WACLAW OLSZAK e PIOTR PERZYNA

dell'Accademia delle Science di Polonia - Varsavia

LES EQUATIONS CONSTITUTIVES ET PHENOMENES DE RELAXATION DANS LES MILIEUX ELASTO/VISCO-PLASTIQUES

(Conferenza tenuta il 7 maggio 1967) *

SUMMARY. — The paper consists of two parts. The first part is devoted to a discussion of the constitutive equations describing the dynamic properties of soils. In the second part, the relaxation problem in an elastic/visco-plastic soil is considered.

Il y a de nombreux problèmes de la mécanique des métaux et des sols qui sont très souvent considérés comme ceux de plasticité. Ces matériaux sont dans cette hypothèse représentés par un modèle idéalisé qui se comporte comme élastique jusqu'à un certain seuil de contrainte, pour lequel les premières déformations plastiques apparaissent (voir par exemple [2] et [5]). Les recherches expérimentales entreprises récemment ont prouvé d'une manière concluante que les corps en question accusent des effets rhéologiques marqués et sont sensibles à la variation de la vitesse de déformation [1], [5], [10]. Le but principal du présent mémoire est celui de décrire les propriétés rhéologiques d'une certaine classe de ces matériaux. On admet que le milieux examiné est purement élastique avant que l'état plastique soit atteint et devient, après avoir depassé cette limite, élasto/visco-plastique. L' idée générale est semblable à celle sur laquelle a été basée la description des propriétés des matériaux plastiques sensibles à la vitesse de déformation (voir [2], [9], [7], [8]).

* Pervenuta in tipografia il 22 marzo 1968.

Dans ce qui suit, nous établirons d'abord les équations constitutives qui décrivent le comportement des milieux elasto/visco-plastiques. Nous analyserons ensuite le processus de relaxation dans un état triaxial de contrainte. L' intégration des équations correspondantes est basée sur un procédé d' itération.

1. Equations constitutives.

Introduisons la fonction de plasticité statique sous la forme

$$F = \frac{\alpha J_1 + J_2^{1/2}}{k} - 1 \,, \tag{1.1}$$

où α est la constante de dilatation volumétrique, k une quantité positive, et J_1 et J_2 le premier et second invariant du tenseur de déviation.

Nous admettons que les propriétés du milieu élasto/visco-plastique en question peuvent être décrites par les équations constitutives suivantes

2) $$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{S}_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E}\dot{\sigma}_m \delta_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left[\frac{\alpha J_1 + J_2^{1/2}}{k} - 1 \right] \right\rangle \left(\alpha \delta_{ij} + \frac{S_{ij}}{2 J_2^{1/2}} \right)$$

où ε_{ij} et σ_{ij} sont les composantes du tenseur de déformation et de contrainte; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$; μ, E sont les constantes élastiques, et γ le coefficient de viscosité du matériau. Un point au-dessus du symbole désigne la differentiation par rapport au temps. Le symbole $\langle \Phi(F) \rangle$ est défini comme suit

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} \Phi(F) & \text{pour } F > 0 \\ 0 & \text{pour } F \leq 0 \,. \end{cases} \tag{1.3}$$

La fonction $\Phi(F)$ doit être choisie de manière à représenter les résultats des essais portant sur le comportement du corps sous l' influence d'une sollicitation dynamique.

Les relatbions (1.2) ont été établies dans l'hypothèse que la vitesse des composantes inélastiques du tenseur de déformation est une fonction du tenseur d'excès dépassant la condition statique de plasticité. Cette fonction du tenseur d'excès au-dessus de la condition statique engendre la vitesse de formation inélastique selon une loi de viscosité du type Maxwell. La partie élastique du tenseur de déformation est considéré independante de la vitesse de déformation.

Pour pouvoir analyser les équations constitutives (1.2) d'une manière plus exacte, considérons la partie inélastique de la vitesse de déformation

$$\dot{\varepsilon}^{P}_{ij} = \gamma \Phi \left[\frac{\alpha J_1 + J_2^{1/2}}{k} - 1\right] \left(\alpha\delta_{ij} + \frac{S_{ij}}{2 J_2^{1/2}}\right). \tag{1.4}$$

En prenant les carrés de deux cotés de l'équation (1.4) et en introduisant le symbole $I^{P}_{2} = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^{P}_{ij} \dot{\varepsilon}^{P}_{ij}$ pour le second invariant du tenseur de déformation inélastique, nous obtenons

$$I^{P}_{2} = \frac{1}{2} \gamma^2 \Phi^2 \left[\frac{\alpha J_1 + J_2^{1/2}}{k} - 1\right] \left(3 \alpha^2 + \frac{1}{2}\right). \tag{1.5}$$

Selon (1.5) nous avons

$$\alpha J_1 + J_2^{1/2} = k \left\{1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(I^{P}_{2})^{1/2}}{\gamma} \left(\frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}. \tag{1.6}$$

Cette expression représente la condition de plasticité dynamique pour un milieu élasto/visco-plastique et décrit la dépendance de la condition de plasticité de la vitesse de déformation.

On déduit des équations (1.2) et (1.6), que le tenseur de vitesse de déformation considéré comme un vecteur dans un espace de contraintes à neuf dimensions, est toujours dirigé le long de la normale aux surfaces successives de plasticité.

Dans le cas limite, pour $\gamma \to \infty$, nous obtenons de (1.2) les équations constitutives connues pour un milieux élasto-plastique (voir D. C. Drucker et W. Prager [1]):

$$\dot{\varepsilon}^{P}_{ii} = \lambda \left[\alpha\delta_{ij} + S_{ij}/2 J_2^{1/2}\right], \tag{1.7}$$

où

$$\lambda = \left(\frac{I^{P}_{2}}{\frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{1}{4}}\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

Un trait significatif des équations (1.2) est que la vitesse de déformation inélastique volumetrique est égale à

$$\dot{\varepsilon}^{P}_{ii} = 3 \alpha \gamma \Phi \left[\frac{\alpha J_1 + J_2^{1/2}}{k} - 1\right]. \tag{1.9}$$

L'équation (1.9) montre qu'une déformation inélastique doit oligatoirement être accompagnée d'un accroissement du volume, si $\alpha \neq 0$. Cette propriété est connue sous le nom de dilatation.

Dans le cas limite ($\gamma \rightarrow \infty$), la vitesse de dilatation plastique volumétrique est exprimée par la relation (voir D. C. Drucker et W. Prager [1]):

$$\dot{\varepsilon}_{ii}^{P} = 3\,\alpha\,\lambda\,. \tag{1.10}$$

Il est intéressant d'observer, que les équations obtenues ne sont valables que pour une vitesse de déformation différente de zéro.

2. Le processus de Relaxation.

Pour discuter le phénomène de relaxation pour des états triaxiaux de contrainte, considérons un milieu elasto/visco-plastique remplissant l'espace tridimensionnel V, limité par une surface regulière S, et étudions le problème aux limites suivant (voir [7]). Considérons d'abord un processus de chargement, dans lequel les tractions extérieures T_i sont données sur toute la surface S. Ce processus doit être suivi par un phénomène de relaxation, pour lequel les vitesses de surface v_i disparaissent (sur la surface entière S).

Si un essai de relaxation doit fournir des informations utiles sur les équations constitutives, les états de contrainte et de déformation doivent être homogènes; donc la condition du processus de relaxation est la suivante:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = 0\,. \tag{2.1}$$

Supposons qu'au cours du processus de chargement un certain état de contrainte $\sigma_{ij}^{(0)}$, au moment $t = 0$, ait été atteint; celui-ci doit être suivi d'un processus de relaxation.

De (1.2) et (2.1) nous tirons, pour s_{ij} et σ_m, un système de six équations différentielles sous la forme suivante:

$$\frac{\dot{S}_{ij}}{2\,\mu} + \frac{1-2\,\nu}{E}\,\dot{\sigma}_m\,\delta_{ij} + \gamma\Phi\left[\frac{\alpha\,J_1 + J_2^{1/2}}{k} - 1\right]\left(\alpha\delta_{ij} + \frac{S_{ij}}{2\,J_2^{1/2}}\right) = 0. \tag{2.2}$$

Il est interessant d'étudier, pour un processus de relaxation, la variation des invariants J_1 et J_2. Les equations (2.2) nous conduisent à deux équations différentielles pour J_1 et J_2:

$$\begin{aligned} &\dot{J} + 3\,\frac{E\,\gamma\alpha}{1-2\,\nu}\,\Phi\left[\frac{\alpha\,J_1 + J_2^{1/2}}{k} - 1\right] = 0\,, \\ &\dot{J}_2 + 2\,\mu\,\gamma\Phi\left[\frac{\alpha\,J_1 + J_2^{1/2}}{k} - 1\right]\sqrt{J_2} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ces équations peuvent être reduites à deux équations intégrales non-linéaires de Volterra de deuxième espèce

$$(2.4)\quad \begin{aligned} J_1 &= J_1^{(0)} - 3\,\frac{E\,\gamma\alpha}{1-2\,\nu}\int_0^t \Phi\left[\frac{\alpha\,J_1(\xi)+J_2^{1/2}(\xi)}{k}-1\right]d\xi\,, \\ J_2 &= J_2^{(0)} - 2\,\mu\gamma\int_0^t \sqrt{J_2(\xi)}\;\Phi\left[\frac{\alpha\,J_1(\xi)+J_2^{1/2}(\xi)}{k}-1\right]d\xi\,. \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse que les deux intégrants satisfont à la condition de Lipschitz, on peut obtenir la solution du système d'équations (2.4) par un procédé d'itération. En employant les formules de recurrence

$$(2.5)\quad \begin{aligned} J_1^{(n+1)} &= J_1^{(0)} - 3\,\frac{E\,\gamma\alpha}{1-2\,\nu}\int_0^t \Phi\left[\frac{a\,J_1^{(n)}(\xi)+(J_2^{(n)}(\xi))}{k}-1\right]d\xi\,, \\ J_2^{(n+1)} &= J_2^{(0)} - 2\,\mu\gamma\int_0^t \sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}\;\Phi\left[\frac{\alpha\,J_1^{(n)}(\xi)+(J_2^{(n)}(\xi))^{1/2}}{k}-1\right]d\xi\,, \end{aligned}$$

la solution des équations (2.3) s'écrit sous la forme

$$(2.6)\qquad J_1 = \lim_{n\to\infty} J_1^{(n)}(t)\,,\qquad J_2 = \lim_{n\to\infty} J_2^{(n)}(t)\,.$$

3. Généralization.

Introduisons maintenant la fonction de plasticité statique sous une forme plus générale

$$(3.1)\qquad F = \frac{f(J_1\,,\,J_2\,,\,J_3)}{c} - 1\,,$$

ou J_3 est le troisième invariant de la déviation de contrainte et c une constante. Dans ce cas les équations constitutives pour un milieu élasto/visco-plastique peuvent être écrites comme suit

$$(3.2)\quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\,\mu}\,\dot S_{ij} + \frac{1-2\,\nu}{E}\,\sigma_m\,\delta_{ij} + \gamma\left\langle\Phi\left[\frac{f(J_1\,,\,J_2\,,\,J_3)}{c}-1\right]\right\rangle\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}.$$

Les équations constitutives (3.2) donnent le critère de plasticité dynamique suivant

$$(3.3)\quad f(J_1\,,\,J_2\,,\,J_3) = c\left\{1+\Phi^{-1}\left[\frac{\left(I_2^{\mathrm{P}}\right)^{1/2}}{\gamma}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\,\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

La vitesse de la déformation inélastique volumétrique est maintenant

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ii} = \gamma \Phi \left[\frac{f J_1 , J_2 , J_3)}{c} - 1 \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} . \tag{3.4}$$

D'une manière analogue, il est intéressant d'étudier la variation des trois invariants J_1, J_2 et J_3.

Pour un processus de relaxation les conditions (2.1) conduisent à un système de trois équations differentielles pour J_1, J_2 et J_3:

$$\begin{aligned} &\dot{J}_1 + 3 \frac{\gamma E}{1 - 2\nu} \Phi \left[\frac{f(J_1 , J_2 , J_3)}{c} - 1 \right] \frac{\partial f}{\partial J_1} = 0 , \\ &\dot{J}_2 + 4 \mu\gamma \Phi \left[\frac{f(J_1 , J_2 , J_3)}{c} - 1 \right] \left[\frac{\partial f}{\partial J_2} J_2 + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial J_3} J_3 \right] = 0 , \\ &\dot{J}_3 + 6 \mu\gamma \Phi \left[\frac{f(J_1 , J_2 , J_3)}{c} - 1 \right] \left[\frac{\partial f}{\partial J_2} J_3 + \frac{\partial f}{\partial J_3} g(J_2 , J_3) \right] = 0 . \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $g(J_2 , J_3)$ est une fonction connue.

En introduisant les notations

$$\begin{aligned} &\beta_1 (J_1 , J_2 , J_3) = 3 \frac{\gamma E}{1 - 2\nu} \Phi(F) \frac{\partial f}{\partial J_1} , \\ &\beta_2 (J_1 , J_2 , J_3) = 4 \mu\gamma \Phi (F) \left[\frac{\partial f}{\partial J_2} J_2 + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial J_3} J_3 \right] , \\ &\beta_3 (J_1 , J_2 , J_3) = 6 \mu\gamma \Phi (F) \left[\frac{\partial f}{\partial J_2} J_3 + \frac{\partial f}{\partial J_3} g(J_2 , J_3) \right] , \end{aligned} \tag{3.6}$$

et en assumant que les fonctions β_1, β_2 et β_3 satisfont aux inégalités de Liptchitz, nous pouvons écrire la solution des équations (3.5) sous la forme

$$J_1 = \lim_{n \to \infty} J_1^{(n)}(t) , \qquad J_2 = \lim_{n \to \infty} J_2^{(n)}(t) , \qquad J_3 = \lim_{n \to \infty} J_3^{(n)}(t) , \tag{3.7}$$

où

$$\begin{aligned} &J_1^{(n+1)} = J_1^{(0)} - \int_0^t \beta_1 [J_1^{(n)}(\xi) , J_2^{(n)}(\xi) , J_3^{(n)}(\xi)] \, d\xi , \\ &J_2^{(n+1)} = J_2^{(0)} - \int_0^t \beta_2 [J_1^{(n)}(\xi) , J_2^{(n)}(\xi) , J_3^{(n)}(\xi)] \, d\xi , \\ &J_3^{(n+1)} = J_3^{(0)} - \int_0^t \beta_3 [J_1^{(n)}(\xi) , J_2^{(n)}(\xi) , J_3^{(n)}(\xi)] \, d\xi \end{aligned} \tag{3.8}$$

réprésentant les formules de recurrence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. C. DRUCKER and W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*. Quart. Appl. Math., 10, 1962, 157.

[2] K. HOHENEMSER and W. PRAGER, *Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua*. Z.A.M.M., 12, 1932, 216.

[3] W. OLSZAK, *On some basic aspects of the theory of non-homogeneous loose and cohesive media*. Arch. Mech. Stos., No 6, 1960, 751.

[4] W. OLSZAK, *Sur la théorie des phénomènes visco-plastiques*. Bull. Acad. Polon. Sci., 14 (1966), 29, 37.

[5] W. OLSZAK, Z. MRÓZ and P. PERZYNA, *Recent trends in the development of the theory of plasticity*. Pergamon Press -PWN, Oxford-Warszawa 1963.

[6] W. OLSZAK and P. PERZYNA, *On elastic/visco-plastic soils*. IUTAM Symposium Grenoble, Springer, 1966, p. 47.

[7] P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*. Quart. Appl. Math., 20, 1963, 321.

[8] P. PERZYNA, *The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials*. Proc. Vibr. Probl., 4, 1963, 281.

[9] W. PRAGER, *Introduction to mechanics of continua*. Ginn and Company, Boston 1961.

[10] KH. A. RAKHMATULIN, N. A. ALEKSEEV and A. J. SAGOMONYAN, *On fundamental equations of soil dynamics*. Zhurn. Prikl. Mekh. and Mekh. Fiz., No 2, 1963, 147.