1.13) nie jest stowarzyszone z powierzchnią graniczną tarcia. Jednakże często nazywa się je prawem stowarzyszonym mając na myśli normalność wektora poślizgu do krzywej granicznej tarcia w płaszczyźnie sił stycznych (czyli dla ustalonej siły normalnej). W przypadku anizotropowym krzywa graniczna tarcia, czyli przekrój powierzchni granicznej tarcia płaszczyzną stałej siły normalnej nie jest okręgiem. Również w tym przypadku o *stowarzyszonym prawie poślizgu* będziemy mówić, gdy zachowane będzie prawo normalności wektora prędkości poślizgu do krzywej granicznej tarcia.

Pierwsze próby opisu tarcia anizotropowego na bazie aparatu teorii plastyczności można znaleźć w pracach Michałowskiego i Mroza [67] oraz Curniera [23]. Rozważając kontakt dwóch powierzchni o sztywnych, podłużnych nierównościach Michałowski i Mróz [67] pokazali, że prawo poślizgu może nie być stowarzyszone. Jednakże w ich modelu następuje dylatacja, a co za tym idzie układ wraz ze względnym przemieszczeniem nabiera energii potencjalnej. Poniżej przedstawiony zostanie, pozbawiony tej wady, prosty model kontaktu powierzchni o izotropowym rozkładzie nierówności z powierzchnią ortotropową prowadzący do ortotropowego prawa tarcia z również niestowarzyszonym prawem poślizgu, ale bez dylatacji kontaktowej.

Kolejne podrozdziały zawierają propozycję ogólnego opisu tarcia i zużycia anizotropowego. Model ten dotyczy tylko przypadku tarcia suchego (niezależnego od prędkości poślizgu) i jest uogólnieniem prostego modelu Coulomba na przypadki kontaktu powierzchni anizotropowych. Pokazane zostanie, że ten ogólny model obejmuje tak stowarzyszone prawa poślizgu, jak i szczególne prawo tarcia z niestowarzyszonym prawem poślizgu równoważne modelowi Zmitrowicza [131]. Zmitrowicz wprowadził opis tarcia anizotropowego przez tensor tarcia odwzorowujący jednostkowy wektor kierunku poślizgu na wektor siły

<sup>1</sup>Odesłania do literatury na temat tarcia anizotropowego można znaleźć na przykład w pracach Zmitrowicza [130, 131, 132].



Rysunek 3.1: Model tarcia ortotropowego: (a) powierzchnia o ortotropowym układzie sztywnych nierówności; (b) powierzchnia z równomiernie rozłożonymi sprężystymi nierównościami.

tarcia.

### 3.1.1 Mikro-mechaniczny model tarcia ortotropowego

Rozważmy wyidealizowany model współpracy dwóch powierzchni – izotropowej i ortotropowej – pokazanych na rysunku 3.1. Nierówności powierzchni ortotropowej są sztywne, podłużne i równoległe do siebie, a ich przekrój poprzeczny jest trójkątem. Boki tych nierówności nachylone są do płaszczyzny nominalnej pod kątami  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Druga z powierzchni jest izotropowa, a jej równomiernie rozłożone nierówności modelowane są przez sprężynki o jednakowej sztywności podłużnej  $k$ . Nierówności te są sztywne na zginanie, tak że podczas względnego ruchu obu powierzchni końce sprężynek ślizgają się po nierównościach powierzchni ortotropowej zmieniając tylko swoją długość — bez zginania.

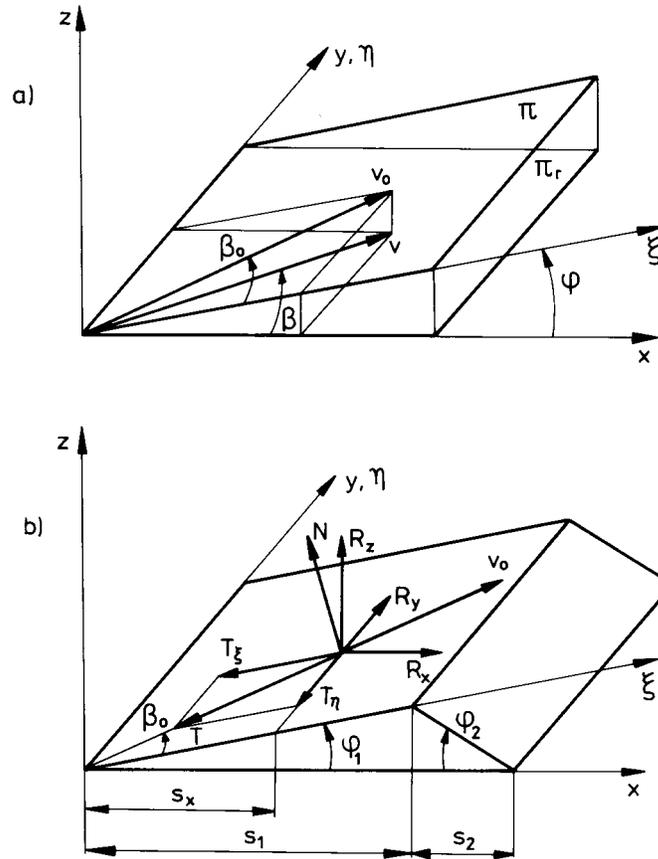
Rozważmy najpierw oddziaływanie pojedynczej sprężynki z powierzchnią ortotropową. Rysunek 3.2 przedstawia płaszczyznę  $\Pi$  nachyloną pod kątem  $\varphi$  do płaszczyzny nominalnej kontaktu  $\Pi_r$ . Układ osi  $x, y, z$  jest związany z płaszczyzną  $\Pi_r$ , natomiast układ  $\xi, \eta$  leży w płaszczyźnie  $\Pi$ . Prędkość poślizgu  $\mathbf{v}_0$  po płaszczyźnie  $\Pi$  ma składowe  $v_\xi = v_0 \cos \beta_0$ ,  $v_\eta = v_0 \sin \beta_0$ . Dzięki odrzuceniu podatności giętej sprężynek, rzut prędkości  $\mathbf{v}_0$  na płaszczyznę nominalną  $\Pi_r$  może być utożsamiony ze względną prędkością poślizgu  $\mathbf{v}$  obu powierzchni ( $v_x = v \cos \beta$ ,  $v_y = v \sin \beta$ ). Składowe prędkości  $\mathbf{v}_0$  w układzie współrzędnych  $x, y, z$  są równe

$$\mathbf{v}_0 = [v \cos \beta, v \sin \beta, v \cos \beta \tan \varphi]^T, \quad \tan \beta_0 = \tan \beta \cos \varphi.$$

Założmy, że oddziaływanie między nierównościami obu powierzchni może być opisane prawem tarcia Coulomba. Odpowiada to założeniu, że na powierzchniach kontaktowych występują dwie skale nierówności. Kontakt większych, pokazanych na rysunku 3.1, jest źródłem anizotropii tarcia. Mniejsze, rozłożone na powierzchni dużych nierówności powodują oddziaływania cierne przy kontakcie dużych nierówności. Lokalny współczynnik tarcia  $\mu$  wiąże ze sobą lokalne siły kontaktowe  $N$  i  $T$ :  $T = \mu N$ . Siły  $N$  i  $T$  równoważone są reakcjami  $R_x$ ,  $R_y$  i  $R_z$ :

$$R_z = N \cos \varphi - T_\xi \sin \varphi, \quad R_x = N \sin \varphi + T_\xi \cos \varphi, \quad R_y = T_\eta, \quad (3.1)$$

gdzie  $T_\xi = T \cos \beta_0$  i  $T_\eta = T \sin \beta_0$ . Pionowa siła  $R_z$  jest związana z podłużnym skróceniem



Rysunek 3.2: Punkt ślizgający się po pochylonej powierzchni  $\Pi$ : (a) wektory prędkości  $v$  i  $v_0$ ; (b) siły kontaktowe  $T$  i  $N$  i równoważące je reakcje  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ .

sprężynę  $u$ , tak więc  $R_z = ku$ . Ze związków (3.1) można wyznaczyć siłę  $N$

$$N = ku \left[ \cos \varphi - \frac{\mu \tan \varphi \cos \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi \cos^2 \beta}} \right]^{-1}. \quad (3.2)$$

Ponieważ musi być spełniony warunek  $N < +\infty$ , równanie (3.2) nakłada ograniczenie na dopuszczalne wartości parametrów modelu  $\mu$  i  $\varphi$ . Wyznaczając maksymalną dopuszczalną wartość lokalnego współczynnika tarcia  $\mu$  w funkcji kąta  $\varphi$  otrzymuje się

$$\mu < \mu_{cr} = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \sqrt{1 / \cos^2 \beta + \tan^2 \varphi}.$$

Równanie to jest spełnione dla dowolnego kąta  $\beta$ , gdy

$$\mu < \mu_{cr} = \cot \varphi. \quad (3.3)$$

Z równań (3.1) można wyznaczyć siły styczne  $R_x$ ,  $R_y$  w funkcji siły normalnej  $R_z$  oraz

parametrów modelu:

$$\begin{aligned}
 R_x &= ku \frac{\sin \varphi \sqrt{1 + \tan^2 \varphi \cos^2 \beta} + \mu \cos \beta}{\cos \varphi \sqrt{1 + \tan^2 \varphi \cos^2 \beta} - \mu \tan \varphi \cos \beta} = R_z H_x(\mu, \varphi, \beta) \\
 R_y &= ku \frac{\mu \sin \beta}{\cos \varphi \sqrt{1 + \tan^2 \varphi \cos^2 \beta} - \mu \tan \varphi \cos \beta} = R_z H_y(\mu, \varphi, \beta) \\
 R_z &= ku.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Aby otrzymać podobne zależności dla całej powierzchni kontaktowej należy rozważyć układ jednorodnie rozłożonych sprężynek oddziałujących z obiema stronami podłużnych nierówności, a następnie uśrednić wynikowe siły kontaktowe. Siły kontaktowe występujące przy wzajemnym ruchu obu powierzchni otrzymuje się ze wzorów

$$\begin{aligned}
 T_x &= \frac{\delta}{\delta + 1} T_x^{(1)} + \frac{1}{\delta + 1} T_x^{(2)} \\
 T_y &= \frac{\delta}{\delta + 1} T_y^{(1)} + \frac{1}{\delta + 1} T_y^{(2)} \\
 N &= \frac{\delta}{\delta + 1} N^{(1)} + \frac{1}{\delta + 1} N^{(2)},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie  $T_{\square}^{(1)}$  oraz  $T_{\square}^{(2)}$  oznaczają wypadkowe siły tarcia sprężynek będących aktualnie w kontakcie z bokami podłużnych nierówności o nachyleniu odpowiednio  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Uśrednione siły normalne  $N^{(1)}$  i  $N^{(2)}$  są sobie równe,  $N^{(1)} = N^{(2)} = N$  ponieważ średnie skrócenia sprężynek po obu stronach są sobie równe,  $\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(2)} = \bar{u}$ , a  $N$  wyraża się wzorem

$$N = \gamma A k \bar{u},$$

gdzie liczba sprężynek na jednostkę powierzchni została oznaczona przez  $\gamma$ , a  $A$  jest powierzchnią kontaktu<sup>2</sup>. Stosunek powierzchni obu boków podłużnych nierówności (a więc i stosunek liczby sprężynek będących w kontakcie z jedną lub drugą stroną podłużnych nierówności) określa parametr  $\delta$  dany wzorem

$$\delta = \frac{s_1}{s_2} = \frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2},$$

gdzie  $s_1$  i  $s_2$  pokazane są na rysunku 3.2(b). Natomiast cząstkowe siły tarcia wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}
 T_x^{(1)} &= N H_x(\mu, \varphi_1, \beta), & T_x^{(2)} &= N H_x(\mu, -\varphi_2, \beta) \\
 T_y^{(1)} &= N H_y(\mu, \varphi_1, \beta), & T_y^{(2)} &= N H_y(\mu, -\varphi_2, \beta)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

W ogólnym przypadku, gdy  $\varphi_1 \neq \varphi_2$  powierzchnia graniczna tarcia nie jest symetryczna względem punktu  $T_x = T_y = 0$  (czyli wielkość siły tarcia zmienia się przy zmianie

<sup>2</sup>W obecnym sformułowaniu używane są siły kontaktowe  $N$  i  $\mathbf{T}$ . Jednakże, przez proste zastąpienie ich naprężeniami kontaktowymi  $p_N$  i  $\mathbf{p}_T$  (gdzie  $p_N = N/A = \gamma k \bar{u}$ ) we wszystkich wzorach począwszy od (3.5), można bezpośrednio otrzymać lokalne sformułowanie dla naprężeń kontaktowych.

zwrotu wektora prędkości poślizgu na przeciwny). Równania (3.5) wraz z (3.6) i (3.4) pozwalają wyznaczyć wtedy kierunek i wielkość siły tarcia w zależności od kierunku poślizgu (kąta  $\beta$ ).

W szczególnym przypadku, gdy  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , powierzchnia graniczna tarcia jest symetryczna. Naprężenia cierne wyrażają się wtedy wzorami

$$T_x = \mu_x N, \quad T_y = \mu_y N, \quad (3.7)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mu_x &= \mu_x(\beta, \varphi, \mu) = \frac{\mu \sqrt{1 + \tan^2 \varphi \cos^2 \beta}}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \beta - \mu^2 \tan^2 \varphi \cos^2 \beta} \frac{\cos \beta}{\cos \varphi} \\ \mu_y &= \mu_y(\beta, \varphi, \mu) = \frac{\mu \sqrt{1 + \tan^2 \varphi \cos^2 \beta}}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \beta - \mu^2 \tan^2 \varphi \cos^2 \beta} \sin \beta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Z równań (3.8) można wyznaczyć zależność między kierunkami wektorów prędkości poślizgu  $\mathbf{v}$  oraz siły tarcia  $\mathbf{T}$ , określonych kątami odpowiednio  $\alpha$  i  $\beta$  ( $\tan \beta = v_y/v_x$ ,  $\tan \alpha = T_y/T_x$ )

$$\tan \alpha = \cos^2 \varphi \tan \beta. \quad (3.9)$$

Otrzymane ortotropowe prawo tarcia ma dwa kierunki główne

$$\begin{aligned} \alpha = \beta = 0 : \quad \mu_1 = \mu_x &= \frac{\mu}{1 - (1 + \mu^2) \sin^2 \varphi} \\ \alpha = \beta = \frac{\pi}{2} : \quad \mu_2 = \mu_y &= \frac{\mu}{\cos \varphi}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

a stosunek głównych współczynników tarcia wynosi

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = (1 + \mu^2) \cos \varphi - \frac{\mu^2}{\cos \varphi} \leq 1. \quad (3.11)$$

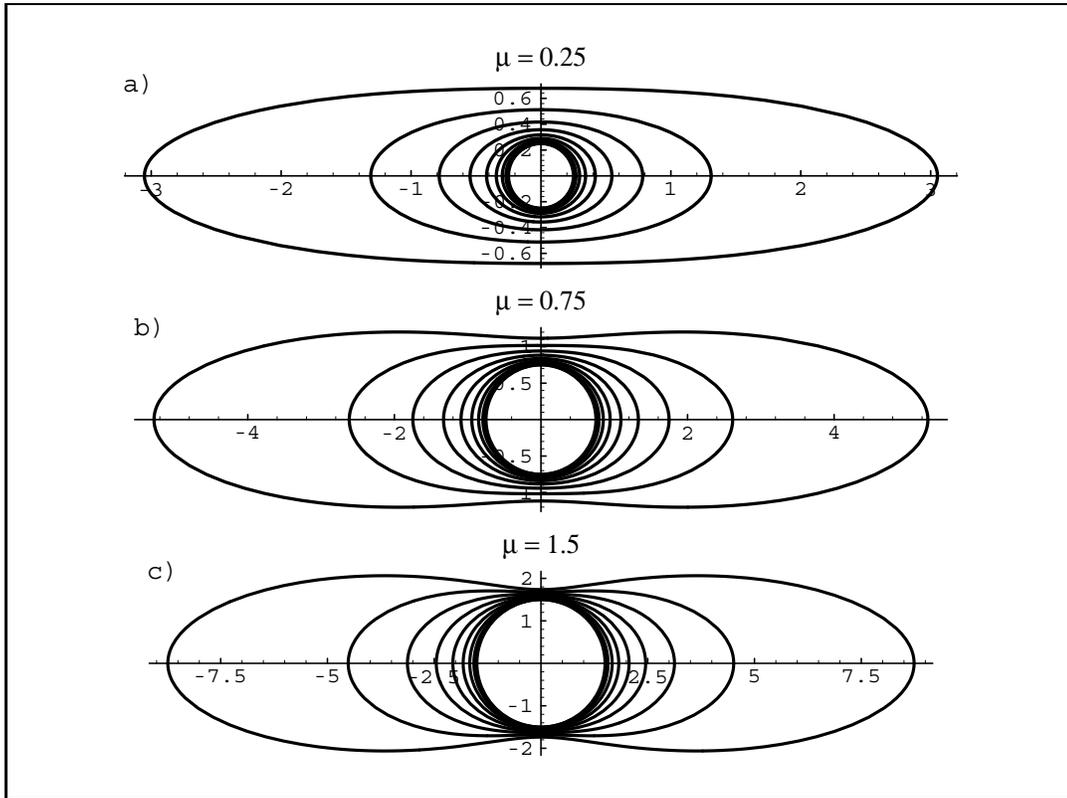
Warunek graniczny tarcia opisany równaniami (3.7) i (3.8) można przedstawić w postaci

$$T = N f(\alpha),$$

gdzie  $T$  oznacza długość wektora siły tarcia,  $\alpha$  – jego kierunek, natomiast funkcja  $f(\alpha)$  wyraża się wzorem

$$f(\alpha) = \frac{\mu}{\cos \varphi} \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha + [1 - (1 + \mu^2) \sin^2 \varphi] \cos^2 \alpha}.$$

Rysunek 3.3 przedstawia wykresy biegunowe  $f = f(\alpha)$  dla różnych wartości parametrów  $\mu$  oraz  $\varphi$ . Widać, że krzywe graniczne tarcia są zbliżone do elips dla szerokiego zakresu wartości parametrów modelu. Dla dużych wartości  $\mu$  i gdy  $\varphi$  bliskie jest maksymalnej dopuszczalnej wartości określonej przez równanie (3.3) krzywa graniczna tarcia przestaje być wypukła. Jest to warte odnotowania, choć otrzymane wartości współczynników tarcia (rzędu  $\mu > 4$ ) są niefizyczne.



Rysunek 3.3: Krzywe graniczne tarcia generowane przez mikro-mechaniczny model tarcia ortotropowego: (a)  $\mu = 0.25$ ; (b)  $\mu = 0.75$ ; (c)  $\mu = 1.5$ ; dla kąta  $\varphi$  zmieniającego się od  $\varphi = 0$  (okręgi) do  $\varphi = 0.9 \arctan(1/\mu)$ .

Zwróćmy uwagę, że zależność (3.9) między kierunkami sił tarcia  $\alpha$  i poślizgu  $\beta$  jest generowana przez eliptyczny potencjał poślizgu  $G = \text{const}$  o półosiach elipsy pokrywających się z osiami ortotropii  $x, y$

$$G(T_x, T_y) = \left[ \left( \frac{T_x}{d_1} \right)^2 + \left( \frac{T_y}{d_2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \frac{d_2}{d_1} = \cos \varphi. \quad (3.12)$$

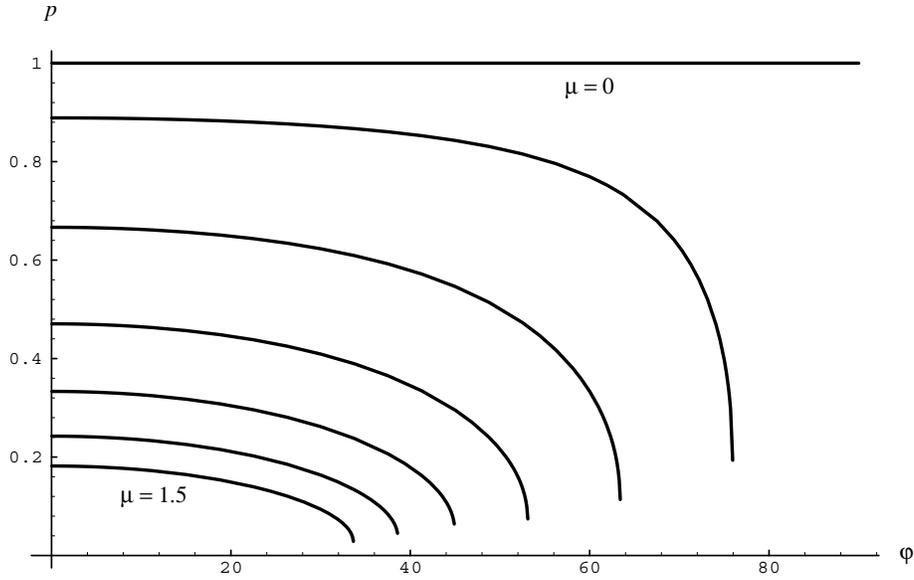
Rzeczywiście, prawo poślizgu w postaci

$$v_x = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial T_x} = \dot{\lambda} \frac{T_x}{d_1^2}, \quad v_y = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial T_y} = \dot{\lambda} \frac{T_y}{d_2^2}, \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

daje po uwzględnieniu warunku  $d_2/d_1 = \cos \varphi$ , zależność tożsamą z równaniem (3.9):

$$\tan \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{T_y}{T_x} \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 = \cos^{-2} \varphi \tan \alpha.$$

Krzywa graniczna tarcia (3.12) nie jest elipsą, zatem przedstawiony powyżej prosty model tarcia ortotropowego prowadzi do *niestowarzyszonego prawa poślizgu*. Ponieważ jednak krzywe graniczne tarcia mają kształt zbliżony do elips, warto zbadać na ile bliskie sobie



Rysunek 3.4: Zależność parametru  $p$  skalującego półosi elipsy potencjału poślizgu w funkcji kąta  $\varphi$  dla różnych wartości parametru  $\mu$ .

są te krzywe z odpowiadającymi im elipsami potencjału poślizgu. Dzięki temu uzyskamy informację, na ile wyprowadzone prawo poślizgu odbiega od zasady normalności.

W tym celu założymy, że krzywe graniczne tarcia można przybliżyć elipsami o półosiach  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , wz. (3.10), oraz że stosunek półosi elips tarcia i potencjału poślizgu opisany jest parametrem  $p$  zgodnie ze wzorem

$$\frac{d_2}{d_1} = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^p.$$

Ze wzoru (3.11) można teraz wyznaczyć wartość parametru  $p$ :

$$p = \frac{\ln(\cos \varphi)}{\ln[(1 + \mu^2) \cos \varphi - \mu^2 / \cos \varphi]}. \quad (3.13)$$

Zależność (3.13) pokazana jest na rysunku 3.4 w funkcji parametrów  $\mu$  oraz  $\varphi$ . Wartość  $p = 1$  odpowiada prawu poślizgu stowarzyszonemu z eliptyczną krzywą graniczną tarcia. Dla  $p < 1$  otrzymuje się klasę niestowarzyszonych praw poślizgu zależnych od parametrów modelu  $\mu$  i  $\varphi$ .

Przedstawiony powyżej model choć uproszczony i wyidealizowany daje wgląd w naturę anizotropowych praw poślizgu. Pokazano, że nie musi zachodzić prawo normalności w płaszczyźnie sił stycznych. Prawo poślizgu wynikające z tego modelu jest generowane przez eliptyczny potencjał poślizgu o stosunku półosi  $d_2/d_1$  różniącym się (często znacznie, rys. 3.4) od stosunku głównych współczynników tarcia  $\mu_2/\mu_1$ .

### 3.1.2 Ogólny opis tarcia anizotropowego

Można wyróżnić dwa przypadki kontaktu powierzchni anizotropowych różniące się występującymi symetriami własności kontaktowych: kontakt powierzchni anizotropowej z powierzchnią izotropową oraz bardziej złożony przypadek kontaktu dwóch powierzchni anizotropowych. W drugim wypadku siła tarcia zależy nie tylko od kierunku poślizgu, ale również od wzajemnej orientacji charakterystycznych kierunków anizotropii obu powierzchni. Opis tarcia można wtedy prowadzić względem układu związanego z jedną z powierzchni, natomiast kąt określający wzajemną orientację obu powierzchni staje się dodatkowym parametrem modelu. Tego typu modelami tarcia oraz rozważaniami dotyczącymi symetrii par kontaktowych zajmowali się Zmitrowicz [131] oraz He i Curnier [35].

Znacznie prostszy jest opis tarcia przy kontakcie powierzchni anizotropowej z izotropową. Ponieważ tylko powierzchnia anizotropowa ma wyróżnione pewne kierunki charakterystyczne (mogą to być kierunki osi symetrii), do opisu własności ciernych wystarcza zdefiniowanie układu współrzędnych związanego z tą powierzchnią. Wtedy wektory prędkości poślizgu  $\mathbf{v}$  oraz siły tarcia  $\mathbf{T}$  mogą być jednoznacznie opisane w takim układzie<sup>3</sup>. W przypadku występowania osi symetrii powierzchni anizotropowej, naturalnym jest przyjęcie jej kierunku jako kierunku układu odniesienia. Na przykład dla powierzchni ortotropowej, najwygodniej jest przyjąć osie układu współrzędnych równoległe do kierunków ortotropii (tak jak w poprzednim rozdziale).

Niniejsze rozważania ograniczone są do przypadku kontaktu powierzchni anizotropowej z powierzchnią izotropową. Zakładając, że siła tarcia nie zależy od prędkości poślizgu oraz że zależy liniowo od siły normalnej, uogólniony na przypadki anizotropii kontaktu warunek tarcia Coulomba można zapisać jako

$$F(T_x, T_y, N) = T - Nf(\alpha) = 0, \quad (3.14)$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy wektorem siły tarcia  $\mathbf{T}$  i osią  $x$  kartezjańskiego układu współrzędnych związanego z powierzchnią anizotropową, a  $T$  jest długością tego wektora (rys. 3.5). Wektor prędkości poślizgu  $\mathbf{v}$  tworzy z osią  $x$  kąt  $\beta$ , a więc

$$\tan \alpha = \frac{T_y}{T_x}, \quad \tan \beta = \frac{v_y}{v_x}, \quad \beta = \beta(\alpha).$$

Prawo poślizgu jest opisane funkcją  $\beta = \beta(\alpha)$ . Oczywiście dla kierunków pokrywających się z osiami symetrii powierzchni anizotropowej (jeśli takie występują) kierunek poślizgu pokrywa się z kierunkiem siły tarcia, czyli  $\alpha = \beta$ .

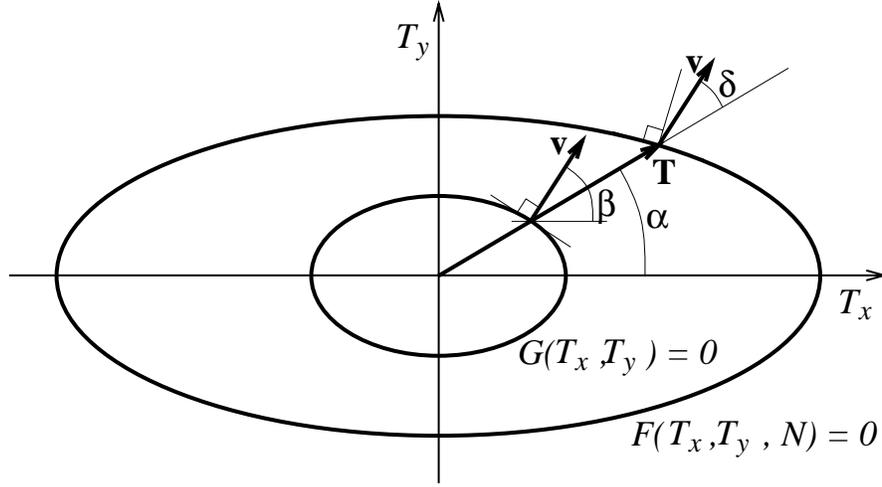
Wygodnie jest zadać prawo poślizgu przez wypukły potencjał poślizgu

$$G(T_x, T_y, N) = G(T_x, T_y) = T - cg(\alpha) = 0, \quad (3.15)$$

wraz z prawem poślizgu

$$v_x = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial T_x} = \dot{\lambda} \left( \cos \alpha + \frac{g'}{g} \sin \alpha \right), \quad v_y = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial T_y} = \dot{\lambda} \left( \sin \alpha - \frac{g'}{g} \cos \alpha \right), \quad (3.16)$$

<sup>3</sup>W szczególnym przypadku kontaktu dwóch powierzchni anizotropowych, gdy ich wzajemna orientacja nie zmienia się, opis kierunkowych zmian siły tarcia i poślizgu jest taki sam jak dla przypadku z jedną powierzchnią izotropową.



Rysunek 3.5: Anizotropowe prawo tarcia i prawo poślizgu generowane przez powierzchnię graniczną  $F(T_x, T_y, N) = 0$  i potencjał poślizgu  $G(T_x, T_y) = 0$ .

gdzie  $c$  jest stałą,  $g'$  oznacza pochodną względem  $\alpha$ , a mnożnik  $\dot{\lambda}$  wyznaczony jest z zależności  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ :

$$\dot{\lambda} = v \left[ 1 + \left( \frac{g'}{g} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (3.17)$$

W przypadku stowarzyszonego prawa poślizgu zachodzi  $f(\alpha) = g(\alpha)$ , a we wzorach (3.16) i (3.17) należy podstawić  $f(\alpha)$  zamiast  $g(\alpha)$ .

Związek między kątem poślizgu  $\beta$  a kątem działania siły tarcia  $\alpha$  przybiera postać

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan \delta = \frac{g'}{g} \quad \text{lub} \quad \beta(\alpha) = \alpha - \delta(\alpha) = \alpha - \arctan \left( \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} \right),$$

gdzie  $\delta$  jest kątem między wektorami siły tarcia  $\mathbf{T}$  i prędkości poślizgu  $\mathbf{v}$  (rys. 3.5).

Funkcja dysypacji zdefiniowana jest jako

$$D = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = N v f \left[ 1 + \left( \frac{g'}{g} \right)^2 \right]^{-1/2} = N v d(\alpha) = N v \tilde{d}(\beta),$$

gdzie

$$\tilde{d}(\beta) = d[\alpha(\beta)], \quad d(\alpha) = f(\alpha) \left[ 1 + \left( \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (3.18)$$

Ponieważ na dysypację wpływa tylko składowa siły tarcia równoległa do kierunku poślizgu, wprowadźmy składowe tej siły równoległą do kierunku poślizgu  $T_n$  i prostopadłą  $T_t$ :

$$T_n = \frac{D}{v}, \quad T_t = T_n \tan \delta = \frac{g'}{g} T_n$$

oraz odpowiadające im współczynniki tarcia  $t_n$  i  $t_t$

$$t_n = \frac{T_n}{N} = d(\alpha), \quad t_t = \frac{T_t}{N} = d(\alpha) \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}. \quad (3.19)$$

Należy zwrócić uwagę, że powyższe funkcje określające współczynniki tarcia  $t_n$  i  $t_t$  zależą od kierunku działania siły tarcia  $\alpha$ . Aby otrzymać zależność tych współczynników od kierunku poślizgu  $\beta$  należy dodatkowo podstawić  $\alpha = \alpha(\beta)$ .

Rozdział 3.1.4 zawiera przykłady zastosowania powyższego formalizmu opisu tarcia anizotropowego dla konkretnych postaci funkcji  $f(\alpha)$  i  $g(\alpha)$ .

### 3.1.3 Modelowanie zużycia anizotropowego

Prędkość zużycia  $\dot{w}$ , czyli ubytek objętości materiału na jednostkę powierzchni i na jednostkę czasu (o wymiarze [m/s]), może w przypadku kontaktu powierzchni anizotropowych zależeć od kierunku poślizgu. Ponieważ procesy tarcia i zużycia są ze sobą blisko związane można przyjąć proste założenie uogólniające klasyczne prawo Archarda, mianowicie że prędkość zużycia dla danego kierunku poślizgu zależy od prędkości dysypacji sił tarcia właściwej dla poślizgu w tym kierunku. To proste założenie wiąże ze sobą anizotropowe właściwości tarcia i zużycia. Opis zużycia anizotropowego zaproponowany przez Zmitrowicza [130, 132] nie zapewniał takiego związku.

Powyższe założenie nie jest ogólnie ważne. Pewne wyniki eksperymentalne (np. Jacobs i in. [41]; Miyoshi, Buckley [69]) wskazują na bliską współzależność między anizotropowymi własnościami tarcia i zużycia. Jednak z drugiej strony, można znaleźć wyniki nie potwierdzające takiej zależności — na przykład Sung i Suh [110].

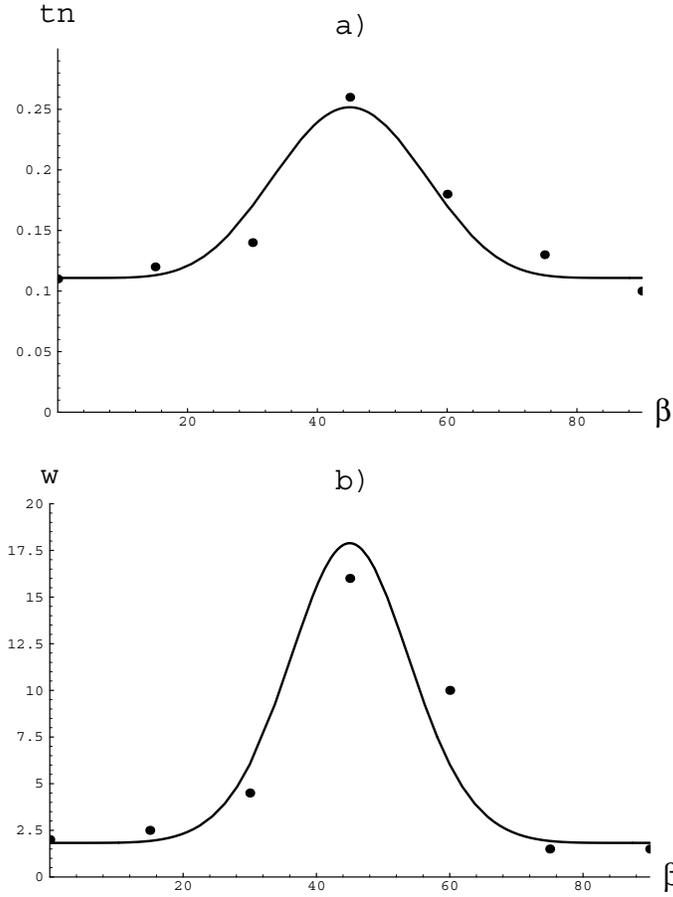
U podstaw postulatu powiązania zużycia z dysypacją cierną leży obserwacja, że mechanizmy tarcia i zużycia są ze sobą silnie związane, a energia dysypowana w danym mechanizmie tarcia i zużycia napędza związany z nim proces zniszczenia warstwy powierzchniowej przejawiający się zużyciem powierzchni. Stąd w przypadku, gdy występuje jeden dominujący mechanizm zużycia lub gdy dla różnych kierunków poślizgu udział różnych mechanizmów tarcia i zużycia nie zmienia się zbyt silnie, prędkość zużycia powinna być silnie skorelowana z prędkością dysypacji cierniej.

W ogólnym przypadku występujące jednocześnie różne mechanizmy zużycia i zniszczenia warstwy kontaktowej (patrz Berthier [15]; Hornbogen [36]) mogą być silnie sprzężone ze sobą, a procesy tarcia, zużycia i zniszczenia mogą być zbyt złożone, aby powyższe proste rozumowanie dawało zadowalające przybliżenie.

Po przyjęciu najprostszego założenia, że prędkość zużycia jest proporcjonalna do prędkości dysypacji, model zużycia anizotropowego przybiera postać

$$\dot{w} = \gamma D/A = \gamma v p_N \tilde{d}(\beta), \quad (3.20)$$

gdzie  $D$  jest prędkością dysypacji odniesioną do powierzchni  $A$ , a  $p_N = N/A$  jest normalnym ciśnieniem kontaktowym. Powyższy model jest uogólnieniem izotropowego prawa Archarda [4]. Zgodnie z prawem Archarda współczynnik proporcjonalności  $\gamma$  zależy od twardości powierzchni podlegającej zużyciu.



Rysunek 3.6: Wyniki doświadczenia Jacobsa i in. [41] opisane funkcjami (3.1.3): (a) współczynnik tarcia  $t_n(\beta)$  w kierunku poślizgu; (b) zużycie  $w(\beta)$ .

Wprowadźmy bezwymiarową funkcję zużycia  $j(\beta)$  odzwierciedlającą zależność prędkości zużycia  $\dot{w}$  od kierunku poślizgu  $\beta$

$$j(\beta) = \frac{\dot{w}(\beta)}{\gamma v p_N}.$$

Z założenia liniowej zależności prędkości zużycia od prędkości dysypacji (3.20) wynika, że  $j(\beta) = \tilde{d}(\beta)$ . Bardziej ogólnie można przyjąć, że zużycie jest dowolną monotoniczną funkcją dysypacji. Przyjmując na przykład zależność potęgową otrzymuje się

$$j(\beta) = [\tilde{d}(\beta)]^q, \quad \dot{w}(\beta) = \gamma p_N v j(\beta) = \gamma p_N v [\tilde{d}(\beta)]^q, \quad (3.21)$$

gdzie  $q > 0$  jest dodatkowym parametrem modelu.

Rysunek 3.6 przedstawia przykład zastosowania powyższego prawa zużycia do opisu danych doświadczalnych z pracy Jacobsa i in. [41], dotyczącej tarcia i zużycia kompozytów. Eksperymentalne wartości współczynnika tarcia  $t_n$  (mierzonego wzdłuż kierunku poślizgu, składowa prostopadła nie była mierzona) oraz zużycie zmierzone dla różnych kierunków

poślizgu zostały przybliżone następującymi funkcjami

$$\begin{aligned} t_n(\beta) &= a_1 + a_2(1 - \cos \beta)^3, \\ \dot{w}(\beta) &= a_3[t_n(\beta)]^q, \end{aligned}$$

gdzie  $a_1 = 0.111$ ,  $a_2 = 0.018$ ,  $a_3 = 6.72$  i  $q = 2.78$ .

W świetle zaproponowanego opisu anizotropowego tarcia i zużycia kierunkowe własności kontaktowe można prezentować przy pomocy pięciu podstawowych diagramów (w postaci wykresów biegunowych), na których przedstawione są:

- krzywa graniczna tarcia, wz. (3.14)

$$f = f(\alpha) = \frac{T}{N},$$

- krzywa potencjału poślizgu, wz. (3.15)

$$g = g(\alpha),$$

- bezwymiarowa funkcja dysypacji, wz. (3.18), (3.19)

$$t_n = t_n(\beta) = \tilde{d}(\beta),$$

- krzywa stałej dysypacji

$$\bar{v} = \bar{v}(\beta) = \frac{v}{(D/p_N)} = \frac{1}{\tilde{d}(\beta)},$$

- funkcja zużycia, wz. (3.21)

$$j = j(\beta).$$

Te podstawowe diagramy pokazane zostaną dla konkretnych modeli prezentowanych w następnym rozdziale.

### 3.1.4 Przykładowe modele tarcia anizotropowego

#### Eliptyczny warunek tarcia ortotropowego

Ponieważ izotropowy warunek tarcia jest reprezentowany przez koło jego najprostszym i najpopularniejszym uogólnieniem na przypadek tarcia ortotropowego jest warunek eliptyczny (Ziamba [126]; Michałowski, Mróz [67]; Curnier [23]; Zmitrowicz [131]). Najczęściej stosowanym prawem poślizgu jest prawo stowarzyszone, ale na przykład model Zmitrowicza [131], który wprowadził tensor tarcia, daje w efekcie prawo niestowarzyszone.

Wykorzystując wyniki mikro-mechanicznego modelu tarcia powierzchni z ortotropowym układem nierówności (rozdział 3.1.1) wprowadźmy eliptyczną powierzchnię graniczną tarcia oraz eliptyczny potencjał poślizgu w postaci

$$\begin{aligned} F(T_x, T_y, N) &= \left[ \left( \frac{T_x}{c_1} \right)^2 + \left( \frac{T_y}{c_2} \right)^2 \right]^{-1/2} - N = 0, & 0 < \frac{c_2}{c_1} = m < 1, \\ G(T_x, T_y) &= \left[ \left( \frac{T_x}{d_1} \right)^2 + \left( \frac{T_y}{d_2} \right)^2 \right]^{-1/2} - c = 0, & \frac{d_2}{d_1} = m^p, \quad 0 \leq p \leq 1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

gdzie osie  $x, y$  pokrywają się z osiami ortotropii powierzchni. Potencjał poślizgu ma inny stosunek pól eliptycznej powierzchni granicznej tarcia. Stosunek ten zdefiniowany jest przez parametr  $p$ . Dla  $p = 1$  otrzymuje się stowarzyszone prawo poślizgu, a dla  $p = 0$  potencjał poślizgu staje się kołem i kierunki wektorów prędkości poślizgu i siły tarcia pokrywają się. Z prawa poślizgu

$$v_x = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial T_x}, \quad v_y = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial T_y} \quad (3.23)$$

wynika następująca zależność między kątami  $\alpha$  i  $\beta$

$$\tan \beta = m^{-2p} \tan \alpha.$$

Podstawiając (3.23) do warunku tarcia  $F = 0$  można obliczyć mnożnik  $\dot{\lambda}$ , a następnie składowe  $T_x$  i  $T_y$  w funkcji kąta poślizgu  $\beta$ . Zależności te można zapisać w zwężłej postaci wprowadzając tensor tarcia  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{T} = N \frac{\mathbf{C} \mathbf{M} \mathbf{v}}{[\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}^2 \mathbf{v}]^{1/2}} = N \frac{\mathbf{C}^{2p} \mathbf{v}}{[\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}^{4p-2} \mathbf{v}]^{1/2}}. \quad (3.24)$$

Reprezentacja tensorów  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{M}$  jest diagonalna w układzie osi ortotropii  $x, y$ :

$$C_{ij}^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad M_{ij}^0 = \begin{bmatrix} m^{-(p-1/2)} & 0 \\ 0 & m^{(p-1/2)} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Ponadto zachodzi zależność  $\mathbf{M} = (c_1 c_2)^{-(p-1/2)} \mathbf{C}^{2p-1}$ .

Otrzymane równania konstytutywne (3.24) zachowują ważność również w dowolnym prostokątnym układzie współrzędnych  $x', y'$  nie koniecznie pokrywającym się z osiami ortotropii  $x, y$ . W układzie  $x', y'$  obróconym względem osi ortotropii o kąt  $\phi$  reprezentacja tensorów  $\mathbf{C}$  oraz  $\mathbf{M}$  ma postać

$$C_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} C_{kl}^0, \quad M_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} M_{kl}^0,$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  jest tensorem obrotu w płaszczyźnie kontaktu ( $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ ,  $\det \mathbf{Q} = 1$ ), a jego reprezentacją w układzie osi ortotropii jest

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Otrzymane równania konstytutywne (3.24) pozwalają wyznaczyć siłę tarcia  $\mathbf{T}$  dla zadanej prędkości poślizgu  $\mathbf{v}$ . Można pokazać, że powyższe prawo tarcia jest obiektywne ze względu na obrót układu odniesienia.

Funkcja dysypacji wyraża się wzorem:

$$D = N \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}^{2p} \mathbf{v}}{[\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}^{4p-2} \mathbf{v}]^{1/2}} = N v \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{C}^{2p} \boldsymbol{\rho}}{[\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{C}^{4p-2} \boldsymbol{\rho}]^{1/2}},$$

gdzie  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}/v$  jest znormalizowanym wektorem poślizgu.

Wyprowadzony model tarcia ortotropowego zawiera trzy parametry — dwa główne współczynniki tarcia  $c_1$  i  $c_2$  w kierunkach ortotropii oraz parametr  $p$  określający prawo poślizgu. W szczególnym przypadku, gdy  $p = 1/2$  (wtedy  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 = \mathbf{1}$ ), równanie (3.24) staje się równoważne prawu tarcia zaproponowanemu przez Zmitrowicza [131]:

$$\mathbf{T} = N \mathbf{C} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Z kolei dla  $p = 1$  otrzymuje się stowarzyszone prawo poślizgu dyskutowane w pracach Michałowskiego i Mroza [67] oraz Curniera [23]. Ma ono postać:

$$\mathbf{T} = N \frac{\mathbf{C}^2 \mathbf{v}}{[\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{v}]^{1/2}}. \quad (3.26)$$

Jak widać prawo tarcia (3.24) w jednolity sposób ujmuje dotychczasowe modele tarcia ortotropowego, a dodatkowy parametr  $p$  generuje całą klasę praw poślizgu.

Rysunek 3.7 pokazuje podstawowe diagramy prezentujące charakterystyki kierunkowe modelu tarcia ortotropowego opisanego wzorami (3.22), (3.23).

### Potencjał poślizgu dla dowolnego anizotropowego warunku tarcia

Koncepcję skalowania półosi elipsy potencjału poślizgu, przedstawioną w poprzednim rozdziale, można uogólnić dla dowolnego anizotropowego warunku tarcia, wz. (3.14). Mianowicie przyjmijmy potencjał poślizgu (3.15) w postaci

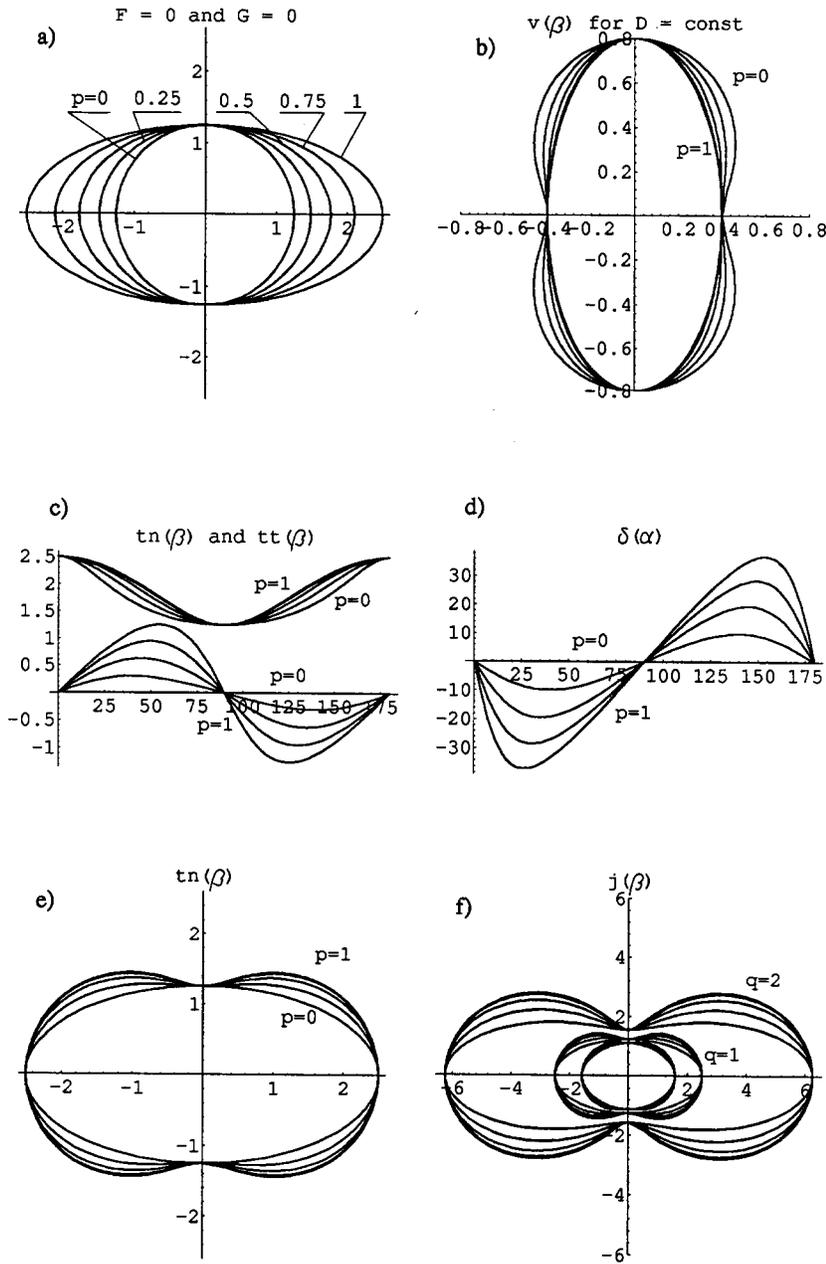
$$G(T_x, T_y) = T - c[f(\alpha)]^p = 0, \quad (3.27)$$

gdzie  $0 \leq p \leq 1$  dla wypukłego warunku granicznego tarcia  $F = 0$ , natomiast  $0 \leq p \leq p_{max} < 1$  dla niewypukłego warunku tarcia. W drugim wypadku  $p_{max}$  oznacza największą wartość parametru  $p$ , dla którego otrzymany potencjał poślizgu jest wypukły.

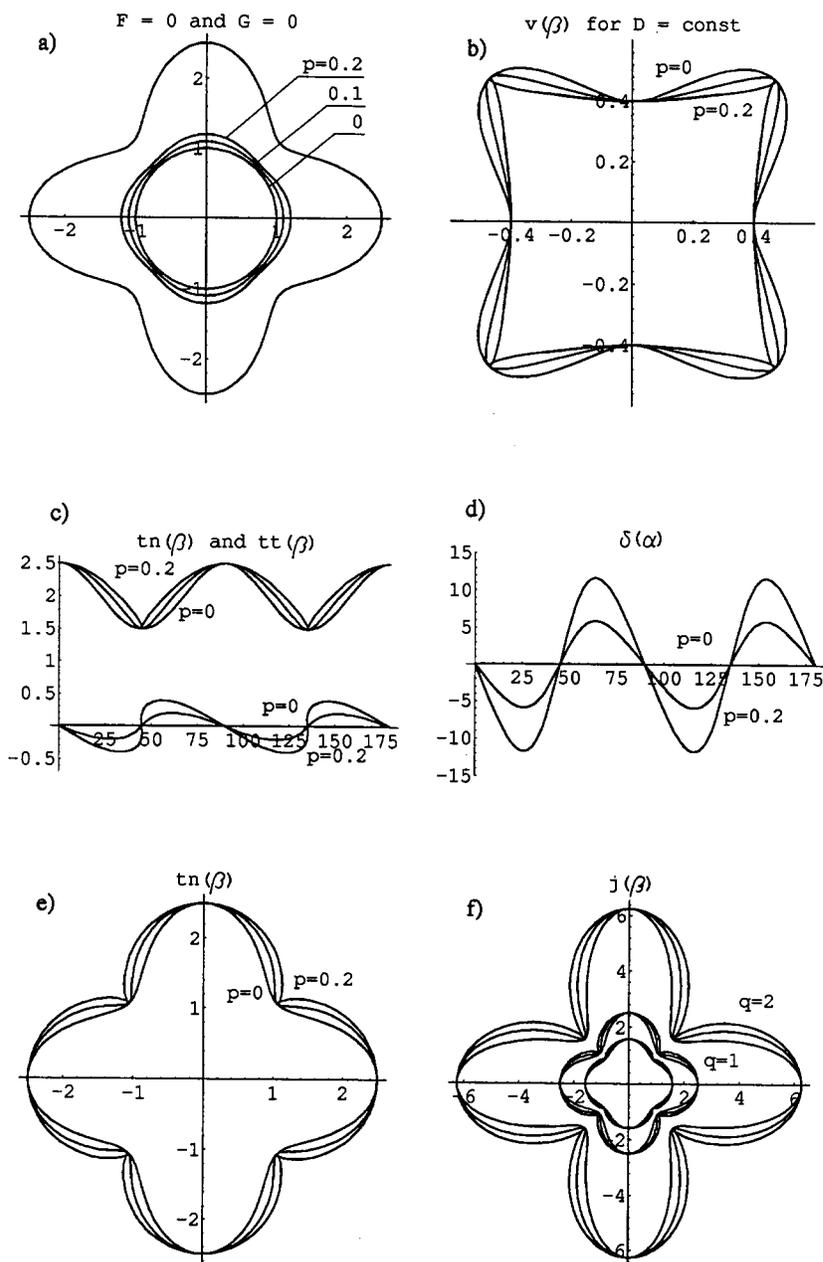
Należy zwrócić uwagę, że tak zdefiniowany potencjał poślizgu jest ściśle związany z warunkiem tarcia ( $g(\alpha) = [f(\alpha)]^p$ ) i dzięki temu zachowuje wszystkie symetrie warunku tarcia.

Jako przykład zastosowania prawa poślizgu (3.27) załóżmy następującą postać funkcji  $f(\alpha)$ :

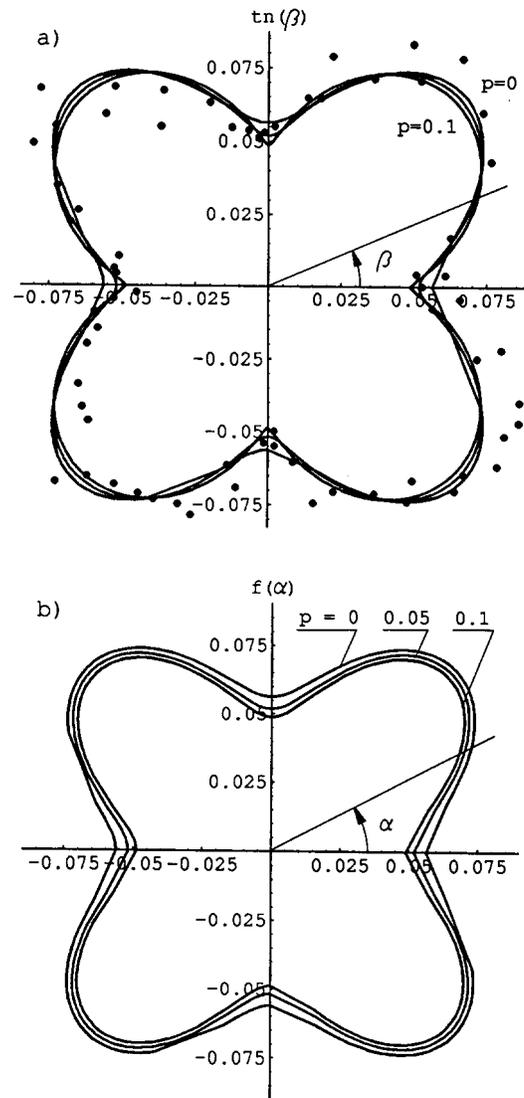
$$f(\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(2k\alpha). \quad (3.28)$$



Rysunek 3.7: Podstawowe charakterystyki modelu tarcia ortotropowego (3.22) dla  $m = c_2/c_1 = 1/2$  i dla różnych wartości parametru  $p$ : (a) krzywe potencjału poślizgu  $g(\alpha)$  dla  $0 \leq p \leq 1$  oraz krzywa graniczna tarcia  $f(\alpha)$  (pokrywa się z krzywą  $g(\alpha)$  dla  $p = 1$ ); (b) krzywe stałej dysypacji  $\bar{v}(\beta)$ ; (c) wykresy  $t_n(\beta)$  (górne krzywe) oraz  $t_t(\beta)$  (dolne krzywe); (d) wykres  $\delta = \alpha - \beta$  w funkcji  $\beta$ ; (e) bezwymiarowe diagramy funkcji dysypacji  $\tilde{d}(\beta) = t_n(\beta)$ ; (f) funkcja zużycia  $j(\beta) = [\tilde{d}(\beta)]^q$  dla  $q = 0.5, 1, 2$ .



Rysunek 3.8: Podstawowe charakterystyki ortotropowego modelu tarcia (3.28), gdzie  $a_0 = 2$  i  $a_2 = 0.5$ , i dla różnych wartości  $p$ : (a) warunek tarcia  $f(\alpha)$  i potencjał poślizgu  $g(\alpha)$ ; (b) krzywe stałej dysypacji  $\bar{v}(\beta)$ ; (c) wykresy  $t_n(\beta)$  (górne krzywe) oraz  $t_t(\beta)$  (dolne krzywe); (d) wykres  $\delta = \alpha - \beta$  w funkcji  $\beta$ ; (e) bezwymiarowe diagramy funkcji dysypacji  $\tilde{d}(\beta) = t_n(\beta)$ ; (f) funkcja zużycia  $j(\beta) = [\tilde{d}(\beta)]^q$  dla  $q = 0.5, 1, 2$ .



Rysunek 3.9: Identyfikacja parametrów modelu dla danych doświadczalnych Caseya i Wilksa [20]: (a) diagramy  $t_n = t_n(\beta)$  przybliżające wyniki doświadczalne; (b) krzywe graniczne tarcia  $f = f(\alpha)$ .

Na rysunku 3.8 przedstawione zostały podstawowe charakterystyki kierunkowe otrzymane dla  $n = 2$ . Ze względu na symetrię względem dwóch prostopadłych do siebie osi jest to ortotropowy warunek tarcia.

Rysunek 3.9 pokazuje wyniki próby zastosowania modelu tego typu do opisu danych eksperymentalnych. Casey i Wilks [20] zmierzili współczynniki tarcia  $t_n$  kryształu diamentu po powierzchni (100) innego kryształu diamentu dla różnych kierunków poślizgu  $\beta$ . Składowa prostopadła do kierunku ruchu  $t_t$  nie była mierzona.

Do opisu danych eksperymentalnych przyjęto funkcję  $f(\alpha)$  w postaci  $f(\alpha) = a_0 + a_2 \cos 4\alpha$ . Następnie dla kilku zadanych wartości parametru  $p$  zidentyfikowano wartości

$p$	$a_0$	$a_2$
0.00	0.0752	-0.0190
0.05	0.0721	-0.0202
0.10	0.0696	-0.0208

Tabela 3.1: Parametry modelu opisującego wyniki Caseya i Wilksa [20], rys. 3.9.

współczynników  $a_0$  i  $a_2$  tak, aby teoretyczna funkcja  $t_n(\beta)$  jak najlepiej przybliżała punkty doświadczalne, rysunek 3.9(a). Tabela 3.1 zawiera otrzymane wartości współczynników dla trzech wartości parametru  $p$ . Na rysunku 3.9(b) pokazane są odpowiadające zidentyfikowanym wartościom parametrów modelu krzywe graniczne tarcia  $f = f(\alpha)$ . Jak widać różnice między charakterystykami kierunkowymi dla poszczególnych wartości  $p$  nie są duże. Spowodowane jest to małym dopuszczalnym zakresem zmienności parametru  $p$ :  $0 \leq p \leq 0.1$ . Ograniczenie to wynika z wymogu wypukłości potencjału poślizgu  $G = 0$  opisanego funkcją  $g(\alpha) = [f(\alpha)]^p$ , gdzie  $f(\alpha)$  definiuje niewypukłą krzywą graniczną tarcia  $F = 0$ .

### 3.1.5 Sprzężony model tarcia i zużycia

Zużycie powoduje ubytek materiału z powierzchni kontaktowej. Można się więc w niektórych przypadkach spodziewać efektów sprzężenia tarcia i zużycia. Mianowicie wraz z postępującym zużyciem powierzchni mogą następować zmiany anizotropii powierzchni, a w konsekwencji również zmiany własności ciernych. Wydaje się, że efekty tego typu mogą mieć większe znaczenie w przypadku, gdy anizotropia powierzchni jest skutkiem obróbki powierzchni, niż wtedy gdy jest ona odzwierciedleniem anizotropii samego materiału (np. w kompozytach). W drugim przypadku ścieranie warstw z powierzchni powoduje odsłanianie kolejnych warstw anizotropowego materiału, zatem zużycie powierzchni nie powinno powodować zmian jej anizotropii i własności ciernych.

Odwrotnego efektu można się spodziewać w pierwszym przypadku — gdy powierzchnia izotropowego materiału uzyskała anizotropię na skutek obróbki powierzchniowej. Wtedy zużycie powierzchni może się w początkowym okresie przejawiać ścieraniem nierówności, których rozkład będzie się zmieniał z początkowo anizotropowego na izotropowy. W konsekwencji może zniknąć anizotropia powierzchni, a wraz z nią anizotropia tarcia. W ogólnym przypadku można się spodziewać, że długotrwałe poślizgi o ustalonym kierunku mogą spowodować powstanie wtórnej anizotropii powierzchni, której wyróżnione kierunki będą związane z kierunkiem poślizgu a nie z kierunkiem początkowej anizotropii. Poniżej zaprezentowany zostanie prosty model uwzględniający pierwszy z diskutowanych powyżej efektów.

Rozważmy najpierw model mikro-mechaniczny wyprowadzony w rozdz. 3.1.1. Współczynniki tarcia w kierunkach głównych ortotropii  $\mu_1, \mu_2$  zależą od dwóch parametrów: kąta nachylenia nierówności powierzchni ortotropowej  $\varphi$  oraz lokalnego współczynnika tarcia  $\mu$  (wz. (3.10)). Ponieważ można przyjąć, że najszybciej zużywają się czubki nierówności, wraz ze zużyciem powierzchni średni kąt nachylenia nierówności powierzchni ortotropowej będzie malał. Jednocześnie zgodnie ze wzorami (3.10) wartości głównych współczynników

tarcia  $\mu_1$  i  $\mu_2$  będą dążyły do wartości parametru  $\mu$  odpowiadającego gładkiej powierzchni ( $\varphi = 0$ ). Powyższa jakościowa analiza może służyć jako punkt wyjścia oraz ilustracja dla bardziej ogólnego modelu.

Założmy, że na powierzchni izotropowego materiału występują nierówności o ortotropowym rozkładzie (będące na przykład pozostałością obróbki skrawaniem). Przyjmijmy też dla uproszczenia, że własności cierne pary kontaktowej składającej się z tej powierzchni oraz z innej, izotropowej powierzchni opisuje eliptyczny warunek graniczny tarcia ze stowarzyszonym prawem poślizgu (równania (3.22) dla  $p = 1$ ).

Główne współczynniki tarcia  $c_1$  oraz  $c_2$  definiują elipsę krzywej granicznej tarcia:

$$F(T_x, T_y, N) = \left[ \left( \frac{T_x}{c_1} \right)^2 + \left( \frac{T_y}{c_2} \right)^2 \right]^{-1/2} - N = 0. \quad (3.29)$$

Wzór (3.26) opisuje wynikającą z powyższego prawa tarcia zależność siły tarcia  $\mathbf{T}$  od prędkości poślizgu  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{T} = N \frac{\mathbf{C}^2 \mathbf{v}}{[\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{v}]^{1/2}}.$$

Reprezentacja tensora  $\mathbf{C}$  podana jest wzorem (3.25).

Założmy też, że istnieje pewien stan asymptotyczny, w którym tarcie jest izotropowe, a asymptotyczny współczynnik tarcia niech będzie oznaczony przez  $c^a = \mu^a$ . W stanach przejściowych współczynniki tarcia ortotropowego  $c_1$  i  $c_2$  ulegają zmianie na skutek zużycia i dążą do wartości asymptotycznej  $c^a$ . Można więc zaproponować proste prawo ewolucji tych współczynników w postaci:

$$\dot{c}_i = (c^a - c_i) \frac{\dot{w}}{w_0}, \quad i = 1, 2, \quad (3.30)$$

gdzie  $w_0$  jest parametrem modelu, który można interpretować jako pewną charakterystyczną wielkość zużycia związaną ze zmianami anizotropii powierzchni. Przyjmijmy prawo zużycia w postaci (3.21):

$$\dot{w}(\beta) = \gamma(N/A)v[\tilde{d}(\beta)]^q, \quad (3.31)$$

gdzie funkcja dysypacji  $\tilde{d}(\beta)$  określona jest wzorem:

$$\tilde{d}(\beta) = \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{C}^2 \boldsymbol{\rho}}{[\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{C}^2 \boldsymbol{\rho}]^{1/2}}. \quad (3.32)$$

Znormalizowany wektor poślizgu  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}/v$  ma w układzie osi ortotropii  $x, y$  składowe  $\boldsymbol{\rho} = [\cos \beta, \sin \beta]$ . Równania (3.29)–(3.32) opisują sprzężone prawo tarcia i zużycia, w którym zużycie powierzchni wpływa na jej własności cierne, zaś prędkość zużycia jest bezpośrednio związana z prawem tarcia. Pominięte zostały efekty związane z wtórną anizotropią powierzchni wywołaną powtarzającymi się poślizgami ciernymi o ustalonym kierunku.

### 3.1.6 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale został przedstawiony nowy model tarcia anizotropowego z niestowarzyszonym prawem poślizgu. Prawo tarcia wyprowadzone dla prostego mikro-mechanicznego modelu kontaktu powierzchni o ortotropowym układzie nierówności charakteryzowało się takim właśnie niestowarzyszonym prawem poślizgu. Jedną z cech tego modelu zrodziła koncepcję generowania potencjału poślizgu przez skalowanie krzywej granicznej tarcia. Koncepcja ta została następnie uogólniona i zastosowana do opisu danych doświadczalnych. Przedstawiono jednolity sposób opisu tarcia i zużycia anizotropowego wraz z prostym założeniem konstytutywnym ściśle wiążącym ze sobą własności tarcia i zużycia.

Zaproponowano również nowy model tarcia ortotropowego o eliptycznym warunku tarcia z niestowarzyszonym prawem poślizgu, który uogólnia dotychczas stosowane modele tego typu (Michałowski, Mróz [67]; Curnier [23]; Zmitrowicz [131]). Dla przypadku stowarzyszonego prawa poślizgu wprowadzony został dodatkowo sprzężony model anizotropowego tarcia i zużycia.

## 3.2 Fenomenologiczny model tarcia i zużycia w procesach obróbki plastycznej

### 3.2.1 Krytyczna analiza istniejących modeli

Warunki kontaktowe w procesach obróbki plastycznej charakteryzują się kilkoma cechami, które powodują, że klasyczny model tarcia Coulomba nie może być w nich stosowany do dokładnego opisu zachodzących zjawisk. Procesy obróbki plastycznej wyróżniają wysokie ciśnienia kontaktowe, duża różnica twardości kontaktujących się powierzchni oraz zaawansowana deformacja plastyczna obrabianego materiału. W procesach obróbki na gorąco dodatkową cechą jest duża różnica temperatur kontaktujących się powierzchni.

Istniejące modele (omówione w rozdziale 1.3.1) bazujące na jednym z podstawowych schematów oddziaływania powierzchni z nierównościami (ST/RW lub RT/SW) prowadzą do nieliniowych praw tarcia. Prawa te dla niskich ciśnień kontaktowych modelują siły tarcia zgodnie z prawem Coulomba. Natomiast dla ciśnień wysokich siły tarcia asymptotycznie dążą do stałej wartości (rys. 1.5(c)).

Tego typu nieliniowe prawo tarcia otrzymali Avitzur i Nakamura [5] przyjmując, że kontaktują się ze sobą twarda, chropowata powierzchnia narzędzia oraz gładka i miękka (uplastyczniona) powierzchnia obrabianego materiału (schemat RT/SW). Modele tego typu pozwalają uwzględnić wpływ chropowatości powierzchni narzędzia na siły tarcia. Jednakże założenie, że powierzchnia materiału jest gładka bardzo często stoi w sprzeczności z obserwacjami. Ogólnie znany jest fakt, że ubocznym skutkiem niektórych procesów obróbki plastycznej jest znaczna poprawa gładkości powierzchni wykonanego elementu. Mimo iż modele bazujące na schemacie RT/SW, dają racjonalną podstawę stosowania modeli tarcia o nieliniowej zależności sił tarcia od nacisków normalnych, pomijają proces zmian chropowatości powierzchni związany ze spłaszczaniem nierówności.

Warunek tarcia dla modeli tarcia orania (ściernego) można zapisać w ogólnej postaci:

$$f_p(\bar{p}_N, \bar{p}_T) = |\bar{p}_T| - \bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N) \leq 0, \quad (3.33)$$

gdzie bezwymiarowe naprężenia kontaktowe  $\bar{p} = p/k$  odniesione są do wytrzymałości na ścinanie  $k$  materiału obrabianego, a  $\bar{p}_T^{sl} = \bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$  jest nieliniową funkcją bezwymiarowego ciśnienia kontaktowego  $\bar{p}_N$ . Postać warunku tarcia (3.33) odpowiada przypadkowi dwuwymiarowemu, gdyż zamiast wektora naprężenia tarcia  $\bar{\mathbf{p}}_T$  zawiera skalar  $\bar{p}_T$ . Dla uproszczenia i bez utraty ogólności, w dalszym ciągu rozważań stosowany będzie taki opis, przy czym należy pamiętać, że przejście do przypadku trójwymiarowego wymaga jedynie podstawienia  $\bar{\mathbf{p}}_T$  w miejsce  $\bar{p}_T$ . Charakter zależności  $\bar{p}_T^{sl} = \bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$  pokazany jest schematycznie na rysunku 1.5(c). Ponieważ powierzchnia narzędzia traktowana jest jako sztywna, jedynym parametrem będącym skalą dla naprężeń kontaktowych jest granica plastyczności  $k$ . Dzięki temu warunek tarcia można zapisać w bezwymiarowej postaci (3.33).

Z kolei modele tarcia adhezyjnego (Wanheim, Bay [115, 14]; Wilson, Sheu [118, 120]) zakładające kontakt gładkiej i sztywnej powierzchni narzędzia z chropowatą powierzchnią obrabianego materiału opisują ważny proces spłaszczania nierówności i związany z nim wzrost rzeczywistej powierzchni kontaktu  $\alpha$ . Podstawowe założenie modeli tarcia adhezyjnego mówi, że lokalne naprężenia styczne na rzeczywistych mikro-kontaktach są stałe ( $\tau = mk$ ) i nie zależą od ciśnienia normalnego. Są natomiast związane z granicą plastyczności na ścinanie  $k$ . Współczynnik adhezji  $m$  określa stosunek  $\tau/k$ . Powierzchnię graniczną modeli tego typu można zapisać w postaci:

$$f_a(\bar{p}_N, \bar{p}_T) = |\bar{p}_T| - \bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N) = |\bar{p}_T| - m\alpha(\bar{p}_N) \leq 0. \quad (3.34)$$

Zależność  $\alpha = \alpha(\bar{p}_N)$  otrzymywana jest z modeli mikro-mechanicznych bazujących na rozwiązaniach metodą charakterystyk lub górnej oceny kinematycznej, przy założeniu, że materiał obrabiany jest sztywno-plastyczny.

Modele tarcia adhezyjnego w postaci (3.34) są znaczącym krokiem naprzód w stosunku do modelu Coulomba. Jednakże zawierają pewną niespójność. Mianowicie nie uwzględniają, że proces spłaszczania nierówności jest nieodwracalny. Przyjęcie jednoznacznej zależności rzeczywistej powierzchni kontaktu od ciśnienia normalnego  $\alpha = \alpha(\bar{p}_N)$  (np. w modelu Wanheima i Bay'a [115, 14]) odpowiada bowiem założeniu pełnej odwracalności tego procesu.

Z kolei w podejściu Wilsona i Sheu [118, 120] rzeczywista powierzchnia kontaktu  $\alpha$  jest niemalejącą zmienną stanu. Zależy ona nie tyle od aktualnego ciśnienia normalnego ale od jego historii oraz od historii deformacji plastycznej materiału. W tym ujęciu oczywiście nieodwracalność procesu jest uwzględniona. Jednakże model taki prowadzi do innej sprzeczności. Otóż jeżeli w dowolnym procesie nastąpiło pewne spłaszczenie nierówności, po czym ciśnienie kontaktowe spada do zera, to zgodnie z modelem adhezyjnym, skończonej rzeczywistej powierzchni kontaktu odpowiada skończone naprężenie styczne sił tarcia mimo, że ciśnienie normalne może być nieskończenie małe. W sposób oczywisty taki rezultat należy uznać za niefizyczny.

A zatem należy szukać modelu, który uwzględniając nieodwracalne spłaszczanie nierówności, jednocześnie byłby spójny i zgodny z obserwowaną rzeczywistością. Propozycje

tego typu modelu wysunął Wilson [120]. Przyjął on, że spłaszczone czubki dużych nierówności obrabianego materiału oddziałują nie z gładką powierzchnią narzędzia, ale ze znacznie od siebie mniejszymi nierównościami znajdującymi się na tej powierzchni. To samo założenie leży u podstaw nowego modelu tarcia przedstawionego w następnym rozdziale. Wilson [120] koncentrował się na wpływie deformacji plastycznej materiału na rzeczywistą powierzchnię kontaktu oraz tarcie. Wpływ ten jest szczególnie ważny w procesach tłoczenia blach, w których ciśnienia normalne nie są wysokie, natomiast deformacje plastyczne są znaczne.

Prosty model tarcia powierzchni o podwójnej skali nierówności pomija wpływ deformacji plastycznej materiału. Model ten pozwala łatwo wyodrębnić poszczególne mechanizmy tarcia oraz związane z nimi oddziaływania nierówności powierzchni. Ten podstawowy model może też służyć jako baza dla bardziej złożonych modeli uwzględniających na przykład stany przejściowe kontaktu lub tarcie ściernie wywoływane przez cząstki trzeciego ciała.

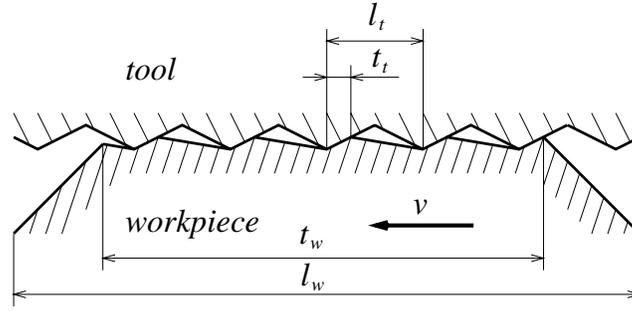
### 3.2.2 Model tarcia powierzchni o podwójnej skali nierówności

#### Podstawowe założenia

W procesach obróbki plastycznej własności kontaktujących się ze sobą powierzchni narzędzia oraz obrabianego materiału bardzo różnią się od siebie. Przede wszystkim powierzchnia narzędzia jest dużo twardsza od powierzchni materiału. Pozwala to traktować ją jako sztywną. Z drugiej strony występowanie dużych deformacji plastycznych w obrabianym materiale uzasadnia pominięcie jego odkształceń sprężystych i traktowanie go jako sztywno-plastycznego.

Druga różnica dotyczy chropowatości powierzchni. O ile powierzchnia narzędzia poddawana jest starannej obróbce mającej na celu uzyskanie małej chropowatości, o tyle chropowatość powierzchni obrabianego materiału odzwierciedla zazwyczaj stan powierzchni półproduktu i jest zazwyczaj znacznie większa od chropowatości powierzchni narzędzia. Ponadto względna twardość powierzchni narzędzia powoduje, że chropowatość narzędzia praktycznie nie zmienia się. Tak więc mimo, że zużycie powierzchni narzędzia może w dłuższym okresie prowadzić do zmian stanu powierzchni, w tym chropowatości, jednak zmiany te są powolne i można je zaniedbać, gdy rozważa się jeden cykl wytwórczy. Z drugiej strony chropowatość powierzchni materiału może doznawać znaczących zmian na skutek procesu spłaszczania nierówności.

O ile proste modele ST/RW oraz RT/SW zakładają, że jedna z powierzchni jest gładka, o tyle bazując na powyższych obserwacjach można zaproponować model współpracy dwóch chropowatych powierzchni. Załóżmy, że rozmiary nierówności powierzchni narzędzia są znacznie mniejsze od rozmiarów nierówności powierzchni materiału obrabianego. Kontakt nierówności takich powierzchni pokazany jest schematycznie na rysunku 3.10. Charakterystyczne długości nierówności powierzchni materiału obrabianego oraz narzędzia oznaczone są odpowiednio przez  $l_w$  oraz  $l_t$ , a długości odcinków, na których zachodzi bezpośredni kontakt oznaczone są przez  $t_w$  i  $t_t$ . Oczywiście zgodnie z powyższym założeniem  $l_w \gg l_t$ . Bazując na tych charakterystycznych wielkościach wprowadźmy współ-



Rysunek 3.10: Model kontaktu powierzchni o podwójnej skali nierówności: charakterystyczne wymiary periodycznie rozmieszczonych nierówności.

czynniki efektywnej powierzchni kontaktu  $\alpha_w$  oraz  $\alpha_t$  zdefiniowane jako:

$$\alpha_w = \frac{t_w}{l_w}, \quad \alpha_t = \frac{t_t}{l_t}.$$

Rzeczywista powierzchnia kontaktu  $\alpha$  równa jest ich iloczynowi:

$$\alpha = \alpha_w \alpha_t.$$

Średnie naprężenia kontaktowe panujące na spłaszczonych wierzchołkach nierówności obrabianego materiału  $p_N^{(w)}$ ,  $p_T^{(w)}$  związane są z globalnymi naprężeniami kontaktowymi  $p_N$ ,  $p_T$  następującymi zależnościami

$$\bar{p}_N^{(w)} = \frac{\bar{p}_N}{\alpha_w}, \quad \bar{p}_T^{(w)} = \frac{\bar{p}_T}{\alpha_w}.$$

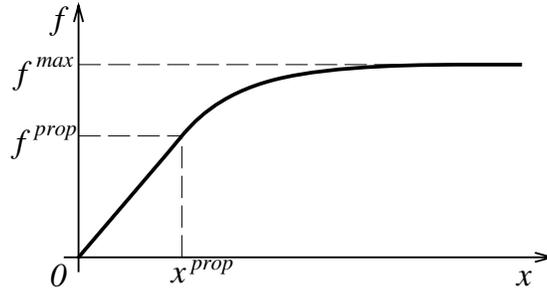
Zgodnie z założeniem, że powierzchnia narzędzia jest sztywna, jedyną wielkością skalującą naprężenia kontaktowe jest granica plastyczności materiału obrabianego  $k$ . Dlatego też w dalszej części używane będą jedynie bezwymiarowe naprężenia kontaktowe  $\bar{p} = p/k$ .

Bazując na założeniu, że nierówności narzędzia są dużo mniejsze od nierówności materiału obrabianego, można postulować, że oba mechanizmy tarcia (spłaszczanie nierówności oraz oranie) są niezależne. Wtedy w uproszczonym opisie oddziaływań takich powierzchni spłaszczanie nierówności może być przybliżone prostym schematem ST/RW. Z kolei oranie twardymi nierównościami narzędzia może być opisane schematem RT/SW.

W rezultacie otrzymuje się model będący kombinacją obu prostych modeli tarcia: adhezyjnego oraz orania. Warunkiem względnego poślizgu obu powierzchni jest spełnienie warunku tarcia (3.33) modelu RT/SW na wierzchołkach dużych nierówności. Podstawienie do niego lokalnych naprężeń kontaktowych  $\bar{p}_N^{(w)}$  i  $\bar{p}_T^{(w)}$  prowadzi do warunku tarcia w postaci:

$$f_p(\bar{p}_N^{(w)}, \bar{p}_T^{(w)}) = f_p(\bar{p}_N/\alpha_w, \bar{p}_T/\alpha_w) = f_d(\bar{p}_N, \bar{p}_T, \alpha_w) = 0. \quad (3.35)$$

Otrzymany warunek tarcia  $f_d = 0$  modelu uwzględniającego dwie skale nierówności zawiera kontaktową zmienną stanu  $\alpha_w$  związaną ze spłaszczaniem nierówności. Ponieważ proces spłaszczania nierówności jest nieodwracalny, efektywna powierzchnia kontaktu  $\alpha_w$  nie może maleć. Wyznacza się ją w funkcji naprężeń kontaktowych z modelu tarcia adhezyjnego (3.34). Oczywiście w granicznym przypadku, gdy  $\alpha_w = 1$ , model sprowadza się do modelu tarcia orania (RT/SW).



Rysunek 3.11: Funkcja liniowo-potęgowa.

### Specyfikacja funkcji i parametrów modelu

Aby przedstawiony powyżej model był pełny, należy określić funkcje opisujące składowe modele ST/RW oraz RT/SW. Oba modele prowadzą do nieliniowych praw tarcia. Charakter zależności naprężenia tarcia od nacisków normalnych  $\bar{p}_T^{sl} = \bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$  został pokazany na rysunku 1.5(c). Zależności tego typu wynikają z modelu tarcia adhezyjnego Wanheima i Bay'a [115, 14] a także z modelu tarcia na skutek orania zaproponowanego przez Avitzura i Nakamurę [5].

W obu przypadkach zależność  $\bar{p}_T^{sl} = \bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$  jest liniowa dla małych normalnych ciśnień kontaktowych, a dla wysokich ciśnień dąży asymptotycznie do stałej wartości. Tego typu zależność można w przybliżeniu opisać funkcją będącą sklejeniem funkcji liniowej oraz funkcji potęgowej w postaci:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \hat{f}(x, x^{prop}, f^{prop}, f^{max}) = \\
 &= \begin{cases} \frac{f^{prop}}{x^{prop}} x & \text{dla } 0 \leq x \leq x^{prop} \\ f^{max} - (f^{max} - f^{prop}) \exp\left[\frac{-f^{prop}(x - x^{prop})}{x^{prop}(f^{max} - f^{prop})}\right] & \text{dla } x > x^{prop} \end{cases} \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Funkcja  $f(x)$  opisana wzorem (3.36) zależy od trzech parametrów  $x^{prop}$ ,  $f^{prop}$ ,  $f^{max}$  pokazanych na rysunku 3.11. Właśnie przy pomocy takiej funkcji Bay [14] zaproponował przybliżony opis rozwiązań analitycznych modelu spłaszczania nierówności (ST/RW).

W modelu tarcia adhezyjnego naprężenie styczne na rzeczywistych kontaktach (na wierzchołkach spłaszczonych nierówności) opisywane jest przez stały współczynnik  $m$ :

$$p_T^{(w)} = mk, \quad \bar{p}_T^{(w)} = m.$$

Rozwiązania analityczne Wanheima i in. [115] otrzymane metodą charakterystyk zostały przez Bay'a [14] przybliżone funkcją liniowo-potęgową (3.36):

$$\alpha_w = \hat{\alpha}_w[\bar{p}_N, \bar{p}_N^{prop}(m), \alpha_w^{prop}(m), \alpha_w^{max}(m)] = g_2(\bar{p}_N, m), \quad (3.37)$$

której parametry  $\bar{p}_N^{prop}$ ,  $\alpha_w^{prop}$  oraz  $\alpha_w^{max}$  zależą od współczynnika adhezji  $m$ :

$$\bar{p}_N^{prop} = \frac{1 + \frac{\pi}{2} + \arccos m + \sqrt{1 - m^2}}{1 + \sqrt{1 - m}}, \quad \alpha_w^{prop} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - m}}, \quad \alpha_w^{max} = 1. \quad (3.38)$$

$\theta_t$	$m_0$	$\bar{p}_N^{prop}$	$f_1^{prop}$	$f_1^{max}$
1°	0.2	2.51	0.14	0.24
5°	0.2	2.16	0.26	0.39
5°	0.6	1.91	0.45	0.74

Tabela 3.2: Przykładowe wartości parametrów funkcji liniowo-potęgowej (3.36) przybliżającej zależność  $\bar{p}_T^{sl} = f_1(\bar{p}_N)$  otrzymaną przez Avitzura i Nakamurę [5] dla modelu RT/SW (tarcie orania).

Rozwiązanie Wanheima i in. [115] bazuje na założeniu, że kąt nachylenia nierówności jest zanedbywalnie mały. Bardziej rozbudowane rozwiązanie Bay'a [14] uwzględnia dodatkowo skończony kąt nachylenia nierówności oraz zmianę tego kąta na skutek spłaszczenia nierówności. W takim przypadku zależność (3.37) przyjmuje bardziej ogólną postać:

$$\alpha_w = g_2(\bar{p}_N, m, \theta_{w0}), \quad (3.39)$$

gdzie początkowy kąt nachylenia nierówności  $\theta_{w0}$  jest dodatkowym parametrem modelu. Dla  $\theta_{w0} = 0$  model Bay'a [14] jest równoważny modelowi Wanheima i in. [115], a zależność (3.39) upraszcza się do (3.37).

Opis tarcia na skutek orania (schemat RT/SW) można oprzeć na wynikach Avitzura. Rozwiązania (zależności  $\bar{p}_T^{sl} = \bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$ ) otrzymane metodą górnej oceny kinematycznej zależą od dwóch parametrów: kąta nachylenia nierówności powierzchni narzędzia  $\theta_t$  oraz od lokalnego współczynnika adhezji  $m_0$  na rzeczywistych kontaktach. Również w tym przypadku funkcja liniowo-potęgowa (3.36) może służyć do przybliżonego opisu zależności  $\bar{p}_T^{sl} = \bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$ :

$$\bar{p}_T^{sl} = \hat{\bar{p}}_T(\bar{p}_N, \bar{p}_N^{prop}, f_1^{prop}, f_1^{max}) = f_1(\bar{p}_N). \quad (3.40)$$

Wartości parametrów modelu  $\bar{p}_N^{prop}$ ,  $f_1^{prop}$  i  $f_1^{max}$  można oszacować z wyników Avitzura i Nakamury [5] przyjmując jako niezależne parametry kąt nachylenia nierówności oraz współczynnik adhezji. W tabeli 3.2 zestawione są przykładowe wartości tych parametrów wraz z odpowiadającymi im wartościami parametrów funkcji liniowo-potęgowej (3.36). Te przykładowe wartości będą używane w przykładach. Również model Wilsona [120] dotyczący tarcia na skutek orania może być wykorzystany do opisu modelu RT/SW. Porównanie pokazuje, że oba modele dają zbliżone wyniki (Mróz, Stupkiewicz [76]).

W innym podejściu parametry  $\bar{p}_N^{prop}$ ,  $f_1^{prop}$  i  $f_1^{max}$  można traktować jako niezależne parametry fenomenologiczne wyznaczone eksperymentalnie bez odwoływania się do — przybliżonego przecież — modelu Avitzura i Nakamury.

Podsumowując, model Wanheima i in. [115] dotyczący spłaszczenia nierówności (schemat ST/RW) opisany jest funkcją liniowo-potęgową  $\alpha_w = g_2(\bar{p}_N, m)$  (wz. (3.37)), której parametry opisane są analitycznymi wyrażeniami (3.38). Z kolei model RT/SW związany z mechanizmem orania opisany jest funkcją  $\bar{p}_T^{sl} = f_1(\bar{p}_N)$  (wz. (3.40)) o trzech nieznanymi parametrach  $\bar{p}_N^{prop}$ ,  $f_1^{prop}$  i  $f_1^{max}$ .

### Równania modelu

Zgodnie z przyjętym powyżej sposobem opisu modelu RT/SW lokalne naprężenia kontaktowe  $\bar{p}_N^{(w)}$  oraz  $\bar{p}_T^{(w)}$  związane są ze sobą zależnością  $\bar{p}_T^{(w)} = f_1(\bar{p}_N^{(w)})$ , która wyrażona przez globalne naprężenia kontaktowe  $\bar{p}_N$  i  $\bar{p}_T$  specyfikuje globalny warunek tarcia (3.35):

$$f_d(\bar{p}_N, \bar{p}_T, \alpha_w) = \bar{p}_T - \alpha_w f_1(\bar{p}_N/\alpha_w) = 0. \quad (3.41)$$

Do wyznaczenia efektywnej powierzchni kontaktu  $\alpha_w$  wykorzystamy zależność (3.37) wynikającą z modelu ST/RW:  $\alpha_w = g_2(\bar{p}_N, m)$ . Przyjmując, że parametr  $m$  nie jest stały, i że odzwierciedla aktualne lokalne naprężenia tarcia na wierzchołkach nierówności, na podstawie modelu RT/SW można go wyznaczyć jako:

$$m = \bar{p}_T^{(w)} = f_1(\bar{p}_N^{(w)}).$$

Podstawiając  $m = f_1(\bar{p}_N^{(w)})$  do równania (3.37) otrzymuje się nieliniowe równanie

$$\alpha_w = g_2 \left[ \bar{p}_N, f_1 \left( \frac{\bar{p}_N}{\alpha_w} \right) \right],$$

wiążące ze sobą efektywną powierzchnię kontaktu  $\alpha_w$  i normalne ciśnienie kontaktowe  $\bar{p}_N$ . Rozwiązanie tego równania ze względu na  $\alpha_w$  oznaczmy symbolicznie przez  $h_2$ :

$$\alpha_w = h_2(\bar{p}_N). \quad (3.42)$$

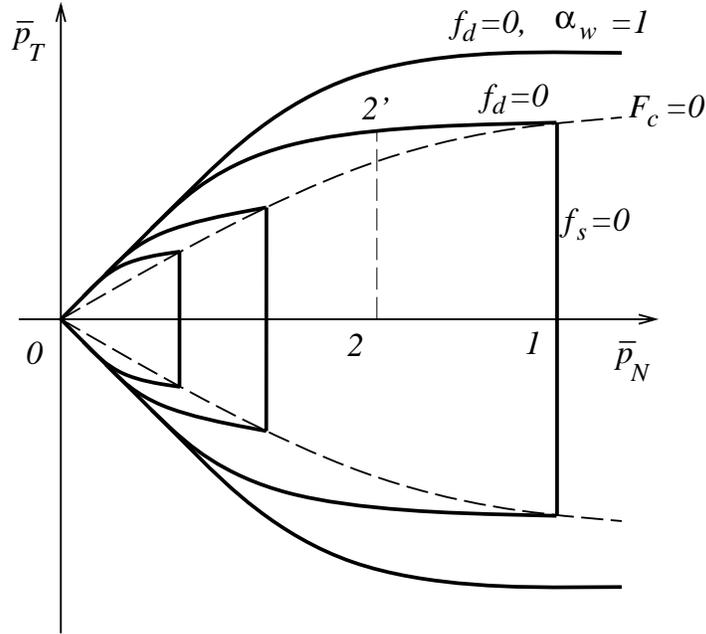
Ponieważ proces spłaszczania nierówności jest nieodwracalny, efektywna powierzchnia kontaktu  $\alpha_w$  zależy nie od aktualnej wartości ciśnienia normalnego, lecz od jego wartości maksymalnej  $\bar{p}_{Nmax}$ . A zatem zależność między  $\alpha_w$  a ciśnieniem kontaktowym można zapisać w postaci

$$f_s(\bar{p}_{Nmax}, \alpha_w) = \alpha_w - h_2(\bar{p}_{Nmax}) = 0, \quad (3.43)$$

gdzie  $f_s = 0$  jest *powierzchnią spłaszczania nierówności*.

W przestrzeni globalnych naprężeń kontaktowych warunek graniczny tarcia reprezentowany jest przez zbiór powierzchni granicznych  $f_d = 0$  odpowiadających różnym wartościom zmiennej stanu  $\alpha_w$ . Powierzchnie te pokazane są schematycznie na rysunku 3.12. Należy zwrócić uwagę, że zgodnie z równaniem (3.35) powierzchnie  $f_d = 0$  powstają przez skalowanie powierzchni granicznej  $f_p = 0$  opisującej prosty model RT/SW i odpowiadającej przypadkowi granicznemu  $\alpha_w = 1$ .

Powierzchnie  $f_d = 0$  oraz  $f_s = 0$  zamykają obszar dozwolonych wartości naprężeń kontaktowych. Ze względu na aktywne procesy zachodzące na powierzchni kontaktowej można wyróżnić cztery stany kontaktu. Punktom na powierzchni  $f_s = 0$  odpowiada spłaszczanie nierówności i wzrost efektywnej powierzchni kontaktu  $\alpha_w$ . W punktach leżących na powierzchni  $f_d = 0$  zachodzi poślizg, natomiast efektywna powierzchnia kontaktu  $\alpha_w$  nie ulega zmianie. W punktach będących przecięciem powierzchni  $f_d = 0$  z powierzchnią  $f_s = 0$  zachodzi jednoczesny poślizg oraz spłaszczanie nierówności. Punkty te tworzą *powierzchnię stanów krytycznych tarcia*  $F_c = 0$  pokazaną na rysunku 3.12 linią przerywaną. Czwartym stanem kontaktu jest przyleganie, któremu odpowiadają punkty leżące



Rysunek 3.12: Powierzchnie graniczne tarcia dla modelu tarcia powierzchni o podwójnej skali nierówności.

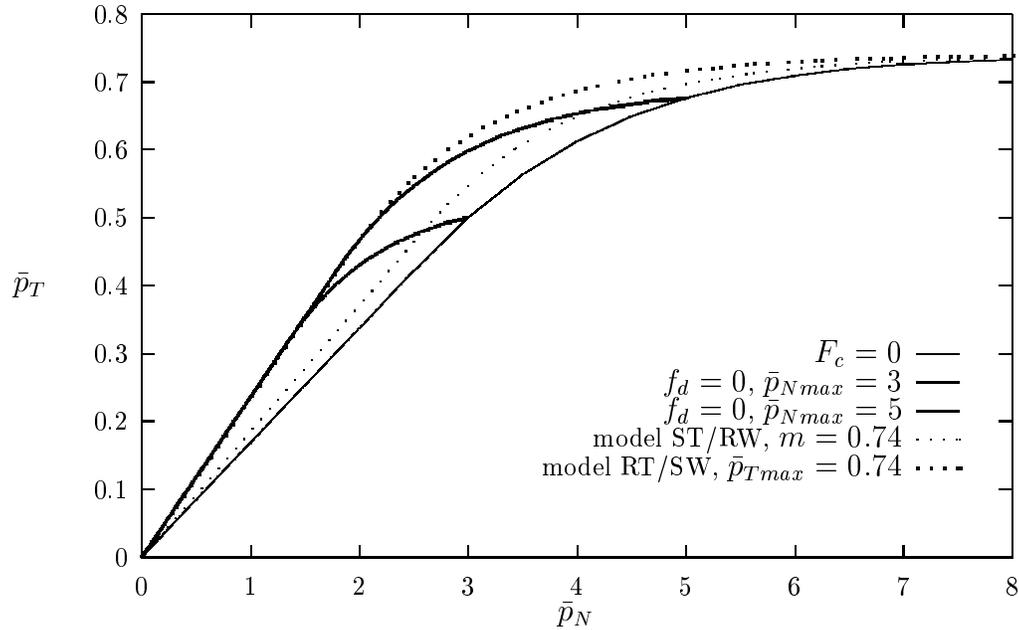
wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchniami  $f_d = 0$  i  $f_s = 0$ . W tym stanie nie zachodzi ani poślizg ani spłaszczanie nierówności.

O ile na powierzchniach  $f_d(\bar{p}_N, \bar{p}_T, \alpha_w^{max}) = 0$  efektywna powierzchnia kontaktu  $\alpha_w$  jest stała i równa  $\alpha_w = h_2(\bar{p}_{Nmax})$ , o tyle na powierzchni stanów krytycznych  $F_c(\bar{p}_N, \bar{p}_T) = 0$  efektywna powierzchnia kontaktu  $\alpha_w$  zależy od aktualnej wartości ciśnienia normalnego. Punkty powierzchni  $F_c = 0$  odpowiadają więc przypadkowi, gdy następuje poślizg przy jednoczesnym monotonicznym wzroście normalnego ciśnienia kontaktowego i związanym z nim ciągłym spłaszczaniu nierówności. Równanie powierzchni stanów krytycznych  $F_c = 0$  ma postać:

$$F_c(\bar{p}_N, \bar{p}_T) = |\bar{p}_T| - h_2(\bar{p}_N) f_1 \left( \frac{\bar{p}_N}{h_2(\bar{p}_N)} \right) = 0.$$

Zdefiniowany powyżej model tarcia powierzchni o podwójnej skali nierówności jest złożeniem dwóch prostych modeli tarcia adhezyjnego (model ST/RW) oraz tarcia orania (model RT/SW). Dzięki wykorzystaniu rozwiązań analitycznych Wanheima i in. [115], jedynymi parametrami modelu są parametry opisujące zależność  $\bar{p}_T^{sl} = f_1(\bar{p}_N)$  dla modelu RT/SW. Gdy zależność ta opisywana jest przy pomocy funkcji liniowo-potęgowej (3.36), to są to trzy parametry:  $\bar{p}_N^{prop}$ ,  $f_1^{prop}$  i  $f_1^{max}$ . Przykładowe wartości tych parametrów zawiera tabela 3.2. Na rysunku 3.13 pokazane są podstawowe krzywe modelu dla parametrów odpowiadających przypadkowi  $\theta_t = 5^\circ$ ,  $m_0 = 0.6$  (tabela 3.2). Przypadkowi temu odpowiada maksymalna wartość naprężeń tarcia  $\bar{p}_{Tmax} = f_1^{max} = 0.74$ . Dla porównania pokazane są również krzywe odpowiadające składowym modelom ST/RW oraz RT/SW.

Rozdział 3.3 poświęcony jest zastosowaniu powyższego modelu w numerycznej analizie problemów kontaktowych. Wyprowadzona jest konsystentna macierz styczna dla



Rysunek 3.13: Krzywe tarcia modelu tarcia powierzchni o podwójnej skali nierówności dla przypadku  $\bar{p}_{Tmax} = f_1^{max} = 0.74$ .

przypadku, gdy powierzchnia narzędzia jest nieodkształcalna i aproksymowana elementami liniowymi. Przedstawione są również wyniki otrzymane dla prostych zadań dwuwymiarowych, ilustrujące podstawowe własności modelu.

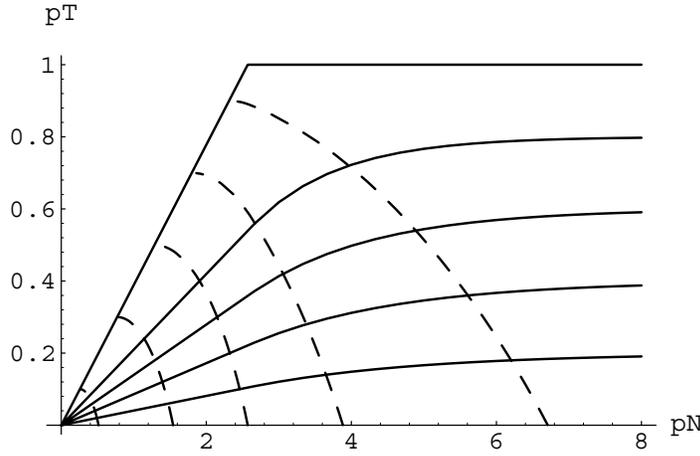
### 3.2.3 Spłaszczanie nierówności pod wpływem ściskania i ścinania

W modelu tarcia, przedstawionym w poprzednim podrozdziale, spłaszczanie nierówności zależy jedynie od normalnych nacisków kontaktowych  $\bar{p}_N$ . Odzwierciedla to płaska powierzchnia  $f_s = 0$  opisana równaniem (3.43) i pokazana na rysunku 3.12. Można się jednak spodziewać, że w rzeczywistości na spłaszczanie nierówności ma wpływ również wielkość naprężenia stycznego działającego na nierówność.

Jako przykład niech posłuży model Wanheima i in. [115]. Linie ciągłe na rysunku 3.14 przedstawiają zależność naprężenia tarcia od nacisków normalnych  $\bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$  dla różnych wartości współczynnika adhezji  $m$  (zmieniającego się od  $m = 0.2$  dla najniższej do  $m = 1$  dla najwyższej krzywej). Liniami przerywanymi oznaczone są krzywe o stałej efektywnej powierzchni kontaktu  $\alpha = \alpha_w$ .

#### Równania modelu

Aby uwzględnić wpływ naprężenia stycznego na proces spłaszczania nierówności założymy, że powierzchnia  $f_s = 0$ , opisująca proces spłaszczania nierówności, ma postać połowy elipsoidy obrotowej (rys. 3.15), której oś obrotu pokrywa się z osią  $\bar{p}_N$ . Równanie takiej



Rysunek 3.14: Krzywe stałej powierzchni kontaktu  $\alpha_w = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$  (linie przerywane) w modelu Wanheima [115]. Linie ciągłe pokazują zależność  $\bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$  dla różnych wartości współczynnika adhezji  $m$ .

powierzchni ma postać:

$$f_s(\bar{p}_N, \bar{\mathbf{p}}_T, \alpha_w) = \frac{(\bar{p}_N - \bar{p}_{Nc})^2}{(\bar{p}_{Nf} - \bar{p}_{Nc})^2} + \frac{|\bar{\mathbf{p}}_T|^2}{(\bar{p}_{Tc})^2} - 1 = 0 \quad \text{dla } \bar{p}_N > \bar{p}_{Nc},$$

gdzie  $\bar{p}_{Nc}$  określa położenie środka elipsoidy, a  $\bar{p}_{Tc}$  oraz  $\bar{p}_{Nf} - \bar{p}_{Nc}$  są długościami jej półosi. Parametry elipsoidy  $\bar{p}_{Nc}$ ,  $\bar{p}_{Tc}$ ,  $\bar{p}_{Nf}$  są z założenia funkcjami efektywnej powierzchni kontaktu  $\alpha_w$ . Tak więc powierzchnię graniczną tarcia tworzą powierzchnie  $f_d = 0$  dla  $\bar{p}_N \leq \bar{p}_{Nc}$  oraz  $f_s = 0$  dla  $\bar{p}_N > \bar{p}_{Nc}$ .

Założmy również niestowarzyszone prawo poślizgu zdefiniowane przez potencjał poślizgu  $G(\bar{p}_N, \bar{\mathbf{p}}_T, \alpha_w)$ :

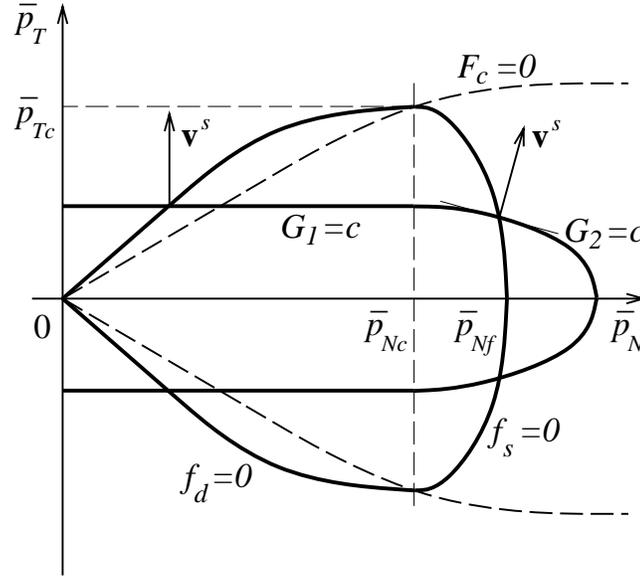
$$\mathbf{v}^s = \lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \quad \text{lub} \quad v_N^s = \lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{p}_N}, \quad \mathbf{v}_T^s = \lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\mathbf{p}}_T}. \quad (3.44)$$

Potencjał poślizgu niech składa się z powierzchni cylindrycznej  $G_1 = c$  (gdzie  $c$  jest stałą) oraz elipsoidy obrotowej  $G_2 = c$  zdefiniowanych jako:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\|\bar{\mathbf{p}}_T\|^2}{\bar{p}_{Tc}^2} && \text{dla } \bar{p}_N \leq \bar{p}_{Nc} \\ G_2 &= \frac{(\bar{p}_N - \bar{p}_{Nc})^2}{(\bar{p}_{Nf} - \bar{p}_{Nc})^2} + \gamma^2 \frac{\|\bar{\mathbf{p}}_T\|^2}{\bar{p}_{Tc}^2} && \text{dla } \bar{p}_N > \bar{p}_{Nc}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Cylindryczny potencjał poślizgu  $G_1 = c$  odpowiada powierzchni granicznej tarcia  $f_d = 0$  i generuje prawo poślizgu, zgodnie z którym prędkość poślizgu jest styczna do powierzchni kontaktu:  $\mathbf{v}^s = \mathbf{v}_T^s$ ,  $v_N = 0$ . Taki stan kontaktu odpowiada samemu poślizgowi przy ustalonej efektywnej powierzchni kontaktu  $\alpha_w$  — nie zachodzi spłaszczanie nierówności.

Z kolei eliptyczny potencjał poślizgu  $G_2 = c$  jest związany z powierzchnią  $f_s = 0$ , na której jednocześnie występuje poślizg oraz spłaszczanie nierówności ze wzrostem  $\alpha_w$ .



Rysunek 3.15: Model tarcia uwzględniający wpływ ścinania na spłaszczanie nierówności.

Obie elipsydy mają wspólny środek lecz różny stosunek półosi. Stosunek półosi elipsy  $f_s = 0$  równy jest  $(\bar{p}_{Nf} - \bar{p}_{Nc})/\bar{p}_{Tc}$ , podczas gdy w przypadku potencjału poślizgu  $G_2 = c$  wynosi on  $\gamma(\bar{p}_{Nf} - \bar{p}_{Nc})/\bar{p}_{Tc}$ . Jak widać parametr  $\gamma > 1$  określa niestowarzyszoność prawa poślizgu. Dla  $\gamma = 1$  otrzymuje się stowarzyszone prawo poślizgu.

Składowa normalna prędkości  $v_N^s$  wynika jedynie ze spłaszczania nierówności. Natomiast składowa styczna prędkości  $v_T^s$  związana jest głównie z poślizgiem zachodzącym na czubkach spłaszczonych nierówności obrabianego materiału, ale również z niewielką składową wynikającą z plastycznego ścinania nierówności. Można się zatem spodziewać dużej dysproporcji między wielkościami normalnej i stycznej składowej prędkości poślizgu  $v^s$ . Aby uwzględnić powyższe różnice przyjęte zostało niestowarzyszone prawo poślizgu (3.44) i (3.45), zgodnie z którym dla dużych wartości parametru  $\gamma$  składowa styczna prędkości poślizgu jest znacznie większa od składowej normalnej.

### Funkcje i parametry modelu

Powierzchnia graniczna tarcia  $f_d = 0$  odpowiadająca samemu tylko poślizgowi bez jednoczesnego spłaszczania nierówności zdefiniowana jest podobnie jak w rozdziale 3.2.2 przez składowe modele ST/RW oraz RT/SW. Wykorzystując te same proste modele można wyznaczyć parametry eliptycznej powierzchni  $f_s = 0$  oraz odpowiadającego jej potencjału poślizgu  $G_2 = c$ :  $\bar{p}_{Nc} = \bar{p}_{Nc}(\alpha_w)$ ,  $\bar{p}_{Tc} = \bar{p}_{Tc}(\alpha_w)$  oraz  $\bar{p}_{Nf} = \bar{p}_{Nf}(\alpha_w)$ .

Punkt przecięcia powierzchni  $f_s = 0$  z powierzchnią  $f_d = 0$  leży na powierzchni stanów krytycznych  $F_c = 0$ . Związek między ciśnieniem normalnym  $\bar{p}_N$  a powierzchnią kontaktu  $\alpha_w$  w punktach leżących na powierzchni  $F_c = 0$  określa zależność (3.42):  $\alpha_w = h_2(\bar{p}_N)$ . A zatem środek obu powierzchni eliptycznych zdefiniowany przez  $\bar{p}_{Nc}$  można wyznaczyć z za-



Rysunek 3.16: S płaszczanie nierówności przy zachowaniu: (a) stałego kąta nachylenia lub (b) stałej objętości.

leżności odwrotnej:  $\bar{p}_{Nc} = h_2^{-1}(\alpha_w)$ . Długość półosi w kierunku  $\bar{p}_T$  wynika bezpośrednio z równania powierzchni granicznej tarcia:  $\bar{p}_{Tc} = \alpha_w f_1(\bar{p}_{Nc}/\alpha_w)$ . W końcu wielkość ciśnienia  $\bar{p}_{Nf}$ , które odpowiada spłaszczaniu nierówności przy zerowym naprężeniu tnącym, można wyznaczyć z rozwiązania Wanheima i in. [115]:  $\alpha_w = g_2(\bar{p}_N, m)$ ; zakładając zerowe tarcie. Odpowiada to podstawieniu  $m = 0$ , a zależność odwrotna do  $\alpha_w = g_2(\bar{p}_N, 0)$  ma postać analityczną:

$$\bar{p}_{Nf} = \begin{cases} (2 + \pi)\alpha_w & \text{dla } 0 \leq \alpha_w \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(2 + \pi)\{1 - \ln[2(1 - \alpha_w)]\} & \text{dla } \alpha_w > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Na rysunku 3.14 pokazane są krzywe stałej efektywnej powierzchni kontaktu  $\alpha_w$  wynikające z modelu Wanheima i in. [115]. Zdefiniowana powyżej powierzchnia spłaszczania nierówności  $f_s = 0$  jest tylko w dwóch punktach  $(\bar{p}_{Nc}, \bar{p}_{Tc})$  oraz  $(\bar{p}_{Nf}, 0)$  zgodna z rozwiązaniem Wanheima. Na tych dwóch punktach oparta jest elipsa, która jak widać z rysunku 3.14 nie opisuje krzywych stałej wartości  $\alpha_w$  zbyt dokładnie. Za przyjęciem takiej postaci powierzchni  $f_s = 0$  przemawia jednak prostota opisu tej powierzchni oraz związanego z nią potencjału poślizgu  $G_2 = c$ . Również otrzymane prawo poślizgu oraz związki przyrostowe znacznie się upraszczają gdy obie powierzchnie są elipsoidami. Z drugiej strony należy pamiętać, że rozwiązania analityczne (np. Wanheima i in. [115]) są tylko bardzo uproszczonymi modelami i w związku z tym rygorystyczne wymaganie zgodności z nimi nie ma sensu.

Aby zamknąć model należy jeszcze zdefiniować zależność między normalną penetracją  $u_N$  związaną ze spłaszczaniem nierówności i efektywną powierzchnią kontaktu  $\alpha_w$ . Zależność tą można wyznaczyć z czysto geometrycznych związków, zakładając jeden z dwóch prostych schematów deformacji nierówności. W pierwszym schemacie zakłada się zachowanie stałego kąta nachylenia nierówności (rys. 3.16(a)) lub zachowanie stałej objętości (rys. 3.16(b)). Zależności dla obu schematów oraz dla dwuwymiarowych (trójkąty) i trójwymiarowych (piramidy) nierówności zawiera praca [76]. Charakter zależności  $\alpha_w = \alpha_w(u_N)$  jest we wszystkich przypadkach taki sam, natomiast wartości różnią się w skrajnych przypadkach nawet dwukrotnie. Ponieważ brak jest jakichkolwiek argumentów przemawiających za wybraniem któregoś z tych schematów, arbitralnie został wybrany schemat dwuwymiarowych nierówności o stałym kącie nachylenia. Poszukiwane zależności mają w tym przypadku postać:

$$\frac{u_N}{h_0} = \frac{\alpha_w(2 - \alpha_w)}{2}, \quad \alpha_w' = \frac{d\alpha_w}{du_N} = \frac{1}{h_0} \frac{1}{1 - \alpha_w},$$

gdzie  $h_0$  jest charakterystyczną (średnią) wysokością nierówności. Natomiast maksymalna

penetracja, odpowiadająca całkowitemu spłaszczeniu nierówności ( $\alpha_w = 1$ ) jest w równa  $u_{Nmax} = \frac{1}{2}h_0$ .

### Równania przyrostowe i charakterystyki modelu

Aby zbadać jaki wpływ na charakterystyki modelu ma uwzględnienie spłaszczania nierówności na skutek jednoczesnego ściskania i ścinania, rozpatrzmy wybrane programy obciążenia w płaszczyźnie  $\bar{p}_N, \bar{p}_T$ . Dla uproszczenia ograniczmy się do procesów, podczas których punkt w przestrzeni naprężeń kontaktowych stale znajduje się na powierzchni  $f_s = 0$ . Punktom na tej powierzchni odpowiadają stany przejściowe tarcia, które są główną cechą omawianego modelu. Na powierzchni  $f_d = 0$  nie zachodzi spłaszczanie nierówności ( $\alpha_w = \text{const}$ ) i w tych punktach stany przejściowe nie występują.

Z prawa poślizgu (3.44) generowanego przez potencjał poślizgu  $G_2 = c$  wynikają następujące zależności:

$$v_N^s = \dot{\lambda} \frac{\partial G_2}{\partial p_N} = \dot{\lambda} f_{sN}, \quad \mathbf{v}_T^s = \dot{\lambda} \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{p}_T} = \dot{\lambda} \gamma^2 \mathbf{f}_{sT}, \quad (3.46)$$

gdzie  $f_{sN}$  i  $\mathbf{f}_{sT}$  są zdefiniowane jako:

$$f_{sN} = \frac{\partial f_s}{\partial p_N}, \quad \mathbf{f}_{sT} = \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}_T}.$$

Jak widać dzięki założeniu, że powierzchnia  $f_s = 0$  i potencjał poślizgu  $G_2 = c$  są elipsoidami o wspólnym środku, wektory ich gradientów różnią się tylko czynnikiem  $\gamma^2$  skalującym składową w kierunku stycznym — równanie (3.46).

Z warunku zgodności  $\dot{f}_s = 0$  w postaci:

$$f_{sN} \dot{p}_N + \mathbf{f}_{sT} \cdot \dot{\mathbf{p}}_T + f_{s\alpha} \dot{\alpha}_w = 0,$$

gdzie

$$f_{s\alpha} = \frac{\partial f_s}{\partial \alpha_w},$$

można wyznaczyć mnożnik  $\dot{\lambda}$ . Wykorzystując zależność  $\dot{\alpha}_w = \alpha'_w v_N^s$ , gdzie  $\alpha'_w = d\alpha_w/du_N$  oraz prawo poślizgu (3.46) otrzymuje się

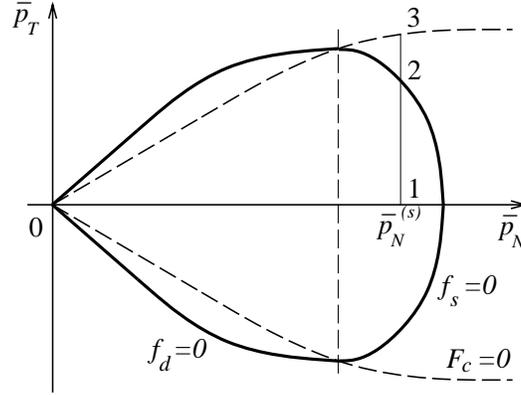
$$\dot{\lambda} = \frac{f_{sN} \dot{p}_N + \mathbf{f}_{sT} \cdot \dot{\mathbf{p}}_T}{f_{sN} f_{s\alpha} \alpha'_w}.$$

Podstawiając  $\dot{\lambda}$  do prawa poślizgu (3.46) otrzymuje się związki przyrostowe dla procesów sterowanych naprężeniami kontaktowymi. Przyjmują one postać

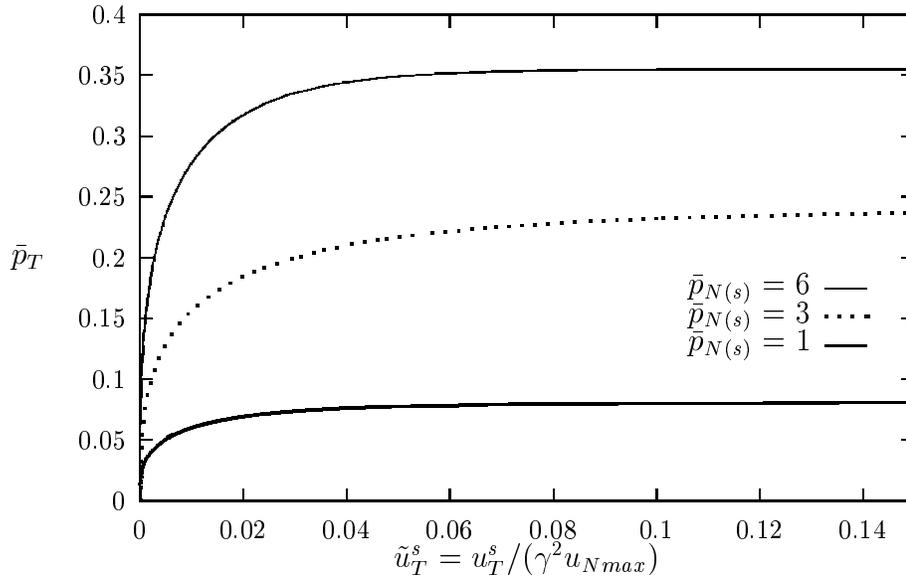
$$\begin{Bmatrix} v_N^s \\ \mathbf{v}_T^s \end{Bmatrix} = -\frac{1}{f_{s\alpha} \alpha'_w} \begin{bmatrix} f_{sN} & \mathbf{f}_{sT} \\ \gamma^2 \mathbf{f}_{sT} & \gamma^2 f_{sN}^{-1} \mathbf{f}_{sT} \otimes \mathbf{f}_{sT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_N \\ \dot{\mathbf{p}}_T \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

Dla  $\gamma > 1$ , a więc dla niestowarzyszonego prawa poślizgu, otrzymana macierz podatności jest niesymetryczna. Ponieważ czynnik  $\gamma^2$  linowo skaluje wektor stycznej prędkości

(a)



(b)



Rysunek 3.17: Ścinanie przy stałym ciśnieniu kontaktowym  $\bar{p}_N^{(s)}$ : (a) program obciążenia 0–1–2–3; (b) zależność sił tarcia od bezwymiarowej długości poślizgu dla różnych ciśnień normalnych.

poślizgu  $\mathbf{v}_T^s$ , można wprowadzić znormalizowaną prędkość poślizgu  $\hat{\mathbf{v}}_T^s = \mathbf{v}_T^s / \gamma^2$ . Odpowiada ona stowarzyszonemu prawu poślizgu na powierzchni  $f_s = 0$ , a więc przypadkowi  $\gamma = 1$ . Równania (3.47) przyjmują teraz postać:

$$\begin{Bmatrix} v_N^s \\ \hat{\mathbf{v}}_T^s \end{Bmatrix} = -\frac{1}{f_{s\alpha}\alpha'_w} \begin{bmatrix} f_{sN} & \mathbf{f}_{sT} \\ \mathbf{f}_{sT} & f_{sN}^{-1} \mathbf{f}_{sT} \otimes \mathbf{f}_{sT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{p}}_N \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}}_T \end{Bmatrix}$$

Zatem zależności dla niestowarzyszonego prawa poślizgu można otrzymać z zależności dla prawa stowarzyszonego przez proste przeskalowanie składowej stycznej prędkości poślizgu:  $\mathbf{v}_T^s = \gamma^2 \hat{\mathbf{v}}_T^s$ .

Rozważmy teraz prosty program obciążenia pokazany na rysunku 3.17(a). Po przyłożeniu wstępnego normalnego ciśnienia kontaktowego  $\bar{p}_N^{(s)}$  (0–1), stopniowo zwiększane jest

naprężenie styczne i następuje poślizg przy stałym ciśnieniu normalnym (1–2–3). Rysunek 3.17(b) przedstawia wyniki otrzymane dla parametrów modelu pokazanych w tabeli 3.2 odpowiadających maksymalnemu naprężeniu tarcia  $\bar{p}_{Tmax} = f_1^{max} = 0.39$ . Bezwymiarowa długość poślizgu  $\tilde{u}_T$  zdefiniowana jest jako  $\tilde{u}_T^s = \hat{u}_T^s / u_{Nmax} = u_T^s / (\gamma^2 u_{Nmax})$ , gdzie  $u_{Nmax} = \frac{1}{2} h_0$  jest maksymalną penetracją na skutek spłaszczenia nierówności.

Model opisuje stany przejściowe, w czasie których przy stałych naciskach normalnych siły tarcia rosną w funkcji długości poślizgu. Wyniki pokazują, że przyjęcie stowarzyszonego prawa poślizgu ( $\gamma = 1$ ) prowadzi do bardzo szybkiego osiągnięcia stanu asymptotycznego. Dla  $\gamma = 1$  kontakt osiąga stan ustalony na odcinku poślizgu o długości mniejszej niż połowa charakterystycznej wysokości spłaszczanych nierówności. Zatem, aby efekty związane ze stanami przejściowymi były zauważalne, prawo poślizgu musi być “silnie” niestowarzyszone, co odpowiada dużym wartościom parametru  $\gamma \gg 1$ .

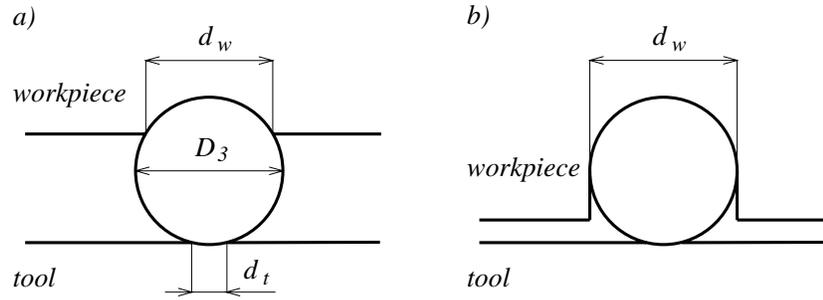
### 3.2.4 Model uwzględniający cząstki trzeciego ciała

W procesach obróbki na gorąco, powierzchnia obrabianego materiału pokrywa się tlenkami, często o dużej twardości. Dlatego też dominującym mechanizmem tarcia i zużycia jest ścieranie cząstkami trzeciego ciała (ang. *third body abrasion*). Warunki kontaktu powierzchni pokrytej twardymi cząstkami tlenków są oczywiście znacząco różne od warunków, które są zakładane w prostych modelach tarcia (ST/RW, RT/SW), jak również w modelu przedstawionym w poprzednich rozdziałach. Mimo powszechnej zgody co do dominującej roli cząstek trzeciego ciała w oddziaływaniach kontaktowych w tego typu procesach, nie ma obecnie modelu uwzględniającego wpływ tych cząstek na tarcie i zużycie. Poniżej przedstawiony jest zarys rozwijanego obecnie modelu tarcia, w którym jednym z uwzględnianych mechanizmów tarcia jest ścieranie cząstkami trzeciego ciała. Model ten przeznaczony jest głównie dla procesów kucia na gorąco oraz innych procesów obróbki plastycznej na gorąco.

Ze względu na złożoność procesów zachodzących podczas kontaktu i poślizgu w warunkach typowych dla procesów obróbki na gorąco niezbędne jest przyjęcie założeń upraszczających. Rozpatrywane są trzy składniki oddziałujące ze sobą: powierzchnia narzędzia (matrycy), powierzchnia obrabianego materiału oraz cząstki trzeciego ciała równomiernie rozłożone na powierzchni kontaktu. Cząstki trzeciego ciała traktowane są jako sztywne. Ponieważ powierzchnia narzędzia jest dużo twardsza od powierzchni materiału, zakładać się będzie, że wszystkie cząstki są osadzone (wgniecione) w powierzchni obrabianego materiału i poruszają się wraz z nią. Ponadto przyjmujemy, że liczba cząstek nie zmienia się. Zaniedbujemy więc powstawanie nowych cząstek (usprawiedliwia to krótki czas kontaktu). Zaniedbane jest także dzielenie się cząstek.

Rozważmy pojedynczą cząstkę umieszczoną pomiędzy powierzchnią narzędzia i materiału (rysunek 3.18) reprezentowaną przez kulkę o średnicy  $D_3$ . Przyjmijmy za Zhangiem i in. [127], że powierzchnie kontaktu  $A_{3w}$  oraz  $A_{3t}$  pomiędzy cząstką a odpowiednio materiałem i narzędziem zależą od stosunku twardości obu powierzchni:

$$\frac{H_w}{H_t} = \frac{A_{3t}}{A_{3w}} = \left( \frac{d_t}{d_w} \right)^2. \quad (3.48)$$



Rysunek 3.18: Pojedyncza cząstka pomiędzy powierzchniami narzędzia i materiału: (a) wciśnięta częściowo (niskie ciśnienie); (b) całkowicie osadzona w powierzchni materiału ( $d_w = D_3$ ).

Ponieważ powierzchnia narzędzia jest dużo twardsza od powierzchni materiału ( $H_t \gg H_w$ ), cząstka jest wgniatana w powierzchnię materiału w dużo większym stopniu niż w powierzchnię narzędzia. Z zależności (3.48) wynika również, że istnieje maksymalna siła normalna  $F_{3max}$ , jaka może być przenoszona przez pojedynczą cząstkę w przypadku pełnego osadzenia ( $d_w = D_3$ ):

$$F_3 = \frac{\pi}{4} H_w d_w^2, \quad F_{3max} = \frac{\pi}{4} H_w D_3^2.$$

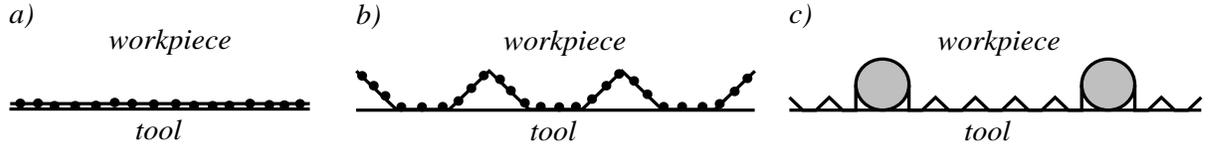
Całkowita powierzchnia kontaktu  $A$  składa się z dwóch części: części okupowanej przez cząstki trzeciego ciała  $A_3$  oraz części, na której możliwe są bezpośrednie oddziaływania powierzchni narzędzia i materiału  $A_{tw}$ . Udział powierzchni  $A_3$  określa parametr  $\alpha^{(3)}$  zdefiniowany jako:

$$\alpha^{(3)} = \frac{N_3 \left( \frac{\pi}{4} D_3^2 \right)}{A} = n_3 \left( \frac{\pi}{4} D_3^2 \right) = \frac{A_3}{A},$$

gdzie  $N_3$  jest liczbą cząstek na powierzchni  $A$ , a  $n_3 = N_3/A$  oznacza ich koncentrację. Należy zwrócić uwagę, że  $\alpha^{(3)}$  nie jest efektywną rzeczywistą powierzchnią kontaktu, a jedynie określa całkowitą powierzchnię zajmowaną przez cząstki trzeciego ciała.

W najprostszym schemacie oddziaływania powierzchni (będącym uogólnieniem modelu RT/SW) powierzchnia materiału jest gładka i wraz z osadzonymi w niej cząstkami oddziałuje z chropowatą powierzchnią narzędzia. Na bazie tego schematu (rys. 3.19(a)) można zbudować bardziej rozbudowane modele uwzględniające spłaszczanie nierówności chropowatej powierzchni materiału, na przykład przyjmując jedno z możliwych założeń upraszczających odnośnie wielkości cząstek trzeciego ciała — rysunek 3.19(b) lub (c). Przejście do rozbudowanego modelu jest podobne do przejścia z prostego modelu RT/SW do modelu tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności — tak jak to zostało opisane w rozdziale 3.2.2.

Przyjmijmy, że powierzchnia materiału jest gładka, to znaczy, że wszystkie cząstki w niej osadzone mogą jednocześnie oddziaływać z powierzchnią narzędzia (rys. 3.19(a)). Oddziaływania kontaktowe można wtedy rozdzielić na dwie części:  $p_N^{(tw)}$ ,  $p_T^{(tw)}$  zachodzące na bezpośrednich kontaktach narzędzia z materiałem (na powierzchni  $A_{tw}$  o udziale 1 —



Rysunek 3.19: Cząstki trzeciego ciała na powierzchni kontaktu — powierzchnia materiału obrabianego: (a) gładka; (b) chropowata z małymi oraz (c) dużymi cząstkami.

$\alpha^{(3)}$ ) oraz  $p_N^{(3)}$ ,  $p_T^{(3)}$  związane z kontaktem przez cząstki trzeciego ciała. Całkowite naprężenia kontaktowe można więc rozłożyć zgodnie z poniższymi wzorami:

$$\begin{aligned}\bar{p}_N &= (1 - \alpha^{(3)})\bar{p}_N^{(tw)} + \alpha^{(3)}\bar{p}_N^{(3)} \\ \bar{p}_T &= (1 - \alpha^{(3)})\bar{p}_T^{(tw)} + \alpha^{(3)}\bar{p}_T^{(3)}\end{aligned}\quad (3.49)$$

Normalne ciśnienie kontaktowe  $\bar{p}_N^{(3)}$  można przestawić w postaci:

$$\bar{p}_N^{(3)} = \frac{1}{k_w} \frac{N_3 F_3}{A_3} = \left(\frac{d_w}{D_3}\right)^2 \frac{H_w}{k_w} = \left(\frac{d_w}{D_3}\right)^2 \bar{H}_w,$$

gdzie wprowadzona została bezwymiarowa twardość powierzchni materiału  $\bar{H}_w = H_w/k_w$ . Gdy cząstka jest całkowicie osadzona ( $d_w = D_3$ ) lokalne ciśnienie  $\bar{p}_N^{(3)}$  przenoszone przez cząstki trzeciego ciała osiąga maksimum:

$$\bar{p}_{Nmax}^{(3)} = \bar{H}_w.$$

Aby zamknąć model należy wprowadzić zależność między globalnym ciśnieniem kontaktowym  $\bar{p}_N$  a cząstkowymi ciśnieniami  $\bar{p}_N^{(3)}$  i  $\bar{p}_N^{(tw)}$ . W tym celu przyjmijmy, że gdy cząstki trzeciego ciała nie są całkowicie osadzone w powierzchni materiału ( $d_w < D_3$ ) powierzchnie narzędzia i materiału są rozdzielone, a kontakt zachodzi jedynie za pośrednictwem cząstek. Dopiero gdy cząstki zostają całkowicie wciśnięte, pojawiają się bezpośrednie kontakty narzędzia z materiałem. Przenoszą one część ciśnienia normalnego przekraczającą maksymalne ciśnienie, jakie może być przeniesione przez cząstki:  $\bar{p}_N = \alpha^{(3)}\bar{p}_{Nmax}^{(3)} = \alpha^{(3)}\bar{H}_w$ . Zależność odzwierciedlająca takie założenie ma postać:

$$\begin{cases} \bar{p}_N^{(3)} = \frac{1}{\alpha^{(3)}}\bar{p}_N, & \bar{p}_N^{(tw)} = 0, & \text{dla } \bar{p}_N \leq \bar{H}_w\alpha^{(3)}, \\ \bar{p}_N^{(3)} = \bar{H}_w, & \bar{p}_N^{(tw)} = \frac{1}{1-\alpha^{(3)}}(\bar{p}_N - \bar{H}_w\alpha^{(3)}), & \text{dla } \bar{p}_N > \bar{H}_w\alpha^{(3)}. \end{cases}\quad (3.50)$$

Mając cząstkowe ciśnienia normalne  $\bar{p}_N^{(3)}$  i  $\bar{p}_N^{(tw)}$ , odpowiadające im naprężenia tarcia  $\bar{p}_T^{(3)}$  i  $\bar{p}_T^{(tw)}$  można wyznaczyć z prostych modeli. Warunki na bezpośrednich kontaktach powierzchni narzędzia i materiału odpowiadają schematowi RT/SW. Przyjmijmy więc następującą zależność:

$$\bar{p}_T^{(tw)} = f_1(\bar{p}_N^{(tw)}),\quad (3.51)$$

gdzie funkcja  $f_1$  opisuje tarcie w modelu RT/SW (wz. (3.40)).

Z faktu, że powierzchnia narzędzia jest dużo twardsza od powierzchni obrabianego materiału wynika, że penetracja powierzchni narzędzia przez cząstki trzeciego ciała jest bardzo mała:  $d_t \ll d_w \leq D_3$  (por. wz. (3.48)). Model oraz wyniki eksperymentalne Komvopoulosa i in. [54] pokazują, że w takim przypadku współczynniki tarcia Coulomba są rzędu  $0.1 \div 0.2$ . Tak więc tarcie cząstek trzeciego ciała można wyznaczyć z równania:

$$\bar{p}_T^{(3)} = \mu^{(3)} \bar{p}_N^{(3)}, \quad (3.52)$$

ze współczynnikiem tarcia  $\mu^{(3)}$  o wartości rzędu 0.2.

Podsumowując, zaproponowany został model tarcia w obecności cząstek trzeciego ciała, w którym oddziaływania kontaktowe są rozłożone na części odpowiadające poszczególnym mechanizmom tarcia (równania (3.49) i (3.50)). Poszczególne mechanizmy tarcia są opisane prostymi modelami (równania (3.51) i (3.52)). Parametrami modelu są: udział cząstek trzeciego ciała  $\alpha^{(3)}$ , współczynnik tarcia cząstek o powierzchnię narzędzia  $\mu^{(3)}$  oraz parametry funkcji  $f_1$  opisującej model RT/SW. Należy zwrócić uwagę, że mimo założenia stałej liczby cząstek trzeciego ciała, parametr  $\alpha^{(3)}$  może się zmieniać na skutek zmian powierzchni związanych z dużymi deformacjami plastycznymi obrabianego materiału:

$$\alpha^{(3)} = \alpha_0^{(3)} \frac{A_0}{A},$$

gdzie  $\alpha_0^{(3)}$  jest początkową koncentracją cząstek, a stosunek  $A_0/A$  oznacza zmianę pola powierzchni.

Zastosowanie zależności (3.50) powoduje, że otrzymana funkcja  $\bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$  nie jest gładka w punkcie  $\bar{p}_N = \alpha^{(3)} \bar{H}_w$ . W rzeczywistości cząstki trzeciego ciała nie są jednakowe, a powierzchnie nie są idealnie gładkie. Odzwierciedleniem tego faktu mogła by być bardziej fizyczna, gładka zależność  $\bar{p}_T^{sl}(\bar{p}_N)$  modelująca stopniowe przejście od stanu, gdy kontakt zachodzi tylko przez cząstki trzeciego ciała, do stanu, gdy cząstki przenoszą maksymalne obciążenie, a reszta przenoszona jest przez bezpośrednie kontakty powierzchni narzędzia i obrabianego materiału.

Przedstawiony powyżej prosty model tarcia może być punktem wyjścia dla bardziej rozbudowanych modeli, uwzględniających dodatkowo spłaszczanie nierówności powierzchni materiału. Zbudowanie tego typu modeli wymaga między innymi zdefiniowania warunków odciążenia oraz określenia charakterystyk modelu przy zmniejszającym się normalnym ciśnieniu kontaktowym. Obecnie trwają prace nad modelami uwzględniającymi powyższe zjawiska.

### 3.2.5 Uogólnienie prawa zużycia Archarda

Klasyczne prawo zużycia Archarda [4] wiąże prędkość zużycia z naciskami normalnymi oraz długością poślizgu. Zgodnie z dyskusją zawartą w rozdziale 1.3.2, w warunkach kontaktowych, w których zachowuje słuszność prawo Coulomba, prawo Archarda można równoważnie wyrazić przez dysypację cierną (1.22):

$$\dot{w} = \tilde{\gamma} \frac{D}{H}.$$

Powstaje pytanie, jak opisywać zużycie, gdy prawo Coulomba nie jest spełnione i gdy nie zachodzi proporcjonalność między siłami normalnymi i siłami tarcia. Ma to miejsce na przykład w procesach obróbki plastycznej.

Prawo Archarda wyprowadzone zostało przy założeniu, że za zużycie powierzchni odpowiada mechanizm adhezji. Zależność prędkości zużycia od ciśnienia normalnego w tym prawie wynika z przyjęcia liniowej zależności między rzeczywistą powierzchnią kontaktu i ciśnieniem normalnym. Jak wiadomo, dla wysokich ciśnień kontaktowych zależność ta przestaje być liniowa, a zatem założenia modelu przestają być spełnione. Jednakże można zauważyć, że z samej istoty modelu tarcia adhezyjnego wynika, że zostaje zachowana liniowa zależność między naprężeniem tarcia i rzeczywistą powierzchnią kontaktu. Powyższa argumentacja prowadzi do wniosku, że dla dużych ciśnień należałoby raczej postulować zależność zużycia adhezyjnego nie od sił normalnych, a od sił tarcia (czyli od dysypacji cieplnej).

Jednocześnie należy sobie zdawać sprawę, że w rzeczywistych warunkach kontaktowych jednocześnie może być aktywnych kilka mechanizmów tarcia i zużycia. Przykładowo w procesach tłoczenia blach dominują dwa procesy: adhezja oraz oranie powierzchni blachy przez nierówności powierzchni narzędzia. Zwykle przyjmuje się, że zużycie powierzchni narzędzia (matrycy, stempla) powodowane jest głównie przez adhezję. Jest to zrozumiałe o tyle, że oranie powoduje deformacje plastyczne w warstwie powierzchniowej blachy i w związku z tym mechanizm orania nie ma wpływu na zużycie powierzchni narzędzia. Z drugiej strony, można również rozpatrywać zużycie powierzchni blachy<sup>4</sup>. W tym przypadku należy się spodziewać, że na zużycie powierzchni wpływać mogą oba mechanizmy — adhezja oraz oranie.

Rozważmy inny przypadek, mianowicie procesy kucia na gorąco. Jak wiadomo, dominującym mechanizmem zużycia jest w tych procesach ścieranie powodowane przez cząstki trzeciego ciała. Ze wszystkich procesów występujących podczas kontaktu (adhezja, oranie powierzchni odkuwki przez twarde nierówności narzędzia oraz oranie powierzchni narzędzia przez cząstki trzeciego ciała) tylko ten jeden mechanizm powoduje deformacje plastyczne w warstwie powierzchniowej narzędzia i napędza zużycie. Pozostałe mechanizmy związane są z deformacjami plastycznymi w warstwie powierzchniowej odkuwki.

Rozszerzając powyższe rozważania można zaproponować model zużycia powierzchni uogólniający prawo Archarda. Prędkość zużycia  $\dot{w}_\alpha$  każdej z kontaktujących się powierzchni niech wyraża się wzorem:

$$\dot{w}_\alpha = \sum_i \dot{w}_\alpha^{(i)} = \sum_i \gamma_\alpha^{(i)} \frac{D^{(i)}}{H_\alpha}, \quad (3.53)$$

gdzie indeks  $\alpha = 1, 2$  rozróżnia rozpatrywane powierzchnie, a indeks  $i$  numeruje wszystkie mechanizmy tarcia i zużycia występujące w danych warunkach kontaktowych. A zatem prawo zużycia (3.53) mówi, że na prędkość  $\dot{w}_\alpha$  zużycia powierzchni  $\alpha$  składają się cząstkowe prędkości  $\dot{w}_\alpha^{(i)}$  związane z  $i$ -tym mechanizmem zużycia. Zaś każdy z mechanizmów zużycia opisywany jest przez prawo podobne do prawa Archarda, zgodnie z którym

<sup>4</sup>Ścieranie cienkich warstw, którymi pokrywa się powierzchnie blach do tłoczenia może powodować znaczące zmiany ich własności cieplnych. Model tarcia uwzględniający te efekty przedstawili de Souza Neto i in. [98].

cząstkowa prędkość zużycia  $\dot{w}_\alpha^{(i)}$  zależy od części dysypacji ciernej  $D^{(i)}$  przypadającej na ten mechanizm. Parametry  $\gamma_\alpha^{(i)}$  są stałymi współczynnikami charakteryzującymi odporność powierzchni na zużycie na skutek danego mechanizmu, a  $H_\alpha$  jest twardością powierzchni.

Model zużycia (3.53), mimo swej ogólności, musi być związany z konkretnym modelem tarcia, pozwalającym wyodrębnić części całkowitej dysypacji ciernej związane z poszczególnymi mechanizmami tarcia i zużycia. Ogólnie, jeżeli całkowite naprężenie cierne  $p_T$  można rozłożyć na składniki  $p_T^{(i)}$  odpowiadające poszczególnym mechanizmom, to całkowita dysypacja cierna  $D = p_T v_T$  rozkłada się zgodnie ze wzorami:

$$D = \sum_i D^{(i)}, \quad D^{(i)} = p_T^{(i)} v_T, \quad p_T = \sum_i p_T^{(i)}.$$

Przykładowo podstawą modelu tarcia uwzględniającego obecność cząstek trzeciego ciała (rozdział 3.2.4) jest rozbitcie oddziaływań kontaktowych na części związane z poszczególnymi mechanizmami. Ponieważ w procesach obróbki na gorąco dominuje zużycie na skutek ścierania cząstkami trzeciego ciała, można przyjąć, że zużycie matrycy zależy tylko od dysypacji związanej z tym mechanizmem. Wykorzystując model tarcia przedstawiony w rozdziale 3.2.4 prędkość zużycia powierzchni matrycy można opisać zależnością:  $\dot{w}_t = \gamma_\alpha^{(3)} \bar{p}_T^{(3)} v_T / H_t$ .

Tak w klasycznym prawie Archarda, jak i w modelu (3.53) uogólniającym to prawo, prędkość zużycia powierzchni zależy od jej twardości. Zaś na twardość powierzchni silnie wpływa jej temperatura. Wpływ ten ma szczególne znaczenie w procesach obróbki na gorąco, gdzie temperatura powierzchni narzędzia doznaje znaczących zmian w trakcie jednego cyklu obróbki. Prawidłowy opis zjawisk zużycia wymaga więc rozpatrywania nie tylko oddziaływań mechanicznych, ale i sprzężonych procesów przewodzenia ciepła.

### 3.3 Modelowanie tarcia — przykłady numeryczne

W poniższym rozdziale przedstawione są rozwiązania przykładowych zagadnień brzegowych, w których zastosowany został nowy model tarcia wprowadzony w rozdziale 3.2.2. Omówione są aspekty związane zastosowaniem tego modelu w metodzie elementów skończonych i zilustrowane są własności modelu w porównaniu z innymi modelami tarcia.

#### 3.3.1 Konsystentna macierz styczna

W rozdziale 1.2.4 wyprowadzona została konsystentna macierz styczna dla przypadku kontaktu z tarcie Coulomba (Perić, Owen [85]). Jest ona konsystentna z w pełni niejawną metodą całkowania po czasie (ang. *one-step backward Euler scheme*). Otrzymana macierz styczna odpowiada przypadkowi kontaktu, w którym jedna z powierzchni jest nieodkształcalna i zdyskretyzowana elementami liniowymi. Przy tych samych założeniach wyprowadzona zostanie konsystentna macierz styczna dla modelu tarcia powierzchni o podwójnej skali nierówności (rozdział 3.2.2).

Zgodnie z formalizmem teorii plastyczności względna prędkość styczna  $\dot{\mathbf{d}}$  rozkładana jest na część sprężystą i niesprężystą:

$$\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{d}}^e + \dot{\mathbf{d}}^s,$$

przy czym w rozpatrywanym modelu tarcia jedynie prędkość styczna ma składową niesprężystą  $\dot{\mathbf{d}}_T^s$ . Związki między naprężeniem kontaktowym  $\mathbf{t}$  a prędkością poślizgu mają postać:

$$\dot{\mathbf{t}}_N = c_N(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\dot{\mathbf{d}}^e, \quad \dot{\mathbf{t}}_T = c_T(\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\dot{\mathbf{d}}^e,$$

gdzie  $c_N$  i  $c_T$  są odpowiednio normalną i styczną podatnością kontaktową, a  $\dot{\mathbf{t}}_N = t_N \mathbf{n}$  jest wektorem naprężenia normalnego. Warunek tarcia w ogólnej postaci (1.23) wyrażony przez naprężenia kontaktowe  $\mathbf{t}$  zamiast przez  $\mathbf{p}$  (por. wz. (1.10)) ma postać:

$$F(t_N, \mathbf{t}_T, \mathbf{w}) = \|\mathbf{t}_T\| - t_T^{sl}(t_N, \mathbf{w}) \leq 0, \quad (3.54)$$

gdzie funkcja  $t_T^{sl}(t_N, \mathbf{w}) = p_T^{sl}(p_N, \mathbf{w})$  opisuje wartość tarcia poślizgowego w funkcji kontaktowych naprężeń normalnych  $t_N$  oraz wektora zmiennych stanu  $\mathbf{w}$ . Klasa praw tarcia, których warunek tarcia można zapisać w powyższej postaci scharakteryzowana jest w rozdziale 1.3.1.

W modelu tarcia powierzchni o podwójnej skali nierówności występuje jedna zmienna stanu  $\alpha_w$ , a warunek graniczny tarcia opisany jest równaniem (3.41). Dla tego warunku tarcia funkcja  $t_T^{sl}(t_N, \mathbf{w})$  ma postać:

$$t_T^{sl}(t_N, \mathbf{w}) = t_T^{sl}(t_N, \alpha_w, k_w) = k_w \alpha_w f_1 \left( \frac{-t_N}{k_w \alpha_w} \right), \quad (3.55)$$

gdzie funkcja  $f_1$  jest podstawową charakterystyką składowego modelu RT/SW, wz. (3.40), a  $k_w$  jest granicą plastyczności obrabianego materiału ( $k_w$  może się zmieniać w trakcie procesu, na przykład na skutek zmian temperatury powierzchni lub utwardzenia materiału). Kontaktowa zmienna stanu  $\alpha_w$  opisuje proces spłaszczania nierówności i jest określona równaniem (3.43):

$$\alpha_w = h_2(\bar{p}_{Nmax}), \quad \bar{p}_{Nmax} = \max(-t_N/k_w).$$

Ponieważ  $\alpha_w$  zależy od maksymalnego bezwymiarowego ciśnienia kontaktowego  $\bar{p}_{Nmax}$ , wygodniej jest traktować właśnie ten parametr jako zmienną stanu. Maksymalne ciśnienie  $\bar{p}_{Nmax}$  pełni funkcję parametru pamięci maksymalnego spłaszczenia nierówności i jest oczywiście związane z każdym punktem materialnym powierzchni obrabianego materiału (a nie powierzchni narzędzia). Podstawową zależność konstytutywną modelu (3.55) można więc zapisać jako:

$$t_T^{sl}(t_N, \bar{p}_{Nmax}, k_w) = k_w h_2(\bar{p}_{Nmax}) f_1 \left( \frac{-t_N}{k_w h_2(\bar{p}_{Nmax})} \right), \quad \bar{p}_{Nmax} = \max(-t_N/k_w). \quad (3.56)$$

Dalsze rozważania prowadzone będą przy założeniu, że rozpatrywany jest kontakt punktu powierzchni obrabianego materiału z liniowym (o stałej normalnej) i sztywnym elementem powierzchni narzędzia. Rozważmy  $(n + 1)$ -szy krok czasowy analizy przyrostowej. Znane jest rozwiązanie dla kroku czasowego  $n$ , czyli:  $t_{Nn}$ ,  $\mathbf{t}_{Tn}$  oraz  $\bar{p}_{Nmax}^n$ .

Poszukujemy rozwiązania na końcu kroku po przyroście przemieszczenia względnego o  $\Delta \mathbf{d}_{n+1}$ .

Próbna wartość naprężenia kontaktowego  $\mathbf{t}_{n+1}^{trial}$  wyraża się wzorem:

$$t_{Nn+1}^{trial} = t_{Nn} + c_N \Delta d_{Nn+1}, \quad \mathbf{t}_{Tn+1}^{trial} = \mathbf{t}_{Tn} + c_T \Delta \mathbf{d}_{Tn+1}. \quad (3.57)$$

Podobnie jak w przypadku tarcia Coulomba (oba modele mają taki sam potencjał poślizgu  $G = \|\mathbf{t}_T\| = c$ ) naprężenie normalne na końcu kroku przyjmuje wartość próbną:

$$t_{Nn+1} = t_{Nn+1}^{trial}. \quad (3.58)$$

Na podstawie  $t_{Nn+1}$  uaktualniana jest zmienna stanu  $\bar{p}_{Nmax}$ :

$$\bar{p}_{Nmax}^{n+1} = \max[\bar{p}_{Nmax}^n, -t_{Nn+1}/k_w^{n+1}], \quad (3.59)$$

gdzie  $k_w^{n+1}$  jest granicą plastyczności na końcu kroku. Jeżeli naprężenie próbne  $\mathbf{t}_{n+1}^{trial}$  spełnia warunek graniczny tarcia (3.54) na końcu kroku:  $F(\mathbf{t}_{n+1}^{trial}, \bar{p}_{Nmax}^{n+1}, k_w^{n+1}) \leq 0$ , to punkt znajduje się w stanie przylegania i  $\mathbf{t}_{Tn+1} = \mathbf{t}_{Tn+1}^{trial}$ . Jeżeli warunek nie jest spełniony, to punkt jest w stanie poślizgu i naprężenie próbne jest korygowane według algorytmu powrotu promieniowego:

$$\mathbf{t}_{Tn+1} = t_{Tn+1}^{sl} \mathbf{s}_{n+1}, \quad (3.60)$$

gdzie kierunek poślizgu  $\mathbf{s}_{n+1}$  oraz wartość bezwzględna naprężenia tarcia  $t_{Tn+1}^{sl}$  wyrażają się wzorami:

$$t_{Tn+1}^{sl} = k_w^{n+1} h_2(\bar{p}_{Nmax}^{n+1}) f_1 \left( \frac{-t_{Nn+1}}{k_w^{n+1} h_2(\bar{p}_{Nmax}^{n+1})} \right), \quad \mathbf{s}_{n+1} = \frac{\mathbf{t}_{Tn+1}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{Tn+1}^{trial}\|}. \quad (3.61)$$

Zależność przyrostową naprężeń kontaktowych przy skończonym przyroście przemieszczenia względnego o  $\Delta \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n$  definiuje funkcja odpowiedzi (Simo, Taylor [96]; Perić, Owen [85]) w postaci (1.15):

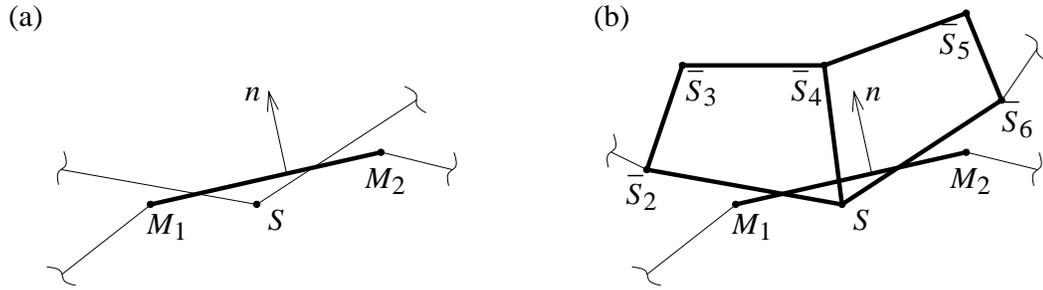
$$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{t}_n, \mathbf{d}_n, \mathbf{d} - \mathbf{d}_n) = t_{Tn+1}^{sl} \mathbf{s}_{n+1} + t_{Nn+1} \mathbf{n}_{n+1}.$$

W wyniku linearyzacji funkcji odpowiedzi  $\tilde{\mathbf{t}}$  w punkcie  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_{n+1}$  otrzymuje się konsyistentną macierz styczną  $\tilde{\mathbf{D}}^{ep} = \partial \tilde{\mathbf{t}} / \partial \mathbf{d}$ . Dla rozpatrywanego modelu, z funkcją  $t_T^{sl}$  zdefiniowaną równaniem (3.56), macierz styczna ma postać:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}^{ep} &= c_T \frac{p_{Tn+1}^{sl}}{\|\mathbf{t}_{Tn+1}^{trial}\|} (\mathbf{1} - \mathbf{s}_{n+1} \otimes \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}) + c_N \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1} + \\ &+ c_N \left( \frac{\partial t_T^{sl}}{\partial t_N} + \frac{\partial t_T^{sl}}{\partial \bar{p}_{Nmax}} \frac{\partial \bar{p}_{Nmax}}{\partial t_N} \right) \mathbf{s}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Występujące we wzorze (3.62) pochodne wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_T^{sl}}{\partial t_N} &= -f_1'(\bar{p}_{Nn+1}^{(w)}), \\ \frac{\partial t_T^{sl}}{\partial \bar{p}_{Nmax}} &= k_w^{n+1} h_2'(\bar{p}_{Nmax}^{n+1}) [f_1(\bar{p}_{Nn+1}^{(w)}) - \bar{p}_{Nn+1}^{(w)} f_1'(\bar{p}_{Nn+1}^{(w)})], \\ \frac{\partial \bar{p}_{Nmax}}{\partial t_N} &= \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \bar{p}_{Nmax}^{n+1} = \bar{p}_{Nmax}^n \\ -1/k_w^{n+1} & \text{jeżeli } \bar{p}_{Nmax}^{n+1} > \bar{p}_{Nmax}^n, \end{cases} \end{aligned}$$



Rysunek 3.20: Kontakt węzła  $S$  z segmentem  $M_1$ – $M_2$ : (a) klasyczny element kontaktowy; (b) schemat elementu pozwalającego uwzględnić wpływ utwardzenia plastycznego materiału na własności cieple.

gdzie dodatkowo wprowadzono następujące oznaczenie:

$$\bar{p}_{Nn+1}^{(w)} = \frac{-t_{Nn+1}}{k_w^{n+1} h_2 (\bar{p}_{Nmax}^{n+1})}.$$

Należy zwrócić uwagę, że podczas linearyzacji funkcji odpowiedzi  $\tilde{\mathbf{t}}$  nie została uwzględniona pochodna  $\partial k_w / \partial \mathbf{d}$  mimo, że  $k_w$  może się zmieniać w trakcie procesu. Zmiany parametru  $k_w$  w trakcie procesu mogą mieć dwa źródła. Po pierwsze granica plastyczności może się zmieniać przy zmianach temperatury. Jednakże powszechnie stosowane metody rozwiązywania sprzężonych problemów termo-mechanicznych bazują na rozdzieleniu problemu na dwa — mechaniczny i termiczny — i na osobnym rozwiązywaniu każdego z nich (Johansson, Klarbring [46]; Wriggers, Miehe [124]). Sprzężenia obu problemów są uwzględniane przez wymianę wspólnych zmiennych na końcu kroku lub iteracji. W obu przypadkach temperatura jest stała w trakcie iteracyjnego rozwiązywania problemu mechanicznego. A zatem linearyzacja funkcji odpowiedzi przy założeniu stałej temperatury (a więc i stałej wartości  $k_w$ ) jest poprawna.

Zmiany granicy plastyczności  $k_w$  mogą być również związane z utwardzaniem plastycznym materiału. Tego typu efekty są pominięte w powyższym wyprowadzeniu. Konsystentne uwzględnienie wpływu utwardzenia plastycznego materiału na własności kontaktowe wymagałoby bowiem użycia znacznie bardziej skomplikowanych elementów kontaktowych. W przypadku dwuwymiarowym, klasyczny element składa się z dwóch węzłów  $M_1$ ,  $M_2$  powierzchni odniesienia (*master*) i jednego węzła  $S$  (*slave*) — rysunek 3.20(a). Aby uzględnąć wpływ utwardzenia plastycznego na własności kontaktowe (przez parametr  $k_w$ ), dla każdego węzła  $S$  w kontakcie należałoby zbudować element obejmujący wszystkie węzły elementów, do których należy węzeł  $S$ . Element tego typu pokazany jest na rysunku 3.20(b). Tak więc w przypadku uwzględnienia wpływu utwardzenia plastycznego na parametr  $k_w$  macierz styczna (3.62) przestaje być konsystentna. Może to prowadzić do pogorszenia zbieżności iteracyjnych algorytmów rozwiązania.

Model tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności przedstawiony w rozdziale 3.2.2, opisany w postaci przyrostowej równaniami (3.57)–(3.61) wraz z konsystentną macierzą stycznią (3.62), został zaimplementowany do programu analizy metodą elementów skończonych *ELFEN* [29]. W następnym podrozdziale przedstawione są wyniki otrzymane dla

trzech przykładowych problemów brzegowych.

### 3.3.2 Przykłady numeryczne

Model tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności (rozdział 3.2.2) został zastosowany do opisu tarcia kontaktowego w symulacjach prostych dwuwymiarowych procesów kucia. Pierwszy przykład dotyczy klasycznego zadania spłaszczenia osiowo-symetrycznej odkuwki przez dwie płaskie matryce. W drugim przykładzie rozpatrywane jest ściskanie długiego prostopadłościanu (płaski stan odkształcenia) pomiędzy dwoma cylindrycznymi stemplami. Ponieważ głównym celem tych symulacji było zbadanie własności nowego modelu tarcia, a nie symulowanie rzeczywistych procesów, przyjęto prosty, sprężysto-idealnie plastyczny model materiału o granicy plastyczności  $\sigma_0 = 200$  MPa. Granica plastyczności przy ścinaniu (będąca jednym z parametrów modelu tarcia) jest więc równa  $k_w = 115.47$  MPa. W trzecim przykładzie pomiędzy płaskimi matrycami ścispany jest sprężysto-lepko-plastyczny pierścień. We wszystkich przykładach powierzchnia narzędzia jest sztywna (nieodkształcalna).

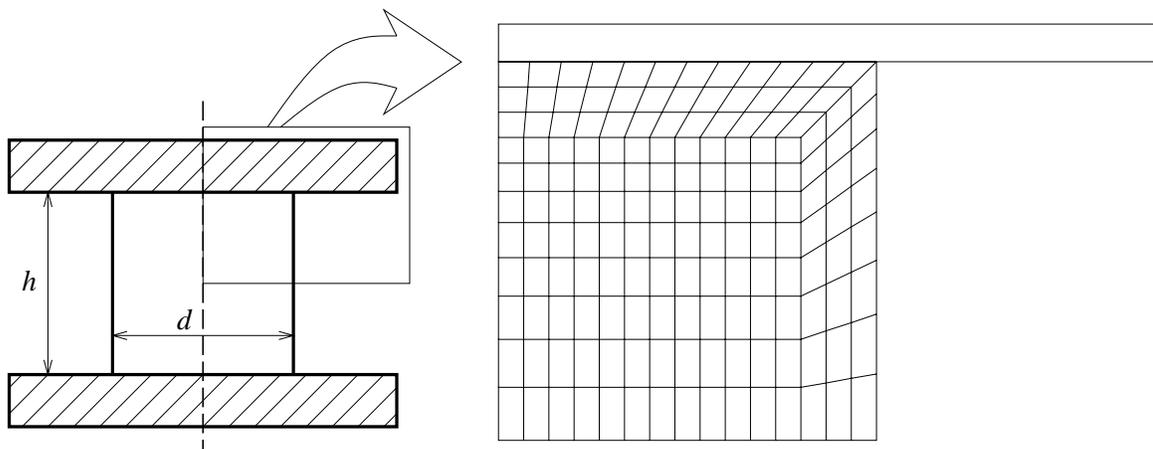
W rozdziale 3.2.2 zostały wyprowadzone podstawowe równania modelu tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności. Pokazano, że jeżeli poślizg zachodzi przy rosnącym monotonicznie ciśnieniu normalnym (a więc przy ciągłym wzroście efektywnej powierzchni kontaktu  $\alpha_w$ ), to punkt reprezentujący naprężenie kontaktowe na płaszczyźnie  $\bar{p}_N, \bar{p}_T$  porusza się po powierzchni stanów granicznych  $F_c(\bar{p}_N, \bar{p}_T) = 0$ . Natomiast jeżeli po osiągnięciu pewnego maksimum ciśnienie normalne zmniejszy się, to powierzchnię graniczną tarcia tworzą powierzchnie  $f_d = 0$  odpowiadające ustalonej wartości efektywnej powierzchni kontaktu  $\alpha_w$ .

Do przykładowych obliczeń przyjęte zostały następujące parametry modelu:  $\bar{p}_N^{prop} = 1.91$ ,  $f_1^{prop} = 0.45$  i  $f_1^{max} = 0.74$ . Odpowiadają one przypadkowi  $\theta_t = 5^\circ$ ,  $m_0 = 0.6$  z tabeli 3.2.

Aby umożliwić porównanie nowego modelu z istniejącymi modelami, każde z zadań zostało rozwiązane również z zastosowaniem prawa tarcia Coulomba, a także z zastosowaniem nieliniowego prawa tarcia, jakie wynika na przykład z prostych modeli ST/RW lub RT/SW (por. rozdz. 1.3.1). Parametry tych modeli zostały przyjęte tak, aby ich powierzchnie graniczne odpowiadały powierzchni stanów krytycznych  $F_c = 0$ . Wtedy dla niewysokich, monotonicznie rosnących ciśnień kontaktowych wszystkie trzy modele przewidują takie same wartości sił tarcia. W przypadku prawa Coulomba przyjęto współczynnik tarcia  $\mu = 0.1685$  odpowiadający początkowemu nachyleniu krzywej stanów granicznych  $F_c = 0$ . Nieliniowy model tarcia został opisany funkcją liniowo-potęgową (3.36)  $\bar{p}_T^{sl} = \hat{\bar{p}}_T^{sl}(\bar{p}_N, \bar{p}_N^{prop}, \bar{p}_T^{prop}, \bar{p}_T^{max})$ , przybliżającą krzywą stanów krytycznych  $F_c = 0$ . Wartości jej parametrów przyjęto jako:  $\bar{p}_N^{prop} = 2.8$ ,  $\bar{p}_T^{prop} = 0.4718$ ,  $\bar{p}_T^{max} = 0.74$ . A zatem dla ciśnień mniejszych od  $\bar{p}_N^{prop} = 2.8$  model nieliniowy jest całkowicie równoważny modelowi Coulomba (gdyż  $\bar{p}_T^{prop}/\bar{p}_N^{prop} = 0.1685 = \mu$ ).

### Ściskanie osiowo-symetrycznego walca

Osiowo-symetryczny walec o stosunku średnicy do wysokości równym  $d_0/h_0 = 1$  ściskany jest między dwiema sztywnymi płaskimi powierzchniami. Na rysunku 3.21 pokazany



Rysunek 3.21: Ściskanie osiowo-symetrycznego walca — podział na elementy skończone.

jest ogólny widok układu oraz podział na elementy skończone. Ze względu na symetrię obrotową oraz względem poziomej powierzchni środkowej wystarczy rozpatrywać tylko jedną ćwiartkę.

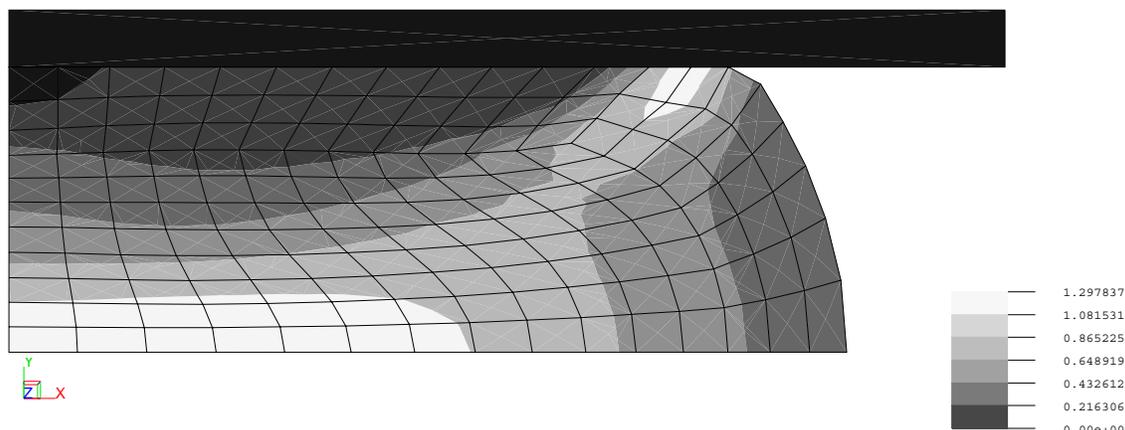
Rozkłady efektywnych odkształceń plastycznych otrzymane dla modelu tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności oraz dla modelu tarcia Coulomba pokazane są na rysunku 3.22. Jak widać deformacja plastyczna jest w obu przypadkach bardzo zbliżona. Różnice — również niewielkie — ujawniają się jednak w naprężeniach kontaktowych. Wartości normalnych i stycznych (ciernych) naprężeń kontaktowych w poszczególnych węzłach leżących na powierzchni kontaktu pokazane są na rysunku 3.23. Wykresy z rysunku 3.23 nie obrazują rzeczywistego rozkładu naprężeń na powierzchni kontaktowej lecz wartości naprężeń Cauchy’ego pokazane w konfiguracji nieodkształconej. Dzięki temu można zaobserwować zmiany ciśnienia normalnego w poszczególnych węzłach.

Na wykresach nie pokazano wyników otrzymanych dla nieliniowego prawa tarcia, gdyż pokrywają się one dokładnie z wynikami dla tarcia Coulomba. Łatwo to wytłumaczyć, gdyż w zakresie występujących nacisków normalnych oba prawa tarcia są praktycznie równoważne ( $\bar{p}_N \leq 3$ , przy granicy proporcjonalności prawa nieliniowego  $\bar{p}_N^{prop} = 2.8$ ).

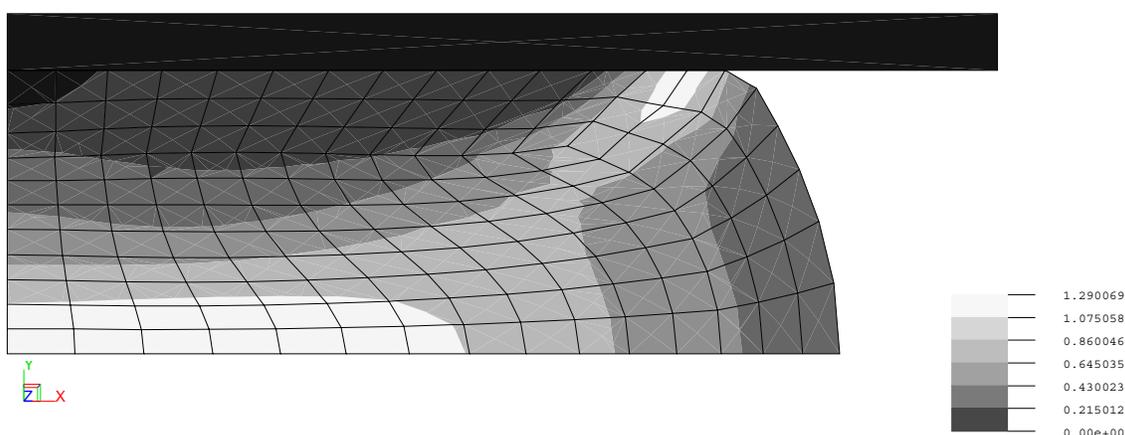
Porównanie wyników otrzymanych dla nowego modelu z wynikami dla prawa Coulomba potwierdza ogólną zasadę, że wielkości ciśnień normalnych są mało czułe na zmiany warunków kontaktowych (rys. 3.23(a)). Z kolei z porównania naprężeń ciernych widać, że dla niewielkiego ściśnięcia ( $\Delta h/h_0 = 0.1\%$ ) wyniki pokrywają się (rys. 3.23(b)). Jednak już dla  $\Delta h/h_0 = 1\%$  pojawia się różnica związana ze spadkiem ciśnień normalnych w węzłach od 0 do 6. Przy 50% redukcji wysokości różnice naprężeń ciernych są znaczne, szczególnie w zewnętrznej strefie kontaktu.

W powyższym przykładzie powierzchnia kontaktu jest płaska. Dlatego też w trakcie procesu normalne ciśnienia kontaktowe wykazują ogólną tendencję do wzrostu. Niewielkie

(a)



(b)

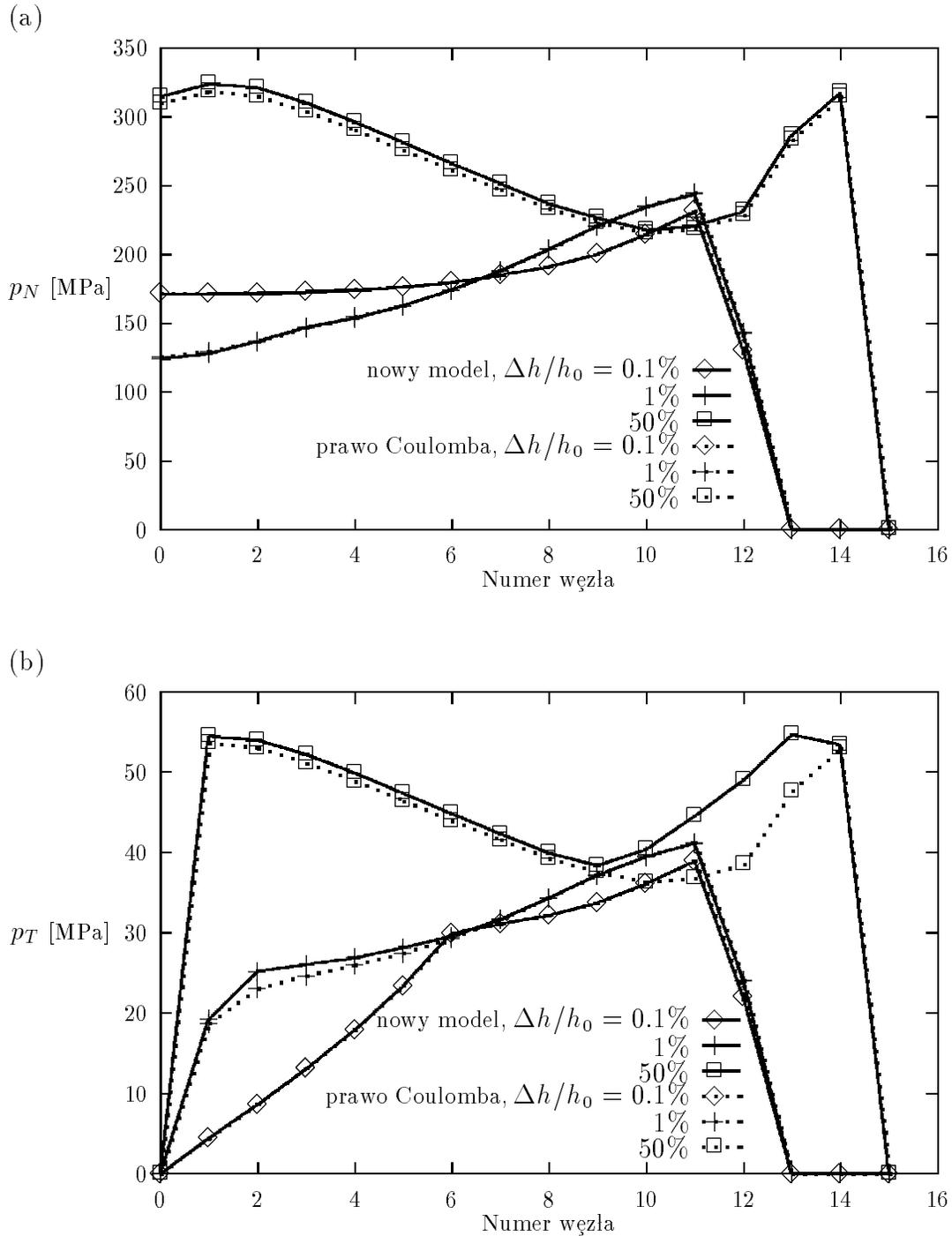


Rysunek 3.22: Ściskanie osiowo-symetrycznego walca. Rozkład efektywnych odkształceń plastycznych po redukcji wysokości o 50% w przypadku: (a) modelu tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności; (b) modelu tarcia Coulomba.

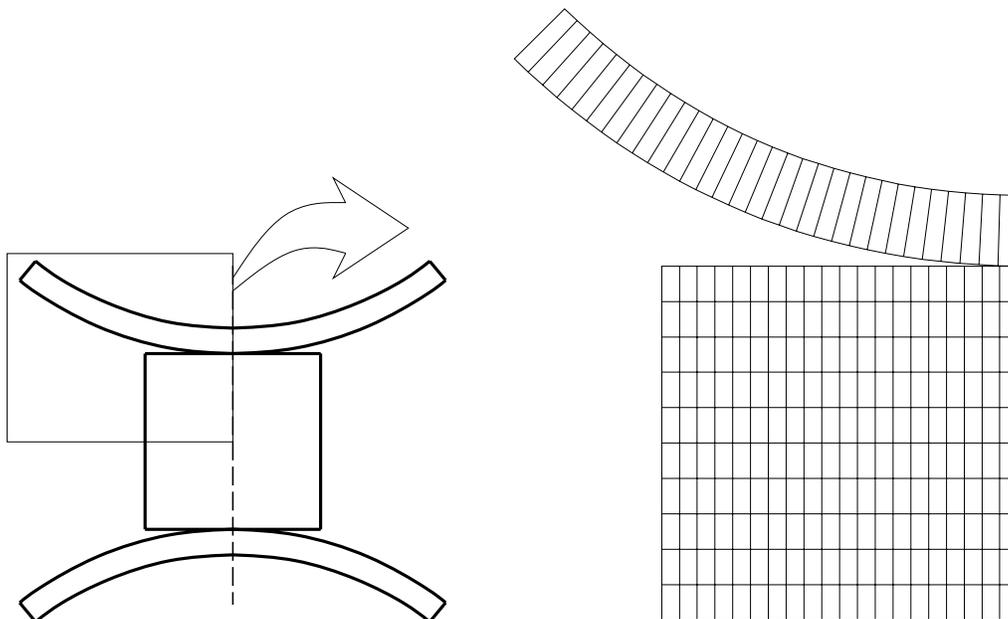
spadki ciśnień, zgodnie z przewidywaniami, znajdowały odbicie w różnicach sił tarcia między przypadkiem z tarciem Coulomba i przypadkiem z nowym modelem tarcia, czułym na odciażanie nacisków normalnych. Aby lepiej zilustrować te własności modelu, drugi przykład został tak dobrany, aby zmiany nacisków normalnych były bardziej znaczące.

### Ściskanie cylindrycznymi stemplami

Długi prostopadłościan o przekroju kwadratowym ( $10 \times 10\text{cm}$ ) jest ścispany przez dwa sztywne cylindryczne stemple o promieniu  $20\text{cm}$  każdy. Przyjęto, że panuje płaski stan odkształcenia, co odpowiada założeniu, że długość jest dużo większa od wymiarów przekroju poprzecznego. Ze względu na symetrię względem pionowej i poziomej osi wystarczy rozpatrywać tylko jedną czwartą przekroju poprzecznego. Konfiguracja nieodkształcona i podział na elementy skończone pokazane są na rysunku 3.24. Rysunki 3.25(a,b)



Rysunek 3.23: Ściskanie osiowo-symetrycznego walca. Normalne ciśnienia kontaktowe (a) i naprężenia tarcia (b) w poszczególnych węzłach (węzeł 0 leży na osi symetrii, węzeł 12 w konfiguracji początkowej leży w narożu, węzły 13 i 14 wchodzą w kontakt w trakcie deformacji).



Rysunek 3.24: Ściskanie cylindrycznymi stemplami: konfiguracja nieodkształcona i podział na elementy skończone.

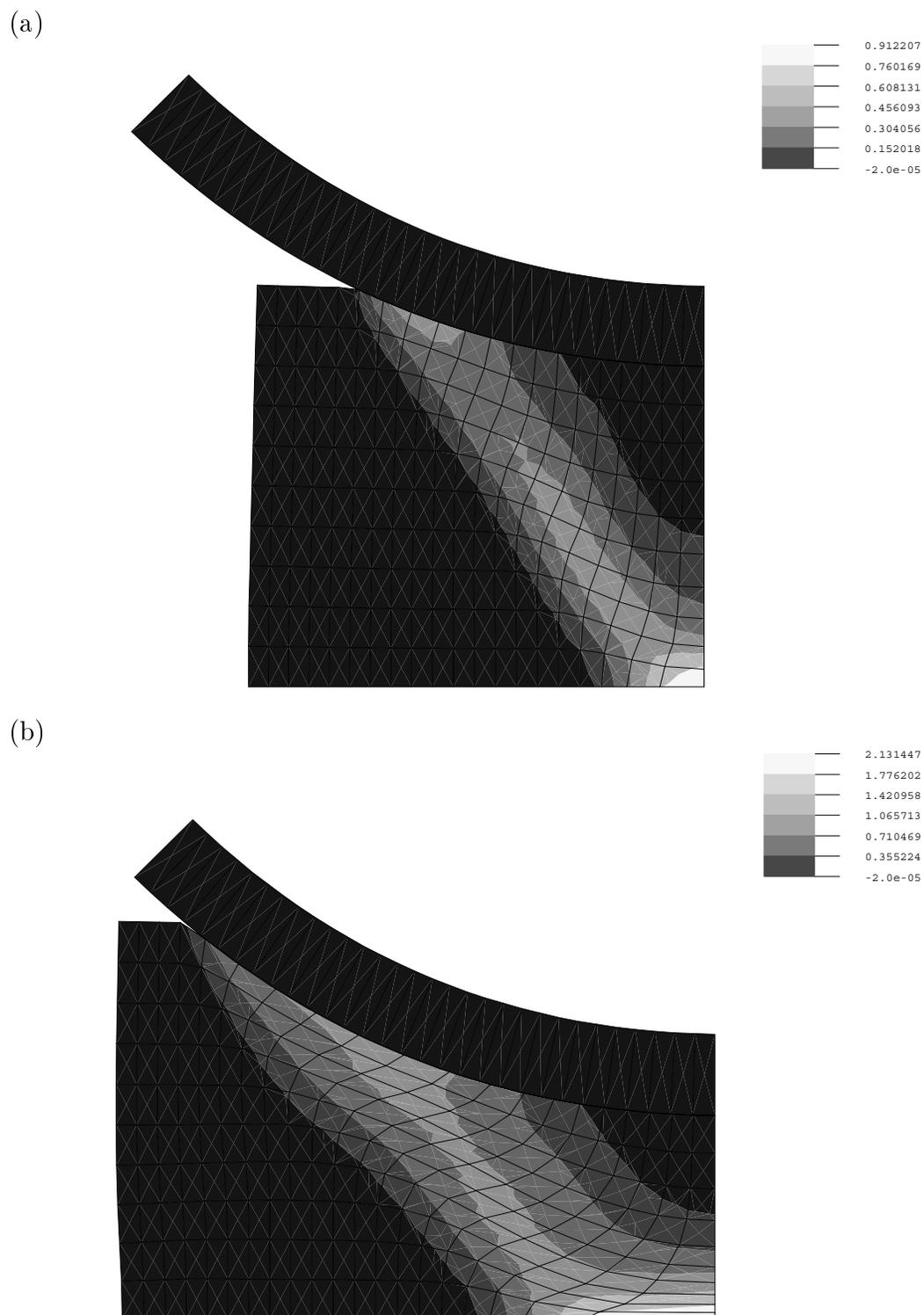
przedstawiają rozkłady efektywnych odkształceń plastycznych w konfiguracji odkształconej przy ściśnięciu 20% oraz 50% (mierzonym wzdłuż pionowej osi symetrii) otrzymane dla przypadku z nowym modelem tarcia. Dla porównania na rysunku 3.26 pokazane są efektywne odkształcenia plastyczne otrzymane dla przypadku z tarciem Coulomba. Różnice są niewielkie, ale bardziej zauważalne niż w przypadku ściskania walca osiowo-symetrycznego, gdyż oddziaływania kontaktowe wykazują w obu przypadkach większe różnice.

Ściskanie wypukłym stemplem powoduje, że początkowo wysokie ciśnienia normalne zmniejszają się wraz ze zwiększającą się powierzchnią kontaktu. Obrazują to wykresy na rysunku 3.27(a) przedstawiające wartości normalnych ciśnień kontaktowych w poszczególnych węzłach. Taka historia nacisków normalnych powoduje, że naprężenia tarcia dla nowego modelu i dla modelu Coulomba różnią się znacząco — rysunek 3.27(b).

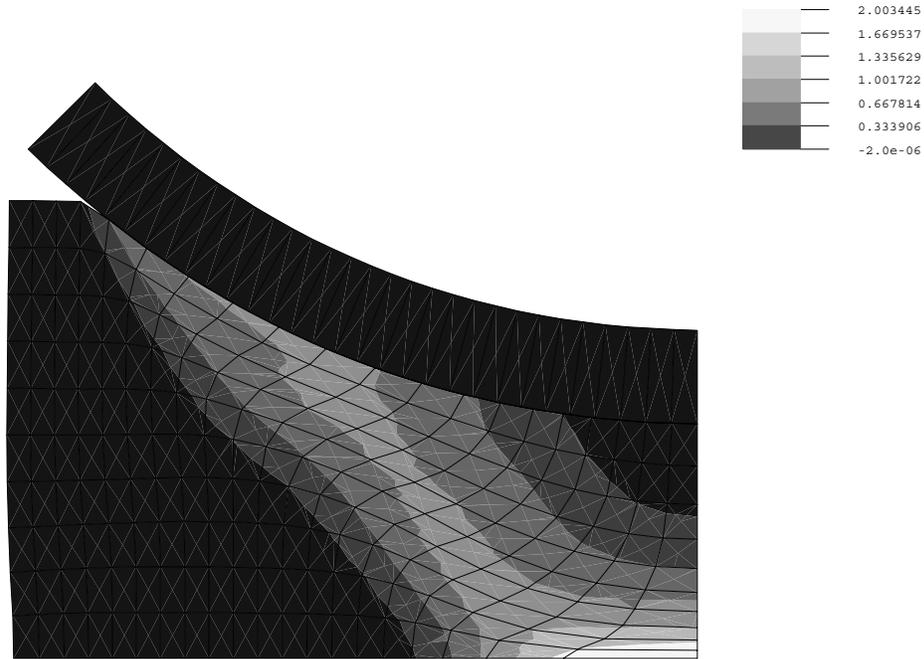
Również w rozważanym przypadku ściskania cylindrycznymi stemplami, rozwiązania dla nieliniowego prawa tarcia i dla prawa Coulomba są praktycznie jednakowe. Maksymalne ciśnienia kontaktowe w trakcie procesu osiągają  $\bar{p}_N = 5$ . Przy tak dużych ciśnieniach normalnych naprężenia tarcia poślizgowego są oczywiście bardzo różne dla obu modeli. Jednakże tak wysokie ciśnienia występują tylko w strefach przylegania. A zatem różnica granicznych (poślizgowych) naprężeń tarcia nie wpływa w żaden sposób na rozwiązanie.

### Termo-mechaniczna analiza ściskania pierścienia

Ściskanie pierścienia między płaskimi matrycami jest jedną z klasycznych metod eksperymentalnej identyfikacji własności ciernych par kontaktowych w procesach obróbki plastycznej (Danckert [27]; Hansen [33]). Test ten wykazuje dużą czułość deformacji



Rysunek 3.25: Ściskanie cylindrycznymi stemplami, model tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności. Rozkład efektywnych odkształceń plastycznych przy ściśnięciu  $\sigma$ : (a) 20% oraz (b) 50%.



Rysunek 3.26: Ściskanie cylindrycznymi stemplami, model tarcia Coulomba. Rozkład efektywnych odkształceń plastycznych przy ściśnięciu o 50%.

względem własności kontaktowych, a jednocześnie warunki kontaktowe są zbliżone do warunków typowych dla procesów kucia (duże naciski normalne w strefie kontaktu).

W jednej ze standardowych geometrii takiego testu stosunek zewnętrznego promienia  $R_o$ , promienia wewnętrznego  $R_i$  oraz wysokości  $h$  przyjmuje się jako  $R_o : R_i : h = 6 : 3 : 2$ . Na rysunku 3.28 pokazana jest konfiguracja początkowa oraz zastosowany w obliczeniach podział na elementy (z uwzględnieniem symetrii osiowej oraz symetrii względem płaszczyzny poziomej).

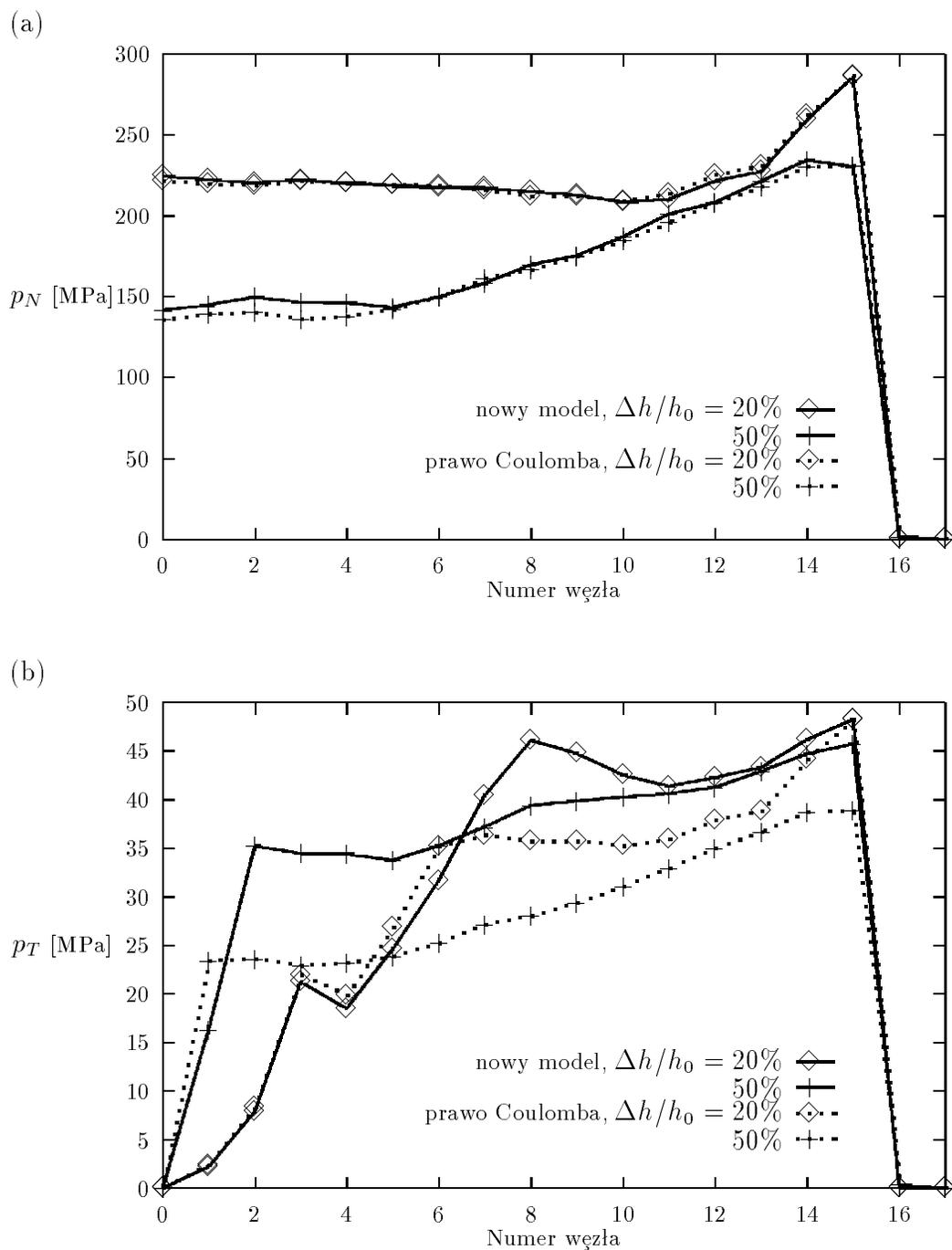
Tym razem przeprowadzono analizę termo-mechaniczną. Początkową temperaturę pierścienia przyjęto wyższą o  $500^\circ\text{C}$  od temperatury matrycy. Zastosowany został sprężysto-lepko-plastyczny model materiału opisany prawem potęgowym (Perzyna [86]):

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \eta \left\langle \frac{\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_y} \right\rangle^N,$$

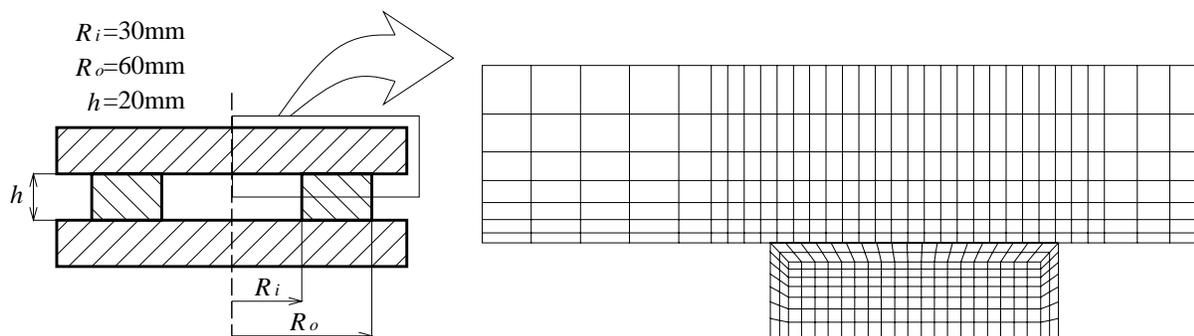
gdzie  $\eta$  jest lepkością,  $N$  wykładnikiem prawa konstytutywnego,  $\tilde{\sigma}$  jest efektywnym naprężeniem dewiatorowym,  $\tilde{\sigma}_y$  jest granicą plastyczności, a funkcja  $\langle f \rangle$  zdefiniowana jest jako:

$$\langle f \rangle = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } f < 0; \\ f & \text{jeżeli } f \geq 0. \end{cases}$$

Aby uwzględnić wpływ temperatury przyjęto, że granica plastyczności  $\tilde{\sigma}_y$  oraz związany z nią parametr modelu tarcia  $k_w$  (granica plastyczności na ścinanie) zależą od temperatury — wraz ze wzrostem temperatury maleją liniowo (o 10% na każde  $100^\circ\text{C}$ ).



Rysunek 3.27: Ściskanie cylindrycznymi stemplami. Normalne ciśnienia kontaktowe (a) i naprężenia tarcia (b) w poszczególnych węzłach (węzeł 0 leży na osi symetrii).



Rysunek 3.28: Test ściskania pierścienia.

Do obliczeń przyjęto następujące własności lepko-plastyczne:  $\tilde{\sigma}_y = 200$  MPa (w temperaturze początkowej),  $\eta = 2$ ,  $N = 2$ . Podobnie jak w poprzednich przykładach zastosowano trzy prawa tarcia (Coulomba, nieliniowe oraz prawo tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności). Granica plastyczności na ścinanie będąca jednym z parametrów modeli tarcia została przyjęta jako  $k_w = 115.47$  MPa (w temperaturze początkowej) i, tak jak granica plastyczności materiału, jest liniową funkcją temperatury. Parametry użyte w analizie przepływu ciepła to: gęstość  $\rho_w = \rho_t = 7800$  kg m<sup>-3</sup>, pojemność cieplna  $c_w = c_t = 480$  J kg<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>, współczynnik przewodzenia ciepła  $k_w = 36$  W m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>,  $k_t = 19$  W m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup> oraz opór cieplny powierzchni kontaktowej<sup>5</sup>  $R = 4000$  W m<sup>-2</sup>K<sup>-1</sup>. Ściskanie pierścienia z redukcją wysokości o 50% trwało 1 sekundę (przy stałej prędkości ściskania równej 10 mm s<sup>-1</sup>).

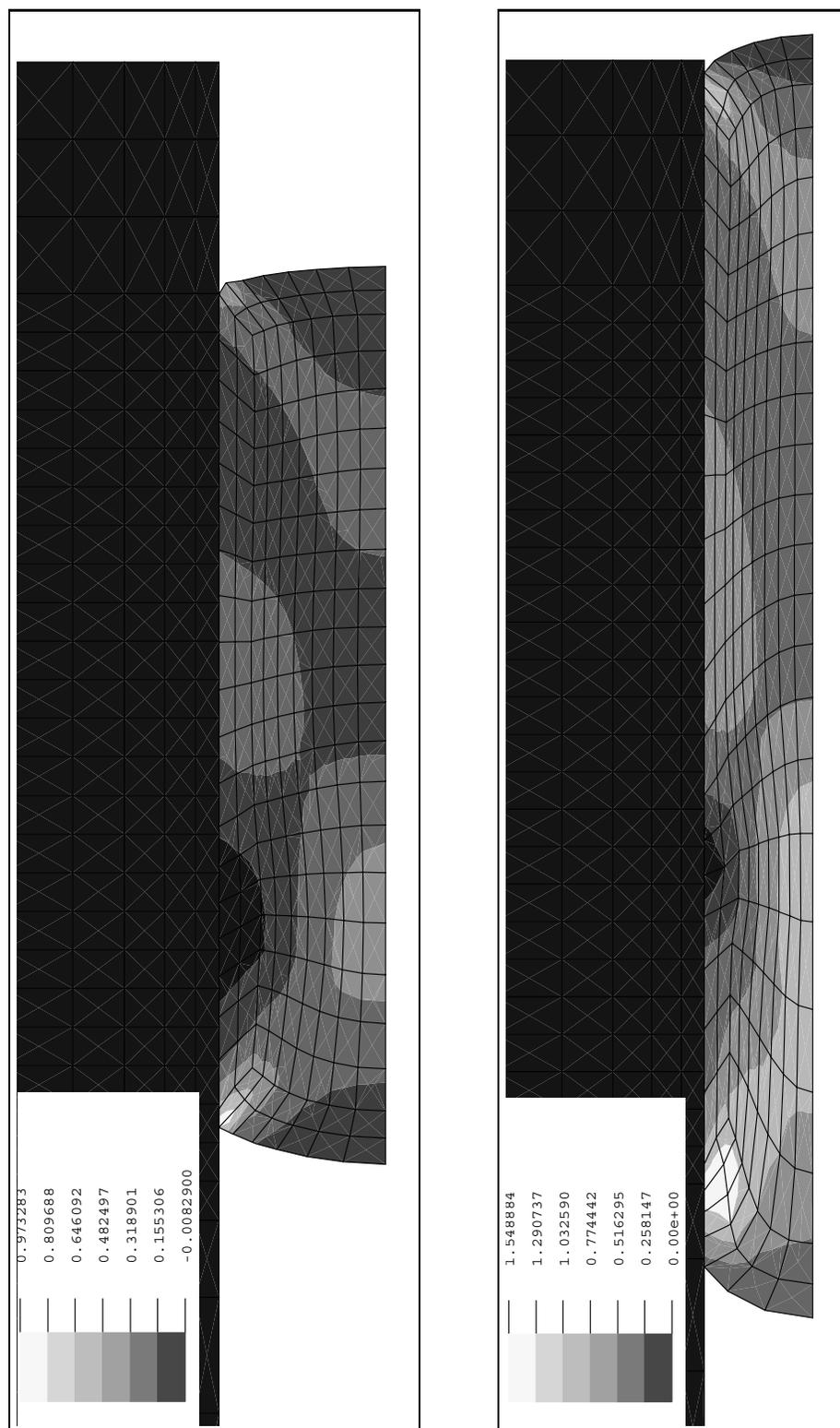
Na rysunku 3.29 pokazane są rozkłady efektywnych odkształceń plastycznych dla redukcji wysokości o 25% i o 50% otrzymane dla modelu tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności. Rysunek 3.30 przedstawia rozkład temperatury w pierścieniu i matrycy po spłaszczeniu pierścienia o 50%. Temperatura odniesiona jest do początkowej temperatury w matrycy. Zatem początkowa temperatura matrycy była równa 0°C, a początkowa temperatura w pierścieniu równa 500°C. Jak widać na rysunku 3.30, na skutek dysypacji plastycznej oraz ciernej, temperatura wewnątrz pierścienia wzrosła (maksymalnie o ok. 170°C). W strefie kontaktu, na skutek odprowadzenia ciepła do matrycy temperatura spadła do 440–480°C. Jednocześnie temperatura powierzchni matrycy w punktach stykających się z gorącym pierścieniem wzrosła o 140–160°C.

Wyniki pokazane na rysunkach 3.29 i 3.30 otrzymano dla nowego modelu tarcia. Deformacja oraz rozkłady temperatury dla pozostałych rozważanych przypadków modeli tarcia są na tyle niewielkie, że nie ma potrzeby prezentowania analogicznych wyników otrzymanych dla tych modeli. Różnice ujawniają się, jeżeli rozpatrzeć rozkład naprężeń kontaktowych — rysunek 3.31. Innaczej niż w dwóch omawianych wcześniej przykładach, w przypadku ściskania pierścienia, model tarcia powierzchni o dwóch skalach nierówności oraz nieliniowe prawo tarcia dają bardzo zbliżone wyniki, podczas gdy wyniki otrzymane dla prawa tarcia Coulomba różnią się od nich znacznie. Tak duża rozbieżność jest

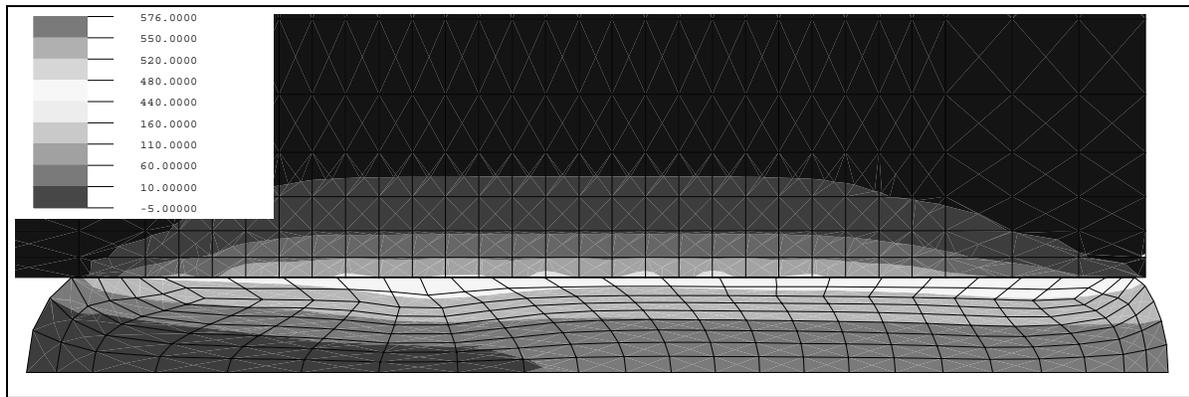
<sup>5</sup>Zastosowano najprostsze prawo przewodzenia ciepła przez powierzchnię kontaktową, zgodnie z którym strumień ciepła na jednostkę powierzchni jest wprost proporcjonalny do różnicy temperatur powierzchni kontaktujących się ciał.

(a)  $\Delta h/h_0 = 25\%$

(b)  $\Delta h/h_0 = 50\%$



Rysunek 3.29: Ściskanie pierścienia. Rozkład efektywnych odkształceń plastycznych.



Rysunek 3.30: Ściskanie pierścienia. Rozkład temperatury dla  $\Delta h/h_0 = 50\%$  (całkowity czas kontaktu 1 sek.).

spowodowana wysokimi normalnymi naciskami kontaktowymi (maks.  $\bar{p}_{Nmax} \approx 7$ ), dla których model Coulomba znacznie odbiega od pozostałych modeli. Naprężenia cienne dla nowego modelu oraz dla prawa nieliniowego różnią się tylko nieznacznie co sugeruje, że w trakcie procesu nie występowały znaczące spadki nacisków normalnych.

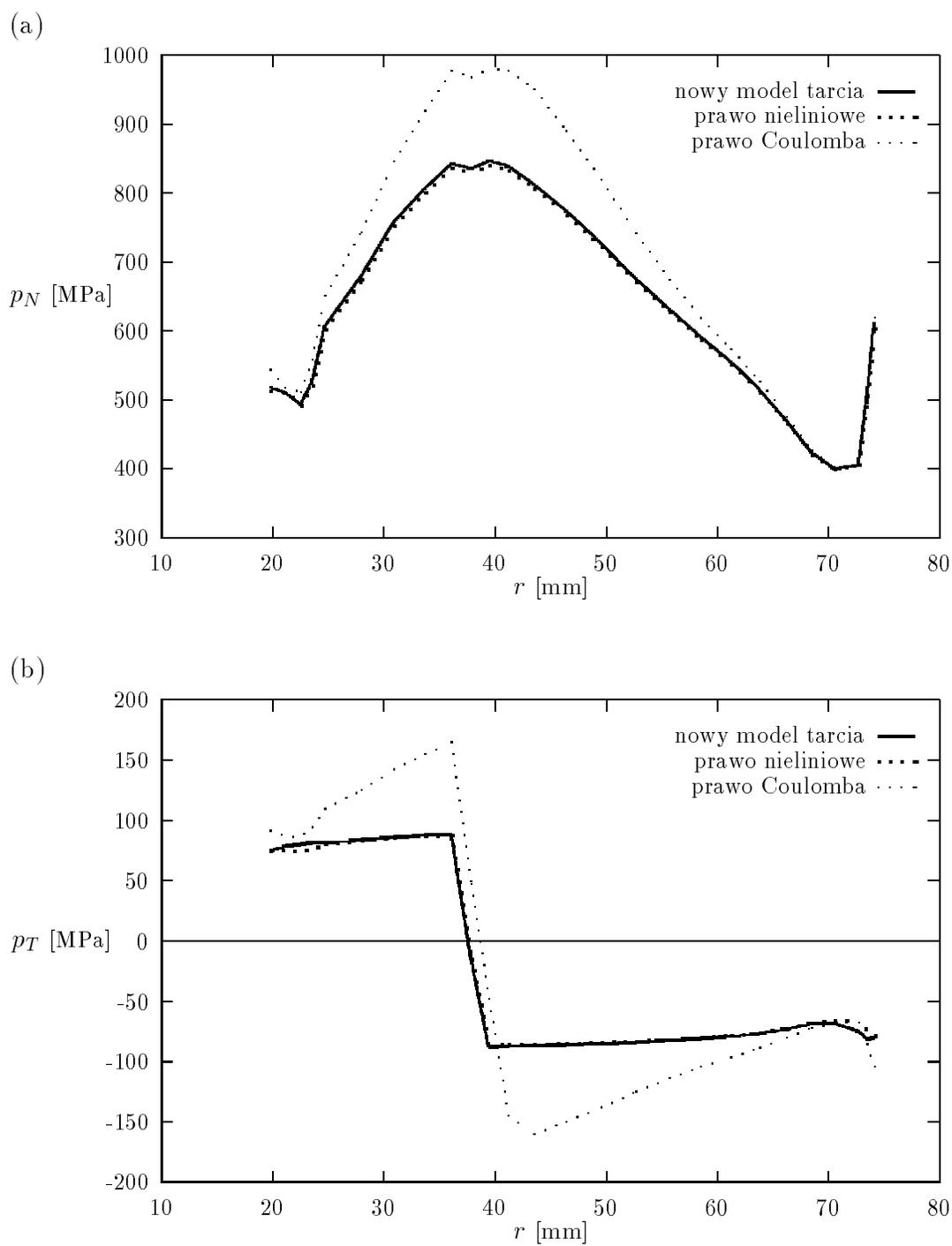
Rysunek 3.32 przedstawia zmianę minimalnego wewnętrznego promienia pierścienia w funkcji redukcji wysokości. Tu również widać, że prawo tarcia Coulomba daje wyniki różniące się od dwóch pozostałych modeli tarcia.

### 3.3.3 Podsumowanie

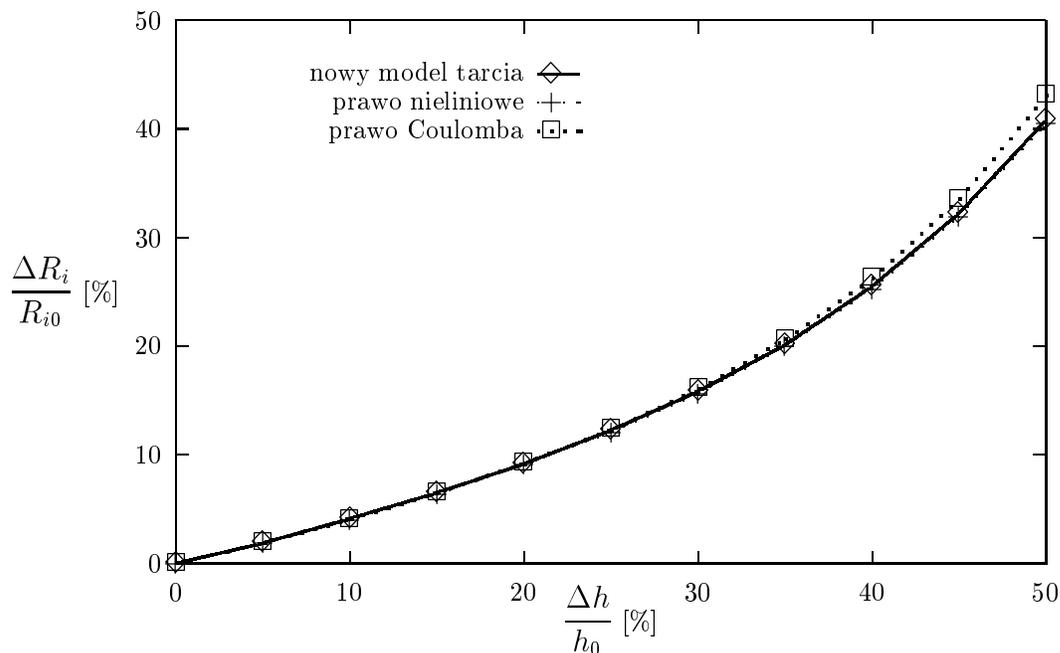
Na bazie krytyki istniejących modeli, w rozdziałach 3.2.2–3.2.4 zaproponowane zostały nowe modele oddziaływań kontaktowych specjalizowane dla warunków kontaktowych typowych w procesach obróbki plastycznej. Modele oparte na założeniu istnienia dwóch skal nierówności charakteryzują się pamięcią maksymalnego ciśnienia normalnego. Parametr ten w założeniu opisuje nieodwracalny proces spłaszczania nierówności powierzchni obrabianego materiału.

Otrzymane prawo tarcia reprezentowane jest przez powierzchnie graniczne tarcia, które “rosną” wraz ze wzrostem maksymalnego ciśnienia kontaktowego (rysunek 3.12). Tak więc nowy model jest jakościowo różny od dotychczasowych modeli (prawa Coulomba, nieliniowych praw tarcia) gdyż nie prowadzi do jednoznacznej zależności między normalnymi i stycznymi siłami kontaktowymi. Potwierdzenie (bądź nie) efektów przewidywanych przez teorię wymaga przeprowadzenia badań eksperymentalnych. Niestety obecnie brak jest wyników takich badań.

Należy jednak zdawać sobie sprawę, że pomiary własności ciennych, szczególnie w warunkach kontaktowych właściwych dla procesów obróbki plastycznej, wiążą się z problemami, jakie nie występują w przypadku wielu innych rodzajów warunków kontaktowych. Należy bowiem zapewnić warunki dokładnie odpowiadające rzeczywistym, co w przypadku procesów takich jak kucie na gorąco jest niezwykle trudne. Oprócz parametrów takich jak temperatura powierzchni dotyczy to również odkształceń plastycznych obrabianego materiału, co powoduje, że proste metody pomiarowe nie mogą być stosowane. W



Rysunek 3.31: Ściskanie pierścienia. Rozkład nacisków normalnych (a) oraz naprężeń ciernych (b) w funkcji promienia dla redukcji wysokości  $\Delta h/h_0 = 50\%$ .



Rysunek 3.32: Ściskanie pierścienia. Zmiana minimalnego promienia wewnętrznego w funkcji zmiany wysokości.

związku z tym, dane doświadczalne dotyczące własności ciernych w warunkach obróbki plastycznej są niezwykle ubogie. Rozwój metod analizy numerycznej tego typu problemów, identyfikacji oraz analizy odwrotnej otwiera nowe możliwości badania praw tarcia w warunkach kontaktowych uniemożliwiających ich bezpośredni pomiar.

W bieżącym rozdziale przedstawione zostały wyniki analizy numerycznej z wykorzystaniem najprostszego z zaproponowanych w poprzednim rozdziale modeli. Zgodnie z oczekiwaniami wyniki otrzymane dla tego modelu różnią się od wyników dla modelu tarcia Coulomba i dla nieliniowego prawa tarcia. O ile, dopóki ciśnienia kontaktowe rosną monotonicznie modele te dają takie same wyniki, o tyle w procesach, w których normalne ciśnienia kontaktowe, po osiągnięciu pewnego maksimum, spadają, zastosowanie nowego modelu prowadzi do znaczących zmian rozkładu naprężeń ciernych.

## Rozdział 4

# Pasek i włókno — proste modele jednowymiarowe

Jednowymiarowy model sprężystego paska spoczywającego na podłożu jest często używany do uproszczonej ilustracji złożonych zjawisk. Przykładem może być tu praca Jarzębowskiego i Mroza [42] poświęcona efektom pamięci w układach z tarciami. Model paska został również wykorzystany w rozdziale 2.1 jako przykład problemu kontaktowego z obciążeniem proporcjonalnym. Z drugiej strony, sprężysty pasek może być także uproszczonym modelem rzeczywistego problemu technicznego — współpracy włókna z matrycą w kompozytach o kruchej matrycy (np. Marshall, Oliver [61]).

W niniejszym rozdziale przedstawiony jest cały szereg modeli wykorzystujących prostotę jednowymiarowego modelu paska w połączeniu z różnorodnymi modelami oddziaływania paska z podłożem. Na początku wprowadzone są trzy podstawowe rodzaje oddziaływania (podłoże cierne, sprężyste oraz kruche), jako podstawa do dyskusji wzajemnej interakcji tarcia i postępującej delaminacji. Kolejny podrozdział krótko przedstawia pracę paska poddanego obciążeniom termicznym. Ostatnie trzy podrozdziały poświęcone są technicznemu problemowi współpracy włókna z matrycą i efektem towarzyszącym dyfuzji i zużyciu powierzchni kontaktu w kompozytach o kruchej matrycy.

### 4.1 Proste modele paska na podłożu

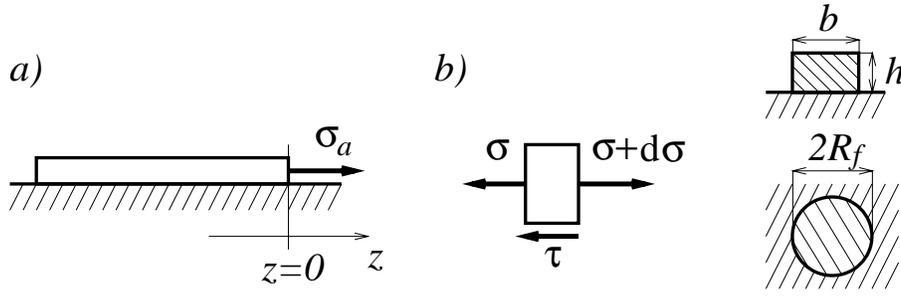
Pasek spoczywający na podłożu jest schematycznie przedstawiony na rysunku 4.1. Oznaczając przez  $\sigma$  naprężenie w pasku, a przez  $\tau$  naprężenie tnące działające na powierzchni kontaktu włókna z podłożem, równanie równowagi paska można zapisać w postaci

$$\sigma' - \frac{a_c}{A}\tau = 0, \quad (4.1)$$

lub ze względu na zależność  $\sigma = E\varepsilon = Eu'$  w postaci

$$u'' - \frac{a_c}{EA}\tau = 0, \quad (4.2)$$

gdzie przemieszczenie punktów paska oznaczone jest przez  $u$ , pole przekroju paska przez  $A$ , a jednostkowa powierzchnia kontaktu paska z podłożem przez  $a_c$ . Prim oznacza pochodną



Rysunek 4.1: Model paska spoczywającego na podłożu (a) oraz (b) równowaga elementarnego odcinka o długości  $dz$ .

względem współrzędnej  $z$ . Dla paska o przekroju prostokątnym  $a_c/A = 1/h$  a dla włókna o przekroju kołowym  $a_c/A = 2/R_f$  (rys. 4.1).

Trzy najprostsze modele oddziaływania sprężystego paska z podłożem to:

1. pasek na podłożu z tarciem,  $\tau = \tau_s \text{sign} \dot{u}$ ;
2. pasek na podłożu sprężystym,  $\tau = ku$ ;
3. pasek na podłożu kruchym,  $\tau = 0$  wszędzie poza granicą między częścią paska odspojoną a częścią nieodspojoną, gdzie  $\tau = \infty$ .

Powyżej, pochodna przemieszczenia względem czasu (prędkość) oznaczona jest przez  $\dot{u}$ ,  $\tau_s > 0$  jest wielkością naprężenia ciernego podczas poślizgu (tarcie rozwinięte), a  $k$  jest modulem sprężystości na ścinanie podłoża sprężystego.

Rozwiązanie przypadku monotonicznego rozciągania paska na podłożu z tarciem ( $\tau = \tau_s$  przy założeniu, że  $\sigma_a > 0$ ) z warunkami brzegowymi  $u = \sigma = 0$  dla  $z = -s$  jest następujące

$$\sigma = \sigma_a + \frac{a_c}{A} \tau_s z, \quad u = \frac{\sigma_a}{E} (z + s) + \frac{a_c \tau_s}{2EA} (z^2 - s^2), \quad -s < z < 0, \quad (4.3)$$

gdzie długość strefy poślizgu  $s$  wyraża się wzorem

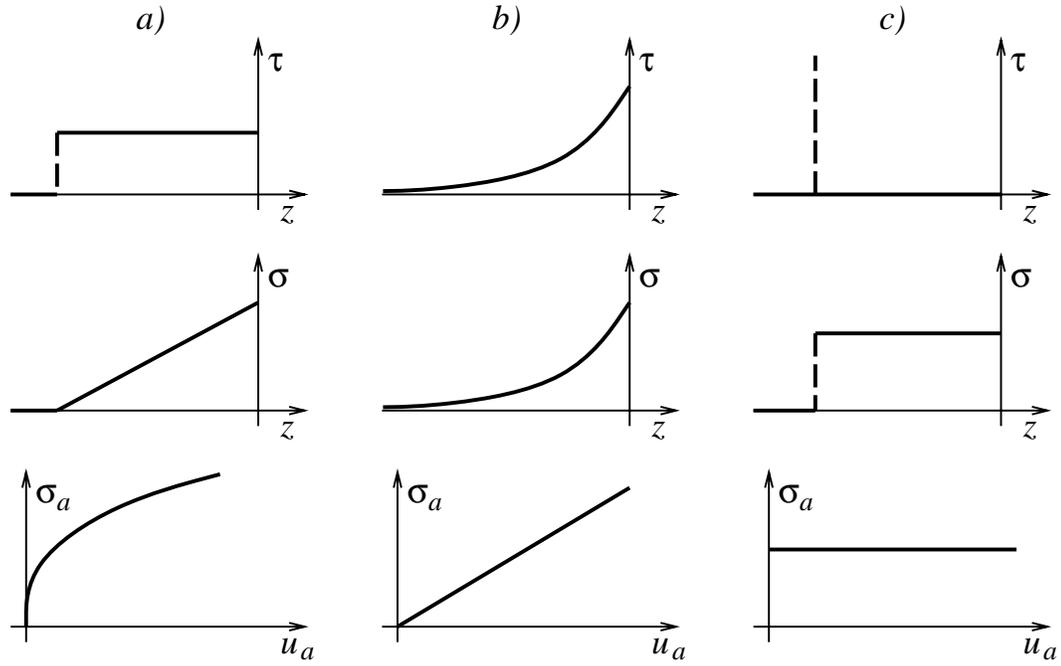
$$s = \frac{A \sigma_a}{a_c \tau_s}. \quad (4.4)$$

Równanie równowagi (4.2) paska na podłożu sprężystym przyjmuje postać

$$u'' - r^2 u = 0, \quad r^2 = \frac{ka_c}{EA},$$

a jego rozwiązaniem dla warunków brzegowych:  $\sigma(-L) = 0$  oraz  $\sigma(0) = \sigma_a$  jest

$$u = \frac{\sigma_a}{rE} \frac{e^{r(L+z)} + e^{-r(L+z)}}{e^{rL} - e^{-rL}}.$$



Rysunek 4.2: Podstawowe charakterystyki dla prostych modeli paska na podłożu: (a) ciernym; (b) sprężystym; (c) kruchym.

Dla pół-nieskończonego paska ( $L \rightarrow \infty$ ) otrzymujemy

$$u = \frac{\sigma_a}{rE} e^{rz} = u_a e^{rz}, \quad \tau = \frac{k\sigma_a}{rE} e^{rz} = \tau_a e^{rz}, \quad \sigma = \sigma_a e^{rz}, \quad z < 0 \quad (4.5)$$

i liniową zależność  $\sigma_a = rE u_a$

W przypadku podłoża kruchego o energii delaminacji  $\Gamma$  (na jednostkę powierzchni kontaktowej) obciążenie, przy którym następuje propagacja szczeliny odpajającej można wyznaczyć z warunku Griffitha (1.24)

$$-d\Pi = \Gamma a_c ds,$$

gdzie  $\Pi$  oznacza energię potencjalną paska. Obciążenie krytyczne  $\sigma_{cr}$  wyraża się wzorem:

$$\sigma_a = \sigma_{cr} = \sqrt{2 \frac{a_c}{A} E \Gamma}. \quad (4.6)$$

Należy zwrócić uwagę, że dla podłoża kruchego krytyczna wartość naprężenia w pasku jest stała i nie zależy od długości odspojenia  $s$ .

Na rysunku 4.2 przedstawione są rozkłady naprężeń  $\sigma(z)$  i  $\tau(z)$  oraz zależności obciążenie-przemieszczenie  $\sigma_a(u_a)$  monotonicznie obciążonego końca paska ( $\sigma_a = \sigma(0)$ ,  $u_a = u(0)$ ) dla omówionych powyżej trzech modeli oddziaływania paska z podłożem.

Dla modelu podłoża sprężystego wzbogaconego o wytrzymałościowy warunek zniszczenia i propagacji szczeliny  $|\tau| < \tau_m$ , po przekroczeniu którego nośność podłoża spada

do zera, krytyczne naprężenie delaminacji i propagacji szczeliny również nie zależy od długości szczeliny i jest równe

$$\sigma_{cr} = \sigma_m = \frac{1}{r} \frac{a_c}{A} \tau_m.$$

Tak więc w tym przypadku warunek energetyczny i wytrzymałościowy są sobie równoważne, a energia propagacji szczeliny  $\Gamma$  jest bezpośrednio związana z maksymalnym naprężeniem tnącym podłoża sprężystego  $\tau_m$ , a raczej z maksymalną właściwą energią sprężystą podłoża (drugi człon wyrażenia):

$$\Gamma = \frac{A}{a_c} \frac{\tau_m^2}{2k}.$$

Przy sztywności podłoża dążącej do nieskończoności ( $k \rightarrow \infty$ ) podłoże kruche można traktować jako przypadek graniczny takiego modelu.

## 4.2 Oddziaływanie tarcia i postępującej delaminacji

### 4.2.1 Podłoże kruche

W bardziej złożonym przypadku, gdy delaminacja paska od kruchego podłoża połączona jest z oddziaływaniem ciernym na zdelaminowanym odcinku paska, rozwiązanie równania równowagi (4.1) przedstawiają równania (4.3). Jest ono takie samo jak dla paska z samym tylko oddziaływaniem ciernym z tą różnicą, że długość  $s$  strefy poślizgu (delaminacji) nie wyraża się wzorem (4.4) i należy ją wyznaczyć z warunku delaminacji.

Uogólniony warunek propagacji szczeliny dla przypadku z tarcie ma postać (1.25):

$$-d\Pi = dL - dU = dD^f + dD^d, \quad (4.7)$$

gdzie  $dD^f$  i  $dD^d$  są odpowiednio przyrostami energii dysypowanej na skutek tarcia i na skutek delaminacji spowodowanymi przyrostem długości strefy zdelaminowanej o  $ds$ . Przyrosty pracy zewnętrznej  $dL$ , energii sprężystej paska  $dU$  oraz energii dysypowanej  $dD^f$  i  $dD^d$  wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} dL &= A\sigma_a du_a = \left( \frac{A\sigma_a^2}{E} - \frac{a_c\tau_s\sigma_a}{E}s \right) ds, \\ dU &= \frac{d}{ds} \left( \int_{-s}^0 \frac{1}{2} E \varepsilon^2 A dz \right) = \left( \frac{A\sigma_a^2}{2E} - \frac{a_c\tau_s\sigma_a}{E}s + \frac{a_c^2\tau_s^2}{2EA}s^2 \right) ds, \\ dD^f &= \int_{-s}^0 a_c\tau_s \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right) ds dz = \left( \frac{a_c\tau_s\sigma_a}{E}s - \frac{a_c^2\tau_s^2}{EA}s^2 \right) ds, \\ dD^d &= a_c\Gamma ds. \end{aligned}$$

Warunek (4.7) pozwala wyznaczyć zależność między długością  $s$  zdelaminowanego odcinka, a obciążeniem powodującym dalszą delaminację  $\sigma_{acr}$ :

$$\sigma_{acr} = \frac{a_c}{A} \tau_s s + \sqrt{2 \frac{a_c}{A} E \Gamma} = \frac{a_c}{A} \tau_s s + \sigma_{cr}. \quad (4.8)$$

Z równań (4.8) i (4.3) wynika, że naprężenie krytyczne na froncie delaminacji jest takie samo jak w przypadku bez tarcia i równe  $\sigma_{cr}$ . A zatem tarcie na zdelaminowanym odcinku paska nie wpływa na lokalne naprężenie krytyczne na granicy strefy zdelaminowanej. Jest to oczywiście odzwierciedleniem ogólnej prawidłowości udowodnionej w rozdziale 2.2.2.

Proces obciążania paska wygląda więc następująco. Dla  $\sigma_a < \sigma_{cr}$  warunek delaminacji nie jest spełniony i pasek nie odkształca się. Gdy przyłożone obciążenie przekracza  $\sigma_{cr}$  następuje delaminacja i długość strefy zdelaminowanej rośnie wraz z rosnącym obciążeniem. Zachodzą wtedy zależności

$$s = \frac{A(\sigma_a - \sigma_{cr})}{a_c \tau_s}, \quad u_a = \frac{A(\sigma_a^2 - \sigma_{cr}^2)}{2E a_c \tau_s}, \quad \sigma_a > \sigma_{cr}.$$

## 4.2.2 Podłoże sprężyste

Rozważmy teraz sprężystą warstwę kontaktową zdelaminowaną na odcinku  $-s < z < 0$ . Na początku założymy, że o propagacji strefy zdelaminowanej decyduje lokalne naprężenie styczne  $\tau = \tau_m > \tau_s$  (wytrzymałościowy warunek delaminacji). W strefie sprężystej (nie zdelaminowanej)  $-\infty < z < -s$  rozwiązanie (4.5) przyjmuje postać

$$\tau = \tau_m e^{r(z+s)}, \quad \sigma = \sigma_m e^{r(z+s)}, \quad u = u_m e^{r(z+s)} \quad (4.9)$$

natomiast w strefie poślizgu (zdelaminowanej)  $-s < z < 0$

$$\tau = \tau_s, \quad \sigma = \frac{a_c}{A} \tau_s z + \sigma_a, \quad u = u_m + \frac{A(\sigma_a^2 - \sigma_m^2)}{2E a_c \tau_s} + \frac{\sigma_a}{E} z + \frac{a_c \tau_s}{2EA} z^2, \quad (4.10)$$

przy czym zachodzą następujące związki

$$\sigma_m = \frac{1}{r} \frac{a_c}{A} \tau_m = \text{const}, \quad u_m = \frac{1}{r} \frac{\sigma_m}{E}, \quad s = \frac{A(\sigma_a - \sigma_m)}{a_c \tau_s}, \quad \sigma_a > \sigma_m.$$

Zastosujmy teraz energetyczny warunek delaminacji (4.7). Wykorzystując rozwiązanie (4.9) i (4.10) otrzymuje się

$$\begin{aligned} dL &= A \sigma_a \left( \frac{\sigma_m}{E} r \frac{\tau_s}{k} \right) ds, \\ dU &= dU^l + dU^s, \\ dU^l &= \left( \frac{a_c \tau_s^2}{2k} - \frac{r A \tau_s \sigma_m}{2k} \right) ds, \\ dU^s &= \left( \frac{A \sigma_m^2}{2E} - \frac{r A \tau_s \sigma_m}{2k} \right) ds, \\ dD^f &= \int_{-s}^0 a_c \tau_s \left( \frac{\partial u}{\partial s} ds \right) dz = \left( \frac{a_c \tau_s \sigma_m}{E} - \frac{r a_c \tau_s^2}{k} \right) s ds, \\ dD^d &= a_c \Gamma ds, \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdzie  $dU^l$  i  $dU^s$  oznaczają odpowiednio przyrosty energii sprężystej podłoża sprężystego i paska. Podstawienie wyrażeń (4.11) do warunku (4.7) pozwala wyznaczyć krytyczne naprężenie w pasku na granicy strefy zdelaminowanej  $\sigma_{cr}^e = \sigma_m = \sigma_a - \frac{a_c}{A} \tau_s s$

$$(\sigma_{cr}^e)^2 = \sigma_{cr}^2 + \sigma_l^2,$$

gdzie

$$\sigma_{cr} = \sqrt{2 \frac{a_c}{A} E \Gamma}, \quad \sigma_l = \frac{a_c \tau_s}{r A}.$$

Jak widać również w przypadku paska na podłożu sprężystym, lokalne naprężenie krytyczne  $\sigma_{cr}^e$  na końcu strefy odspojonej nie zależy od długości strefy poślizgu. W stosunku do przypadku paska na podłożu kruchym jego wartość została jedynie zmodyfikowana o człon  $\sigma_l$  związany z energią sprężystą podłoża ścinanego siłami tarcia  $\tau_s$  (w strefie poślizgu).

Krytyczne obciążenie końca paska ma postać analogiczną do równania (4.8) dla paska na podłożu kruchym:

$$\sigma_{acr} = \frac{a_c}{A} \tau_s s + \sqrt{\sigma_{cr}^2 + \sigma_l^2} = \frac{a_c}{A} \tau_s s + \sigma_{cr}^e$$

Tak więc, dla prostego przypadku delaminacji paska od podłoża, energetyczny warunek delaminacji redukuje się do warunku wytrzymałościowego, a krytyczna wartość naprężenia stycznego w podłożu sprężystym wyraża się wzorem

$$\tau_m = \frac{k \sigma_{cr}^e}{r E}.$$

Do tej pory dyskutowany był jedynie przypadek paska z monotonicznie rosnącym obciążeniem. Odciążenie a następnie dociążenie związane jest z powstawaniem i ewolucją stref przylegania (zamrożonego poślizgu) oraz powrotnego poślizgu (o kierunku przeciwnym do początkowego). Rysunek 4.3 przedstawia ewolucję kontaktowych naprężeń stycznych podczas obciążania, a następnie odciążania paska na podłożu sprężystym. Rysunek 4.4 przedstawia pętlę histerezy na płaszczyźnie obciążenie-przemieszczenie.

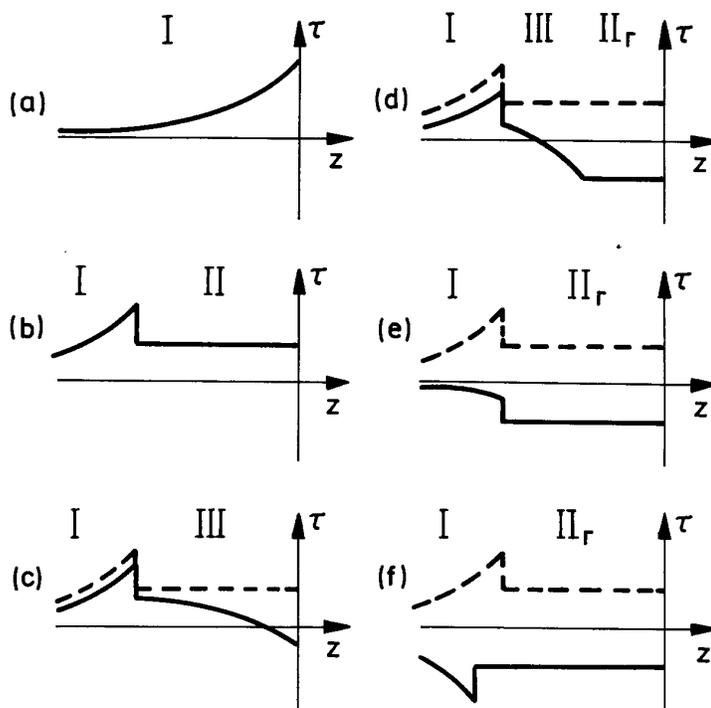
Początkowo, dla  $\sigma_a < \sigma_{acr}^e$  (ścieżka 0–1), układ reaguje sprężystością (rys. 4.3(a)). Następnie, wraz ze wzrostem obciążenia następuje delaminacja i poślizg w strefie zdelaminowanej (rys. 4.3(b); ścieżka 1–2 na rys. 4.4). Podczas odciążania delaminacja jest zahamowana a kolejne rysunki 4.3(c,d,e) odpowiadają ścieżkom 2–3, 3–4 oraz 4–5. Dalsze odciążanie poza punkt 5 powoduje ponowną delaminację (rys. 4.3(f)) — podobnie jak podczas obciążania 1–2 (rys. 4.3(b)). Z kolei dociążenie paska powoduje zamknięcie pętli histerezy.

Pętla histerezy dla paska na podłożu kruchym jest podobna do tej z rysunku 4.4 z tą różnicą, że odcinek 0–1 jest pionowy (nieskończona sztywność podłoża), a odcinki 2–3 oraz 5–3' redukują się do punktów.

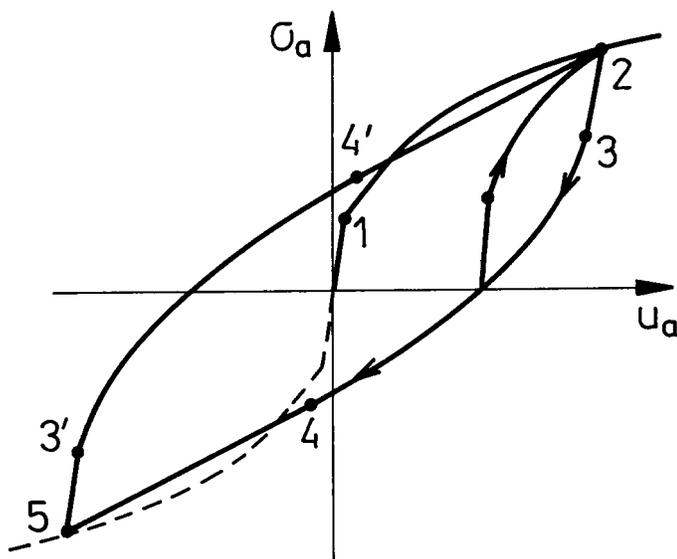
### 4.3 Obciążenie termiczne paska na podłożu ciernym

Obciążenia termiczne mogą pojawić się na skutek zmian temperatury gdy pasek i podłoże mają różne temperatury lub różne współczynniki rozszerzalności cieplnej. Obciążenie termiczne jednorodne wzdłuż długości paska może być zastąpione równoważnym mu obciążeniem mechanicznym przyłożonym do brzegu ciała.

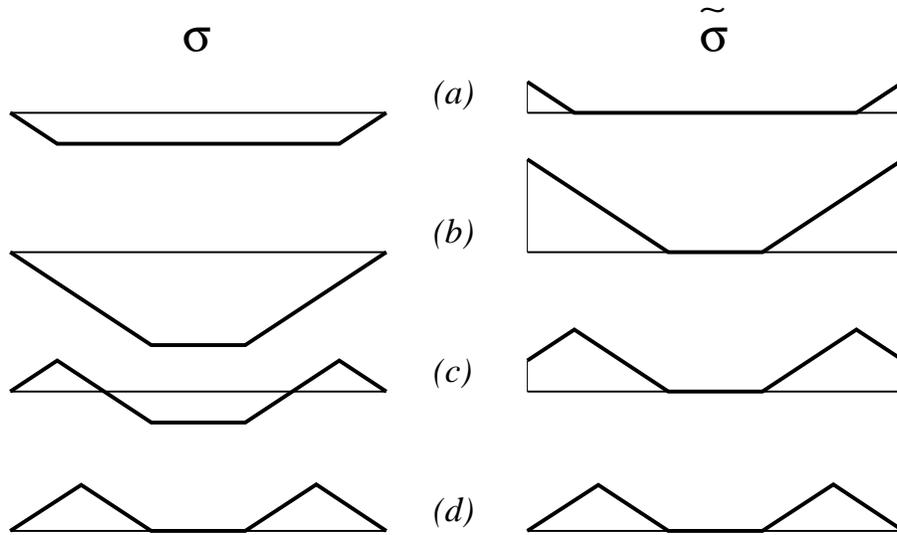
Rozważmy pasek spoczywający na sztywnym podłożu, poddany obciążeniu termicznemu. W chwili początkowej pasek jest nieodkształcony:  $u = \sigma = 0$ . Jego jedynym



Rysunek 4.3: Ewolucja naprężenia stycznego w warstwie kontaktowej podczas obciążania i odciążania (I — strefa sprężystego przylegania, II — strefa poślizgu, II<sub>r</sub> — strefa poślizgu powrotnego, III — strefa przylegania).



Rysunek 4.4: Krzywe obciążenie-przemieszczenie wraz z pętlami histerezy podczas odciążania i dociążania.



Rysunek 4.5: Rzeczywiste  $\sigma$  i fikcyjne  $\tilde{\sigma}$  naprężenia w pasku podczas pełnego cyklu obciążenie-odciążenie wymuszenia termicznego: (a) i (b) obciążanie, (c) i (d) odciążanie.

obciążeniem jest jednorodny przyrost temperatury  $\Delta T$  i związane z nim odkształcenia cieplne. Związek między naprężeniami a odkształceniami w pasku ma postać

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha\Delta T) = E\varepsilon - \sigma_T,$$

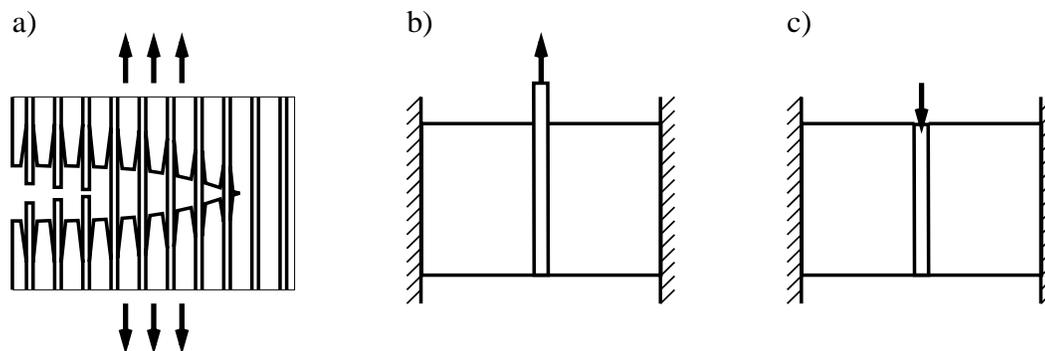
gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej paska, a  $\sigma_T = E\alpha\Delta T$  jest zastępczym naprężeniem termicznym. Wprowadzając fikcyjne naprężenie  $\tilde{\sigma}$  wyrażone wzorem:

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon = \sigma + \sigma_T$$

problem paska z wymuszeniem termicznym można zastąpić czysto mechanicznym problemem paska obciążonego na końcach naprężeniem  $\tilde{\sigma}_a = \sigma_T$ . Pasek obciążony takim fikcyjnym naprężeniem i pasek z wymuszeniem termicznym mają takie same pola przemieszczeń oraz długości stref poślizgu. Rozkład naprężeń w pasku w obu przypadkach pokazany jest na rysunku 4.5 dla pełnego cyklu obciążenie-odciążenie. Należy zwrócić uwagę, że rozwiązanie dla naprężenia fikcyjnego  $\tilde{\sigma}$  dokładnie pokrywa się z rozwiązaniem dla paska obciążonego naprężeniem przyłożonym do końca.

#### 4.4 Włókno w matrycy — efekt Poissona

Mimo swojej prostoty model paska na podłożu z tarciem znalazł zastosowanie w rzeczywistym problemie technicznym, mianowicie w zagadnieniu wyciągania włókna z matrycy (ang. *fiber pull-out*) w kompozytach zbrojonych włóknami. Wybór modelu podłoża zależy od własności kompozytu. W szczególności dla kompozytów o kruchej matrycy (kompozyty ceramiczne, kompozyty o matrycy na bazie cementu, itp.) szerokie zastosowanie



Rysunek 4.6: Współpraca włókien z matrycą w okolicy szczeliny — rys. (a). Eksperymentalne badanie własności mechanicznych powierzchni styku włókna i matrycy: (b) wyciąganie, (c) wciskanie włókna.

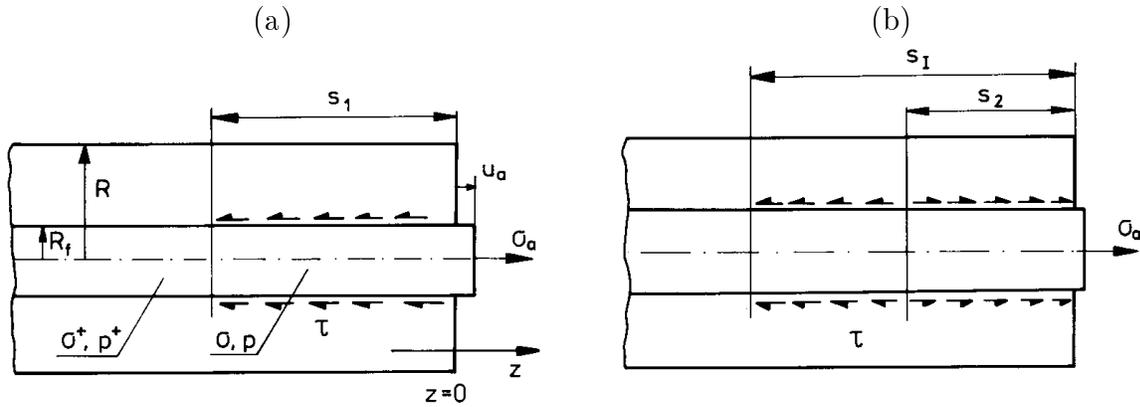
znalazł model paska na podłożu z tarcie. W bieżącym rozdziale oraz w dwóch kolejnych omówione są wyniki (Stupkiewicz [105]) dotyczące modelowania zagadnienia wyciągania włókna z matrycy.

W większości kompozytów ceramicznych połączenie między włóknem i matrycą jest bardzo słabe (mała jest energia potrzebna do odspojenia) i głównym oddziaływaniem na powierzchni styku jest tarcie. Toteż pierwszym, najprostszym zastosowanym modelem był przedstawiony w rozdziale 4.1 model paska na podłożu z tarcie, w którym kontaktowe naprężenie styczne przyjmowano jako stałe.

Kompozyty ceramiczne zachowują dobre własności mechaniczne w bardzo wysokich temperaturach — do 1500–1700°C (kompozyty węglowo-węglowe nawet w temperaturach powyżej 2000°C). Dzięki temu są one bardzo atrakcyjnym materiałem konstrukcyjnym z szerokimi zastosowaniami w technice lotniczej i kosmicznej. Na własności mechaniczne kompozytu jako całości decydujący wpływ mają oddziaływania między włóknem a matrycą (Evans, Marshall [26]). Dzięki odpowiedniemu doborowi parametrów materiałowych i technologicznych kompozyt może charakteryzować się doskonałą wytrzymałością na pękanie, mimo że składowe materiały matrycy i włókna są kruche.

Kompozyty ceramiczne zawdzięczają swoją wysoką odporność na pękanie zjawisku powstrzymywania rozwoju szczeliny w matrycy przez włókna biegnące w poprzek szczeliny (ang. *crack bridging effect*), tak jak to zostało pokazane na rysunku 4.6. Włókna łączące przeciwne strony szczeliny ulegają odspojeniu w sąsiedztwie szczeliny, a siły tarcia towarzyszące poślizgom łagodnie rozpraszają naprężenia dzięki czemu rozwój szczeliny jest hamowany. Oczywiście jest więc, że wielkość sił tarcia między włóknem i matrycą ma decydujący wpływ na własności kompozytu. Zbyt duże tarcie może spowodować zerwanie włókna, natomiast słabe tarcie może w niewystarczający sposób przeciwdziałać rozwojowi szczeliny.

Metody eksperymentalnego badania własności warstwy rozgraniczającej włókno i matrycę bazują na dwóch prostych schematach: wyciągania lub wciskania pojedynczych włókien (rys. 4.6b,c). Bliższe rzeczywistości warunki otrzymuje się w bardziej złożonych testach — przy wyciąganiu wielu włókien jednocześnie.



Rysunek 4.7: Osiowo-symetryczny model włókna w matrycy: (a) obciążanie; (b) strefy poślizgów pierwotnych i wsteczne w czasie odciążania.

Wraz z rozwojem metod eksperymentalnych powstawały modele teoretyczne pozwalające interpretować wyniki. Najbardziej zaawansowany model wyciągania włókna z matrycy został przedstawiony przez Hutchinsona i Jensena [38]. Jest on ograniczony do kompozytów ze ściskającym naprężeniem normalnym na powierzchni styku włókna i matrycy. Naprężenia te powstają podczas chłodzenia kompozytu w procesie wytwarzania na skutek różnych współczynników rozszerzalności cieplnej włókna i matrycy. W modelu Hutchinsona i Jensena [38] uwzględnione zostały: skończona energia odspojenia, osiowe naprężenia resztkowe we włóknie oraz zmiana naprężeń normalnych (promieniowych) na skutek naprężeń osiowych we włóknie (efekt Poissona). Model pozwala opisać zarówno wyciąganie pojedynczego jak i wielu włókien. Zastosowano dwa modele tarcia — ze stałym naprężeniem tnącym oraz model tarcia Coulomba, w którym naprężenia ciernie zmieniają się wraz ze zmianami naprężeń normalnych do powierzchni kontaktu. Liang i Hutchinson [59] dostosowali model Hutchinsona i Jensena do przypadku wciskania włókna.

W bieżącym rozdziale przedstawione zostaną oba modele [38, 59] jako podstawa dla nowego modelu uwzględniającego dylatację warstwy kontaktowej. Model zostanie wprowadzony w nowej, bezwymiarowej formie w sposób jednolity dla wyciągania i wciskania pojedynczego włókna zarówno przy obciążeniach monotonicznych jak i z cyklami odciążenia i obciążenia.

#### 4.4.1 Sformułowanie problemu

Osiowo-symetryczny model współpracy włókna z matrycą przedstawiony jest na rysunku 4.7(a). Stan naprężenia we włóknie jest opisany przez naprężenie osiowe  $\sigma$  i promieniowe  $\sigma_r$  (równe obwodowemu). Dla modelu pojedynczego włókna można przyjąć, że  $R_f/R = 0$ , i zaniedbać wpływ naprężeń ciernych na stan matrycy, czyli przyjąć, że w kierunku osiowym matryca nie odkształca się. Zakłada się ponadto, że w każdym przekroju matrycy prostopadłym do osi układu panuje płaski stan odkształcenia. Oddziaływania między włókniem i matrycą ograniczają się do ciśnienia normalnego  $p = -\sigma_r$  oraz naprężeń stycznych tarcia  $\tau$ .

W kompozycie przed obciążeniem istnieje początkowy stan naprężenia wywołany sprężystymi odkształceniami niedopasowania w kierunku promieniowym  $\epsilon_r^T$  oraz osiowym  $\epsilon_z^T$ . Odkształcenia te są wynikiem różnych współczynników rozszerzalności cieplnej włókna i matrycy. Początkowy stan naprężenia jest opisany przez równania

$$\begin{aligned}\sigma^+ &= -a_2 E_m \epsilon_r^T \\ \sigma_r^+ &= -a_4 E_m \epsilon_r^T = -p^+.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Bezwymiarowe współczynniki  $a_2$  i  $a_4$  zostały podane przez Hutchinsona i Jensena [38] i zależą od własności sprężystych włókna i matrycy, od udziału objętościowego włókien w kompozycie oraz od współczynnika  $\lambda = \epsilon_r^T / \epsilon_z^T$ . Współczynnik  $\lambda$  może się różnić od jedności na skutek anizotropii włókna lub na skutek odkształceń plastycznych w matrycy powstałych podczas chłodzenia kompozytu w trakcie wytwarzania.

Po przyłożeniu obciążenia, na części długości włókna następuje odspojenie i całe włókno dzieli się na dwie strefy: strefę odspojoną (poślizgu)  $-s_1 < z < 0$  i strefę nieodspojoną (idealnego połączenia)  $z < -s_1$  (rys. 4.7(a)). W rozważanym przypadku obciążania pojedynczego włókna ( $R_f/R = 0$ ), można przyjąć, że w strefie nieodspojonej początkowy stan naprężenia pozostaje niezmienny. Natomiast w strefie odspojonej, na skutek odkształceń promieniowych we włóknie, wywołanych zmianą naprężeń osiowych i efektem Poissona, zmienia się również naprężenie normalne  $p$  na powierzchni kontaktu. Z rozwiązania zadania Lamé'go dla przekrojów prostopadłych do osi włókna otrzymuje się (por. [38])

$$\Delta p = -b_1 \Delta \sigma, \quad \Delta \varepsilon = b_2 \Delta \sigma E_f,\tag{4.13}$$

gdzie  $\varepsilon$  jest osiowym odkształceniem włókna, a  $\Delta$  oznacza zmiany względem stanu początkowego zdefiniowane jako:

$$\Delta \sigma = \sigma - \sigma^+, \quad \Delta p = p - p^+, \quad \Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^+.$$

Bezwymiarowe współczynniki  $b_1$ ,  $b_2$  są dla izotropowych materiałów włókna i matrycy równe

$$b_1 = \frac{\nu_f E_m}{(1 + \nu_m) E_f + (1 - \nu_f) E_m}, \quad b_2 = 1 - 2\nu_f b_1,$$

gdzie  $E_m$ ,  $E_f$ ,  $\nu_m$ ,  $\nu_f$  są modułami Younga i współczynnikami Poissona matrycy i włókna.

Równanie równowagi włókna (4.1) ma postać

$$\sigma' - \frac{2}{R_f} \tau = 0,\tag{4.14}$$

a naprężenie tnące  $\tau$  dane jest prawem tarcia Coulomba ze współczynnikiem tarcia  $\mu$

$$\tau = \mu p \operatorname{sign} \dot{u}.$$

W strefie odspojonej  $-s_1 < z < 0$  obciążanego monotonicznie włókna poślizgi i siły tarcia mają stały zwrot. Podczas odciążania powstaje nowa strefa poślizgów powrotnych (rys. 4.7(b)) i w tej strefie poślizgi i siły tarcia również mają ustalony zwrot — przeciwny

do ich zwrotu w strefie poślizgów pierwotnych. Zatem znak sił tarcia w każdej ze stref poślizgu można zapisać w postaci

$$\text{sign} \dot{u} = \eta \vartheta = \pm 1,$$

gdzie

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{dla wyciągania włókna} \\ -1 & \text{dla wciskania włókna} \end{cases} \quad \vartheta = \begin{cases} 1 & \text{dla obciążania} \\ -1 & \text{dla odciążania} \\ 1 & \text{dla dociążania} \\ \dots & \end{cases}$$

Równanie równowagi (4.14) oraz związek kinematyczny  $u' = \Delta \varepsilon$ , gdzie  $\Delta \varepsilon$  dane jest drugim z równań (4.13), można teraz zapisać w postaci bezwymiarowej

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\sigma}' &= \eta \vartheta (1 - \Delta \bar{\sigma}) \\ \bar{u}' &= \Delta \bar{\sigma}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

gdzie użyto następujących oznaczeń:

$$\bar{\sigma} = \frac{b_1 \sigma}{p^+}, \quad \bar{u} = \frac{b_1 E_f}{b_2 p^+} \alpha u, \quad \bar{z} = \alpha z, \quad \alpha = \frac{2\mu b_1}{R_f}.$$

W równaniach (4.15), pochodne wielkości bezwymiarowych ( $\Delta \bar{\sigma}$ ,  $\bar{u}$ ) zdefiniowane są jako  $\Delta \bar{\sigma}' = d\Delta \bar{\sigma}/d\bar{z}$ , w odróżnieniu od pochodnych wielkości wymiarowych ( $\Delta \sigma$ ,  $u$ ) różniczkowanych względem współrzędnej  $z$ :  $\Delta \sigma' = d\Delta \sigma/dz$ .

Rozwiązanie równań różniczkowych (4.15) nie nastrocza żadnych trudności po przyjęciu warunków brzegowych odpowiednich dla programu obciążenia.

#### 4.4.2 Obciążanie

Podczas monotonicznego obciążania włókna następuje propagacja szczeliny odspajającej wzdłuż powierzchni styku włókna z matrycą i rośnie długość strefy odspojonej. Podobnie jak w modelu paska na kruchym podłożu (rozd. 4.2.1) przy końcu szczeliny naprężenie osiowe we włóknie doznaje skoku. Hutchinson i Jensen [38] wyznaczyli skok naprężenia  $\gamma$  jako:

$$\gamma = 2\sqrt{\frac{\Gamma E_f}{b_2 R_f}}. \quad (4.16)$$

Równanie (4.16) określające  $\gamma$  redukuje się do równania (4.6) na naprężenie krytyczne propagacji delaminacji paska na podłożu kruchym ( $b_2 = 1$ ,  $a_c/A = 2/R_f$ ). Dla włókna o niezerowym początkowym naprężeniu osiowym  $\sigma^+$  naprężenie krytyczne na końcu strefy odspojonej  $\sigma^-$  jest równe

$$\sigma^- = \sigma^+ + \eta \gamma. \quad (4.17)$$

Powyższy wynik jest dobrym przybliżeniem dla przypadku propagacji szczeliny odspajającej w stanie ustalonym, gdy odległość końca szczeliny od powierzchni swobodnych kompozytu jest większa od około jednej średnicy włókna (por. [38, 59]).

Zależność (4.17) oraz warunek zerowych przemieszczeń na końcu strefy odspojonej tworzą warunki brzegowe równań (4.15):

$$\begin{aligned} \bar{z} = -\bar{s}_1 : \quad \Delta\bar{\sigma} &= \bar{\sigma}^- - \bar{\sigma}^+ = \eta\bar{\gamma} \\ \bar{u} &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ze scałkowania równań (4.15) otrzymuje się następujące rozkłady naprężenia osiowego  $\sigma$  i przemieszczenia  $u$  w strefie odspojonej włókna:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\sigma} &= \Delta\bar{\sigma}(\bar{z}, \bar{s}_1) = (\eta\bar{\gamma} - 1)e^{-\eta(\bar{z} + \bar{s}_1)} + 1 \\ \bar{u} &= \bar{u}(\bar{z}, \bar{s}_1) = (\eta - \bar{\gamma})[e^{-\eta(\bar{z} + \bar{s}_1)} - 1] + \bar{z} + \bar{s}_1 \end{aligned}$$

Po oznaczeniu przyłożonego obciążenia przez  $\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}(0, \bar{s}_1)$  można wyznaczyć długość strefy odspojonej  $\bar{s}_1$

$$\bar{s}_1 = -\eta \ln \left( \frac{1 - \Delta\bar{\sigma}_a}{1 - \eta\bar{\gamma}} \right),$$

a zależność obciążenie-przemieszczenie przyjmuje postać

$$\bar{u}_a = -\eta \left[ \ln \left( \frac{1 - \Delta\bar{\sigma}_a}{1 - \eta\bar{\gamma}} \right) + \Delta\bar{\sigma}_a - \eta\bar{\gamma} \right]. \quad (4.19)$$

Skutkiem ściskających naprężeń początkowych włókna może być samoistne odspojenie części włókna po utworzeniu powierzchni swobodnej kompozytu zanim jeszcze włókno zostanie obciążone. Ma to miejsce, gdy spełniony jest warunek  $\bar{\sigma}^+ + \bar{\gamma} < 0$  (Marshall [62]). Przemieszczenie końca włókna na skutek samoistnego odspojenia  $\bar{u}_a^*$  można wyznaczyć z równania (4.19) przez podstawienie  $\bar{\sigma}_a = 0$ .

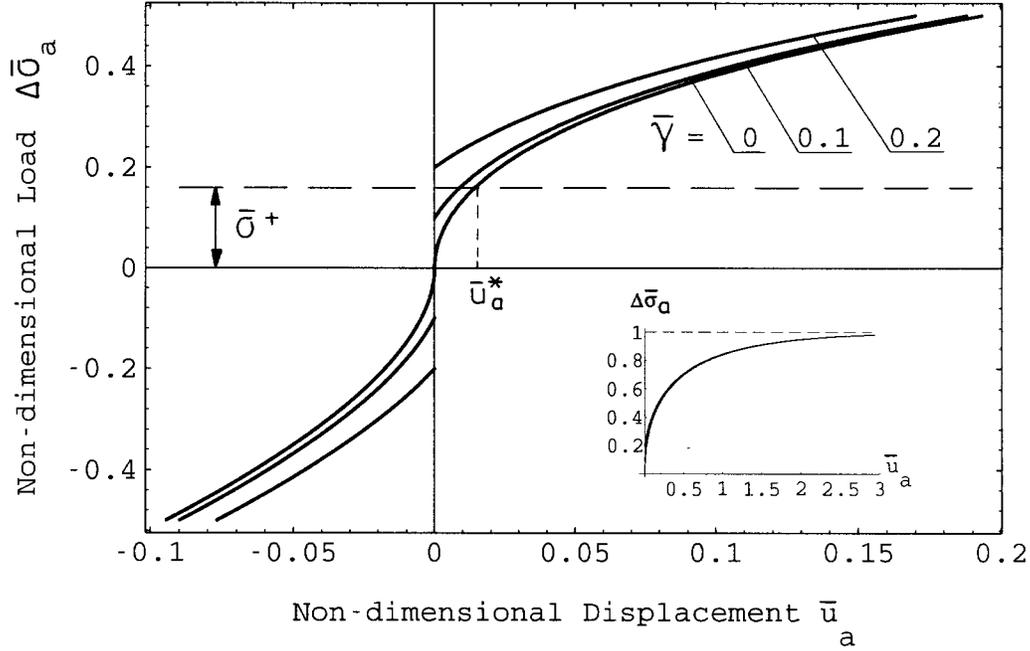
Zatem, w przypadku wyciągania włókna z matrycy, po przyłożeniu obciążenia długość strefy odspojonej dalej rośnie, a “mierzone” przemieszczenie  $\Delta\bar{u}_a$  (czyli jego przyrost na skutek przyłożonego obciążenia) jest równe

$$\Delta\bar{u}_a = \bar{u}_a - \bar{u}_a^* = - \left[ \ln \left( \frac{\bar{\sigma}_a - \bar{\sigma}^+ - 1}{-\bar{\sigma}^+ - 1} \right) + \bar{\sigma}_a \right].$$

Jak więc widać zależność  $\Delta\bar{u}_a(\bar{\sigma}_a)$  nie zależy od  $\bar{\gamma}$  a więc i od będącej własnością materiałową energii  $\Gamma$  potrzebnej do odspojenia włókna od matrycy. Własność tą opisał Marshall [62].

Rysunek 4.8 przedstawia zależność  $\Delta\bar{\sigma}_a(\bar{u}_a)$  dla różnych wartości skoku naprężenia osiowego  $\gamma$ . Ponieważ  $\bar{\sigma}_a = \Delta\bar{\sigma}_a + \bar{\sigma}^+$ , krzywe  $\bar{\sigma}_a(\bar{u}_a)$  powstają przez przesunięcie osi  $\bar{u}_a$  o wielkość  $\bar{\sigma}^+$  (linia przerywana na rys. 4.8). Na rysunku pokazane jest również samoistne przemieszczenie  $\bar{u}_a^*$  dla  $\gamma = 0$ .

Inna ważna cecha powyższego modelu była już dyskutowana przez wielu autorów (np. Hutchinson, Jensen [38]; Kerans, Parthasarathy [48]). Mianowicie, przy wyciąganiu włókna z matrycy obciążenie ma górną granicę  $\Delta\bar{\sigma}_{a(max)} = 1$  (lub równoważnie  $\bar{\sigma}_{a(max)} = 1 + \bar{\sigma}^+$ ), co pokazane jest na rys. 4.8. Obciążenie to odpowiada stanowi, w którym naciski normalne  $p$  na powierzchni międzyfazowej spadają do zera na obciążonym



Rysunek 4.8: Wpływ  $\gamma$  na krzywe obciążenie-przemieszczenie.

końcu włókna (czyli tam, gdzie naprężenia rozciągające są największe). Wtedy propagacja odspojenia następuje bez dalszego wzrostu obciążenia.

Oczywiście efekt ten występuje tylko w przypadku wyciągania włókna z matrycy. Przy wciskaniu włókna, naprężenia ściskające we włóknie powodują jego pęcznienie, i w konsekwencji wzrost (a nie spadek) nacisków  $p$ .

#### 4.4.3 Odciążanie i dociążanie

Gdy dla pewnego maksymalnego obciążenia  $\bar{\sigma}_a^I$  rozpoczyna się odciążanie, powstaje nowa strefa poślizgu  $-\bar{s}_2 < \bar{z} < 0$  propagująca od końca włókna. Podobnie z dociążaniem związana jest strefa poślizgów  $-\bar{s}_3 < \bar{z} < 0$  oraz kolejny punkt zwrotny obciążenia  $\bar{\sigma}_a^{II}$ .

Jeżeli długości stref  $\bar{s}_2$  oraz  $\bar{s}_3$  nie przekraczają długości pierwotnej strefy  $\bar{s}_1$  warunkami brzegowymi dla równań (4.15) są warunki ciągłości naprężenia  $\bar{\sigma}$  i przemieszczenia  $\bar{u}$  na granicach stref poślizgu  $\bar{z} = -\bar{s}_2$  dla odciążania lub  $\bar{z} = -\bar{s}_3$  dla dociążania. Wtedy długość aktywnej strefy poślizgu  $\bar{s}_2$  lub  $\bar{s}_3$  można wyznaczyć jako

$$\bar{s}_i = -\frac{1}{2}\eta\vartheta \ln \left( \frac{1 - \Delta\bar{\sigma}_a}{1 - \Delta\bar{\sigma}_a^{(i-1)}} \right),$$

a zależność obciążenie-przemieszczenie ma postać

$$\bar{u}_a = \bar{u}_a^{(i-1)} + \eta\vartheta \left[ (1 - \Delta\bar{\sigma}_a) + (1 - \Delta\bar{\sigma}_a^{(i-1)}) - 2\sqrt{(1 - \Delta\bar{\sigma}_a)(1 - \Delta\bar{\sigma}_a^{(i-1)})} \right],$$

gdzie  $\bar{\sigma}_a^{(i-1)}$  i  $\bar{u}_a^{(i-1)}$  oznaczają obciążenie i przemieszczenie w ostatnim punkcie zwrotnym obciążenia. Otrzymane pętle histerezy są zamknięte, podobnie jak w prostym przypadku paska na kruchym podłożu z tarciem (rozd. 4.2.1).

W przypadku gdy długość  $\bar{s}_2$  strefy związanej z odciążaniem osiąga długość  $\bar{s}_1$  strefy poślizgów pierwotnych, następuje wymazanie pamięci kontaktu, a kontynuowany proces odciążania staje się procesem obciążania, któremu towarzyszy postępujące odspajanie.

## 4.5 Włókno w matrycy — dylatacja warstwy kontaktowej

### 4.5.1 Oddziaływanie nierówności kontaktujących się powierzchni

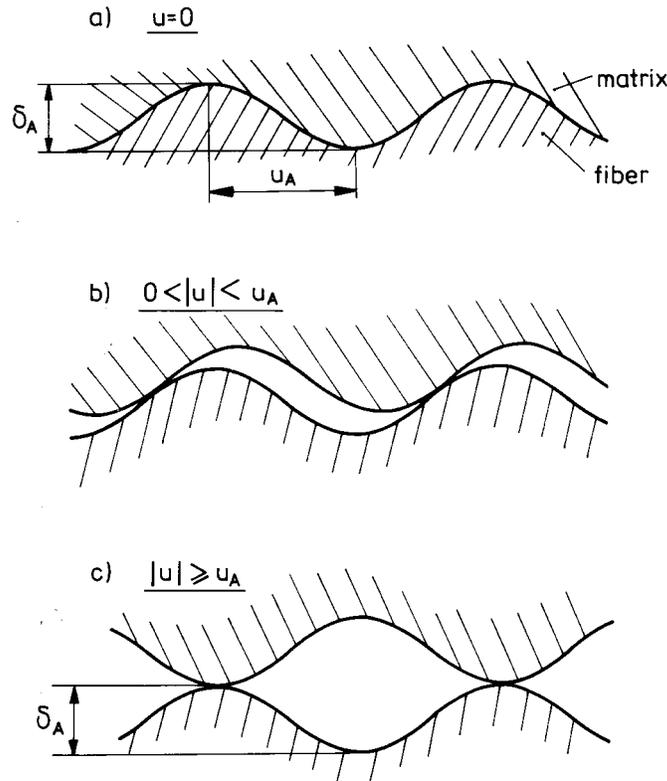
Model przedstawiony w poprzednim rozdziale zakłada, że powierzchnia kontaktu włókna z matrycą jest gładka. W niektórych przypadkach takie założenie jest usprawiedliwione, jednak tam gdzie względne przemieszczenia (poślizgi) są tego samego rzędu co wymiar charakterystyczny nierówności powierzchni kontaktowej, wzajemne oddziaływanie nierówności może w zasadniczy sposób wpływać na efektywne własności powierzchni kontaktowej.

Można przyjąć, że powierzchnia kontaktu tworzona przez propagującą się szczelinę odspajającą posiada nierówności (na powierzchni włókna i matrycy), które “pasują” do siebie, gdy włókno jest w swoim położeniu początkowym. Jednak, gdy włókno się przesunie z położenia początkowego nierówności przestają pasować do siebie. W konsekwencji rośnie promieniowe niedopasowanie, a wraz z nim rośnie normalne ciśnienie kontaktowe i siły tarcia. Waga tego efektu została pokazana doświadczalnie [19, 43, 44]. Prace te opisują testy, w których włókno zostało wyciągnięte częściowo z matrycy, a następnie było wciskane z powrotem. Wykazano spadek sił tarcia gdy włókno wracało do swojego położenia początkowego, a następnie jego wzrost gdy włókno było przepychane w drugą stronę, poza położenie początkowe. Spadek siły wciskającej (równej siłom tarcia zsumowanym całej na długości włókna) występował przez czas gdy włókno przemieszczało się o dystans porównywalny z charakterystycznym wymiarem nierówności powierzchni włókna.

To, co jest zwykle traktowane jako powierzchnia rozgraniczająca włókno i matrycę, składa się z wielu warstw o zróżnicowanym składzie chemicznym, często niejednorodnych. W takich warunkach rzeczywista powierzchnia kontaktu może podczas odspajania powstawać na wiele różnych sposobów, a nierówności powierzchni kontaktowej mogą mieć wiele źródeł (Jero i in. [44]). W szczególności nierówności powierzchni mogą odzwierciedlać nierówności samego włókna lub nieregularną powierzchnię szczeliny odspajającej propagującej się przez poszczególne warstwy na styku włókna z matrycą.

Gdy względne przemieszczenia na powierzchni kontaktu są duże, wpływ oddziaływania nierówności można uwzględnić jako stały dodatkowy człon ciśnienia normalnego  $p^+$  — tak jak to zrobili na przykład Kerans i Parthasarathy [48]. Jednak w wielu testach długości poślizgu są rzędu kilku mikronów (np. Marshall i in. [63]), a więc są porównywalne z rozmiarami nierówności. Można się więc spodziewać, że zmian niedopasowania promieniowego w funkcji zmieniających się względnych przemieszczeń na powierzchni kontaktowej.

Rysunek 4.9 przedstawia schematycznie współpracę nierówności gdy powierzchnie wzajemnie się przemieszczają. Obserwowany eksperymentalnie fakt, że po początkowym



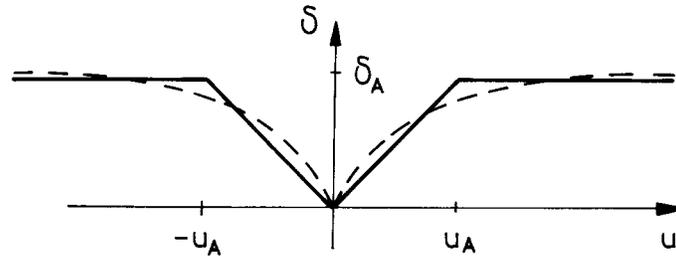
Rysunek 4.9: Wzrost niedopasowania promieniowego podczas względnego przemieszczania się powierzchni z nierównościami.

wzroście nie ma spadku niedopasowania (jak można by wnioskować z prostego schematu z rysunku 4.9), można wytłumaczyć nieperiodycznym rozkładem nierówności. Tak więc po względnym przemieszczeniu większym od charakterystycznego wymiaru nierówności, powierzchnie z nierównościami “nie pasują” już do siebie i promieniowe niedopasowanie nie spada.

Wpływ oddziaływania nierówności na współpracę włókna z matrycą można uwzględnić zakładając, że powierzchnia kontaktu jest cienką warstwą dylatacyjną. Oznaczając przez  $\delta$  grubość warstwy ( $\delta = 0$  gdy włókno jest w swoim położeniu początkowym) można uogólnić równania (4.13) — tak aby opisywały dodatkowo efekty związane z dylatacją warstwy kontaktowej. Z rozwiązania zadania Lamégo dla każdego przekroju poprzecznego włókna i matrycy otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \Delta p &= -b_1 \Delta \sigma + d_1 E_f (\delta / R_f) \\ \Delta \varepsilon &= (b_2 / E_f) \Delta \sigma + d_2 (\delta / R_f) \end{aligned} \quad (4.20)$$

gdzie współczynniki  $d_1$  i  $d_2$  (podobnie jak  $b_1$  i  $b_2$ ) zależą od własności sprężystych włókna



Rysunek 4.10: Odcinkami liniowy model dylatacji warstwy kontaktowej. Linia przerywaną schematycznie pokazano bardziej realistyczną gładką funkcję dylatacji.

i matrycy. Dla izotropowego włókna i matrycy są one równe

$$d_1 = \frac{b_1}{\nu_f}, \quad d_2 = 2b_1.$$

Po uwzględnieniu dylatacji warstwy kontaktowej, bezwymiarowe równania różniczkowe (4.15) przybierają postać:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\sigma}' &= \eta \vartheta [1 - \Delta \bar{\sigma} + H_1(\delta/R_f)] \\ \bar{u}' &= \Delta \bar{\sigma} + H_2(\delta/R_f), \end{aligned} \quad (4.21)$$

gdzie

$$H_1 = d_1 \frac{E_f}{p^+}, \quad H_2 = \frac{b_1 d_2}{b_2} \frac{E_f}{p^+}.$$

Parthasarathy i in. [84] przedstawili ostatnio podobny model uwzględniający wpływ nierówności. W modelu tym pominięto wpływ zmian niedopasowania promieniowego na odkształcenia osiowe włókna. Odpowiada to przyjęciu  $d_2 = 0$  w równaniu (4.20)<sub>2</sub>. Natomiast uwzględniono inny efekt pominięty w przedstawionym powyżej modelu. Mianowicie oprócz zmiany grubości warstwy kontaktowej wywołanej ślizganiem się po sobie dwóch nachylonych powierzchni nierówności uwzględniono, że kierunek działania lokalnych naprężeń kontaktowych (normalnych oraz stycznych naprężeń tarcia) jest obrócony względem osi włókna o kąt równy kątowi nachylenia tych powierzchni. Wpływ tego efektu jest jednak niewielki dla rzeczywistych nierówności, które mają kąty nachylenia rzędu  $1^\circ$ .

Aby opis był kompletny, potrzebny jest jeszcze model konstytutywny dylatacji  $\delta$ . W ogólnym przypadku, dylatacja kontaktowa zależy może od przemieszczeń względnych i od zużycia powierzchni. Jeśli przyjąć, zależy ona tylko od przemieszczeń względnych włókna i matrycy,  $\delta = \delta(u)$ , otrzymuje się model dylatacji odwracalnej.

### 4.5.2 Odcinkami liniowy model dylatacji

Prosty, odcinkami liniowy model dylatacji kontaktowej jest przedstawiony na rys. 4.10. Choć wyidealizowany, posiada dwie najważniejsze cechy. Dylatacja rośnie, gdy przemieszczenie jest mniejsze od charakterystycznej wartości  $|u| \leq u_A$ , i jest stała dla większych

przemieszczeń  $|u| > u_A$ . Jednocześnie liniowe związki pozwalają na analityczne rozwiązanie różniczkowych równań układu. Funkcję dylatacji można zapisać w postaci

$$\delta = \begin{cases} \frac{\delta_A}{u_A}|u| & \text{for } |u| \leq u_A \\ \delta_A & \text{for } |u| > u_A \end{cases} \quad (4.22)$$

gdzie  $\delta_A$  i  $u_A$  są parametrami modelu, których fizyczne znaczenie obrazuje rysunek 4.9. Tak długo jak przemieszczenia  $u$  mają stały znak wyrażenie  $|u|$  w równaniu (4.22) można zastąpić mu równoważnym:  $|u| = \eta u$ . Wtedy  $\delta = \eta(\delta_A/u_A)u$  dla  $|u| \leq u_A$  i równania (4.21) przyjmują postać

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{\sigma}' \\ \bar{u}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta\vartheta & \vartheta D_1 \\ 1 & \eta D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\sigma} \\ \bar{u} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \eta\vartheta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

gdzie bezwymiarowe współczynniki  $D_1$  i  $D_2$  są zdefiniowane jako

$$D_1 = \frac{b_2 d_1}{b_1} \frac{1}{\alpha R_f} \frac{\delta_A}{u_A}, \quad D_2 = d_2 \frac{1}{\alpha R_f} \frac{\delta_A}{u_A}$$

Rozwiązanie ogólne tego liniowego układu równań różniczkowych ma postać

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{\sigma} \\ \bar{u} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 C_i \begin{Bmatrix} \beta_i - \eta D_2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\beta_i z} + \frac{1}{D_1 + D_2} \begin{Bmatrix} D_2 \\ -\eta \end{Bmatrix}$$

gdzie  $C_i$  są stałymi całkowania a  $\beta_{1,2}$  wyrażają się wzorem

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -\eta(\vartheta - D_2) \pm \sqrt{(\vartheta + D_2)^2 + 4\vartheta D_1} \right]$$

Stałe całkowania należy wyznaczyć z warunków brzegowych (4.18) dla obciążania oraz z warunków ciągłości naprężenia  $\sigma$  i przemieszczenia  $u$  na granicy aktywnej strefy poślizgu dla odciążania i dociażania (analogicznie jak dla prostego paska na podłożu z tarciem). O ile wyznaczenie stałych całkowania dla procesu obciążania jest stosunkowo proste (ich wartości podane są w pracy [105]), o tyle w przypadku odciążania i dociażania przekształcenia są bardzo żmudne i praktycznie konieczne jest użycie programu komputerowego, takiego jak na przykład *Mathematica* (Wolfram [121]), który potrafi dokonywać przekształceń symbolicznych.

Otrzymane rozwiązanie jest znacznie bardziej skomplikowane niż rozwiązanie dla klasycznego modelu uwzględniającego tylko efekt Poissona (rozdz. 4.4). Otrzymuje się rozkłady naprężenia we włóknie  $\sigma$  i przemieszczenia  $u$  jako funkcje położenia  $z$ , długości aktywnej i wszystkich zamrożonych stref poślizgu oraz trzech parametrów  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $\bar{\gamma}$  zależących od własności kompozytu. Zależność obciążenia od przemieszczenia jest co prawda wyznaczona analitycznie w postaci parametrycznej — z długością aktywnej strefy poślizgu jako parametrem — jednakże wyznaczenie przemieszczenia dla danego obciążenia (lub odwrotnie) wymaga numerycznego obliczenia odpowiadającej im długości strefy poślizgu.

Gdy podczas monotonicznego obciążania ( $\vartheta = 1$ ) przemieszczenie  $\bar{u}$  przekroczy wartość  $\eta \bar{u}_A$ , wtedy zgodnie z przyjętym modelem dylatacji (4.22) na odcinku włókna, na

którym jest  $|\bar{u}| > \bar{u}_A$ , dylatacja jest stała i w rezultacie równania (4.21) przestają być sprzężone. W wyniku równania modelu stają się podobne do równań modelu klasycznego (4.15) i mają postać

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\sigma}' &= -\eta\Delta\bar{\sigma} + \eta(1 + \pi_\delta) \\ \bar{u}' &= \Delta\bar{\sigma} + \epsilon_\delta\end{aligned}\tag{4.23}$$

gdzie nowe człony  $\pi_\delta$  i  $\epsilon_\delta$  można interpretować jako, odpowiednio, dodatkowe normalne ciśnienie kontaktowe i dodatkowe odkształcenie osiowe wywołane wzrostem niedopasowania promieniowego  $\delta_A/R_f$ :

$$\pi_\delta = D_1\bar{u}_A = H_1\frac{\delta_A}{R_f} = d_1\frac{E_f}{p^+}\frac{\delta_A}{R_f}, \quad \epsilon_\delta = D_2\bar{u}_A = H_2\frac{\delta_A}{R_f} = \frac{b_1d_2}{b_2}\frac{E_f}{p^+}\frac{\delta_A}{R_f}$$

Oznaczając przez  $\bar{s}_A$  długość strefy odspojonej, a przez  $\bar{\sigma}_A$  obciążenie, dla których  $\bar{u}_a = \eta\bar{u}_A$ , otrzymuje się zależność obciążenie-przemieszczenie o charakterze podobnym do zależności otrzymanej dla modelu klasycznego (rozd. 4.4):

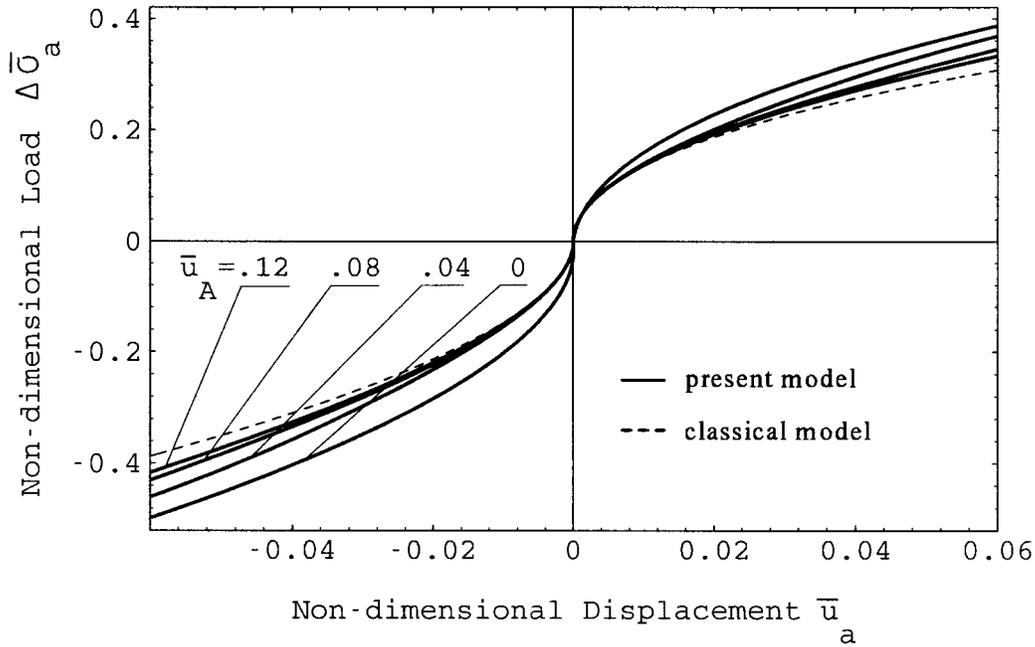
$$\bar{u}_a = \eta \left\{ \bar{u}_A - (1 + \pi_\delta + \epsilon_\delta) \ln \left[ \frac{(1 + \pi_\delta) - \Delta\bar{\sigma}_a}{(1 + \pi_\delta) - \Delta\bar{\sigma}_A} \right] + \Delta\bar{\sigma}_a - \Delta\bar{\sigma}_A \right\}.$$

Należy zwrócić uwagę, że  $\bar{s}_A$  i  $\bar{\sigma}_A$  są różne przy wyciąganiu i przy wciskaniu włókna. Równania (4.23) rozwiązane zostały z warunkami brzegowymi  $\Delta\bar{\sigma} = \Delta\bar{\sigma}_A$ ,  $\bar{u} = \eta\bar{u}_A$  dla  $\bar{z} = -\bar{s}_1 + \bar{s}_A$ .

Na rysunku 4.11 pokazany jest wpływ dylatacji warstwy kontaktowej na krzywe obciążenie-przemieszczenie przy wyciąganiu włókna. Poszczególne wykresy odpowiadają różnym wartościom  $\bar{u}_A$  przy stałym  $\delta_A$ . Przypadek  $\bar{u}_A = 0$  odpowiada modelowi Keransa i Parthasarathy'ego [48].

Wpływ zmieniającej się wraz z przemieszczeniem dylatacji na  $\bar{\sigma}$  rozkłady naprężenia we włóknie oraz normalnego naprężenia kontaktowego  $\bar{p} = p/p^+$  przedstawiony jest na rysunku 4.12. Podczas obciążania (wyciąganie) na skutek efektu Poissona średnica włókna maleje, ale jednocześnie dylatacja kontaktowa powoduje przeciwny efekt wzrostu niedopasowania. W rezultacie, ciśnienie kontaktowe  $\bar{p}$  doznaje mniejszych zmian niż w przypadku modelu klasycznego (linie kropkowane), a naprężenie we włóknie  $\bar{\sigma}$  jest prawie liniowe. Usprawiedliwia to częściowo użycie modelu ze stałym naprężeniem tarcia (tak jak dla prostego paska). Podczas odciążania (przerwane linie na rys. 4.12(b)) oraz dociążania (przerwane linie na rys. 4.12(d)) normalne ciśnienie kontaktowe  $\bar{p}$  zmienia się znacząco wzdłuż włókna. Dzieje się tak dlatego, że przemieszczenia powrotne podczas odciążania są niewielkie w porównaniu z przemieszczeniami po obciążeniu (a więc i zmiany dylatacji są niewielkie), natomiast naprężenie osiowe we włóknie spada znacząco (do zera na końcu włókna po całkowitym odciążeniu).

Wykresy wykonano dla materiału opisanego w następnym podrozdziale i dla zidentyfikowanych tam parametrów modelu:  $\bar{\sigma}^+ = -\bar{\gamma} = -0.123$ ,  $\delta_A/u_A = 0.0137$ ,  $\mu = 0.329$  and  $p^+ = 261\text{MPa}$ .



Rysunek 4.11: Wpływ parametru  $\bar{u}_A$  na charakterystyki obciążenie-przemieszczenie przy wyciąganiu włókna z matrycy ( $\delta_A = \text{const}$ ).

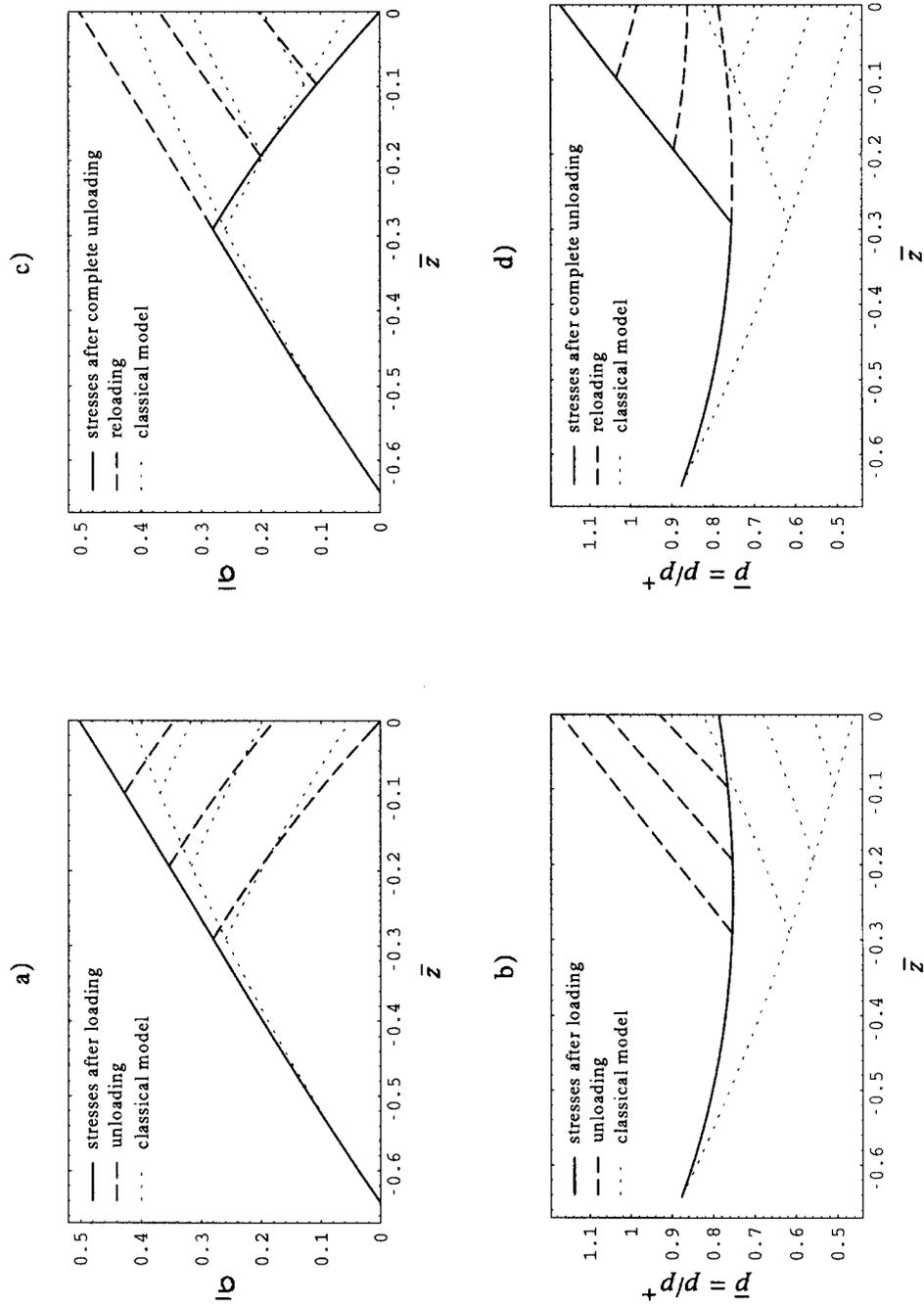
$E_m$	80 GPa
$E_f$	414 GPa
$\nu_m$	0.3
$\nu_f$	0.3
$R_f$	70 $\mu\text{m}$
udział obj. włókien	0.36
$b_1$	0.404
$b_2$	0.976

Tabela 4.1: Własności kompozytu  $\text{Ti}_3\text{Al}/\text{SiC}$ .

### 4.5.3 Identyfikacja parametrów modelu

Model współpracy włókna z matrycą przedstawiony w poprzednim rozdziale został użyty do opisu wyników doświadczalnych przedstawionych w pracy Marshalla i in. [63]. Własności użytego kompozytu o matrycy z glinianu tytanu ( $\text{Ti}_3\text{Al}$ ) zbrojonej włóknami  $\text{SiC}$  podane są w tabeli 4.1.

Program obciążenia pojedynczego wyciąganego włókna składał się z monotonicznego obciążenia siłą  $P_a = 37\text{N}$ , po czym włókno zostało całkowicie odciążone ( $P_a = 0$ ) a następnie ponownie obciążone aż do siły  $P_a \approx 50\text{N}$ , przy której nastąpiło całkowite odspojenie włókna od matrycy. Mierzono zależność obciążenia od przemieszczenia  $P_a(u_a)$ . Z niezależnych pomiarów wyznaczono początkowe naprężenie osiowe we włóknie  $\sigma^+ =$



Rysunek 4.12: Rozkład naprężenia we włóknie  $\bar{\sigma}$  i normalnego ciśnienia kontaktowego  $\bar{p} = p/p^+$  podczas wyciągania włókna z matrycy. Na rys. (a) i (b) linie ciągłe oznaczają stan po obciążeniu, a linie przerywane odpowiadają różnym stanom odciążenia. Podobnie na rys. (c) i (d) linie stałe pokazują stan po całkowitym odciążeniu, a przerywane odnoszą się do dociążania. Liniami kropkowanymi pokazano te same rozkłady wynikające z modelu klasycznego (bez dylatacji).

$-800 \pm 20\text{MPa}$  (ściskanie).

Przemieszczenie obciążanego końca włókna w chwili, gdy nastąpiło całkowite odspojenie było równe około  $10\mu\text{m}$ . Wielkość ta jest tego samego rzędu co charakterystyczny wymiar nierówności powierzchni włókna (Jero, Kerans [43]), zatem można się spodziewać, że na całej długości włókna oddziaływanie nierówności mogło powodować zmienną dylatację (zmienną grubość warstwy kontaktowej). Pojedynczy cykl odciążenie-dociążenie nie spowodował znaczącej zmiany własności powierzchni kontaktowej, a więc zastosowanie modelu z dylatacją w pełni odwracalną jest jak najbardziej dopuszczalne.

Do identyfikacji wyników doświadczalnych Marshall i in. [63] użyli modyfikacji klasycznego modelu Hutchinsona i Jensena [38] w postaci przedstawionej przez Marshalla [62]. Na podstawie krzywej monotonicznego obciążania znaleziono parametry modelu, które dawały najlepsze przybliżenie danych doświadczalnych. Następnie wyznaczono odpowiedź układu na cykl odciążenie-dociążenie na podstawie modelu teoretycznego przy użyciu zidentyfikowanych wartości parametrów i porównano ze wartościami otrzymanymi doświadczalnie. Ta sama procedura została zastosowana przy identyfikacji parametrów modelu uwzględniającego dylatację.

Model odcinkami liniowej funkcji dylatacji ma o dwa parametry ( $u_A$  i  $\delta_A$ ) więcej niż model klasyczny. A zatem oprócz własności sprężystych włókna i matrycy (które są znane dla danego kompozytu), teoretyczna krzywa obciążenie-przemieszczenie zależy od sześciu parametrów:  $p^+$ ,  $\mu$ ,  $\delta_A$ ,  $u_A$ ,  $\gamma$  i  $\sigma^+$ . Jednakże istnieje bezpośrednia zależność między  $\sigma^+$  a  $p^+$  (równania (4.12)), mianowicie

$$\sigma^+ = -\frac{a_2}{a_4}p^+, \quad \bar{\sigma}^+ = -\frac{a_2b_1}{a_4}. \quad (4.24)$$

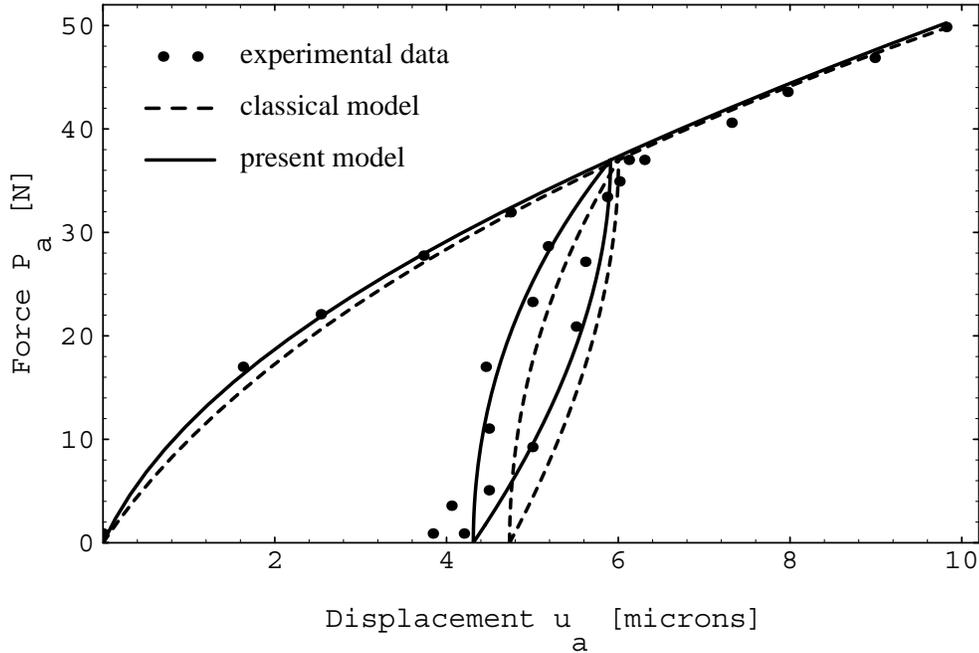
Tak więc bezwymiarowe naprężenie początkowe  $\bar{\sigma}^+$  jest stałe dla danego kompozytu i można je wyznaczyć na podstawie własności sprężystych włókna i matrycy, udziału objętościowego włókien w kompozycie oraz parametru  $\lambda$  określającego anizotropię początkowych odkształceń termicznych  $\epsilon_r^T$  i  $\epsilon_z^T$ . Jedynym nieznanym i trudnym do wyznaczenia parametrem jest tu  $\lambda$ . Dla potrzeb identyfikacji przyjęto dwie wartości:  $\lambda = 1$  (izotropia) i  $\lambda = 2$  (anizotropia stanu początkowych odkształceń niedopasowania), którym odpowiadają wartości  $\bar{\sigma}^+ = -0.123$  i  $\bar{\sigma}^+ = -0.080$ .

Przy wykorzystaniu zależności (4.24) można na podstawie niezależnego pomiaru początkowego naprężenia we włóknie ( $\sigma^+ = 800\text{MPa}$ ) wyznaczyć wartość normalnego ciśnienia kontaktowego:  $p^+ = 261\text{MPa}$  dla  $\lambda = 1$  oraz  $p^+ = 400\text{MPa}$  dla  $\lambda = 2$ .

Doświadczalna krzywa obciążenie-przemieszczenie otrzymana przez Marshalla i in. [63] pokazuje, że odspajanie włókna nastąpiło przy bardzo niewielkiej wartości obciążenia. Obserwacja ta prowadzi do wniosku, że skok naprężenia  $\gamma$  na granicy strefy odspojonej jest mniejszy od naprężenia resztkowego  $\sigma^+$  we włóknie. Zależność ta ( $\sigma^+ + \gamma \leq 0$ ) jest jednocześnie warunkiem samoistnego odspojenia, który był dyskutowany w rozdziale 4.4.2. W takim przypadku, podobnie jak dla modelu klasycznego, zależność obciążenia od przemieszczenia jest nieczuła na wartość parametru  $\gamma$  (por. Marshall [62], Stupkiewicz [105]). A zatem można przyjąć dowolną wartość spełniającą warunek  $0 \leq \gamma \leq -\sigma^+$ .

Ostatecznie pozostają do określenia trzy parametry modelu: współczynnik tarcia  $\mu$  i charakterystyczne wymiary nierówności powierzchni  $u_A$  i  $\delta_A$ . Wyniki minimalizacji sumy

$\lambda$	$\delta_A/u_A$	$\mu$	$p^+$ [MPa]	$s_1^{max}$ [mm]
1	0.0137	0.329	261	1.69
2	0.0128	0.196	400	1.70

Tabela 4.2: Wyniki identyfikacji parametrów modelu:  $\mu$ ,  $\delta_A$  i  $u_A$  (dla  $\bar{\gamma} = -\bar{\sigma}^+$ ).

Rysunek 4.13: Identyfikacja parametrów modelu uwzględniającego dylatację warstwy kontaktowej. Doświadczalna (Marshall i in. [63]) oraz teoretyczne krzywe obciążenie-przemieszczenie włókna wyciąganego z matrycy.

kwadratów różnicy między doświadczalną a teoretyczną krzywą obciążenie-przemieszczenie podane są w tabeli 4.2. W tabeli umieszczony jest tylko stosunek  $\delta_A/u_A$ , ponieważ najlepsze dopasowanie krzywej teoretycznej do doświadczalnej otrzymano dla parametru  $u_A \geq u_A^{max} \approx 10\mu\text{m}$  ( $u_A^{max}$  oznacza przemieszczenie końca włókna przy maksymalnym obciążeniu). W takim wypadku, na całej długości włókna dylatacja jest liniową funkcją przemieszczenia, a więc ma ona tylko jeden niezależny parametr  $\delta_A/u_A$ .

Długość strefy odspojonej odpowiadająca maksymalnemu obciążeniu (czyli całkowitemu odspojeniu) oznaczona jest w tabeli 4.2 przez  $s_1^{max}$ . Całkowita długość włókna osadzonego w matrycy wynosiła około 1.5 mm, a zatem  $s_1^{max}$  — choć zbyt duże — jest dosyć bliskie rzeczywistości.

Przykładowa teoretyczna krzywa obciążenie-przemieszczenie wraz z punktami doświadczalnymi pokazana jest na rysunku 4.13. Model uwzględniający dylatację warstwy kontaktowej opisuje dane eksperymentalne lepiej niż model klasyczny, ponieważ ma więcej parametrów. Dopasowanie do krzywej obciążenia monotonicznego jest bardzo dobre.

Przewidywany teoretycznie cykl odciążenie-dociążenie wykazuje dobrą (dużo lepszą niż w przypadku modelu klasycznego) zgodność z doświadczeniem. Dotyczy to tak pojedynczych punktów pomiarowych, jak i energii dysypowanej podczas cyklu.

## 4.6 Włókno w matrycy — ewolucja stanu powierzchni

Tarcie i poślizgi są zawsze związane ze zużyciem kontaktujących się powierzchni. Zużycie powierzchni powoduje z kolei zmianę stanu powierzchni, a co za tym idzie zmianę własności ciernych. W układzie włókno-matryca zużycie nierówności powierzchni może prowadzić do zmniejszenia niedopasowania promieniowego wywołanego oddziaływaniem tych nierówności. W przypadku obciążeń cyklicznych (które przecież dominują w układach mechanicznych) kumulowane z cyklu na cykl efekty zużycia mogą silnie wpływać na efektywność zjawiska powstrzymywania rozwoju szczeliny. Co za tym idzie również własności całego kompozytu mogą się zmieniać na skutek zużycia. W niniejszym rozdziale zawarte są wyniki symulacji efektów zużycia powierzchni kontaktu włókna z matrycą podczas wyciągania włókna z matrycy.

### 4.6.1 Model konstytutywny zużycia

Model współpracy włókna z matrycą (4.21) uwzględniający dylatację warstwy kontaktowej może być również użyty do modelowania efektów zużycia. Dylatacja  $\delta$ , czyli grubość warstwy kontaktowej, musi wtedy zależeć nie tylko od względnego przemieszczenia, ale i od jakiegoś parametru opisującego nieodrącalny proces zużycia nierówności powierzchni.

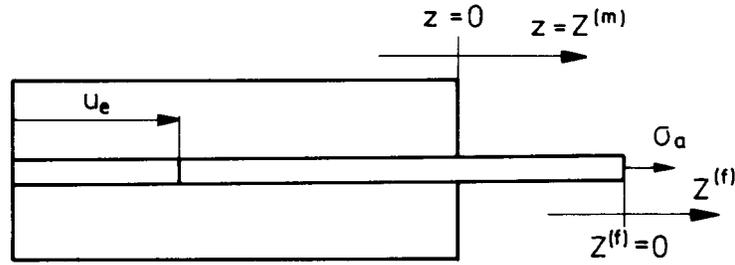
Taki prosty model można skonstruować zakładając, że funkcja dylatacji  $\delta$  zależy od maksymalnej grubości warstwy kontaktowej  $\delta_{max}$  określonej przez wysokość nierówności obu kontaktujących się powierzchni. Postępujące zużycie powierzchni można wtedy wiązać ze spadkiem  $\delta_{max}$ . Niech maksymalna grubość warstwy kontaktowej  $\delta_{max}$  zdefiniowana jest jako odległość obu powierzchni nominalnych, które doznały względnych przemieszczeń wystarczająco dużych, że nierówności obu powierzchni nie pasują do siebie (rys. 4.9(c)). Początkową grubość maksymalną  $\delta_{max}$  nieużytej warstwy kontaktowej można przyjąć jako  $\delta_{max} = \delta_A$ , gdzie  $\delta_A$  jest średnią wysokością nierówności.

Ponadto należy uwzględnić, że funkcja dylatacji zależy od względnych przemieszczeń włókna i matrycy. Dylatację kontaktową można uzależnić od przemieszczeń  $u$  przez bezwymiarową funkcję  $\bar{\delta}_0 = \bar{\delta}_0(u/u_A)$  taką, że  $\bar{\delta}_0(0) = 0$  i  $\bar{\delta}_0(u/u_A > 1) = 1$  ( $u_A$  oznacza tak jak poprzednio wymiar charakterystyczny nierówności).

Zakładając ponadto, że zużycie powierzchni nie wpływa na wielkość współczynnika tarcia  $\mu$  (co oczywiście ogólnie nie musi być spełnione), wpływ zużycia na współpracę włókna z matrycą manifestuje się tylko przez zmianę niedopasowania promieniowego, a co za tym idzie przez zmianę ciśnienia kontaktowego i sił tarcia. Ogólny model konstytutywny można więc zapisać w postaci

$$\delta = \delta_{max} \bar{\delta}_0(u/u_A). \quad (4.25)$$

Zgodnie z dyskusją z rozdziału 1.3.2, można przyjąć, że zużycie zależy od energii dysypowanej przez tarcie (Mróz, Giambanco [70], Mróz, Stupkiewicz [73]). Dysypacja



Rysunek 4.14: Wyciąganie włókna z matrycy po całkowitym odspojeniu.

cierna na jednostkę długości włókna jest równa

$$D(z, t) = 2\pi R_f \tau(z, t) \dot{u}(z, t)$$

gdzie  $\dot{u}$  jest prędkością poślizgu. Skumulowana energia dysypacji w punktach obu powierzchni ma postać

$$\mathcal{K}^{(\alpha)}(Z^{(\alpha)}, t) = \int_0^t D[z(Z^{(\alpha)}, \bar{t}), \bar{t}] d\bar{t} \quad (4.26)$$

gdzie  $\alpha = f, m$  odpowiednio dla włókna i matrycy, natomiast  $Z^{(\alpha)}$  oznacza współrzędną materialną tych punktów. Choć odkształcenia w rozpatrywanym układzie są małe, to po całkowitym odspojeniu włókna od matrycy występują duże poślizgi (duże przemieszczenia) i dlatego skumulowaną energię dysypacji należy wprowadzić osobno dla obu powierzchni. Dla jednowymiarowego modelu włókna w matrycy współrzędne materialne  $Z^{(\alpha)}$  można zapisać jako

$$Z^{(m)} = z, \quad Z^{(f)} = z - u_e,$$

gdzie  $u_e$  jest przemieszczeniem nieobciążonego końca włókna podczas całkowitego wyciągnięcia włókna z matrycy (rys. 4.14). Oczywiście gdy nie nastąpiło całkowite odspojenie włókna ( $u_e = 0$ ), skumulowane energie dysypacji dla obu powierzchni są sobie równe.

Skumulowana energia dysypacji może być teraz użyta do opisu maksymalnej grubości warstwy kontaktowej  $\delta_{max}$  (a więc do opisu zużycia powierzchni). Przyjmując, że w stanie asymptotycznym (dla całkowicie zużytych nierówności)  $\delta_{max} = 0$ , można przyjąć następującą prostą funkcję opisującą  $\delta_{max}$ :

$$\delta_{max} = \delta_A \exp \left[ - \left( \frac{\mathcal{K}^{(m)}}{\mathcal{K}_0^{(m)}} + \frac{\mathcal{K}^{(f)}}{\mathcal{K}_0^{(f)}} \right) \right], \quad (4.27)$$

gdzie  $\mathcal{K}_0^{(\alpha)}$  są parametrami modelu (stałymi materiałowymi). Takie prawo konstytutywne zaniedbuje efekty transportu zużytego materiału.

Zależność funkcji dylatacji od przemieszczeń względnych, spełniająca podstawowe warunki:  $\delta(u = 0) = 0$ ,  $\delta(u > u_A) = \delta_{max}$ ; może mieć postać:

$$\bar{\delta}_0 \left( \frac{u}{u_A} \right) = \begin{cases} \sin \left( \frac{\pi}{2} \left| \frac{u}{u_A} \right| \right) & \text{for } |u/u_A| \leq 1 \\ 1 & \text{for } |u/u_A| > 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

Jest to postać bardziej ogólna od pozwalającej na analityczne rozwiązanie funkcji odcinkami liniowej używanej w rozdziale 4.5.

Model konstytutywny dylatacji opisany równaniami (4.25), (4.27) i (4.28) zawiera cztery parametry:  $\delta_A$  i  $u_A$  opisujące chropowatość nieużytej powierzchni oraz  $\mathcal{K}_0^{(m)}$  i  $\mathcal{K}_0^{(f)}$  określające intensywność procesu zużycia nierówności. W bardziej rozwiniętych modelach można by uwzględnić różnice między mechanizmami zużycia przy małych ( $u < u_A$ ) i dużych ( $u > u_A$ ) poślizgach, czy efekty transportu zużytego materiału. Jednakże na obecnym etapie znajomość zjawisk zachodzących na styku włókna z matrycą nie jest wystarczająca i brak podstaw do tworzenia oraz weryfikacji takich modeli. Nawet powyższy prosty model jest tylko próbą fenomenologicznego opisu obserwowanych efektów.

### 4.6.2 Uproszczona metoda rozwiązania

Model konstytutywny dylatacji kontaktowej, wprowadzony w poprzednim rozdziale, uzależnia dylatację nie tylko od względnych przemieszczeń włókna i matrycy, ale również od skumulowanej energii dysypacji  $\mathcal{K}^{(\alpha)}$ , która opisuje nieodwracalny proces zużycia powierzchni. Tak więc układ równań (4.21) wraz z równaniem konstytutywnym w ogólnej postaci  $\delta = \delta(u, \mathcal{K}^{(m)}, \mathcal{K}^{(f)})$  gdzie  $\mathcal{K}^{(\alpha)}$  określa wzór (4.26), nie jest już układem równań różniczkowych zwyczajnych. Rozwiązanie takiego układu równań wymagałoby sformułowania przyrostowego, a następnie odpowiedniego rozwiązywania numerycznego (np. metodą elementów skończonych).

Jednakże w większości przypadków zmiany stanu powierzchni wywołane zużyciem są powolne i dopiero kumulacja w dłuższych okresach może powodować znaczące efekty. Dlatego też do symulacji efektów zużycia zastosowane zostało podejście uproszczone. W tym podejściu równania (4.21) są całkowane przy założeniu, że skumulowana dysypacja  $\mathcal{K}^{(\alpha)}$  jest stała w pewnym okresie  $\Delta t$ . Dla dysypacji  $\mathcal{K}^{(\alpha)}$  nie zależącej od czasu są to równania różniczkowe zwyczajne, które łatwo jest całkować numerycznie. Następnie, wyznaczana jest energia dysypowana w czasie  $\Delta t$  i znajduwane jest poprawione rozwiązanie uwzględniające zmianę stanu powierzchni na skutek tej dysypacji. Poniższy algorytm opisuje uproszczoną metodę rozwiązania:

1. Dla  $t = t_i$  znane są:  $\sigma(z, t_i)$ ,  $u(z, t_i)$ ,  $\mathcal{K}^{(\alpha)}(Z^{(\alpha)}, t_i)$ .
2. Obliczyć  $\hat{\sigma}(z, t)$ ,  $\hat{u}(z, t)$  dla  $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$  przy założeniu stałych w czasie  $\hat{\mathcal{K}}^{(\alpha)}(Z^{(\alpha)}) \equiv \mathcal{K}^{(\alpha)}(Z^{(\alpha)}, t_i)$ .
3. Obliczyć  $\mathcal{K}^{(\alpha)}(Z^{(\alpha)}, t_i + \Delta t)$ , równanie (4.26):

$$\mathcal{K}^{(\alpha)}(Z^{(\alpha)}, t_i + \Delta t) = \mathcal{K}^{(\alpha)}(Z^{(\alpha)}, t_i) + 2\pi R_f \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \hat{\tau}[z(Z^{(\alpha)}, \bar{t}), \bar{t}] \dot{\hat{u}}[z(Z^{(\alpha)}, \bar{t}), \bar{t}] d\bar{t}.$$

4. Obliczyć  $\sigma(z, t_i + \Delta t)$ ,  $u(z, t_i + \Delta t)$  przy użyciu  $\mathcal{K}^{(\alpha)}(Z^{(\alpha)}, t_i + \Delta t)$ .
5. Następny krok czasowy:  $t_{i+1} := t_i + \Delta t$ .

Długość kroku czasowego (lub obciążenia)  $\Delta t$  może być dopasowana w zależności od intensywności zużycia oraz wymaganej dokładności.

### 4.6.3 Symulacja wyników eksperymentalnych

Oprócz testu monotonicznego obciążania z pojedynczym cyklem odciążenie-dociążenie, praca Marshalla i in. [63] zawiera wyniki innego testu, w którym włókno poddane było obciążeniu cyklicznemu. Test ten składał się z dwóch części. Najpierw, przy maksymalnym obciążeniu 20N, przy którym włókno było tylko częściowo odspojone, włókno było poddane 150 cyklom, w których siła wyciągająca zmieniała się między zerem a 20N. Amplituda przemieszczenia końca włókna wyniosła około  $1\mu\text{m}$ . Następnie, włókno było obciążone aż do całkowitego odspojenia i wyciągnięte  $170\mu\text{m}$ , po czym przyłożono 20 cykli obciążenia o zmiennym znaku. Podczas tych 20 cykli zachowana była stała amplituda przemieszczenia włókna — równa  $100\mu\text{m}$ .

Pierwsza seria cykli obciążenia spowodowała nieznaczne zmiany własności ciernych — przemieszczenia maksymalne wzrosły o około 10%. Druga seria cykli, o dużej amplitudzie przemieszczenia, spowodowała spadek siły wyciągającej włókno o około 25%. Takie zachowanie łatwo wytłumaczyć tym, że energia dysypowana podczas jednego cyklu pierwszej serii jest dużo mniejsza od energii dysypowanej podczas cyklu drugiej serii. Zatem i efekty zużycia napędzane przez dysypowaną energię są mniejsze.

Prezentowane dotychczas w literaturze modele współpracy włókna z matrycą nie są w stanie opisać zjawisk tego typu. Dopiero uwzględnienie ewolucji stanu powierzchni kontaktowej, na przykład w postaci przedstawionej w rozdziale 4.6.1, daje takie możliwości. Jak to będzie pokazane poniżej, nawet bardzo prosty model pozwala jakościowo opisać testy cykliczne tak przy małych, jak i przy dużych poślizgach względnych.

W uproszczonym modelu założymy, że dylatacja zależy tylko od skumulowanej energii dysypacji  $\mathcal{K}^{(m)}$  w punktach powierzchni matrycy. A zatem zaniedbana zostanie zależność dylatacji od przemieszczenia  $u$ , a także od skumulowanej dysypacji cierniej w punktach powierzchni włókna. To drugie założenie odpowiada przyjęciu, że nierówności matrycy zużywają się dużo szybciej od nierówności włókna ( $\mathcal{K}_0^{(m)} \ll \mathcal{K}_0^{(f)}$ ). Tak więc liczba parametrów została ograniczona do dwóch ( $\delta_A$  i  $\mathcal{K}_0^{(m)}$ ), a cały uproszczony model dylatacji można zapisać w postaci

$$\delta = \delta_A \exp\left(-\mathcal{K}^{(m)}/\mathcal{K}_0^{(m)}\right).$$

Model układu włókno-matryca zawiera teraz sześć parametrów. Postępując podobnie jak przy identyfikacji w rozdziale 4.5.3 (tzn. przyjmując  $\bar{\gamma} = -\bar{\sigma}^+ = 0.123$  oraz  $p^+ = 261\text{MPa}$ ), liczbę parametrów do wyznaczenia można ograniczyć do trzech:  $\delta_A$ ,  $\mu$  i  $\mathcal{K}_0^{(m)}$ .

Procedura identyfikacji tych parametrów była następująca. Dla każdej z kilku wybranych wartości parametru  $\delta_A$  (pokryto zakres prawdopodobnych wysokości nierówności) został wyznaczony odpowiadający jej współczynnik tarcia  $\mu$  przez dopasowanie teoretycznej krzywej obciążania do eksperymentalnej w zakresie obciążenia początkowego od 0 do 20N. Na tym etapie wpływ zużycia został zaniedbany. Następnie dla każdej pary  $\delta_A$ ,  $\mu$  zasymulowany został cały program obciążenia przy kilku różnych wartościach bezwymi-

arowej intensywności zużycia<sup>1</sup>  $\kappa_0^{(m)}$ . Otrzymane krzywe obciążenie-przemieszczenie zostały porównane z wynikami doświadczalnymi. Ostatecznie, wybrana została para parametrów  $\delta_A = 0.5$  i  $\kappa_0^{(m)} = 0.6$  (wraz z odpowiadającym parametrowi  $\delta_A$  współczynnikiem tarcia  $\mu = 0.174$ ), dla której dane doświadczalne były najlepiej przybliżone.

Wyniki symulacji wraz z danymi doświadczalnymi pokazane są na rysunku 4.15. Jakościowa zgodność wyników jest bardzo dobra, a ilościowo wyniki symulacji odbiegają w niewielkim stopniu od wyników testu. Stosunkowo najgorzej opisany jest spadek sił tarcia podczas cykli drugiej serii — rys. 4.15(c). Jednakże należy pamiętać, że zastosowany model kostytutywny warstwy kontaktowej jest bardzo prosty i wyniki symulacji należy traktować raczej jako próbę pokazania możliwości i potrzeby modelowania złożonych zjawisk zużycia.

Ciekawy efekt został pokazany na rysunku 4.15(d). Przy stałej amplitudzie obciążenia, na skutek cyklicznej degradacji własności powierzchni następuje cykliczne odspajanie się włókna. Wyniki symulacji pokazują, że po 150 cyklach obciążenia długość strefy odspojonej wzrosła o około 15%. Występowanie tego typu efektów podczas pracy rzeczywistego spękanego kompozytu może prowadzić do spadku efektywności pracy włókien przeciwdziałających otwieraniu się szczeliny i w konsekwencji do dalszego wzrostu spękania kompozytu.

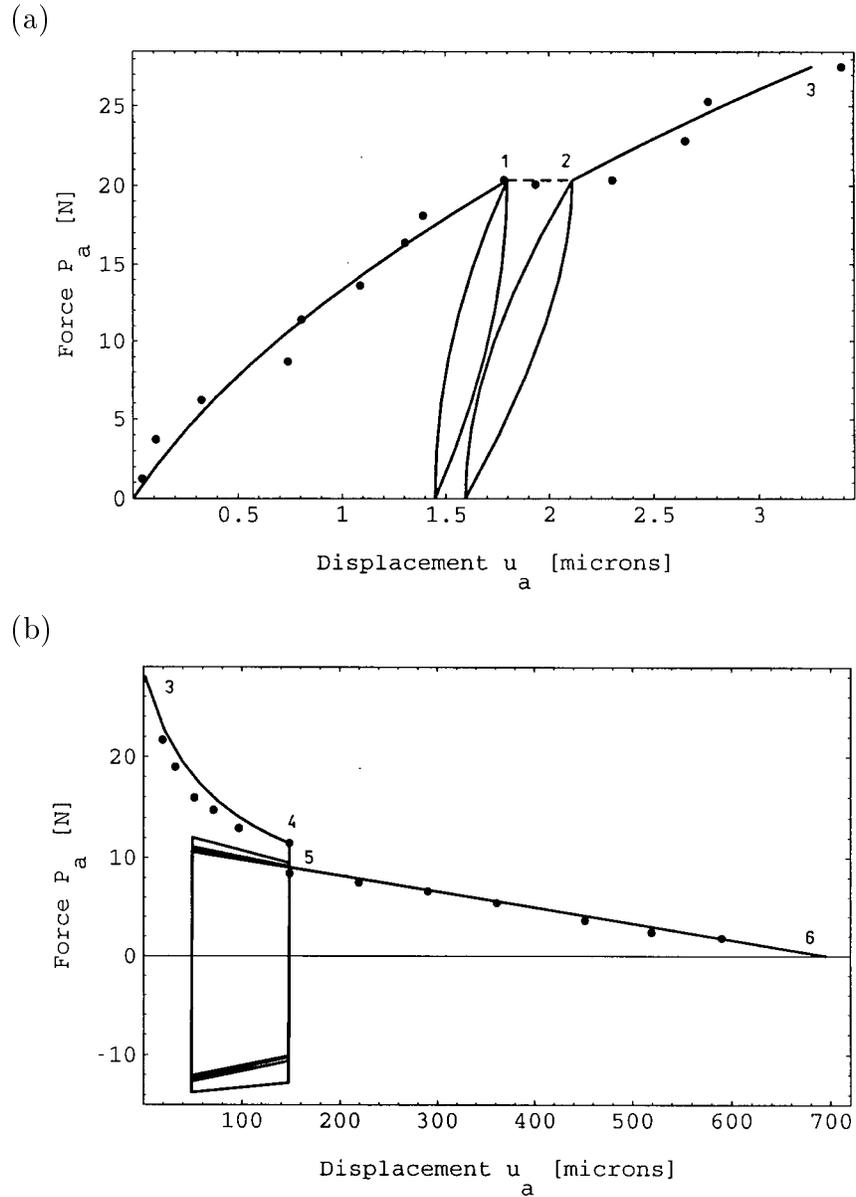
Przy częściowym odspojeniu włókna poślizgi są niewielkie, a co za tym idzie energia dysypowana podczas jednego cyklu jest znikoma. Jednak akumulacja efektów zużycia może prowadzić do zauważalnych zmian charakterystyk kompozytu (por. rys. 4.15(a)). Równocześnie, przy dużych poślizgach względnych, dysypacja energii jest wystarczająco duża aby efekty zużycia manifestowały się nawet podczas monotonicznego wyciągania włókna (ścieżka (3–4) na rys. 4.15(b)).

## 4.7 Podsumowanie

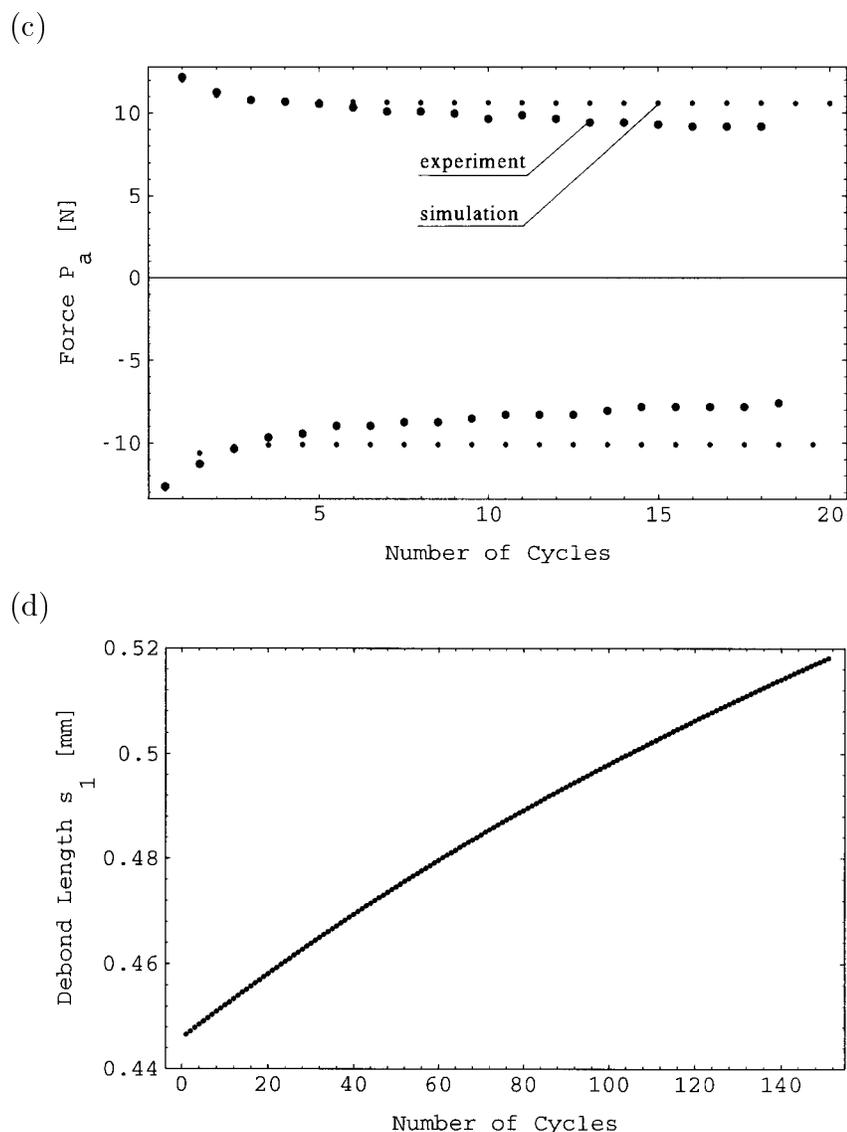
W bieżącym rozdziale przedstawione zostały różne modele współpracy paska i włókna z podłożem. W modelach wyciągania włókna z matrycy przyjęto założenie, że matryca (podłoże) jest sztywna w kierunku osiowym. Zatem model ten odpowiada rozważanemu w rozdziale 4.2.1 przypadkowi paska na podłożu kruchym. Jak pokazują wyniki rozdziału 4.2 model podłoża kruchego i model uwzględniający podatność sprężystą podłoża dają jakościowo zbliżone wyniki. W szczególności w obu przypadkach, energetyczny warunek propagacji szczeliny odspajającej jest równoważny lokalnemu warunkowi wytrzymałościowemu. Dla paska lub włókna na podłożu kruchym warunek propagacji szczeliny odspajającej wyraża się przez stały (nie zależny od długości strefy odspojonej) skok naprężenia wzdłużnego na froncie odspojenia (patrz wynik otrzymany dla ogólniejszego dwuwymiarowego problemu tarczy na podłożu — rozdz. 2.2.2). W przypadku podłoża sprężystego

<sup>1</sup>Bezwymiarowa energia dysypowana  $\kappa^{(\alpha)}$  określona jest wzorem

$$\kappa^{(\alpha)} = \frac{b_1^2 E_f}{\pi b_2 R_f^2} \frac{1}{(p^+)^2} \mathcal{K}^{(\alpha)}.$$



Rysunek 4.15: Symulacja cyklicznego obciążania włókna (Marshall i in. [63]): (a) wyciąganie przy postępującym odspajaniu oraz 150 cykli obciążenia 20–0–20 N (pokazano tylko pierwszy i ostatni cykl); (b) wyciąganie całego włókna (po całkowitym odspojeniu oraz 20 cykli z amplitudą przemieszczenia  $100\ \mu\text{m}$ ); (c) zmiana przyłożonej siły potrzebnej do wywołania całkowitego poślizgu włókna podczas obciążania cyklicznego (4–5); (d) zmiana długości strefy odspojonej z liczbą cykli (1–2).



Rysunek 4.15: (c) i (d).

(rozdz. 4.2.2) taki skok nie występuje. Na skutek podatności podłoża zmiana naprężenia wzdłużnego następuje na odcinku paska o skończonej długości.

Przedstawione modele wyciągania i wciskania włókna rozszerzają modele dotychczasowe o: efekty mikro-dylatacji warstwy kontaktowej oraz jednolite sformułowanie problemów wyciągania i wciskania włókna przy złożonych programach obciążenia. Modele uwzględniające odwracalną dylatację konfiguracyjną (związaną ze względnymi poślizgami nierówności powierzchni kontaktowej) oraz nieodwracalną dylatację spowodowaną zużyciem powierzchni zostały z powodzeniem zastosowane do opisu wyników doświadczalnych. Symulacja cyklicznego wyciągania włókna z matrycy wskazują, że można się spodziewać

znacznych zmian własności kompozytów o kruchej matrycy poddanych obciążeniom cyklicznym.

Ważnym efektem pominiętym w przedstawionym modelu współpracy włókna z matrycą jest generacja ciepła związana z dysypacją energii przy oddziaływaniach cieplnych. Lokalny wzrost temperatury może prowadzić do zmian stanu naprężenia w kompozycie, a w szczególności do zmian nacisków normalnych na powierzchni międzyfazowej. Również własności cieplne (np. współczynnik tarcia) mogą się zmieniać wraz z temperaturą.

# Rozdział 5

## Belka na podłożu ciernym

### 5.1 Belka pół-nieskończona

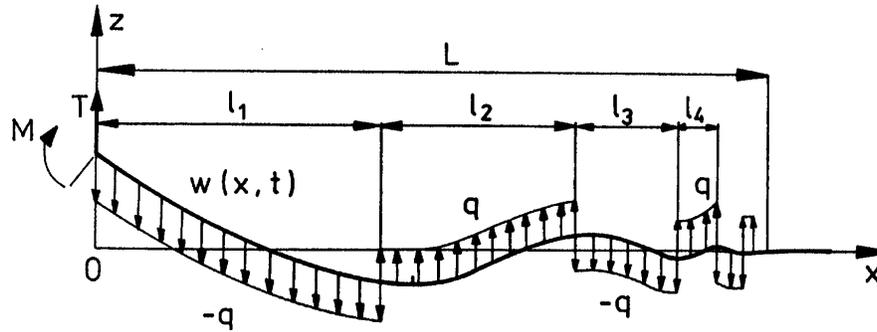
W niniejszym podrozdziale omówiony zostanie problem pół-nieskończonej belki sprężystej spoczywającej na sztywnym podłożu ciernym. Podobnie jak w przypadku paska (rozdział 4) podłoże oddziałuje z belką siłami tarcia o znanej wartości bezwzględnej lecz o nieznanym zwrocie (zakłada się, że znane jest normalne ciśnienie kontaktowe). Jednak przypadek zginanej belki jest znacznie bardziej skomplikowany ze względu na powstawanie i ewolucję wielu stref poślizgu nawet przy obciążaniu monotonicznym. Dla porównania, przy monotonicznym obciążaniu paska powstaje tylko jedna strefa poślizgu.

Problemem tym zajmowali się już Fischer i in. [30, 31] oraz Nikitin [78]. W pracach Fischera i in. [30, 31] zaprezentowana została metoda rozwiązania problemu dla zdyskretyzowanej belki obciążonej momentem termicznym. Motywacją postawienia takiego zadania był technologiczny problem związany ze studzeniem długich szyn kolejowych po walcowaniu na gorąco. Zaobserwowano mianowicie, że w trakcie studzenia na łożu, oba końce szyny ulegają wygięciu, a wygięty odcinek szyny ma długość niezależną od długości szyny. Ugięcie szyny jest spowodowane momentem termicznym wywołanym nierównomiernym studzeniem przekroju poprzecznego szyny. Przy braku tarcia między szyną a łożem taki moment termiczny powodowałby równomierne zakrzywienie całej szyny. Jednak na skutek oddziaływań ciernych tylko końce szyny wyginają się, podczas gdy środkowa jej część nie odkształca się i pozostaje prosta. Uplastycznienie w przekrojach o maksymalnym momencie gnącym powoduje trwałe wygięcie obu końców szyny.

Z kolei Nikitin [78] zajmował się nieskończoną belką obciążoną poprzeczną siłą skupioną. Nikitin pokazał, że rozwiązanie przy monotonicznie rosnącym obciążeniu jest samopodobne i że musi uwzględniać nieskończoną liczbę stref poślizgu, oraz przedstawił metodę przybliżonego rozwiązania.

Ze względu na liczne analogie między tarciem i plastycznością blisko związana z tym tematem jest również praca Zingone [129], dotycząca współpracy belki ze sprężystym-idealnie plastycznym podłożem Winklera.

W kolejnych częściach tego rozdziału omówione jest nowe sformułowanie problemu belki na podłożu z tarciem (Stupkiewicz, Mróz [104]). Sformułowanie to jest odpowiednie tak dla przypadków obciążenia monotonicznego jak i dla dowolnych historii obciążenia



Rysunek 5.1: Belka spoczywająca na podłożu ciernym.

belki pół-nieskończonej, które nie były dotąd poruszane w literaturze. Rozdział 5.2 zawiera dyskusję oraz wstępne wyniki dotyczące belki, która oddziaływuje ciernie na odcinku o skończonej długości a na pozostałej części jest przymocowana do podłoża.

### 5.1.1 Sformułowanie problemu

Rozważmy pół-nieskończoną belkę sprężystą spoczywającą na poziomym sztywnym podłożu. Początkowo prosta belka obciążona jest siłą poprzeczną  $T(t)$  oraz momentem zginającym  $M(t)$ . Rysunek 5.1 przedstawia widok układu z góry. Ugięciu belki towarzyszą poprzeczne poślizgi między punktami belki a podłożem. Zewnętrzne obciążenie jest wtedy równoważone rozłożonymi siłami tarcia. Można się spodziewać (i takie założenie przyjmujemy), że ugięcia poprzeczne nie wystąpią na całej długości belki, a tylko na jej części o skończonej długości. Obserwacje Fischera i in. [30, 31] potwierdzają słuszność takiego założenia. Część belki, na której w trakcie procesu obciążania wystąpiły jakiegokolwiek ugięcia i poślizgi, będziemy nazywać *strefą odkształconą*, a jej długość oznaczymy przez  $L_d(t) < \infty$ .

Dalej założymy, że kontakt pomiędzy belką a podłożem zachodzi tylko wzdłuż linii środkowej belki. Dzięki temu założeniu, w każdym przekroju poprzeczym belki jest tylko jeden punkt w kontakcie z podłożem, a co za tym idzie, nie występują poślizgi w kierunku osi belki wywołane obrotem przekroju. Ponadto zaniedbane jest skręcanie belki wywołane niesiowym przyłożeniem sił tarcia.

Przyjmując, że oddziaływanie belki z podłożem opisuje prawo tarcia Coulomba, równanie równowagi belki poddanej obciążeniu quasi-statycznemu można zapisać w postaci

$$EIw^{IV} = -q \widehat{\text{sign}}(\dot{w}), \quad (5.1)$$

wraz z warunkami brzegowymi dla  $x = 0$

$$EIw''(0, t) = M(t), \quad EIw'''(0, t) = T(t) \quad (5.2)$$

i dla  $x = L_d$

$$w(L_d, t) = w'(L_d, t) = w''(L_d, t) = w'''(L_d, t) = 0, \quad (5.3)$$

oraz z warunkami początkowymi

$$w(x, 0) = w_0(x) \equiv 0. \quad (5.4)$$

Ugięcie belki oznaczone jest przez  $w = w(x, t)$ , jego pochodne cząstkowe względem współrzędnej  $x$  oznaczone są przez  $w'$ ,  $w''$ ,  $w'''$  i  $w^{IV}$ , natomiast  $\dot{w}$  jest pochodną cząstkową względem parametru obciążenia  $t$  (czasu). Niejednoznaczna funkcja  $\widehat{\text{sign}}(\dot{w})$  jest zdefiniowana jako:

$$\begin{aligned} \dot{w} < 0 : & \quad \widehat{\text{sign}}(\dot{w}) = -1; \\ \dot{w} = 0 : & \quad |\widehat{\text{sign}}(\dot{w})| \leq 1; \\ \dot{w} > 0 : & \quad \widehat{\text{sign}}(\dot{w}) = 1. \end{aligned}$$

W przypadku wymuszenia przemieszczeniowego, warunki brzegowe (5.2) mogą być zastąpione odpowiednimi warunkami na ugięcie i obrót końca belki.

Parametrami układu są sztywność belki na zginanie  $EI$  oraz wydatek sił tarcia rozwiniętego  $q = \mu\gamma$ , gdzie  $\gamma$  jest ciężarem właściwym belki na jednostkę długości, a  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia. W ogólnym przypadku wielkości te mogą się zmieniać wzdłuż długości belki, jednak w niniejszej pracy zakłada się, że są one stałe. Tak więc problem jest w pełni opisany przez parametry  $EI$ ,  $q$  oraz historię obciążenia  $T(t)$ ,  $M(t)$ .

Klasyczny model tarcia Coulomba zakłada, że siła tarcia zależy od znaku prędkości względnej (poślizgu). Zastąpienie tego modelu przez model tarcia sprężystego, w którym kierunek siły tarcia zależy od znaku względnego przemieszczenia prowadzi do sformułowania uproszczonego modelu, w którym równanie równowagi belki przyjmuje postać

$$EIw^{IV} = -q \widehat{\text{sign}}(w). \quad (5.5)$$

Równania (5.1)–(5.4) opisują quasi-statyczne zginanie początkowo prostej belki. Ze względu na wyrażenie  $\widehat{\text{sign}}(\dot{w})$ , cząstkowe równanie różniczkowe (5.1) jest silnie nieliniowe i nie jest znane rozwiązanie analityczne tak postawionego problemu. Kolejne podrozdziały zawierają rozważania dotyczące współpracy belki z podłożem prowadzące do alternatywnego sformułowania. Dzięki temu sformułowaniu możliwe jest numeryczne rozwiązanie problemu.

## 5.1.2 Własności układu belka-podłoże

### Obciążenie monotoniczne

Przy monotonicznie rosnącym obciążeniu belka (początkowo prosta) składa się z dwóch części (Fischer i in. [30, 31], Nikitin [78]). W *strefie aktywnych poślizgów* pochodna ugięcia (prędkość poślizgu) jest niezerowa, natomiast *strefa przylegania* składa się z punktów, w których w historii obciążenia nie wystąpiły ugięcia i poślizgi:  $w \equiv 0$ ,  $x \geq L_s$ ; gdzie długość strefy aktywnych poślizgów została oznaczona przez  $L_s$ .

Ponieważ długość strefy aktywnych poślizgów może tylko rosnąć wraz z monotonicznie rosnącym obciążeniem, pokrywa się ona ze strefą odkształconą. A zatem dla obciążenia monotonicznego można utożsamić ze sobą strefę aktywnych poślizgów i strefę odkształconą:  $L_s = L_d = L$ .

Przyjmijmy, że strefa aktywnych poślizgów  $0 \leq x \leq L$  składa się z nieznannej na razie liczby *stref poślizgu*, czyli odcinków belki o stałym zwrocie wydatków sił tarcia  $f(x, t)$ . W sąsiadujących strefach poślizgu siły tarcia mają przeciwne zwroty, a punkty łączące sąsiadujące ze sobą strefy poślizgu mają zerową prędkość poślizgu. W tych punktach siły tarcia są nieokreślone, podczas gdy wewnątrz każdej strefy poślizgu wydatki sił tarcia są stałe i równe  $+q$  lub  $-q$ . Oczywiście w strefie przylegania, w której belka nie doznała odkształceń siły tarcia są zerowe:  $f(x, t) \equiv 0, x > L$ .

Równanie belki (5.1) można teraz zapisać w postaci

$$EIw^{IV} = -q \operatorname{sign}(\dot{w}), \quad (5.6)$$

gdzie  $\operatorname{sign}(\dot{w})$  jest funkcją jednoznaczłą:

$$\begin{aligned} \dot{w} < 0 : \quad & \operatorname{sign}(\dot{w}) = -1; \\ \dot{w} = 0 : \quad & \operatorname{sign}(\dot{w}) = 0; \\ \dot{w} > 0 : \quad & \operatorname{sign}(\dot{w}) = 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (5.6) musi spełniać sześć warunków brzegowych (5.2) i (5.3). Zakładając liczbę stref poślizgu równą  $N$  otrzymuje się dodatkowych  $N - 1$  warunków zerowej prędkości poślizgu w punktach łączących sąsiadujące strefy poślizgu. Niewiadomymi są: cztery stałe całkowania równania (5.6) oraz  $N$  długości stref poślizgu. Ponieważ w sumie jest  $N + 4$  niewiadomych oraz  $N + 5$  równań, można wyciągnąć wniosek (por. Nikitin [78]), że nie istnieje rozwiązanie dla jakiegokolwiek skończonej liczby  $N$  stref poślizgu, a jedyną możliwością jest rozwiązanie zakładające ich nieskończoną liczbę.

Wniosek dotyczący nieskończonej liczby stref poślizgu można również poprzeć argumentami natury fizycznej. Załóżmy, że dla pewnej wartości obciążenia zewnętrznego występuje skończona liczba stref poślizgu. Rozważmy odcinek belki  $a \leq x \leq L(t)$  będący częścią ostatniej strefy poślizgu stykającej się ze strefą przylegania, rysunek 5.2(a). Zgodnie z warunkami brzegowymi (5.3) oraz przy założeniu dodatniego zwrotu sił tarcia  $f(x, t) = q$ , ugięcie rozważanego odcinka belki ma postać:

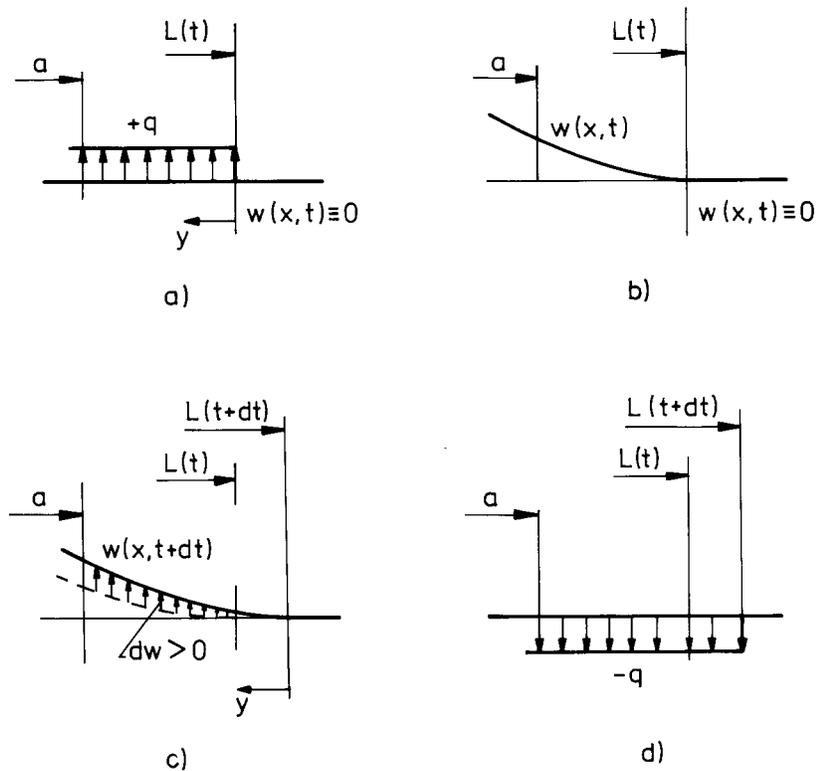
$$w = \frac{q}{24EI}y^4 = \frac{q}{24EI}(L - x)^4;$$

i jest schematycznie pokazane na rysunku 5.2(b). Ponieważ długość strefy aktywnych poślizgów rośnie monotonicznie,  $L(t) < L(t + \Delta t)$ , prędkość punktów belki jest dodatnia

$$\dot{w} = \frac{q}{6EI}(L - x)^3 \dot{L} > 0,$$

tak jak to pokazano na rysunku 5.2(c). Z prawa tarcia Coulomba otrzymujemy wydatek sił tarcia  $f(x, t) = -q \operatorname{sign}(\dot{w}) = -q < 0$  o ujemnym zwrocie, czyli przeciwny do założonego. Dowodzi to, że nie jest możliwe jednoczesne spełnienie prawa tarcia oraz warunków brzegowych (5.3), gdy pole wydatków sił tarcia składa się ze skończonej liczby stref poślizgu.

Rozwiązanie z nieskończoną liczbą stref poślizgu wynika z przyjęcia jednowymiarowego modelu belki oraz prawa tarcia Coulomba. Oczywiście model traci sens, gdy długość stref poślizgu jest rzędu wymiaru przekroju poprzecznego belki. Również stosowalność



Rysunek 5.2: Ilustracja dowodu braku rozwiązania składającego się ze skończonej liczby stref poślizgu: (a) odcinek belki obciążony wydatkami tarcia; (b) ugięcie tego odcinka; (c) pole poślizgów; (d) siły tarcia wynikające z pola poślizgów.

modelu tarcia Coulomba jest ograniczona, gdy poślizgi są bardzo małe i gdy bardziej adekwatny byłby model ze sprężystą podatnością kontaktową. Dlatego też efekt w postaci nieskończonej liczby stref poślizgu należy raczej traktować jako skutek zastosowanego modelu matematycznego niż odzwierciedlenie rzeczywistości fizycznej. Jest to oczywiście powszechny problem występujący przy matematycznym modelowaniu rzeczywistych układów.

Aby rozwiązanie uwzględniające nieskończoną liczbę stref poślizgu miało sens, długości stref poślizgu muszą tworzyć zbieżny ciąg  $l_i(t)$  spełniający następujące własności:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} l_i = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^i l_k = \lim_{i \rightarrow \infty} J_i = L_s, \quad (5.7)$$

gdzie ciąg  $J_i(t)$  opisuje położenia kolejnych punktów łączących sąsiednie strefy poślizgu:

$$J_i = \sum_{k=1}^i l_k.$$

### Dowolna historia obciążenia

W ogólnym przypadku obciążenia podział belki na strefy związane z różnymi stanami kontaktu ciernego musi być przeanalizowany bardziej starannie. W szczególności, gdyby dla jakiejś historii obciążenia długość  $L_s$  strefy aktywnych poślizgów malała, wtedy strefa aktywnych poślizgów przestałaby być tożsama ze strefą odkształconą, gdyż długość  $L_d$  tej drugiej z definicji nie może maleć. W takim przypadku pomiędzy obiema strefami powstałaby *strefa zamrożonych poślizgów*  $L_s < x < L_d$ , w której wydatki sił tarcia  $f(x, t)$  mogą mieć dowolną wartość spełniającą nierówność:  $|f(x, t)| \leq q$ .

Równanie równowagi belki (5.1) może być wtedy zastąpione równaniem (5.6) dla strefy aktywnych poślizgów  $0 \leq x \leq L_s$ , ale należy jednocześnie zmodyfikować warunki brzegowe (5.3) do postaci

$$x = L_s : \quad w''' = \frac{d^3 w_f}{dx^3}, \quad w'' = \frac{d^2 w_f}{dx^2}, \quad w' = \frac{dw_f}{dx}, \quad w = w_f, \quad (5.8)$$

gdzie  $w_f(x)$  oznacza ugięcie belki w strefie zamrożonych poślizgów  $L_s < x < L_d$ . Przy braku strefy zamrożonych poślizgów ( $L_s = L_d$ ) warunki brzegowe (5.8) są równoważne warunkom (5.3), tak jak to ma miejsce na przykład dla obciążenia monotonicznego.

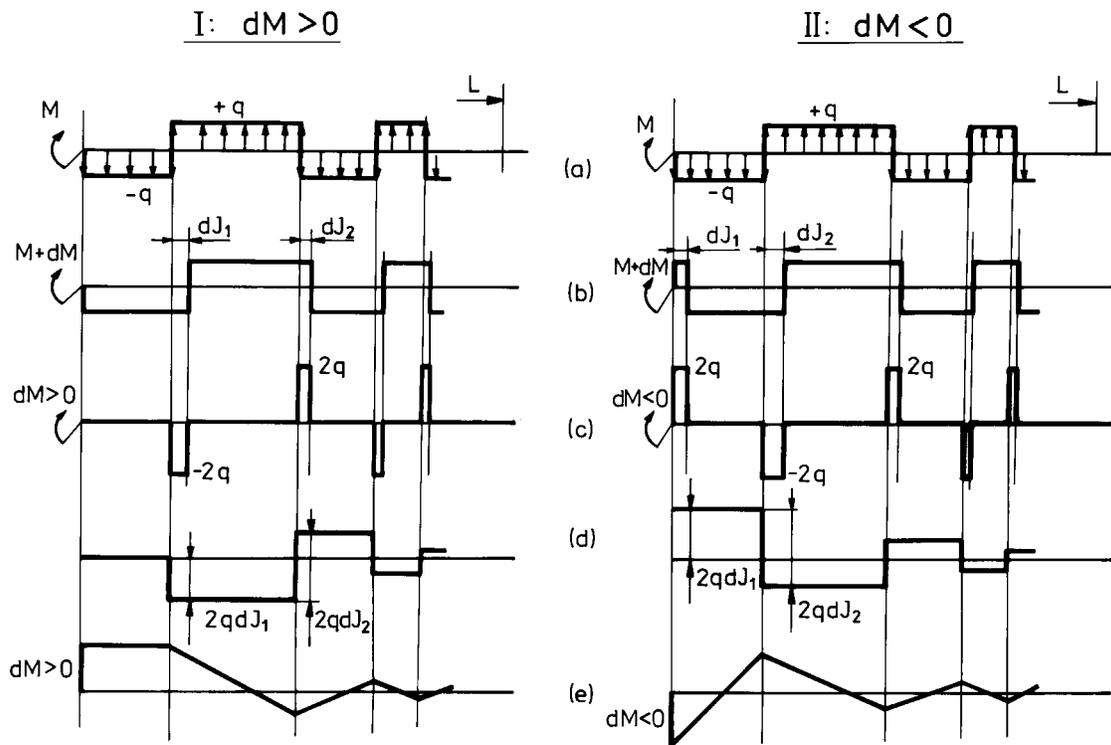
W przypadku powstania strefy zamrożonych poślizgów problem staje się nierozwiązalny, gdyż brakuje warunku pozwalającego wyznaczyć zamrożone ugięcia  $w_f$ . Przewyciężenie tej trudności jest możliwe dzięki przyjęciu założenia upraszczającego. Założymy mianowicie, że ugięcia w strefie zamrożonych poślizgów (gdyby taka powstała) są zanedbywalnie małe. Przyjęcie takiego założenia pozwala stosować warunki brzegowe (5.3) na końcu strefy aktywnych poślizgów  $x = L_s$  zamiast na końcu strefy odkształconej  $x = L_d$ . Dzięki temu założeniu, niezależnie od programu obciążenia, belkę można podzielić na dwie części: strefę aktywnych poślizgów  $0 < x < L_s$  (o niezerowych ugięciach) oraz strefę o ugięciach zerowych  $x \geq L_s$ :

$$w(x, t) \equiv 0, \quad x \geq L_s. \quad (5.9)$$

Poniżej przedstawiona zostanie argumentacja usprawiedliwiająca przyjęcie powyższego założenia. Chociaż brakuje ścisłego dowodu prawdziwości założenia (5.9) istnieją przesłanki pozwalające sądzić, że strefa zamrożonych poślizgów nie może powstać (wtedy założenie to jest automatycznie spełnione) lub, że nawet w przypadku gdyby taka strefa mogła powstać, jest ono co najmniej dobrym przybliżeniem.

Dyskusja dotycząca ugięć w strefie zamrożonych poślizgów ma sens tylko w przypadku powstania takiej strefy. Należy się więc zastanowić czy jest możliwe jej powstanie, czyli czy jest możliwe żeby strefa aktywnych poślizgów kurczyła się.

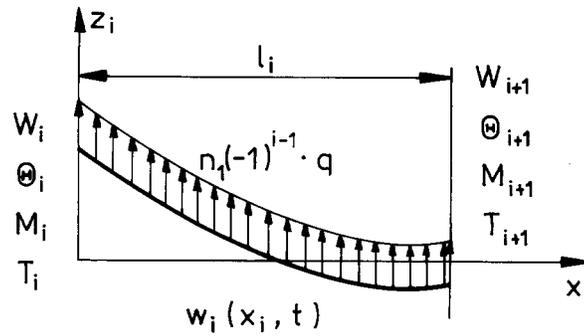
Należy zacząć od tego, że dowolny przyrost obciążenia  $dT$ ,  $dM$  jest związany ze zmianami długości wszystkich stref poślizgu (dowód przebiega w sposób podobny do tego zilustrowanego na rys. 5.2). Oznacza to, że na przykład gdy po obciążeniu monotonicznym następuje odciążenie, odpowiedź układu obejmuje całą strefę aktywnych poślizgów (wszystkie punkty rozgraniczające strefy poślizgu doznają przemieszczeń). Nie powstaje natomiast lokalna strefa odciążenia na samym końcu belki — czego można by się spodziewać po pobieżnej analizie.



Rysunek 5.3: Porównanie rozkładów sił tarcia belki obciążanej rosnącym momentem  $M$  poddanej przyrostowi obciążenia  $dM$ : I — dodatniemu (dalsze obciążanie); i II — ujemnemu (początek odciążania): (a) rozkład sił tarcia dla obciążania momentem  $M$  oraz (b) momentem  $M + dM$ ; (c) rozkład przyrostów sił tarcia równoważących przyrost momentu  $dM$ ; (d) rozkład przyrostu siły tnącej w belce i (e) rozkład przyrostu momentu gnącego w belce. Na rysunkach (d) i (e) pominięto długości przyrostów  $dJ_i$ .

Po drugie zwróćmy uwagę, że każda zmiana znaku przyrostu obciążenia powoduje powstanie nowej strefy poślizgu na obciążanym końcu belki. Spowodowane jest to zmianą znaku poślizgu końca belki związaną ze zmianą znaku przyrostu obciążenia. I tak podczas odciążania powstaje nowa strefa poślizgu, której długość rośnie mimo, że wielkość obciążenia spada przy odciążaniu. Na rysunku 5.3 pokazane są schematycznie rozkłady sił tarcia oraz sił wewnętrznych w belce wywołane dodatnim i ujemnym przyrostem obciążenia belki poddanej zginaniu monotonicznie rosnącym momentem. Rosnąca pierwsza strefa poślizgu powoduje w obu przypadkach odsuwanie najbliższych jej stref poślizgu w kierunku od końca belki. Tak więc w przypadku gdyby długości tych stref zmniejszały się, oba efekty dawałyby przeciwne wkłady w sumaryczne przemieszczenie punktów rozgraniczających strefy poślizgu. Istnieje zatem możliwość, że przy malejącym obciążeniu (podczas odciążania) całkowita długość strefy aktywnych poślizgów rośnie.

Założmy teraz, że długość strefy aktywnych poślizgów jednak maleje. Ponieważ wydatek sił tarcia zmienia znak w sąsiadujących strefach poślizgu, można się spodziewać, że krzywa ugięcia belki jest pofalowana z amplitudą i długością fali zmniejszającymi się i dążącymi do zera. Jeżeli przy jakimś przyroście obciążenia przyrost długości strefy ak-



Rysunek 5.4: Strefa poślizgu w lokalnym układzie współrzędnych.

tywnych poślizgów  $\Delta L_s$  byłyby ujemny, to na odcinku pomiędzy poprzednim a nowym położeniem końca tej strefy leżałaby nieskończona liczba “falek” początkowej krzywej ugięcia. Należy teraz rozważyć dwie możliwości. Warunki brzegowe musiałyby oscylować nieskończoną liczbę razy, co nie wydaje się możliwe przy monotonicznym przyroście obciążenia. Drugą możliwością jest, że zamrożone ugięcia belki musiałyby być nieskończenie małe. Oba przypadki usprawiedliwiają przyjęcie założenia zerowych ugięć poza strefą aktywnych poślizgów.

Z powyższej dyskusji wynika, że założenie (5.9) jest automatycznie spełnione, gdy  $\dot{L}_s \geq 0$  oraz że powinno być dobrym przybliżeniem gdyby  $\dot{L}_s < 0$ . Należy zwrócić uwagę na fakt, że wyniki obliczeń numerycznych wykorzystujące założenie (5.9) nie dały, w żadnym z rozpatrywanych przypadków obciążenia, malejącej długości strefy aktywnych poślizgów  $L_s$ . Co więcej, wszystkie wyrazy ciągu  $J_i(t)$  rosły monotonicznie, czyli we wszystkich otrzymanych rozwiązaniach strefy poślizgu ewoluowały w ten sposób, że punkty rozgraniczające sąsiadujące strefy zawsze przemieszczały się w kierunku od końca belki. Zatem założenie (5.9) było automatycznie spełnione.

### 5.1.3 Krzywa ugięcia belki

Wykorzystując wyniki poprzedniego rozdziału można teraz wyznaczyć krzywą ugięcia belki jako funkcję nieskończonego ciągu długości stref poślizgu  $l_i$ . Metoda jest w zasadzie podobna do tych proponowanych przez Fischera i in. [30, 31] oraz Nikitina [78] z tym, że bieżące sformułowanie pozwala uwzględnić nieskończoną liczbę stref poślizgu. Równanie belki (5.6) zostanie scałkowane wewnątrz każdej strefy poślizgu, a następnie poszczególne krzywe zostaną ze sobą zsyte z wykorzystaniem warunków ciągłości funkcji ugięcia i jej trzech pochodnych.

Po przyjęciu założenia (5.9) punkt  $x = L_s$  dzieli belkę na dwie części: strefę aktywnych poślizgów oraz strefę, gdzie ugięcie belki jest zerowe ( $w \equiv 0$ , dla  $x \geq L_s$ ). Ponieważ jest to jedyny charakterystyczny punkt belki jego położenie będzie odąd określane po prostu przez  $L = L_s$ .

Rozważmy pojedynczą strefę poślizgu w jej lokalnym układzie odniesienia  $O_i x_i y_i$ , rysunek 5.4. Równanie belki (5.6) ma w tym układzie postać

$$EIw^{IV} = n_1(-1)^{i-1}q, \quad 0 \leq x_i \leq l_i, \quad n_1 = \pm 1, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad (5.10)$$

gdzie  $n_1$  zależy od zwrotu sił tarcia w pierwszej strefie poślizgu ( $n_1 = 1$  gdy zwrot jest dodatni). Krzywą ugięcia w każdej strefie łatwo jest teraz wyznaczyć jako

$$w_i(x_i) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{24}n_1(-1)^{i-1}qx_i^4 + \frac{1}{6}T_ix_i^3 + \frac{1}{2}M_ix_i^2 \right] + \Theta_ix_i + W_i, \quad 0 \leq x_i \leq l_i, \quad (5.11)$$

gdzie warunki brzegowe dla  $x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, \infty$ ) oznaczono jako

$$x_i = 0 : \quad EIw_i''' = T_i, \quad EIw_i'' = M_i, \quad w_i' = \Theta_i, \quad w_i = W_i. \quad (5.12)$$

Zatem warunki ciągłości krzywej ugięcia i sił wewnętrznych na granicach stref poślizgu mają postać

$$x_i = l_i : \quad EIw_i''' = T_{i+1}, \quad EIw_i'' = M_{i+1}, \quad w_i' = \Theta_{i+1}, \quad w_i = W_{i+1}. \quad (5.13)$$

Aby spełnione były warunki brzegowe (5.3) dla  $x = L$ , nieskończone ciągi  $T_i$ ,  $M_i$ ,  $\Theta_i$  oraz  $W_i$  muszą zbiegać do zera przy  $i \rightarrow \infty$ . Zachodzi to, gdy  $\lim_{i \rightarrow \infty} l_i = 0$  (por. wz. (5.7)), oraz gdy ciągi te wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} T_i &= \sum_{k=i}^{\infty} n_1(-1)^k ql_k, \\ M_i &= \sum_{k=i}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}n_1(-1)^k ql_k^2 - T_k l_k \right], \\ \Theta_i &= \frac{1}{EI} \sum_{k=i}^{\infty} \left[ \frac{1}{6}n_1(-1)^k ql_k^3 - \frac{1}{2}T_k l_k^2 - M_k l_k \right], \\ W_i &= \frac{1}{EI} \sum_{k=i}^{\infty} \left[ \frac{1}{24}n_1(-1)^k ql_k^4 - \frac{1}{6}T_k l_k^3 - \frac{1}{2}M_k l_k^2 - EI\Theta_k l_k \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Wyrażenia podlegające sumowaniu we wzorach (5.14) są przyrostami odpowiednio siły tnącej, momentu zginającego, kąta ugięcia i ugięcia na  $k$ -tej strefie poślizgu, wynikającymi z rozwiązania (5.11).

Warunki brzegowe (5.2) dla  $x = 0$  można teraz zapisać jako

$$T_1 = T(t), \quad M_1 = M(t). \quad (5.15)$$

Wprowadzając charakterystyczną długość  $l_0$  i przy jej pomocy bezwymiarowe wielkości

$$l_i^* = \frac{l_i}{l_0}, \quad w^* = \frac{w}{(ql_0^4/EI)}, \quad T_i^* = \frac{T_i}{ql_0}, \quad M_i^* = \frac{M_i}{ql_0^2}, \quad \Theta_i^* = \frac{\Theta_i}{(ql_0^3/EI)}, \quad (5.16)$$

równania (5.11)–(5.15) można łatwo przekształcić do postaci bezwymiarowej.

Równania (5.11) i (5.14) pozwalają opisać krzywą ugięcia belki  $w(x, t)$  w funkcji ciągu długości stref poślizgu  $l_i(t)$ . Nieznane długości  $l_i$  należy wyznaczyć z warunków zerowej prędkości poślizgu w punktach  $O_i$  łączących strefy  $l_{i-1}$  oraz  $l_i$ . Ponieważ punkty  $O_i$

przemieszczają się w trakcie procesu ich współrzędne są funkcjami czasu:  $J_i = J_i(t)$  (punktowi  $O_i$  odpowiada  $J_{i-1}$ ). Dlatego też wyznaczając prędkość poślizgu należy użyć pochodnej konwekcyjnej względem czasu. Przedstawiając ugięcie belki w ruchomym układzie współrzędnych  $x_i$

$$x = x_i + J_{i-1}, \quad w(x, t) = w_i(x_i, t) = w_i(x - J_{i-1}, t),$$

warunki zerowej prędkości poślizgu w punktach  $O_i$  otrzymuje się w postaci

$$\dot{w}|_{x=J_{i-1}} = \frac{\partial w_i}{\partial t} \Big|_{x_i=0} - \frac{dJ_{i-1}}{dt} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, \infty. \quad (5.17)$$

Równania (5.17) muszą być spełnione dla  $i = 2, 3, \dots, \infty$ , to znaczy we wszystkich punktach łączących strefy poślizgu. Nie ma żadnego ograniczenia na prędkość poślizgu na końcu belki ( $i = 1$ ). Jednakże może się zdarzyć, że w trakcie obciążania prędkość końca belki stanie się zerowa, a następnie zmieni swój znak. Wtedy na końcu belki powstaje nowa strefa poślizgu i ciąg  $l_i$  należy przenieść ( $l_i := l_{i-1}$ ,  $l_1 := 0$ ). Jednocześnie współczynnik  $n_1$  zmienia swój znak ( $n_1 := -n_1$ ).

Wykorzystując zależności (5.14) warunki (5.17) można zapisać jako

$$\dot{W}_i - J_{i-1} \Theta_i = 0, \quad i = 2, 3, \dots, \infty. \quad (5.18)$$

Ten nieskończony układ równań jest w rzeczywistości układem równań różniczkowych, gdyż można go zapisać w postaci

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j^i l_j = 0, \quad i = 2, 3, \dots, \infty, \quad (5.19)$$

gdzie

$$A_j^i = A_j^i(l_k) = \frac{\partial W_i}{\partial l_j} - \Theta_i \frac{\partial J_{i-1}}{\partial l_j}, \quad i = 2, 3, \dots, \infty, \quad j, k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Początkowy problem opisany nieliniowym równaniem różniczkowym cząstkowym (5.1) z warunkami brzegowymi (5.2) i (5.3) został przeformułowany do postaci nieskończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych (5.19) z dwoma dodatkowymi równaniami algebraicznymi (5.15). Układ ten opisuje ewolucję stref poślizgu  $l_i(t)$  belki obciążonej na końcu siłą poprzeczną  $T(t)$  i momentem gnącym  $M(t)$ . Przekształcony warunek początkowy (5.4) przyjmuje teraz postać

$$l_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Chociaż nie jest znane rozwiązanie analityczne problemu w nowym sformułowaniu, pozwała ono szukać rozwiązania przybliżonego na drodze numerycznej.

### 5.1.4 Obciążenie proporcjonalne

Rozważmy teraz szczególny przypadek obciążenia — obciążenie proporcjonalne i monotoniczne. Jak pokazał Nikitin [78], w przypadku obciążenia rosnącego monotonicznie rozwiązanie jest samopodobne. Wykorzystując cechę samopodobieństwa rozwiązania, układ równań różniczkowych (5.18) można zastąpić układem równań algebraicznych. Poniżej zostanie zdefiniowane pojęcie obciążenia proporcjonalnego oraz zostaną określone warunki, jakie musi spełniać obciążenie proporcjonalne.

W najprostszym przypadku rozwiązanie samopodobne jest odpowiedzią na monotonicznie rosnące obciążenie samą siłą  $T$  (przy zerowym momencie  $M$ ) lub samym momentem  $M$  (przy zerowej sile  $T$ ). Układ jest wtedy w pełni opisany wielkościami  $EI$ ,  $q$  oraz  $T$  lub  $M$ . Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach istnieje tylko jedna bezwymiarowa kombinacja tych parametrów:

$$\frac{T^3}{EIq^2} \quad \text{lub} \quad \frac{M^3}{(EI)^2q}.$$

A zatem przy monotonicznie rosnącym obciążeniu rozwiązanie musi być samopodobne, a rosnący wraz z obciążeniem wymiar charakterystyczny  $l_0$ :

$$l_0 = l_T = T/q \quad \text{lub} \quad l_0 = l_M = \sqrt{M/q}. \quad (5.20)$$

wyznacza skalę rozwiązania samopodobnego wzdłuż długości belki.

Rozwiązanie samopodobne może wystąpić również w bardziej ogólnym przypadku jednoczesnego obciążania siłą i momentem. Warunkiem samopodobieństwa rozwiązania jest wtedy:

$$\frac{l_T}{l_M} = \text{const} \quad \iff \quad \frac{T^2}{M} = \text{const}. \quad (5.21)$$

Powyższe równanie definiuje warunek *obciążenia proporcjonalnego* rozumianego jako taki przypadek obciążenia, przy którym rozwiązanie jest samopodobne. Jak widać, prosty warunek  $T/M = \text{const}$  nie spełnia powyższej definicji obciążenia proporcjonalnego.

Rozwiązanie samopodobne jest w pełni opisane bezwymiarowym ciągiem  $l_i^*$ , a ewolucję stref poślizgu opisuje równanie

$$l_i(t) = l_i^* l_0(t),$$

gdzie wymiar charakterystyczny  $l_0$  rośnie monotonicznie wraz z rosnącym obciążeniem, a wszystkie wielkości bezwymiarowe (wz. (5.16) nie zależą od parametru obciążenia  $t$  (czasu). Dla obciążenia proporcjonalnego warunki zerowej prędkości poślizgu w punktach  $O_i$  (5.18) upraszczają się do postaci:

$$(4W_i^* - J_{i-1}^* \Theta_i^*) l_0^3 \dot{l}_0 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, \infty.$$

Ponieważ  $\dot{l}_0 > 0$ , przyjmują one postać układu równań algebraicznych<sup>1</sup>:

$$4W_i^* - J_{i-1}^* \Theta_i^* = 0, \quad i = 2, 3, \dots, \infty. \quad (5.22)$$

<sup>1</sup>Postać warunków (5.22) jest równoważna postaci otrzymanej inną metodą przez Nikitina [78].

Równania te, wraz z bezwymiarowymi warunkami brzegowymi (5.15), stanowią nieskończony układ równań algebraicznych z niewiadomym nieskończonym ciągiem  $l_i^*$ . Również i ten układ równań nie ma rozwiązania analitycznego. Można jednak wykazać pewną interesującą cechę, jaką musi spełniać jego rozwiązanie.

Założmy, że począwszy od pewnego  $i_e$  ciąg  $l_i^*$  jest zbieżnym ciągiem geometrycznym, czyli

$$l_{i+1}^* = el_i^*, \quad i \geq i_e, \quad 0 < e < 1. \quad (5.23)$$

Wtedy bezwymiarowe ciągi  $T_i^*$ ,  $M_i^*$ ,  $\Theta_i^*$  oraz  $W_i^*$ , również stają się ciągami geometrycznymi dla  $i \geq i_e$ , a ponadto spełnione są następujące zależności:

$$\Theta_{i+1}^* = -e^3 \Theta_i^*, \quad W_{i+1}^* = -e^4 W_i^*, \quad i \geq i_e. \quad (5.24)$$

Widać, że ciąg  $W_i^*$  zbiega do zera szybciej niż ciąg  $\Theta_i^*$ , gdyż  $e^4 < e^3$ . Jednocześnie dla rosnącego  $i$  ciąg  $J_i^*$  przybliża się do swojej granicy  $L$ , por. wz. (5.7). A zatem dla  $i \rightarrow \infty$  warunek (5.22) redukuje się do jednego równania:

$$\Theta_i^* = 0. \quad (5.25)$$

Sens fizyczny tego równania jest taki, że dla dużych  $i$  punkty zerowej prędkości poślizgu leżą w punktach ekstremalnych krzywej ugięcia ( $\Theta_i^*$  jest kątem ugięcia belki w punkcie  $O_i$ ). Oznacza to, że prędkość unoszenia każdej strefy poślizgu jest dużo większa od prędkości zmian ugięcia w lokalnym układzie odniesienia. Wykorzystując wzory (5.14) i (5.23) z rozwiązania równania (5.25) można otrzymać wartość parametru  $e$ :

$$e = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{l_{i+1}^*}{l_i^*} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.38197. \quad (5.26)$$

Z powyższej własności rozwiązania samopodobnego wynika, że przy obciążeniu proporcjonalnym długości stref poślizgu tworzą nieskończony ciąg zbieżny, który przy  $i \rightarrow \infty$  dąży do ciągu geometrycznego o ilorazie  $e$  niezależnym od przyłożonego obciążenia. Ta własność rozwiązania będzie wykorzystana do zmniejszenia liczby niewiadomych przy konstruowaniu rozwiązania przybliżonego.

### 5.1.5 Model tarcia sprężystego

Zastąpienie modelu tarcia Coulomba modelem tarcia sprężystego prowadzi do uproszczenia modelu. Możliwe jest wtedy znalezienie rozwiązania analitycznego w zamkniętej postaci. Ponieważ model tarcia sprężystego (często stosowany w mechanice teoretycznej — np. Duvaut, Lions [28]) nie wprowadza do układu dysypacji, jego stosowalność jest ograniczona do procesów obciążania monotonicznego.

Gdy tarcie zależy od znaku względnego przemieszczenia a nie prędkości, równanie belki przyjmuje postać (5.5) (rozdział 5.1.1), a warunki zerowej prędkości poślizgu w punktach  $O_i$  rozgraniczających strefy poślizgu należy zastąpić warunkami zerowego ugięcia. Korzystając z formalizmu wprowadzonego w poprzednim rozdziale warunki te zapisuje się po prostu jako

$$W_i^* = 0, \quad i = 2, 3, \dots, \infty.$$

Warunki te są spełnione, gdy ciąg  $l_i^*$  ma postać ciągu geometrycznego (5.23), przy czym

$$e = \frac{l_{i+1}^*}{l_i^*} = \frac{1}{4} \left( 3 + \sqrt{33} - \sqrt{2} \sqrt{3\sqrt{33} + 13} \right) \approx 0.2421, \quad i \geq i_e = 2.$$

Podobnie jak w przypadku granicznego ciągu rozwiązania problemu z tarciem Coulomba iloraz ciągu geometrycznego  $e$  nie zależy od obciążenia. Aby ciąg  $l_i^*$  był poprawnie określony należy jeszcze z warunków brzegowych (5.15) wyznaczyć jego wyrazy  $l_1^*$  oraz  $l_2^*$ . W wyniku otrzymuje się następujące rozwiązanie analityczne:

$$\begin{aligned} l_1^* &= T^* + \sqrt{1 + e^2} \sqrt{\frac{1}{2} T^{*2} + M^*}; \\ l_2^* &= (1 + e)(l_1^* - T^*); \\ L^* &= l_1^* + \frac{1}{1 - e} l_2^*; \\ \Theta^* &= -\frac{1}{6} l_1^{*3} + \frac{1}{2} T^* l_1^{*2} + M^* l_1^* + \frac{e^2 - 3e + 1}{6(1 + e^2)(1 + e^3)} l_2^{*3}; \\ W^* &= \frac{1}{24} l_1^{*4} - \frac{1}{6} T^* l_1^{*3} - \frac{1}{2} M^* l_1^{*2} + \Theta^* l_1^*. \end{aligned}$$

Powyższe rozwiązanie odnosi się do takiego przypadku obciążenia, dla którego zwrot sił tarcia w pierwszej strefie poślizgu jest ujemny. Rozdział 5.1.7 zawiera dyskusję i wyniki tego modelu porównane z wynikami otrzymanymi dla klasycznego modelu tarcia Coulomba.

### 5.1.6 Przybliżona metoda rozwiązania

Problem sformułowany w poprzednich rozdziałach nie posiada rozwiązania analitycznego ze względu na nieskończoną liczbę równań i niewiadomych. Główną ideą proponowanej przybliżonej metody rozwiązania jest ograniczenie liczby równań i niewiadomych.

Po pierwsze założmy, że nieskończony ciąg  $l_i^*$  może być w przybliżeniu opisany przy pomocy  $n$  parametrów  $r_j$ :

$$l_i^* = l_i^*(r_j), \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.27)$$

Oczywiście przy wzrastającej liczbie parametrów  $n$  dokładność takiego przybliżenia wzrasta. Wykorzystując własność ciągu  $l_i^*$  wykazaną w rozdziale 5.1.4, przyjmijmy następującą prostą postać przyporządkowania (5.27):

$$l_i = \begin{cases} r_i & \text{dla } 1 \leq i \leq n - 1, \\ r_n l_{i-1} & \text{dla } i \geq n. \end{cases}$$

Z drugiej strony, liczba równań może być ograniczona przez zaniedbanie warunków zerowej prędkości poślizgu (5.18) dla  $i > m + 1$ . To znaczy, że od rozwiązania będziemy wymagać spełnienia tylko pierwszych  $m$  warunków (5.18).

Mając skończoną liczbę równań i niewiadomych (różną w ogólnym przypadku) rozwiązania problemu będziemy szukać na drodze minimalizacji. Dla obciążenia proporcjonalnego i dla danych obciążeń  $T^*$  i  $M^*$  poszukiwane parametry  $r_j$  są rozwiązaniem

następującego problemu minimalizacji

$$\min_{r_j} \sum_{k=1}^{m+2} w_k [f_k(r_j)]^2, \quad (5.28)$$

gdzie  $w_k$  oznacza współczynniki wagowe, natomiast  $f(r_j)$  są funkcjami reszkowymi zdefiniowanymi jako

$$\begin{aligned} f_k(r_j) &= 4W_{k+1}^* - J_k^* \Theta_{k+1}^*, \quad k = 1, 2, \dots, m \\ f_{m+1}(r_j) &= T^* - T_1^*, \\ f_{m+2}(r_j) &= M^* - M_1^*. \end{aligned}$$

W powyższym podejściu żądamy, aby równania opisujące układ (czyli warunki (5.22) dla  $i \leq m+1$  oraz warunki brzegowe (5.15)) były spełnione tylko w przybliżeniu. W procesie minimalizacji poszukiwane są takie wartości  $r_j$ , dla których funkcje reszkowe są jak najbliższe zera. Współczynniki wagowe zostały wprowadzone w celu wymuszenia możliwie dokładnego spełnienia warunków brzegowych (5.15) oraz “dowartościowania” warunków zerowej prędkości poślizgu w punktach  $O_i$  dalszych od obciążanego końca belki. Ponieważ wraz z oddalaniem się od końca belki ugięcia w kolejnych strefach poślizgu są coraz mniejsze (por. wz. (5.24)) również funkcje reszkowe  $f_k(r_j)$  mają tam w naturalny sposób mniejsze wartości. Zatem zastosowanie współczynników wagowych  $w_k$  rosnących dla większych  $k$  zwiększa ich udział w całkowitej funkcji błędu (5.28).

Dla dowolnej historii obciążenia rozwiązanie traci cechę samopodobieństwa, a układ opisany jest równaniami różniczkowymi (5.19). Proponowana metoda rozwiązania jest naturalnym rozwinięciem przedstawionej powyżej metody dla obciążenia proporcjonalnego. Główna różnica polega na tym, że na drodze minimalizacji poszukuje się pochodnych parametrów  $r_j$  na każdym kroku czasowym, a otrzymane równania różniczkowe  $\dot{r}_j = \dot{r}_j(r_j, t)$  są całkowane po czasie<sup>2</sup>.

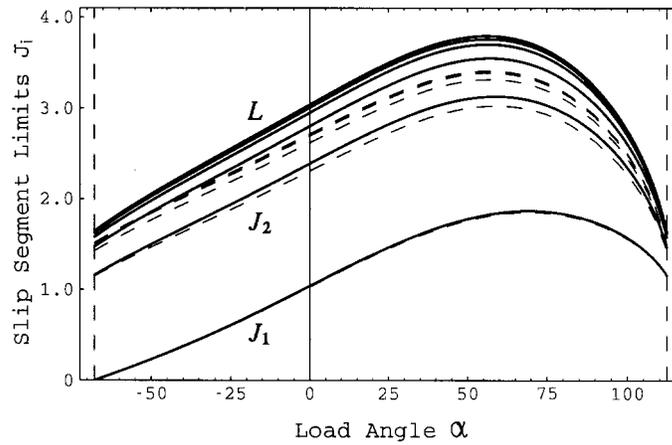
Dwa zjawiska, które mogą wystąpić w trakcie procesu obciążania wymagają specjalnej uwagi. Jak to już zostało wspomniane w rozdziale 5.1.3 na każdym kroku czasowym należy kontrolować prędkość końca belki. W przypadku gdy zmienia ona swój znak należy uwzględnić powstanie nowej strefy poślizgu. Na przykład przy obciążeniu cyklicznym każdemu punktowi zwrotnemu obciążenia towarzyszy powstanie nowej strefy poślizgu. Po drugie należy sprawdzać, czy długość którejś strefy poślizgu nie staje się zerowa. W takim przypadku należy przenieść pozostałe strefy oraz usunąć odpowiednie warunki (5.18).

### 5.1.7 Wyniki i dyskusja

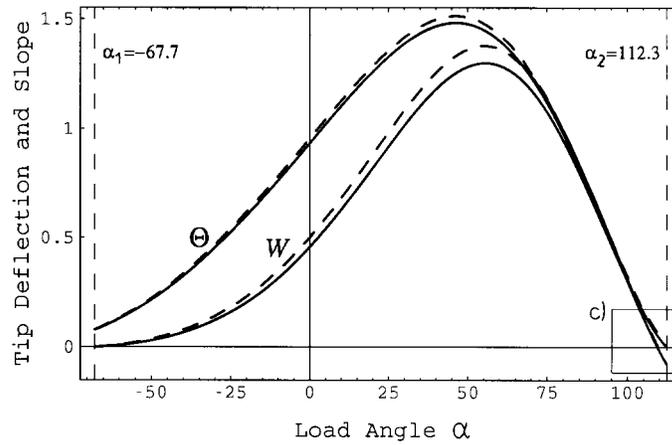
Poniżej przedstawione są wyniki numeryczne dla przykładowych historii obciążenia. Na rysunku 5.5 pokazane są rozwiązania samopodobne dla monotonicznego obciążenia siłą i momentem. Następne rysunki zawierają wyniki dla niemonotonicznych historii obciążenia otrzymane dla obciążenia samym momentem zginającym  $M$ , przy zerowej sile poprzecznej

<sup>2</sup>Szczegóły można znaleźć w pracy Stupkiewicz, Mróz [104].

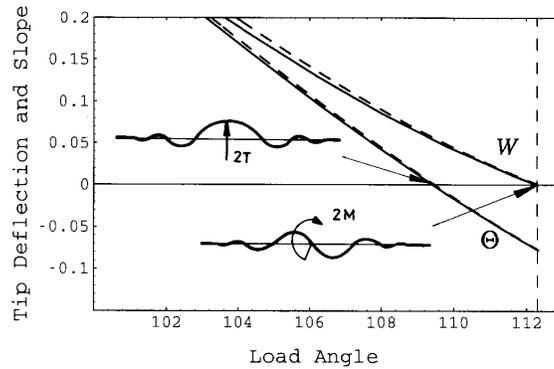
(a)



(b)



(c)



Rysunek 5.5: Rozwiązania samopodobne dla monotonicznego obciążenia siłą  $T$  i momentem  $M$  określonymi przez kąt obciążenia  $\alpha$ : (a) układ stref poślizgu  $J_i^*(\alpha)$ ; (b) ugięcie  $W^*(\alpha)$  i kąt ugięcia  $\Theta^*(\alpha)$ ; (c) rozwiązania dla nieskończonej belki obciążonej samą siłą lub samym momentem. Wyniki dla modelu tarcia sprężystego narysowane są linią przerywaną.

$T = 0$ . Ponieważ model ograniczony jest do przypadku obciążenia quasi-statycznego, dla wszystkich historii obciążenia przyjęto najprostszą — liniową — zależność obciążenia od parametru obciążenia  $t$ , rosnącą lub malejącą w zależności od etapu obciążenia (obciążanie, odciążanie, dociążanie, itd.). We wszystkich przykładach, z wyjątkiem obciążenia monotonicznego, wymiar charakterystyczny  $l_0 = l_M$  jest związany z wielkością momentu  $M_I$  w pierwszym punkcie zwrotnym obciążenia ( $M_I^* = 1$ ), czyli na końcu pierwszego etapu obciążania — wzrostu monotonicznego. Oczywiście w punkcie tym rozwiązanie przestaje być samopodobne.

Aby prawidłowo opisywać zjawiska histerezy należy wybrać odpowiednią miarę uogólnionego przemieszczenia związaną z obciążeniem momentem gnącym. Taką miarą jest oczywiście kąt ugięcia w punkcie przyłożenia momentu, czyli na końcu belki. Kąt ten przyjęty będzie jako  $\Theta^* = -\Theta_1^*$ , aby zapewnić jego dodatnie wartości dla dodatnich wartości momentu gnącego  $M^*$ .

### Obciążenie proporcjonalne

Rozwiązanie problemu belki pod rosnącym monotonicznie obciążeniem proporcjonalnym zależy od jednego parametru, mianowicie od stosunku siły do momentu — patrz równania (5.21). Obciążenie zostało zdefiniowane przez “kąt obciążenia”  $\alpha$ :

$$T^* = \sin \alpha, \quad M^* = \cos \alpha,$$

Taka definicja bezwymiarowych obciążeń narzuca przyjęcie wymiaru charakterystycznego  $l_0$  w postaci

$$l_0^2 = \frac{1}{2} \left( l_T^2 + \sqrt{l_T^4 + 4l_M^4} \right),$$

gdzie  $l_T$  i  $l_M$  określone są wzorami (5.20). Prostym przypadkiem obciążenia samym momentem lub samą siłą odpowiadają wartości odpowiednio  $\alpha = 0^\circ$  lub  $\alpha = 90^\circ$ , a wymiar charakterystyczny  $l_0$  jest wtedy równy  $l_M$  lub  $l_T$ .

Rysunek 5.5 zawiera wyniki otrzymane dla obciążeń proporcjonalnych. Na rysunku 5.5(a) pokazane są wykresy  $J_i^*(\alpha)$  oraz  $L^*(\alpha) = J_\infty^*(\alpha)$ , a rysunek 5.5(b) przedstawia ugięcie  $W^*(\alpha)$  oraz kąt ugięcia  $\Theta^*(\alpha)$  końca belki. Linie przerywane oznaczają rozwiązanie analityczne dla modelu tarcia sprężystego. Dokładność tego uproszczonego modelu jest jak widać bardzo dobra, szczególnie w odniesieniu do ugięcia końca belki ( $W^*$ ,  $\Theta^*$ ).

Parametr  $\alpha$  zmienia się od  $\alpha_1 = -67.7^\circ$  do  $\alpha_2 = 112.3^\circ$ . Zakres ten odpowiada obciążeniom, przy których ugięcie końca belki jest dodatnie, a zwrot sił tarcia w pierwszej strefie poślizgu jest ujemny.

Graniczne wartości kąta  $\alpha$  odpowiadają przypadkowi o zerowym ugięciu końca belki ( $W^* = 0$ ). Przypadek ten jest równoważny obciążeniu nieskończonej belki momentem zginającym o wartości  $2M$  — rys. 5.5(c). Siłę tnącą  $T$  można wtedy traktować jako reakcję jednej pół-nieskończonej części belki na drugą. Dla  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1 + 180^\circ$ , ugięcie końca belki jest ujemne, natomiast długości stref poślizgu są identyczne jak w przypadku  $\alpha - 180^\circ$ . Potwierdza to rysunek 5.5(a), gdzie można zaobserwować, że  $J_i^*(\alpha_2) = J_{i+1}^*(\alpha_1)$ .

Kąt obciążenia  $\alpha = 109.4^\circ$  odpowiada przypadkowi nieskończonej belki obciążonej poprzeczną siłą  $2T$ . Z warunków symetrii wynika wtedy warunek  $\Theta^* = 0$  — rys. 5.5(c).

	$M^*$	$W^*$	$l_1^* = J_1^*$	$J_2^*$	$L^* = J_\infty^*$
Stupkiewicz, Mróz [104]	-0.3739	0.0684	1.3739	1.8725	2.1434
Nikitin [78]	-0.374	0.068	1.374	1.873	2.141

Tabela 5.1: Porównanie wyników dla przypadku  $\Theta^* = 0$ .

$m$	$n$	$l_1^*$	$l_2^*$	$l_3^*$	$r_n = \frac{l_{i+1}^*}{l_i^*}$	$L^*$	$\Theta^*$	Błąd
2	3	0.9269	1.2293	—	0.29381	2.6676	0.68428	$0.99 \times 10$
2	4	1.0407	1.3460	0.41214	0.35007	3.0208	0.93296	$0.56 \times 10^{-29}$
2	5	1.0407	1.3461	0.41363	0.37752	3.0399	0.93297	$0.11 \times 10^{-28}$
8	9	1.0405	1.3459	0.41316	0.38184	3.0365	0.93259	$0.11 \times 10^{-1}$
8	10	1.0407	1.3461	0.41324	0.38188	3.0370	0.93296	$0.10 \times 10^{-14}$
8	11	1.0407	1.3461	0.41324	0.38200	3.0370	0.93296	$0.44 \times 10^{-11}$

Tabela 5.2: Porównanie wyników dla różnych wartości  $m$  i  $n$  ( $\alpha = 0$ ).

Przypadek ten został rozwiązany przez Nikitina [78], a zgodność wyników osiągniętych różnymi metodami jest bardzo dobra — patrz tabela 5.1. Nikitin [78] założył skończoną liczbę stref poślizgu i aby uzyskać jednakową liczbę równań i niewiadomych odrzucił jeden z warunków brzegowych dla  $x = L$  dotyczący  $w'$ . Do wyników przedstawionych w tabeli użyto wymiaru charakterystycznego  $l_0 = l_T$ , co odpowiada wartości obciążenia  $T^* = 1$ .

Z kolei obciążenie samym momentem gnącym ( $\alpha = 0$ ) odpowiada przypadkowi belki spoczywającej na podłożu i poddanej wymuszeniu zmianą krzywizny  $\kappa^t = \kappa^t(t)$  jednorodną wzdłuż długości belki. Zależność między momentem zginającym w belce a jej krzywizną  $\kappa = w''$  przybiera wtedy postać:

$$M = EI(\kappa - \kappa^t) = EI(w'' - \kappa^t).$$

Zmiana krzywizny może być spowodowana na przykład gradientem temperatury w przekroju poprzecznym belki. Przypadkiem tym zajmowali się Fischer i in. [30, 31] w odniesieniu do problemu studzenia długich szyn kolejowych po walcowaniu na gorąco. Pole momentów  $M^t(x, t)$  dla przypadku wymuszenia zmianą krzywizny  $\kappa^t$  można łatwo otrzymać mając rozkład momentów gnących  $M(x, t)$  wyznaczony dla obciążenia momentem  $M^0(t)$  na końcu belki:

$$M^t(x, t) = M(x, t) - M^0(t),$$

gdzie  $M^0 = EI\kappa^t$  jest zastępczym momentem termicznym. Ugięcia belki i rozmiary stref poślizgu są w obu przypadkach identyczne.

Dokładność zastosowanej metody została przetestowana przez porównanie wyników otrzymanych dla różnych wartości  $m$  oraz  $n$ , czyli dla różnych liczb niewiadomych oraz równań. Wyniki pokazane w tabeli 5.2 pokazują, że dla szerokiego zakresu zmian parametrów  $m$  i  $n$  otrzymane wyniki są bardzo zbliżone do siebie. Ze względu na zależność liczby funkcji resztkowych  $f_k(r_j)$  od  $m$ , błąd, czyli minimalną wartość kwadratu funkcji resztkowych — wz. (5.28) — można porównywać tylko dla przypadków o tej samej wartości  $m$ . Więcej szczegółów dotyczących analizy dokładności metody zawiera praca [104].

Należy zwrócić uwagę, że otrzymane wartości parametru  $r_n$  wykazują bardzo dobrą zgodność z wynikiem teoretycznym (5.26):  $e = l_{i+1}^*/l_i^* = 0.38197$ .

### Proste programy obciążenia

Na rysunkach 5.6 i 5.7 pokazane są proste historie obciążenia — obciążenie-odciążenie oraz obciążenie-odciążenie-dociążenie. Na wykresach przedstawiających ewolucję stref poślizgu  $J_i^*(t)$ , kolejne linie od dołu przedstawiają położenie kolejnych punktów  $O_i$  rozdzielających sąsiadujące strefy poślizgu. Powstanie nowej strefy jest zawsze związane ze zmianą znaku przyrostu obciążenia w punktach zwrotnych ( $M_I^* = 1$  lub  $M_{II}^* = -1$ ). Dla obu historii obciążenia widać, że przy wzroście obciążenia (po ostatnim punkcie zwrotnym) pamięć kontaktu zostaje wymazana i układ dąży do rozwiązania samopodobnego (przerwane linie na rys. 5.6 i 5.7).

Interesującą cechę układu można zaobserwować na rysunku 5.8. Przy niesymetrycznym cyklu odciążenie-dociążenie ( $M_{II}^* = 0$ ), dwie sąsiadujące strefy poślizgu znikają przy pewnej wartości obciążenia. Zachowanie to różni się od przypadku symetrycznego dociążania ( $M_{II}^* = -1$ , rys. 5.7), w którym wszystkie strefy poślizgu ewoluują do rozwiązania samopodobnego. Oczywiście musi istnieć wartość  $M_{II}^*$ , rozgraniczająca te dwa stany, jednak problem ten nie był głębiej analizowany.

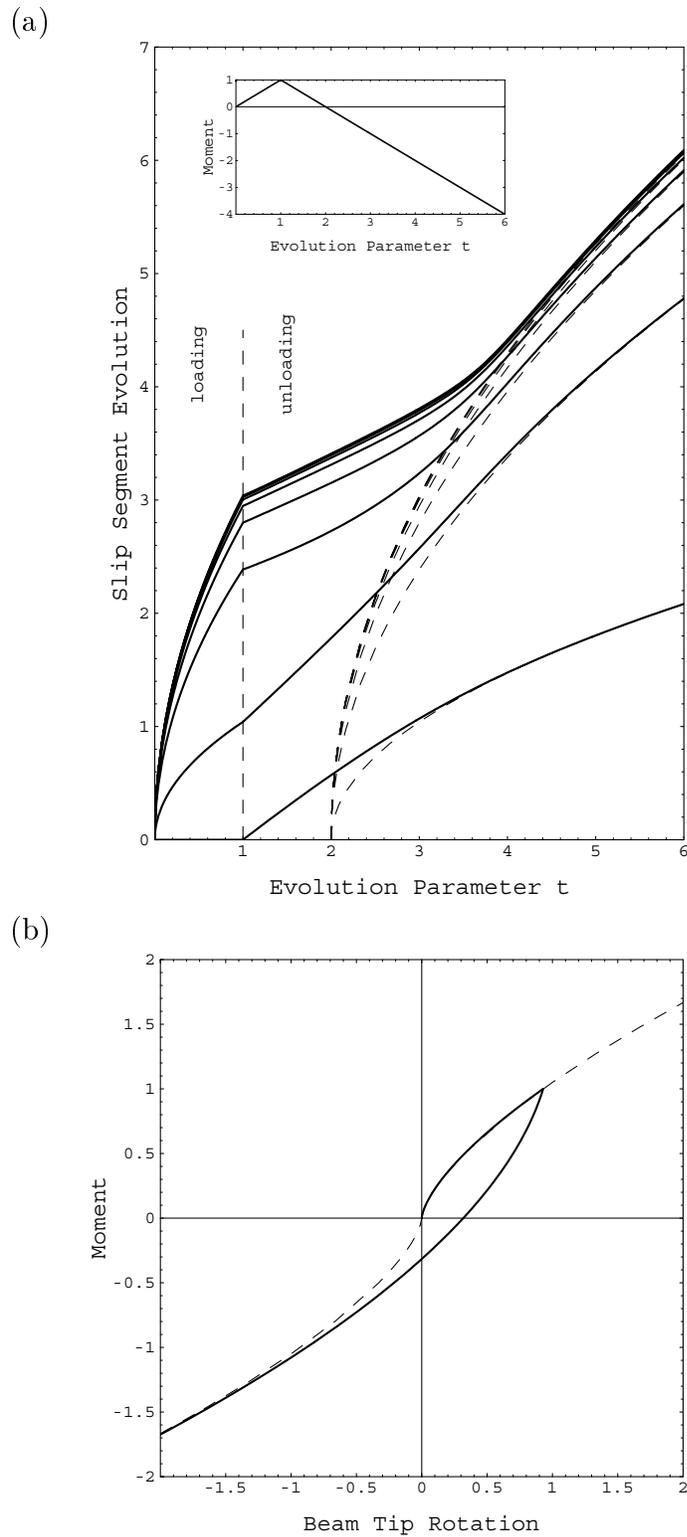
Praca [104] zawiera analizę dokładności metody numerycznego rozwiązywania problemu dla dowolnych historii obciążenia. Podobnie jak dla rozwiązań samopodobnych, wyniki otrzymane dla różnych wartości parametrów  $m$  i  $n$  są bardzo zbliżone do siebie, co świadczy o dużej dokładności oraz małej wrażliwości na wybór parametrów  $m$  i  $n$  (oczywiście w rozsądnych zakresach wartości tych parametrów).

### Obciążenia cykliczne

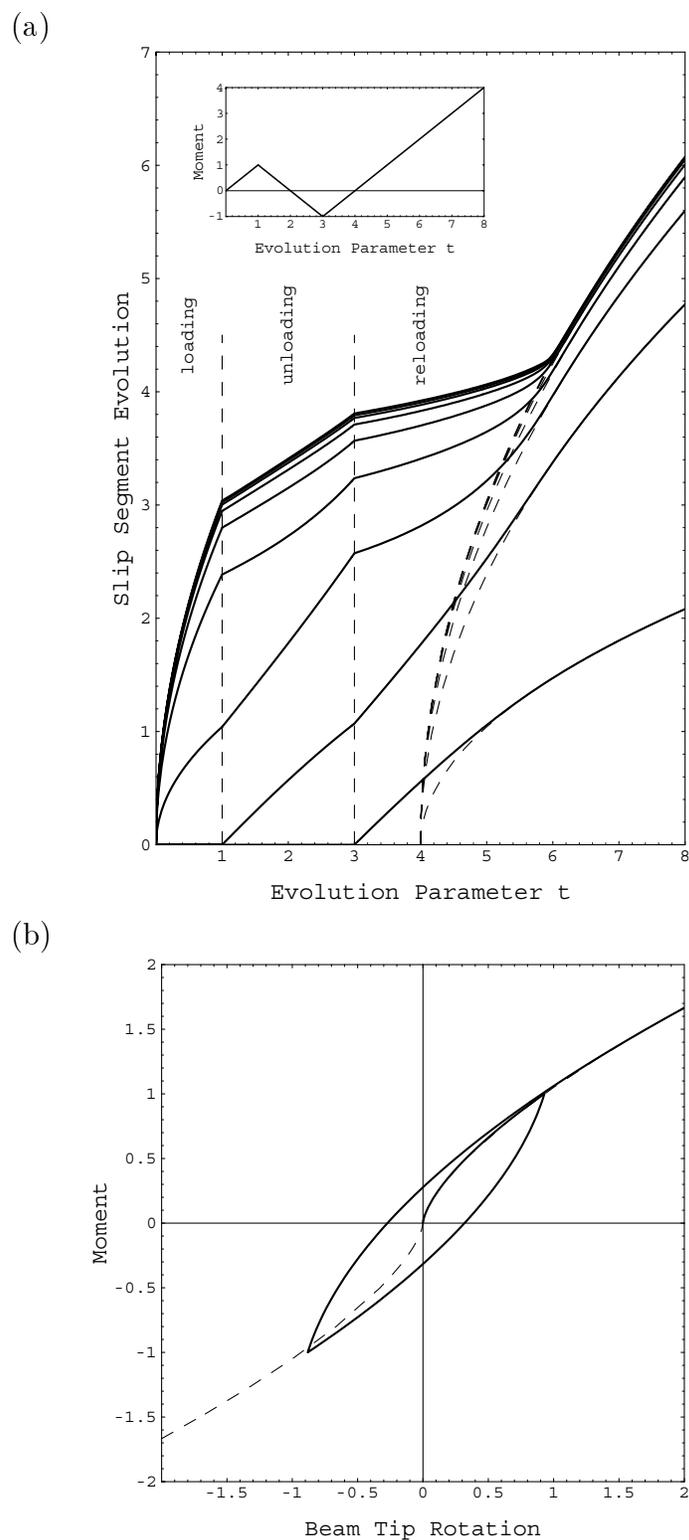
Znikanie stref poślizgu jest typowe we wszystkich analizowanych przypadkach obciążenia cyklicznego. Wyniki dla symetrycznego cyklu obciążenia pokazane są na rysunku 5.9. Na rysunku 5.9(a) można zaobserwować, że po kilku (ok. trzech) cyklach obciążenia osiągnany jest stan bliski asymptotycznemu. Natomiast symetryczna i prawie ustalona pętla histerezy jest osiągnana już po pierwszym cyklu — rysunek 5.9(b). W stanie ustalonym, równoległe z powstawaniem nowych stref poślizgu w punktach zwrotnych obciążenia, siódma i ósma strefa cyklicznie znikają. Zatem można powiedzieć, że praktycznie tylko pierwszych osiem lub dziewięć stref jest aktywnych, podczas gdy pozostałe bardzo wolno (z zanikającą prędkością) przemieszczają się w kierunku od końca belki.

Rysunek 5.10 przedstawia ewolucję stref poślizgu i pętli histerezy dla bardziej złożonego programu obciążenia. Mianowicie obciążenie cykliczne z amplitudą  $[-0.5, +0.5]$  jest poprzedzone dwoma i pół cyklami o amplitudzie  $[-1, +1]$ . Po kilku cyklach o mniejszej amplitudzie układ stref poślizgu zmienia się cyklicznie, natomiast pętla histerezy nie jest ustalona — rysunek 5.10(b,c). Jednak, jak widać na rysunku 5.10(c), układ dąży do stanu ustalonego z symetryczną pętlą histerezy.

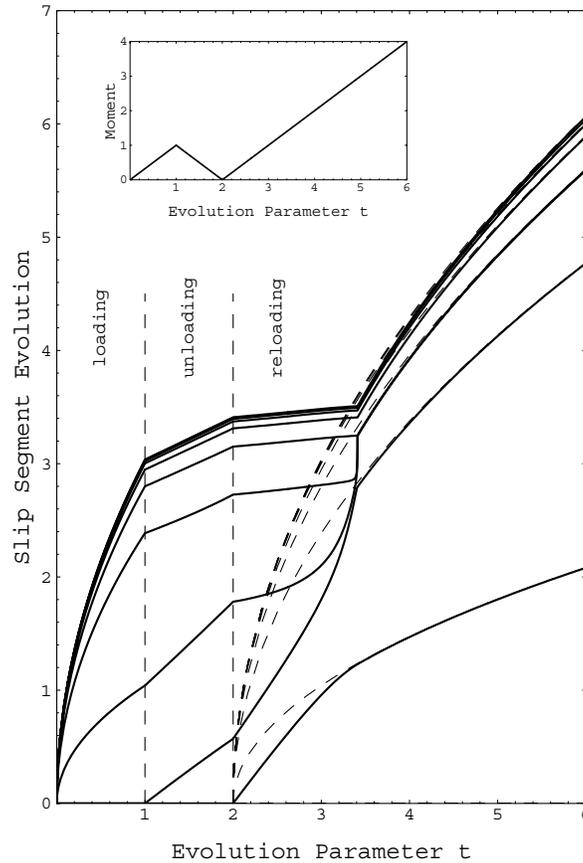
W przypadku niesymetrycznego obciążenia cyklicznego (rysunek 5.11) nie udało się znaleźć stanu ustalonego. Po dwudziestu pełnych cyklach obciążenia całkowita długość strefy aktywnych poślizgów  $L^*$  (rys. 5.11(b)) oraz maksymalny kąt ugięcia w każdym



Rysunek 5.6: Obciążenie-odciążenie belki zginanej momentem  $M^*$  ( $T^* = 0$ ): (a) ewolucja stref poślizgu  $J_i^*(t)$ ; (b) krzywa obciążenie-przemieszczenie,  $M^*(\Theta^*)$ .



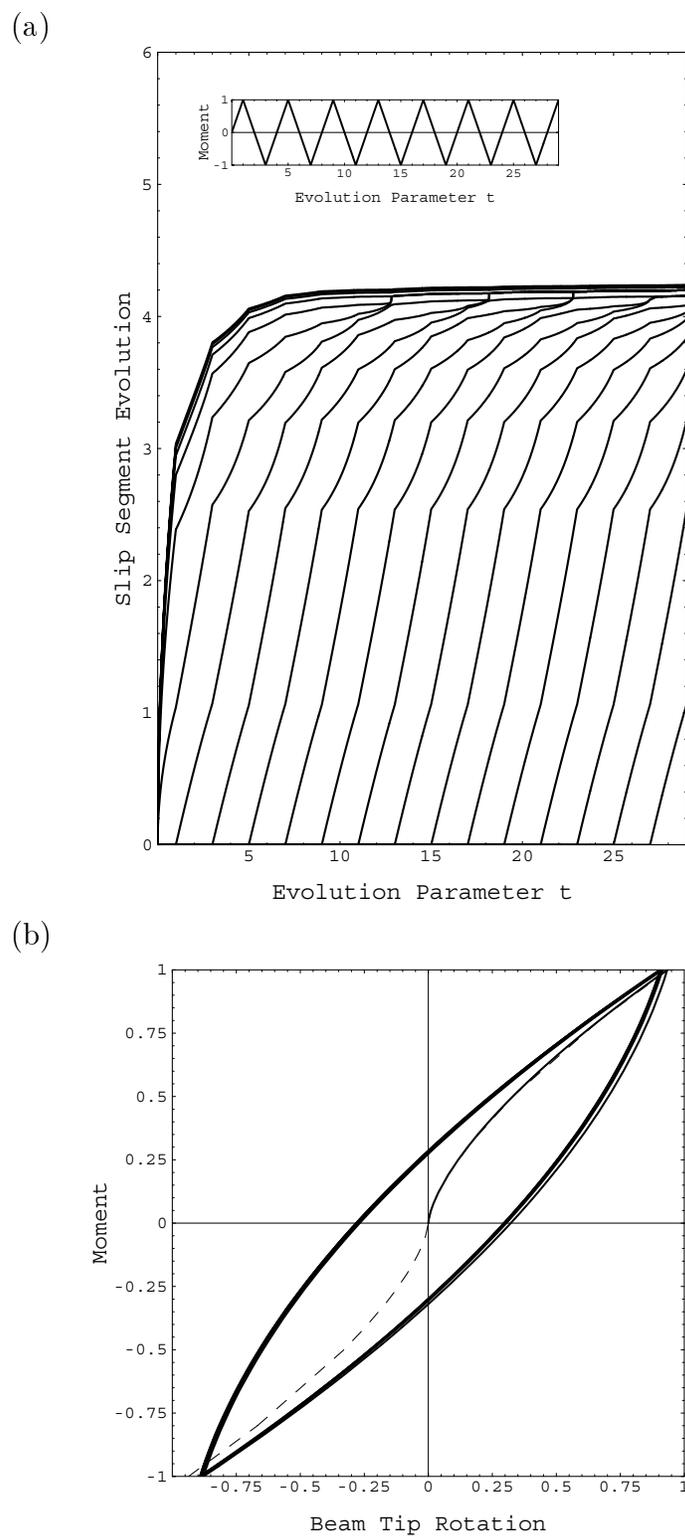
Rysunek 5.7: Obciążenie-odciążenie-dociążenie belki zginanej momentem  $M^*$ : (a) ewolucja stref poślizgu  $J_i^*(t)$ ; (b) krzywa obciążenie-przemieszczenie,  $M^*(\Theta^*)$ .



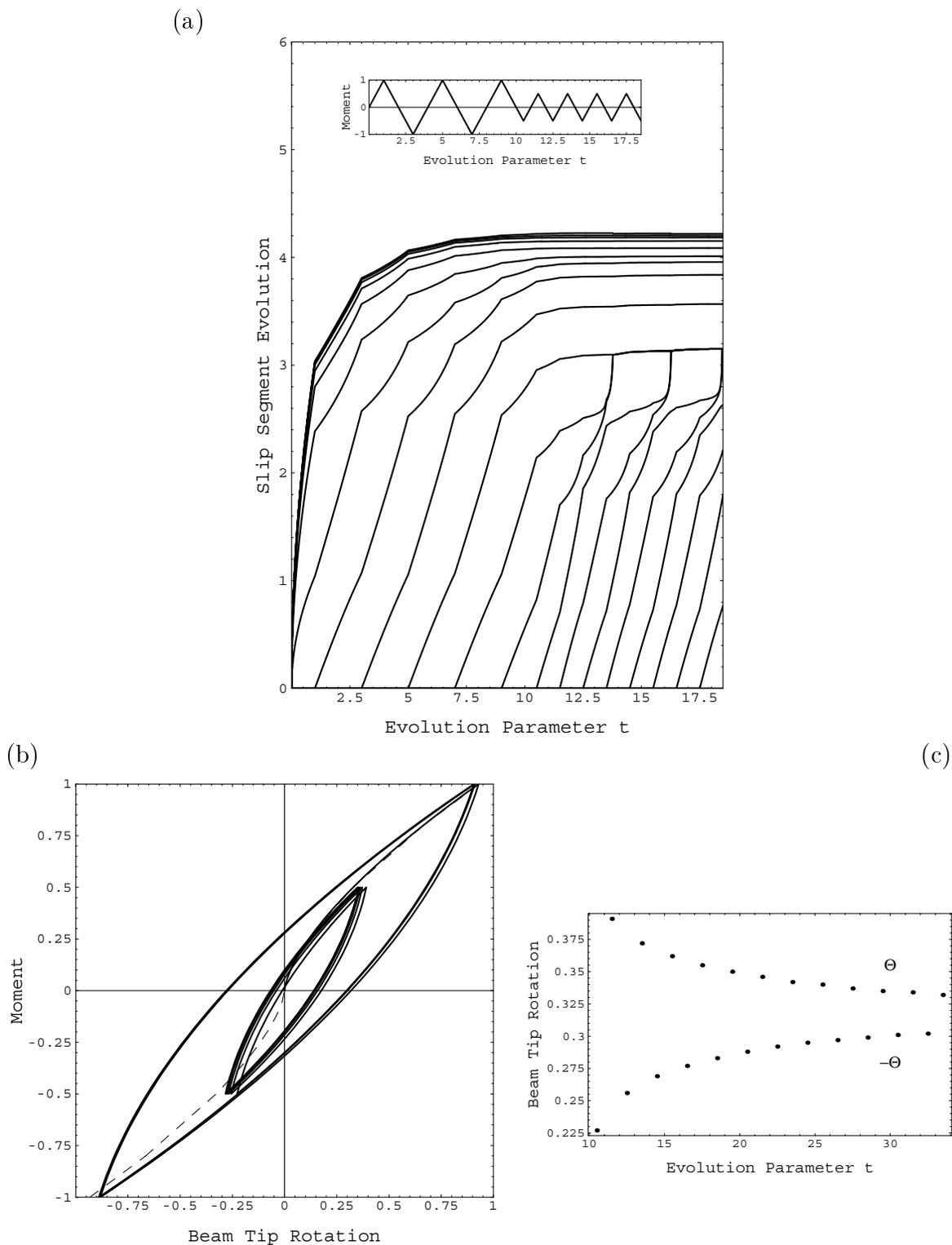
Rysunek 5.8: Niesymetryczne obciążenie-odciążenie-dociążenie belki zginanej momentem  $M^*$ : ewolucja stref poślizgu  $J_i^*(t)$ .

cyklu  $\Theta_{max}^*$  (rys. 5.11(c)) ciągle rosna. A zatem narzuca się wniosek, że układ poddany niesymetrycznemu cyklowi obciążenia nie posiada stanu asymptotycznego. Drugą możliwością jest, że stan asymptotyczny osiągnięty jest po bardzo dużej liczbie cykli. Jednak porównując z wynikami dla symetrycznych obciążeń cyklicznych, gdzie stan asymptotyczny osiągnięty jest po kilku cyklach obciążenia, ta druga możliwość nie wydaje się prawdopodobna. W końcu, wykluczyć też można tłumaczenie takiego zachowania kumulacją błędów numerycznych. Nie ma bowiem powodu, dla którego błędy numeryczne miałyby w rozważanym przypadku być większe niż dla symetrycznych cykli obciążenia. Zatem z dużym prawdopodobieństwem można stwierdzić, że nie istnieje stan asymptotyczny przy niesymetrycznym obciążeniu cyklicznym.

Jak to już było sygnalizowane, we wszystkich rozpatrywanych przypadkach obciążenia punkty  $O_i$  rozgraniczające strefy poślizgu poruszały się w kierunku od końca belki. Widać to na rysunkach 5.6–5.10, gdzie wszystkie krzywe  $J_i^*(t)$  rosna monotonicznie. Oczywiście również całkowita długość strefy aktywnych poślizgów rośnie monotonicznie, co potwierdza słuszność założenia (5.9). Co więcej, ponieważ nigdy nie zaobserwowano spadku którejkolwiek z wielkości  $J_i^*(t)$ , wydaje się, że jest to odzwierciedleniem jakiejś ogólniejszej zasady, która nie została jednak na razie wytłumaczona ani udowodniona.

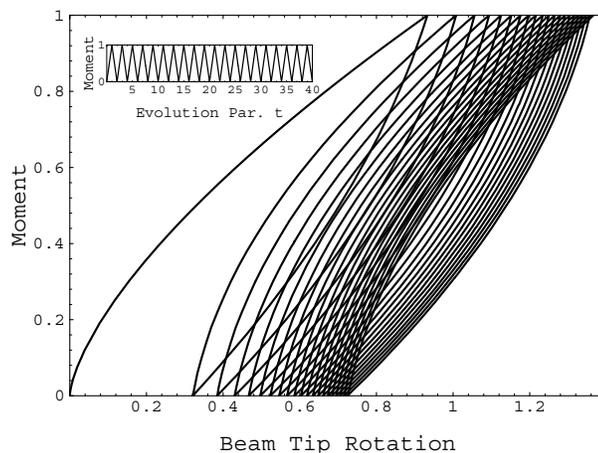


Rysunek 5.9: Belka obciążona cyklicznie zmiennym momentem  $M^*$ : (a) ewolucja stref poślizgu  $J_i^*(t)$ ; (b) zależność obciążenie-przemieszczenie  $M^*(\Theta^*)$ .

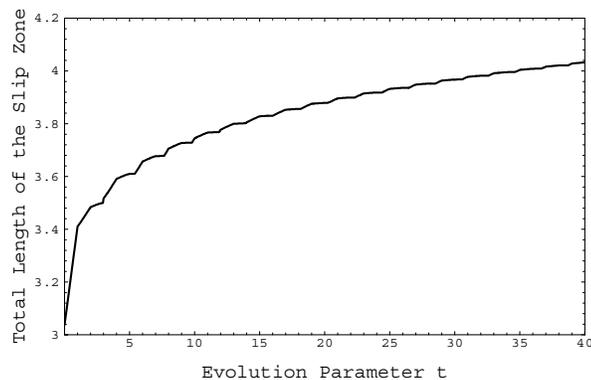


Rysunek 5.10: Belka obciążona cyklicznie ze zmianą amplitudy obciążenia: (a) ewolucja stref poślizgu  $J_i^*(t)$ ; (b) zależność obciążenie-przemieszczenie  $M^*(\Theta^*)$ ; (c) kąt obrotu  $\Theta^*$  w punktach zwrotnych obciążenia ( $\Theta^*$  dla  $M^* = 0.5$  oraz  $-\Theta^*$  dla  $M^* = -0.5$ ).

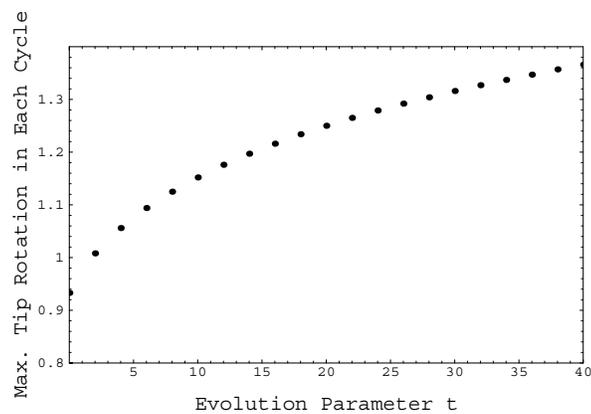
(a)



(b)



(c)



Rysunek 5.11: Niesymetryczny cykl obciążenia: (a) zależność obciążenie-przemieszczenie  $M^*(\Theta^*)$ ; (b) długość strefy aktywnych poślizgów  $L^*(t)$ ; (c) maksymalny kąt obrotu końca belki  $\Theta_{max}^*$  w każdym cyklu.

### 5.1.8 Podsumowanie

Mimo że problem belki na podłożu ciernym wydaje się stosunkowo prosty, jego rozwiązanie okazuje się znacznie bardziej skomplikowane niż analogicznego przykładu paska na podłożu — rozdz. 4. Przedstawione sformułowanie jest znacznie bardziej ogólne od dotychczasowych (Fischer i in. [30, 31]; Nikitin [78]). W szczególności, jedynie po założeniu nieskończonej liczby stref poślizgu można spełnić wszystkie warunki brzegowe na końcu odkształconej części belki. Ponadto nowe sformułowanie pozwala opisać dowolne historie obciążenia, a nie tylko obciążenia monotonicznie rosnące.

Zaprezentowane wyniki obrazują kilka ciekawych cech układu. Po pierwsze, dla monotonicznie rosnących obciążeń proporcjonalnych rozwiązanie jest samopodobne. Po drugie układ posiada stany przejściowe w dwóch ogólnych przypadkach. Gdy od pewnego momentu obciążenie rośnie monotonicznie rozwiązanie dąży asymptotycznie do rozwiązania samopodobnego, a pamięć historii obciążenia jest stopniowo wymazywana — rys. 5.6–5.8. Z kolei przy symetrycznych obciążeniach cyklicznych ustala się stan asymptotyczny, w którym układ stref poślizgu zmienia się cyklicznie — rys. 5.9 i 5.10. Ponadto należy zwrócić uwagę, że takie same charakterystyki zewnętrzne (zależność obciążenie-przemieszczenie) odpowiadają różnym rozkładom stref poślizgu wynikającym z różnych historii obciążenia — por. rys. 5.9 i 5.10.

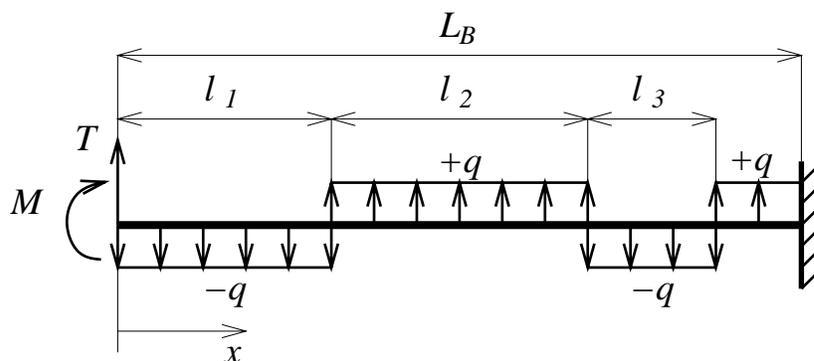
Metoda przybliżonego rozwiązania jest czasochłonna, szczególnie gdy liczonych jest wiele cykli obciążenia. Należy jednak podkreślić, że jej dokładność jest zadowalająca. Świadczy o tym między innymi doskonała zgodność z wynikami Nikitina [78] dla monotonicznego obciążenia belki nieskończonej. Również przy dowolnych programach obciążenia wyniki nie są silnie wrażliwe na zmianę liczby równań i niewiadomych.

Rozwiązanie analityczne uzyskane dla modelu tarcia sprężystego okazuje się być dobrym przybliżeniem. Model ten może być jednak stosowany tylko dla obciążeń monotonicznych.

Ponieważ strefa aktywnych poślizgów ma skończoną długość, początkowe założenie, że belka jest pół-nieskończona może być osłabione. Wystarczy założenie, że belka jest na tyle długa, że strefa aktywnych poślizgów nie dochodzi do swobodnego końca belki. Następny podrozdział zawiera dyskusję dotyczącą belki o skończonej długości, gdy warunek ten nie jest spełniony.

## 5.2 Belka o skończonej długości

Jednym z wniosków poprzedniego rozdziału jest, że odpowiedź na obciążenie pół-nieskończonej belki na podłożu ciernym obejmuje tylko jej część o skończonej długości. Stąd wynika, że założenie nieskończonej długości może być osłabione — wystarczy założyć, że długość belki jest większa od długości strefy aktywnych poślizgów belki poddanej obciążeniu. Niniejszy rozdział zawiera jakościowe omówienie przypadku, gdy strefa aktywnych poślizgów osiąga swobodny lub utwierdzony koniec belki. Następnie przedstawione są proste przykłady odspajania belki zamocowanej do podłoża, która na odspojonym odcinku oddziałuje ciernie z podłożem. Przykłady te pokazują różnice w zachowaniu zginanej belki oraz rozciąganej paska (rozd. 4) oraz wpływ tarcia na postępujące odspajanie belki.

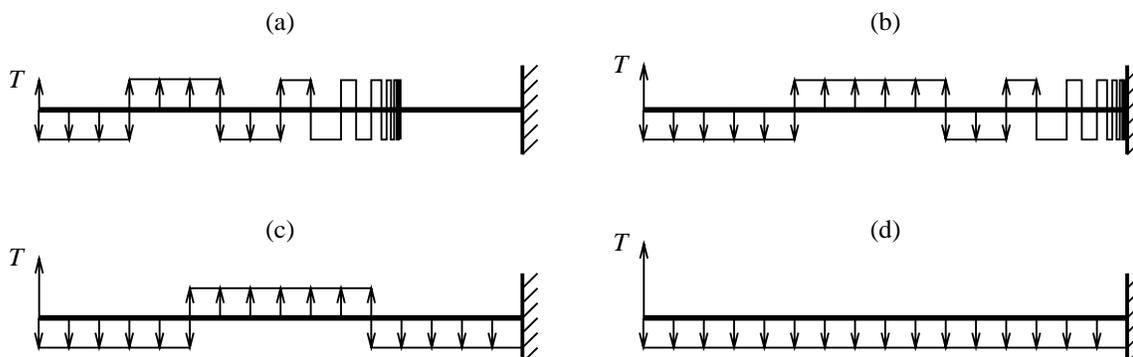


Rysunek 5.12: Utwierdzona belka oddziałująca ciernie z podłożem.

### 5.2.1 Ocena jakościowa oddziaływania belki z podłożem

Rozważmy belkę o długości  $L_B$  pokazaną na rysunku 5.12. Jej swobodny koniec jest obciążony siłą poprzeczną  $T$  oraz momentem gnącym  $M$ . Ugięciom belki pod wpływem obciążenia towarzyszą poprzeczne poślizgi, które powodują powstanie poprzecznych sił tarcia między belką a podłożem. Po przyjęciu założeń, podobnych jak w poprzednim rozdziale, znana jest wielkość wydatku sił tarcia  $q$ , natomiast nie jest znany ich zwrot w poszczególnych punktach belki.

Rysunki 5.13(a)–(d) przedstawiają schematycznie przewidywany rozkład sił tarcia początkowo prostej belki poddanej monotonicznie rosnącemu obciążeniu siłą  $T$ . Dla małych wartości obciążenia, rozwiązanie jest takie jak dla belki półnieskończonej — rys. 5.13(a). Wraz ze wzrostem obciążenia samopodobny układ stref poślizgu obejmuje coraz większą część belki, aż do obciążenia, przy którym długość strefy aktywnych poślizgów  $L$  zrówna się z długością belki  $L = L_B$  — rys. 5.13(b). Przy dalszym wzroście obciążenia następuje przejście od nieskończonej liczby stref poślizgu (właściwej dla rozwiązania samopodobnego belki pół-nieskończonej) do skończonej liczby stref. Dochodzące do utwierdzonego końca belki strefy poślizgu kolejno znikają — rys. 5.13(c). W końcu, pozostaje jedna strefa poślizgu obejmująca całą długość belki tak, jak to pokazano na rysunku 5.13(d).



Rysunek 5.13: Rozkład sił tarcia przy rosnącym obciążeniu belki utwierdzonej.

Podobnie można przewidzieć zachowanie belki swobodnej spoczywającej na podłożu ciernym i obciążonej na jednym z końców. Sekwencja zdarzeń będzie podobna z tym, że po wygaszeniu stref poślizgu dochodzących do swobodnego końca belki, w końcu pozostaną dwie strefy poślizgu równoważące przyłożone obciążenie, a cała belka oprócz ugięcia dozna sztywnego obrotu.

Modelowanie przejścia od stanu z nieskończoną do stanu ze skończoną liczbą stref poślizgu jest niezwykle złożone, gdyż wiąże się ze zmianą warunków brzegowych oraz z koniecznością uwzględnienia procesu wygaszania nieskończonej liczby stref poślizgu na końcu belki. Opis ilościowy tego zjawiska nie został poruszony w niniejszej pracy. Następny podrozdział zawiera sformułowanie problemu belki o skończonej długości, na której występuje skończona i znana liczba stref poślizgu. Odpowiada to stanowi pokazanemu na rysunku 5.13(c).

## 5.2.2 Sformułowanie problemu

Równania opisujące belkę o skończonej długości są podobne jak w przypadku belki pół-nieskończonej (5.1)–(5.4), z tym, że zamiast czterech warunków brzegowych (5.3) nakładane są tylko dwa warunki na końcu belki  $x = L_B$ . W zależności od sposobu zamocowania mogą to być warunki na ugięcie i kąt ugięcia w przypadku belki utwierdzonej lub na przykład warunek zerowej siły tnącej i zerowego momentu gnącego dla swobodnego końca belki. W ogólnym przypadku ugięcie  $w$  oraz jego trzy pierwsze pochodne na końcu belki ( $x = L_B$ ) są związane dwoma ograniczeniami.

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że nieobciążony koniec belki jest zamocowany. Wtedy warunki brzegowe dla  $x = L_B$  przyjmują postać:

$$w(L_B, t) = W_e = 0, \quad w'(L_B, t) = \Theta_e = 0. \quad (5.29)$$

Ugięcia i siły wewnętrzne dla  $x = L_B$  oznaczane będą przez  $W_e$ ,  $\Theta_e$ ,  $M_e$  i  $T_e$ .

Ponieważ cała belka jest podzielona na strefy poślizgu (aktywne) równanie (5.1) można, podobnie jak w przypadku belki pół-nieskończonej, przekształcić do postaci (5.10):

$$EIw^{IV} = n_1(-1)^{i-1}q, \quad 0 \leq x_i \leq l_i, \quad n_1 = \pm 1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.30)$$

Oczywiście teraz liczba stref poślizgu  $N$  jest skończona i znana. Niewiadomymi są  $N$  długości stref poślizgu  $l_i$  oraz cztery wielkości  $W_e$ ,  $\Theta_e$ ,  $M_e$  i  $T_e$  określone dla  $x = L_B$  — w sumie  $N + 4$  niewiadome. Równań jest również  $N + 4$ : po dwa warunki brzegowe na obu końcach belki (dla  $x = 0$  i  $x = L_B$ );  $N - 1$  warunków zerowej prędkości poślizgu w punktach rozgraniczających strefy poślizgu oraz jedno równanie wiążące długości stref poślizgu z całkowitą długością belki:  $\sum_{i=1}^N l_i = L_B$ . Długość belki może być stała, może też rosnać, gdy rozpatrywane jest postępujące odspojenie belki od podłoża. W drugim przypadku, dodatkowym równaniem pozwalającym wyznaczyć przyrost długości  $L_B$  jest warunek propagacji szczeliny odspajającej (warunek odspojenia).

Równanie (5.30) można scałkować wewnątrz każdej strefy poślizgu. Otrzymaną krzywą ugięcia opisują wzory (5.11)–(5.13), przy czym wyrazy ciągów  $T_i$ ,  $M_i$ ,  $\Theta_i$  oraz  $W_i$  są dla

$i = 1, 2, \dots, N + 1$  określone wzorami

$$\begin{aligned}
 T_i &= T_e + \sum_{k=i}^N n_1 (-1)^k q l_k, \\
 M_i &= M_e + \sum_{k=i}^N \left[ \frac{1}{2} n_1 (-1)^k q l_k^2 - T_k l_k \right], \\
 \Theta_i &= \Theta_e + \frac{1}{EI} \sum_{k=i}^N \left[ \frac{1}{6} n_1 (-1)^k q l_k^3 - \frac{1}{2} T_k l_k^2 - M_k l_k \right], \\
 W_i &= W_e + \frac{1}{EI} \sum_{k=i}^N \left[ \frac{1}{24} n_1 (-1)^k q l_k^4 - \frac{1}{6} T_k l_k^3 - \frac{1}{2} M_k l_k^2 - EI \Theta_k l_k \right]. \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

Warunki zerowej prędkości poślizgu w punktach  $O_i$  są identyczne jak dla belki nieskończonej — wz. (5.18):

$$\dot{W}_i - \dot{J}_{i-1} \Theta_i = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N. \quad (5.32)$$

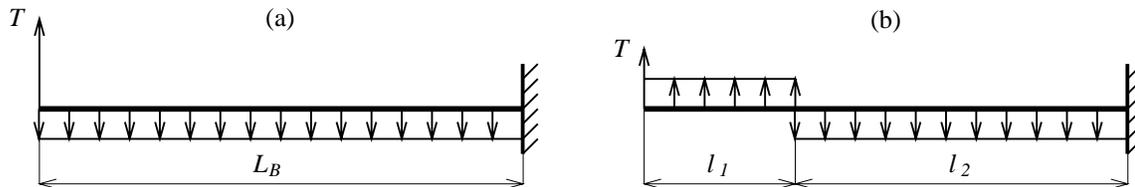
Problem belki o skończonej długości opisany jest  $N - 1$  równaniami różniczkowymi zwyczajnymi (5.32) wraz z dodatkowymi pięcioma równaniami algebraicznymi wynikającymi z warunków brzegowych na końcach belki. Są to na przykład równania (5.2) oraz (5.29) dla belki utwierdzonej i obciążonej siłą  $T$  i momentem  $M$ .

W przypadku belki, której długość może rosnać na skutek odspajania od podłoża, całkowita długość belki jest funkcją czasu i układ należy wzbogacić o dodatkowy warunek propagacji szczeliny odspajającej.

Podobnie jak w przypadku belki pół-nieskończonej, każdej zmianie znaku przyrostu obciążenia towarzyszy powstanie nowej strefy poślizgu na obciążonym końcu belki. Z drugiej strony każda ze stref poślizgu może w trakcie procesu zniknąć. W szczególności należy się spodziewać, że strefy poślizgu dochodzące do nieobciążonego końca będą kolejno znikać.

### 5.2.3 Przykład

Rozważmy prosty przykład belki utwierdzonej, pokazanej na rysunku 5.14. Nie wnikając jaka historia doprowadziła do takiego stanu założmy, że początkowo na całej belce rozciąga się jedna strefa poślizgu. Oznacza to, że przy rosnącej sile  $T$  wszystkie punkty belki



Rysunek 5.14: Belka utwierdzona oddziałująca ciernie z podłożem: (a) obciążanie ; (b) odciążanie.

przemieszczają się do góry — rys. 5.14(a). Po osiągnięciu przez siłę  $T$  wartości  $T_1$  zaczyna się odciażanie i siła  $T$  zaczyna maleć. Równocześnie powstaje nowa strefa poślizgu, która zaczyna się stopniowo rozszerzać na całą długość belki — rys. 5.14(b). Korzystając ze sformułowania przedstawionego w poprzednim podrozdziale poszukamy rozwiązania tak postawionego problemu odciażania belki na podłożu z tarcim.

Przyjmijmy długość belki  $L_B$  jako charakterystyczną długość odniesienia. Używając wzorów (5.16) wszystkie wielkości można przedstawić w postaci bezwymiarowej. Na podstawie równań (5.31) można wyznaczyć następujące wielkości:

$$\begin{aligned} T_e^* &= T^* + l_1^* - l_2^*, \\ M_e^* &= T^*(l_1^* + l_2^*) + \frac{1}{2}(l_1^{*2} - l_2^{*2}) + l_1^*l_2^*, \\ \Theta_2^* &= T^*(-\frac{1}{2}l_2^{*2} - l_1^*l_2^*) + \frac{1}{6}l_2^{*3} - \frac{1}{2}l_1^{*2}l_2^* - \frac{1}{2}l_1^*l_2^{*2}, \\ W_2^* &= T^*(\frac{1}{3}l_2^{*3} + \frac{1}{2}l_1^*l_2^{*2}) - \frac{1}{8}l_2^{*4} + \frac{1}{3}l_1^*l_2^{*3} + \frac{1}{4}l_1^{*2}l_2^{*2}. \end{aligned}$$

Następnie przy wykorzystaniu zależności  $l_1^* + l_2^* = 1$  oraz  $J_1^* = l_1^*$ , warunek (5.32) zerowej prędkości poślizgu dla  $x^* = l_1^*$  sprowadza się do postaci

$$\dot{T}^* = -\frac{4(1-l_1^*)}{2+l_1^*}l_1^* \quad \text{lub} \quad \frac{dT^*}{dl_1^*} = -\frac{4(1-l_1^*)}{2+l_1^*}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego z warunkiem początkowym  $T^* = T_1^*$  dla  $l_1^* = 0$  jest

$$\Delta T^* = T^* - T_1^* = 4l_1^* - 12 \ln(1 + \frac{1}{2}l_1^*), \quad (5.33)$$

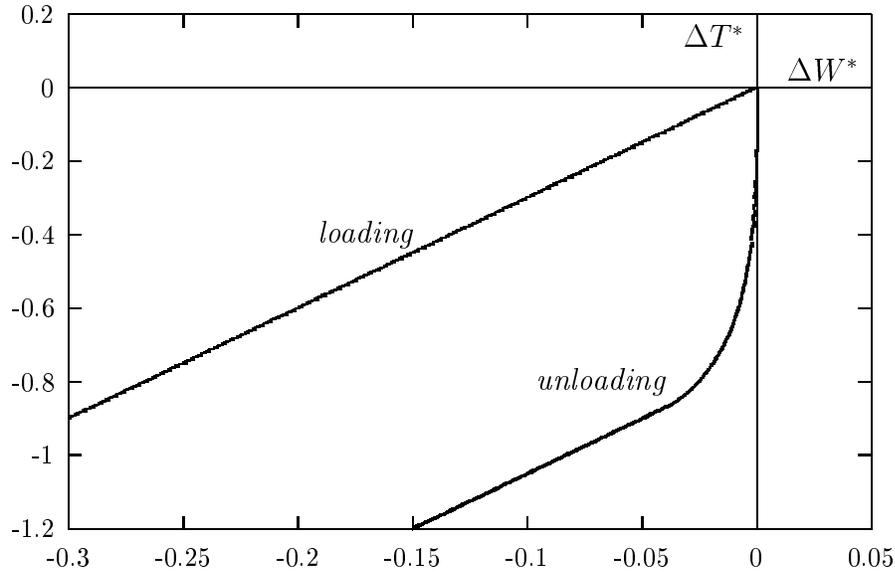
gdzie  $\Delta T^*$  oznacza różnicę obciążenia względem jego wartości zwrotnej  $T_1^*$ . Jak widać, rozwiązanie nie zależy od wartości zwrotnej obciążenia, a jedynie od różnicy względem tej wartości. Reakcje w utwierdzeniu oraz ugięcie obciążanego końca belki można przedstawić w postaci sparametryzowanej względem długości strefy poślizgu  $l_1^*$  ( $0 < l_1^* < 1$ ), przy czym  $\Delta T^* = \Delta T^*(l_1^*)$ :

$$\begin{aligned} \Delta T_e^* &= \Delta T^* + 2l_1^*, \\ \Delta M_e^* &= \Delta T^* + 2l_1^* - l_1^{*2}, \\ \Delta \Theta^* &= \frac{1}{2}\Delta T^* - \frac{1}{3}(1-l_1^*)^3 + \frac{1}{3}, \\ \Delta W^* &= \frac{1}{3}\Delta T^* + \frac{1}{12}l_1^{*4} - \frac{1}{2}l_1^{*2} + \frac{2}{3}l_1^*, \end{aligned}$$

gdzie  $\Delta$  oznacza różnice odpowiednich wielkości względem ich wartości w punkcie zwrotnym obciążenia. Zatem dla  $T^* = T_1^*$  mamy  $\Delta T^* = \Delta T_e^* = \Delta M_e^* = \Delta W_e^* = \Delta \Theta_e^* = 0$ .

Dla rosnącego obciążenia, przed osiągnięciem punktu zwrotnego ( $l_1^* = 0$ ), rozwiązanie jest liniowe względem siły  $T^*$ :

$$\begin{aligned} \Delta T_e^* &= \Delta T^*, \\ \Delta M_e^* &= \Delta T^*, \\ \Delta \Theta^* &= \frac{1}{2}\Delta T^*, \\ \Delta W^* &= \frac{1}{3}\Delta T^*. \end{aligned}$$



Rysunek 5.15: Zależność obciążenie-przemieszczenie umocowanej belki na podłożu z tarciem.

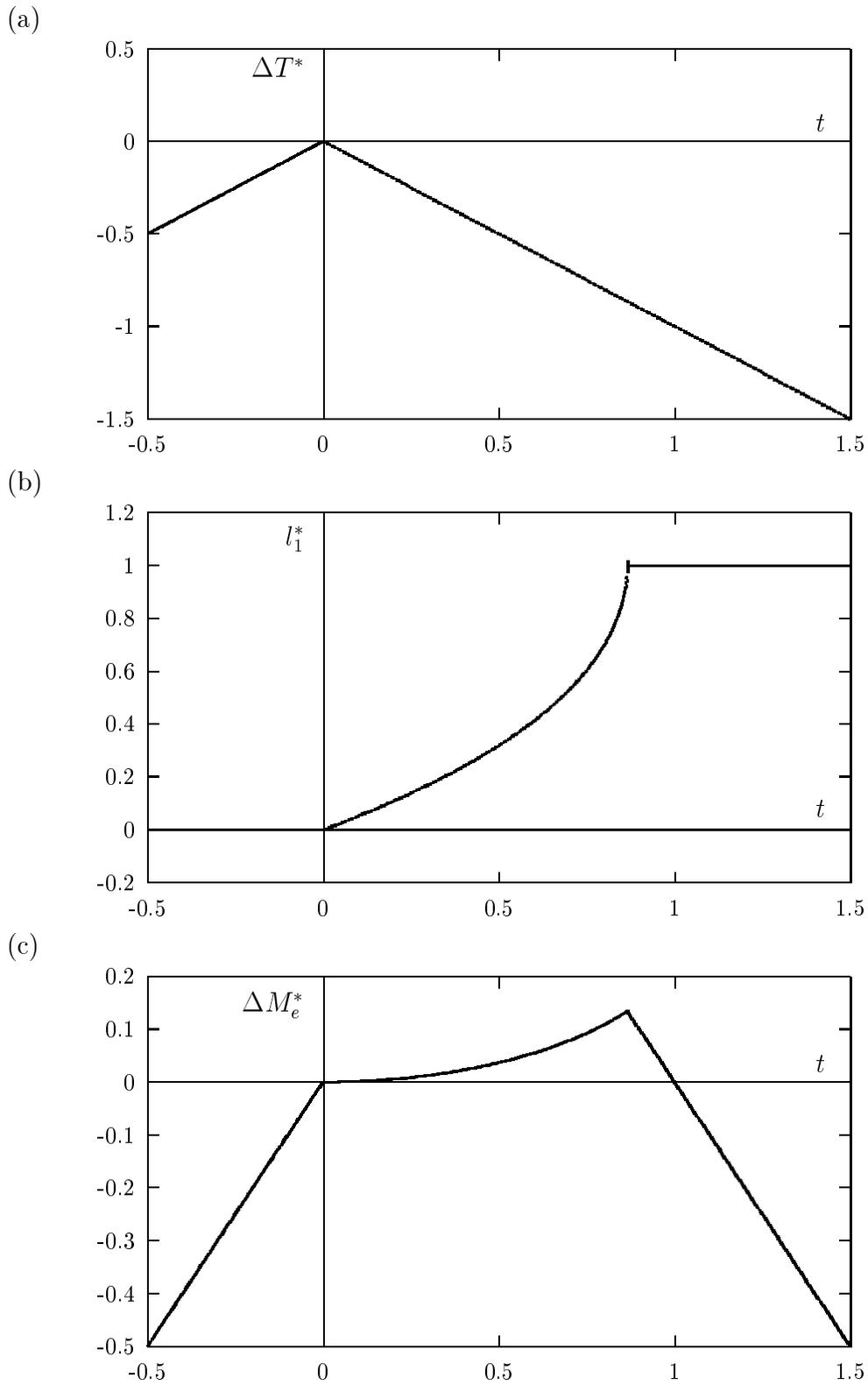
Podczas odciażania, strefa poślizgu  $l_2^*$  staje się coraz krótsza i znika dla  $\Delta T^* = -0.8656$ . Przy dalszym spadku obciążenia siły tarcia pozostają nie zmienione, a rozwiązanie ponownie jest liniowe względem siły  $T$  ( $l_1^* = 1$ ):

$$\begin{aligned}\Delta T_e^* &= \Delta T^* + 2, \\ \Delta M_e^* &= \Delta T^* + 1, \\ \Delta \Theta^* &= \frac{1}{2}\Delta T^* + \frac{1}{3}, \\ \Delta W^* &= \frac{1}{3}\Delta T^* + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

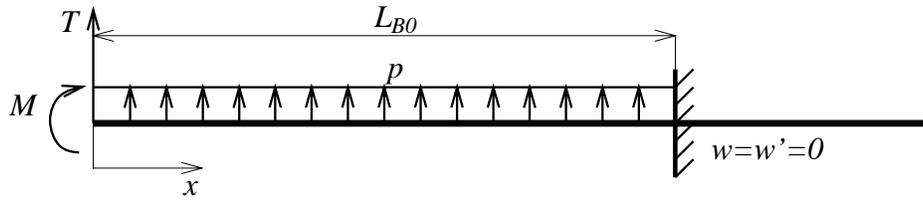
Obrazuje to zależność obciążenia  $\Delta T^*$  od ugięcia końca belki  $\Delta W^*$  pokazana na rysunku 5.15. Można zauważyć, że cały proces przegrupowania stref tarcia odbywa się przy niewielkiej zmianie ugięcia końca belki.

Rysunki 5.16(a)–(c) pokazują zmiany obciążenia  $T^*$ , długości strefy poślizgu  $l_1^*$  oraz reakcji utwierdzenia  $\Delta M_e^*$  w czasie. Jak widać podczas odciażania, mimo malejącej siły  $T$ , moment w utwierdzeniu rośnie. Zmiany siły tnącej w utwierdzeniu  $\Delta T_e^*$  mają podobny charakter do zmian momentu gnącego  $\Delta M_e^*$ , to znaczy reakcja utwierdzenia  $T_e^*$  również początkowo rośnie mimo spadku obciążenia. W obu przypadkach przyczyną jest zmiana rozkładu sił tarcia związana ze wzrostem strefy poślizgu  $l_1^*$ . Gdy nowa strefa poślizgu obejmuje całą długość belki  $l_1^* = 1$ , reakcje w utwierdzeniu zaczynają maleć.

Cały proces przegrupowania stref poślizgu zachodzi przy zmianie bezwymiarowej siły tnącej  $T^*$  o wielkość rzędu 1, czyli gdy wartość siły  $T$  zmienia się mniej więcej o  $qL_B$ . Opisane zjawisko jest znaczące jedynie wtedy, gdy obciążenie jest tego samego rzędu, to znaczy gdy siły tarcia są relatywnie duże. Kolejne podrozdziały zawierają dyskusję problemu odspajania belki od podłoża tak przy braku, jak i w obecności oddziaływań ciernych z podłożem. Pokazane zostanie, że siły tarcia mogą mieć znaczący wpływ na



Rysunek 5.16: Zmiany: (a) obciążenia; (b) długości strefy poślizgu  $l_1^*$  i (c) momentu gnącego w utwierdzeniu  $\Delta M_e^*$  w funkcji czasu.



Rysunek 5.17: Obciążenie belki odspajanej od podłoża.

taki proces.

### 5.2.4 Odsparowanie belki w modzie III

Rozważmy teraz belkę przymocowaną (na przykład przyklejoną) do sztywnego podłoża. Belka jest odspojona na długości  $L_{B0}$  i obciążona skupioną siłą  $T$  i momentem  $M$  na końcu oraz rozłożonym wydatkiem sił poprzecznych  $p$  — rysunek 5.17. Belka jest zginana w płaszczyźnie podłoża, tak więc odspojenie belki jest związane z propagacją szczeliny w modzie III.

Niech warunkiem odspojenia będzie kryterium Griffitha

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial L_B} = R = \gamma, \quad (5.34)$$

gdzie  $\Pi$  jest energią potencjalną belki, a  $R = \gamma$  jest energią potrzebną do odspojenia jednostkowej długości belki w modzie III. Energię potencjalną  $\Pi$  można łatwo wyznaczyć jako

$$\begin{aligned} \Pi &= -\left( \frac{M\Theta_M}{2} + \frac{T w_T}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{L_B} p w(x) dx \right) = \\ &= -\left( \frac{M^2 L_B}{2EI} + \frac{T^2 L_B^3}{6EI} + \frac{p^2 L_B^5}{40EI} + \frac{M T L_B^2}{2EI} + \frac{M p L_B^3}{6EI} + \frac{T p L_B^4}{8EI} \right), \end{aligned}$$

a energia uwalniana przy propagacji szczeliny odspajającej przyjmuje postać

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial L_B} = \frac{(M + T L_B + \frac{1}{2} p L_B^2)^2}{2EI}.$$

Przyrównując energię uwalnianą  $G$  do energii potrzebnej do odspojenia  $R = \gamma$  (wz. 5.34) otrzymuje się warunek na krytyczną wielkość obciążenia w postaci

$$M^{cr} + T^{cr} L_B + \frac{1}{2} p^{cr} L_B^2 = \sqrt{2EI\gamma}. \quad (5.35)$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenie po lewej stronie równania (5.35) jest w istocie momentem gnącym belki w utwierdzeniu  $M_e = M + T L_B + \frac{1}{2} p L_B^2$ , a zatem energetyczny warunek propagacji szczeliny sprowadza się do warunku wytrzymałościowego na maksymalny moment gnący w utwierdzeniu  $M_e^{max}$ :

$$M_e^{cr} = M_e^{max}, \quad M_e^{max} = \sqrt{2EI\gamma}. \quad (5.36)$$

Moment  $M_e^{max}$  zależy od energii potrzebnej do odspojenia jednostkowej długości belki  $\gamma$ . Ta prosta zależność jest przypadkiem szczególnym ogólnego wyrażenia na prędkość energii uwalnianej  $G$  otrzymanego w rozdziale 2.2, wz. (2.23). Wynika ona z przyjętego prostego modelu belkowego, w którym na energię sprężystą belki składa się wyłącznie energia związana ze zginaniem.

Przyjmując proste stany obciążenia samym momentem  $M$  lub samą siłą  $T$  otrzymuje się dobrze znane wyrażenia na ich krytyczne wartości:

$$M^{cr} = \sqrt{2EI\gamma} \quad \text{lub} \quad T^{cr} = \frac{1}{L_B} \sqrt{2EI\gamma};$$

używane często w analizie propagacji szczeliny w modzie I (np. w teście DCB — ang. *double cantilever beam*). Krytyczna wartość momentu gnącego jest stała, co zapewnia stateczny proces propagacji szczeliny. Natomiast krytyczna wielkość siły  $T^{cr}$  maleje ze wzrostem długości szczeliny, a zatem proces jej propagacji jest niestateczny.

### 5.2.5 Odspajanie belki w obecności sił tarcia

Rozważmy teraz odspajanie belki od podłoża w obecności sił tarcia między belką a podłożem. Traktując siłę  $T$  oraz moment  $M$  jako obciążenie zewnętrzne, natomiast dysypatywne siły tarcia między belką a podłożem jako siły wewnętrzne, warunek propagacji szczeliny odspajającej można przedstawić jako (por. wz. (1.25))

$$-d\Pi = dL - dU = dD^f + dD^d, \quad (5.37)$$

gdzie  $dD^f$  i  $dD^d$  są odpowiednio przyrostami energii dysypowanej przez siły tarcia i na skutek odspojenia belki związanymi z przyrostem szczeliny odspajającej o  $dL_B$ .

Przy założeniu, że na całym odspojonym odcinku belki  $0 \leq x \leq L_B$  siły tarcia mają jednakowy zwrot<sup>3</sup> warunek (5.37) można sprowadzić do postaci klasycznego warunku Griffitha (5.34). Można je bowiem potraktować jako znane (i stałe) obciążenie zewnętrzne. Wtedy ich praca  $-dD^f < 0$  może być traktowana jako część pracy sił zewnętrznych  $d\tilde{L} = dL - dD^f$ .

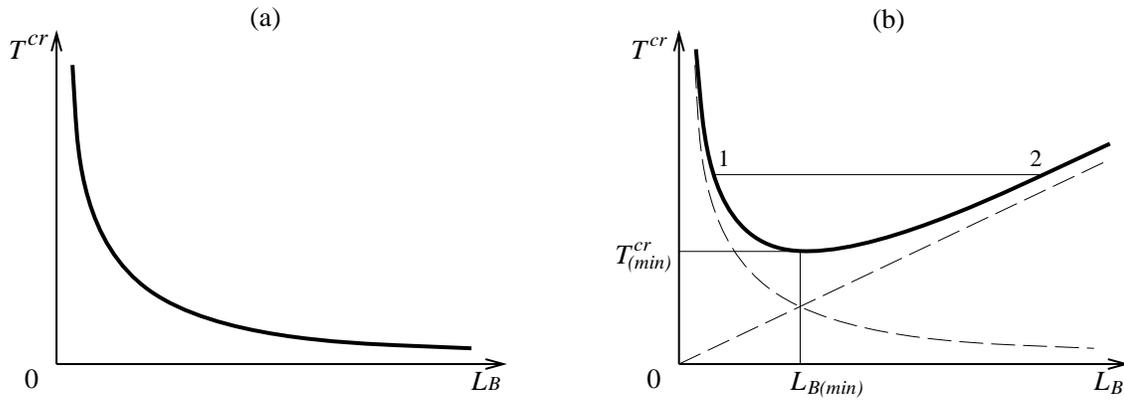
Dodatnim wartościom obciążeń  $T$  i  $M$  odpowiada ujemna wartość wydatku sił tarcia  $p = -q$  ( $q > 0$  jest bezwzględną wartością wydatku sił tarcia). Otrzymane w poprzednim podrozdziale równanie (5.35) określające wartość obciążenia krytycznego można zatem przekształcić do postaci

$$M^{cr} + T^{cr} L_B = \sqrt{2EI\gamma} + \frac{1}{2}qL_B^2. \quad (5.38)$$

Tak więc obecność sił tarcia powoduje wzrost obciążenia krytycznego. Wzrost ten związany jest z momentem gnącym sił tarcia  $-\frac{1}{2}qL_B^2$  przeciwdziałającym momentowi wywołanemu obciążeniem  $T$ ,  $M$ . Energetyczny warunek propagacji szczeliny jest równoważny warunkowi wytrzymałościowemu na maksymalny moment gnący w utwierdzeniu:

$$M_e^{cr} = M^{cr} + T^{cr} L_B - \frac{1}{2}qL_B^2 = M_e^{max}.$$

<sup>3</sup>Odpowiada to przypadkowi, gdy siła  $T$  i moment  $M$  są tego samego znaku (powodują zginanie w tym samym kierunku) i gdy obciążenie jest monotoniczne, a więc nie występują strefy poślizgu związane z odciążaniem itp. (całą długość belki obejmuje jedna strefa poślizgu).



Rysunek 5.18: Zależność siły krytycznej  $T^{cr}$  od długości odspojonego odcinka belki  $L_B$ : (a) bez sił tarcia; (b) w obecności sił tarcia między belką a podłożem.

Na przykład w przypadku, gdy działa tylko siła  $T$  ( $M = 0$ ), wzór na jej krytyczną wielkość wynika z warunku (5.38)

$$T^{cr} = \frac{1}{L_B} \sqrt{2EI\gamma} + \frac{1}{2}qL_B. \quad (5.39)$$

Zależność siły krytycznej od długości odspojonego odcinka belki  $T^{cr}(L_B)$  pokazana jest na rysunku 5.18(b). Istnieje minimalna siła krytyczna  $T_{(min)}^{cr}$ , gdy  $L_B = L_{B(min)}$ :

$$T_{(min)}^{cr} = \sqrt{2M_e^{max}q}, \quad L_{B(min)} = \sqrt{2M_e^{max}q^{-1}},$$

gdzie maksymalny moment gnący w utwierdzeniu  $M_e^{max}$  określony jest wzorem (5.36). Tak więc dla  $L_B < L_{B(min)}$  proces odspajania jest niestateczny, natomiast dla  $L_B \geq L_{B(min)}$  — stateczny. Można się zatem spodziewać przeskoku (ang. *snap-through*) jak to pokazano na rysunku 5.18(b) (linia 1–2).

Ponieważ charakterystyczna długość  $L_{B(min)}$ , związana z minimalną wielkością siły krytycznej, zależy od wielkości sił tarcia  $q$ , powyższy wynik można interpretować następująco. Niewielkie siły tarcia, którym odpowiada duża wartość  $L_{B(min)} \gg L_B$  nie wpływają znacząco na wielkość siły krytycznej, ani na zachowanie układu. Dopiero gdy siły tarcia są na tyle duże, że  $L_{B(min)}$  jest tego samego rzędu co długość odspojonego odcinka belki  $L_B$ , uwidacznia się wpływ sił tarcia na siłę krytyczną oraz na zachowanie układu. W szczególności, gdy  $L_B > L_{B(min)}$  siły tarcia dysypują na tyle dużo energii, że proces propagacji szczeliny odspajającej staje się stateczny.

Zgodnie z wynikami otrzymanymi w rozdziale 2.2 również w przypadku belki zachodzi równowaga energetycznego i wytrzymałościowego warunku propagacji szczeliny odspajającej. W rozważanych przypadkach warunek odspajania sprowadza się do prostego ograniczenia maksymalnego momentu gnącego w utwierdzeniu (czyli na granicy strefy odspojonej). Ta postać warunku odspajania rzuca nowe światło na wyniki przykładu przedstawionego w rozdziale 5.2.3.

Założmy, że następuje stateczne odspajanie ( $L_B > L_{B(min)}$ ) belki obciążonej samą tylko rosnącą siłą  $T$ . Podczas postępującego odspajania wielkość momentu gnącego w

utwierdzeniu jest stała,  $M_e = M_e^{cr} = M_e^{max}$ , a cały odspojony odcinek belki tworzy jedną strefę poślizgu. Załóżmy też, że w pewnym momencie obciążenie zaczyna maleć (początek odciążania). Na obciążanym końcu belki powstanie wtedy nowa strefa poślizgu.

Tak postawione zadanie jest podobne do przykładu rozwiązanego w rozdziale 5.2.3. W szczególności, jeśli podczas odciążania nie uległaby zmianie długość odspojonego odcinka belki, to rozwiązanie (5.33) zachowałoby ważność również dla przypadku odciążania odspajającej się belki. Jednak z rysunku 5.16(c) widać, że w początkowym okresie odciążania moment gnący w utwierdzeniu  $\Delta M_e(t)$  rośnie. Tymczasem, warunek odspajania ogranicza maksymalny moment gnący w utwierdzeniu, który nie może wzrosnąć powyżej swojej wartości krytycznej. A zatem ze spadkiem obciążenia musi być związane dalsze odspajanie belki od podłoża.

### 5.2.6 Podsumowanie

Rozważany w niniejszym rozdziale problem belki spoczywającej na podłożu ciernym wykazuje cechy zasadniczo różne niż przykład paska omawiany w rozdziale 4. Obciążeniu paska towarzyszy powstanie jednej strefy poślizgu propagującej od punktu przyłożenia obciążenia, której długość rośnie wraz ze wzrostem obciążenia. Odciążanie paska powoduje powstanie lokalnej strefy poślizgów powrotnych, podczas gdy na pozostałej części paska poślizgi ulegają zamrożeniu.

Zupełnie inne są prawa ewolucji stref poślizgu w przypadku belki obciążanej poprzecznie do swojej osi. Przyłożenie niewielkiego początkowego obciążenia powoduje powstanie wielu stref poślizgu. W przyjętym prostym modelu belkowym połączonym z modelem tarcia Coulomba, rozwiązanie składa się z nieskończonej liczby stref poślizgu (propagujących w sposób samopodobny, gdy obciążenie jest monotoniczne). Z kolei przy odciążaniu, na końcu belki powstaje nowa strefa poślizgu, ale pozostałe strefy poślizgu nie ulegają zamrożeniu i są aktywne. Dotyczy to tak przypadku belki pół-nieskończonej (rozd. 5.1), jak i przypadku belki o skończonej długości (rozd. 5.2).

Pokazane zostały ciekawe własności charakteryzujące przypadek odspajania belki od podłoża w obecności sił tarcia na odspojonym odcinku belki. Z jednej strony obecność sił tarcia powoduje stabilizację procesu odspajania od podłoża, a zależność siły krytycznej od długości odspojonego odcinka posiada minimum. Dla większych długości odspojenia proces odspajania belki obciążonej samą siłą tnącą staje się stateczny. Jednak z drugiej strony, obecność sił tarcia powoduje, że odciążanie, a więc zmniejszanie obciążenia, może prowadzić do dalszej propagacji szczeliny odspajającej.

# Rozdział 6

## Podsumowanie pracy i wnioski końcowe

Rozprawa podsumowuje wyniki otrzymane przez autora w zakresie modelowania zjawisk związanych z tarciem kontaktowym oraz jego wpływem na rozwój uszkodzeń w strefie kontaktu: zużycie powierzchni i propagację odspojenia wzdłuż powierzchni międzyfazowej. W ramach tej szerokiej tematyki zwrócono uwagę na dwie grupy zagadnień: modelowanie konstytutywne zjawisk kontaktowych oraz rozwiązywanie problemów brzegowych z tarciem. Do oryginalnych wyników należących do pierwszej grupy zagadnień zaliczyć należy:

1. nowe modele anizotropowego tarcia i zużycia (rozd. 3.1):
  - mikro-mechaniczny model współpracy powierzchni o ortotropowym układzie nierówności prowadzący do niestowarzyszonego prawa poślizgu (pokazano, że powszechnie przyjmowana zasada normalności i stowarzyszone prawo poślizgu nie muszą być spełnione w ogólnym przypadku);
  - wprowadzenie eliptycznego prawa tarcia ortotropowego z niestowarzyszonym prawem poślizgu uogólniającego dotychczas stosowane prawa: bazujące na stowarzyszonym prawie poślizgu [67, 23], bądź wychodzące z koncepcji tensora tarcia [131];
  - model anizotropowego zużycia powierzchni bezpośrednio wiążący prędkość zużycia z anizotropowymi własnościami tarcia;
2. modele tarcia i zużycia specjalizowane dla procesów obróbki plastycznej (rozd. 3.2):
  - model wychodzący z koncepcji występowania dwóch skal nierówności, uwzględniający dwa najważniejsze mechanizmy oddziaływania powierzchni chropowatych (spłaszczanie nierówności oraz oranie);
  - model uwzględniający obecność cząstek trzeciego ciała między kontaktującymi się powierzchniami (przeznaczony dla procesów obróbki plastycznej na gorąco); wynikające z modelu rozbitcie sił tarcia na części związane z poszczególnymi mechanizmami tarcia i zużycia jest również podstawą uogólnionego prawa zużycia Archarda;
3. model współpracy włókna z matrycą uwzględniający dylatację warstwy kontaktowej na skutek oddziaływania nierówności powierzchniowych (rozd. 4.5 i 4.6).

Modele tarcia anizotropowego oraz współpracy włókna z matrycą zostały zastosowane do opisu wybranych danych doświadczalnych, a identyfikacja parametrów modeli dała zadowalające wyniki. W szczególności, proste prawo zużycia nierówności, zastosowane dla cyklicznego obciążenia włókna wyciąganego z matrycy, pozwoliło bardzo dobrze opisać zmiany własności warstwy kontaktowej dla małych (rzędu kilku mikronów) i dużych (sto mikronów) amplitud przemieszczeń (rozdz. 4.6).

Nie była możliwa weryfikacja modeli tarcia dla procesów obróbki plastycznej, gdyż nie są dostępne odpowiednie dane doświadczalne. Bazują więc one jedynie na krytyce dotychczasowych modeli oraz na wnioskowaniu mikro-mechanicznym. Badania prowadzone w ramach projektu Copernicus<sup>1</sup> (dotyczącego zużycia matryc w procesach kucia), pozwalają mieć nadzieję, że będzie możliwa weryfikacja doświadczalna tych modeli. W szczególności, w związku z dyskutowanymi w rozdziale 3.3.3 trudnościami związanymi z bezpośrednim pomiarem sił tarcia w warunkach charakterystycznych dla procesów obróbki plastycznej, obiecujące wydaje się zastosowanie do tego celu metod analizy odwrotnej.

Praca zawiera również przykłady rozwiązań konkretnych problemów brzegowych z tarcieniem. W przypadku zagadnień współpracy z podłożem ciernym elementów jednowymiarowych takich, jak pasek lub belka, możliwe jest uzyskanie analitycznych lub półanalitycznych rozwiązań. W bardziej złożonych przypadkach dwuwymiarowych konieczne jest zastosowanie metod przybliżonych — na przykład metody elementów skończonych. Najważniejsze przykłady rozwiązane w pracy to:

1. problem sprężystej belki na sztywnym podłożu ciernym (rozdz. 5), w którym nowe elementy to:
  - ogólny warunek, jaki spełniać musi obciążenie belki pół-nieskończonej, aby rozwiązanie było samopodobne — wz. (5.21);
  - rozwiązanie analityczne w zamkniętej postaci dla belki pół-nieskończonej z zastosowaniem uproszczonego modelu tarcia sprężystego (rozdz. 5.1.5);
  - przybliżone rozwiązania dla monotonicznych obciążeń proporcjonalnych oraz dla dowolnych (w tym cyklicznych) programów obciążenia (rozdz. 5.1.7);
  - rozwiązanie problemu odciażania belki o skończonej długości i wynikające z niego wnioski dotyczące postępującego odspajania w tego typu problemach (rozdz. 5.2);
2. symulacja procesu cyklicznego obciążenia włókna wyciąganego z matrycy (rozdz. 4.6), w której uwzględniona została ewolucja stanu powierzchni i zmiany jej własności ciernych w trakcie procesu (tego typu rozwiązania są rzadko spotykane w literaturze — jedynym znanym autorowi przypadkiem jest praca Johanssona [47] zawierająca rozwiązanie dwuwymiarowego problemu kontaktowego ze zużyciem powierzchni kontaktowych na skutek obciążeń cyklicznych);
3. rozwiązania (przy użyciu metody elementów skończonych) problemów dwuwymiarowych ilustrujących własności nowego modelu tarcia (rozdz. 3.3).

---

<sup>1</sup>Projekt Copernicus nr ERBCIPACT940170: *Development of a Decision Support System for Predicting Wear in Hot and Warm Forging Dies.*

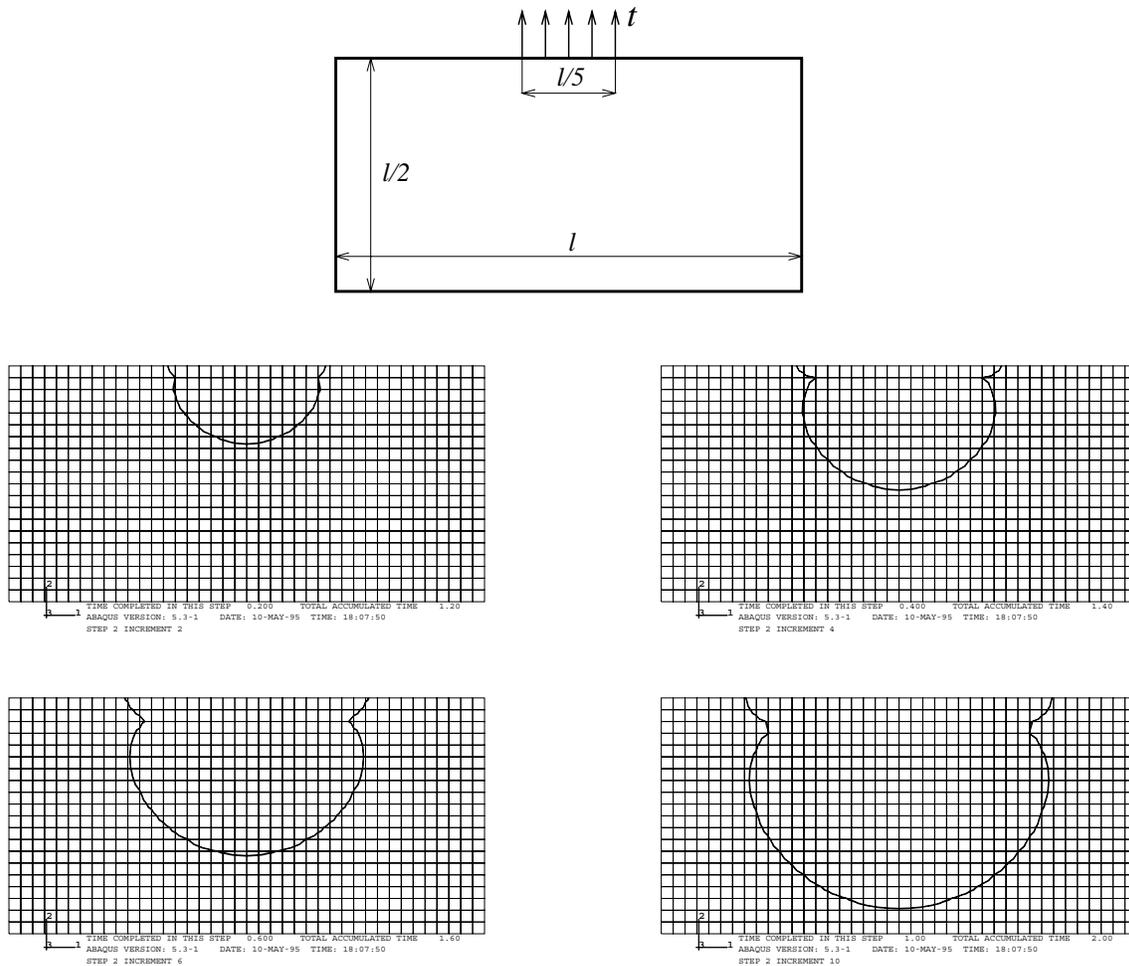
Uwzględnienie tarcia w konkretnych problemach brzegowych (nawet w najprostszej postaci modelu Coulomba) wprowadza nowe efekty, a jednocześnie zwykle znacznie utrudnia ich rozwiązanie. Dobrym przykładem jest problem belki sprężystej na podłożu z tarciem (rozd. 5). Po przyjęciu prostego modelu belkowego oraz prawa tarcia Coulomba, rozwiązanie tego zadania wymaga uwzględnienia nieskończonej liczby stref poślizgu. Z kolei, gdy rozpatrywana jest belka o skończonej długości, przyrostowy charakter prawa tarcia oraz konieczność spełnienia warunku zerowej prędkości na granicach stref poślizgu powodują, że rozwiązanie również nie jest oczywiste (por. rozdz. 5.2.3). Tego typu jednowymiarowe przykłady dają wgląd w złożoną naturę zjawisk związanych z tarciem w układach sprężystych, a także pozwalają w przejrzysty sposób zilustrować wpływ tarcia na inne procesy (na przykład na zjawiska propagacji szczeliny odspajającej w warunkach, gdy na odspojonej części zachodzą poślizgi cierne).

Oczywiście problemów, które zostały poruszone w pracy, nie można w żadnym razie traktować jako zamkniętych. Obecnie trwają prace poświęcone dopracowywaniu modeli konstytutywnych tarcia w procesach obróbki plastycznej. W szczególności dotyczą one modeli uwzględniających obecność cząstek trzeciego ciała w strefie kontaktu i przeznaczonych dla procesów obróbki na gorąco. Otwartym problemem pozostaje również uwzględnienie wpływu deformacji plastycznej obrabianego materiału na jego oddziaływanie cierne z powierzchnią narzędzia. Jak pokazali Wilson i Sheu [118, 120], zachodząca jednocześnie z kontaktem deformacja plastyczna samego materiału może w znaczący sposób wpływać na procesy oddziaływania nierówności (spłaszczanie, oranie), a co za tym idzie na siły tarcia.

Nowe modele tarcia zaprezentowane w rozdziale 3.2 opierają się na modelach mikro-mechanicznych. Ich opis jest przez to stosunkowo złożony i zawiera wiele parametrów. Jednakże, biorąc pod uwagę, że zastosowane modele mikro-mechaniczne są proste i bardzo wyidealizowane, wydaje się celowe przejście do czysto fenomenologicznych modeli zachowujących podstawowe cechy modeli bazujących na mikro-mechanice kontaktu, a jednocześnie możliwie prostych i zawierających minimalną liczbę parametrów. Tego typu modele powinny być prostsze w zastosowaniach numerycznych i łatwiejsze do identyfikacji.

W zakresie modelowania tarcia anizotropowego szczególnie ważne i interesujące może być uwzględnienie zmian stanu powierzchni na skutek zużycia, powodujących w konsekwencji zmiany anizotropii własności ciernych. Ponadto, wydaje się pożądane rozszerzenie modeli tarcia anizotropowego o efekty dylatacji kontaktowej typowe dla kontaktu ciał kruchych. Tego typu izotropowy model tarcia został ostatnio zaproponowany przez Mroza i Giambanco [70]. Wewnętrzna struktura materiałów, takich jak na przykład skały warstwowe lub o ukierunkowanych spękaniach, powoduje, że ich powierzchnie często charakteryzują się anizotropowym układem nierówności i anizotropią własności kontaktowych — tarcia i dylatacji (por. np. Jing [45]).

Wyniki przedstawione w rozdziałach 4 oraz 5 dotyczą propagacji stref poślizgu i delaminacji w prostych przykładach jednowymiarowych. Dalsze badania mogą dotyczyć bardziej skomplikowanych zagadnień. Jako przykład niech posłuży rozwiązanie otrzymane dla problemu dwuwymiarowego z tarciem. Rysunek 6.1 pokazuje geometrię układu oraz obciążenie  $t$  przyłożone do części jednego z boków tarczy. Pozostałe boki są swobodne. Na całej powierzchni kontaktu tarczy z podłożem panują stałe i jednorodne naciski



Rysunek 6.1: Tarcza na podłożu z tarciem: geometria i obciążenie (równoważone tylko siłami tarcia) oraz propagacja strefy poślizgu. Widok w kierunku prostopadłym do podłoża.

normalne. Zgodnie z prawem Coulomba w strefie poślizgu znana jest więc bezwzględna wartość sił tarcia, natomiast nie jest znany ich kierunek. Poza strefą poślizgu zerowe są przemieszczenia, a więc również poślizgi i siły tarcia. Przyłożone obciążenie równoważone jest tylko przez oddziaływania cierne.

Przykład ten należy do klasy problemów dyskutowanej w rozdziale 2.2, przy czym nie zostało uwzględnione odspajanie, a tylko oddziaływanie cierne z podłożem. Obliczenia wykonano metodą elementów skończonych przy pomocy programu ABAQUS [1].

Na rysunku 6.1 dla czterech wartości obciążenia pokazane są granice strefy poślizgu rosnącej wraz ze wzrostem obciążenia. Jak widać przy obciążeniu monotonicznym zmienia się wielkość strefy poślizgu i jej kształt. Na razie nie udało się uzyskać rozwiązania dla przypadku obciążenia niemonotonicznego (brak zbieżności już na pierwszym kroku odciążenia). Odciążanie związane jest z powstaniem i propagacją strefy poślizgów powrotnych. Związane z tym gwałtowne zmiany kierunku sił tarcia przypuszczalnie były przyczy-

ną problemów numerycznych. Badanie praw ewolucji stref poślizgu (pierwotnych, powrotnych, itp.) w tego typu problemach wydaje się więc zadaniem ciekawym z poznawczego i numerycznego punktu widzenia. Dla ogólnego przypadku zdefiniowanego w rozdziale 2.2 należy się dodatkowo spodziewać interakcji aktywnych i zamrożonych frontów poślizgu z frontem delaminacji.

Tematyka związana z tarcieniem i jego wpływem na zachowanie układów mechanicznych jest tak obszerna, że wyniki zawarte w niniejszej rozprawie pokrywają jedynie jej drobny wycinek. Autor starał się pokazać, że wiedza na temat zjawisk związanych z tarcieniem kontaktowym jest ciągle uboga i dlatego potrzebne jest prowadzenie badań w tym kierunku. Dotyczy to w szczególności praw konstytutywnych opisujących oddziaływania kontaktowe. O tym, że prawo tarcia Coulomba znajduje powszechne zastosowanie w mechanice kontaktu, decyduje jego prostota, a z drugiej strony ciągle niewystarczająca znajomość niezwykle złożonych zjawisk tarcia oraz brak bardziej dokładnych i wiarygodnych modeli.

# Bibliografia

- [1] *ABAQUS User's Manual Version 5.2* (1992). Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc.
- [2] ALART, P., A. CURNIER (1991). A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **92**, 353–375.
- [3] AMONTON, G. (1699). Histoire de l'académie royale des sciences. *Mem. Math. Phys.*, 206.
- [4] ARCHARD, J.F. (1953). Contact and rubbing of flat surfaces. *J. Appl. Phys.* **24**(8), 981–988.
- [5] AVITZUR, B., Y. NAKAMURA (1986). Analytical determination of friction resistance as a function of normal load and geometry of surface irregularities. *Wear* **107**, 367–383.
- [6] AVITZUR, B. (1988). Modeling the effect of lubrication on friction behavior. *Wear* **126**, 227–249.
- [7] AVITZUR, B. (1990). Boundary and hydrodynamic lubrication. *Wear* **139**, 49–76.
- [8] AZARKHIN, A., O. RICHMOND (1991). Further results on the friction of ploughing in the presence of bulk straining. *Trans. ASME J. Trib.* **113**, 789–794.
- [9] AZARKHIN, A. O. RICHMOND (1992). A model of ploughing by a pyramidal indenter — upper bound method for stress-free surfaces. *Wear* **157**, 409–418.
- [10] BAJER, CZ., R. BOGACZ (1990). Dynamic contact problem with friction by the use of space-time element method. *Z. angew. Math. Mech.* **70**(6), T674–T676.
- [11] BAY, N., T. WANHEIM, A.S. PETERSEN (1975).  $R_a$  and the average effective strain of surface asperities deformed in metal-working processes. *Wear* **34**, 77–84.
- [12] BAY, N., T. WANHEIM (1976). Real area of contact and friction stress at high pressure sliding contact. *Wear* **38**, 201–209.
- [13] BAY, N., T. WANHEIM (1976). Real area of contact between a rough tool and a smooth workpiece at high normal pressures. *Wear* **38**, 225–234.

- [14] BAY, N. (1987). Friction stress and normal stress in bulk metal forming processes. *J. Mech. Working Technol.* **14**, 203–224.
- [15] BERTHIER, Y. (1990). Experimental evidence for friction and wear modeling. *Wear* **139**, 77–92.
- [16] BOWDEN, F.P., D. TABOR (1953). *The Friction and Lubrication of Solids*. Clarendon Press, Oxford.
- [17] BUCZKOWSKI, R., M. KLEIBER (1992). Finite element analysis of elastic-plastic contact problem with nonlinear interface compliance. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* **30**(4), 855–883.
- [18] BUCZKOWSKI, R., M. KLEIBER (1994). Elasto-plastic constitutive interface model for an axisymmetric contact problem. *Comp. Assisted Mech. Eng. Sci.* **1**, 95–113.
- [19] CARTER, W.C., E.P. BUTLER, E.R. FULLER (1991). Micro-mechanical aspects of asperity-controlled friction in fiber-toughened ceramic composites. *Scr. Met. Mater.* **25**, 579–584.
- [20] CASEY, M., J. WILKS (1973). The friction of diamond sliding on polished cube faces of diamond. *J. Phys. D: Appl. Phys.* **6**, 1772–1781.
- [21] CHALLEN, J.M., P.L.B. OXLEY (1979). An explanation of the different regimes of friction and wear using asperity deformation models. *Wear* **53**, 229–243.
- [22] COULOMB, C.A. (1785). Theorie des machines simples, en egant egard au frottement de leurs partres, et à roideur des cordages. *Mem. Math. Phys., Paris, Acad. R. Sci.*, 161–342.
- [23] CURNIER, A. (1984). A theory of friction. *Int. J. Solids Struct.* **20**, 637–647.
- [24] CURNIER, A., Q.-C. HE, J.J. TELEGA (1992). Formulation of unilateral contact between two elastic bodies undergoing finite deformations. *C. R. Acad. Sci. Paris* **314**, Serie II, 1–6.
- [25] CURNIER, A., Q.-C. HE, A. KLARBRING (1994). Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction. *Contact Mechanics Int. Symp. (CMIS-II)*, Carry-le-Rouet.
- [26] EVANS, A.G., D.B. MARSHALL (1989). The mechanical behavior of ceramic matrix composites. *Acta Metall.* **37**(10), 2567–2583.
- [27] DANCKERT, J. (1988). Analysis of the ring test method for the evaluation of frictional stresses in bulk metal forming processes. *Annals of the CIRP* **37**(1), 217–220.
- [28] DUVAUT, G., J.L. LIONS (1976). *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin.

- [29] *ELFEN User Manual, Version 2.3* (1995). Rockfield Software Limited, Swansea, UK.
- [30] FISCHER, F.D., E. HINTEREGGER, F.G. RAMMERSTORFER (1991), A computational study of the residual stress distribution in thermally loaded beams of arbitrary cross-section on frictional support. *Nonlinear Computational Mechanics—State of the Art*, P. Wriggers, W. Wagner (red.), Springer-Verlag, Berlin, 737–750.
- [31] FISCHER, F.D., F.G. RAMMERSTORFER (1991), The thermally loaded heavy beam on a rough surface. *Proc. 8<sup>th</sup> Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, F. Ziegler (red.), Longman Higher Education & Reference, Burnt Mill, 10–21.
- [32] GREENWOOD, J.A., J.P.B. WILLIAMSON (1966). Contact of nominally flat surfaces. *Proc. Roy. Soc. London A* **295**, 300–319.
- [33] HANSEN, P.H. (1990). Analysis of wear distribution in forging dies. *Ph.D. Thesis*, Technical University of Denmark, Publication No. MM.91.06.
- [34] HALAUNBRENNER, M. (1960). Directional effects in friction. *Wear* **3**, 421–425.
- [35] HE, Q.-C., A. CURNIER (1993). Anisotropic dry friction between two orthotropic surfaces undergoing large displacements. *Eur. J. Mech. A/Solids* **12**, 631–666.
- [36] HORNBOGEN, E. (1986). Description and wear of materials with heterogeneous and anisotropic microstructures. *Wear* **111**, 391–402.
- [37] HUGHES, T.J.R., R.L. TAYLOR, L. SACKMAN, A. CURNIER, W. KANOKNUKALCHAI (1976). A finite element method for a class of contact-impact problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **8**, 249–276.
- [38] HUTCHINSON, J.W., H.M. JENSEN (1990). Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction. *Mech. Mater.* **9**, 139–163.
- [39] HUTCHINSON, J.W., Z. SUO (1991). Mixed mode cracking of layered materials. W: J.W. Hutchinson, T.Y. Wu (red.), *Adv. Appl. Mech.* **29**, Academic Press, 63–191.
- [40] HUTCHINSON, J.W., M.D. THOULESS, E.G. LINIGER (1992). Growth and configurational stability of circular, buckling-driven film delaminations. *Acta Metall. Mater.* **40**(2), 295–308.
- [41] JACOBS, O., K. FRIEDRICH, G. MAROM, K. SCHULTE, H.D. WAGNER (1990). Fretting wear performance of glass-, carbon-, and aramid-fibre/epoxy and PEEK composites. *Wear* **111**, 391–402.
- [42] JARZĘBOWSKI, A., Z. MRÓZ (1994). On slip and memory rules in elastic, friction contact problems. *Acta Mech.* **102**, 199–216.

- [43] JERO, P.D., R.J. KERANS (1990). The contribution of interfacial roughness to sliding friction of ceramic fibers in a glass matrix. *Scr. Metall. Mater.* **24**, 2315–2318.
- [44] JERO, P.D., R.J. KERANS, T.A. PARTHASARATHY (1991). Effect of interfacial roughness on the frictional stress measured using pushout tests. *J. Am. Ceram. Soc.* **74**(11), 2793–2801.
- [45] JING, L. (1990). Numerical modelling of jointed rock masses by distinct element method for two, and three-dimensional problems. *Ph.D. Thesis*, Lulea University of Technology.
- [46] JOHANSSON, L., A. KLARBRING (1993). Thermoelastic frictional contact problems: modelling, finite element approximation and numerical realization. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **105**, 181–210.
- [47] JOHANSSON, L. (1994). Numerical simulation of contact pressure evolution in fretting. *Trans. ASME, J. Trib.* **116**, 247–254.
- [48] KERANS, R.J., T.A. PARTHASARATHY (1991). Theoretical analysis of the fiber pullout and pushout tests. *J. Am. Ceram. Soc.* **74**(7), 1585–1596.
- [49] KLARBRING, A. (1990). Derivation and analysis of rate boundary-value problems of frictional contact. *Eur. J. Mech. A/Solids* **9**(1), 53–85.
- [50] KLARBRING, A. (1990). Examples of non-uniqueness and non-existence of solutions to quasistatic contact problems with friction. *Ingenieur-Archiv* **60**, 529–541.
- [51] KLARBRING, A., G. BJORKMAN (1992). Solution of large displacement contact problems with friction using Newton's method for generalized equations. *Int. J. Num. Meth. Engng* **34**, 249–269.
- [52] KLARBRING, A. (1995). Large displacement frictional contact: a continuum framework for finite element discretization. *Eur. J. Mech. A/Solids* **14**(2), 237–253.
- [53] KOBAYASHI, S., S.-I. OH, T. ALTAN (1989). *Metal forming and the finite-element method*. Oxford University Press, New York.
- [54] KOMVOPOULOS, K., N. SAKA, N.P. SUH (1985). The mechanism of friction in boundary lubrication. *Trans. ASME J. Trib.* **107**, 452–462.
- [55] KOMVOPOULOS, K., N. SAKA, N.P. SUH (1986). Plowing friction in dry and lubricated metal sliding. *Trans. ASME J. Trib.* **108**, 301–312.
- [56] KOMVOPOULOS, K., N.P. SUH, N. SAKA (1986). Wear of boundary-lubricated metal surfaces. *Wear* **107**, 107–132.
- [57] KORZEKWA, D.A., P.R. DAWSON, W.R.D. WILSON (1992). Surface asperity deformation during sheet forming. *Int. J. Mech. Sci.* **34**(7), 521–539.

- [58] KRZYŚ, W., A. TROJNACKI (1992). Influence of slips along contact surfaces in layered beams on distribution of stress and strain. *Arch. Budowy Maszyn* **39**, 307–328.
- [59] LIANG, C., J.W. HUTCHINSON (1993). Mechanics of the fiber pushout test. *Mech. Mater.* **14**, 207–221.
- [60] LIM, S.C., M.F. ASHBY (1987). Wear-mechanism maps. *Acta Metall.* **35**(1), 1–24.
- [61] MARSHALL, D.B., W.C. OLIVER (1990). An indentation method for measuring residual stresses in fiber-reinforced ceramics. *Mater. Sci. Engng* **A126**, 95–103.
- [62] MARSHALL, D.B. (1992). Analysis of fiber debonding and sliding experiments in brittle matrix composites. *Acta Metall. Mater.* **40**(3), 427–441.
- [63] MARSHALL, D.B., M.C. SHAW, W.L. MORRIS (1992). Measurement of interfacial debonding and sliding resistance in fiber reinforced intermetallics. *Acta Metall. Mater.* **40**(3), 443–454.
- [64] MARSHALL, D.B., M.C. SHAW, W.L. MORRIS (1995). The determination of interfacial properties from fiber sliding experiments: the roles of misfit anisotropy and interfacial roughness. *Acta Metall. Mater.* **43**(5), 2041–2051.
- [65] MEDA G., S.F. HOYSAN, P.S. STEIF (1993). The effect of fiber Poisson expansion in micro-indentation tests. *J. Appl. Mech.* **60**, 986–991.
- [66] MEYER-NOLKEMPER, H., D. HEINEMEYER (1977). Standmengen von Schmiedegenken Statistische Erfassung. *HFF-Bericht, Umformtechnisches Kolloquium*. Hannover.
- [67] MICHAŁOWSKI, R., Z. MRÓZ (1978). Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. *Arch. Mech.* **30**, 259–276.
- [68] MINDLIN, R.D., H. DERESIEWICZ (1953). Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. Appl. Mech.* **75**, 327–344.
- [69] MIYOSHI, K., D.H. BUCKLEY (1982). Anisotropic tribological properties of SiC. *Wear* **75**, 253–268.
- [70] MRÓZ, Z., G. GIAMBANCO (1996). An interface model for analysis of deformation behaviour of discontinuities. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.* **20**, 1–33.
- [71] MRÓZ, Z., A. JARZĘBOWSKI (1994). Phenomenological model of contact slip. *Acta Mech.* **102**, 59–72.
- [72] MRÓZ, Z., B. RANIECKI (1976). On the uniqueness problem in coupled thermo-plasticity. *Int. J. Engng Sci.* **14**, 211–221.

- [73] MRÓZ, Z., S. STUPKIEWICZ (1994). An anisotropic friction and wear model. *Int. J. Sol. Struct.* **31**, 1113–1131.
- [74] MRÓZ, Z., S. STUPKIEWICZ (1995). Hysteretic effects and progressive delamination at composite interfaces. *IUTAM Symposium on Microstructure-Property Interactions in Composite Materials*, R. Pyrz (red.), Kluwer Academic Publishers, 247–264.
- [75] MRÓZ, Z., S. STUPKIEWICZ (1995). Models of friction and wear in metal-forming (raport wewnętrzny wykonany w ramach projektu Copernicus nr ERBCIPACT940170).
- [76] MRÓZ, Z., S. STUPKIEWICZ (1996). Phenomenological friction and wear model for metal-forming processes (raport wewnętrzny wykonany w ramach projektu Copernicus nr ERBCIPACT940170).
- [77] MURAKAMI, H. (1984). A laminated beam theory with interlayer slip. *J. Appl. Mech.* **51**, 551–559.
- [78] NIKITIN, L.W. (1992). Bending of a beam on a rough surface. *Sov. Phys. Dokl.*, **37**(2), 98–100, American Inst. Physics.
- [79] NELLEMAN, T., N. BAY, T. WANHEIM (1977). Real area of contact and friction stress — the role of trapped lubricant. *Wear* **43**, 45–53.
- [80] NOWACKI, W.K. (1985). Thermal effects in dynamic plasticity, numerical solution and experimental investigations (thermographic-infrared detection). *J. de Physique* **46**(8), 113–119.
- [81] ODEN, T.T., J.A.C. MARTINS (1985). Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **52**, 527–634.
- [82] OROWAN, E. (1943). The calculation of roll pressure in hot and cold flat rolling. *Proc. Inst. Mech. Eng.* **150**(4), 140–167.
- [83] OWEN, D.R.J., D. PERIĆ, A.J.L. CROOK, E.A. DE SOUZA NETO, J. YU, M. DUTKO (1995). Advanced computational strategies for 3-D large scale metal forming simulations. Proc. V Int. Conf., Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Ithaca, USA.
- [84] PARTHASARATHY, T.A., D.B. MARSHALL, R.J. KERANS (1994). Analysis of the effect of interfacial roughness on fiber debonding and sliding in brittle matrix composites. *Acta Metall. Mater.* **42**(11), 3773–3784.
- [85] PERIĆ, D., D.R.J. OWEN (1992). Computational model for 3-D contact problems with friction based on the penalty method. *Int. J. Num. Meth. Engng* **35**, 1289–1309.

- [86] PERZYNA, P. (1971). Thermodynamic theory of viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics* **11**, Academic Press, 313–354.
- [87] PERZYNA, P. (1992). Constitutive equations of dynamic plasticity. W: D.R.J. Owen, E. Oñate, E. Hinton (red.), *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications* (Barcelona, 1992), Pineridge Press, Swansea, 483–508.
- [88] PETRYK, H. (1979). On slip-line field solutions for steady-state and self-similar problems with stress-free boundaries. *Arch. Mech.* **31**, 861–874.
- [89] PETRYK, H. (1980). Non-unique slip-line field solutions for the wedge indentation problem. *J. de Mécanique Appliquée* **4**, 255–282.
- [90] PRADEILLES-DUVAL, R.M., C. STOLZ (1995). Mechanical transformations and discontinuities along a moving surface. *J. Mech. Phys. Solids* **43**(1), 91–121.
- [91] RABINOWICZ, E. (1957). Direction of of the friction forces. *Nature* **179**, 1703.
- [92] RABINOWICZ, E. (1965). *Friction and wear of materials*. Wiley, New York.
- [93] RANIECKI, B., S.K. SAMANTA (1989). The thermodynamic model of a rigid-plastic solid with kinematic hardening, plastic spin and orientation variables. *Arch. Mech.* **41**(5), 747–758.
- [94] RODIČ, T. (1989). *Numerical Analysis of Thermomechanical Processes During Deformations of Metals at High Temperatures*, Ph.D. Thesis, University of Wales, Swansea.
- [95] SIMO, J.C., C. MIEHE (1992). Associative coupled thermoplasticity at finite strains: formulation, numerical analysis and implementation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **98**, 41–104.
- [96] SIMO, J.C., R.L. TAYLOR (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **48**, 101–118.
- [97] SOBIS, T., U. ENGEL, M. GEIGER (1992). A theoretical study on wear simulation in metal forming processes. *J. Mater. Processing Technol.* **34**, 233–240.
- [98] SOUZA NETO, E.A. DE, K. HASHIMOTO, D. PERIĆ, D.R.J. OWEN (1995). A phenomenological model for frictional contact accounting for wear effects. *Phil. Trans. Royal Soc. London/A* (w druku).
- [99] SPRINGFIELD, C.W., A.D. JOSHI (1989). Interfacial friction effects on the mechanics of stacked beams. *Computers and Struct.* **33**(2), 441–451.
- [100] SPUZIC, S., K.N. STRAFFORD, C. SUBRAMANIAN, G. SAVAGE (1994). Wear of hot rolling mill rolls: an overview. *Wear* **176**, 261–271.
- [101] STEFFENSEN, H., T. WANHEIM (1977). Asperities on asperities. *Wear* **43**, 89–98.

- [102] STORAKERS, B. (1989). Non-linear aspects of delamination in structural members. W: P. Germain i in. (red.), *Proc. IUTAM Congress Theor. Appl. Mech.*, Grenoble 1988, Elsevier Sci. Publ., 315–336.
- [103] STROMBERG, N., L. JOHANSSON, A. KLARBRING (1996). Derivation and analysis of a generalized standard model for contact, friction and wear. *Int. J. Sol. Struct.* **33**(13), 1817–1836.
- [104] STUPKIEWICZ, S., Z. MRÓZ (1994). Elastic beam on a rigid frictional foundation under monotonic and cyclic loading. *Int. J. Sol. Struct.* **31**, 3419–3442.
- [105] STUPKIEWICZ, S. (1996). Fiber sliding model accounting for interfacial microdilatancy. *Mech. Mater.* **22**, 65–84.
- [106] SUH, N.P. (1973). The delamination theory of wear. *Wear* **25**, 111–124.
- [107] SUH, N.P. (1977). An overview of the delamination theory of wear. *Wear* **44**, 1–16.
- [108] SUH, N.P. I IN. (1977). *Delamination wear and ferrography* (*Wear*, vol. **44**, wydanie specjalne).
- [109] SUH, N.P., H.C. SIN (1978). The genesis of friction. *Wear* **69**, 91–114.
- [110] SUNG, N., N. SUH (1979). Effect of fiber orientation on friction and wear of fiber reinforced polymeric composites. *Wear* **53**, 129–141.
- [111] SUTCLIFFE, M.P.F. (1988). Surface asperity deformation in metal forming processes. *Int. J. Mech. Sci.* **30**(11), 847–868.
- [112] SZEFER, G., D. JASIŃSKA, J.W. SALAMON (1994). Concept of a singular surface in contact mechanics. *Arch. Mech.* **46**(4), 581–603.
- [113] TABOR, D. (1981). Friction — the present state state of our understanding. *Trans. ASME J. Lubr. Techn.* **103**, 169–179.
- [114] TELEGA, J.J. (1988). Topics on unilateral contact problems of elasticity and inelasticity. W: *Nonsmooth Mechanics and Applications* (red. J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos), Springer-Verlag, Wien-New York, 341–462.
- [115] WANHEIM, T., N. BAY, A.S. PETERSEN (1974). A theoretically determined model for friction in metal working processes. *Wear* **28**, 251–258.
- [116] WANHEIM, T., N. BAY (1978). A model for friction in metal forming processes. *Annals of the CIRP* **27**(1), 189–194.
- [117] WILSON, D.V., G.W. ROWE (1967). Surface roughness and the entrapment of lubricant in metal-working. *J. Inst. Metals* **95**, 25–26.
- [118] WILSON, W.R.D., S. SHEU (1988). Real area of contact and boundary friction in metal forming. *Int. J. Mech. Sci.* **30**(7), 475–489.

- [119] WILSON, W.R.D. (1990). Mixed lubrication in metalforming processes. *Adv. Tech. Plast.* **4**, 1667–1676.
- [120] WILSON, W.R.D. (1991). Friction models for metal forming in the boundary lubrication regime. *Trans. ASME J. Eng. Mat. Tech.* **113**, 60–68.
- [121] WOLFRAM, S. (1991). *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*. Addison-Wesley Publishing Co.
- [122] WRIGGERS, P., J.C. SIMO (1985). A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems. *Commun. Appl. Num. Meth.* **1**, 199–203.
- [123] WRIGGERS, P., T. VU VAN, E. STEIN (1990). Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computers and Struct.* **37**, 319–331.
- [124] WRIGGERS, P., C. MIEHE (1994). Contact constraints within coupled thermo-mechanical analysis — a finite element model. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **113**(3–4), 301–319.
- [125] ZAVARISE, G., P. WRIGGERS, E. STEIN, B.A. SCHREFLER (1992). Real contact mechanisms and finite element formulation - a coupled thermomechanical approach. *Int. J. Num. Meth. Engng* **35**, 767–785.
- [126] ZIEMBA, S. (1952). O szczególnych przypadkach anizotropii tarcia. *Arch. Mech.* **4**, 105–121.
- [127] ZHANG, J., F.A. MOSLEHY, S.L. RICE (1991). A model of friction in quasi-steady sliding, Part I: Derivation. *Wear* **149**, 1–12.
- [128] ZHANG, J., F.A. MOSLEHY, S.L. RICE (1991). A model of friction in quasi-steady sliding, Part II: Numerical results and discussion. *Wear* **149**, 13–25.
- [129] ZINGONE, G. (1968). Limit analysis of a beam in bending immersed in an elastoplastic medium. *Meccanica* **3**(1), 48–56.
- [130] ZMITROWICZ, A. (1987). A thermodynamical model of contact, friction and wear: I governing equations; II constitutive equations for materials and linearized theories; III constitutive equations for friction, wear and frictional heat. *Wear* **114**(2), 135–168, 169–197, 199–221.
- [131] ZMITROWICZ, A. (1989). Mathematical descriptions of anisotropic friction. *Int. J. Solids Struct.* **25**, 837–862.
- [132] ZMITROWICZ, A. (1993). Constitutive modeling of anisotropic phenomena of friction, wear and frictional heat. *Zeszyty Naukowe IMP PAN w Gdańsku* 381/1342/93.