

MAGNETYCZNE TŁUMIENIE DRGAŃ OSCYLATORA HARMONICZNEGO

PIOTR PRZYBYŁOWICZ, TOMASZ SZMIDT

*Institut Podstaw Budowy Maszyn, Politechnika Warszawska
e-mail: tomasz.szmidt@gmail.com*

Streszczenie. Oscylator harmoniczny zawieszony pomiędzy dwoma elektromagnesami może być skutecznie tłumiony magnetycznie. Postać drgań, charakter tłumienia, liczba i stateczność punktów równowagi zależą od napięcia załączonego do elektromagnesów. Drgania wymuszone w pewnych warunkach przypominają drgania chaotyczne. Wpływ histerezy magnetycznej jest pominięty.

1. WSTĘP

Jednym ze sposobów tłumienia drgań mechanicznych jest wykorzystanie elektromagnetycznych zjawisk indukcji oraz histerezy. Indukcja polega na wytwarzaniu prądu elektrycznego w przewodniku znajdującym się w zmiennym polu magnetycznym. Posiada ona precyzyjny opis ilościowy w postaci prawa indukcji Faradaya.

Histeresa magnetyczna w ferromagnetykach oznacza zależność namagnesowania próbki od wartości zewnętrznego pola magnetycznego, jakie występowało przez całą jej historię. Niestety, w chwili obecnej nie ma jednego powszechnie akceptowanego modelu opisującego to zjawisko. Rozważania na ten temat można znaleźć m. in. w monografiach [1], [7]. Z tego powodu w pracy pomijamy efekt histerezy magnetycznej.

Związek zjawisk elektromagnetycznych i drgań mechanicznych ujawnił się m. in. w zagadnieniu stabilizacji wirników, zob. [2], [3], [4], [5]. Wykorzystamy pochodzący tych prac pomysł domknięcia obwodu magnetycznego zwoją.

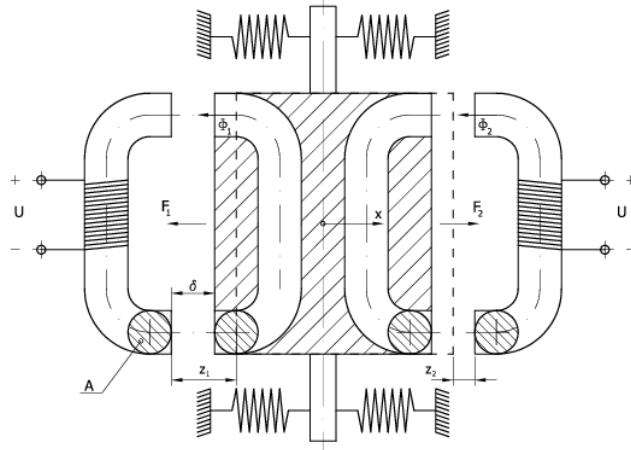
2. OPIS UKŁADU

Pomiędzy dwoma identycznymi elektromagnesami umieszczony jest oscylator harmoniczny o sztywności k [N/m] i masie $m=0,9$ [kg] (rys. 1). Wewnątrz oscylatora znajdują się żelazne rdzenie, tworzące wraz z elektromagnesami obwody magnetyczne, oba o długości $l=0,4$ [m] i przekroju poprzecznym $A=0,000314$ [m²]. Na rdzeń każdego z elektromagnesów nawiniętych jest $N=1200$ zwojów drutu o oporze $R=8,16$ [Ω], do których podłączone jest stałe napięcie U [V]. Szczeliny pomiędzy zwoją i elektromagnesami wynoszą $z_1=\delta+x$, $z_2=\delta-x$, gdzie $\delta=0,01$ [m], a $x \in [0, \delta]$ jest ograniczonym mechanicznie wychyleniem zwoju w kierunku prawego elektromagnesu. Zmienianymi parametrami są sztywność sprężyny k i napięcie U .

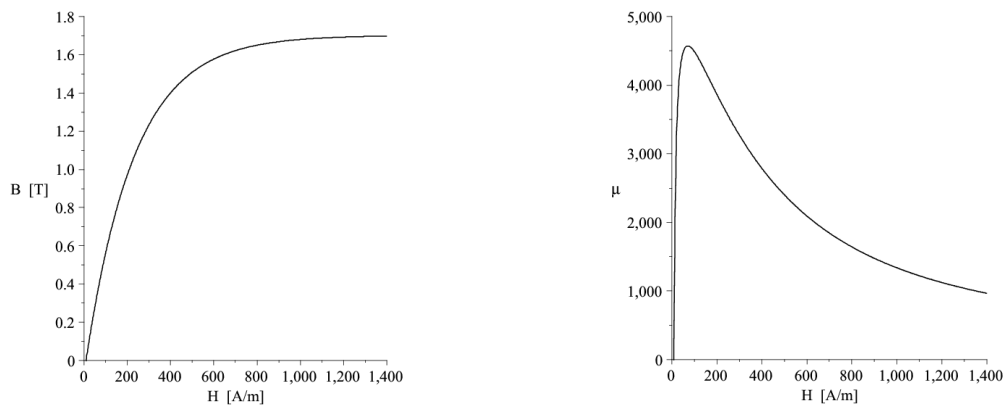
Jako model pierwotnej krzywej namagnesowania żelaza, z którego wykonane są rdzenie, przyjmujemy funkcję

$$B(H) = 1,7 - 1,65 \exp\left(-\frac{H-16}{225}\right) + \mu_0 H, \quad H \geq 16, \quad (1)$$

gdzie H [A/m] oznacza natężenie pola magnetycznego, B [T] jest gęstością strumienia magnetycznego (indukcją pola), a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [Tm/A] jest przenikalnością magnetyczną próżni. Krzywa ta uwzględnia zjawisko nasycenia magnetycznego i pozwala zdefiniować względną przenikalność magnetyczną $\mu(H) = B(H)/(\mu_0 H)$, mówiącą jak silnie żelazo wzmacnia pole magnetyczne w stosunku do próżni (rys. 2).



Rys. 1. Badany układ – oscylator umieszczony pomiędzy elektromagnesami



Rys. 2. Pierwotna krzywa magnesowania i krzywa względnej przenikalności magnetycznej

3. STATYKA – SIŁY, PRZENIKALNOŚĆ MAGNETYCZNA

Z praw Ampère'a oraz Gaussa dla pól magnetycznych wynika, że natężenia pola magnetycznego w rdzeniach elektromagnesów zadane są równaniami

$$H_n = \frac{N i_n}{2\mu(H_n) z_n + l}, \quad n = 1, 2, \quad (2)$$

gdzie i_n , $n=1,2$ [A] oznaczają prądy w uzwojeniach elektromagnesów. Równanie to posiada dokładnie jedno rozwiązanie $H_n \geq 16$, jeśli i_n jest dostatecznie duże. Dla dowodu skorzystamy z własności Darboux funkcji

¹ Dla uproszczenia modelu określamy krzywą magnesowania dla $H \geq 16$ [A/m], co oznacza, że napięcie U musi być dostatecznie duże (w praktyce wystarczy powyżej 15 V).

$$\varphi(H) = \frac{\mu_0 Ni}{2B(H)z + \mu_0 lH} - 1, \quad H \geq 16.$$

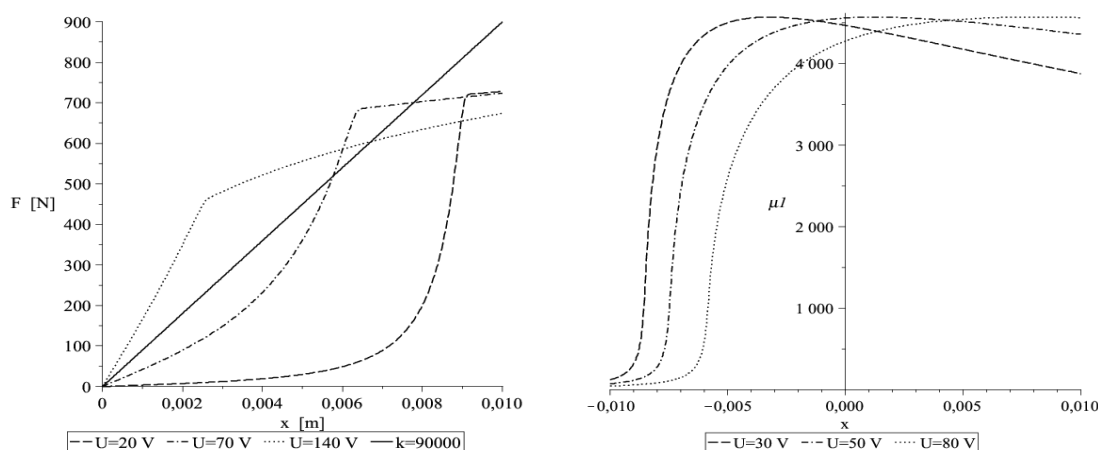
Ponieważ $\lim_{H \rightarrow \infty} \varphi(H) = -1$ oraz $\varphi(\cdot)$ jest ciągła i ściśle malejąca, więc posiada dokładnie jedno miejsce zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(16) \geq 0$. Korzystając z tego, że $z \leq 2\delta$, otrzymujemy warunek $i \geq 1,34$.

Znając pole magnetyczne, możemy wyliczyć siłę, z jaką każdy z elektromagnesów przyciąga oscylator. Różniczkując energię potencjalną zmagazynowaną w polu magnetycznym szczeliny, otrzymujemy

$$F_n = 2 \frac{dU_{Bn}}{dz_n} = \frac{\Phi_n^2}{\mu_0 A}, \quad n = 1, 2. \quad (3)$$

Wypadkową siłę magnetyczną $F = F_2 - F_1$ oraz siłę od sprężyny przedstawia rys. 3 (z lewej). Dla dużych wychyleń oscylatora występuje nasycenie magnetyczne prawego rdzenia, objawiające się spowolnieniem tempa wzrostu siły magnetycznej. Liczba i stateczność położenia równowagi układu zmienia się wraz z napięciem U . Możliwe są sytuacje: (1) zerowe położenie stateczne, (2) zerowe położenie stateczne, dwa niezerowe położenia niestateczne i dwa stateczne, (3) zerowe położenie niestateczne i dwa niezerowe położenia stateczne.

Wykres względnej przenikalności magnetycznej żelaza w lewym rdzeniu (rys. 3, z prawej) pokazuje, że w pewnych warunkach możliwe jest przybliżenie $\mu(H) \approx \mu^* = 4000$. Pozwala to wyrazić natężenia pola magnetycznego w rdzeniach jawnymi wzorami.



Rys. 3. Siła magnetyczna i siła od sprężyny (z lewej) oraz względna przenikalność magnetyczna lewego rdzenia (z prawej) w zależności od napięcia i wychyleń oscylatora

4. RÓWNANIA ELEKTROMAGNETODYNAMIKI, DRGANIA

Ruch oscylatora poddanego wymuszeniu siłowemu opisuje II prawo Newtona. Jeśli $U=0$, to siły magnetyczne znikają i oscylator wykonuje drgania nietłumione. Jeśli $U>0$, to elektromagnesy przyciągają oscylator, a ponadto jego ruch indukuje w uzwojeniach dodatkowy prąd, który – zgodnie z regułą Lenza – wytwarza pole magnetyczne przeciwdziałające zmianie pola wywołanej ruchem. Pojawia się siła tłumiąca wyrażająca się poprzez odpowiednią zmianę sił magnetycznych F_1 i F_2 .

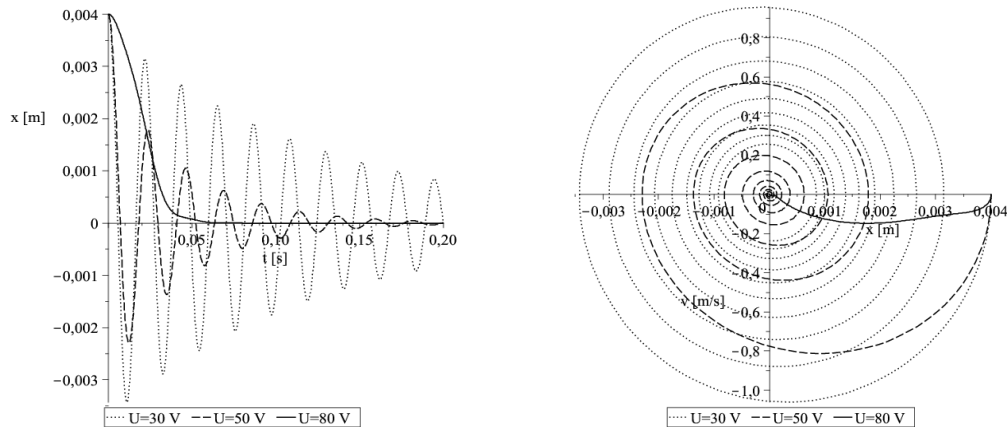
Zgodnie z prawem indukcji Faradaya indukowana w obwodach siła elektromotoryczna jest proporcjonalna do prędkości zmiany strumienia magnetycznego. Korzystając z II prawa Kirchhoffa, możemy zapisać równanie na prąd indukowany ruchem oscylatora. Otrzymujemy następujący nieliniowy układ równań różniczkowych, zadany w postaci niejawnej:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= \frac{1}{\mu_0 A} (\Phi_2^2 - \Phi_1^2) - kx + F_0 \sin(\omega t) \\ Ri_1 &= U - N\dot{\Phi}_1 \\ Ri_2 &= U - N\dot{\Phi}_2 \\ x(0) &= x_0, \quad v(0) = v_0, \quad i_1(0) = i_2(0) = U/R.\end{aligned}\tag{4}$$

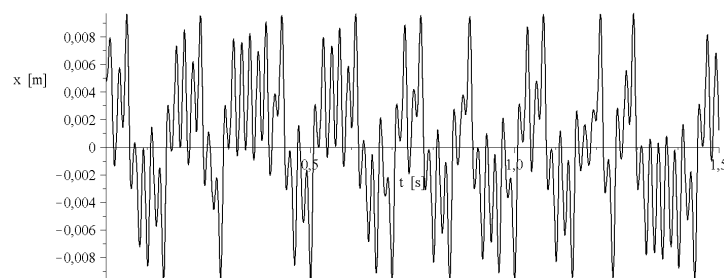
Powyżej $\Phi_n = \mu(H_n)\mu_0 H_n A$, gdzie $H_n = H_n(z(t), i_n(t))$ oznacza rozwiązanie równania (2) dla danych w chwili t wartości prądów i wychylenia.

Na rys. 4 widzimy, że wzrost napięcia zwiększa skuteczność tłumienia drgań swobodnych, aż do nadkrytycznego włącznie (drgania nie występują).

Na rys. 5 przedstawiona jest sytuacja, kiedy napięcie jest na tyle duże, że środkowe położenie oscylatora jest niestateczne, natomiast występują dwa symetryczne wychylone położenia stateczne. Drgania wymuszone odpowiednio dobraną siłą harmoniczną mają wówczas charakter chaotyczny, aczkolwiek dowód chaosu jest kwestią otwartą.



Rys. 4. Drgania zwory dla różnych napięć U ; $k=80000$ N/m, $F_0=0$, $x_0=0,004$ m, $v_0=0$



Rys. 5. Drgania zwory; $U=150$ V, $k=110000$ N/m, $F_0=150$ N, $\omega=2\pi\cdot 50$ rad/s, $x_0=x^*$, $v_0=0$

5. CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNE

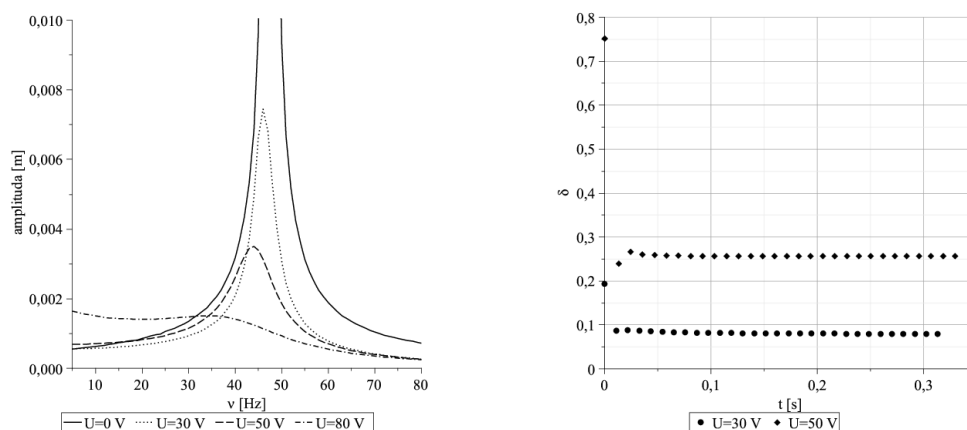
Przyjmijmy stałą przenikalność magnetyczną $\mu(\cdot) \approx \mu^* = 4000$, co jest uzasadnione dla następujących par napięcie / zakres wychylenia zwory: $30/\pm 0,0080$, $50/\pm 0,0065$, $80/\pm 0,0040$ (zob. rys. 3, z prawej). Dynamikę układu można wówczas zapisać równaniami zadanymi jawnie jak niżej.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\mu_0 AN^2}{m} \left[\frac{i_2^2}{(2(\delta-x)+l/\mu^*)^2} - \frac{i_1^2}{(2(\delta+x)+l/\mu^*)^2} \right] - \frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \\ \frac{di_1}{dt} &= \left[\frac{2v}{2(\delta+x)+l/\mu^*} - \frac{(2(\delta+x)+l/\mu^*)R}{\mu_0 AN^2} \right] i_1 + \frac{(2(\delta+x)+l/\mu^*)U}{\mu_0 AN^2} \\ \frac{di_2}{dt} &= \left[-\frac{2v}{2(\delta-x)+l/\mu^*} - \frac{(2(\delta-x)+l/\mu^*)R}{\mu_0 AN^2} \right] i_2 + \frac{(2(\delta-x)+l/\mu^*)U}{\mu_0 AN^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0, \quad i_1(0) = i_2(0) = U/R$$

Rozwiązując numerycznie równania (5), otrzymujemy charakterystyki dynamiczne układu. Na rys. 6 (z lewej) widzimy krzywe rezonansowe oscylatora. Mają one przebieg podobny jak w przypadku tłumienia wiskotycznego. Wzrost napięcie powoduje złagodzenie rezonansu (aż do zaniku tego zjawiska) oraz spadek częstotliwości rezonansowej poniżej częstotliwości drgań własnych.

Tłumienie magnetyczne przypomina wiskotyczne również pod względem logarytmicznego dekrementu tłumienia (rys. 6, z prawej). Kolejne punkty oznaczają logarytmy ilorazów maksymalnych wychyleń zwory różniących się o jeden okres. Po kilku cyklach następuje ich stabilizacja.



Rys. 6. Charakterystyk rezonansowe i logarytmiczny dekrement tłumienia dla różnych napięć; $k=80000$ N/m; z lewej: $F_0=40$ N, $x_0=0$, $v_0=0$; z prawej: $F_0=0$ N, $x_0=0,005$, $v_0=0$

6. STATECZNOŚĆ

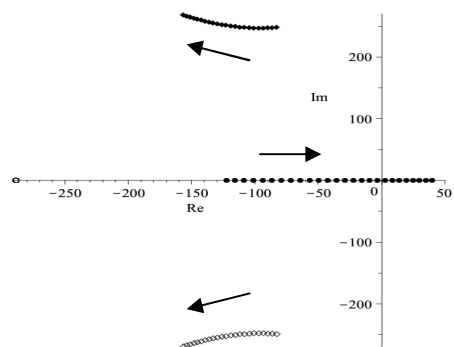
Zbadamy stateczność środkowego położenia równowagi układu, przy braku wymuszenia ($F_0=0$). Oznaczmy $u(t)=(x(t),v(t),i_1(t),i_2(t))$, $u^*=(0,0,U/R,U/R)$ oraz $F(u)$ jako prawą stronę układu równań (5). Wówczas układ zlinearyzowany można zapisać w postaci

$$\dot{u} = F'(u^*)(u - u^*), \quad u(0) = \left(x_0, v_0, \frac{U}{R}, \frac{U}{R} \right). \quad (8)$$

Na rys. 7 przedstawione są trajektorie wartości własnych macierzy $F'(u^*)$, parametryzowane napięciem $U=80..105$ [V], przy $k=80000$ [N/m], $x_0=0$, $v_0=0$.

Dla $U < U_{kryt} \approx 97,6$ [V] wszystkie cztery wartości własne mają ujemne części rzeczywiste, zatem u^* jest asymptotycznie statecznym rozwiązaniem stałym układu (5). Nieduże zaburzenie u^* wywoła gasnące z upływem czasu drgania.

Jeśli natomiast $U > U_{kryt}$, to jedna z wartości własnych ma dodatnią część rzeczywistą, zatem u^* jest niestateczny. Ponadto jej trajektoria przecina oś urojoną wzdłuż osi rzeczywistej, co oznacza, że mamy do czynienia z bifurkacją dywergentną (zob. [7]) – pojawiają się nowe rozwiązania równowagi z oscylatorem ściągniętym w stronę jednego z elektromagnesów.



Rys. 7. Wartości własne układu zlinearyzowanego

7. PODSUMOWANIE

Układ elektromagnetyczny umożliwia skuteczne tłumienie drgań oscylatora. Uzyskany efekt jest podobny do tłumienia wiskotycznego. Założenie stałej przenikalności magnetycznej żelaza pozwala zapisać równania ruchu w jawnej postaci, co przyspiesza ich rozwiązywanie, jednocześnie wnioski dotyczące tłumienia zostają zachowane. Wprowadzenie siły magnetycznej wpływa na zmiany właściwości dynamicznych układu – pojawiają się nowe punkty równowagi, występuje zmiana stateczności dotychczasowych. W pewnych warunkach odpowiedź układu poddanego wymuszeniu harmonicznemu przypomina drgania chaotyczne.

Celem dalszej pracy jest udowodnienie chaotycznego charakteru drgań i uwzględnienie zjawiska histerezy magnetycznej.

LITERATURA

1. Bertotti G.: Hysteresis in Magnetism. San Diego: Academic Press, 1998.
2. Dziedzic K.: Dynamika wirników z aktywnym tłumieniem magnetycznym w łożyskach. Rozprawa doktorska. Pol. Warszawska, Wydz. SiMR 2005.
3. Dziedzic K., Kurnik W.: Stability of a rotor with hybrid magnetohydrodynamic support. "Machine Dynamics Problems" 2002, Vol. 26, No. 4, s. 33-43.
4. Kurnik W.: Magnetic stabilization of a rotor with hydrodynamic bearings. "Machine Dynamics Problems" 1994, 7, s. 117-133.
5. Kurnik W.: Active magnetic antiwhirl control of a rigid rotor supported on hydrodynamic bearing. "Machine Dynamics Problems" 1995, 10, 1995, s. 21-36.
6. Kurnik W.: Bifurkacje dywergentne i oscylacyjne. Warszawa: WNT, 1997.
7. Nicolaide A.: Magnetism an magnetic materials: theory, properties, modeling. Transilvania University Press 2001.

MAGNETIC DAMPING OF HARMONIC OSCILLATOR

Summary. Vibrations of a harmonic oscillator suspended between electromagnets are efficiently damped magnetically. The character of vibrations and damping, as well as the properties of equilibrium states depend on the voltage applied to electromagnets. In the case of excited vibrations, the system response can be even chaotic. The effect of magnetic hysteresis is neglected.