

Tadeusz Szymczak

Zbigniew L. Kowalewski*

Instytut Transportu Samochodowego

*Instytut Podstawowych Problemów Techniki

WŁAŚCIWOŚCI MECHANICZNE WYBRANYCH KOMPOZYTÓW ORAZ METODY OCENY ICH ZNISZCZENIA

W artykule przedstawiono na podstawie dostępnych prac właściwości mechaniczne żywic i włókien powszechnie stosowanych jako składniki materiałów kompozytowych. Omówiono typy zniszczenia tego rodzaju materiałów wynikające z różnej kruchości zbrojenia. Zaprezentowano rodzaje przełomów występujące podczas rozciągania i ściskania kompozytu w zależności od kierunku pobierania próbek. Omówiono kryteria zniszczenia stosowane do oceny odporności materiałów kompozytowych dla różnych wariantów obciążenia.

MECHANICAL PROPERTIES OF SELECTED COMPOSITES AND METHODS OF THEIR FRACTURE ASSESSMENT

Mechanical properties of different resins and fibres commonly used as components of composite materials are presented in the paper. Failure modes of such kind of materials, depending on brittleness of reinforcement are discussed. Fracture under tension and compression is studied reflecting the specimen orientation with respect to its extraction direction. Failure criterions applied to examination of composites resistance for various loading combinations are discussed.

1. Wprowadzenie

1.1. Wybrane materiały kompozytowe i ich właściwości

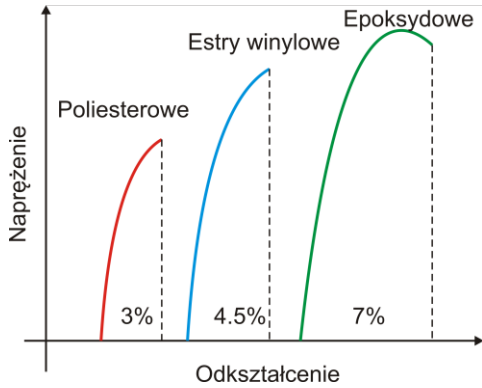
Kompozyt, ze względu na występowanie w nim minimum dwóch składników – matrycy i zbrojenia, jest szczególnym rodzajem materiału konstrukcyjnego. Jego odporność na różne rodzaje obciążenia zależy od właściwości mechanicznych tworzących go materiałów i zorientowania włókien zbrojących względem kierunków obciążenia. Matryca w kompozycie pełni rolę spoiwa dla włókien. W głównej mierze jest ona odpowiedzialna za przenoszenie obciążenia na zbrojenie, które decyduje z kolei o jego wytrzymałości.

W przypadku kompozytów polimerowych na matryce przeznacza się żywice poliestrowe, estry winylowe lub epoksydowe. Dobiera się je w zależności od oczekiwanych wartości eksploatacyjnego naprężenia i odkształcenia, rys. 1a. Najniższą wytrzymałością na rozciąganie charakteryzują się żywice poliestrowe, najwyższą natomiast epoksydowe. Podobną prawidłowość obserwuje się w przypadku wartości odkształcenia w chwili zniszczenia. Poliestry i estry winylowe mogą być poddawane odkształceniu do wartości odpowiednio 3 i 4,5%. W przypadku żywic epoksydowych wartość odkształcenia całkowitego jest dwukrotnie wyższa i wynosi 7%. Inną cechą wyróżniającą tego rodzaju żywice jest przebieg charakterystyki rozciągania.

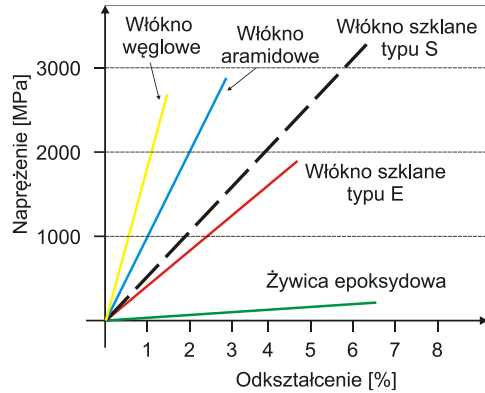
Wśród włókien zbrojących wyróżnić można następujące ich rodzaje: węglowe, aramidowe oraz szklane, rys. 1b. Charakteryzują się one liniową zależnością naprężenie-odkształcenie, przy czym mają różną wytrzymałość na rozciąganie, rys. 1b, tab. 1. Najwyższą wartość wytrzymałości na rozciąganie ma włókno węglowe, ~ 5300 MPa, najniższą natomiast włókno szklane ok. 2400 MPa, tab. 1. W każdym z ich rodzajów występują włókna mające niski (LM - low modulus), wysoki (HM - high modulus) i bardzo wysoki (UHM - ultra high modulus) moduł sprężystości wzdłużnej E , tab. 1. Jak łatwo zauważyć, w przypadku włókien węglowych najwyższy moduł Younga mają włókna o najniższej wartości wytrzymałości na rozciąganie. Tego rodzaju prawidłowość nie występuje w przypadku włókien aramidowych i szklanych.

Gęstość jest istotną cechą fizyczną włókien zbrojących, ponieważ decyduje ona o masie kompozytu, co przekłada się na obniżenie ciężaru konstrukcji. Najniższą jej wartość, wynoszącą $1,45 \text{ g/cm}^3$ mają włókna aramidowe, wyższą wartość - równą $1,8 \text{ g/cm}^3$ - wykazują włókna węglowe, natomiast włókna szklane charakteryzują się najwyższą wartością tego parametru, osiągającą $2,5 \text{ g/cm}^3$, tab. 1.

Inną ważną właściwością włókna determinującą jego zastosowanie, jest odporność na temperaturę, co ilustruje rys. 2 na przykładzie zachowania dwóch rodzajów włókien szklanego typu S i Nextel 440. Pierwsze z nich, pomimo że charakteryzuje się ponad dwukrotnie wyższą wartością wytrzymałości na rozciąganie, doznaje liniowego obniżenia wartości tego parametru z 4 250 MPa do 800 MPa, gdy temperatura wzrasta od temperatury pokojowej do 680°C . W przypadku włókna Nextel 440, mającego wytrzymałość na rozciąganie ok. 1 900 MPa, obserwuje się utrzymywanie wartości tego parametru na stałym poziomie w temperaturze nieprzekraczającej $1\ 100^\circ\text{C}$.



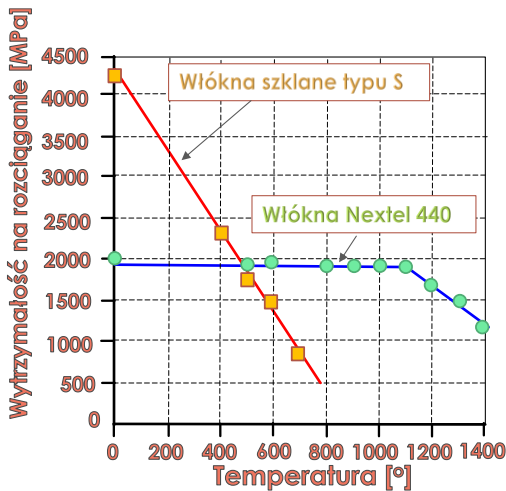
(a)



(b)

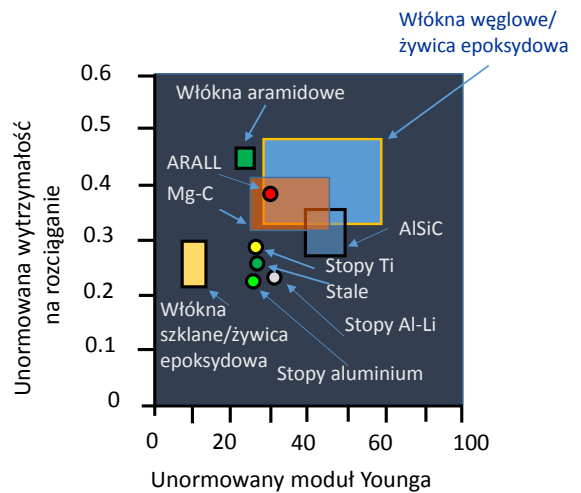
Rys. 1. Charakterystyki napężenie-odkształcenie różnych składników kompozytu: (a) żywic, (b) włókien [6]

Fig. 1. The stress-strain characteristics of the various components of the composite: (A) a resin, (b) fibers [6]



Rys. 2. Wytrzymałość na rozciąganie włókna szklanego typu S oraz włókna Nextel 440 w funkcji temperatury w zakresie od 0°C do 1 400°C [13]

Fig. 2. Tensile strength of the type S glass fiber and Nextel 440 fiber as a function of temperature from 0°C to 1 400°C [13]



Rys. 3. Unormowana zależność wytrzymałości na rozciąganie i modułu Younga [12]

Fig. 3. The normalization of relationship between tensile strength and Young's modulus [12]

Tabela 1

Parametry mechaniczne włókien i typowych materiałów [6]

Table 1

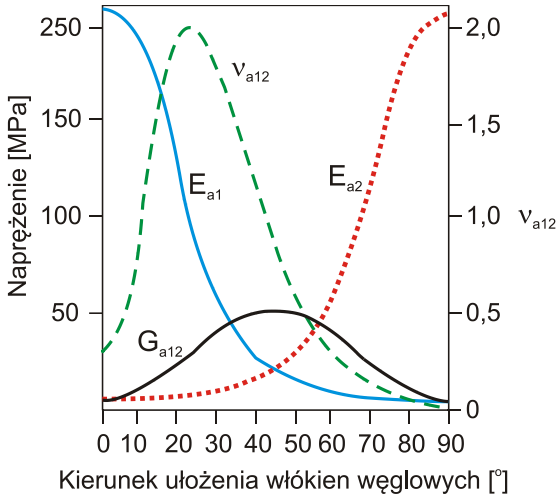
Mechanical characteristics of fibers and typical materials [6]

Rodzaj materiału	Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	Moduł Younga [GPa]	Gęstość [g/cm ³]
Włókno węglowe HS	3500	160÷270	1,8
LM	5300	270÷325	1,8
HM	3500	325÷440	1,8
UHM	2000	440+	2,0
Włókno aramidowe LM	3600	60	1,45
HM	3100	120	1,45
UHM	3400	180	1,47
Włókno szklane	2400	69	2,5
E – niska przew. elektryczna			
S2 - wysokowytrzymałe	3450	85	2,5
Kwarc	3700	69	2,2
Stop aluminium 7020 (PA 47)	400	70	2,7
Tytan	950	110	4,5
Stal węglowa (55 Grade)	450	205	7,8
Stal nierdzewna (A5-80)	800	196	7,8
Stal narzędziowa (17/4/H900)	1241	197	7,8

W ocenie przydatności kompozytu do określonego zastosowania istotną rolę odgrywa wytrzymałość na rozciąganie i moduł Younga, rys. 3, tab. 1. Pierwszy z tych parametrów mechanicznych określa zdolność materiału do przenoszenia obciążenia niszczącego, drugi natomiast jest odpowiedzialny za sztywność. W porównaniu do powszechnie stosowanych stali lub innych stopów, materiały kompozytowe charakteryzują się ok. 2,5 wyższą wartością wytrzymałości na rozciąganie i modułu Younga, rys. 3.

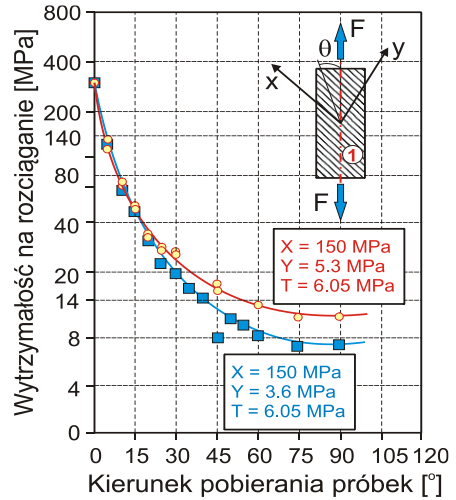
Powszechnie wiadomo, że parametry mechaniczne kompozytów zależą od kierunku ułożenia włókien zbrojących, co zostało zaprezentowane na rys. 4 na podstawie wyników z badania kompozytu zbrojonego włóknami węglowymi [12]. W przypadku modułu Younga występuje obniżenie jego wartości z 260 MPa do 10 MPa, gdy kierunek określający ułożenie włókien zmienia się z 0 do 90°. Z kolei moduł Kirchoffa uzyskuje największą wartość przy ułożeniu włókien pod kątem 45°, a najniższą, gdy kąt ten jest równy 0 oraz 90°.

Kierunkowość zbrojenia ma istotny wpływ na wartość parametrów mechanicznych kompozytu. Krajowe i zagraniczne normy (tab. 2) proponują kilka metod badawczych uwzględniających kierunkowość zbrojenia, a mianowicie: próbę rozciągania, ściskania, zginania, ścinania, czy wyznaczanie odporności na kruche pęknięcie w teście rozrywania. Jak ważna jest orientacja kompozytu przy określaniu jego parametrów mechanicznych pokazano na rys. 5. Zamieszczono tu zmiany wytrzymałości na rozciąganie w funkcji kierunku pobierania próbek z kompozytu zbrojonego dwoma rodzajami włókien. Zmiany tego parametru przejawiały się nieliniowym i znacznym obniżaniem jego wartości, a mianowicie z ok. 350 MPa przy kącie 0° do ok. 10 MPa przy kącie 90°, określającym usytuowanie próbek.



Rys. 4. Parametry mechaniczne kompozytu o zbrojeniu w postaci włókien węglowych w zależności od kierunku ułożenia włókien zbrojących [12]

Fig. 4. Mechanical characteristics of the composite reinforcement by carbon fibers, depending on the direction of the reinforcing fibers [12]



Rys. 5. Wytrzymałość na rozciąganie kompozytu E-787-NUF w funkcji kierunku pobierania próbek w przypadku dwóch rodzajów włókien [1]

Fig. 5. The tensile strength of the composite E-787-NUF as a function of the sampling in the case of two types of fibers [1]

Bazując na wynikach z testów rozciągania próbek kompozytowych o określonej orientacji względem kierunku obciążenia rozciągającego opisanej wartością kąta θ (rys. 5) można wyznaczyć teoretyczną wytrzymałość włókien i matrycy, które są wyrażane odpowiednio następującymi wzorami [3] [4]:

$$\sigma_{IW} = \left[\left(\frac{\cos^2(\theta)}{X_{(t)}} \right)^2 + \left(\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{T} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (1)$$

$$\sigma_{IM} = \left[\left(\frac{\sin^2(\theta)}{Y_{(t)}} \right)^2 + \left(\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{T} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2)$$

gdzie: $X_{(t)}$ – wytrzymałość kompozytu w kierunku równoległym do ułożenia włókien; $Y_{(t)}$ – wytrzymałość kompozytu w kierunku prostopadłym do ułożenia włókien, T – wytrzymałość na ścinanie wyznaczana w warunkach występowania obciążenia rozciągającego lub ściskającego.

Główne normy dotyczące badania kompozytów [6]

Table 2

The main standards for the testing composites [6]

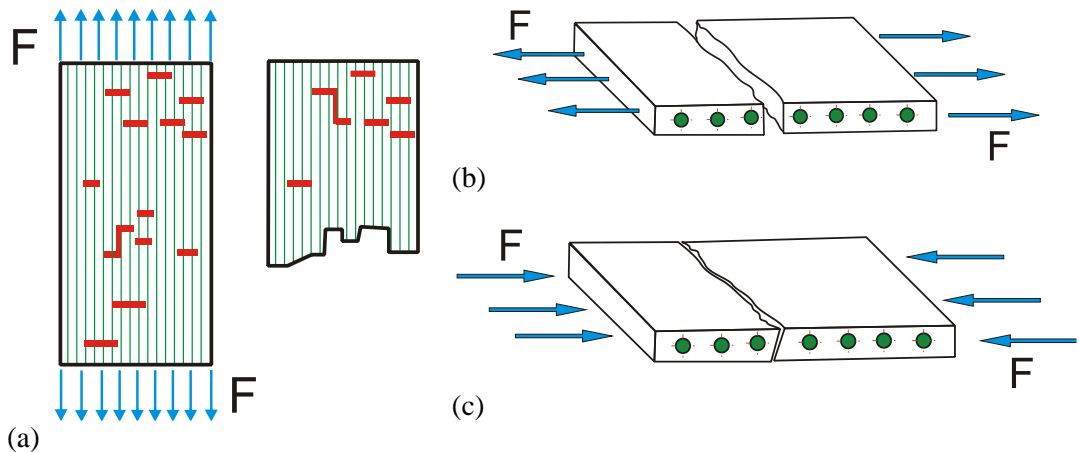
Rodzaj testu	Nazwa normy	Numer normy
Jednoosiowe rozciąganie	Determination of tensile properties. Test conditions for unidirectional fibre-reinforced plastic composites	BS EN ISO 527-4 & 1 BS EN ISO 527-5 & 1
Test ściskania	Fibre-reinforced plastic composites. Determination of compressive properties in the in-plane direction	BS EN ISO 14126
Test zginania	Fibre-reinforced plastic composites. Determination of flexural properties	BS EN ISO 14125
Test ścinania	Fibre-reinforced plastic composites. Determination of the in-plane shear stress/shear strain response, including the in-plane shear modulus and strength by the $\pm 45^\circ$ tension test method	BS EN ISO 14129
Badanie zachowania kompozytu w teście trójpunktowego zginania	Fibre-reinforced plastic composites. Determination of apparent interlaminar shear strength by short-beam method	BS EN ISO 14130
Odporność na pękanie w warunkach I-go rodzaju obciążenia	Fibre-reinforced plastic composites - Determination of mode I interlaminar fracture toughness, GIC, for unidirectionally reinforced materials	ISO 15024
Testy zmęczeniowe	Fibre-reinforced plastics - Determination of fatigue properties under cyclic loading conditions	ISO/CD 13003
Test rozciągania próbek z karbem	Standard test method for open-hole tensile strength of polymer matrix composite laminates	ASTM D5766 / D5766M - 11
Ściskanie próbek z karbem	Standard test method for open-hole compressive strength of polymer matrix composite laminates	ASTM D6484 / D6484M - 09
Odporność na pękanie w warunkach II-go rodzaju obciążenia	Wytyczne branżowe	Zaproponowana przez VAMAS www.vamas.org
<i>Włókno szklane</i>	<i>Tworzywa sztuczne wzmocnione włóknem szklanym - Oznaczanie zawartości pustych przestrzeni - Ubytek przy spalaniu, kruszenie mechaniczne i statystyczne metody obliczeń</i>	<i>ISO 1172/ISO 7822</i>
<i>Włókno węglowe</i>	<i>Carbon-fibre-reinforced composites - Determination of the resin, fibre and void contents</i>	<i>ISO 14127:2008</i>

1.2. Wybrane mechanizmy zniszczenia kompozytów i ich składników

W porównaniu do przebiegu niszczenia powszechnie stosowanych materiałów, kompozyty mają innego rodzaju cechy charakterystyczne w chwili utraty spójności, rys. 6. W przypadku, gdy zbrojenie (o wysokiej kruchości) jest zorientowane równolegle do kierunku obciążenia rozciągającego, rozdzielanie kompozytu poprzedzone jest pękaniem

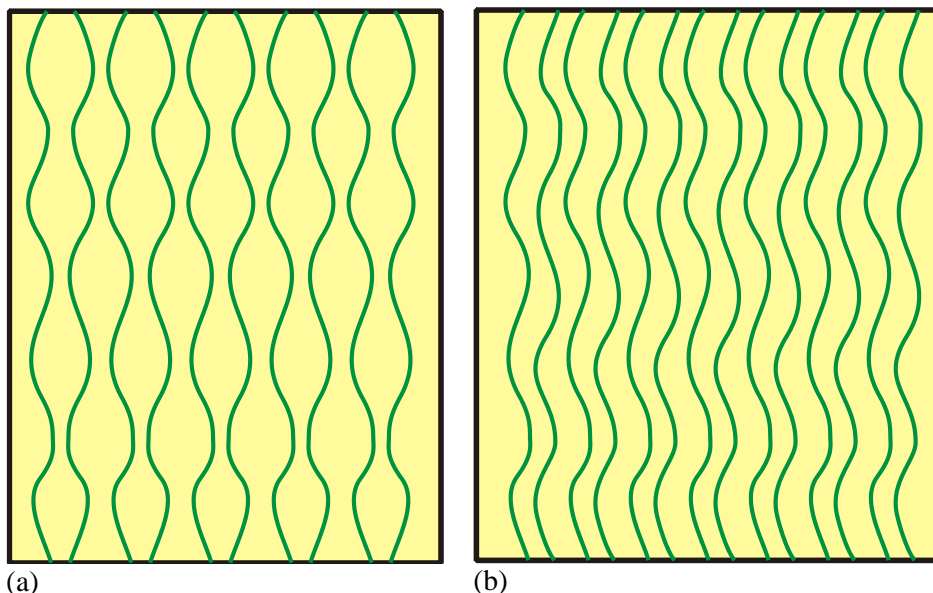
włókien w płaszczyznach prostopadłych do ich głównej osi, tzw. pęknięcie rozdzielcze. W kolejnym etapie pęknięcia, propagując przez matrycę łączą się tworząc pęknięcie dominujące o charakterze schodkowym, rys. 6a. Kolejny typ uszkodzenia kompozytu występuje, gdy siła rozciągająca jest zorientowana prostopadle do kierunku ułożenia włókien, rys. 6b. W tym przypadku zniszczenie kompozytu skutkuje rozdzieleniem matrycy w płaszczyźnie prostopadłej do wektora obciążenia. W sytuacji, gdy siła ta powoduje ściskanie, rozdzielenie kompozytu następuje również na skutek pęknięcia matrycy, lecz w płaszczyźnie nachylonej pod kątem do obciążenia [15].

Włókna trwale związane z matrycą w warunkach oddziaływania siły ścisniającej na kierunku ich głównej osi mogą doznawać mikro-wyboczenia przejawiającego się sinusoidalną deformacją zbrojenia w tzw. układzie lustrzanym, rys. 7a [15]. Efekt ten jest skutkiem niejednakowej deformacji matrycy w kierunku poprzecznym. W przypadku, gdy włókna nie są idealnie zespolone z matrycą dominuje mikro-wyboczenie charakteryzujące się deformacją włókien o konfiguracji falowej, rys. 7b. Jak podaje autor pracy [15], tego rodzaju zachowanie zbrojenia jest wynikiem odkształcania osnowy w płaszczyznach deformacji postaciowej pomiędzy najbliższymi włóknami.



Rys. 6. Typy zniszczeń kompozytu: (a) o włóknach pokrywających się z kierunkiem obciążenia wywołującego rozciąganie; (b) o prostopadłym ułożeniu włókien w stosunku do kierunku działania siły rozciągającej; (c) o prostopadłym ułożeniu włókien w stosunku do kierunku siły ścisniającej [15]

Fig. 6. Types of damage of the composite: (a) fibers coincide with the direction of the tensile load; (B) with the perpendicular orientation of the fibers relative to the direction of the tensile force; (c) with the perpendicular orientation of the fibers to the direction of the compressive force [15]

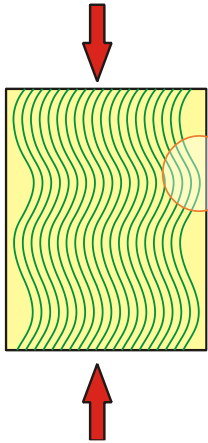


Rys. 7. Przypadki odkształcania zbrojenia o niskiej kruchości: (a) trwale związanych z matrycą, (b) zespolonych nietrwale z matrycą [15]

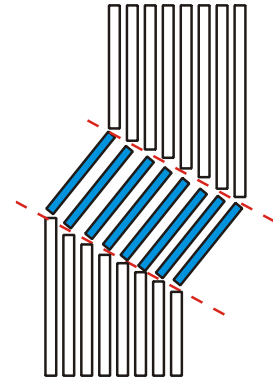
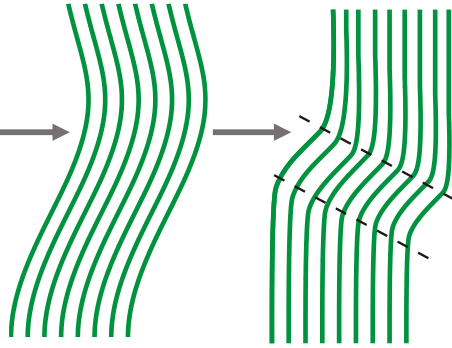
Fig. 7. The cases of deformation of the reinforcement of low friability: (a) permanently bonded with the matrix, (b) not permanently bonded with the matrix [15]

Postępujące ściskanie kompozytu wykazującego deformację włókien zgodną ze schematem pokazanym na rys. 7b prowadzi do wystąpienia pęknięć w strefach o największych wartościach odkształcenia/naprężenia, rys. 8 i 9. Tego rodzaju zniszczenie zbrojenia jest charakterystyczne dla włókien aramidowych – określanych powszechnie nazwą Kevlar oraz włókien szklanych i węglowych, rys. 9.

Charakter uszkodzenia kompozytu oraz wartość jego wytrzymałości nie wynikają jedynie z rodzaju zastosowanych składników, lecz również są rezultatem ułożenia włókien względem kierunku obciążenia, co zostało przedstawione na rys. 10 na przykładzie dekohezji kompozytu żywica poliestrowa-szkło typu E [14]. W tym przypadku orientacja włókien wzdłuż kierunku obciążenia skutkuje uzyskaniem wysokiej wytrzymałości na rozciąganie/ściskanie, zniszczenie jest zdominowane przez dekohezję włókien. Tego rodzaju efekty występują przy kącie usytuowania zbrojenia względem kierunku obciążenia zawierającym się w zakresie od 0 do 10°. Zwiększenie jego wartości do 25 - prowadzi do nieliniowego obniżania wytrzymałości na rozciąganie, jak i ściskanie, przy czym rodzaj zniszczenia pozostaje niezmienny, tj. występuje w płaszczyźnie maksymalnego naprężenia stycznego. Natomiast przekroczenie wartości kąta orientacji zbrojenia powyżej 25° skutkuje występowaniem zniszczenia rozdzielczego w warunkach oddziaływania obciążenia rozciągającego. W przypadku działania siły ściskającej zniszczenie rozdzielcze pojawia się znacznie później, a mianowicie gdy kąt ten jest równy 55°.

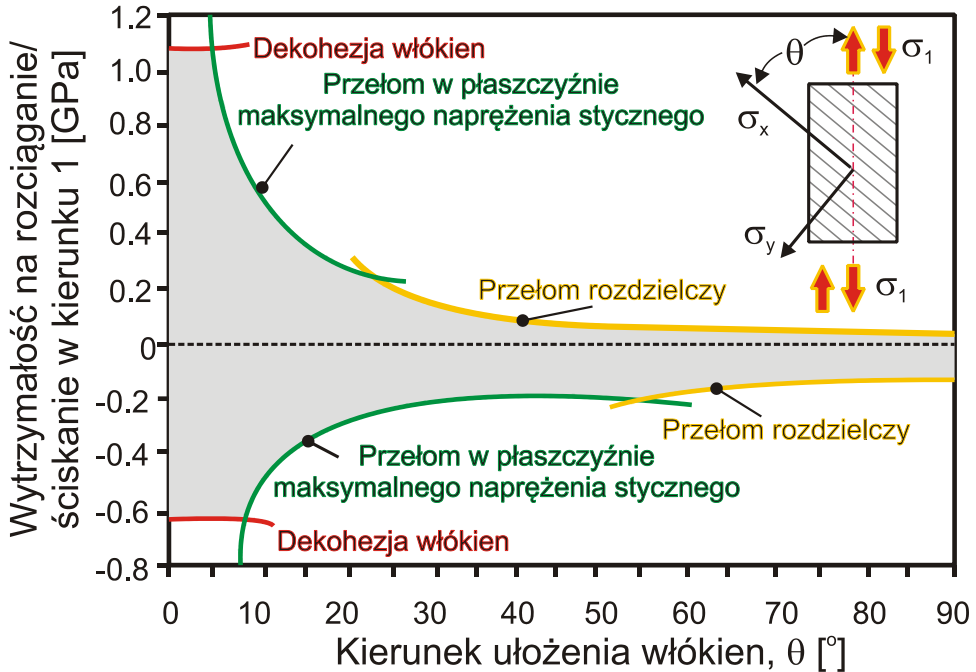


Rys. 8. Etapy odkształcania włókien o średniej kruchości [15]
 Fig. 8. Steps of the deformation of fibers of average friability [15]



Rys. 9. Schemat zniszczenie dla włókien o średniej i wysokiej kruchości rys. 8 [15]

Fig. 9. Destructing scheme of the fibers of medium and high friability Fig. 8 [15]



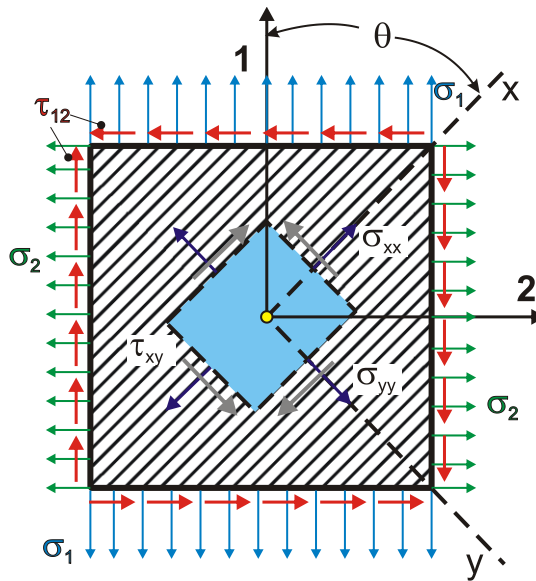
Rys. 10. Rodzaje zniszczenia jednokierunkowego kompozytu epoksydowego zbrojonego włóknami szklanymi typu E w zależności od kierunku ich ułożenia, w warunkach oddziaływania siły rozciągającej oraz ściskającej [14]

Fig. 10. Types of unidirectional destruction of the E-glass fibers reinforced epoxy composite, depending on the direction of their orientation, under the tensile and compressive force [14]

2. Wybrane kryteria zniszczenia kompozytów

W prawidłowym opisie zniszczenia kompozytów istotną rolę ma określenie stanu naprężenia. Powszechnie przyjmuje się dwa układy współrzędnych. Jeden z nich oznaczany jako „0xy” jest związany z kierunkowością zbrojenia, drugi natomiast „012” z orientacją obciążenia,

Rys. 11. Kąt θ między tymi układami reprezentuje obrót kierunku obciążenia względem kierunku ułożenia włókien zbrojących [10].



Rys. 11. Stan naprężenia w kompozycie wywołany dwukierunkowym obciążeniem, którego wektory nie pokrywają się z kierunkiem zbrojenia, gdzie: 1 i 2 – kierunki składowych naprężenia; x i y – osie układu współrzędnych o kierunkach zgodnych z usytuowaniem włókien zbrojących, θ – kąt określający położenie kierunków obciążenia względem włókien [10]

Fig. 11. The state of stress in the composite caused by bidirectional load, whose vectors do not coincide with the direction of reinforcement, where: 1 and 2 - the directions of stress components; x and y - the coordinate axes - θ - angle of coordinates with directions consistent with the orientation of reinforcing fibers, determining the location of the load directions relative to the direction of the fibers [10]

Równania opisujące składowe płaskiego stanu naprężenia można zatem wyrazić w następujący sposób:

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 \cos^2(\theta) + \sigma_2 \sin^2(\theta) + 2\tau_{12} \sin(\theta)\cos(\theta), \quad (3)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_1 \sin^2(\theta) + \sigma_2 \cos^2(\theta) - 2\tau_{12} \sin(\theta)\cos(\theta), \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = -(\sigma_1 - \sigma_2)\sin(\theta)\cos(\theta) + \tau_{12}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)), \quad (5)$$

przy czym przyjmuje się występowanie poniższych warunków

$$n = \sigma_2 / \sigma_1, \quad (6)$$

$$k = \tau_{12} / \sigma_1. \quad (7)$$

gdzie: σ_{xx} – naprężenie normalne, którego kierunek pokrywa się z ułożeniem włókien zbrojących, σ_{yy} – naprężenie normalne prostopadłe do kierunku ułożenia zbrojenia, τ_{xy} – naprężenie styczne.

Równoległe z badaniami doświadczalnymi kompozytów prowadzone są również analizy teoretyczne, których zasadniczym celem jest przedstawianie opisu zachowania tego rodzaju materiałów w warunkach obciążenia jedno- i dwuosiowego aż do ich zniszczenia. Wśród bardziej znanych kryteriów zniszczenia można wymienić: prawo mieszanin [2]; kryterium maksymalnego odkształcenia i naprężenia [18]; kryterium Hill'a [9] i Tsai-Hill'a [19], Hoffman'a [11], [17], Tsai-Wu [20], Hashin'a-Rotem'a [8], Hashin'a [5], [7] oraz Puck'a [16]. Poniżej przedstawiono ich krótką charakterystykę.

2.1. Prawo mieszanin [2]

Prawo mieszanin umożliwia rozpatrywanie kompozytu jako materiału dwuskładnikowego o jednokierunkowym ułożeniu włókien. Jego parametry mechaniczne są określane na podstawie właściwości mechanicznych włókna i matrycy oraz ich udziału objętościowego.

Moduł sprężystości wzdłużnej oblicza się jako sumę iloczynów wartości modułu sprężystości wzdłużnej i udziału włókien oraz matrycy tj.:

$$E_1 = E_w V_w + E_M V_M, \quad (8)$$

gdzie: E_w i E_M – w kolejności: moduł Younga włókna i matrycy, V_w i V_M – odpowiednio udział objętościowy zbrojenia i matrycy w kompozycie. Moduł sprężystości w kierunku poprzecznym jest z kolei wyrażany następującym wzorem

$$E_2 = \frac{E_w E_M}{E_w V_M + E_M V_w}. \quad (9)$$

Parametr ten jest wprost proporcjonalny do iloczynu modułu sprężystości wzdłużnej włókna i matrycy, a odwrotnie proporcjonalny do ich udziału objętościowego.

Wytrzymałość kompozytu w kierunku włókien jest reprezentowana przez równanie:

$$\sigma_1 = \sigma_{1w} V_w + \sigma_{1M} V_M, \quad (10)$$

gdzie: σ_{1w} oraz σ_{1M} – wytrzymałość na rozciąganie odpowiednio, włókna i matrycy w kierunku 1 zgodnym z ułożeniem włókien. Jednocześnie przyjmuje się, że warunek proporcjonalności: wytrzymałości na rozciąganie do modułu sprężystości wzdłużnej składników kompozytu jest stały

$$\frac{\sigma_{1w}}{E_w} = \frac{\sigma_{1M}}{E_M}. \quad (11)$$

W przypadku naprężenia niszczącego zbrojenia przyjmuje się, że jest ono proporcjonalne względem wytrzymałości kompozytu i odwrotnie proporcjonalne do udziału objętościowego składników kompozytu oraz wartości ich modułu Younga

$$\sigma_{wN} = \frac{\sigma_1}{E_M V_M / E_w + V_w}. \quad (12)$$

2.2. Kryteria odkształcenia/naprężenia maksymalnego (1920) [18]

Kryteria odkształcenia lub naprężenia maksymalnego są przeznaczone do przewidywania zniszczenia kompozytu o jednokierunkowym ułożeniu włókien. W przypadku gdy o zniszczeniu decyduje wartość odkształcenia włókna (ϵ_{xx}) przyjmuje się, że osiągnięcie wartości deformacji równej odkształceniu granicznemu (X_ϵ) określa stan

wystąpienia uszkodzeń – wzór 13a. Z kolei pojawienie się uszkodzeń w matrycy definiuje się ilorazem odkształcenia poprzecznego (ϵ_{yy}) do jego wartości granicznej (Y_ϵ) – wzór 13b. Pęknięcie matrycy w płaszczyźnie maksymalnego odkształcenia postaciowego jest determinowane osiągnięciem przez kąt odkształcenia postaciowego (γ_{xy}) jego granicznej wartości (T_ϵ) – wzór 13c.

$$\frac{\epsilon_{xx}}{X_\epsilon} = 1, (13a) \quad \frac{\epsilon_{yy}}{Y_\epsilon} = 1, \quad (13b) \quad \frac{\gamma_{xy}}{T_\epsilon} = 1, \quad (13c)$$

$$\frac{\sigma_{xx}}{X_\sigma} = 1, (14a) \quad \frac{\sigma_{yy}}{Y_\sigma} = 1, \quad (14b) \quad \frac{\tau_{xy}}{T_\sigma} = 1. \quad (14c)$$

Jeśli naprężenie odgrywa dominującą rolę w zniszczeniu kompozytu wówczas kryteria parametru granicznego osiągnięte przez naprężenie normalne (σ_{yy}) w kierunku poprzecznym wartości wytrzymałości na rozciąganie (Y_σ) jest utożsamiane z pojawieniem się pęknięć w matrycy (wzór 14b). Z kolei rozwój uszkodzeń w płaszczyźnie maksymalnego naprężenia stycznego jest warunkowany wartością składowej stycznej stanu naprężenia (τ_{xy}) równą wytrzymałości na ścinanie (T_σ) (wzór 14c). Wyznaczanie ostatniego z wymienionych parametrów odbywa się w teście rozciągania lub ściskania.

2.3. Kryteria Hill'a (1948) [9] i Tsai-Hill'a (1965) [19]

Kryterium Hill'a wyrażane jest funkcją drugiego stopnia, będącą sumą ilorazów składowych stanu naprężenia odniesionych do parametrów mechanicznych kompozytu

$$\frac{\sigma_{xx}^2}{X^2} - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \frac{\sigma_{yy}^2}{Y^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{T^2} = 1, \quad (15)$$

gdzie: X, Y, Z – granice plastyczności na rozciąganie materiału pobranego z trzech wzajemnie prostopadłych kierunków; T – granica plastyczności na ścinanie w płaszczyźnie OXY.

W założeniu warunek Hill'a można stosować do oceny zniszczenia kompozytu jedynie wtedy, gdy poddawany jest on oddziaływaniu złożonego stanu naprężenia o składowych dodatnio określonych. Ponadto, konieczne jest wyznaczenie granic plastyczności kompozytu w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach. Z doświadczalnego punktu widzenia określenie wartości tych parametrów mechanicznych nie stanowi problemu, gdy kierunki, z których pobiera się próbki, pokrywają się z płaszczyzną OXY. Trudności z pobraniem reprezentatywnej partii materiału do wytworzenia próbek pojawiają się na kierunku osi Z – ponieważ w większości przypadków kompozytów w postaci płyt, grubość ich jest niewystarczająca by przygotować próbkę na rozciąganie, nawet z klasy „mini”.

Modyfikację wyrażenia (15) reprezentuje równanie (16), które jest określane jako kryterium Tsai'a-Hill'a. Jak widać wyraża się ono funkcją kwadratową, podobnie jak kryterium Hilla

$$\frac{\sigma_{xx}^2}{X_{(t,c)}^2} - \frac{\sigma_{xx} \sigma_{yy}}{X_{(t,c)}^2} + \frac{\sigma_{yy}^2}{Y_{(t,c)}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{T_{(t,c)}^2} = 1, \quad (16)$$

gdzie: $X_{(t,c)}$, $Y_{(t,c)}$ – odpowiednio wytrzymałość na rozciąganie (t) oraz ściskanie (c) w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach w płaszczyźnie OXY; $T_{(t,c)}$ – wytrzymałość na ścinanie poprzez rozciąganie (t) bądź ściskanie (c) w płaszczyźnie OXY. Kryterium Tsai'a-Hill'a jest przeznaczone do oceny zniszczenia kompozytu w płaskim stanie naprężenia określanym przez cztery jego składowe o dowolnych znakach. Podobnie jak warunek (15) uwzględnia w swoim opisie parametry mechaniczne wyznaczone dla materiału zorientowanego w płaszczyźnie OXY – co z doświadczalnego punktu widzenia nie stanowi żadnego problemu.

2.4. Kryterium Hoffman'a (1967) [11], [17]

W kryterium Hoffman'a (wzór 17) poszczególne jego człony stanowią iloczyny składowych stanu naprężenia i współczynników (C_i) będących stałymi materiałowymi, określanymi w trzech różnych testach: rozciąganiu, ścisaniu i skręcaniu

$$C_1\sigma_{yy}^2 + C_2\sigma_{xx}^2 + C_3\sigma_{xx}^2 + C_4\sigma_{xx} + C_9\tau_{xy}^2 = 1. \quad (17)$$

Hoffman zaproponował dodatkowo wprowadzenie funkcji powierzchni plastyczności, co w efekcie umożliwiło uzyskanie następującego wyrażenia

$$\Phi(\sigma) = \alpha_{23}\sigma_{yy}^2 + \alpha_{31}\sigma_{xx}^2 + \alpha_{12}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + 3\alpha_{66}\sigma_{xy}^2 - \bar{\sigma}. \quad (18)$$

Równanie (18) uwzględnia składowe płaskiego stanu naprężenia występującego w materiale poddawanemu dwukierunkowemu rozciąganiu (σ_{xx} , σ_{yy}) i ścinaniu (σ_{xy}). Symbol $\bar{\sigma}$ reprezentuje naprężenie zredukowane. Natomiast wartości współczynników α_i oblicza się z następujących wyrażen:

$$\alpha_{12} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \left(\frac{1}{X_{(c)}X_{(t)}} + \frac{1}{Y_{(c)}Y_{(t)}} \right), \quad (19a)$$

$$\alpha_{23} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \left(\frac{1}{Y_{(c)}Y_{(t)}} - \frac{1}{X_{(c)}X_{(t)}} \right), \quad (19b)$$

$$\alpha_{31} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \left(\frac{1}{X_{(c)}X_{(t)}} - \frac{1}{Y_{(c)}Y_{(t)}} \right), \quad (19c)$$

$$\alpha_{11} = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{X_{(c)} - X_{(t)}}{X_{(c)}X_{(t)}} \right), \quad (19d)$$

$$\alpha_{22} = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{Y_{(c)} - Y_{(t)}}{Y_{(c)}Y_{(t)}} \right), \quad (19e)$$

$$\alpha_{66} = \frac{\bar{\sigma}^2}{3T^2}. \quad (19f)$$

W celu wyznaczenia ich wartości wymagane jest uprzednie określenie wytrzymałości na rozciąganie ($X_{(t)}$, $Y_{(t)}$) i ściskanie ($X_{(c)}$, $Y_{(c)}$) kompozytu w kierunkach wzajemnie prostopadłych oraz wytrzymałości na ścinanie (T). Z doświadczalnego punktu widzenia uzyskanie wartości wymienionych parametrów mechanicznych jest łatwo osiągalne przy użyciu współcześnie stosowanej techniki badawczej.

Na uwagę zasługuje również wrażliwość kryterium Hoffmana na znaki składowych naprężenia σ_{xx} i σ_{yy} oraz jego niezmienniczość ze względu na zwrot naprężenia stycznego σ_{xy} .

2.5. Kryterium Tsai'a-Wu'a (1971) [20]

Kolejnym kryterium stosowanym do oceny zniszczenia materiałów kompozytowych jest wyrażenie zaproponowane przez Tsai'a i Wu'a, w postaci:

$$F_1\sigma_{xx} + F_2\sigma_{yy} + F_{11}\sigma_{xx}^2 + F_{22}\sigma_{yy}^2 + 2F_{12}\sigma_{xx}\sigma_{yy} + F_{66}\tau_{xy}^2 = 1. \quad (20)$$

Współczynniki w nim zawarte oblicza się stosując następujące wyrażenia:

$$F_1 = \frac{1}{X_{(t)}} + \frac{1}{X_{(c)}}, \quad F_2 = \frac{1}{Y_{(t)}} + \frac{1}{Y_{(c)}}, \quad F_{11} = \frac{-1}{X_{(t)}X_{(c)}}, \quad F_{22} = \frac{-1}{Y_{(t)}Y_{(c)}}, \quad F_{66} = \frac{-1}{T^2}. \quad (21)$$

gdzie: wytrzymałość na rozciąganie i ściskanie kompozytu w kierunku x oraz y oznaczono odpowiednio $X_{(t)}$, $Y_{(t)}$ oraz $X_{(c)}$, $Y_{(c)}$ z kolei wytrzymałość na ścinanie jako T.

Współczynnik F_{12} jest zależny od pozostałych stałych równania (20) oraz stosunku składowych normalnych stanu naprężenia σ_{xx} i σ_{yy} , a mianowicie

$$F_{12} = \frac{1 - BF_1\sigma_2^2 - F_{22}\sigma_2^2 - BF_1\sigma_2 - F_2\sigma_2}{2B\sigma_2^2}, \quad (22)$$

$$B = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}}. \quad (23)$$

W przypadku tego kryterium, podobnie jak przy warunku Hoffman'a, występuje wpływ znaku naprężenia σ_{xx} i σ_{yy} na określenie wystąpienia zniszczenia kompozytu. Natomiast nieistotna jest zmiana zwrotu wektora naprężenia stycznego.

2.6. Kryterium Hashin'a-Rotem'a [8] (1973) i Hashin'a (1980) [5] [7]

W grupie kryteriów do opisu zniszczenia materiałów kompozytowych znajdują się również takie, które umożliwiają niezależne rozpatrywanie uszkodzenia włókna i matrycy. Przykładem takiego podejścia jest kryterium Hashin'a i Rotem'a, wzory (24) i (25). Ze względu na wysoką kruchość włókien postuluje się stosowanie kryterium parametru granicznego w postaci funkcji naprężenia (24). Równanie uwzględnia jedynie zniszczenie włókien na skutek występowania naprężenia rozciągającego, natomiast w przypadku matrycy, biorąc pod uwagę występowanie w niej płaskiego stanu naprężenia określonego naprężeniem normalnym σ_{yy} i stycznym τ_{xy} , istnieje możliwość określenia zniszczenia przy użyciu funkcji stanu granicznego, wyrażanej jako sumy ilorazów składowych naprężenia odniesionych do parametrów mechanicznych ($Y_{(t)}$ – wytrzymałość na rozciąganie w kierunku y; T – wytrzymałość na ścinanie) – wzór (25)

$$\frac{\sigma_{xx}}{X_{(t)}} = 1, \quad (24)$$

$$\left(\frac{\sigma_{yy}}{Y_{(t)}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{T}\right)^2 = 1. \quad (25)$$

Istotnym mankamentem równania (25) jest uwzględnienie jedynie dwóch składowych stanu naprężenia odpowiedzialnych za zniszczenie kompozytu. Wyrażenie to opisuje dwa rodzaje zniszczenia, a mianowicie: rozdzielcze - będące skutkiem oddziaływania naprężenia normalnego w kierunku osi Y, oraz zukosowane charakteryzujące się płaszczyzną nachyloną pod określonym kątem i wywołanego naprężeniem stycznym.

Kryterium uwzględniające również rozdzielcze jak i kątowe pękanie włókien jednocześnie zostało zaproponowane przez Hashin'a, a jego postać przedstawiają wzory (26). Składa się ono z dwóch warunków:

- zawierającego sumę kwadratów ilorazów składowych naprężenia odniesionych do odpowiedników granic wytrzymałości (wzór 26a), gdzie: σ_{xx} – naprężenie normalne; $X_{(t)}$ – wytrzymałość na rozciąganie, τ_{xy} – naprężenie styczne, T – wytrzymałość na ścinanie;
- parametru granicznego (wzór 26b) reprezentowanego jako stosunek składowej σ_{xx} stanu naprężenia do wytrzymałości na ściskanie $X_{(c)}$.

Pierwszy z warunków umożliwi określanie zniszczenia włókna, gdy oddziałuje obciążenie rozciągające oraz ścinające, drugi natomiast, gdy występuje obciążenie ściskające:

$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{X_{(t)}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{T}\right)^2 = 1, \quad (26a)$$

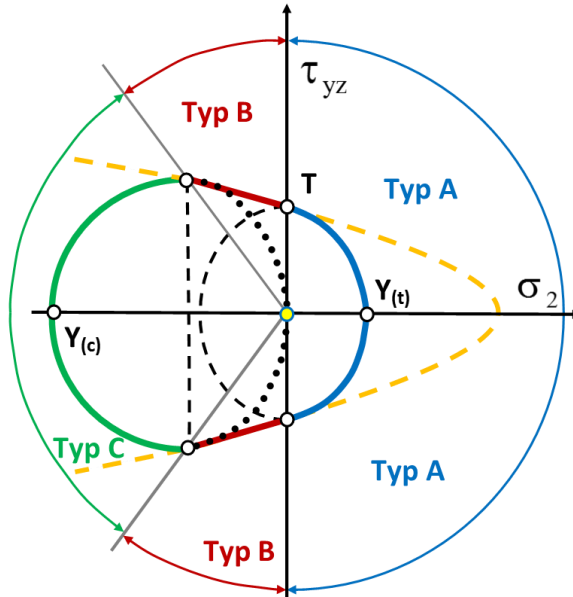
$$\frac{\sigma_{xx}}{X_{(c)}} = 1. \quad (26b)$$

natomiast uszkodzenie matrycy jest opisywane wyrażeniem (25).

2.7. Kryterium Puck'a (1996) [16]

Kryterium Puck'a stanowi odmianę warunku zniszczenia zaproponowanego przez Coulomba-Mohra. Uwzględnia ono charakterystyczne punkty styku obwiedni z kołami Mohra, reprezentującymi określone składowe stanu naprężenia, przy których występuje zniszczenie kompozytu. Umożliwia ocenę zniszczenia materiału w warunkach:

- rozciągania i ścinania (rys. 12, rys. 13, oznaczanego jako Typ A);
- ścianania i niewielkiego ściskania (rys. 12, rys. 13 – określanego jako Typ B);
- ścianania i intensywnego ściskania (rys. 12, rys. 14 – przyjmującego oznaczenie Typ C).

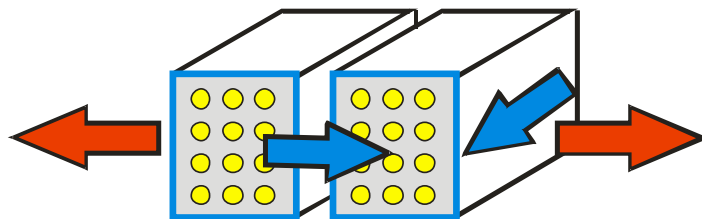


Rys. 12. Graficzna ilustracja kryterium Puck'a [16]
 Fig. 12. Graphical illustration of Puck criterion [16]

W przypadku występowania obciążenia rozciągającego i ścinającego o jednakowych wartościach zniszczenie kompozytu następuje w płaszczyźnie maksymalnego naprężenia głównego, rys. 13. Warunek określający zniszczenie materiału jest wyrażony w sposób następujący:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{xy}}{T}\right)^2 + \left(1 - p_{12}^+ \frac{Y(t)}{T}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{yy}}{Y(t)}\right)^2} + p_{12}^+ \frac{\sigma_{yy}}{T} = 1 \quad (\sigma_{yy} > 0), \quad (27)$$

gdzie: $Y(t)$ – wytrzymałość na rozciąganie, T – wytrzymałość na ścinanie, p_{12}^+ - wartość bezwzględna pochylenia stycznej do obwiedni w punkcie przecięcia z osią τ_{yz} po dodatniej stronie wartości naprężenia normalnego.



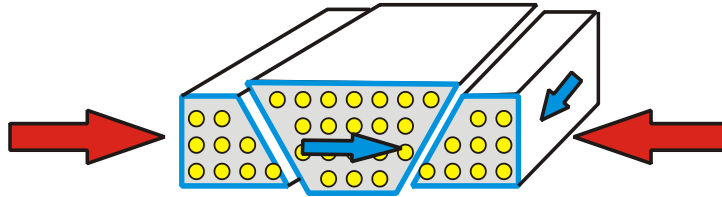
Rys. 13. Schemat zniszczenia kompozytu w warunkach oddziaływania siły rozciągającej i ścinającej – Typ A oraz Typ B [16]
 Fig. 13. Composite destruction scheme under the tensile and shear force - Type A and Type B [16]

W przypadku oddziaływania siły stycznej i ściskającej z przewagą co do wartości tej drugiej, nie występują zmiany w położeniu płaszczyzny zniszczenia, rys. 13. W tym przypadku warunek zniszczenia jest określany następująco:

$$\frac{1}{T} \left(\sqrt{T^2 + (p_{12}^- \sigma_{yy})^2} + p_{12}^- \sigma_{yy} \right) = 1, \quad (28)$$

gdzie: p_{12}^- - wartość bezwzględna pochylenia stycznej do obwiedni w punkcie przecięcia z osią τ_{yz} po ujemnej stronie wartości naprężenia normalnego.

Efektom działania siły ściskającej o wartości większej od siły ścinającej jest występowanie przelomu dwupłaszczyznowego o normalnych, które nie pokrywają się z żadnym z kierunków obciążenia, rys. 14.



Rys. 14. Schemat zniszczenia kompozytu w warunkach oddziaływania znacznej siły ściskającej i niewielkiej co do wartości siły ścinającej – Typ C [16]

Fig. 14. Composite destruction scheme under the action of substantial compressive force and an light shear force - Type C [16]

Dla tego przypadku obciążenia zniszczenie kompozytu jest określane naprężeniem osiającym wartość wytrzymałości na ścinanie w płaszczyźnie zniszczenia, tj.

$$R_{yz} = \frac{Y_{(c)}}{2} \tan(\theta) = \frac{Y_{(c)}}{2} \left(\sqrt{1 + p_{yz}^-} - p_{yz} \right), \quad (29)$$

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{R_{yz}}{-\sigma_{yy}}}, \quad (30)$$

gdzie: θ - kąt określający nachylenie płaszczyzny zniszczenia, p_{yz}^- oraz p_{yz} – są związane odpowiednio z p_{12}^- i p_{12}^+ .

3. Wykorzystanie kryteriów zniszczenia do opisu utraty spójności kompozytów

Zastosowanie kryteriów zniszczenia do opisu utraty spójności kompozytów powinno być poprzedzone ich walidacją na drodze badań doświadczalnych. W ten sposób można wytypować te z nich, które w akceptowalny sposób opisują zniszczenie kompozytu oraz takie, które dają wynik niezadowolający. Przykładem sprawdzenia przydatności wybranych kryteriów zniszczenia do opisu spójności kompozytów są wyniki z badań przeprowadzonych na quasi izotropowym laminacie węglowo-epoksydowym, o nazwie handlowej AS4/3501-6, [15]. Parametry mechaniczne kompozytu przedstawiono w tab. 3. W testach użyto cienkościennych próbek rurkowych, które obciążano ciśnieniem wewnętrznym i siłą osiową rozciągającą oraz ściskającą.

Tabela 3

Właściwości mechaniczne kompozytu AS4/3501-6 [15]

Table 3

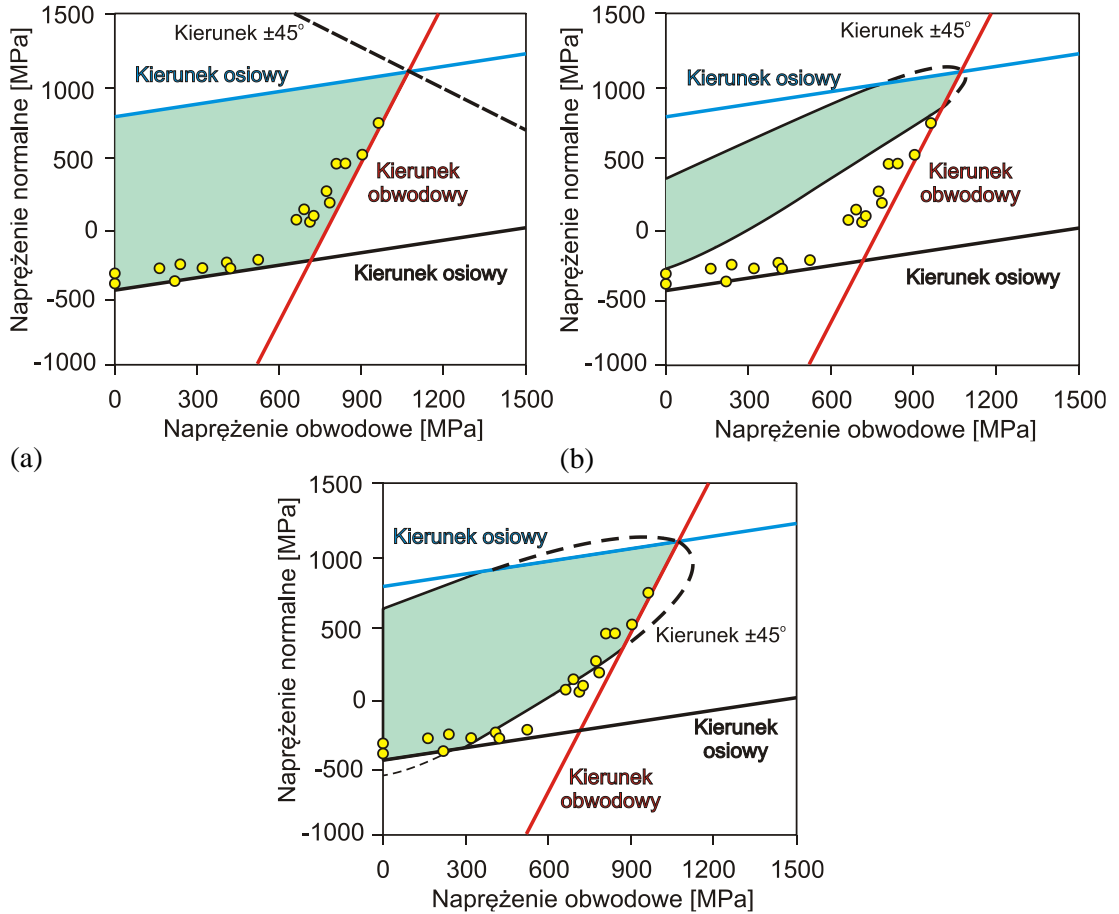
Mechanical properties of the AS4 / 3501-6 composite [15]

Parametr mechaniczny	Wartość
E ₁₁	131 GPa
E ₂₂	11.2 GPa
ν ₁₂	0,28
X _T	1 950 MPa
X _C	1 074 MPa
G ₁₂	6 600 MPa

Walidacji poddano trzy kryteria zniszczenia a mianowicie: maksymalnego naprężenia (rys. 15a), kombinowane (wzór 23 - przy założeniu, że prawa strona jej zależności przyjmuje postać nierówności ≥ 1 , rys. 15b) oraz stanowi odmianę uwzględniająca 50%-owe zredukowanie wartości modułu Kirchhoffa na skutek wystąpienia pęknięć (rys. 15c). Przydatność każdego z nich do opisu utraty spójności kompozytu określano na podstawie porównania wyników z analizy teoretycznej i rezultatów z badań doświadczalnych, rys. 15. Podejście teoretyczne umożliwiło uzyskanie prostych zamieszczonych na rys. 15, reprezentujących zniszczenie kompozytu w warunkach oddziaływania naprężenia normalnego i obwodowego. Z kolei rezultatami testów są wartości składowych stanu naprężenia przy, których występuje utrata sił spójności kompozytu.

Autorzy pracy stosując program Mathematica 9.0 przeprowadzili ocenę wybranych kryteriów zniszczenia pod względem ich przydatności do opisu stanu granicznego w materiale poddanemu dwuosowemu obciążeniu w płaszczyźnie OXY. Spośród warunków zniszczenia wytypowano, a mianowicie: Hill'a, Tsai'a-Wu'a i Hashin'a-Rotem'a. Parametry mechaniczne materiału przyjęte do obliczeń przedstawiono w tab. 4.

Porównanie uzyskanych wyników dla trzech wymienionych kryteriów wskazuje na istotne rozbieżności w opisie stanu granicznego materiału, rys. 16. Na konturze elipsy wynikającej z warunku Hill'a znalazła się granica plastyczności kompozytu na ściskanie. Z kolei w kierunku rozciągania różnice między wartością granicy plastyczności określonej przez kryterium a wyznaczonej doświadczalnie były zaniżone o 33%. Ponadto, elipsa wg kryterium Hill'a charakteryzująca się obrotem wykazała wrażliwość warunku na składową styczną stanu naprężenia. Kryterium Hashin'a-Rotem'a reprezentowane przez elipsę, która w porównaniu do stanu granicznego wg warunku Hill'a jest dwukrotnie mniejszych rozmiarów okazało się nieefektywnym warunkiem do opisu stanu granicznego badanego kompozytu. Z kolei efekt zastosowania warunku Tsai'a-Wu'a był widoczny w postaci elipsy, najkorzystniej spośród uzyskanych, odwzorowującej stan graniczny kompozytu modelowego. Przeprowadzona analiza zachowania rozpatrywanych warunków plastyczności wykazała również wrażliwość kryterium Tsai'a-Wu'a na znak granicy plastyczności, przejawiającą się przesunięciem elipsy do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych σ_{xx} , σ_{yy} przy przyjęciu dodatniości granicy plastyczności na ściskanie w kierunku x i y.



Rys. 15. Porównanie wyników z analizy teoretycznej i badań doświadczalnych uzyskanych przy użyciu trzech kryteriów zniszczenia : (a) maksymalnego naprężenia, (b) interaktywnego, (c) interaktywnego uwzględniającego obniżenie wartości modułu Kirchoffa [15]

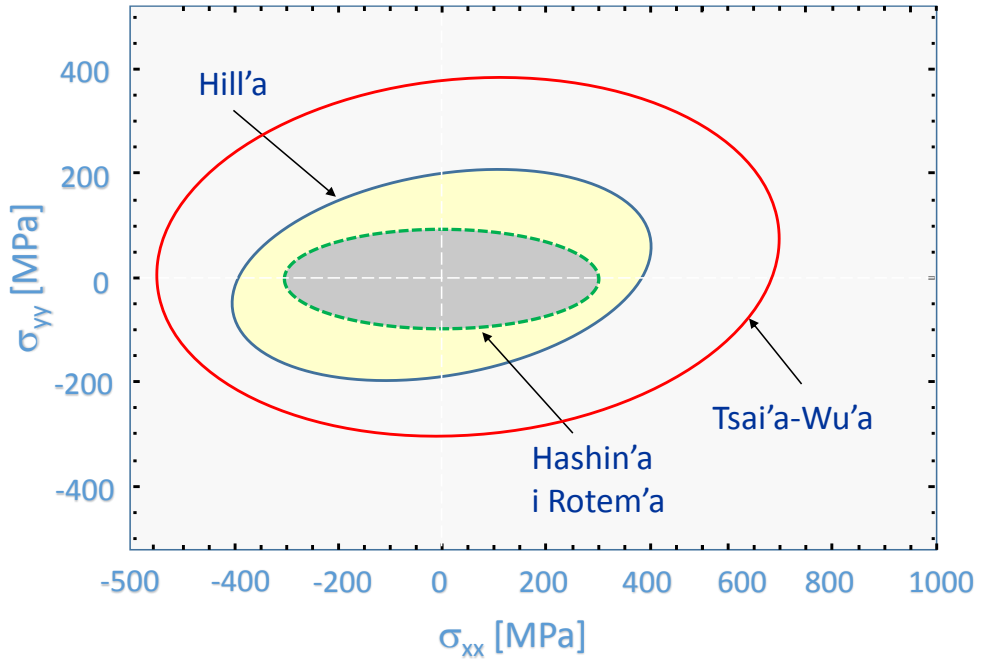
Fig. 15. Comparison of the results from the theoretical analysis and the experimental tests obtained using three criteria of destruction: (a) maximum stress (b) interactive (c) interactive taking into account reduction of the Kirchoff module value [15]

Właściwości mechaniczne kompozytu modelowego
The mechanical properties of the model composite

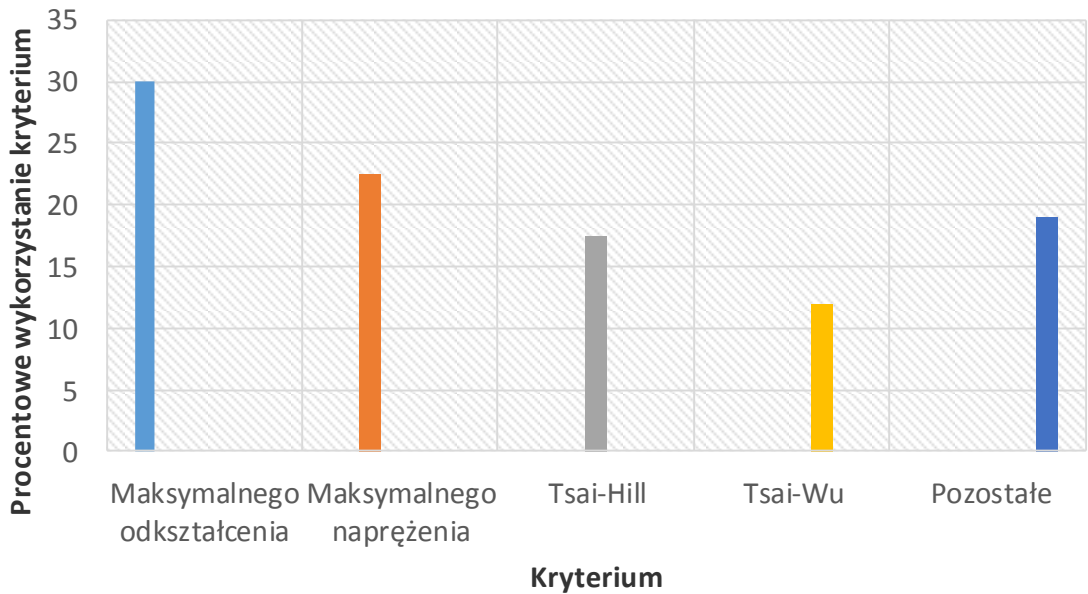
Tabela 4

Table 4

Granica plastyczności	Wartość w MPa
X_t	600
X_c	400
Y_t	300
Y_c	200
T	100
τ_{xy}	75



Rys. 16. Ilustracja stanów granicznych kompozytu według kryteriów: Hill'a, Tsai'a-Wu'a oraz Hashin'a-Rotem'a
 Fig. 16. Illustration of the limit states of the composite according to the following criteria: Hill's, Tsai-Wu and Hashin-Rotem.



Rys. 17. Procentowy udział kryteriów w zastosowaniach przemysłowych [18]
 Fig. 17. Percentage share of criteria for industrial applications [18]

Wykorzystywanie kryteriów zniszczenia kompozytów przez wytwórców tego rodzaju materiałów ilustruje rys. 17. Rysunek uwzględnia kryterium maksymalnego odkształcenia oraz naprężenia, Tsai'a-Hill'a, Tsai'a-Wu'a oraz pozostałe. Z podanych danych wynika, że kryterium maksymalnego odkształcenia jest najczęściej wybierane do oceny utraty spójności kompozytów. Udział procentowy tego warunku wynosi ok. 30%. Drugim z kryteriów, po które stosunkowo często sięgają producenci kompozytów, to kryterium maksymalnego naprężenia, mające 24% udział. Pozostałe to warunek Tsai-Hill'a oraz Tsai-Wu'a, których wykorzystanie jest odpowiednio na poziomie ok. 17 i 12%.

4. Podsumowanie

Analiza wartości modułu Younga i wytrzymałości na rozciąganie włókien zbrojących powszechnie stosowanych wykazała, że najwyższe wartości tych parametrów mają włókna węglowe. Dlatego też są one stosowane do wytwarzania wysokowytrzymałych kompozytów przeznaczonych do eksploatacji przy naprężeniu nieprzekraczającym ok. 400 MPa. Włókna aramidowe, w porównaniu do węglowych, charakteryzują się równie wysokim modułem sprężystości wzdłużnej, lecz ich wytrzymałość na rozciąganie jest minimum dwukrotnie mniejsza, co określa ich zastosowanie w materiałach kompozytowych na konstrukcje, w których naprężenie jest poniżej 200 MPa.

Spośród zaprezentowanych kryteriów zniszczenia wyróżnić należy kryterium Puck'a, które umożliwia prowadzenie analizy zniszczenia kompozytów dla trzech różnych rodzajów obciążenia, w oparciu o prawo Coulomba-Mohra ze wskazaniem jednocześnie orientacji płaszczyzny zniszczenia.

Przeprowadzona ocena przydatności trzech kryteriów zniszczenia Hill'a, Tsai'a-Wu'a oraz Hashin'a-Rotem'a do opisu zachowania kompozytu w warunkach dwuosiowego obciążenia wykazała, że warunek Tsai'a-Wu'a najkorzystniej opisuje stan graniczny tego typu materiałów.

LITERATURA:

- [1] Azzi V.D., Tsai S.W., 1965. Anisotropic strength of composites, *Experimental Mechanics* 9, 283-288.
- [2] Chandler H.D., Campbell I.M.D., Stone M.A., 1995. An assessment of failure criteria for fiber reinforced composite laminates, *Int. J. Fatigue* 17 (7), 513-518.
- [3] Chang F.K., 1987. Post-Failure analysis of bolted composite joints in tension or shear-out mode failure, *J. Composite Materials* 21, 809-833.
- [4] Chang. F., Scoot A., Springer G.S., 1984. Failure strength of nonlinearity elastic composite laminates containing a pin loaded hole, *J. Composite Materials* 18, 464-477.
- [5] Echaabi J., Trochu F., Gauvin R., 1996. Review of failure criteria of fibrous composite materials, *Polymer Composites* 17 (6), 787-796.
- [6] GTC-4-011-1, Guide to composites, Gurit, 73 pages, www.gurit.com.
- [7] Hashin Z., 1980. Failure criteria for unidirectional fiber composites, *Journal of Applied Mechanics* 47, 329-334.
- [8] Hashin Z., Rotem A., 1973. A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials, *Journal of Composite Materials* 7, 448-464.
- [9] Hill R., 1948. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proceedings of the Royal Society, Series A*, Vol. 193, 281-297.
- [10] Hill R., 1950. *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, London, 317 pages.
- [11] Hoffman O., 1967. The brittle strength of orthotropic materials, *J. Composite Materials* 1, 200-206.

- [12] Hull D., 1981 1996. An introduction to composite materials, Cambridge Solid State Series, 333 pages.
- [13] Hulsenberg D., Fehling F., Leutbecher T., 2008. Damage tolerant, translucent oxide fiber/glass matrix composites, *Composites: Part B* 39, 362-373.
- [14] Issac M. D., Ori I., 1994. Engineering mechanics of composite materials, New York, Oxford University Press, 391 pages.
- [15] Murray Y. D., 1989. Theory and verification of the fiber composite damage model implemented in DYNA3D, Defense Nuclear Agency, USA, Technical Report, AD-A216 600, 63 pages.
- [16] Puck A., Schurmann H., 1998. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models, *Composites Science and Technology* 58, 1045-1067 .
- [17] Schellekens J.C., 1990. The use of the Hoffman yield criterion in finite element analysis of anisotropic composites, *Computers & Structures* 37 (6), 1087-1096.
- [18] Sun C.T. at al., 1996. Comparative evaluation of failure analysis methods for composite laminates, NASA, DOT/FAA/AR-95/109.
- [19] Tsai S.W., 1965. Strength characteristics of composite materials, NASA CR-224.
- [20] Tsai S.W., Wu E.M., 1971. A general theory of strength for anisotropic materials, *J. Composite Materials* 5, 58-80.